1 Numerické metody

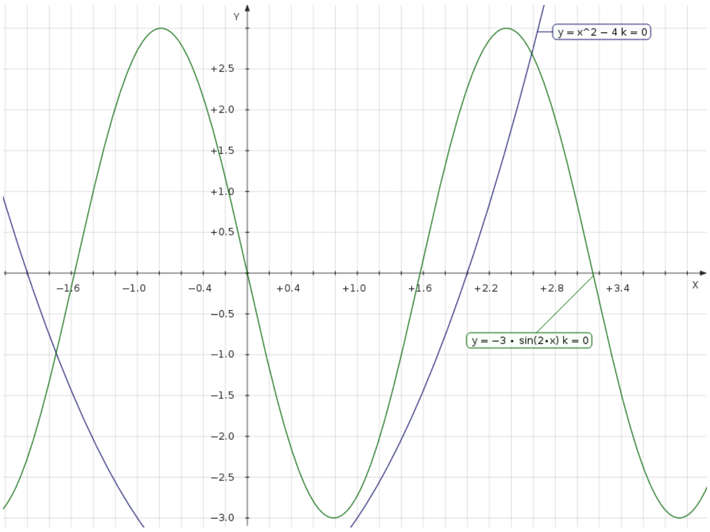
Zaokrouhlujte na 5 desetinných míst!

1.1 Příklad 1

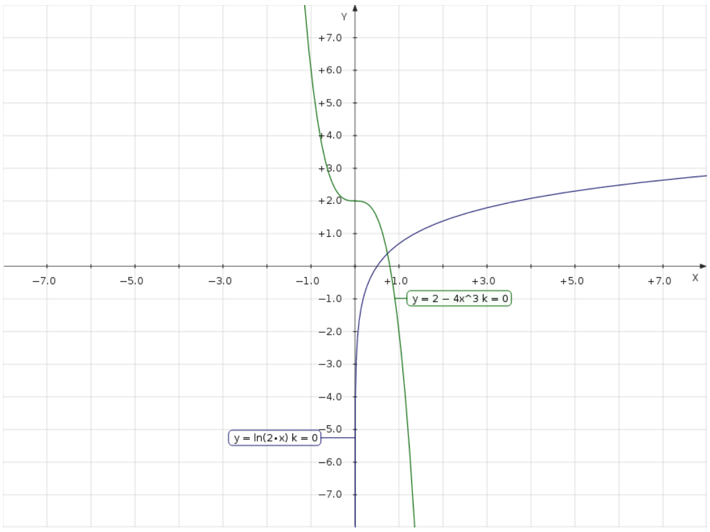
1.1.1 Zadání

Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 3\,sin\,2x - 4 = 0$ a dále $ln\,2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0,01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

1.1.2 Řešení



Obrázek 1: $x^2 - 4 = -3\,sin\,2x$



Obrázek 2: $ln\,2x = 2 - 4x^3$

Zkusíme nejprve rovnici $x^2+3\,sin\,2x-4 = 0$. Ta je na daném intervalu spojitá a definovaná. Pokud platí výraz $f(a)\cdot f(b) < 0$, existuje alespoň jeden kořen na daném intervalu. Po dosazení a vypočítání bylo ovšem zjištěno, že $f(0)\cdot f(1) \not< 0$. Takto není ovšem vyloučeno, že se na intervalu nenachází sudý počet řešení (stále nevíme, zda-li kořen existuje či nikoli). Nejjasnější a nejjednodušší pomůckou je jednu funkci rozdělit na dvě sobě rovné v bodě, které již umíme nakreslit. Tedy např. $x^2 - 4 = -3\,sin\,2x$. Podle obrázku 1 je již jasné, že na daném intervalu není ani jeden kořen.

Stejně tak si můžeme ověřit druhou rovnici $ln\,2x + 4x^3 - 2 = 0$. U ní by mohlo leckoho vystrašit to, že $ln\,0$ je mimo její definiční obor, ovšem je spojitá a posuneme-li levou stranu intervalu do $\lim \to 0$, např. na $\langle 1\cdot 10^{-99}, 1\rangle$, pak zjistíme, že $f(1\cdot 10^{-99})\cdot f(1) < 0$, tedy je zaručeno, že alespoň jeden kořen se na tomto intervalu nachází, jak i dosvědčuje obrázek 2.

Nyní již můžeme počítat jakoukoli numerickou metodou, např. metodou půlení intervalu. Tedy $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$, vybereme nový interval splňující podmínku $f(a_k)\cdot f(b_k) < 0$ a zastavíme výpočet až $b_k - a_k < 2\varepsilon$.

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$	$b_k - a_k$
0	$1\cdot 10^{-99}$	1	0,5	−	+	−	1
1	0,5	1	0,75	−	+	+	0,5
2	0,5	0,75	0,625	−	+	−	0,25
3	0,625	0,75	0,6875	−	+	−	0,125
4	0,6875	0,75	0,71875	−	+	−	0,0625
5	0,71875	0,75	0,73438	−	+	−	0,03125
6	0,73438	0,75	0,74219	−	+	+	0,01563

Protože $b_6 - a_6 < 2\varepsilon$, pak tedy $x \approx x_6 \doteq \underline{\underline{0,74219}}$.

