Solucionário de Curso de Análise Vol. 2 Elon Lages Lima

Andre Kowacs

9 de dezembro de 2018

Capítulo 1

Ex.2.3)
Afirmação: $Ax = b$ tem solução $\iff b \in \ker(A^*)^\perp$
De fato, se $Ax = b$, então $b \in Im(A)$. Assim, dado $a \in \ker(A^*)$, temos que:

$$\langle b, a\rangle = \langle Ax, a\rangle = \langle x, A^*a\rangle = 0$$

Logo $b \in \ker(A^*)^\perp$.
Reciprocamente, seja $0 \neq b \in \ker(A^*)^\perp$. Suponha que $b \notin Im(A)$. Então $\exists c \in Im(A)^\perp$ tal que $\langle b, c\rangle \neq 0$. Mas daí $AA^*c \in Im(A)$, logo:

$$||A^*c||^2 = \langle A^*c, A^*c\rangle = \langle AA^*c, c\rangle = 0$$

Logo $A^*c = 0 \implies x \in \ker(A^*)$. Mas daí $b \in \ker(A^*)^\perp \implies \langle b, c\rangle = 0$ contradição. Logo $b \in Im(A)$.
Ou seja, $Im(A) = \ker(A^*)^\perp \wedge Im(A^*) = \ker(A)^\perp$ Seja $\dim(Im(A)) = k \leq n$. Então $\dim(\ker(A)) = n - k \implies \dim(\ker(A)^\perp) = n - (n - k) = k = \dim(Im(A^*))$ $\square$

Ex 2.10)
Para $t \in (0, 1)$ e $|a| < r$, $|b| \leq r$ ou $|a| \leq r$, $|b| < r$:

$$|(1 - t)a + tb| \leq (1 - t)|a| + t|b| < (1 - t)r + tr = r$$

Se $|a| = |b| = r$, então como $a \neq b$, $\langle a, b\rangle < |a||b| \leq r^2$.
E, portanto, para $t \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
|(1 - t)a + tb|^2 &= \langle (1 - t)a + tb, (1 - t)a + tb\rangle = (1 - t)^2r^2 + 2(1 - t)t\langle a, b\rangle + t^2r^2 \\
&< (1 - 2t + t^2)r^2 + (2t - 2t^2)r^2 + t^2r^2 = r^2 \\
&\therefore \\
|(1 - t)a + tb| &< r \quad \square
\end{aligned}$$

Ex.5.5)
De fato, $\langle , \rangle$ contínua e $lim x_k = a$ implica

$$lim_{k\to\infty}\langle x_k, y\rangle = \langle a, y\rangle, \, \forall y.$$

Agora suponha que $lim_{k\to\infty}\langle x_k, y\rangle = \langle a, y\rangle$, $\forall y$. Tome $\{e_1, ..., e_n\}$ base ortonormal. Então $\forall i = 1, ..., n, \exists k_i$:

$$|\langle x_k, e_i\rangle - \langle x_l, e_i\rangle| < \epsilon/n, \, \forall k, l \geq K_i.$$

Tome $K = \max K_i$. Então:

$$|\langle x_k, e_i\rangle - \langle x_l, e_i\rangle| = |\langle x_k - x_l, e_i\rangle| < \epsilon/\sqrt{n}, \, \forall k, l \geq K, \forall i = 1, ..., n.$$

Mas então:

$$|x_k - x_l| = \left|\sum \langle x_k - x_l, e_i\rangle e_i\right| \leq \sum |\langle x_k - x_l, e_i\rangle| \, |e_i| < \epsilon \forall l, k \geq K$$

Logo x_k é de Cauchy e claramente $x_k \to a$. $\square$

Ex.6.2)
Seja X tal que todo ponto é isolado. Assim, dados $x, y \in X$, $\exists \delta_x, \delta_y$ tal que:

$$B(x, \delta_x) \cap X\backslash\{x\} = \emptyset, B(y \, delta_y) \cap X\backslash\{y\} = \emptyset$$

