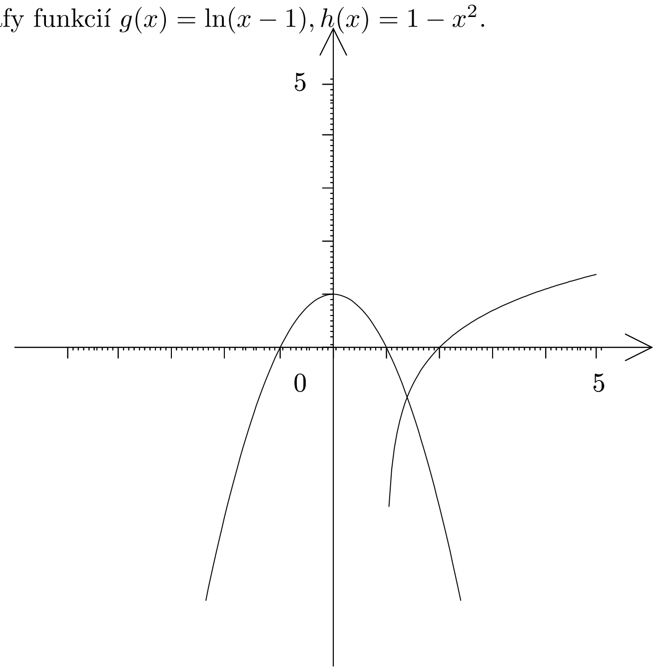
Skupina A

1. Najděte uzavřený interval, ve kterém existuje nějaké řešení rovnice (stačí jedno řešení)

$$\ln(x-1) + x^2 = 1.$$

a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou. *Jestliže použijete Newtonovu metodu, nebo metodu prosté iterace, najděte interval obsahující řešení, pro který je splněna podmínka konvergence – ověřte ji!!*

Riešenie. Nakreslíme si grafy funkcií $g(x) = \ln(x-1), h(x) = 1 - x^2$.



Z obrázku vidíme, že rovnica má jeden koreň, ktorý je z intervalu $(1, 2\rangle$. Pozor, nemôžeme brať uzavretý interval, číslo 1 totiž nemôžeme do rovnice dosadiť, čo by robilo problémy hlavne vtedy, ak si vyberiete vašu obľúbenú metódu bisekcie (půlení intervalu). Preto musíme dolnú hranicu posunúť doprava, ale nie príliš, inak by sa nám mohlo stať, že koreň rovnice bude mimo náš interval. Anulovaním rovnice si určíme funkciu $f(x)$, teda

$$f(x) = ln(x-1) + x^2 - 1.$$

Zrejme $f(2) > 0$, preto nová dolná hranica a musí mať zápornú funkčnú hodnotu. Skúsime napr. $a = 1.5$. Dosadením zistíme, že $f(1.5) > 0$, takže síce sme nenašli vhodnú dolnú hranicu, ale posunieme vľavo hornú hranicu ($b = 1.5$) a už vieme, že koreň je z intervalu $(1, 1.5\rangle$. Ďalej skúsime napr. $a = 1.1$ a teraz máme šťastie, lebo $f(1.1) < 0$. Teda vieme, že koreň je z intervalu $\langle 1.1, 1.5\rangle$ a slabšie povahy už môžu použiť metódu bisekcie. Samozrejme, mohli ste nájsť aj iný vhodný interval. Kto sa dopracoval až sem, má 1 bod za správny obrázok a 4 body za správne určenie uzavretého intervalu. Mnohí však ignorovali to, že $\ln(1-1) = \ln 0$ a to nie je definované. V takom prípade sa asi nebudú čudovať, keď za tento výkon dostanú 0 bodov. Ešte pre milovníkov bisekcie-ak ste poplietli podmienku ukončenia výpočtu, určite sa to odrazilo na celkovom hodnotení.

My budeme koreň hľadať Newtonovou metódou. Budeme si teda všímať na intervale $\langle 1.1, 1.5\rangle$ funkciu $f(x)$ a jej prvú a druhú deriváciu. Zrejme

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + 2x,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + 2.$$

Obidve funkcie sú na intervale $\langle 1.1, 1.5\rangle$ spojité, lebo sú súčtami spojitých funkcií. Ak je $x \in \langle 1.1, 1.5\rangle$, tak $x - 1 > 0$, preto aj $\frac{1}{x-1} > 0$ a aj $2x > 0$. Preto $f'(x)$ je na tomto intervale kladná, teda nemení znamienko. Pre zistenie znamienka $f''(x)$ potrebujeme poznať $f'''(x)$. Zrejme $f'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$. Táto funkcia je na uvedenom intervale kladná, preto druhá derivácia je rastúca a teda na zistenie znamienka stačí zistiť funkčné hodnoty v krajných bodoch intervalu. Vy ste to (až na pár výnimiek) takto nerobili, čo sa potom prejavilo na celkovom hodnotení. Zistíme, že $f''(1.1) < 0$ a aj $f''(1.5) < 0$, preto vďaka monotónnosti vieme, že ani druhá derivácia na uvedenom intervale znamienko nemení. Keďže $f''(x) < 0$, preto musí aj $f(x_0) < 0$ a teda vyberieme za $x_0 = 1.1$. Potom

$$x_1 = 1.271523; \quad x_2 = 1.381857; \quad x_3 = 1.391737.$$

2. Zjistěte zda-li se jedná o kvadratický splajn:

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ 2x^2 + 2x + 1, & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 4x^2 + 1, & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