1.2 Příklad 2

1.2.1 Zadání

Je dána soustava rovnic:

$$2x + 20y + 3z = 12$$
$$2x - 2y - 41z = 21$$
$$ax + 22y - 44z = 33$$

Z nabídky $a = 4$, $a = 88$ vyberte tu hodnotu pro kterou má soustava právě jedno řešení (volbu zdůvodněte). Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

1.2.2 Řešení

Soustavu rovnic přepíšeme do matice a pro oba případy vypočítáme pomocí Sarrusova pravidla determinant.

$$\begin{bmatrix} 2 & 20 & 3 \\ 2 & -2 & -41 \\ 4 & 22 & -44 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 20 & 3 \\ 2 & -2 & -41 \\ 88 & 22 & -44 \end{bmatrix}$$

$$D = 2\cdot(-2)\cdot(-44) + 2\cdot 22\cdot 3 + 4\cdot 20\cdot(-41) - [3\cdot(-2)\cdot 4 + (-41)\cdot 22\cdot 2 + (-44)\cdot 20\cdot 2] = \underline{616}$$

$$D = 2\cdot(-2)\cdot(-44) + 2\cdot 22\cdot 3 + 88\cdot 20\cdot(-41) - [3\cdot(-2)\cdot 88 + (-41)\cdot 22\cdot 2 + (-44)\cdot 20\cdot 2] = \underline{-67760}$$

Nyní vidíme, že obě matice mají právě jedno řešení, protože u obou je determinant $D \neq 0$. Vybereme tedy tu, která je řádkově nebo sloupově ostře diagonálně dominantní (tzn. $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|;\ \forall i$ nebo $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ji}|;\ \forall i$). U první matice, kde $a = 4$, je podle prvního sloupce jasné, že tuto podmínku nesplňuje. Druhá matice po přeskládání řádkově ostře diagonálně dominantní je. Nemusíme tedy násobit matici (tedy $A^TAx = A^Tb$) proto, abychom měli matici pozitivně definitní (aby platilo Sylvestrovo kritérium) a tedy ani nemusíme použít G-S metodu.

$$\begin{bmatrix} 88 & 22 & -44 \\ 2 & 20 & 3 \\ 2 & -2 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} |88| &> |22| + |-44| \\ |2| &> |20| + |3| \\ |2| &> |-2| + |-41| \end{aligned}$$

Protože máme udělat jen jeden krok a $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$, je tedy jednodušší použít Jacobiho metodu.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \tfrac{1}{88}\left(33 - 22y^{(0)} - (-44)z^{(0)}\right) = \tfrac{33}{88} \\ y^{(1)} &= \tfrac{1}{20}\left(12 - 2x^{(0)} - 3z^{(0)}\right) = \tfrac{12}{20} \\ z^{(1)} &= \tfrac{1}{-41}\left(21 - 2x^{(0)} - (-2)y^{(0)}\right) = \tfrac{21}{-41} \end{aligned}$$

$$x^{(1)} = \underline{\underline{0,375}} \qquad y^{(1)} = \underline{\underline{0,6}} \qquad z^{(1)} \doteq \underline{\underline{0,51220}}$$

1.3 Příklad 3

1.3.1 Zadání

Je dána počáteční úloha $y' - y = e^x$, $y(1) = 2$. S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1,8)$ Eulerovou metodou.

1.3.2 Řešení

$f(x_n, y_n) = e^x + y$
$y_{n+1} = y_n + h\cdot f(x_n, y_n) \Longrightarrow y_{n+1} = y_n + 0,2\cdot(e^{x_n} + y_n)$
$x_{n+1} = x_n + h \Longrightarrow x_{n+1} = x_n + 0,2$

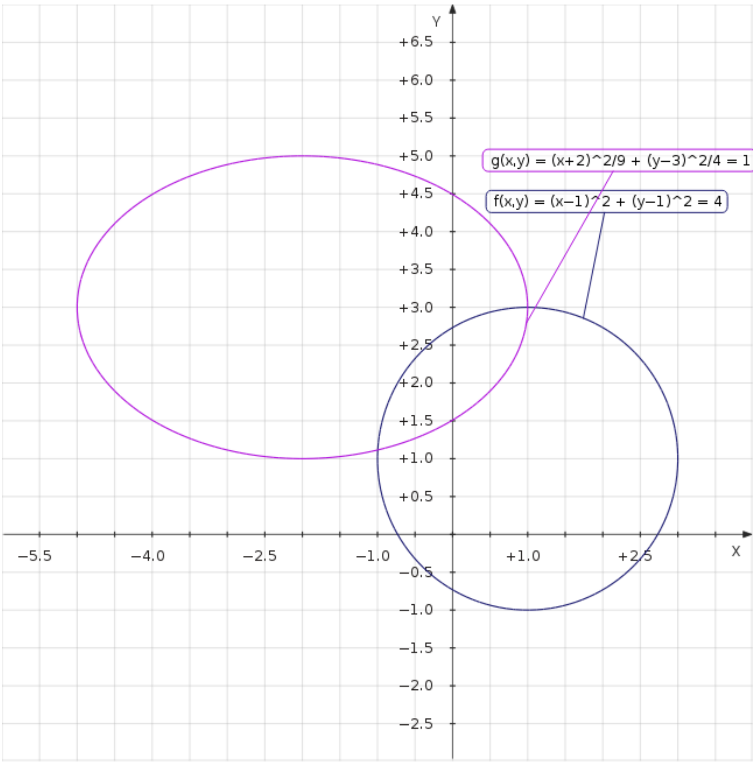
n	x_n	y_n
0	1	2
1	1,2	2,94366
2	1,4	4,19641
3	1,6	5,84673
4	1,8	8,00669