Assim, seja $r_x = \inf\{|x - z|; z \in X\}$, $r_y = \inf\{|y - z|; z \in X\}$. Note que $r_x \geq \delta_x > 0$, $r_y \geq \delta_y > 0$.
Tomando $B_x = B(x, r_x/2)$, $B_y = B(y, r_y/2)$, segue que $B_x \cap B_y = \emptyset$. Como x e y foram arbitrários, segue. $\square$

Ex.6.3) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ discreto. Então todo ponto é isolado, logo pelo Ex.6.2, $\forall x \in X, \exists B_x$ vizinhança de x tal que $B_x \cap B_y = \emptyset$, $x \neq y$. Assim, seja $(q_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ enumeração de $\mathbb{Q}^n$. Então $\forall x, \exists q_{n_x}$ tal que $q_{n_x} \in B_x$. Note que isso define uma injeção:

$$\begin{aligned} f :& A \subset \mathbb{Q}^n \to X \\ & q_{n_x} \mapsto x \end{aligned}$$

pois $x \neq y \implies q_{n_x} \in B_x$, $q_{n_y} \in B_y$, $q_{n_x} \neq q_{n_y}$ pois $B_x \cap B_y = \emptyset$.
Logo X é enumerável. $\square$

E.7.9)
De fato, se X é limitado, então $\overline{X}$ também o é, logo $\overline{X}$ é compacto. Segue que $f|_{\overline{X}}$ é uniformemente contínua, donde $f|_X$ também o é, pois é restrição da outra.

Ex.9.7)
Seja B a bola fechada e ponha

$$\begin{aligned} h :& int(B) \to \mathbb{R}^n \\ & x \mapsto \frac{x}{1-||x||} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T :& \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & x \mapsto x + a \end{aligned}$$

Temos que h é homeomorfismo entre $int(B)$ e $\mathbb{R}^n$, com $h^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+||x||}$, e T é homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$, $T^{-1}(x) = x - a$. Assim:

$$\begin{aligned} \phi = h^{-1} \circ T \circ h :& int(B) \to int(B) \\ & x \mapsto \frac{(1-||x||)a + x}{(1-||x||) + ||(1-||x||)a + x||} \end{aligned}$$

é homeomorfismo. Além disso, dado $b \in \partial B$, $||b|| = 1$, logo:

$$\lim_{x \to b} \phi(x) = \lim_{x \to b} \frac{b}{||b||} = b$$

Logo, podemos estender continuamente ϕ para $\bar{\phi} : B \to B$ pondo $\bar{\phi}(x) = \lim_{y \to x} \phi(y)$ e temos que $\bar{\phi}$ é homeomorfismo entre B e B tal que $\bar{\phi}(x) = x$, $\forall x \in \partial B$. Além disso, $\bar{\phi}(0) = \dfrac{1}{1+||a||} \in int(B)$. Assim, de modo análogo, tomando a_1, a_2 tal que $\dfrac{1}{1+||a_1||} = c$, $\dfrac{1}{1+||a_2|| = d}$, obtemos os homeomorfismos $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$ tais que $\bar{\phi}_1(0) = c$, $\bar{\phi}_2(0) = d$.
Assim $\gamma = \bar{\phi}_2 \circ \bar{\phi}_1^{-1}$ é homeo que preserva a fronteira e $\gamma(c) = d$ $\square$

Ex.10.9)
De fato, $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} \backslash \{0\})$ e det é contínua, $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ é aberto.

Ex.10.12)
Seja $T \in I$ onde $I \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é o conjunto das aplicações injetivas. T é injetiva $\iff \exists c > 0 \, ||Tx|| \geq c||x||, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Assim, $||T' - T|| < c/2 \implies ||(T' - T)x|| \leq c/2||x||$, ou seja:

$$||Tx|| - ||T'x|| \leq ||x|| \implies ||T'x|| \geq ||Tx|| - c/2||x|| \geq c||x|| - c/2||x|| = c/2||x||$$

Logo T' é injetiva, isto é, $B(T, c/2) \subset I$. Logo I é aberto. $\square$

Ex.10.13)
Seja $I \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $n \leq m$ o conjunto das aplicações inejtivas. Dada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\epsilon > 0$, mostremos que $\exists T' \in I$, $||T - T'|| \leq \epsilon$. Se $T \in I$, então tome $T' = T$. Se $T \notin I$, então $\ker(T) \neq \{0\}$. Seja $0 < \dim\ker(T) = k \leq n$.

