Solucionário de Topology - Munkres

Andre Kowacs

8 de dezembro de 2018

Capítulo 9

§51

Ex.1)
De fato, temos que $\exists F : X \times I \to Y$ homotopia entre h, h' e $\exists G : Y \times I \to Z$ homotopia entre k, k'. Logo:

$$G \circ F : X \times I \to Z$$

é homotopia entre $k \circ h$ e $k' \circ h'$, já que $(G \circ F)(s, 0) = (k \circ h)(s)$ e $(G \circ F)(s, 1) = (k' \circ h')(s)$. Além disso G e F contínuas implicam $G \circ F$ contínua. $\square$

Ex.2)
a)De fato, mostremos que todo mapa de X em I é homotópico a $g \equiv 0$. Seja $f : X \to I$ contínua. Ponha $F : X \times I \to I$,

$$F(s, t) = f(s)(1 - t)$$

Então é claro que F é contínua, $F(s, 0) = f(s)$, $F(s, 1) \equiv 0$. Logo $f \cong [0]$
b)De fato, tome $y_0 \in Y$ arbitrário. Mostremos que qualquer $f : I \to Y$ é homotópica a $g : I \to Y$, $g(s) \equiv y_0$. De fato, dada f contínua ponha $f(0) = x_0$, seja $F : I \times I \to Y$,

$$F(s, t) = f((1 - t)s)$$

Então F é homotopia entre $fef' \equiv x_0$. Agora, como Y é conexo por caminhos, $\exists \gamma : I \to Y, \gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$. Assim,

$$\begin{aligned} G :& I \times I \to Y \\ & (s, t) \mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

É homotopia entre f' e g, logo $f \cong g$ $\square$

Ex.3)
a)De fato, sejam i_I, $i_{\mathbb{R}}$ as funções identidade. Então:

$$\begin{aligned} F :& I \times I \to I \\ & (s, t) \mapsto i_I(s(1 - t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G :& \mathbb{R} \times I \to I \\ & (s, t) \mapsto i_{\mathbb{R}}(s(1 - t)) \end{aligned}$$

São as homotopias entre as identidades e as funções nulas respectivas.
b)De fato, sejam $x_1, x_2 \in X$ contrátil, tal que $i : X \to X$ é homotópica a $f : X \to X$, $F(x) \equiv x_0$. Seja F a homotopia entre i e f. Então $\gamma_1 : I \to X$, $\gamma(t) = F(x_1, t)$ é caminho entre x_1 e x_0. Análogamente, definimos $\gamma_2(t) = F(x_2, 1 - t)$ é caminho entre x_0 e x_2. Como foram arbitrários, segue que X é

conexo por caminhos.
c)De fato, pois $i_Y \cong f_0 \equiv y_0 \in Y$, daí, dada $f : X \to Y$ contínua:

$$f = i_Y \circ f \cong f_0 \circ f = f_0$$

d)De fato, pois $i_X \cong f_0 \equiv x_0 \in X$. Assim, dado $y_0 \in Y$, $f : X \to Y$ contínua,

$$f = f \circ i_X \cong f \circ f_0 = f' \equiv f(x_0)$$

Mas Y conexo por caminhos implica que $\exists \gamma : I \to Y$, $\gamma(0) = f(x_0)$, $\gamma(1) = y_0$ contínua. Logo $F(s,t) = \gamma(t)$ é homotopia entre f' e $g \equiv y_0$. Logo,

$$f \cong f' \cong g \implies f \cong g$$

Como f foi arbitrário, segue.