Calculus with Complex Numbers - Soluções

Ivo Terek Couto

19 de julho de 2015

Este é um projeto de resolver os exercícios propostos no livro Calculus with Complex Numbers, do John B. Reade. Os enunciados estão em inglês, e serão copiados verbatim aqui. As resoluções ficam em português. O texto é despretensioso e sujeito a erros. Sugestões e correções podem ser enviadas para **terek@ime.usp.br**.

Sumário

1 Complex numbers **2**

2 Complex functions **7**

3 Derivatives **10**

4 Integrals **16**

5 Evaluation of finite real integrals **21**

6 Evaluation of infinite real integrals **24**

7 Summation of Series **32**

8 Fundamental Theorem of Algebra **40**

1 Complex numbers

Exercício 1. *Express the following complex numbers in the form* $x + iy$.

(i) $(1+3i)+(5+7i)$

(ii) $(1+3i)-(5+7i)$

(iii) $(1+3i)(5+7i)$

(iv) $\dfrac{1+3i}{5+7i}$

(v) $\sqrt{3+4i}$

(vi) $\log(1+i)$

Hint: For (vi) *use polar form.*

Solução:

(i) $(1+3i)+(5+7i) = 6+10i$

(ii) $(1+3i)-(5+7i) = -4-4i$

(iii) $(1+3i)(5+7i) = 5+7i+15i+21i^2 = -16+22i$

(iv) $\dfrac{1+3i}{5+7i} = \dfrac{1+3i}{5+7i}\dfrac{5-7i}{5-7i} = \dfrac{5-7i+15i-21i^2}{5^2+7^2} = \dfrac{26+8i}{74} = \dfrac{13}{37}+\dfrac{4}{37}i$

(v) $\sqrt{3+4i}$. Escreva $A+Bi = \sqrt{3+4i}$, com $A, B \in \mathbb{R}$. Então elevando ao quadrado, temos:

$$A^2 - B^2 + i(2AB) = 3+4i \implies \begin{cases} A^2 - B^2 = 3 \\ AB = 2 \end{cases}$$

Assim, $B = 2/A$, e substituindo:

$$A^2 - \frac{4}{A^2} = 3 \implies A^4 - 3A^2 - 4 = 0 \implies A^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2},$$

daí $A^2 = 4$, visto que devemos ter $A \in \mathbb{R}$. Assim $A = \pm 2$. Então $B = 2/A$ nos dá $B = \pm 1$. Então as raízes complexas de $3+4i$ são:

$$2+i \quad \text{e} \quad -2-i.$$

(vi) $\log(1+i)$. Assim como a raíz, o log complexo é uma função multi-valorada. Escreva $1+i = \sqrt{2}e^{i((\pi/4)+2k\pi)}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2}e^{i((\pi/4)+2k\pi)} = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Exercício 2. *Find* $\sqrt{1+i}$. *Hence show that* $\tan \pi/8 = \sqrt{2}-1$.

Solução:

Começamos com a forma polar diretamente. Temos que $1+i = \sqrt{2}e^{i((\pi/4)+2k\pi)}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, escrevendo $\sqrt{1+i} = re^{i\theta}$ e igualando obtemos:

$$r^2e^{i(2\theta)} = \sqrt{2}e^{i((\pi/4)+2k\pi)} \implies r = \sqrt[4]{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Note que $\tan(\pi/8) = \tan((\pi/8) + k\pi)$, então para efeitos práticos podemos tomar $k = 0$.

Como antes, escreva $\sqrt{1+i} = A+Bi$, com $A, B \in \mathbb{R}$. Então, elevando ao quadrado, temos:

$$1 + i = A^2 - B^2 + i(2AB) \implies \begin{cases} A^2 - B^2 = 1 \\ AB = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Daí $B = 1/(2A)$, e substituindo:

$$A^2 - \left(\frac{1}{2A}\right)^2 = 1 \implies A^4 - A^2 - \frac{1}{4} = 0 \implies A^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2},$$

daí $A = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$, visto que devemos ter $A \in \mathbb{R}$. De $B = 1/(2A)$ segue que:

$$B = \pm\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}}.$$

A escolha $k = 0$ feita acima nada mais é do que a escolha da raíz complexa:

$$A + Bi = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}}\right)$$

de $1 + i$. Pois bem:

$$\tan \pi/8 = \frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

□

Exercício 3. *Expand* $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ *to obtain formulae for* $\cos 3\theta, \sin 3\theta$ *in terms of* $\cos\theta, \sin\theta$. *Use these formulae to show*

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Solução: Note que $e^{i(3\theta)} = (e^{i\theta})^3$. Então:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\
\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \\
\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) + i((1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta) \\
\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta).
\end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias obtemos

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

$\square$

Exercício 4. *Use Question* 3 *to show that* $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, $\sin 30° = 1/2$.

Solução: Faça $\theta = 30°$ nas relações encontradas no exercício anterior. Temos:

$$0 = 4\cos^3 30° - 3\cos 30°,$$
$$1 = 3\sin 30° - 4\sin^3 30°.$$

Como $\cos 30° \neq 0$, da primeira equação temos que:

$$4\cos^2 30° - 3 = 0 \implies \cos 30° = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

visto que $30°$ está no primeiro quadrante. Assim, usando que $\sin^2 30° = 1 - \cos^2 30°$, temos que $\sin 30° = \pm 1/2$. Novamente, como o ângulo está no primeiro quadrante, prevalece $\sin 30° = 1/2$.

$\square$

Exercício 5. *Expand* $(e^{i\theta} \pm e^{-i\theta})^3$ *to show*

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta),$$
$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

Solução: Recorde que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, já que cos é uma função par e sin é uma função ímpar. Assim: $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, e também $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$. Aí:

$$(e^{i\theta} \pm e^{-i\theta})^3 = (e^{i\theta})^3 \pm 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 \pm (e^{-i\theta})^3$$
$$(e^{i\theta} \pm e^{-i\theta})^3 = e^{i(3\theta)} \pm 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} \pm e^{-i(3\theta)}$$

No caso $+$ temos:

$$8\cos^3\theta = \cos 3\theta + \cancel{i\sin 3\theta} + 3\cos\theta + \cancel{i\sin\theta} + 3\cos\theta - \cancel{i\sin\theta} + \cos 3\theta - \cancel{i\sin 3\theta}$$
$$8\cos^3\theta = 6\cos\theta + 2\cos 3\theta$$
$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta).$$

E no caso $-$ temos:

$$-8i\sin^3\theta = \cancel{\cos 3\theta} + i\sin 3\theta - \cancel{3\cos\theta} - 3i\sin\theta + \cancel{3\cos\theta} - 3i\sin\theta - \cancel{\cos 3\theta} + i\sin 3\theta$$
$$-8\sin^3\theta = 2\sin 3\theta - 6\sin\theta$$
$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

$\square$

Exercício 6. *Use Question* 5 *to evaluate* $\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\ d\theta$, $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\ d\theta$.

Solução: Para a primeira temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\ d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta)\ d\theta \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\ d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos 3\theta\ d\theta \\
&= \frac{3}{4}(\sin\theta)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{12}(\sin 3\theta)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{4}(\sin\pi/2 - \sin 0) + \frac{1}{12}(\sin 3\pi/2 - \sin 0) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

E para a segunda:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\ d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)\ d\theta \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\ d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin 3\theta\ d\theta \\
&= \frac{3}{4}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{12}(-\cos 3\theta)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{4}(-\cos\pi/2 + \cos 0) - \frac{1}{12}(-\cos 3\pi/2 + \cos 0) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 7. *Evaluate the integral* $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 4x\ dx$ *by taking the real part of*

$$\int_0^{\pi} e^{2x}e^{4ix}\ dx = \int_0^{\pi} e^{(2+4i)x}\ dx.$$

Now do it by integrating by parts twice, and compate the efficiency of the two methods.

Solução: Via complexos, temos:

$$\int_0^{\pi} e^{(2+4i)x}\ dx = \frac{1}{2+4i}e^{(2+4i)x}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2+4i}(e^{2\pi+4i\pi} - 1),$$

mas $e^{i\pi} = -1 \implies e^{4i\pi} = 1$, daí:

$$\int_0^{\pi} e^{(2+4i)x}\ dx = \frac{e^{2\pi}-1}{2+4i} = \frac{e^{2\pi}-1}{20}(2-4i),$$

e tomando a parte real, o resultado procurado é $\dfrac{e^{2\pi}-1}{10}$.

Por outro lado, integrando por partes temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{2x}\cos 4x \; dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}e^{2x}(-4\sin 4x) \; dx \\
\int_0^\pi e^{2x}\cos 4x \; dx &= \frac{1}{2}(e^{2\pi}\cos 4\pi - e^0\cos 0) + 2\int_0^\pi e^{2x}\sin 4x \; dx \\
\int_0^\pi e^{2x}\cos 4x \; dx &= \frac{e^{2\pi}-1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 4x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}e^{2x}(4\cos 4x) \; dx\right) \\
\int_0^\pi e^{2x}\cos 4x \; dx &= \frac{e^{2\pi}-1}{2} + \cancelto{0}{e^{2x}\sin 4x\Big|_0^\pi} - 4\int_0^\pi e^{2x}\cos 4x \; dx \\
5\int_0^\pi e^{2x}\cos 4x \; dx &= \frac{e^{2\pi}-1}{2} \\
\int_0^\pi e^{2x}\cos 4x \; dx &= \frac{e^{2\pi}-1}{10}
\end{aligned}$$

De fato, integrar usando números complexos é muito mais eficiente.

□

2 Complex functions

Exercício 1. *Prove that for all* $|z| = 2$

$$2 \leq |z-4| \leq 6.$$

Solução: Temos $|z-4| \leq |z| + 4 = 6$. Por outro lado: $|z-4| \geq |z| - 4 = 2$.