Segue que $\dim(Im(T)) = n-k < n$, donde $\dim(Im(T)^{\perp}) = m-n+k \geq k$. Logo $\dim(\ker(T)) = k \leq dim(Im(T)^{\perp})$. Segue que $\exists S$ linear injetiva:

$$S : \ker(T) \to Im(T)^{\perp}$$

Assim, defina:

$$U : \ker(T)^{\perp} \to Im(T)$$

Onde $U = T|_{\ker(T)^{\perp}}$. Então é claro que $\ker(U) = \{0\}$, $Im(U) = Im(T)$. Note que $\ker(T) \bigoplus \ker(T)^{\perp} = \mathbb{R}^n$, logo $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists! x_1 \in \ker(T), x_2 \in \ker(T)^{\perp}$, $x = x_1 + x_2$.
Defina $T' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pondo

$$T'x = Ux_1 + \frac{\epsilon}{||S||} Sx_2$$

Assim $T'x = 0 \iff Ux_1 + \frac{\epsilon}{||S||} Sx_2 = 0 \iff x_1 \in \ker(U) \wedge x_2 \in \ker(S) \implies x_1, x_2 = 0$ ou $x_1, x_2 \in Im(U) \cap Im(S) = \{0\} \implies x_1, x_2 = 0$.
Logo $x = x_1 + x_2 = 0$ e $\ker(T') = \{0\}$, isto é, $T' \in I$. Ainda, $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$||T'x - Tx|| = ||Ux_1 + \frac{\epsilon}{||S||} Sx_2 - T|_{\ker(T)^{\perp}} x_1|| \leq \frac{\epsilon}{||S||} ||S|| ||x_2|| \leq \epsilon ||x||$$

Portanto $||T' - T|| \leq \epsilon$ □

Ex.11.10)
Sejam $x_1, x_2 \in \overline{A}$. Dado $t \in [0,1]$, seja $y = tx_1 + (1-t)x_2$. Dado $\epsilon > 0$ Como $x_1, x_2 \in \overline{A}$, $\exists a_1, a_2 \in A$, $|x_1 - a_1| < \epsilon/2$, $|x_1 - a_1| < \epsilon/2$.
Então $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ e

$$\begin{aligned} |tx_1 + (1-t)x_2 - ta_1 + (1-t)a_2| &\leq t|x_1 - a_1| + (1-t)|x_2 - a_2| \\ &< t\epsilon/2 + (1-t)\epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

Logo $tx_1 + (1-t)x_2 \in \overline{A}$, logo $\overline{A}$ é convexo. □

Ex.11.11)
Por 11.10 temos que $\overline{A}$ é convexo. Note que $\forall x \in A$, $y \in \overline{A}$, $tx + (1-t)y \in A$, $t \in [0,1)$. De fato, A aberto $\implies \exists \delta$, $B(x, \delta) \subset A$. Logo $\forall z \in B(x, \delta)$, $tx + (1-t)z \in A$, $t \in [0,1]$.
Mas $y \in \overline{A} \implies \exists u \in A, y \in B(u\,\epsilon)$. Pelo acima, $u + t(y-u) \in A$, $t \in [0,1)$. Denotando o segmento fechado entre dois pontos j, i por $[j,i]$ e fechado e aberto por $[j,i)$, temos então que $[x,u]$, $[u,y) \subset A \implies [x,y) \subset A$.
Agora, tome $y \in int(\overline{A})$. Então $\exists r > 0$, $B(y,r) \subset \overline{A}$. Tome $y' \in A$. Então $\exists \epsilon > 0$ tal que $y' + (1+\epsilon)(y-y') = t + \epsilon(y-y') \in B(y,r) \subset \overline{A}$. Mas pelo argumento acima, $[y', y + \epsilon(y-y')) \subset A$. Mas $y \in [y', y + (\epsilon(y-y'))$, logo $y \in A$. A inclusão reversa é trivial. □

