

Soluções dos exercícios de Análise do livro Análise real  
volume 1 de Elon Lages Lima.

Rodrigo Carlos Silva de Lima <sup>‡</sup>

**Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ**

rodrigo.uff.math@gmail.com

<sup>‡</sup>

8 de dezembro de 2011



# Sumário

<b>1</b>	<b>Soluções-Análise Real Volume 1 (Elon fino)</b>	<b>5</b>
1.1	Notações . . . . .	6
1.2	Capítulo 1-Conjuntos finitos e infinitos . . . . .	6
1.2.1	Números naturais . . . . .	6
1.2.2	Conjuntos finitos . . . . .	9
1.2.3	Conjuntos infinitos . . . . .	12
1.2.4	Conjuntos enumeráveis . . . . .	14
1.3	Capítulo 2-Números reais . . . . .	18
1.3.1	$R$ é um corpo . . . . .	18
1.3.2	$R$ é um corpo ordenado . . . . .	20
1.3.3	$R$ é um corpo ordenado completo . . . . .	25
1.4	Capítulo 3-Sequências . . . . .	32
1.4.1	Limite de uma sequência . . . . .	32
1.4.2	Limites e desigualdades . . . . .	35
1.4.3	Operações com limites . . . . .	39
1.4.4	Limites infinitos . . . . .	43
1.5	Capítulo 4-Séries numéricas . . . . .	47
1.5.1	Séries convergentes . . . . .	47
1.5.2	Séries absolutamente convergentes . . . . .	53
1.5.3	Teste de convergência . . . . .	57
1.5.4	Comutatividade . . . . .	61
1.6	Capítulo 5-Algumas noções topológicas . . . . .	63
1.6.1	Conjuntos abertos . . . . .	63
1.6.2	Conjuntos fechados . . . . .	67

1.6.3	Pontos de acumulação . . . . .	70
1.6.4	Conjuntos compactos . . . . .	73
1.6.5	O conjunto de Cantor . . . . .	77
1.7	Capítulo 6-Limite de funções . . . . .	81
1.7.1	Definição e primeiras propriedades . . . . .	81
1.7.2	Limites laterais . . . . .	83
1.7.3	Limites no infinito, limites infinitos, etc. . . . .	85
1.8	Capítulo 7-Funções contínuas . . . . .	87
1.8.1	Definição e primeiras propriedades . . . . .	87
1.8.2	Funções contínuas num intervalo . . . . .	92
1.8.3	Funções contínuas em conjuntos compactos . . . . .	95
1.8.4	Continuidade uniforme . . . . .	97
1.9	Capítulo 8-Derivadas . . . . .	100
1.9.1	A noção de derivada . . . . .	100
1.9.2	Regras operacionais . . . . .	104
1.9.3	Derivada e crescimento local . . . . .	107
1.9.4	Funções deriváveis num intervalo . . . . .	112
1.10	Capítulo 9-Fórmula de Taylor e aplicações da Derivada . . . . .	120
1.10.1	Fórmula de Taylor . . . . .	120
1.10.2	Funções côncavas e convexas . . . . .	126
1.10.3	Aproximações sucessivas e método de Newton . . . . .	132
1.11	Capítulo 10-A integral de Riemann . . . . .	137
1.11.1	Integral de Riemann . . . . .	137
1.11.2	Propriedades da integral . . . . .	143
1.11.3	Condições suficientes de integrabilidade . . . . .	146
1.12	Capítulo 11-Cálculo com integrais. . . . .	150
1.12.1	Os teoremas clássicos do cálculo integral. . . . .	150
1.12.2	A integral como limite de somas de Riemann . . . . .	152
1.12.3	Logaritmos e exponenciais . . . . .	158
1.12.4	Integrais impróprias . . . . .	162
1.13	Capítulo 12-Sequências e série de funções . . . . .	168
1.13.1	Convergência simples e convergência uniforme . . . . .	168
1.13.2	Propriedades da convergência uniforme . . . . .	172

1.14 Agradecimentos . . . . .	174
-------------------------------	-----

# Capítulo 1

## Soluções-Análise Real Volume 1

### (Elon fino)

Este texto ainda não se encontra na sua versão final, sendo, por enquanto, constituído apenas de anotações informais. Sugestões para melhoria do texto, correções da parte matemática ou gramatical eu agradeceria que fossem enviadas para meu Email **rodrigo.uff.math@gmail.com**.

Se houver alguma solução errada, se quiser contribuir com uma solução diferente ou ajudar com uma solução que não consta no texto, também peço que ajude enviando a solução ou sugestão para o email acima, colocarei no texto o nome da pessoa que tenha ajudado com alguma solução. Espero que esse texto possa ajudar alguns alunos que estudam análise pelo livro do Elon.

Os exercícios que possuem dicas no final do livro são feitos, em geral, seguindo essas dicas, porém em alguns casos resolvemos um problema mais geral e tirando o exercício como corolário direto de outra proposição, outras vezes damos soluções diferentes. Tentamos detalhar essas soluções tornando claras passagens que poderiam ser obscuras.

Os enunciados das questões são escritos no texto ,na maioria das vezes alterados, porém tomamos o cuidado de manter a essência de cada questão.

A exposição do texto segue a linha Teorema-Demonstração.

## 1.1 Notações

- Denotamos  $(x_n)$  uma sequência  $(x_1, x_2, \dots)$ . Uma  $n$  upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  podemos denotar como  $(x_k)_1^n$ .
- O conjunto de valores de aderência de uma sequência  $(x_n)$  iremos denotar como  $A[x_n]$ .
- Usaremos a abreviação *PBO* para princípio da boa ordenação.
- Denotamos  $f(x+1) - f(x) = \Delta f(x)$ .
- Usamos notação  $Qx_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ .
- Para simbolizar a  $k$ -ésima derivada da função  $f$ , usamos os símbolos  $D^k$  ou  $f^{(k)}$ .
- Se a sequência  $(x_n)$  converge para  $a$ , podemos usar as notações  $\lim x_n = a$  ou  $x_n \rightarrow a$ .