□

Exercício 2. *Prove that for all* $|z| = 3$

$$\frac{8}{11} \leq \left|\frac{z^2+1}{z^2+2}\right| \leq \frac{10}{7}.$$

Solução: Temos $|z^2+1| \leq |z^2|+1 = |z|^2+1 = 10$ e $|z^2+1| \geq |z^2|-1 = |z|^2-1 = 8$. Mas também temos $|z^2+2| \leq |z^2|+2 = |z|^2+2 = 11$ e $|z^2+2| \geq |z^2|-2 = |z|^2-2 = 7$. Daí

$$7 \leq |z^2+2| \leq 11 \implies \frac{1}{11} \leq \frac{1}{|z^2+2|} \leq \frac{1}{7} \implies \frac{8}{11} \leq \left|\frac{z^2+1}{z^2+2}\right| \leq \frac{10}{7},$$

visto que $8 \leq |z^2+1| \leq 10$ e $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

□

Exercício 3. *Prove that for all* $|z| = 4$

$$\frac{3}{5} \leq \left|\frac{z+i}{z-i}\right| \leq \frac{5}{3}.$$

Solução: Temos $|z \pm i| \leq |z| + |i| = 4+1 = 5$ e $|z \pm i| \geq |z| - |i| = 4-1 = 3$. Então:

$$3 \leq |z-i| \leq 5 \implies \frac{1}{5} \leq \frac{1}{|z-i|} \leq \frac{1}{3} \implies \frac{3}{5} \leq \left|\frac{z+i}{z-i}\right| \leq \frac{5}{3},$$

assim como no exercício anterior.

□

Exercício 4. *Prove that for all* $|z| = R > 2$

$$\left|\frac{1}{z^2+z+1}\right| \leq \frac{1}{R^2-R-1}.$$

Solução: Basta ver que $|z^2+z+1| \geq |z^2+z|-1 \geq |z^2|-|z|-1 \geq |z|^2-|z|-1 = R^2-R-1$. Então:

$$|z^2+z+1| \geq R^2-R-1 \implies \left|\frac{1}{z^2+z+1}\right| \leq \frac{1}{R^2-R-1}.$$

□

Exercício 5. *Prove that* $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

Solução:

$$|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z}| = |e^{\operatorname{Re} z}|\overset{1}{\cancel{|e^{i\operatorname{Im} z}|}} = |e^{\operatorname{Re} z}| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

□

Exercício 6. *Find where* $|e^z|$ *is maximum for* $|z| \leq 2$ *(draw a diagram).*

Solução: Não precisamos de um diagrama. Basta notar que $|z| \leq 2$ é um círculo centrado na origem, com raio 2. Os pontos deste círculo com a maior parte real, em módulo, são $z_1 = -2$ e $z_2 = 2$.

□

Exercício 7. *Prove that for* $z = x + iy$

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$
$$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

Solução: Temos:

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Então:

$$\begin{aligned}
|\sin(x+iy)|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + (1 - \sin^2 x)\sinh^2 y \\
&= \sin^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y + \sinh^2 y - \sin^2 \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y.
\end{aligned}$$

Analogamente para o outro. Temos:

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

E daí:

$$\begin{aligned}
|\cos(x+iy)|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \\
&= \cos^2 x(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y \\
&= \cos^2 x + \cos^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \\
&= \cos^2 x + \sinh^2 y.
\end{aligned}$$

□

Exercício 8. *Find where* $|\sin z|$ *is maximum for* $|z| \leq 1$ *(draw a diagram).*

Solução: Chame $z = x + iy$. Usando o exercício acima, e identidades trigonométricas, temos:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y = 1 - \cos^2 x + \cosh^2 y - 1 = \cosh^2 y - \cos^2 x.$$

Devemos maximizar $\cosh^2 y$ e minimizar $\cos^2 x$ no círculo unitário, onde o módulo é máximo. Temos que $\cosh y$ é crescente e $\cos x$ se anula para $x = 0$: então $|\sin z|$ atinge o seu máximo nos pontos i e $-i$.

$\square$

Exercício 9. *Prove that all points z satisfying*

$$\left|\frac{z+1}{z+4}\right| = 2$$

lie on a circle. Find its center and radius.

Solução: Escreva $z = x + iy$. Temos:

$$\left|\frac{z+1}{z+4}\right| = 2 \implies |z+1| = 2|z+4| \implies |z+1|^2 = 4|z+4|^2,$$

e passando para as variáveis x e y vem:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4((x+4)^2 + y^2) \implies x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 32x + 64 + 4y^2.$$

Organizando:

$$3x^2 + 30x + 3y^2 + 63 = 0 \implies x^2 + 10x + y^2 + 21 = 0,$$

e completando quadrados vem:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4 = 0 \implies (x+5)^2 + y^2 = 4.$$

Temos um círculo de centro -5 e raio 2.

$\square$

3 Derivatives

Exercício 1. *Verify the Cauchy-Riemann equations for the following functions:*

$$z^3, \quad e^z, \quad \sin z, \quad \log z.$$

Verify the Cauchy-Riemann formula for the derivative in each case.

Solução:

- $w = z^3$. Temos:

  $$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

  Chamamos $u = x^3 - 3xy^2$ e $v = 3x^2y - y^3$. Então:

  $$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

  Ainda, temos $\dfrac{dw}{dz} = 3z^2 = 3(x+iy)^2 = (3x^2 - 3y^2) + i(6xy) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

- $w = e^z$. Temos:

  $$e^x = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i(e^x \sin y).$$

  Chamamos $u = e^x \cos y$ e $v = e^x \sin y$. Então:

  $$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

  Ainda, temos $\dfrac{dw}{dz} = e^z = e^x \cos y + i(e^x \sin y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

- $w = \sin z$. Temos:

  $$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i(\cos x \sinh y).$$

  Chamamos $u = \sin x \cosh y$ e $v = \cos x \sinh y$. Então:

  $$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

  E por outro lado:

  $$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \cosh y + i(-\sin x \sinh y) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

- $w = \log z$. Temos:

  $$\log z = \log(x+iy) = \log|z|e^{i\mathrm{Arg}(z)} = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

  Chamamos $u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ e $v = \arctan(y/x)$. Então:

  $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

  E por fim:

  $$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$\square$

Exercício 2. *Prove that* $|z|^2$ *is differentiable only at* $z = 0$. *What is its derivative at this point?*

Solução: Escreva:

$$w = |z|^2 = x^2 + y^2 + 0i.$$

Chame $u = x^2 + y^2$ e $v = 0$. Então:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

As derivadas parciais são contínuas, então a função será diferenciável apenas onde valerem as equações de Cauchy-Riemann. Mas isso ocorre somente no ponto $z = 0$. Daí:

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=0} + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=0} = 0.$$

$\square$

Exercício 3. *Prove that* $f(z) = \bar{z}(|z|^2 - 2)$ *is differentiable only on the unit circle* $|z| = 1$. *Verify that* $f'(z) = \bar{z}^2$ *for these* z.

Solução: Passando para $z = x + iy$, temos:

$$f(x + iy) = (x - iy)(x^2 + y^2 - 2) = (x^3 + xy^2 - 2x) + i(-x^2y - y^3 + 2y).$$

Chame $u = x^3 + xy^2 - 2x$ e $v = -x^2y - y^3 + 2y$. Temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x^2 - 3y^2 + 2.$$

Como as derivadas parciais são contínuas, a função será diferenciável onde valerem as equações de Cauchy-Riemann. A condição $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ vale de qualquer jeito. E por outro lado:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \iff 3x^2 + y^2 - 2 = -x^2 - 3y^2 + 2 \iff 4x^2 + 4y^2 = 4 \iff x^2 + y^2 = 1,$$

ou seja, se e somente se $|z| = 1$. Finalmente:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 2 + i(-2xy) \\ &\overset{|z|=1}{=} 3x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 + i(-2xy) \\ &= x^2 - y^2 + i(-2xy) = \bar{z}^2. \end{aligned}$$

$\square$

Exercício 4. *Prove that if* $f(z)$ *is differentiable for all* z *and is everywhere real-valued, then* $f(z)$ *must be constant.*

Solução: Escreva $f(z) = u + iv$. Por hipótese, $v \equiv 0$, portanto $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0$. Como f é diferenciável, valem as equações de Cauchy-Riemann, e segue que $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ também. Então u é constante.

□

Exercício 5. *Find the Maclaurin expansion of $e^z \sin z$ up to terms in z^5*

i) by differentiating and putting $z = 0$,

ii) by multiplying the Maclaurin expansions of e^z and $\sin z$ together.

Solução:

i) Chame $f(z) = e^z \sin z$. Então:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= e^z(\sin z + \cos z) \implies f'(0) = 1 \\
f''(z) &= e^z(2\cos z) \implies f''(0) = 2 \\
f'''(z) &= 2e^z(-\sin z + \cos z) \implies f'''(0) = 2 \\
f^{(4)}(z) &= 2e^z(-2\sin z) \implies f^{(4)}(0) = 0 \\
f^{(5)}(z) &= -4e^z(\sin z + \cos z) \implies f^{(5)}(0) = -4.
\end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
P_5(f,0) &= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \frac{f'''(0)}{6}z^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}z^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}z^5 \\
&= z + z^2 + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30}.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
e^z \sin z &\approx \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}\right) \\
&\approx z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + z^2 - \frac{z^4}{6} + \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{12} + \frac{z^4}{6} + \frac{z^5}{24} \\
&= z + z^2 + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30}.
\end{aligned}$$

□

Exercício 6. *Find the Taylor expansions of the following functions at the points indicated. State the range of validity in each case.*

i) $1/z$ at $z = 2$,

ii) e^z at $z = i$,

iii) $\log z$ (PV) at $z = 1$.