Ex.11.18)
De fato, dada $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, exceto para um número finito de λ's $(M - \lambda Id)$ é invertível (pois $\det(M - \lambda Id)$ é um polinômio. Assim, $\exists (\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$, $\lambda_n \to 0$ tais que $M_n = M - \lambda_n Id$ é invertível, $M_n \to M \therefore \overline{GL(n)} = \mathbb{R}^{\setminus}$. □Ex.12.2)
É fechado, pois dada $(O_n)_n \subset O(n)$, $O_n \to T$, tomando $x \in \mathbb{R}^n$, temos $||O_n x|| = ||x||, \forall n \implies ||O_n x|| \to ||x||$. Pela continuidade da norma, segue que $||O_n x|| \to ||Tx|| = ||x||$. Como x foi arbitrário, segue que $||Tx|| = ||x|| \forall x \therefore T \in O(n)$. Segue que $O(n)$ é fechado. Além disso, $\forall O \in O(n)$, $||Ox|| = ||x|| \forall x \therefore ||O|| = 1$. Logo $O(n)$ é limitado e portanto compacto. □

Ex.12.3)
De fato, se todo ponto de X é isolado, então $\cup_{x \in X} \{x\}$ é cobertura aberta de X sem cobertura finita. Logo X não é compacto. Se X possui ao menos 1 ponto não isolado,$\bar{x}$, então $\exists (x_n)_n \subset X$ $x_n \neq x \forall n$, $x_n \to \bar{x}$. Assim $(x_n)_n \subset X$ é subconjunto não fechado em X, logo não compacto. □

Ex.12.6)
De fato, $X \cong X \implies X$ limitado.Então $\exists \bar{x} \in \overline{X}$, $\bar{x} \notin X$, ou seja, $\exists (x_n)_n \subset X$, $x_n \to \bar{x} \notin X$. Defina:

$$\begin{aligned} f :& X \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto & \frac{x-\bar{x}}{||x-\bar{x}||^2} \end{aligned}$$

Então é claro que f é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} f^{-1} :& f(X) \to X \\ y \mapsto & \frac{y}{||y||^2} + \bar{x} \end{aligned}$$

É inversa de f, também claramente contínua. Logo f é homeomorfismo e $X \cong f(X)$. Mas note que $f(X)$ é ilimitado:
De fato:

$$||f(x_n)|| = \frac{||x_n - \bar{x}||}{||x_n - \bar{x}||} = \frac{1}{||x_n - \bar{x}||} \to +\infty$$

Contradição. Logo X é fechado. Portanto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado, logo, compacto. □

Ex.12.7)
Claramente, $X \cong X \implies X$ fechado.
Suponha que X não é limitado.Defina:

$$\begin{aligned} f :& X \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto & \frac{x}{1+||x||} \end{aligned}$$

Claramente f é contínua e sua inversa:

$$\begin{aligned} f^{-1} :& f(X) \to X \\ y \mapsto & \frac{y}{1-||y||} \end{aligned}$$

também. Mas note que $\forall y \in f(X)$, $y = \dfrac{x}{1+||x||}$, logo $||y|| = \dfrac{||x||}{1+||x||} < 1$.
Mas X ilimitado implica que $\exists (x_n)_n \subset X$, $||x_n|| \to +\infty$. Segue que $||f(x_n)|| \to 1$. Como $(f(x_n)_n$ é limitada, $\exists (f(x_{n_k}))_k \subset (f(x_n))_n$ subsequência convergente, $f(x_{n_k}) \to \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Mas então $||x_{n_k}|| \to +\infty \implies ||\bar{y}|| = 1$, logo $\bar{y} \notin f(X)$, logo $f(X)$ não é fechado, contradição. Segue que X é limitado. Concluímos que X é compacto. □