## 1.2 Capítulo 1-Conjuntos finitos e infinitos

### 1.2.1 Números naturais

Questão 1 a)

**Propriedade 1.** Mostrar que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Demonstração.** Por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  a igualdade vale pois

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(2)}{2}.$$

Supondo a validade para  $n$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

vamos provar para  $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Por definição de somatório temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^n k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

onde usamos a hipótese da indução

□.

### Questão 1 b)

**Propriedade 2.** Mostrar que

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

**Demonstração.** Por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  temos

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

supondo a validade para  $n$ ,

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

vamos provar para  $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2.$$

Usando a definição de somatório e hipótese da indução tem-se

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2n+1 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2 \quad \square.$$

### Questão 2

**Propriedade 3** (Axioma de Eudoxius). Dados  $m$  e  $n$  naturais com  $n > m$  então existe

$q \in \mathbb{N}$  tal que

$$qm \leq n < (q+1)m.$$

**Demonstração.** Seja  $A = \{x.m \mid xm > n, x \in \mathbb{N}\}$ , tal conjunto é não vazio pois  $(n+1).m > n$ , pelo *PBO* ele possui um menor elemento. Sabemos também que  $m$  não pertence a esse conjunto, então  $x > 1$ ,  $x$  sempre é sucessor de algum número natural, então podemos tomar o elemento mínimo de  $A$  da forma  $(q+1)m$ . Tem-se  $(q+1) > q$



logo  $(q + 1).m > q.m$ , assim  $q.m$  não pode pertencer ao conjunto  $A$ , pois iria contrariar o  $PBO$ , logo por tricotomia vale  $q.m \leq n$  e

$$q.m \leq n < (q + 1).m.$$

**Propriedade 4** (Divisão Euclidiana). Dados  $n > m$ , então existe  $q$  tal que  $n = q.m$  ou  $qm + r = n$  com  $r < m$ .

**Demonstração.**

Pelo axioma de Eudoxius existe  $q$  tal que  $q.m \leq n < (q + 1).m$ . daí  $q.m = n$  ou  $q.m < n$ , se a primeira vale a demonstração termina, se vale a segunda existe  $r \in N$  tal que  $q.m + r = n$ . Agora analisamos as possibilidades para  $r$ , se  $r = m$ ,  $q.m + m = n$ ,  $m(q + 1) = n$  que é absurdo. Se  $r > m$  então  $q.m + r = n > q.m + m = m(q + 1)$  que também é absurdo, como não vale  $r \geq m$  então por tricotomia vale  $r < m$   $\square$ .

**Questão 3**

**Propriedade 5.** Seja  $A \neq \emptyset$  subconjunto de  $N$ , com propriedade

$$n, m \in A \Leftrightarrow m, m + n \in A$$

então existe  $t \in N$  tal que  $A = \{tn \mid n \in N\}$ .

**Demonstração.**  $A$  é não vazio, então ele possui um elemento mínimo  $t$ . Primeiro vamos mostrar que  $B = \{tn \mid n \in N\} \subset A$ .  $t \in A$ , supondo  $tn \in A$  vamos mostrar que  $t(n + 1) \in A$ . A propriedade vale pois  $t(n + 1) = tn + t$  a adição é fechada em  $A$ . Então os múltiplos de  $t$  pertencem ao conjunto  $A$ .

Agora dado um elemento  $m \in A$ , tomamos a divisão euclidiana de  $m$  por  $t$ , daí existe  $q \in N$  tal que  $m = q.t$  ou  $\exists r \in N$  tal que  $m = q.t + r$ . Se vale para todo  $m$  a primeira possibilidade então  $A \subset B$  implicando  $A = B$ . Vamos mostrar que a segunda não ocorre. Se  $m \in A$  é da forma  $qt + r$ , como  $qt \in A$  segue que  $r \in A$ , mas vale  $r < t$  o que contraria a minimalidade de  $t$ , então essa possibilidade não pode acontecer e vale sempre  $m = q.t$   $\square$ .

**Questão 4**

**Propriedade 6.** Não existe  $x \in N$  tal que  $n < x < n + 1$ .

Essa propriedade nos mostra que todo número natural diferente de 1 é sucessor de algum outro número.

**Demonstração.** Suponha que exista  $x$  nas condições dadas, então  $x = n + p$  com  $p$  natural,  $p$  não pode ser 1 e também não pode ser  $p > 1$ , pois de  $1 < p$  somando  $n$ , segue  $x < n + 1 < n + p$  chegaríamos em  $n + p < n + p$  que é falsa, resta então a possibilidade de  $p < 1$  que não acontece pois 1 é o menor elemento de  $N$ .

### Questão 5

**Propriedade 7.** Provar o princípio da boa ordenação por meio do axioma de indução.

**Demonstração.**

Seja  $B$  um conjunto que satisfaça as condições do axioma de indução,  $1 \in B$  e  $\forall k \in B$ ,  $k + 1 \in B$ , vamos provar que  $B = N$ . Suponha por absurdo que  $B \neq N$ , definimos  $A = N \setminus B$ , tal conjunto é não vazio então possui um elemento mínimo, tal elemento não pode ser 1 pois  $1 \in B$ , então esse elemento é sucessor de algum número natural e podemos denotar tal elemento como  $t + 1$ , isso implica que  $t \in B$  e por indução  $t + 1 \in B$  que é um absurdo  $\square$ .

## 1.2.2 Conjuntos finitos

### Questão 1 a)

**Propriedade 8.** Se  $B$  é finito e  $A \subset B$  então  $|A| \leq |B|$ . (notação  $|A|$  é o número de elemento de  $A$  e  $A \subsetneq B$  significa que  $A$  é subconjunto próprio de  $B$ , isto é  $A \subset B$  e  $A \neq B$ ).