1.4 Příklad 4

1.4.1 Zadání

Jsou dány tyto dvě rovnice: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ a dále $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, které představují dva geometrické útvary v rovině. Chcete najít ten jejich průsečík, jehož složky jsou kladné. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k nalezení tohoto průsečíku. Za počáteční aproximaci přitom volte bod, jehož souřadnice jsou $[a, b]$, kde a je délka vedlejší poloosy elipsy a b je průměr kružnice. *Podmínky konvergence není nutné ověřovat.*

1.4.2 Řešení



Obrázek 3: Kružnice $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ a elipsa $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$.

První co je třeba je vytáhnout atributy geometrických útvarů z těchto dvou rovnic. Podle obecných rovnic (`Kružnice:` $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$; `Elipsa:` $(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$) a vysvětlivek (střed v bodě $[x_0, y_0]$; konstanta r je poloměr; konstanta a udává délku hlavní poloosy (na ose x) a b vedlejší (na ose y)) zapsaných v taháku zjistíme tyto informace.

Rovnice $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ je kružnice se středem v bodě $[1,1]$ a poloměrem $r = 2$. Rovnice $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ je elipsa se středem v bodě $[-2,3]$, s délkou hlavní poloosy (na ose x) $a = 3$ a vedlejší (na ose y) $b = 2$. Nyní si to můžeme zakreslit jak je znázorněno na obrázku 3. Bod pro počáteční aproximaci je tedy $[2,2]$.

Použijeme Newtonovou metodu: $x_0 = 2$; $y_0 = 2$

Soustava 2 nelineárních rovnic o 2 neznámých:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 &= 0 \\ \tfrac{(x+2)^2}{9} + \tfrac{(y-3)^2}{4} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 \\ f_2(x,y) &= \tfrac{(x+2)^2}{9} + \tfrac{(y-3)^2}{4} - 1 \end{aligned}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y-1) \\ \frac{2(x+2)}{9} & \frac{2(y-3)}{4} \end{pmatrix}$$

1. krok:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_0,y_0) \\ -f_2(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-2) \\ -\frac{37}{36} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2\delta_1 + 2\delta_2 &= 2 \\ \tfrac{8}{9}\delta_1 - \tfrac{1}{2}\delta_2 &= -\tfrac{37}{36} \end{aligned} \implies \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{2} & -\frac{37}{36} \end{array}\right]$$

$$D = detA = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left[2 \cdot \frac{8}{9}\right] = -\frac{25}{9}$$

Pro výpočet δ_1 a δ_2 použijeme Cramerovo pravidlo:

$$detA_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{37}{36} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{19}{18}$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \frac{8}{9} & -\frac{37}{36} \end{vmatrix} = -\frac{23}{6}$$

$$\delta_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{\frac{19}{18}}{-\frac{25}{9}} = -0,38 \qquad \delta_2 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{-\frac{23}{6}}{-\frac{25}{9}} = 1,38$$

$$x_1 = x_0 + \delta_1 = \underline{\underline{1,62}} \qquad y_1 = y_0 + \delta_2 = \underline{\underline{3,38}}$$

1.5 Příklad 5

1.5.1 Zadání

Při měření veličiny v, která závisí na veličině t podle vzorce $v = a + bt$, jsme zjistili následující údaje:

v	1	2	3,1	3,4	3,9	4	4
t	0,3	0,9	2,5	2,9	3,8	3,9	4,1

Metodou nejmenších čtverců určete konstanty a a b.

1.5.2 Řešení

Přepíšeme si tabulku aby nás nemátlo to, že v zastupuje y a t zastupuje x (viz $v = a + bt$).

t	0,3	0,9	2,5	2,9	3,8	3,9	4,1
v	1	2	3,1	3,4	3,9	4	4

Rovnice $v = a + bt$ odpovídá rovnici přímky $y = a + bx$. Je tedy jasné, že použijeme metodu nejmenších čtverců pro přímku. Máme vytvořit přímku, která aproximuje 7 bodů, tedy konstanta $n = 7 - 1 = 6$.

Pozn: Pro výpočet $\sum_{i=0}^{n} x_i$ a $\sum_{i=0}^{n} x_i^2$ na kalkulačce [MODE] $\rightarrow$ SD, [SHIFT] + [MODE](CLR) $\rightarrow$ Scl, $\forall x_i$ [DT], [AC] a [S-SUM] $\rightarrow \sum x$ a $\sum x^2$. Pro výpočet $\sum_{i=0}^{n} x_i y_i$ a $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i$ změnit každé "Freq$i$ =" na y_i, pak jen [AC] a [S-SUM] $\rightarrow \sum x$ a $\sum x^2$. Podobně pro výpočet $\sum_{i=0}^{n} x_i^3$ a $\sum_{i=0}^{n} x_i^4$.