Solução:

i) Chame $f(z) = 1/z = z^{-1}$. Temos:

$$f'(z) = -z^{-2}, \quad f''(z) = 2z^{-3}, \quad f'''(z) = -2 \cdot 3z^{-4},$$

e em geral $f^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-(n+1)}$. Então $f^{(n)}(2) = \dfrac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$, e obtemos:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{z-2}{4} + \frac{(z-2)^2}{8} - \frac{(z-2)^3}{16} + \cdots .$$

Veja que o coeficiente de $(z-2)^n$ é $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$. Então o raio de convergência R da série é dado por

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2.$$

Então a série converge para os pontos z tais que $|z-2| < 2$.

ii) Chame $f(z) = e^z$. Então $f^{(n)}(z) = e^z$, e aí $f^{(n)}(i) = e^i$. Assim:

$$e^z = e^i \left(1 + (z-i) + \frac{(z-i)^2}{2} + \frac{(z-i)^3}{6} + \frac{(z-i)^4}{24} + \cdots \right).$$

E esta série converge sempre, pois o coeficiente de $(z-i)^n$ é $a_n = e^i/n!$, e daí temos que o raio de convergência é:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$$

iii) Chame $f(z) = \log z$ (PV). Então, chame $g(z) = f'(z) = z^{-1}$. Pelo primeiro item deste exercício, $f^{(n+1)}(z) = g^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-(n+1)}$. Assim, temos que $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)! z^{-n}$, daí $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Então, o coeficiente de $(z-1)^n$ na série é $a_n = (-1)^{n-1}/n$, e obtemos:

$$\log z \,(\mathrm{PV}) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \frac{(z-1)^5}{5} + \cdots ,$$

com raio de convergência dado por:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Então a série converge para os pontos z tais que $|z-1| < 1$.

□

Exercício 7. *Find the Laurent expansions of the following functions at the points indicated. State what type of singularity each one is, and what the residues are. Indicate the principal part in each case.*

i) e^z/z^{10} *at* $z = 0$,

ii) $\sin z/z^{15}$ *at* $z = 0$,

iii) $\dfrac{1}{z^2-1}$ *at* $z = \pm 1$.

Solução:

i) Temos:

$$\frac{e^z}{z^{10}} = \frac{1}{z^{10}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{z^{n-10}}{n!}.$$

Daí $z=0$ é um polo de ordem 10, e para $n=9$ obtemos o termo $\frac{1}{9!}\frac{1}{z}$, portanto o resíduo da função em $z=0$ é $\frac{1}{9!}$. A parte principal da expansão fica:

$$\frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^8} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^7} + \cdots + \frac{1}{8!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{9!}\frac{1}{z}.$$

ii) Temos:

$$\frac{\sin z}{z^{15}} = \frac{1}{z^{15}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n-14}}{(2n+1)!}.$$

O termo com a menor potência é $\frac{1}{z^{14}}$, para $n=0$, então $z=0$ é um polo de ordem 14. E como não existe $n \geq 0$ inteiro tal que $2n-14=-1$, o resíduo da função em $z=0$ é zero. A parte principal da expansão fica:

$$\frac{1}{z^{14}} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^{12}} + \frac{1}{120}\frac{1}{z^{10}} + \cdots - \frac{1}{11!}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{13!}\frac{1}{z^2}.$$

iii) Façamos primeiro para $z=1$. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{z-1}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(\frac{1-z}{2}\right)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

O termo com menor potência é $\frac{1}{2(z-1)}$, para $n=0$, então $z=1$ é um polo simples. Ainda mais, o resíduo da função em $z=1$ é $1/2$. E a parte principal da expansão é apenas o termo $\frac{1}{2(z-1)}$.

Agora façamos o mesmo processo para $z=-1$. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{z+1}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1}\frac{1}{-2+z+1} = \frac{-1}{2}\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\left(\frac{z+1}{2}\right)}\\
&= \frac{-1}{2}\frac{1}{z+1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \frac{-1}{2}\frac{1}{z+1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}(z+1)^n\\
&= \sum_{n\geq 0}-\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

O termo com menor potência é $\frac{-1}{2(z+1)}$ para $n=0.$, então $z=-1$ é um polo simples. E o resíduo da função em $z=-1$ é $-1/2$. A parte principal da expansão é apenas o termo $\frac{-1}{2(z+1)}$.

□

Exercício 8. *Find constants* A, B *such that:*

$$\mathrm{f}(z) = \frac{3z+1}{(z+2)(z-3)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-3.}$$

Hence find the Maclaurin expansion of $\mathrm{f}(z)$. *What is its range of validity?*

Solução: Começamos com uma aplicação direta do método de frações parciais:

$$3z+1 = A(z-3) + B(z+2).$$

Escolhendo $z = 3$ obtemos $B = 2$. Escolhendo $z = -2$ vem que $A = 1$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{3z+1}{(z+2)(z-3)} &= \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z+3} = \frac{1}{2+z} - \frac{2}{3-z} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-z}{2}\right)^n - \frac{2}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n - \frac{2}{3}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}z^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n\geq 0}\frac{2}{3^{n+1}}z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n.
\end{aligned}$$

A expressão é válida para todo z com $|z| < 2$,, que é o maior raio para que valham simultaneamente ambas as expansões na segunda linha do cálculo acima.

□

4 Integrals

Exercício 1. *Evaluate the following contour integrals:*

(i) $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\,dz$ *where* γ *is the unit circle* $z = e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

(ii) $\int_\gamma |z|^2\,dz$ *where* γ *is the parabolic arc* $z = t + it^2$ $(0 \le t \le 1)$.

(iii) $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ *where* γ *is the straight line joining* 0 *to* $1 + i$.

Solução:

(i) Temos $dz = ie^{it}\,dt$, e assim:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \mathrm{Re}(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(e^{it})\,ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{it}\cos t\,dt \\
&= i\int_0^{2\pi} (\cos t + i\sin t)\cos t\,dt = i\int_0^{2\pi} \cos^2 t + i\sin t\cos t\,dt \\
&= i\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\,dt = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos(2t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\,dt \\
&= \frac{i}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{\cos(2t)}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{i}{2}2\pi + 0 = i\pi.
\end{aligned}$$

(ii) Temos $dz = (1 + 2it)\,dt$. Então:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma |z|^2\,dz &= \int_0^1 |t + it^2|^2(1 + 2it)\,dt = \int_0^1 (t^2 + t^4)(1 + 2it)\,dt \\
&= \int_0^1 t^2 + t^4 + 2it^3 + 2it^5\,dt = \int_0^1 t^2 + t^4\,dt + 2i\int_0^1 t^3 + t^5\,dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 2i\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{8}{15} + 2i\frac{5}{12} = \frac{8}{15} + \frac{5i}{6}.
\end{aligned}$$

(iii) O tal segmento pode ser parametrizado por $z = (1 + i)t = t + it$, com $0 \le t \le 1$. Assim temos que $dz = (1 + i)\,dt$. E daí:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \bar{z}\,dz &= \int_0^1 \overline{t + it}(1 + i)\,dt = \int_0^1 (t - it)(1 + i)\,dt \\
&= \int_0^1 t + it - it - i^2 t\,dt = \int_0^1 2t\,dt = t^2\Big|_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

□

Exercício 2. *Use the estimate lemma to prove the following inequalities.*

(i) $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz\right| \le 2\pi e^2$ *where* γ *is the circle* $|z - 1| = 1$.

(ii) $\left|\int_\gamma \frac{\sin z}{z+i}\,dz\right| \le \frac{\pi\sinh(1)}{\sqrt{2}}$, *where* γ *is the semicircle* $z = e^{it}$ $(0 \le t \le \pi)$.

(iii) $\left|\int_\gamma \frac{z-2}{z-3}\,dz\right| \leq 4\sqrt{10}$ *where γ is the square with vertices $\pm 1 \pm i$.*

Solução:

(i) Se $|z-1|=1$, então $|z|=|z-1+1|\leq |z-1|+1=2$, e daí $\mathrm{Re}(z)\leq 2$. Recorde que a exponencial real é crescente. Temos:

$$\left|\frac{e^z}{z-1}\right| = \frac{|e^z|}{|z-1|} = \frac{e^{\mathrm{Re}(z)}}{1} = e^{\mathrm{Re}(z)} \leq e^2.$$

E o comprimento do círculo é 2π (pois o raio é 1). Segue que:

$$\left|\oint_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz\right| \leq 2\pi e^2.$$

(ii) No semi-círculo unitário, pelo exercício 8 da seção anterior, o valor máximo de $\sin z$ é atingido para $z=i$, donde $|\sin(i)| = |\sinh(1)| = \sinh(1)$. Por outro lado, $|z+i|\geq\sqrt{2}$ para todo z no semi-círculo, e a distância mínima é realizada para $z=1$ ou -1. Então:

$$\left|\frac{\sin z}{z+i}\right| = \frac{|\sin z|}{|z+i|} \leq \frac{\sinh(1)}{\sqrt{2}}.$$

Porém o semi-círculo tem comprimento π, pois tem raio 1. Obtemos:

$$\left|\int_\gamma \frac{\sin z}{z+1}\right| \leq \frac{\pi\sinh(1)}{\sqrt{2}}.$$

(iii) É imediato que o perímetro do quadrado é 8. Partindo do ponto $-1-i$, em sentido anti-horário, chamemos os lados do quadrado de $\gamma_1,\ldots,\gamma_4$.