**Demonstração.** Faremos o caso de  $B = I_n$ . Como  $A$  é subconjunto de um conjunto finito então ele é finito, seja então  $|A| = m$ , supondo por absurdo que  $m > n$  vale  $I_n \subsetneq I_m$  e de  $A \subset I_n \subsetneq I_m$  segue que  $A \subsetneq I_m$ , isto é,  $A$  é subconjunto próprio de  $I_m$ , porém como  $|A| = m$ , existe bijeção entre  $I_m$  e  $A$ , absurdo! pois não pode existir bijeção entre um conjunto finito e sua parte própria.

**Questão 1 b)**

**Propriedade 9.** Se  $A$  e  $B$  são finitos e disjuntos com  $|A| = n$  e  $|B| = m$  então  $A \cup B$  é finito com  $|A \cup B| = m + n$ .

**Demonstração.** Existem bijeções  $f : I_n \rightarrow A$ ,  $g : I_m \rightarrow B$ . Definimos  $h : I_{m+n} \rightarrow A \cup B$  como  $h(x) = f(x)$  se  $1 \leq x \leq n$  e  $h(x) = g(x - n)$  se  $1 + n \leq x \leq m + n$  ( $1 \leq x - n \leq m$ ), como  $h$  é bijeção segue o resultado.

**Propriedade 10.** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos não necessariamente disjuntos vale a relação

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**Demonstração.** Escrevemos  $A$  como a união disjunta  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ , daí  $|A| - |A \cap B| = |A \setminus B|$  agora escrevemos  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ , união disjunta logo

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B|$$

usando a primeira expressão segue que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**Questão 1 c)**

**Propriedade 11.** Sejam  $(A_1, A_2, \dots, A_n) = (A_k)_1^n$  (notação) conjunto finitos dois a dois disjuntos, onde  $|A_k| = m_k$  então  $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n |A_k| = \sum_{k=1}^n m_k$ .

**Demonstração.** Indução sobre  $n$ .

**Propriedade 12.** Se  $A$  e  $B$  são finitos e disjuntos com  $|A| = m$  e  $|B| = n$  então  $A \times B$  é finito com  $|A \times B| = m.n$ .

**Demonstração.** Podemos escrever  $A \times B = \bigcup_{k=1}^n A_k$  onde  $A_k = A \times \{B_k\}$  com  $|A_k| = m$ , logo

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k| = m.n.$$

**Questão 2**

**Propriedade 13.** Seja  $|A| = n$  então  $|P(A)| = 2^n$ .

**Demonstração.** Por indução sobre  $n$ , se  $n = 1$ , então  $A = \{a_1\}$  possui dois subconjuntos que são  $\emptyset$  e  $\{a_1\}$ . Suponha que qualquer conjunto qualquer  $B$  com  $n$  elementos tenha  $|P(B)| = 2^n$ , vamos provar que um conjunto  $C$  com  $n + 1$  elementos implica  $|P(C)| = 2^{n+1}$ . Tomamos um elemento  $a \in C$ ,  $C \setminus \{a\}$  possui  $2^n$  subconjuntos (por hipótese da indução),  $s_k$  de  $k = 1$  até  $k = 2^n$ , que também são subconjuntos de  $C$ , porém podemos formar mais  $2^n$  subconjuntos de  $C$  com a união do elemento  $\{a\}$ , logo no total temos  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$  subconjuntos de  $C$  e mais nenhum subconjunto, pois não temos nenhum outro elemento para unir aos subconjuntos dados.

**Questão 3**

**Propriedade 14.** Sejam  $(A_k)_1^n$  com  $|A_k| = m_k$  então  $|\prod_{k=1}^n A_k| = \prod_{k=1}^n |A_k| = \prod_{k=1}^n m_k$ .

**Demonstração.** Por indução sobre  $n$ .

**Propriedade 15.** Se  $|A| = m$  e  $|B| = n$  então  $|F(A; B)| = n^m$ .

**Demonstração.**[1] Faremos o caso em que  $A = I_m$ . As funções de  $F(I_m; B)$  são  $m$  uplas, sendo que em cada coordenada existem  $n$  possibilidades de elementos

$$F(I_m; B) = \prod_{k=1}^m B$$

daí

$$|F(I_m; B)| = |\prod_{k=1}^m B| = \prod_{k=1}^m |B| = n^m.$$

No caso geral mostramos que existe uma bijeção entre  $F(I_m; B)$  e  $F(A; B)$  logo tais conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos.

**Demonstração.**[2] Por indução sobre  $m$ . Para  $m = 1$ .  $A = \{a_1\}$  e  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ , temos  $n$  funções  $f_k(a_1) = b_k$ ,  $\forall k \in I_n$ . Suponha a validade para um conjunto  $A'$  qualquer com  $m$  elementos, vamos provar para  $A$  com  $|A| = m+1$ . Tomamos  $a \in A$ , daí  $A \setminus \{a\} = A'$  possui  $m$  elementos, logo  $|F(A', B)| = n^m$ , podemos estender cada  $f'_t : A' \rightarrow B$  para  $f : A \rightarrow B$  de  $n$  maneiras diferentes, tomando  $f(a) = b_k$ ,  $k \in I_n$ , logo temos no total  $nn^m = n^{m+1}$  funções  $\square$ .