Ex.12.11)

i) De fato, seja $x \in f^{-1}(y)$. Então $\exists r > 0$, $f|_{B(x,r)\cap X}$ é injetiva, logo $f^{-1}(y) \cap B(x,r) = \{x\}$, logo $\{x\}$ é aberto. Como x foi arbitrário, segue que $f^{-1}(y)$ é discreto.

ii) Suponha que não. Então $\exists (x_n)_n \subset f^{-1}(y)$, $x_n \neq x_m$, $n \neq m$. Mas $(x_n)_n \subset f^{-1}(y) \subset X$, logo admite subsequência convergente $x_{n_k} \to \bar{x} \in X$. Mas note que $f(x_n) \equiv y \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Mas f contínua $\implies f(x_n) \to f(\bar{x}) \therefore f(\bar{x}) = y$, logo $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. Mas como $x_{n_k} \to \bar{x}$, este é ponto de acumulação de $f^{-1}(y)$, logo $\{\bar{x}\}$ não é aberto em $f^{-1}(y)$, contradição. Logo $f^{-1}(y)$ é finito.

□

Ex.12.17)
De fato, mostremos que $\mathbb{R}^m \backslash \pi(F)$ é aberto. Tomes $z \notin \pi(F)$. Então, $\forall k \in K$, $(z,k) \notin F$. Como este é fechado, para cada $(z,k) \in \{z\} \times K$, $\exists r_k$, $B((z,k), r_k) = B_k \cap F = \emptyset$. Mas note que $\{z\} \times K$ é compacto e que $\{B_k\}_{k\in K}$ é cobertura aberta de $\{z\} \times K$. Logo $\exists k_1, ..., k_n \in K$, tais que $\{z\} \times K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{k_i}$. Tome $r = \min\{r_{k_i}\}$. Então $B(z,r) \subset \mathbb{R}^n \backslash \pi(F)$.

De fato, se $y \in B(z,r)$, $k \in K$ então $\exists i \in \{1,...,n\}$, $|k-k_i| < r_{k_i}$. Mas $|z-y| < r \leq r_{k_i} \therefore (y,x) \notin F, \forall x \in \mathbb{R}^n \therefore y \notin \pi(F)$. □

Ex.12.18)
Para cada $(a,k) \in \{a\} \times K$, $\exists r_k > 0$, $B((a,k),r_k) \subset U$. Assim, $\{B((a,k),r_k)\}_{k\in K}$ é cobertura aberta de $\{a\} \times K$. Como este é compacto, existem $k_1,...,k_n$ tais que $\{a\} \times K \subset \cup_{i=1}^{n} B((a,k_i),r_{k_i})$. Ponha $r = \min_{1\leq i\leq n}\{r_{k_i}\}$ e suponha, sem perda de generalidade, que a norma em $\mathbb{R}^{n+m}$ é a norma $||(x,y)|| = \max\{||x||,||y||\}$. Então, se $B = B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$, $B \times K \subset U$. De fato, se $b \in B$, então $|b-a| < r \leq r_{k_i}$, $\forall i = 1,...,n$. Assim, se $k \in K$, $\exists i_0$, $|k-k_{i_0}| < r_{k_{i_0}}$. Mas daí $|(b,k)-(a,k_{i_0})| < \max\{r, r_{k_{i_0}}\} = r_{k_{i_0}}$. Logo $(b,k) \in B((a,k_{i_0}),r_{k_{i_0}}) \subset U$. Daí $B \times K \subset U$ □

Ex.12.19)
De fato, é claro que f é contínua. Agora, se $f(x) = f(y)$, então:

$$\begin{aligned}(1-||x||)a + x &= (1-||y||)a + y\\ a(||y||-||x||) &= y - x\\ |a|||y-x|| &= ||y-x||\end{aligned}$$

Mas $|a| < 1 \implies ||y-x|| < |||y||-||x|||$ ou $|y-x| = 0$. Como o primeiro caso é falso por causa da desigualdade triangular, temos que $||y-x|| = 0 \iff x = y$. Portanto f é injetiva. Agora, dado $y \in B$, ponha $h_y(x) = y - f(x) + x$. Então:

$$||h_y(x) - h_y(z)|| = |a|||x-z|| < ||x-z||$$

logo h_y é contração. Como B é fechada, logo completa, pelo teorema do ponto fixo de Banach $\exists! x \in B, h_y(x) = x$. Mas então $x = y - f(x) + x \implies f(x) = y$. Logo f é sobrejetora. Como f é bijeção contínua de um compacto, é homeomorfismo.