- Para γ_1 e γ_3, temos $|z-2|\leq\sqrt{10}$ e $|z-3|\geq\sqrt{5}$, donde:

$$\left|\frac{z-2}{z-3}\right| \leq \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

- Para γ_2, temos $|z-2|\leq\sqrt{2}$ e $|z-3|\geq 2$, e assim:

$$\left|\frac{z-2}{z-3}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Para γ_4, temos $|z-2|\leq\sqrt{10}$ e $|z-3|\geq 4$, assim:

$$\left|\frac{z-2}{z-3}\right| \leq \frac{\sqrt{10}}{4}$$

A maior dessas cotas superiores é $\sqrt{2}$. Então podemos afirmar que esta desigualdade vale em toda γ. Segue que:

$$\left|\oint_\gamma \frac{z-2}{z-3}\,dz\right| \leq 8\sqrt{2} < 4\sqrt{10}.$$[1]

[1]Conseguimos uma aproximação melhor do que a proposta. De fato, $8\sqrt{2} < 4\sqrt{10} \iff 64\cdot 2 < 16\cdot 10 \iff 128 < 160 \quad \checkmark$.

$\square$

Exercício 3. *Find all singularities of the following functions. Use the method of differentiating the denominator to find all the residues.*

(i) $\dfrac{z+1}{z-1}$,

(ii) $\dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$,

(iii) $\dfrac{1}{z^2-6z+8}$.

Solução:

(i) Temos apenas um polo simples em $z=1$. Então:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+1}{z-1},1\right)=\left.\frac{z+1}{1}\right|_{z=1}=\frac{1+1}{1}=2.$$

(ii) Temos dois polos simples, um em $i\pi$ e o outro em $-i\pi$. Assim:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2+\pi^2},i\pi\right)=\left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=i\pi}=\frac{e^{i\pi}}{2\pi i}=-\frac{1}{2\pi i}=\frac{i}{2\pi}.$$

Analogamente tem-se $\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2+\pi^2},-i\pi\right)=-i/(2\pi)$.

(iii) Note que $z^2-6z+8=(z-2)(z-4)$, então temos dois polos simples, um em 2 e o outro em 4. Desta forma:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-6z+8},2\right)=\left.\frac{1}{2z-6}\right|_{z=2}=\frac{1}{4-6}=-\frac{1}{2},$$

e também:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-6z+8},4\right)=\left.\frac{1}{2z-6}\right|_{z=4}=\frac{1}{8-6}=\frac{1}{2}.$$

$\square$

Exercício 4. *Use the residue theorem to evaluate the following integrals round the contours indicated.*

(i) $\int_\gamma \dfrac{z+1}{z-1}\,dz$, ($\gamma =$ *circle centre* 1, *radius* 1).

(ii) $\int_\gamma \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz$ ($\gamma =$ *circle centre* πi, *radius* π).

(iii) $\int_\gamma \dfrac{dz}{z^2-6z+8}$ ($\gamma =$ *circle centre* 0, *radius* 3).

Solução:

(i) O interior da curva contém o único polo do integrando, logo:

$$\oint_\gamma \frac{z+1}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z+1}{z-1}, 1\right) = 4\pi i.$$

(ii) O interior da curva contém apenas o polo em πi, assim temos:

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^2+\pi^2}, i\pi\right) = 2\pi i\frac{i}{2\pi} = -1.$$

(iii) O interior da curva contém apenas o polo em 2, daí:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2-6z+8} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-6z+8}, 2\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -i\pi.$$

$\square$

Exercício 5. *Prove that if* $f(z)$ *is differentiable inside and on the closed contour* γ*, then for any* a *inside* γ*:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz \quad (\textit{Cauchy's integral formula}).$$

What is the value of this integral if a *is outside* γ*?.*

Solução: Se a está no interior de γ, existe $R > 0$ tal que γ_R, o círculo centrado em a com raio R está contido no interior de γ. Temos:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

pelo Teorema de Cauchy-Goursat, visto que $f(z)/(z-a)$ é holomorfa na região interna à γ e exterior à γ_r (com efeito, o ponto "problemático"a não está na tal região). Com isto:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{\gamma_R} \frac{f(a)+f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = f(a)\oint_{\gamma_R}\frac{dz}{z-a} + \oint_{\gamma_R}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz,$$

isto é:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\,f(a) + \oint_{\gamma_R}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz.$$

Só falta verificarmos que a última integral é zero.

Como f é holomorfa, é contínua em a. Seja $\epsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $|z-a| \leq \delta$ implica $|f(z)-f(a)| < \epsilon/(2\pi)$. Reduzimos δ para que tenhamos também $\delta < R$, caso necessário. Então se $|z-a| = \delta$ temos:

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| < \frac{\epsilon}{2\pi\delta}.$$

O comprimento do círculo γ_δ (círculo com centro em a e raio δ) é $2\pi\delta$. Segue da estimativa ML e de mais uma aplicação do Teorema de Cauchy-Goursat que:

$$\left|\oint_{\gamma_R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| = \left|\oint_{\gamma_\delta} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| \leq 2\pi\delta\frac{\epsilon}{2\pi\delta} = \epsilon.$$

Isto nos dá que:

$$\oint_{\gamma_R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0,$$

e disto segue que:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a) \implies f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

E se a não está no interior de γ, a integral é zero, pois $f(z)/(z-a)$ é diferenciável no interior de γ e podemos aplicar Cauchy-Goursat novamente.

$\square$

5 Evaluation of finite real integrals

Exercício 1. *Evaluate the following integrals.*

(1) $\int_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2+\cos t}$ $\quad (2\pi/\sqrt{3})$.

(2) $\int_0^{2\pi} \dfrac{dt}{3+2\sin t}$ $\quad (2\pi/\sqrt{5})$.

(3) $\int_0^{2\pi} \dfrac{dt}{4-3\cos^2 t}$ $\quad (\pi)$.

(4) $\int_0^{2\pi} \dfrac{\sin(5t)}{\sin t}\, dt$ $\quad (2\pi)$.

(5) $\int_0^{2\pi} \cos^6 t\, dt$ $\quad (5\pi/8)$.

Solução:

(1) Chame $z = e^{it}$, de modo que $dz = iz\,dt$ e assim $dt = dz/(iz)$. Sendo γ o círculo unitário, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} &= \oint_\gamma \frac{1}{iz} \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\, dz = \oint_\gamma \frac{2}{i} \frac{1}{4z+z^2+1}\, dz \\
&= \frac{2}{i} \oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4z+1} = \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right) \\
&= 4\pi \frac{1}{2z+4}\Bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} = 4\pi \frac{1}{-4+2\sqrt{3}+4} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Observamos que o outro polo, $-2-\sqrt{3}$ não está no interior do círculo unitário e por esse motivo não entrou no cômputo acima.

(2) Chame $z = e^{it}$, de modo que $dz = iz\,dt$ e assim $dt = dz/(iz)$. Sendo γ o círculo unitário, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t} &= \oint_\gamma \frac{1}{iz} \frac{1}{3+2\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\, dz = \oint_\gamma \frac{1}{3iz+z^2-1}\, dz \\
&= \oint_\gamma \frac{dz}{z^2+3iz-1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+3iz-1}, i\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&= 2\pi i \frac{1}{2z+3i}\Bigg|_{z=i(-3+\sqrt{5})/2} = 2\pi i \frac{1}{i(-3+\sqrt{5})+3i} = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Novamente, o outro polo, $i(-3-\sqrt{5})/2$, não está no interior do círculo unitário e por isso não foi considerado na conta.

(3) Chame $z = e^{it}$, de modo que $dz = iz\,dt$ e assim $dt = dz/(iz)$. Sendo γ o círculo unitário, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-3\cos^2 t} &= \oint_\gamma \frac{1}{iz} \frac{1}{4-3\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)^2}\, dz = \oint_\gamma \frac{1}{iz} \frac{1}{4-3\frac{1}{4i^2}\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)}\, dz \\
&= \oint_\gamma \frac{1}{iz} \frac{1}{4+\frac{3}{4}\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)}\, dz = \oint_\gamma \frac{1}{i} \frac{4z}{16z^2+3z^2\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)}\, dz \\
&= \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{4z}{3z^4+10z^2+3}\, dz \\
&= \frac{1}{i}2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{4z}{3z^4+10z^2+3}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{4z}{3z^4+10z^2+3}, -\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= 2\pi\left(\left.\frac{4z}{12z^3+20z}\right|_{z=i/\sqrt{3}} + \left.\frac{4z}{12z^3+20z}\right|_{z=-i/\sqrt{3}}\right) \\
&= 2\pi\left(\left.\frac{1}{3z^2+5}\right|_{z=i/\sqrt{3}} + \left.\frac{1}{3z^2+5}\right|_{z=-i/\sqrt{3}}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{2}{3\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2+5}\right) = \frac{4\pi}{-1+5} = \frac{4\pi}{4} = \pi.
\end{aligned}$$

Os outros dois polos, 3 e -3, não estão no interior do círculo unitário, e assim não entram na conta.