**Questão 4**

**Propriedade 16.** Se  $A \neq \emptyset \subset N$  é limitado superiormente então  $A$  possui máximo.

**Demonstração.** Seja  $B = \{n \in N \mid n > x, \forall x \in A.\}$ ,  $B$  é um conjunto não vazio de números naturais, logo pelo princípio da boa ordenação  $B$  possui um elemento mínimo, tal elemento não pode ser o número 1 então ele é sucessor de algum número natural, que denotaremos por  $t + 1$ , logo  $t$  tem que satisfazer uma das propriedades, existe  $y \in A$  tal que  $t < y$  ou existe  $y \in A$  tal que  $t = y$ . A primeira opção não pode valer pois teríamos  $t < y < t + 1$  que é absurdo. Vamos mostrar que tal  $y$  realmente é o máximo do conjunto. Seja  $z \neq y$  elemento de  $A$ , então  $z < y$ , pois se  $t = y < z$ , então  $t < z < t + 1$  que é absurdo.

**Propriedade 17.** Um conjunto  $A \neq \emptyset$ ,  $A \subset N$  é finito sse é limitado.

**1.2.3 Conjuntos infinitos****Questão 1 a)**

**Propriedade 18.** Se  $A$  é infinito e  $f : A \rightarrow B$  é injetiva então  $B$  é infinito.

**Demonstração.**  $f : A \rightarrow f(A)$  é bijeção e  $f(A) \subset B$  é infinito, logo  $B$  é infinito,  $B$  não pode ser finito, pois todo subconjunto de um conjunto finito é finito.  $f(A)$  não pode ser finito, pois se fosse  $A$  estaria em bijeção com um conjunto finito logo seria finito.

**Questão 1 b)**

**Propriedade 19.** Se  $B$  é infinito e  $f : A \rightarrow B$  é sobrejetiva então  $A$  é infinito.

**Demonstração.** Dado  $y \in B$  escolhemos  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$  e com isso definimos a função  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g(y) = x$ ,  $g$  é injetiva então pelo resultado anterior segue que  $A$  é infinito.

**Questão 2**

**Propriedade 20.** Se  $A$  é infinito então existe função injetiva  $f : N \rightarrow A$ .

**Demonstração.** Podemos definir  $f$  indutivamente. Tomamos inicialmente  $x_1 \in A$  e definimos  $f(1) = x_1$  e para  $n \in \mathbb{N}$  escolhemos  $x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$  definido  $f(n+1) = x_{n+1}$ .  $A \setminus \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$  nunca é vazio pois  $A$  é infinito.  $f$  é injetora pois tomando  $m > n$  tem-se  $f(n) \in \bigcup_{k=1}^{m-1} \{x_k\}$  e  $f(m) \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} \{x_k\}$ .

**Corolário 1.** Existe função injetiva de um conjunto finito  $B$  num conjunto infinito  $A$ .

**Propriedade 21.** Sendo  $A$  infinito e  $B$  finito existe função sobrejetiva  $g : A \rightarrow B$ .

**Demonstração.** Existe função injetiva  $f : B \rightarrow A$ , logo  $f : B \rightarrow f(B) \subset A$  é bijeção, possuindo inversa  $g^{-1} : f(B) \rightarrow B$ . Considere a função  $f : A \rightarrow B$  definida como  $f(x) = g^{-1}(x)$  se  $x \in f(B)$  e  $f(x) = x_1 \in B$  se  $x \notin f(B)$ ,  $f$  é função sobrejetiva.

### Questão 3

**Propriedade 22.** Existem infinitos números primos.

**Demonstração.** Suponha que existam  $(p_k)_1^n$ ,  $n$  primos, vamos mostrar que existe mais um primo distinto dos anteriores. Considere

$$s = \underbrace{\left( \prod_{k=1}^n p_k \right)}_{=a} + 1$$

se esse número é primo a demonstração termina, se não, ele é composto e irá existir um número primo  $p$  tal que  $p|s$ , tal  $p$  não pode ser nenhum dos  $p_k$  dados pois se  $p_k|s$  então  $p_k|(s-a) = 1$  que é absurdo, assim ele possui um fator primo  $p \neq p_k$ .

Uma maneira de denotar tal fato é escrever

$$\lim \pi(n) = \infty.$$

**Exemplo 1.** O produto de primos consecutivos adicionados de 1 não são sempre primos

$$2 + 1 = 3 \text{ é primo}$$

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ é primo}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31 \text{ é primo}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211 \text{ é primo}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311 \text{ é primo}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 509 \cdot 59 \text{ não é primo}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511 = 19 \cdot 97 \cdot 277 \text{ não é primo}$$

#### Questão 4

**Exemplo 2.** Dar exemplo de uma sequência  $(A_k)$  decrescente de conjuntos infinitos cuja intersecção seja vazia.

Considere os conjuntos definidos como  $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$ , cada um desses conjuntos é infinito e vale  $A_k \subset A_{k+1}$ , porém não existe elemento que pertença ao intersecção

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

se houvesse algum  $t$  que pertencesse a intersecção então tal  $t$  deveria ser elemento de todo  $A_k$ , porém isso não acontece, pois existe  $k$  tal que  $k > t$ , daí todos elementos de  $A_k$  são maiores que  $t$ .

### 1.2.4 Conjuntos enumeráveis

#### Questão 1

**Exemplo 3.**  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida como  $f(m+1, n) = 2^m(2n-1)$  e  $f(1, n) = 2n-1$  é uma bijeção. Dado um número natural  $n$  qualquer, podemos escrever esse número como produto dos seus fatores primos

$$n = \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1} \cdot \prod_{k=2}^n p_k^{\alpha_k}$$

como os primos maiores que 2 são ímpares e o produto de ímpares é um número ímpar então  $n = 2^m(2n-1)$ . Agora vamos mostrar que a função é injetora seja  $f(m, n) = f(p, q)$

$$2^m(2n-1) = 2^p(2q-1)$$

se  $m \neq p$  os números serão diferentes pela unicidade de fatoração ( $2s - 1$  não possui fatores 2 pois sempre é ímpar), então devemos ter  $m = p$ , daí segue que  $n = q$  e termina a demonstração.