Ex.12.20)
De fato, seja X compacto, $f : X \to Y$ localmente Lipschitz. Suponha que f não seja Lipschitz. Então $\forall n > 0$, $\exists x_n, y_n \in X$ tais que:

$$||f(x) - f(y)|| > ||x_n - y_n|| \, (*)$$

Mas X compacto implica que existem subsequências $(x_{n_k})_k e (y_{n_{k_j}})_j$ tais que $x_{n_k} \to \bar{x} \in X$ e $y_{n_{k_j}} \to \bar{y}$. Para simplificar notação, seja $(x'_n)_{n'} = (x_{n_{k_j}})_j$, $(y_{n'})_{n'} = (y_{n_{k_j}})_j$. Então ambas convergem para os limites acima. Mas se $\bar{x} \neq \bar{y}$, então $(*)$ implica que:

$$||f(x_n) - f(y_n)|| \to +\infty$$

Mas f continua implica que:

$$||f(x_n) - f(y_n)|| \to ||f(x) - f(y)||$$

Contradição. Então devemos ter $\bar{x} = \bar{y}$. Mas daí $\exists \delta > 0$, $C > 0$ tais que para $x_n, y_n \in B(\bar{x},\delta)$, $x_n \neq y_n$ implica:

$$||f(x_n) - f(y_n)|| \leq ||x_n - y_n|| \implies \frac{||f(x_n) - f(y_n)||}{||x_n - y_n||} \leq C (**)$$

Mas como ambas as sequência convergem para $\bar{x}$, $\exists N$, $\forall n \geq N, x_n, y_n \in B(\bar{x},\delta)$. Logo $(**)$ vale para todo $n \geq N$. Mas $(*)$ implica que:

$$\frac{||f(x_n) - f(y_n)||}{||x_n - y_n||} > n$$

Logo para $n > C$ temos uma contradição. Logo f é Lipschitz. □

Ex.14.6)
De fato, seja X conexo. Note que f localmente constante implica f contínua. Tome $x \in X$. Então $\exists r > 0$ tal que $f|_{B(x,r)\cap X} \equiv f(x)$. Defina:

$$B = \{y \in X; \, f(y) = f(x)\}$$

Claramente $B \neq \emptyset$, pois $x \in B$. B é aberto pois se $y_0 \in B$, $F(y_0) = f(x)$ e $\exists r'$, $f|_{B(x,r)\cap X} \equiv f(x)$. Mas B também é fechado, pois f é contínua e $B = f^{-1}(\{f(x)\})$. Logo $B = X$, ou seja $f(y) = f(x) \forall y \in X$, isto é, f é constante.
Agora suponha que toda aplicação localmente constante em X é constante e seja $X = A \cup B$ cisão. Tome $z \neq y \in \mathbb{R}^n$ e defina:

$$f : X \to \mathbb{R}^n$$
$$f(x) = \begin{cases} z, \, x \in A \\ y, \, x \in B \end{cases}$$

Então f é localmente constante. Por hipótese, f deve ser constante, diga $f \equiv z$. Então $A = X$, $B = \emptyset$, logo A é conexo. $\square$

Ex.14.16)
De fato, pela forma canônica dos operadores ortogonais, temos que, dado $\theta \in O_+(n)$ existe base em $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$[O] = \begin{bmatrix} +1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \text{\Large 0} & & \\ & & +1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & & & \\ & & & & & & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & \text{\Large 0} & & & & & & & \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ & & & & & & & & & \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{bmatrix}$$