(4) Inicialmente notamos que mesmo que $\sin t$ se anule em 0, π e 2π, existem os limites:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5t)}{\sin t} = \lim_{t\to \pi}\frac{\sin(5t)}{\sin t} = \lim_{t\to 2\pi}\frac{\sin(5t)}{\sin t} = 5,$$

então podemos proceder como anteriormente. Chame $z = e^{it}$, de modo que $dz = iz\,dt$ e assim $dt = dz/(iz)$. Sendo γ o círculo unitário, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin(5t)}{\sin t}\, dt &= \oint_\gamma \frac{1}{iz} \frac{\frac{1}{2i}\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)}{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\, dz = \oint_\gamma \frac{1}{iz} \frac{\frac{z^{10}-1}{z^5}}{\frac{z^2-1}{z}}\, dz = \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{z^{10}-1}{z^7-z^5}\, dz \\
&= \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{1}{z^5}\frac{z^{10}-1}{(z+1)(z-1)}\, dz = \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{1}{z^5}\frac{z^9+z^8+z^7+\cdots+z+1}{z+1}\, dz \\
&= \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{1}{z^5}\frac{z^8(z+1)+z^6(z+1)+z^4(z+1)+z^2(z+1)+(z+1)}{(z+1)}\, dz \\
&= \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{z^8+z^6+z^4+z^2+1}{z^5}\, dz = \frac{1}{i}\oint_\gamma z^3+z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}\, dz \\
&= \frac{1}{i}2\pi i\cdot 1 = 2\pi.
\end{aligned}$$

(5) Chame $z = e^{it}$, de modo que $dz = iz\,dt$ e assim $dt = dz/(iz)$. Sendo γ o círculo

unitário, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^6 t \, dt &= \oint_\gamma \frac{1}{iz}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^6 dz = \frac{1}{i2^6}\oint_\gamma \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^6 dz \\ &= \frac{1}{i2^6}\oint_\gamma \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} z^k \frac{1}{z^{6-k}} \, dz = \frac{1}{i2^6}\oint_\gamma \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} z^{2k-7} \, dz \\ &= \frac{1}{i2^6} 2\pi i \binom{6}{3} = \frac{\pi}{2^5}\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1\cdot \cancel{3!}} = \frac{5\pi}{8}.\end{aligned}$$

□

6 Evaluation of infinite real integrals

Evaluate the following integrals.

Exercício 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+4}$ $(\pi/2)$.

Solução: Seja $R > 2$, qualquer. Chame γ_1 o segmento de reta ligando $-R$ a R, γ_2 o semi-círculo superior de raio R, no sentido anti-horário, e γ a concatenação das duas curvas. A função $1/(z^2+4)$ tem apenas um polo no interior de γ, a saber, o ponto $2i$. Então:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+4} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+4} \\
2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4}, 2i\right) &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+4} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+4} \\
2\pi i \frac{1}{4i} &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+4} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+4} \\
\frac{\pi}{2} &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+4} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+4}
\end{aligned}$$

Porém, se $|z| = R > 2$, temos $|z^2+4| \geq R^2 - 4 > 0$, e assim $1/|z^2+4| \leq 1/(R^2-4)$. Como o comprimento de γ_2 é πR, temos:

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+4} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-4} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

Com isto, impondo $R \to +\infty$ obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{2}.$$

□

Exercício 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ $(\pi/6)$.

Solução: Seja $R > 2$, qualquer. Chame γ_1 o segmento de reta ligando $-R$ a R, γ_2 o semi-círculo superior de raio R, no sentido anti-horário, e γ a concatenação das duas curvas. A função $1/(z^2+1)(z^2+4)$ tem dois polos (simples) no interior de γ, a saber, os pontos i e $2i$. Já adiantando:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}, i\right) &= \frac{1}{4i^3+10i} = \frac{1}{-4i+10i} = \frac{1}{6i} = \frac{2}{12i} \\
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}, 2i\right) &= \frac{1}{4(2i)^3+10(2i)} = \frac{1}{-32i+20i} = -\frac{1}{12i}
\end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \\
2\pi i \left(\frac{2}{12i} - \frac{1}{12i}\right) &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \\
\frac{\pi}{6} &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}
\end{aligned}$$

Porém se $|z| = R > 2$, temos $|z^2+1| \geq R^2 - 1 > 0$ e $|z^2+4| \geq R^2 - 4 > 0$, e assim $\frac{1}{|z^2+1||z^2+4|} \leq \frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}$. Como o comprimento de γ_2 é πR, temos:

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto fazendo $R \to +\infty$ segue que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}.$$

□

Exercício 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$ $\qquad (\pi/2)$.

Solução: Seja $R > 1$, qualquer. Chame γ_1 o segmento de reta ligando $-R$ a R, γ_2 o semi-círculo superior de raio R, no sentido anti-horário, e γ a concatenação das duas curvas. A função $1/(z^2+1)^2$ tem apenas um polo duplo no interior de γ, a saber, o ponto i. Calculemos primeiramente o resíduo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}, i\right) &= \frac{d}{dz}\bigg|_{z=i}\left((z-i)^2\frac{1}{(z^2+1)^2}\right) = \frac{d}{dz}\bigg|_{z=i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right) \\ &= \frac{-2}{(z+i)^3}\bigg|_{z=i} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} \end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+1)^2} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2+1)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)^2} \\ 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)^2} \\ \frac{\pi}{4} &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)^2} \end{aligned}$$

Se $|z| = R > 1$, temos $|z^2+1| \geq R^2 - 1 > 0$, então $1/|z^2+1| \leq 1/(R^2-1)$ e portanto $1/|z^2+1|^2 \leq 1/(R^2-1)^2$. Como o comprimento de γ_2 é πi, vem:

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então impondo $R \to +\infty$ resulta que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

□

Exercício 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+x+1}$ $\qquad (2\pi/\sqrt{3})$.

Solução: Seja $R > 2$, qualquer. Chame γ_1 o segmento de reta ligando $-R$ a R, γ_2 o semi-círculo superior de raio R, no sentido anti-horário, e γ a concatenação das duas curvas. A função $1/(z^2+z+1)^2$ tem apenas um polo (simples) no interior de γ, a saber, o ponto $(-1+i\sqrt{3})/2$. O outro polo, $(-1-i\sqrt{3})/2$ não está no interior de γ e portanto não participa do cálculo a seguir. Calculemos primeiramente o resíduo:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+z+1}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2z+1}\bigg|_{z=(-1+i\sqrt{3})/2} = \frac{1}{-1+i\sqrt{3}+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

Ainda mais, temos:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+z+1} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+z+1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+z+1} \\
2\pi i\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\right) &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+x+1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+z+1} \\
\frac{2\pi}{\sqrt{3}} &= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+x+1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+z+1}
\end{aligned}$$

Se $|z| = R > 2$, temos $|z^2+z+1| \geq R^2-R-1 > 0$.[2] E assim $1/|z^2+z+1| \leq 1/(R^2-R-1)$. Como o comprimento de γ_2 é πR, obtemos:

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+z+1}\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-R-1} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, impondo $R \to +\infty$ segue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

$\square$

Exercício 5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+2x+2}\,dx \qquad (\pi e^{-1}\cos(1))$.

Solução: Como $|\cos z|$ é ilimitado no eixo imaginário, trabalharemos com e^{iz} ao invés de $\cos z$, e então tomaremos a parte real do resultado. Seja $R > 3$. Chame γ_1 o segmento de reta ligando $-R$ a R, γ_2 o semi-círculo superior de raio R, no sentido anti-horário, e γ a concatenação das duas curvas. A função $e^{iz}/(z^2+2z+2)$ tem dois polos simples $-1-i$ e $-1+i$, porém somente este último está no interior de γ. Temos:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}, -1+i\right) = \frac{e^{i(-1+i)}}{2(-1+i)+1} = \frac{e^{-i+i^2}}{2i} = -\frac{ie^{-1}e^{-i}}{2}.$$

Também:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}\,dz &= \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+1}\,dz \\
2\pi i\left(-\frac{ie^{-1}e^{-i}}{2}\right) &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+1}\,dz \\
\pi e^{-1}e^{-i} &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+1}\,dz
\end{aligned}$$

[2]Tomar qualquer $R > (1+\sqrt{5})/2$ basta. Tomamos 2 por simplicidade.

Se $|z| = R > 3$, temos $|z^2+2z+2| \geq R^2-2R-2 > 0$[3], e assim $1/|z^2+2z+2| \leq 1/(R^2-2R-2)$. Por outro lado, se $z = x+iy$ com $y > 0$, temos $|e^{iz}| = |e^{i(xi+y)}| = |e^{-y+ix}| = e^{-y} < 1$. Como o comprimento de γ_2 é πR, vem:

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-2R-2} \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Portanto, impondo $R \to +\infty$ obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-1}e^{-i}.$$

Disto segue que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx\right) = \operatorname{Re}\left(\pi e^{-1}e^{-i}\right) = \pi e^{-1}\cos(-1) = \pi e^{-1}\cos(1).$$

$\square$

Exercício 6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\,dx \qquad (\pi\sqrt{2})$

Solução: Seja $R > 1$, qualquer. Chame γ_1 o segmento de reta ligando $-R$ a R, γ_2 o semi-círculo superior de raio R, no sentido anti-horário, e γ a concatenação das duas curvas. A função $(z^2+1)/(z^4+1)$ tem dois polos simplies no interior de γ, a saber, o ponto $\omega = \sqrt{2}(1+i)/2$ e $-\overline{\omega}$. Calculemos primeiramente os resíduos:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}, \omega\right) &= \frac{\omega^2+1}{4\omega^3} = \frac{\omega^3+\omega}{-4} = \frac{-\omega^3-\omega}{4} = \frac{\overline{\omega}-\omega}{4} \\ \operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}, -\overline{\omega}\right) &= \frac{(-\overline{\omega})^2+1}{4(-\overline{\omega})^3} = \frac{\overline{\omega}^3+\overline{\omega}}{4} = \frac{-\omega+\overline{\omega}}{4},\end{aligned}$$

usando que $\omega^4 = \overline{\omega}^4 = -1$, $\omega^3 = -\overline{\omega}$ e que $(-\overline{\omega})^3 = \omega$. Somando, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}, \omega\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}, -\overline{\omega}\right) &= \frac{\overline{\omega}-\omega}{4} + \frac{-\omega+\overline{\omega}}{4} \\ &= \frac{\overline{\omega}-\omega}{2} = \frac{-2i\operatorname{Im}(\omega)}{2} \\ &= -i\operatorname{Im}(\omega) = -i\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Com isto:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz &= \int_{\gamma_1} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz \\ 2\pi i\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz \\ \pi\sqrt{2} &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz\end{aligned}$$

[3] Para ser exato, qualquer $R > 1+\sqrt{3}$ serve.