Pro výpočet δ_1 a δ_2 použijeme Cramerovo pravidlo:

$$\begin{aligned} c_0(6+1) + c_1 18,4 &= 21,4 \\ c_0 18,4 + c_1 62,02 &= 66,53 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 18,4 & 21,4 \\ 18,4 & 62,02 & 66,53 \end{array}\right]$$

$$D = detA = 7 \cdot 62,02 - [18,4 \cdot 18,4] = 95,58$$

$$detA_1 = \begin{vmatrix} 21,4 & 18,4 \\ 66,53 & 62,02 \end{vmatrix} = 103,076$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 7 & 21,4 \\ 18,4 & 66,53 \end{vmatrix} = 71,95$$

$$c_0 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{103,076}{95,58} \doteq 1,07843$$

$$c_1 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{71,95}{95,58} \doteq 0,75277$$

$$a = c_0 \doteq \underline{\underline{1,07843}} \qquad b = c_1 \doteq \underline{\underline{0,75277}}$$

1.6 Příklad 6

1.6.1 Zadání

Pro náhodnou veličinu $U \sim No(0,1)$ určete jednoduchou Simpsonovou metodou $P(EU < U < 2DU)$. *Pro U platí, že hustota* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

1.6.2 Řešení

Jelikož standardizované normální rozdělení je definované jako $U \sim No(EU, DU)$, pak je tedy zřejmé, že $EU = 0$ a $DU = 1$. Po dosazení do $P(EU < U < 2DU)$ dostaneme $P(0 < U < 2)$. Jelikož $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, pak $P(0 < U < 2) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Jednoduchá Simpsonova metoda má předpis $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$. Tedy $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$
$= \frac{2-0}{6}\left(f(0) + 4f(\frac{0+2}{2}) + f(2)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{0^2}{2}} + 4e^{-\frac{1^2}{2}} + e^{-\frac{2^2}{2}}\right) \doteq \underline{\underline{0,47361}}$

1.7 Příklad 7

1.7.1 Zadání

Je dán polygon s následujícími vrcholy ve struktuře $[x, y]$: [1, 1], [2, 2], [3, 3], [5, 1], [6, 2], [5, −3], [4, −4], [2, −1]. Body, které leží nad osou x, proložte křivkou. Křivka musí být jen jedna a je možné ji udat ve tvaru součtu konstanta krát součin jednočlenů $(x - a_i)$ kde a_i jsou konkrétní čísla.

1.7.2 Řešení

Ze zadání "Body, které leží nad osou x, proložte křivkou." a "Křivka musí být jen jedna a je možné ji udat ve tvaru součtu konstanta krát součin jednočlenů $(x - a_i)$ kde a_i jsou konkrétní čísla." vyplývá, že máme proložit jen body $[x, y]$: [1, 1], [2, 2], [3, 3], [5, 1], [6, 2] a že na to máme použít Newtonův interpolační polynom.

i	x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
0	1	1	$\frac{2-1}{2-1} = 1$	$\frac{1-1}{3-1} = 0$	$\frac{-\frac{2}{3}-0}{5-1} = -\frac{1}{6}$	$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{6-1} = 0,1$
1	2	2	$\frac{3-2}{3-2} = 1$	$\frac{-1-1}{5-2} = -\frac{2}{3}$	$\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{6-2} = \frac{1}{3}$	
2	3	3	$\frac{1-3}{5-3} = -1$	$\frac{1+1}{6-3} = \frac{2}{3}$		
3	5	1	$\frac{2-1}{6-5} = 1$			
4	6	2				

Výsledek tedy je: $P_4(x) = 1 + 1(x-1) + 0(x-1)(x-2) + (-\frac{1}{6})(x-1)(x-2)(x-3) + 0,1(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$

1.8 Příklad 8

1.8.1 Zadání

Udejte příklad polynomu, který má alespoň 3 různá nenulová reálná řešení a zdůvodněte, proč má právě tato řešení. Poté libovolné z těchto řešení nalezněte Newtonovou metodou. Beze zbytku ověřte podmínky konvergence.

1.8.2 Řešení

Nejednodušší polynom bude $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Ten má řešení právě tehdy když $x = \{1, 2, 3\}$, protože v těchto hodnotách je $f(x) = 0$ a tedy má v nich kořeny.

Nyní budu hledat Newtonovou metodou řešení $x = 1$. Tato funkce spojitá po celé délce. Musíme tedy jen vybrat takový interval, kde $f'(x) \neq 0$ a současně $f''(x)$ nemění znaménko. Protože takto složitou funkci nejsme schopni sami nakreslit a z obrázku interval vybrat, musíme nejprve udělat 1. a 2. derivaci.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) = (x-1)(x^2-5x+6) = x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 11 \\ f''(x) &= 6x - 12 \end{aligned}$$

První derivace $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ je rovnicí paraboly a abychom se netrefili do kořenu můžeme kořeny nalézt podle kvadratické rovnice $ax^2+bx+c = 0$, kde kořeny vypočítáme vypočítáním diskriminantu $D = b^2 - 4ac$ a následným dosazením $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. `Pozn:` $f'(x)$ má určitě dva kořeny, protože maximálně musí mít dva kořeny kvůli tomu, že je parabola a protože minimálně musí mít dva kořeny kvůli tomu, že $f(x)$ má tři kořeny – tedy určitě $D > 0$. Tedy $f'(x)$ je rovno nule právě tehdy když $x \approx\in \{1,42265;\ 2,57735\}$. (Podle toho že druhá derivace je rovnicí přímky, jde toto odhadnout).