### Questão 2

**Exemplo 4.** Existe  $g : N \rightarrow N$  sobrejetiva tal que  $g^{-1}(n)$  é infinito para cada  $n \in N$ .

Seja  $f : N \rightarrow N$  definida como  $f(n) = k$  se  $n$  é da forma  $n = p_k^{\alpha_k}$  onde  $p_k$  é o  $k$ -ésimo número primo e  $f(n) = n$  caso contrário,  $f$  é sobrejetiva e existem infinitos  $n \in N$  tais que  $f(n) = k$  para cada  $k$  natural.

### Questão 3

**Exemplo 5.** Expressar  $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$  onde os conjuntos são infinitos e dois a dois disjuntos.

Tome  $N_{k+1} = \{p_k^{\alpha_k}, \alpha_k \in N \text{ onde } p_k \text{ o } k\text{-ésimo primo}\}$  e  $N_1 = N \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} N_k$ , cada um deles é infinito, são disjuntos e sua união dá  $N$ .

### Questão 4

**Propriedade 23.**  $P_n = \{A \subset N \mid |A| = n\}$  é enumerável.

**Demonstração.** Definimos a função  $f : P_n \rightarrow N^n$  da seguinte maneira: Dado  $A = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ ,  $f(A) = (x_1, \dots, x_n)$ . Tal função é injetiva pois dados  $A = \{x_k, k \in I_n\}$  e  $B = \{y_k, k \in I_n\}$  não pode valer  $x_k = y_k$  para todo  $k$ , pois se não os conjuntos seriam iguais.

**Corolário 2.** o conjunto  $P_f$  dos subconjuntos finitos de  $N$  é enumerável pois

$$P_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

é união enumerável de conjuntos enumeráveis.



**Questão 5**

Daremos duas demonstrações para essa questão uma mais direta outra um pouco mais longa.

**Propriedade 24.** O conjunto  $X$  das seqüências  $(x_n)$  tais que dado  $n$ ,  $x_n = 0$  ou  $x_n = 1$  é não enumerável.

**Demonstração.**

Vamos supor por absurdo que tal conjunto seja enumerável com a enumeração  $s : N \rightarrow X$ , tal que dado  $v$  natural associamos a seqüência  $s_v = (x_{v(n)})$ . Podemos então tomar o elemento  $y = (y_n)$ , definido da seguinte maneira:  $y_n \neq x_{n(n)}$ , podemos tomar  $y_n$  dessa maneira pois se para  $n$  fixo vale  $x_{n(n)} = 0$  escolhemos  $y_n = 1$ , se  $x_{n(n)} = 1$  escolhemos  $y_n = 0$ , daí tem-se que  $y \neq s_v$  para todo  $v$  natural, logo  $y$  não pertence a enumeração, o que é absurdo. Logo a seqüência é não enumerável.

**Propriedade 25.**  $P(N)$  é não enumerável.

**Demonstração.** Definimos a função  $f : X \rightarrow P(N)$  (onde  $X$  é o conjunto de seqüências de elementos 0 ou 1) da seguinte maneira para cada seqüência  $(x_k)$ , definimos  $f(x_k) = V = \{k \mid x_k \neq 0\}$ . Tal função é bijeção pois dadas duas seqüências distintas  $(x_k)$  e  $(y_k)$  então existe  $k$  tal que  $x_k \neq y_k$ , sem perda de generalidade,  $y_k = 0$  então  $k \notin f(y_k)$  e  $k \in f(x_k)$  logo as imagens são distintas. A função também é sobrejetiva pois dado um subconjunto  $V \subset N$  a ele está associado a seqüência  $(x_k)$  onde  $x_k = 0$  se  $k \notin V$  e  $x_k = 1$  se  $k \in V$ .

Como tal função é bijeção e  $X$  é não enumerável, segue que  $P(N)$  também é não enumerável.

**Teorema 1** (Cantor). Sejam  $A$  um conjunto arbitrário e  $B$  um conjunto contendo pelo menos dois elementos, então nenhuma função  $f : A \rightarrow F(A, B)$  é sobrejetiva.

**Demonstração.** A função  $f : A \rightarrow F(A, B)$  associa a um elemento  $x$  de  $A$  a um elemento  $y$  de  $F(A, B)$ , que por sua vez é uma função de  $A$  em  $B$ ,  $y : A \rightarrow B$ , que denotaremos por  $f_x = y$ . Para mostrar que  $f$  não é sobrejetiva, temos que mostrar que existe  $z$  em  $F(A, B)$  tal que para nenhum  $x \in A$  vale  $f_x = z$ .

Definiremos  $z : A \rightarrow B$  da seguinte maneira, para todo  $x \in A$  fixo temos que  $f_x(x)$  é um elemento de  $B$ , como  $B$  possui no mínimo dois elementos, então associamos  $z(x)$  a um

elemento diferente de  $f_x(x)$ , assim as funções (imagens da função)  $z$  e  $f_x$  são distintas para todo  $x$  (pois diferem em um elemento), logo  $f : A \rightarrow F(A, B)$  não pode ser sobrejetiva.

**Propriedade 26.** Existe bijeção entre  $P(A)$  e  $F(A, \{0, 1\})$ . Os elementos de  $P(A)$  são subconjuntos de  $A$ .

**Demonstração.** Seja a função  $C : P(A) \rightarrow F(A, \{0, 1\})$ , chamada de função característica, definida como: Dado  $V \in P(A)$ ,  $C_V$  deve ser uma função de  $A$  em  $\{0, 1\}$ , definimos então  $C_V(x) = 1$  se  $x \in V$  e  $C_V(x) = 0$  se  $x \notin V$ .

Tal função é injetiva, pois sejam  $V \neq H$  elementos de  $P(A)$  então  $C_V$  é diferente de  $C_H$ , pois existe, por exemplo,  $x_1 \in H$  tal que  $x_1 \notin V$  e  $x_1 \in A$  e vale  $C_V(x_1) = 0$  e  $C_H(x_1) = 1$ , logo as funções são distintas.