Se $|z| = R > 1$, temos $|z^2+1| \leq R^2+1$ e $|z^4+1| \geq R^4-1 > 0$, donde $|z^2+1|/|z^4+1| \leq (R^2+1)/(R^4-1)$. Como o comprimento da curva γ_2 é πR, temos que:

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z^2+4}\, dz \right| \leq \frac{\pi R(R^2+1)}{R^4-1} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, impondo $R \to +\infty$ segue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = \pi\sqrt{2}.$$

$\square$

Exercício 7. $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^5+1}\, dx$ $\quad(\pi/(5\sin(\pi/5)))$ *Ver obs..*[4]

Solução: Seja $R > 1$ qualquer, e $\omega = e^{i\pi/5}$. Chame γ_1 o segmento de reta ligando 0 a R, γ_2 o arco circular de raio R ligando 0 a $\omega^2 R$ no sentido anti-horário, e γ_3 o segmento de reta ligando $\omega^2 R$ até o 0. Chame também de γ a concatenação das três curvas. Note que a função $1/(z^5+1)$ tem apenas o polo simples ω no interior de γ.

A curva reversa γ_3^- pode ser parametrizada por $\omega^2 t$, com $0 \leq t \leq R$, de modo que $dz = \omega^2\, dt$ e temos:

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{z^5+1} = -\int_{\gamma_3^-} \frac{dz}{z^5+1} = -\int_0^R \frac{\omega^2}{\omega^{10}t^5+1}\, dt = -\omega^2 \int_0^R \frac{dt}{t^5+1} = -\omega^2 \int_0^R \frac{dx}{x^5+1},$$

usando que $\omega^{10} = 1$ e renomeando a variável de integração. Então:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{dz}{z^5+1} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^5+1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^5+1} + \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z^5+1} \\
2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^5+1}, \omega\right) &= \int_0^R \frac{dx}{x^5+1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^5+1} - \omega^2 \int_0^R \frac{dx}{x^5+1} \\
2\pi i \frac{1}{5\omega^4} &= (1-\omega^2) \int_0^R \frac{dx}{x^5+1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^5+1}
\end{aligned}$$

Porém, como $R > 1$, temos que $|z^5+1| \geq R^5-1 > 0$, e assim $1/|z^5+1| \leq 1/(R^5-1)$. Isto juntamente com o fato do comprimento de γ_2 ser $2\pi R/5$ nos dá que:

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^5+1} \right| \leq \frac{2\pi R}{5(R^5-1)} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então fazendo $R \to +\infty$ obtemos:

$$(1-\omega^2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^5+1} = \frac{2\pi i}{5\omega^4} \implies \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^5+1} = \frac{2\pi i}{5\omega^4(1-\omega^2)}.$$

[4] No enunciado original, a resposta consta como $(\pi/5)\sin(\pi/5)$. A resposta correta é como está aqui.

Agora só nos resta verificar que o resultado encontrado acima é na verdade igual a $\pi/(5\sin(\pi/5))$. A conta é direta, usando identidades trigonométricas e que $\omega^5 = -1$:

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi i}{5\omega^4(1-\omega^2)} &= \frac{2\pi i\omega}{5(\omega^2-1)} \\
&= \frac{2\pi i}{5}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}}{-1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{5}\left(\frac{(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})(-1+\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5})}{(-1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})(-1+\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5})}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{5((-1+\cos\frac{2\pi}{5})^2+\sin^2\frac{2\pi}{5})}\left(-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+\right. \\
&\qquad \left.+i\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{5}\left(\frac{-i\sin\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}}{(-1+\cos\frac{2\pi}{5})^2+\sin^2\frac{2\pi}{5}}\right) \\
&= \frac{2\pi}{5}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}}{(-1+\cos\frac{2\pi}{5})^2+\sin^2\frac{2\pi}{5}}\right) \\
&= \frac{2\pi}{5}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{-\pi}{5}}{1-2\cos\frac{2\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}+\sin^2\frac{2\pi}{5}}\right) \\
&= \frac{2\pi}{5}\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{2-2\cos\frac{2\pi}{5}}\right) \\
&= \frac{\pi}{5}\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{1-(1-2\sin^2\frac{\pi}{5})}\right) \\
&= \frac{\pi}{5}\frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin^2\frac{\pi}{5}} \\
&= \frac{\pi}{5}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}.
\end{aligned}$$

□

Exercício 8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx \qquad (3\pi/4).$

Solução: Recorde a identidade:

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)}{4}.$$

Assim, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(3x)}{4x^3}\,dx.$$

Sejam $0 < r < R$. Considere γ_1 o segmento de reta ligando r a R, γ_2 o arco circular orientado no sentido anti-horário ligando R a $-R$, γ_3 o segmento de reta ligando $-R$

a $-r$ e γ_4 o arco circular orientado no sentido horário ligando $-r$ a r. Considere $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ a concatenação. Considere a função:

$$f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz}}{4z^3}.$$

A função tem apenas uma singularidade em $z = 0$ (polo triplo). Calculemos a sua expansão de Laurent:

$$f(z) = \frac{1}{4z^3}\left(3\sum_{n\geq 0}\frac{i^n z^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{3^n i^n z^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{(3-3^n)i^n}{4\cdot n!}\right)z^{n-3}.$$

Como a única singularidade de f não está no interior de γ, f é holomorfa em γ e no interior de γ, portanto pelo Teorema de Cauchy-Goursat temos:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0.$$

Vamos analisar sistematicamente cada integral.

Parametrizando $\gamma_1(x) = x$, com $r \leq x \leq R$, temos:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{3e^{ix} - e^{3ix}}{4x^3}\,dx.$$

Para γ_2, temos que seu comprimento é πR, $|e^{iz}| = e^{\mathrm{Re}(iz)} = e^{-\mathrm{Im}(z)} < 1$, e analogamente $|e^{3iz}| < 1$, já que em todo z em γ_2 temos $\mathrm{Im}(z) > 0$. Portanto:

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R(3+4)}{4R^3} = \frac{\pi}{R^2} \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Parametrizando $\gamma_3^-(x) = -x$, com $r \leq x \leq R$, temos:

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_r^R \frac{3e^{-ix} - e^{-3ix}}{4x^3}\,dx,$$

uma vez que os sinais extras em $(-x^3) = -x^3$ e $dz = -dx$ se cancelam. Observamos aqui que:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 2i\int_r^R \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx,$$

em vista da identidade recordada inicialmente.

Para γ_4, temos:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_4}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(3-3^n)i^n}{4\cdot n!}\right)z^{n-3}\,dz\\ &= \int_{\gamma_4}\frac{1}{2z^3}\,dz + \int_{\gamma_4}\frac{3}{4z}\,dz + \int_{\gamma_4}\sum_{n\geq 3}\left(\frac{(3-3^n)i^n}{4\cdot n!}\right)z^{n-3}\,dz\end{aligned}$$

Temos:

$$\int_{\gamma_4}\frac{1}{2z^3}\,dz = -\frac{1}{4z^2}\Bigg|_{-r}^{r} = 0, \quad \int_{\gamma_4}\frac{3}{4z}\,dz = \frac{3}{4}\int_{\gamma_4} -i\frac{dz}{-iz} = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} -i\,dt = -\frac{3\pi i}{4},$$

e:

$$\left|\int_{\gamma_4}\sum_{n\geq 3}\frac{(3-3^n)i^n}{4\cdot n!}z^{n-3}\right| \leq \pi r\sum_{n\geq 3}\frac{3^n-3}{4\cdot n!}r^{n-3} = \sum_{n\geq 3}\frac{\pi(3^n-3)}{4\cdot n!}r^{n-2} \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Então fazendo $r \to 0$, e em seguida $R \to +\infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2i\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx - \frac{3\pi i}{4} = 0 &\implies \int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8} \\ &\implies \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

por paridade.

$\square$

7 Summation of Series

Exercício 1. *Find the sum of the series:*

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

by integrating $\cot z/z^4$ *around a large square contour.*

Solução: Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ temos que:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} z}{z^4}, n\pi\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z/z^4}{\operatorname{sen} z}, n\pi\right) = \frac{\cos z}{z^4}\frac{1}{\cos z}\bigg|_{z=n\pi} = \frac{1}{\pi^4 n^4}.$$

Precisamos também do resíduo na origem. Temos que $z \operatorname{cotg} z$ é holomorfa em 0 e par, então podemos escrever:

$$z \operatorname{cotg} z = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots \implies \operatorname{cotg} z = \frac{a_0}{z} + a_2 z + a_4 z^3 + \cdots,$$

para alguma sequência conveniente $(a_{2n})_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$. E então:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \operatorname{cotg} z \operatorname{sen} z \\
1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots &= \left(\frac{a_0}{z} + a_2 z + a_4 z^3 + \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) \\
1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots &= a_0 + \left(-\frac{a_0}{6} + a_2\right) z^2 + \left(\frac{a_0}{120} - \frac{a_2}{6} + a_4\right) z^4 + \cdots,
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{cases} 1 = a_0 \\ -\frac{1}{2} = -\frac{a_0}{6} + a_2 \\ \frac{1}{24} = \frac{a_0}{120} - \frac{a_2}{6} + a_4 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_2 = -\frac{1}{3} \\ a_4 = -\frac{1}{45} \end{cases}$$

e daí:

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots \implies \frac{\operatorname{cotg} z}{z^4} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{45z} + \cdots$$

e obtemos $\operatorname{Res}\left(\operatorname{cotg} z/z^4, 0\right) = -1/45$. Se γ_N é o quadrado centrado na origem, com lados paralelos aos eixos, com metade do lado igual a $\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$, e orientado no sentido anti-horário, temos que:

$$\int_{\gamma_N} \frac{\operatorname{cotg} z}{z^4} \, dz = 2\pi i \left(2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi^4 n^4} - \frac{1}{45}\right)$$

Vejamos que cotg é limitada em γ_N. Chame $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Nos lados horizontais, isto é, com y fixo, temos:

$$|\operatorname{cotg} z|^2 = \frac{|\cos z|^2}{|\operatorname{sen} z|^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} \leq \frac{1 + \operatorname{senh}^2 y}{\operatorname{senh}^2 y} = \frac{\cosh^2 y}{\operatorname{senh}^2 y} = \operatorname{cotg}^2 y \leq \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{2},$$

daí segue que $|\operatorname{cotg} z| \leq |\operatorname{cotg} y| < \operatorname{cotg}(\pi/2)$, pois cotg é uma função decrescente e $|y| > N\pi > \pi > \pi/2$ qualquer que seja N.