Druhá derivace $f''(x) = 6x - 12$ je rovna nule pro $x = 2$ a jelikož je rovnicí přímky pak lze lehce zjistit, že pro $x < 2$ je $f''(x) < 0$ a pro $x > 2$ je $f''(x) > 0$.

Nakonec tedy můžeme vybrat např. interval $\langle 0,9; 1,1 \rangle$, kde platí že $f'(x) > 0$ a $f''(x) < 0$. Nyní z intervalu vybereme počáteční aproximaci x_0 tak, aby byla splněna podmínka $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Protože $f(0,9) = -0,231$ a $f(1,1) = 0,171$, zvolíme $x_0 = 0,9$.

Nyní jsou všechny podmínky konvergence splněny a můžeme počítat:

$$x_0 = 0,9 \qquad x_2 \doteq 0,99978 \qquad x_4 = 1$$
$$x_1 \doteq 0,98783 \qquad x_3 \doteq 1,00000 \qquad x_5 = 1$$

Newtonovou metodou jsme tedy nalezli řešení $x = 1$.

1.9 Příklad 9

1.9.1 Zadání

Křivku $y = x^3 + x^2 - 4x + 2$ chcete v uzlových bodech $-1, 0, 1, 2$ nahradit přirozeným kubickým splajnem. Napište obecný tvar tohoto splajnu ve formátu dle skript a poté určete alespoň třetinu potřebných koeficientů a_i, b_i, c_i, d_i. U každé části splajnu napište, pro který interval je platná.

1.9.2 Řešení

Pro lepší pochopení si ze zadání přepíšeme následující hodnoty $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$ a

x_i	-1	0	1	2

.

Dopočítáme funkční hodnoty v uzlových bodech a pak vypočteme $h_i,\ i = 0, 1, 2, 3$, tj. délky jednotlivých intervalů, a $\Delta f_i,\ i = 0, 1, 2, 3$. Vypočtené hodnoty jsou zapsány v následující tabulce.

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	2	0	6
h_i	1	1	1	
Δf_i	-4	-2	6	

Stačí jedna třetina potřebných koeficientů, tedy jelikož $a_i = f(x),\ i = 0,\ 1,\ 2$ a $c_0 = c_n = 0$, pak to stačí na vyplnění $\frac{1}{3}$ následující tabulky všech potřebných koeficientů.

i	0	1	2
a_i	6	2	0
b_i			
c_i	0		
d_i			

Obecný tvar tohoto splajnu je:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & x \in \langle -1; 0\rangle \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 & x \in \langle 0; 1\rangle \\ S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 & x \in \langle 1; 2\rangle \end{cases}$$

`Pozn:` Pokud bychom chtěli splajn vypočítat celý, museli bychom vyřešit soustavu rovnic vzniklou z $h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{\Delta f_i}{h_i} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$ pro $i = 1, \ldots, n-1$ a dále pak pro $i = 0, \ldots, n-1$ vypočítat $b_i = \frac{f(x_i+1) - f(x_i)}{h_i} - \frac{c_{i+1}+2c_i}{3}h_i$ a $d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$. Vypočtené hodnoty bychom poté dosadili do obecného tvaru tohoto splajnu.

2 Pravděpodobnost

Zaokrouhlujte na 4 desetinná místa!

2.1 Příklad 1

2.1.1 Zadání

Máme následující tvrzení:

a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padla šestka. Pravděpodobnost, že šestka padne při třetím hodu je $\frac{1}{36}$.

b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne při prvním a zároveň třetím hodu je $\frac{1}{36}$.

c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát je $\frac{1}{36}$.

d) Máme 5 pravých a 2 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{4}{5}$ (tj. pravděpodobnost, že expert pravou bankovku prohlásí za falešnou = pravděpodobnost, že falešnou bankovku prohlásí za pravou = $\frac{1}{5}$). Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za falešnou je $\frac{8}{35}$.

U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

2.1.2 Řešení

Odpovědi na jednotlivá tvrzení:

a) **Ne**, prav., že padne 6 je při každém hodu $\frac{1}{6}$.

b) **Ano**, $|\Omega| = 6^2 = 36$, $|A| = 1$ a tedy $P(A) = \frac{1}{36}$.

c) **Ne**, $X \sim Bi(5, \frac{1}{6})$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2}$$

Tedy $P(X = 2) = \frac{625}{3888} \doteq \underline{\underline{0,1608}}$.

d) **Ne**.

$$\begin{aligned} H_1 \ldots &\quad \text{vytáhne pravou bankovku} \\ H_2 \ldots &\quad \text{vytáhne falešnou bankovku} \\ A \ldots &\quad \text{expert prohlásí bankovku za falešnou} \end{aligned}$$

$$P(H_1) = \frac{5}{7} \qquad P(A|H_1) = \frac{1}{5}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{7} \qquad P(A|H_2) = \frac{4}{5}$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{35} \doteq \underline{\underline{0,3714}}$$

2.2 Příklad 2

2.2.1 Zadání

Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 3, 7, 20, 22, 38, 345, 528\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel.

a) Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X

b) Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje 25 až 110 prvočísel.