Onde o número de "-1"s é par. Mostremos que existe caminho $\theta \to Id_{n\times n}$, de modo que existe caminho entre quaisquer dois $\theta_1, \theta_2 \in O_+(n)$. De fato, ponha:

$$[O(t)] = \begin{bmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \text{\Large 0} & \\ & & \cos(\pi(1-t)) & -\sin(\pi(1-t)) & & & & & \\ & & \sin(\pi(1-t)) & \cos(\pi(1-t)) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \cos(\theta_1(1-t)) & -\sin(\theta_1(1-t)) & & \\ & & & & & \sin(\theta_1(1-t)) & \cos(\theta_1(1-t)) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & \text{\Large 0} & & & & & \cos(\theta_n(1-t)) & -\sin(\theta_n(1-t)) \\ & & & & & & & \sin(\theta_n(1-t)) & \cos(\theta_n(1-t)) \end{bmatrix}$$

Então é claro que $O(t) \in)_+(n)$, $\forall t \in [0,1]$ e que $\theta(t)$ é contínua e $\theta(0) = \theta$, $\theta(1) = Id_{n\times n}$. Logo $O_+(n)$ é conexo por caminhos e logo conexo.
Já para $T \in GL_+(n)$, pela decomposição polar, temos que $\exists P$ auto-adjunta positiva, e $U \in O_+(n)$ tais que:

$$T = PU$$

Assim, vamos mostrar que existe caminho ligado T e Id novamente. Claro, como $U \in O_+(n)$, podemos tomar base tal que U é da forma acima e considerar $U(t)$ da mesma forma que $\theta(t)$. Além disso, P auto-adjunta positiva implica

$$P = V^* D V$$

onde V é ortogonal e

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

tais que $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$ são os autovalores de P. Assim, tome:

$$[D(t)] = \begin{bmatrix} (1-t)\lambda_1 + t & & & \\ & (1-t)\lambda_2 + t & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & (1-t)\lambda_n + t \end{bmatrix}$$

de modo que $det(D(t)) > 0 \forall t \in [0,1]$, $D(0) = D$, $D(1) = Id$. Assim fica definido:

$$T(t) = P(t)U(t) = V^* D(t) V U(t)$$

onde $T(t) in GL_+(n), \forall t \in [0,1]$, $T(0) = T$, $T(1) = Id$ e $T(t)$ contínua. Como T foi arbitrária, temos que $GL_+(n)$ é conexo por caminhos e logo conexo. $\square$

Ex.14.17)
De fato, seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $C \subset X$ componente conexa. Dado $x \in C$, $\exists r > 0$, $B(x, r \subset X$, pois X é aberto. Mas então $B(x,r)$ é um subconjunto de X conexo contendo x, logo $B(x,r) \subset C$ por definição. Logo C é aberta. $\square$

Ex.15.2)
De fato, note que:

$$\begin{aligned} &y = Ax \implies A^{-1}y = x \\ &|y| = |Ax| \geq c|x| = c|A^{-1}y| \\ &|A^{-1}y| \leq \frac{1}{c}|y| \end{aligned}$$

Daí:

$$||A^{-1}|| \leq \frac{1}{c} \tag{1}$$

Assim, se $||A - X|| < c/2$, então:

$$\begin{aligned} |(A-X)x| &\leq c/2|x| \\ |Ax - Xx| &\leq c/2|x| \\ |Ax| - |Xx| &\leq c/2|x| \\ -|Xx| &\leq c/2|x| - |aX| \leq c/2|x| - c|x| \\ |Xx| &\geq c/2|x| \end{aligned}$$

Assim, analogamente (1),

$$|X^{-1}| \leq 2/c \tag{2}$$

Logo, por (1) e (2):

$$\begin{aligned} ||X^{-1} - A^{-1}|| &= ||X^{-1}(Id - XA^{-1})|| \\ &= |X^{-1}(A - X)A^{-1}|| \\ &\leq ||X^{-1}||||A - X||||A^{-1}|| \\ &< 2/c \cdot c/2 \cdot 1/c = 1/c \end{aligned} \tag{3}$$

Ou seja, $f(B(A, c/2)) \subset B(A^{-1}, 1/c)$. Assim, note que tomando $\delta < c/2$, (2) ainda vale, portanto podemos reduzir (3) arbitrariamente. Logo $f(X) = X^{-1}$ é continua. $\square$