A função é sobrejetiva, pois dado um elemento  $y$  de  $F(A, \{0, 1\})$ , ele deve ser uma função de  $A$  em  $\{0, 1\}$ , então existe um subconjunto  $V$  que contém todos  $x \in A$  tal que  $y(x) = 1$  e para todo  $x \in L = A \setminus V$  tem-se  $y(x) = 0$ , tal função é a mesma que  $C_V$ . Logo a função é bijetora.

**Corolário 3.** Não existe bijeção entre os conjuntos  $A$  e  $P(A)$ , pois não existe função sobrejetiva entre  $A$  e  $F(A, (0, 1))$  essa última que está em bijeção com  $P(A)$ . Em especial não existe bijeção entre  $N$  e  $P(N)$ .

## Questão 6

**Propriedade 27.** Sejam  $B$  enumerável e  $f : A \rightarrow B$  tal que  $\forall y \in B, f^{-1}(y)$  é enumerável, então  $A$  é enumerável.

**Demonstração.**

$$A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y)$$

então  $A$  é união enumerável de conjuntos enumeráveis, daí  $A$  é enumerável.

## 1.3 Capítulo 2-Números reais

### 1.3.1 $R$ é um corpo

Questão 1 a)

**Propriedade 28** (Unicidade do elemento neutro da adição). Se  $x + \theta = x$  para algum  $x \in R$  então  $\theta = 0$ .

**Demonstração.** Vale que  $x + \theta = x + 0$ , logo pela lei do corte segue  $\theta = 0$ .

Questão 1 b)

**Propriedade 29** (Unicidade do elemento neutro da multiplicação). Se  $x.u = x$  para todo  $x \in R$  então  $u = 1$ .

**Demonstração.** Tomamos  $x \neq 0$  ele possui inverso  $x^{-1}$  multiplicando por  $x^{-1}$  de ambos lados segue que  $u = 1$ .

Questão 1 c)

**Propriedade 30.** Se  $x + y = 0$  então  $y = -x$ .

**Demonstração.** Adicionamos  $-x$  em ambos lados.

Questão 1 d)

**Propriedade 31.** Se  $x.y = 1$  então  $y = x^{-1}$ .

**Demonstração.** Como  $x.y = 1$  então nenhum dos números é nulo, logo ambos possuem inverso, multiplicamos em ambos lados por  $x^{-1}$  de onde segue o resultado.

Questão 2

**Propriedade 32.**

$$(bd)^{-1} = b^{-1}.d^{-1}.$$

**Demonstração.**

$$(bd)^{-1}.bd = 1$$

$$b^{-1}.d^{-1}.b.d = 1$$

logo  $(bd)^{-1} = b^{-1}.d^{-1}$ , por unicidade de inverso .

**Propriedade 33.**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

**Demonstração.**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a.b^{-1}.c.d^{-1} = ac.b^{-1}.d^{-1} = ac.(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

**Propriedade 34.**

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}.$$

**Demonstração.**

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = d^{-1}a + d^{-1}c = d^{-1}(a+c) = \frac{a+c}{d}$$

por distributividade do produto em relação a soma.

**Propriedade 35.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

**Demonstração.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \frac{b}{b} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

**Questão 3**

**Propriedade 36.**  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

**Demonstração.** Pois  $x.x^{-1} = 1$ , logo  $x$  é o inverso de  $x^{-1}$ , isto é  $x = (x^{-1})^{-1}$ .

**Corolário 4.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

pois

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = a^{-1}b = \frac{b}{a} \quad \square.$$

**Questão 4****Propriedade 37.** Mostrar que

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

para  $x \neq 1$ .**Demonstração.** Usamos a soma telescópica

$$\sum_{k=0}^n x^{k+1} - x^k = x^{n+1} - 1$$

como  $x^{k+1} - x^k = x^k(x - 1)$  então

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

**1.3.2  $R$  é um corpo ordenado****Questão 1**

Vamos dar algumas demonstrações da desigualdade triangular e tirar a questão como corolário.

**Propriedade 38.** Sejam  $0 \leq x$  e  $0 \leq y$ . Se  $x^2 \leq y^2$  então  $x \leq y$ .**Demonstração.**Vale  $(x - y)(x + y) \leq 0$ como  $0 \leq x + y$  deve valer  $(x - y) \leq 0$  daí  $x \leq y$ .**Propriedade 39** (Desigualdade triangular).

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

para quaisquer  $a$  e  $b$  reais.**Demonstração.**

$$a.b \leq |ab| = |a||b|$$

multiplicando por 2 e somando  $a^2 + b^2$  em ambos lados

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

logo  $(|a + b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$  de onde segue usando a propriedade anterior

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

**Demonstração.**[2] Valem as desigualdades

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|$$

somando ambas

$$-(|b| + |a|) \leq a + b \leq |b| + |a|$$

que equivale à

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

**Demonstração.**[3] Sabemos que vale sempre  $x \leq |x|$  e  $y \leq |y|$  então  $x + y \leq |x| + |y|$ , daí se  $0 \leq x + y$  temos

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Vale também que  $-x \leq |x|$  e  $-y \leq |y|$  então se  $x + y < 0$  segue  $|x + y| = -(x + y) \leq |x| + |y|$ . Em qualquer dos casos temos  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

**Corolário 5.** Na desigualdade triangular

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

tomando  $a = x - y$ ,  $b = y - z$  segue

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

**Questão 2**

**Propriedade 40.**

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

**Demonstração.** Pela desigualdade triangular temos que

$$|a| \leq |a - b| + |b| \text{ logo } |a| - |b| \leq |a - b|$$

tem-se também que

$$|b| \leq |a - b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| = -\left(|a| - |b|\right) \leq |a - b| \Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|$$

juntando as duas desigualdades

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$$

que implica

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

### Questão 3

**Propriedade 41.** Dados  $x, y \in R$ , se  $x^2 + y^2 = 0$  então  $x = y = 0$ .

**Demonstração.** Suponha que  $x \neq 0$ , então  $x^2 > 0$  e  $y^2 \geq 0$  de onde segue que  $x^2 + y^2 > 0$ , absurdo então deve valer  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$  logo temos também  $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ , portanto  $x = y = 0$ .