2.2.2 Řešení

$$\begin{aligned} X \ldots &\quad \text{počet jedniček} \\ Y \ldots &\quad \text{počet prvočísel} \end{aligned}$$

a) $X \sim Bi(400, \frac{1}{8})$, $EX = 400 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{50}}$, $DX = EX(1 - \frac{1}{8}) = \underline{\underline{43,75}}$.

b) Prvočísla jsou v množině jen dvě a to 3 a 7. Zde musíme použít Moivre-Laplaceovu větu, abychom mohli jednoduše vypočítat distribuční funkci: $Y \sim Bi(400, \frac{2}{8}) \Rightarrow X \sim No(100, 75)$. Interval je vhodné zvětšit rovnoměrně o 1 pro přesnější výsledek: $P(25 - 0,5 \leq Y \leq 110 + 0,5) = P(\frac{24,5-100}{\sqrt{75}} \leq U \leq \frac{110,5-100}{\sqrt{75}}) \doteq \Phi(1,21) - \Phi(-8,72) = \Phi(1,21) - (1 - \Phi(8,72)) = \Phi(1,21) \doteq \underline{\underline{0,8869}}$.

2.3 Příklad 3

2.3.1 Zadání

Jedna z následujících fcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X \leq EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2,4,6,8\} \\ 0,1 & x \in \{3,5\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} sin\,x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & jinak \end{cases} \qquad h(x) = 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

2.3.2 Řešení

Pro hustotu prav. musí platit, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, fce musí být po částech (nebo úplně) spojitá. Po částech spojitá je jen funkce $g(x)$. Ověříme tedy ještě druhou podmínku.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\,dx = [-cos\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-cos\,\frac{\pi}{2}\right) - (-cos\,0) = 1$$

Dokázali jsme, že fce $g(x)$ je hustotou prav.. Nyní musíme vypočítat střední hodnotu EX, abychom pro ni mohli vypočítat distribuční funkci $F(EX) = P(X \leq EX)$.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sin\,x\,dx = \begin{vmatrix} u(x) = x & v'(x) = sin\,x \\ u'(x) = 1 & v(x) = -cos\,x \end{vmatrix} = [x \cdot (-cos\,x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-cos\,x)\,dx =$$

$$= [x \cdot (-cos\,x) - (-sin\,x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-cos\,\frac{\pi}{2}\right) - \left(-sin\,\frac{\pi}{2}\right) - 0 = 1$$

Střední hodnotu $EX = 1$ nyní dosadíme do dist. fce a vypočítáme.

$$F(1) = P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt = \int_{0}^{1} sin\,t\,dt = [-cos\,t]_0^1 = (-cos\,1) - (-cos\,0) \doteq \underline{\underline{0,4597}}$$

2.4 Příklad 4

2.4.1 Zadání

Pro $X \sim Exp(3)$ víte, že $F(T) = 0,85$. Určete T.

2.4.2 Řešení

Podle $X \sim Exp(\lambda)$ je jasné, že $\lambda = 3$. Distribuční funkce exponenciálního rozdělení je definovaná $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Z toho je patrné, že:

$$F(T) = 1 - e^{-3T} \Rightarrow 0,85 = 1 - e^{-3T} \Rightarrow e^{-3T} = 1 - 0,85 \Rightarrow e^{-3T} = 0,15 \Rightarrow -3T = ln(0,15) \Rightarrow T = \frac{ln(0,15)}{-3} \doteq \underline{\underline{0,6324}}$$

2.5 Příklad 5

2.5.1 Zadání

Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{0,1,2,3\}$, známe některé hodnoty prav. fce. Víme, že $p(1) = 0,2$, $p(3) = 0,4$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná dvěma. Určete rozptyl náh. veličiny X a dále hodnotu distribuční fce náh. veličiny X v bodě $x = 1$.

2.5.2 Řešení

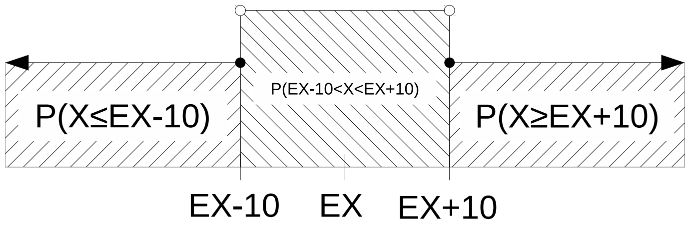
Tedy $p(0) = m$; $p(1) = 0,2$; $p(3) = 0,4$; $p(2) = 1 - (p(1) + p(3) + p(5)) = 0,7 - m$; $EX = 2$.
Do $EX = \sum_{\forall x} x \cdot p(x)$ dosadíme a vypočteme $m = 0,2 \Longrightarrow p(0) = 0,1 \Longrightarrow p(2) = 0,3$
Teď do $DX = E(X)^2 - (EX)^2 = \sum_{\forall x} x^2 \cdot p(x) - (EX)^2$ dosadíme x, $p(x)$ a EX a vypočteme $DX = 5 - 4 = \underline{\underline{1}}$
Distr. fce náh. vel. X v bodě $x = 1$, tedy $F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = \underline{\underline{0,3}}$

2.6 Příklad 6

2.6.1 Zadání

Test má 100 otázek. Každá nabízí 5 možných odpovědí, přičemž správě je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete prav., že se od počtu bodů, které lze při náhodném tipování v tomto testu očekávat, bude náš výsledek odlišovat alespoň 10 bodů.