Nos lados verticais, fixamos $x = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$, e temos:

$$|\operatorname{cotg} z|^2 = \frac{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} = \frac{\operatorname{senh}^2 y}{1 + \operatorname{senh}^2 y} \leq 1.$$

Observe que a desigualdade acima na verdade é válida para os dois lados verticais do quadrado.

Então existe uma constante M, independente de N, tal que $|\operatorname{cotg} z| \leq M$ para todo $z \in \gamma_N$. Ainda, se z está em γ_N, vale que $|z| \geq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi > N\pi$ e o comprimento de γ_N é $8\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi < 9N\pi$, se $N > 4$. Então:

$$\left|\int_{\gamma_N} \frac{\operatorname{cotg} z}{z^4}\, dz\right| \leq \frac{9MN\pi}{N^4\pi^4} = \frac{9M}{\pi^3}\frac{1}{N^3} \xrightarrow{N \to +\infty} 0.$$

Então fazendo $N \to +\infty$ obtemos que:

$$0 = 2\pi i \left(2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi^4 n^4} - \frac{1}{45}\right) \implies \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$\square$

Exercício 2. *Use your answer to Question* 1 *to find the sum of the following series.*

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots \qquad 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$$

Solução: Em ordem:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots &= \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right) - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) \\
&= \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{8}\frac{\pi^4}{90} = \frac{7}{8}\frac{\pi^4}{90} \\
&= \frac{7\pi^4}{720},
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots &= \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right) - \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) \\
&= \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90} = \frac{15}{16}\frac{\pi^4}{90} \\
&= \frac{\pi^4}{96}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 3. *Find the sum of:*

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

by integrating $\operatorname{cosec} z/z^4$ *around a large square contour. Compare your answer with the answer you got in Question* 2.

Solução: Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ temos que:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\csc z}{z^4}, n\pi\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1/z^4}{\operatorname{sen} z}, n\pi\right) = \frac{1}{z^4}\frac{1}{\cos z}\bigg|_{z=n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi^4 n^4}.$$

Precisamos também do resíduo na origem. Temos que $z \csc z$ é holomorfa em 0 e par, então podemos escrever:

$$z \csc z = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots \implies \csc z = \frac{a_0}{z} + a_2 z + a_4 z^3 + \cdots ,$$

para alguma sequência conveniente $(a_{2n})_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$. E então:

$$\begin{aligned} 1 &= \csc z \operatorname{sen} z \\ 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots &= \left(\frac{a_0}{z} + a_2 z + a_4 z^3 + \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) \\ 1 &= a_0 + \left(-\frac{a_0}{6} + a_2\right) z^2 + \left(\frac{a_0}{120} - \frac{a_2}{6} + a_4\right) z^4 + \cdots , \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{cases} 1 = a_0 \\ -\frac{1}{2} = -\frac{a_0}{6} + a_2 \\ \frac{1}{24} = \frac{a_0}{120} - \frac{a_2}{6} + a_4 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{6} \\ a_4 = \frac{7}{360} \end{cases}$$

e daí:

$$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \cdots \implies \frac{\csc z}{z^4} = \frac{1}{z^5} + \frac{1}{6z^3} + \frac{7}{360z} + \cdots$$

e obtemos $\operatorname{Res}\big(\csc z/z^4, 0\big) = 7/360$. Se γ_N é o quadrado centrado na origem, com lados paralelos aos eixos, com metade do lado igual a $\big(N + \frac{1}{2}\big)\pi$, e orientado no sentido anti-horário, temos que:

$$\int_{\gamma_N} \frac{\csc z}{z^4}\,dz = 2\pi i\left(2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\pi^4 n^4} + \frac{7}{360}\right)$$

Vejamos que csc é limitada em γ_N. Chame $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Nos lados horizontais, isto é, com y fixo, temos:

$$|\csc z|^2 = \frac{1}{|\operatorname{sen} z|^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} \leq \frac{1}{\operatorname{senh}^2 y} \leq \frac{1}{y^2} \leq \frac{4}{\pi^2} < 1,$$

pois $|y| > \pi/2$ e $|\operatorname{senh} y| \geq |y|$ para todo $y \in \mathbb{R}$ (isto pode ser visto observando a desigualdade mais simples $\cosh t \geq 1$ para todo t, e integrando de 0 a y ambos os lados, notando que a desigualdade se inverte para $y < 0$).

Nos lados verticais, fixamos $x = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$, e temos:

$$|\csc z|^2 = \frac{1}{|\operatorname{sen} z|^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{senh}^2 y} \leq 1.$$

Portanto $|\csc z| \leq 1$ para todo z em γ_N, seja qual for N. Ainda, se z está em γ_N, vale que $|z| \geq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi > N\pi$ e o comprimento de γ_N é $8\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi < 9N\pi$, se $N > 4$. Assim:

$$\left|\int_{\gamma_N} \frac{\csc z}{z^4}\, dz\right| \leq \frac{9N\pi}{N^4\pi^4} = \frac{9}{\pi^3}\frac{1}{N^3} \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então fazendo $N \to +\infty$ obtemos:

$$0 = 2\pi i\left(2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\pi^4 n^4} + \frac{7}{360}\right) \implies \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720} \implies \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720},$$

o que é exatamente:

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{7\pi^4}{720},$$

como esperado pelo exercício 2.

□

Exercício 4. *Find the sum of:*

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$$

by integrating $\tan z/z^4$ *round a large square contour. Compare with the answer you got in Question 2.*

Solução: Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{tg} z}{z^4}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sen} z/z^4}{\cos z}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \\
&= \left.\frac{\operatorname{sen} z}{z^4}\frac{1}{(-\cos z)}\right|_{z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{-1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4} \\
&= \frac{-16}{\pi^4(2n+1)^4}.
\end{aligned}$$

Precisamos também do resíduo na origem. Temos que $\operatorname{tg} z$ é holomorfa em 0 e ímpar, então podemos escrever:

$$\operatorname{tg} z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots$$

para alguma sequência conveniente $(a_{2n-1})_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$. E então:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \operatorname{tg} z \cos z \\
z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots &= \left(a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \\
z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots &= a_1 z + \left(-\frac{a_1}{2} + a_3\right) z^3 + \left(\frac{a_1}{24} - \frac{a_3}{2} + a_5\right) z^5 + \cdots
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{cases} 1 = a_1 \\ -\frac{1}{6} = -\frac{a_1}{2} + a_3 \\ \frac{1}{120} = \frac{a_1}{24} - \frac{a_3}{2} + a_5 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = \frac{1}{3} \\ a_5 = \frac{2}{15} \end{cases}$$

e daí:

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{z} + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \cdots \implies \frac{\operatorname{tg} z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3z} + \frac{2z}{15} + \cdots$$

e obtemos $\operatorname{Res}\left(\operatorname{tg} z/z^4, 0\right) = 1/3$. Se γ_N é o quadrado centrado na origem, com lados paralelos aos eixos, com metade do lado igual a $N\pi$, e orientado no sentido anti-horário, temos que:

$$\int_{\gamma_N} \frac{\operatorname{tg} z}{z^4}\, dz = 2\pi i \left(2 \sum_{n=1}^{N} \frac{-16}{\pi^4 (2n+1)^4} + \frac{1}{3} \right)$$

Vejamos que tg é limitada em γ_N. Chame $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Nos lados horizontais, isto é, com y fixo, temos:

$$|\operatorname{tg} z|^2 = \frac{|\operatorname{sen} z|^2}{|\cos z|^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y} \leq \frac{1 + \operatorname{senh}^2 y}{\operatorname{senh}^2 y} = \frac{\cosh^2 y}{\operatorname{senh}^2 y} = \coth^2 y < \coth^2 \pi,$$

pois $|y| \geq \pi > 0$ e coth é uma função decrescente.

Nos lados verticais, faça $x = N\pi$ e deixe y variar. Temos:

$$|\operatorname{tg} z|^2 = \frac{|\operatorname{sen} z|^2}{|\cos z|^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y} = \frac{\operatorname{senh}^2 y}{1 + \operatorname{senh}^2 y} \leq 1.$$

Assim concluímos que $|\operatorname{tg} z| \leq \coth \pi$ para todo z em γ_N, seja qual for N.[5]

Se z está em γ_N, então $|z| \geq N\pi$, e o comprimento de γ_N é $8\pi N$, de forma que:

$$\left| \int_{\gamma_N} \frac{\operatorname{tg} z}{z^4}\, dz \right| \leq 8\pi N \frac{\coth \pi}{N^4 \pi^4} = \frac{8 \coth \pi}{\pi^3} \frac{1}{N^3} \overset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então fazendo $N \to +\infty$ obtemos:

$$0 = 2\pi i \left(2 \sum_{n \geq 1} \frac{-16}{\pi^4 (2n+1)^4} + \frac{1}{3} \right) \implies \frac{-32}{\pi^4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{3} = 0$$
$$\implies \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

como esperado pelo exercício 2.