### Questão 4

**Exemplo 6.** Mostre que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + n(n - 1)\frac{x^2}{2}$$

para  $n$  natural e  $x \geq 0$ . Vamos chamar

$$C(n, x) = 1 + nx + n(n - 1)\frac{x^2}{2}.$$

Por indução sobre  $n$ , para  $n = 1$

$$(1 + x) \geq 1 + 1.x + 1(1 - 1)\frac{x^2}{2} = 1 + x$$

logo vale a igualdade. Considere agora a validade da hipótese

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + n(n - 1)\frac{x^2}{2}$$

vamos mostrar que vale

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+(n+1)(n)\frac{x^2}{2} = 1+\binom{n+1}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2 = 1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2}+x+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq C(n,x) + x + nx^2$$

onde usamos a relação de Stiefel. Multiplicando a desigualdade da hipótese da indução por  $1+x$ , não alteramos a desigualdade pois  $1+x$  é positivo, temos então

$$(1+x)^{n+1} \geq C(n,x)(1+x) = C(n,x) + C(n,x)x$$

agora vamos mostrar que

$$C(n,x) + C(n,x)x \geq C(n,x) + x + nx^2$$

que é equivalente à

$$C(n,x)x \geq x + nx^2$$

desigualdade válida se  $x = 0$ , agora se  $x > 0$  equivale à

$$C(n,x) \geq 1 + nx$$

$$1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} \geq 1 + nx \Leftrightarrow n(n-1)\frac{x^2}{2} \geq 0$$

se  $n = 0$  ou  $n = 1$  ela se verifica, se  $n \neq 0, 1$  também pois temos  $x^2 > 0$ .

### Questão 5

**Exemplo 7.** Para todo  $x \neq 0$  real, prove que  $(1+x)^{2n} > 1+2nx$ .

Se  $x > -1$  tomamos a desigualdade de bernoulli com  $2n$  no expoente. Se  $x < -1$  vale  $1+x < 0$  porém elevando a uma potência par resulta num número positivo, por outro lado  $2nx < -2n$  logo  $1+2nx < 1-2n < 0$  então  $(1+x)^{2n}$  é positivo e  $1+2nx$  é negativo, logo nesse caso vale  $(1+x)^{2n} > 1+2nx$   $\square$ .



**Questão 6****Propriedade 42.**  $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$ .**Demonstração.** Partindo da desigualdade  $|a - b| < \varepsilon$ , somamos  $|b|$  a ambos lados

$$|a - b| + |b| < \varepsilon + |b|$$

e usamos agora a desigualdade triangular

$$|a| \leq |a - b| + |b| < \varepsilon + |b|$$

daí segue

$$|a| \leq \varepsilon + |b|.$$

**Questão 7****Propriedade 43.** Sejam  $(x_k)_1^n$  e  $(y_k)_1^n$  números reais, então vale a desigualdade

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2\right) \left(\sum_{k=1}^n (y_k)^2\right).$$

**Demonstração.** Dado  $f(x) = \sum_{k=1}^n (x_k + xy_k)^2$ , vale  $f(x) \geq 0$ , sendo um polinômio de grau 2 em  $x$ , expandindo vale também

$$\sum_{k=1}^n (x_k + xy_k)^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k)^2}_c + x \underbrace{2 \sum_{k=1}^n (x_k y_k)}_b + x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n (y_k)^2}_a$$

temos que ter o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow b^2 \leq 4ac$  para que  $f(x) \geq 0$ ,

$$4\left(\sum_{k=1}^n (x_k y_k)\right)^2 \leq 4\left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2\right) \left(\sum_{k=1}^n (y_k)^2\right)$$

implicando finalmente que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2\right) \left(\sum_{k=1}^n (y_k)^2\right).$$

A igualdade vale sse cada valor  $x_k + xy_k = 0$  para todo  $k \in N$ .

**Questão 8**

**Propriedade 44.** Sejam  $\frac{a_k}{b_k} \in (\alpha, \beta)$  e  $t_k, b_k > 0$  para cada  $k \in I_n$ , então vale que

$$\frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k}{\sum_{k=1}^n t_k b_k} \in (\alpha, \beta).$$

**Demonstração.** Vale para cada  $k$

$$\alpha < \frac{t_k a_k}{t_k b_k} < \beta$$

como cada  $t_k b_k > 0$ , podemos multiplicar por tal termo em ambos lados sem alterar a desigualdade, ficamos então com

$$\alpha t_k b_k < t_k a_k < \beta t_k b_k$$

, tomando a soma  $\sum_{k=1}^n$ , sabendo que a soma preserva desigualdades, daí segue que

$$\sum_{k=1}^n \alpha t_k b_k < \sum_{k=1}^n t_k a_k < \beta \sum_{k=1}^n t_k b_k$$

logo

$$\alpha < \frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k}{\sum_{k=1}^n t_k b_k} < \beta$$

implicando que  $\frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k}{\sum_{k=1}^n t_k b_k} \in (\alpha, \beta)$ .

Em especial tomando  $t_k = 1$  tem-se  $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} \in (\alpha, \beta)$ .

**1.3.3  $R$  é um corpo ordenado completo****Questão 1**

Vamos primeiro demonstrar alguns resultados podem ser usados para resolver as questões.