2.6.2 Řešení



Obrázek 4: $P(X \leq EX - 10) + P(X \geq EX + 10) = 1 - P(EX - 10 < X < EX + 10)$

X - počet bodů z testu; $X \sim Bi(100, \frac{1}{5})$;
Moivre-Laplaceova věta: $X \sim Bi(n, p) \Rightarrow X \sim No(\mu, \sigma^2)$
$EX = \mu = n \cdot p = 20$, $DX = \sigma^2 = n \cdot p(1-p) = 16$, $\sigma = \sqrt{DX} = 4$; $X \sim No(20, 16)$

`Poznámka ke korekci:` Korekce se provádí (jak už bylo zmíněno v kap. 2.2.2 a jak je popsáno v "Inm_provizorni_verze.pdf" v kap. 20.3 *Aproximace binomického rozdělení pomocí normálního rozdělení* na straně 224) k bližší aproximaci. Když máme náh. vel. diskrétní prav. X a chceme vypočítat $P(X < x)$, tak to můžeme vypočítat jako $P(X \leq x - 1)$. Dále $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$ a $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$. Tedy:
$P(a - 0,5 < X < b + 0,5) = P(X < b + 0,5) - P(X \leq a - 0,5) = P(X \leq b + 0,5 - 1) - P(X < a - 0,5 + 1) = P(X \leq b - 0,5) - P(X < a + 0,5) = P(a + 0,5 \leq X \leq b - 0,5)$

$1 - P(EX - 10 < X < EX + 10) = 1 - P(10 + 0,5 < X < 30 - 0,5) \Longrightarrow 1 - P(\frac{10,5-20}{4} < U < \frac{29,5-20}{4})$
$1 - P(\frac{10,5-20}{4} < U < \frac{29,5-20}{4}) = 1 - (\Phi(2,375) - (1 - \Phi(2,375))) = 1 - (\Phi(2,375) - 1 + \Phi(2,375)) = 1 - (2\Phi(2,375) - 1) = 1 - 2\Phi(2,375) + 1 = 2 - 2\Phi(2,375) \doteq \underline{\underline{0,0173}}$

2.7 Příklad 7

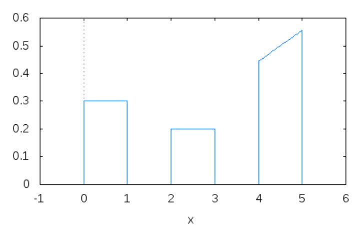
2.7.1 Zadání

Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{pro } x \in (0,1) \\ 0,2 & \text{pro } x \in (2,3) \\ mx & \text{pro } x \in (4,5) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a) Určete konstantu m tak, aby funkce f byla hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny.
b) Udejte příklad intervalu, na němž je distribuční funkce této náhodné veličiny konstantní avšak nenulová.
c) Udejte příklad intervalu, na němž distribuční funkce této náhodné veličiny není konstantní a má právě jedno minimum, a to v jiném než krajním bodě. Odpověď zdůvodněte.

2.7.2 Řešení



Obrázek 5: Graf výsledné funkce $f(x)$.

Odpovědi na jednotlivé otázky:
a) Pro hustotu prav. musí platit, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ a fce musí být po částech (nebo úplně) spojitá. Tedy konstantu m můžeme zjistit takto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 0,3x^0\,dx + \int_2^3 0,2x^0\,dx + \int_4^5 mx\,dx = 0,3\,[x]_0^1 + 0,2\,[x]_2^3 + m\left[\frac{x^2}{2}\right]_4^5 = 0,3(1-0) + 0,2(3-2) + m(\frac{5^2}{2} - \frac{4^2}{2}) =$$

$$= 0,5 + \left(\frac{25}{2} - \frac{16}{2}\right)m = 0,5 + \frac{9}{2}m \Longrightarrow 1 = 0,5 + \frac{9}{2}m \mid -0,5 \cdot 2/9 \Longrightarrow \frac{0,5 \cdot 2}{9} = m \Longrightarrow m = \frac{1}{9} \doteq \underline{\underline{0,1111}}$$

b) Distr. fce je neklesající – jsou to tedy intervaly $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$ a $\langle 5, \infty)$.

c) Tato otázka je chyták. Takový interval neexistuje, protože distr. fce je neklesající a pokud má být na intervalu nekonstantní a minimum má být právě jedno, tak musí být v krajním bodě.

2.8 Příklad 8

2.8.1 Zadání

Házem běžnou šesti-stěnou kostkou, dokud nepadne šestka nebo číslo dělitelné třemi, nejvýše však pětkrát. Náhodná veličina X udává počet provedených hodů.

a) Určete její pravděpodobnostní funkci.
b) Určete její distribuční funkci.
c) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet právě čtyřikrát.
d) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet alespoň čtyřikrát.