□

Exercício 5. *Find the sum of:*

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$$

by integrating $\cot(\pi z)/(2z+1)^4$ *round a large square contour. Compare with Questions* 2 *and* 4.

[5]Curiosidade: A diferença entre 1 e $\coth \pi$ é, em módulo, menor que 0.004.

Solução: Temos que cada número inteiro é um polo simples, e $-1/2$ é um polo de ordem 4 de $\operatorname{cotg}(\pi z)/(2z+1)^4$. Assim:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{(2z+1)^4}, n\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{(\cos\pi z)/(2z+1)^4}{\operatorname{sen}\pi z}\right) \\ &= \left.\frac{\cos\pi z}{(2z+1)^4}\frac{1}{\pi\cos\pi z}\right|_{z=n} = \frac{1}{\pi(2n+1)^4}, \quad \forall n\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg}\pi z}{(2z+1)^4}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6}\left.\frac{d^3}{dz^3}\right|_{z=-1/2}\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^4\frac{\operatorname{cotg}\pi z}{(2z+1)^4}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left.\frac{d^3}{dz^3}\right|_{z=-1/2}\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^4\frac{\operatorname{cotg}\pi z}{16\left(z+\frac{1}{2}\right)^4}\right) \\ &= \frac{1}{96}\left.\frac{d^3}{dz^3}\right|_{z=-1/2}\operatorname{cotg}(\pi z) \\ &= \frac{1}{96}(-2\pi^3) = -\frac{\pi^3}{48}.\end{aligned}$$

Se γ_N é o quadrado centrado na origem, com lados paralelos aos eixos, com metado do lado igual a $N+\frac{1}{2}$, e orientado no sentido anti-horário, temos que:

$$\int_{\gamma_N}\frac{\operatorname{cotg}\pi z}{(2z+1)^4}\,dz = 2\pi i\left(\sum_{n=-N+1}^{N}\frac{1}{\pi(2n+1)^4}-\frac{\pi^3}{48}\right)$$

Porém já vimos (no exercício 1, por exemplo) que $|\operatorname{cotg}(\pi z)|\le M$ para alguma constante M, independente de N, para todo z em γ_N. Se z está em γ_N, então $|2z+1|\ge 2|z|-1>2N-1$. E o comprimento de γ_N é $8\left(N+\frac{1}{2}\right)\le 9N$, para todo $N>4$. Então:

$$\left|\int_{\gamma_N}\frac{\operatorname{cotg}\pi z}{(2z+1)^4}\,dz\right| \le \frac{9NM}{(2N-1)^4}\overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e assim fazendo $N\to+\infty$ obtemos:

$$0 = 2\pi i\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi(2n+1)^4}-\frac{\pi^3}{48}\right) \implies \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{48}.$$

Porém, notando que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2n+1)^4} = 2\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+1)^4}$, obtemos:

$$\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

como esperado pelos exercícios 2 e 4.

$\square$

Exercício 6. *Find the sum of:*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

by writing the n*th term as:*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Solução: Diretamente, temos a soma telesópica:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

□

Exercício 7. *content...*

Solução: Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, n \neq 1$ temos:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z(z+1)}, n\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\cos(\pi z)/z(z+1)}{\operatorname{sen} \pi z}, n\right) = \frac{\cos \pi z}{z(z+1)} \frac{1}{\pi \cos \pi z}\bigg|_{z=n} = \frac{1}{\pi n(n+1)}.$$

Precisamos também dos resíduos em $z = 0$ e $z = -1$, que são polos duplos. Recordando a expansão de Laurent no exercício 1, temos:

$$\cot z = \frac{1}{z} + O(z) \implies \cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + O(z),$$

donde temos que:

$$\frac{\cot \pi z}{z} + O(1),$$

e assim:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z(z+1)}, 0\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z} - \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z+1}, 0\right) \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z}, 0\right) - \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z+1}, 0\right) \\
&= 0 - \operatorname{Res}(\operatorname{cotg} \pi z, 0) \frac{1}{z+1}\bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Como a função cotangente tem período π, temos:

$$\cot \pi z = \cot \pi(z+1) = \frac{1}{\pi(z+1)} + O(z+1) \implies \frac{\cot \pi z}{z+1} = \frac{1}{\pi(z+1)^2} + O(1),$$

e assim:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z(z+1)}, -1\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z} - \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z+1}, -1\right) \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z}, -1\right) - \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z+1}, -1\right) \\
&= \operatorname{Res}(\operatorname{cotg} \pi z, -1) \frac{1}{z}\bigg|_{z=-1} - 0 \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Se γ_N é o quadrado centrado na origem, com lados paralelos aos eixos, com metado do lado igual a $N + \frac{1}{2}$, e orientado no sentido anti-horário, temos que:

$$\int_{\gamma_N} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z(z+1)}\, dz = 2\pi i \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi z(z+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n(n+1)} - \frac{2}{\pi} \right).$$

Vimos anteriormente que $|\operatorname{cotg}(\pi z)| \leq M$ para alguma constante M, independente de N, para todo z em γ_N. Se z está em γ_N, então $|z(z+1)| \geq |z|(|z|-1) > N(N-1)$. E o comprimento de γ_N é $8\left(N + \frac{1}{2}\right) \leq 9N$, para todo $N > 4$. Então:

$$\left| \int_{\gamma_N} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z(z+1)}\, dz \right| \leq \frac{9NM}{N(N-1)} = \frac{9M}{N-1} \overset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e assim fazendo $N \to +\infty$ obtemos:

$$0 = 2\pi i \left(2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi z(z+1)} - \frac{2}{\pi} \right) \implies \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{\pi} = 0 \implies \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

como esperado pelo exercício 6.

□

8 Fundamental Theorem of Algebra

Exercício 1. *Prove that all the zeros of the polynomial* $z^3 + 9z^2 + 9z + 9$ *lie inside the circle* $|z| = 10$.

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio tem três zeros. Se $|z| = 10$, temos:

$$|9z^2 + 9z + 9| = 9|z^2 + z + 1| \leq 9(|z|^2 + |z| + 1) = 9(100 + 10 + 1) = 999 < 1000 = |z^3|,$$

portanto, pelo Teorema de Rouché, o polinômio tem a mesma quantidade de zeros que z^3, dentro do círculo $|z| = 10$: três zeros.

□

Exercício 2. *Prove that exactly two zeros of the polynomial* z^3+9z^2+9z+9 *lie exactly inside the circle* $|z| = 2$.

Solução: Basta notar que se $|z| = 2$, temos:

$$|z^3 + 9z + 9| \leq |z|^3 + 9|z| + 9 = 8 + 18 + 9 = 35 < 36 = |9z^2|,$$

então pelo Teorema de Rouché, o polinômio tem a mesma quantidade de zeros que $9z^2$ no interior do círculo $|z| = 2$: dois zeros.

□

Exercício 3. *Prove that none of the zeros of the polynomial* z^3+9z^2+9z+9 *lie inside the circle* $|z| = 1/2$.

Solução: Como nos exercícios anteriores, veja que se $|z| = 1/2$, temos:

$$|z^3 + 9z^2 + 9z| \leq |z^3| + 9|z|^2 + 9|z| = \frac{1}{8} + \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{1 + 18 + 36}{8} = \frac{55}{8} < 9,$$

donde pelo Teorema de Rouché, segue que o polinômio tem a mesma quantidade de zeros que 9 no interior do círculo $|z| = 1/2$: nenhum zero.

□

Exercício 4. *Prove that all the zeros of the polynomial* $z^3 + 6z + 8$ *lie between the two circles* $|z| = 1$, $|z| = 3$.

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio tem três zeros. Vejamos que todos estão no interior do círculo $|z| = 3$ primeiro. Se $|z| = 3$, temos:

$$|6z + 8| \leq 6|z| + 8 = 6 \cdot 3 + 8 = 24 < 27 = |z^3|,$$

e pelo Teorema de Rouché, o polinômio tem a mesma quantidade de zeros que z^3 no interior do círculo $|z| = 3$: três zeros.

Agora vejamos que nenhum destes três zeros está no interior de $|z| = 1$. Se $|z| = 1$, temos:

$$|z^3 + 6z| \leq |z|^3 + 6|z| = 1 + 6 \cdot 1 = 7 < 8,$$

e pelo Teorema de Rouché, o polinômio tem a mesma quantidade de zeros que 8 no interior do círculo $|z| = 1$: nenhum zero.

Só resta verificarmos que o polinômio não tem zeros exatamente no círculo $|z| = 1$. Se tiver um zero unitário, temos:

$$6z = -z^3 - 8 \implies 6 = |8 + z^3| \geq 8 - |z|^3 = 7,$$

absurdo. Portanto todos os três zeros do polinômio estão entre os círculos $|z| = 2$ e $|z| = 3$.

$\square$

Exercício 5. *Prove that the polynomial $z^4 + z + 1$ has one zero in each quadrant.*

Solução: Como os coeficientes do polinômio são reais, os zeros vem em pares conjugados. Se z_1, z_2 são os zeros, então temos que:

$$z_1 + \overline{z_1} + z_2 + \overline{z_2} = 0 \implies \operatorname{Re}(z_1) = -\operatorname{Re}(z_2).$$

Em vista disto, basta verificarmos que nenhum zero do polinômio é real ou imaginário puro.

Se $z = iy$ for um zero do polinômio, temos:

$$(iy)^4 + (iy) = 0 \implies y^4 + 1 + iy = 0 \implies y = 0 \implies 1 = 0,$$

absurdo.

E nos restringindo aos reais, notamos que o polinômio tem apenas um ponto crítico em $-\sqrt[3]{1/4}$ (a derivada se anula), que este ponto é de mínimo, e que:

$$\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^4 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + 1 > 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} > 0.$$

$\square$