Riešenie. Vieme, že kvadratický splajn má byť spojitý a hladký. Funkcia $s(x)$ je spojitá, ale nie je hladká, teda jej prvá derivácia nie je spojitá. Spojitosť prvej derivácie je porušená v bode 1. Derivácia zľava je $s(x)'_l = 4x+2$, teda $s(1)'_l = 6$ a derivácia sprava je $s(x)'_r = 8x$, teda $s(1)'_r = 8$. *Pozor, odpoveď (hoci bude správna) bez zdôvodnenia nezíska žiadne body.*

3. Metodou Runge–Kutta 4. řádu řešte diferenciální rovnici

$$y' - y = e^x, y(1) = 2$$

na intervalu $\langle 1, 1.4 \rangle$ s krokem $h = 0.2$.

Riešenie. Rovnicu najskôr upravíme na tvar $y' = f(x, y)$, teda v našom prípade máme

$$y' = y + e^x.$$

Kto túto jednoduchú úpravu nezvládol, má 0 bodov za celú úlohu. Teraz stačí dosadiť do známych vzorcov a dostaneme:

n	x	y	k_1	k_2	k_3	k_4
0	1	2	4.718282	5.475994	5.551765	6.430470012
1	1.2	3.106809	6.426926	7.418798	7.517986	8.665606112
2	1.4	4.605679				

4. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padla šestka. Pravděpodobnost, že šestka padne při třetím hodu je $\frac{1}{36}$.
   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne při prvním a zároveň třetím hodu je $\frac{1}{36}$.
   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát je $\frac{1}{36}$.
   d) Máme 5 pravých a 2 falešní eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou od falešné eurobankovky s pravděpodobností $\frac{4}{5}$. Expert má v ruce jednu bankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za falešnou je $\frac{8}{35}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

   Riešenie. Správne výsledky sú:

   a) $\frac{1}{6}$ (2 body)
   b) $\frac{1}{36}$ (2 body)
   c) $\frac{1}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \binom{5}{2}$ (2 body)
   d) $\frac{13}{35}$ (4 body)

5. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 3, 7, 16, 22, 38, 345, 528\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel. Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly.

   - Určete střední hodnotu veličiny X.
   - Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje aspoň jedno prvočíslo.

   Riešenie. Zrejme sa jedná o binomické rozdelenie, preto sa nám výpočet strednej hodnoty značne zjednoduší. Samozrejme, kto chce trápiť seba a kalkulačku, môže sa k výsledku dopracovať aj oveľa komplikovanejšie. Teda

$$EX = n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{8} = 50. \quad (5 \text{ bodov})$$

Druhú časť budeme riešiť doplnkovým javom a teda si určíme pravdepodobnosť $P(B)$ toho, že generátor nevygeneruje žiadne prvočíslo. Teda, že bude generovať čísla z množiny $\{1, 16, 22, 38, 345, 528\}$. Zrejme

$$P(B) = \frac{6^{400}}{8^{400}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{400}.$$

Potom

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{400}. \quad (5 \ \text{bodov})$$

6. Najděte konstantu a tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} a(3x-6) & x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$

byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny, střední hodnotu a rozptyl.

Riešenie. Také a, aby $f(x)$ bola funkcia hustoty, neexistuje. Ak ste začali riešením rovnice $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, tak ste sa síce dopracovali k výsledku, ale ak ste si uvedomili, že funkcia hustoty musí byť nezáporná, tak ste spomínaný výsledok museli vylúčiť. Samozrejme, k tomuto záveru sa dalo prísť aj bez počítania integrálu, stačilo si nakresliť grafy funkcie $f(x)$ pre $a = 0, a > 0$ a $a < 0$. Kto sa s daným výsledkom uspokojil, musí bohužial počítať s nulovým hodnotením celého príkladu.

7. Je známo, že hmotnost půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7,5kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 100 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku 9,5 kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,03$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

Riešenie. Najskôr si určíme kritické hodnoty pre $\alpha = 0.03$. Zrejme

$$1 - \Phi(u_v) = \frac{\alpha}{2} = 0.015.$$

Potom

$$u_v = 2.17. \quad (5 \quad \text{bodov})$$

Zistíme, či hodnota $U = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ je z intervalu $< -u_v, u_v >$, čo by znamenalo, že umelá výživa nemá vplyv na zvýšenú hmotnosť. Dosadíme

$$U = \frac{9.5 - 7.5}{1} \cdot \sqrt{100} = 20.$$

Zrejme U do uvedeného intervalu nepatrí, teda umelá výživa má štatisticky významný vplyv na hmotnosť. (5 bodov)