2.8.2 Řešení

Odpovědi na jednotlivé otázky (je to podobné jako příklad se střelcem, který střílí do terče):

a) Prav. že padne 6 nebo číslo dělitelné 3 (tzn. $\{3, 6\}$) je $\frac{2}{6}$. Naopak že se pokus nezdaří je prav. $\frac{4}{6}$. Házu ale maximálně 5 krát a $X \ldots$ počet provedených hodů. Dále víme, že hodnota pravděpodobností fce musí být $\sum_{\forall x} p(x) = 1$. (V případě $p(5)$ nezáleží na tom, zda-li se hod povede a proto se přičítá $\left(\frac{4}{6}\right)^5$)

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{6}\right)^0 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \doteq 0,3333 & x = 1 \\ \left(\frac{4}{6}\right)^1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9} \doteq 0,2222 & x = 2 \\ \left(\frac{4}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{27} \doteq 0,1481 & x = 3 \\ \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{81} \doteq 0,0988 & x = 4 \\ \left(\left(\frac{4}{6}\right)^4 \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \frac{16}{243} + \frac{32}{243} = \frac{16}{81} \doteq 0,1975 & x = 5 \\ 0 & jinak \end{cases}$$

b) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall x_i \leq x} p(x_i)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{3} \doteq 0,3333 & x \in \langle 1,\, 2) \\ \frac{5}{9} \doteq 0,5556 & x \in \langle 2,\, 3) \\ \frac{19}{27} \doteq 0,7037 & x \in \langle 3,\, 4) \\ \frac{65}{81} \doteq 0,8025 & x \in \langle 4,\, 5) \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

c) $p(4) = \frac{8}{81} \doteq \underline{\underline{0,0988}}$

d) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F(3) = \frac{8}{27} \doteq \underline{\underline{0,2963}}$ nebo-li $P(X \geq 4) = p(4) + p(5) = \frac{8}{27} \doteq \underline{\underline{0,2963}}$

2.9 Příklad 9

2.9.1 Zadání

Je známo, že hmotnost půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7,5kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 100 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku $9,5kg$. Na hladině významnosti $\alpha = 0,03$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace - předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

2.9.2 Řešení

Tento příklad má více způsobů řešení, začátek je ovšem společný.

$$X \sim No(7,5; 1), \qquad \alpha = 0,03$$

100 dětí, kterým byla podávána nová umělá výživa ... průměr $9,5kg$

Máme provést oboustranný test, tedy

$$\begin{array}{ll} H_0 \ldots \text{výživa nemá vliv na váhu} & (H_0 : \mu = 7,5) \\ H_1 \ldots \text{výživa má vliv na váhu} & (H_1 : \mu \neq 7,5) \end{array}$$

1. způsob – zdlouhavý: Vypočítáme si $T_{\alpha/2}$ a $T_{1-\alpha/2}$ pro interval $(T_{\alpha/2}, T_{1-\alpha/2})$ ze kterého zjistíme, která váha by v takovémto počtu mohla být tolerovanou střední hodnotou.

$$P(X \leq T_{\alpha/2}) = \frac{0,03}{2} = 0,015$$

$$P(X \leq T_{\alpha/2}) = P(U \leq \frac{T_{\alpha/2} - 7,5}{\sqrt{1}}\sqrt{100}) = P(U \leq (T_{\alpha/2} - 7,5) \cdot 10) = 0,015$$

$$\Phi(10(T_{\alpha/2} - 7,5)) = 0,015 \Rightarrow \text{ podle } \Phi(-u) = 1 - \Phi(u) \Rightarrow 1 - \Phi(-10(T_{\alpha/2} - 7,5)) = 0,015$$

$$\Phi(-10(T_{\alpha/2} - 7,5)) = 1 - 0,015 = 0,985 \Rightarrow 0,985 \text{ je podle tabulek } \Phi(2,17) \Rightarrow \Phi(-10(T_{\alpha/2} - 7,5)) = \Phi(2,17)$$

$$-10(T_{\alpha/2} - 7,5) = 2,17 \Longrightarrow T_{\alpha/2} = \frac{2,17}{-10} + 7,5$$

$$T_{\alpha/2} = \frac{2,17}{-10} + 7,5 = 7,283 \qquad T_{1-\alpha/2} = \frac{2,17}{10} + 7,5 = 7,717$$

Nakonec jsme tedy podle $9,5 \notin (7,283; 7,717)$ hypotézu H_0 zamítáme.

2. způsob:

$$u = \frac{9,5 - 7,5}{\sqrt{1}}\sqrt{100} = 20$$

Protože $\alpha = 0,03$, $1 - \alpha/2 = 0,985$ a $0,985$-kvantil náh. vel. U je podle tabulek $u_{0,985} \doteq 2,17$. Platí

$$|20| \geq 2,17 \text{ tedy } H_0 \text{ zamítáme}$$

3. způsob:

$$u = \frac{9,5 - 7,5}{\sqrt{1}}\sqrt{100} = 20$$

$$P = 2(1 - \Phi(|20|)) \approx 0 \leq \alpha = 0,03 \text{ tedy } H_0 \text{ zamítáme}$$