**Propriedade 45.** Se  $A$  é limitado superiormente e  $B \subset A$  então  $\sup(A) \geq \sup(B)$ .

**Demonstração.** Toda cota superior de  $A$  é cota superior de  $B$ , logo o  $\sup(A)$  é cota superior de  $B$ , como  $\sup(B)$  é a menor das cotas superiores de  $B$  segue que  $\sup(A) \geq \sup(B)$ .

**Propriedade 46.** Se  $A$  é limitado inferiormente e  $B \subset A$  então  $\inf(A) \leq \inf(B)$ .

**Demonstração.**  $\inf A$  é cota inferior de  $A$ , logo também é cota inferior de  $B$ , sendo cota inferior de  $B$  vale  $\inf A \leq \inf B$ , pois  $\inf B$  é a maior cota inferior de  $B$ .

Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}$ , conjuntos limitados .

**Propriedade 47.** O conjunto  $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$  também é limitado.

**Demonstração.** Se  $A$  é limitado , existe  $t$  tal que  $|x| < t$  para todo  $x \in A$  e se  $B$  é limitado existe  $u$  tal que  $|y| < u \forall y \in B$ . Somando as desigualdades e usando desigualdade triangular segue  $|x| + |y| < u + t$  e  $|x + y| \leq |x| + |y| < u + t$  logo o conjunto  $A + B$  é limitado.

**Propriedade 48** (Propriedade aditiva). Vale  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ .

**Demonstração.** Como  $A, B$  são limitados superiormente, temos  $\sup A := a$  e  $\sup B := b$ , como vale  $a \geq x$  e  $b \geq y$  para todos  $x, y \in A, B$  respectivamente segue que  $a + b \geq x + y$  logo o conjunto  $A + B$  é limitado superiormente. Para todo e qualquer  $\varepsilon > 0$  existem  $x, y$  tais que

$$a < x + \frac{\varepsilon}{2}, \quad b < y + \frac{\varepsilon}{2}$$

somando ambas desigualdades-segue-se que

$$a + b < x + y + \varepsilon$$

que mostra que  $a + b$  é a menor cota superior, logo o supremo, fica valendo então

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

**Propriedade 49.**  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

**Demonstração.** Sejam  $a = \inf A$  e  $b = \inf B$  então  $\forall x, y \in A, B$  tem-se  $a \leq x$ ,  $b \leq y$  de onde segue por adição  $a + b \leq x + y$ , assim  $a + b$  é cota inferior de  $A + B$ .  $\exists x, y \in A, B$  tal que  $\forall \varepsilon > 0$  vale  $x < a + \frac{\varepsilon}{2}$  e  $y < b + \frac{\varepsilon}{2}$  pois  $a$  e  $b$  são as maiores cotas inferiores, somando os termos das desigualdades segue  $x + y < a + b + \varepsilon$ , que implica que  $a + b$  é a maior cota inferior logo o ínfimo.

Seja uma função limitada  $f : V \rightarrow R$ .

**Definição 1.**

$$\sup f := \sup f(V) = \sup\{f(x) \mid x \in V\}$$

**Definição 2.**

$$\inf f := \inf f(V) = \inf\{f(x) \mid x \in V\}$$

Sejam  $f, g : V \rightarrow R$  funções limitadas .

**Propriedade 50.**

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

**Demonstração.**

Sejam

$$A = \{f(x) \mid x \in V\}, \quad B = \{g(y) \mid y \in V\}, \quad C = \{g(x) + f(x) \mid x \in V\}$$

temos que  $C \subset A + B$ , pois basta tomar  $x = y$  nos conjuntos, logo

$$\sup(A + B) \geq \sup(f + g)$$

$$\sup(A) + \sup(B) = \sup f + \sup g \geq \sup(f + g)$$

**Propriedade 51.**

$$\inf(f + g) \geq \inf(f) + \inf(g).$$

**Demonstração.** De  $C \subset A + B$  segue tomando o ínfimo

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) = \inf(f) + \inf(g) \leq \inf(C) = \inf(f + g).$$

**Exemplo 8.** Sejam  $f, g : [0, 1] \rightarrow R$  dadas por  $f(x) = x$  e  $g(x) = -x$ , vale  $\sup f = 1$ ,  $\sup g = 0$ ,  $f + g = 0$  logo  $\sup(f + g) = 0$  vale então  $\sup f + \sup g = 1 > \sup(f + g) = 0$ .

Vale ainda  $\inf f = 0$ ,  $\inf g = -1$ ,  $f + g = 0$ ,  $\inf(f + g) = 0$  logo

$$\inf f + \inf g = -1 < \inf(f + g) = 0.$$

**Questão 2**

**Definição 3.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios, definimos  $A.B = \{x.y \mid x \in A, y \in B\}$ .

**Propriedade 52.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos limitados de números positivos, então vale  $\sup(A.B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ .

**Demonstração.** Sejam  $a = \sup(A)$  e  $b = \sup(B)$  então valem  $x \leq a$  e  $y \leq b$ ,  $\forall x \in A, y \in B$  daí  $x.y \leq a.b$ , logo  $a.b$  é cota superior de  $A.B$ . Tomando  $t < a.b$  segue que  $\frac{t}{a} < b$  logo existe  $y \in B$  tal que  $\frac{t}{a} < y$  daí  $\frac{t}{y} < a$  logo existe  $x \in A$  tal que  $\frac{t}{y} < x$  logo  $t < x.y$  então  $t$  não pode ser uma cota superior, implicando que  $a.b$  é o supremo do conjunto.

**Propriedade 53.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos limitados de números positivos, então vale  $\inf(A.B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$ .

**Demonstração.** Sejam  $a = \inf(A)$  e  $b = \inf(B)$  então valem  $x \geq a$  e  $y \geq b$ ,  $\forall x \in A, y \in B$  daí  $x.y \geq a.b$ , logo  $a.b$  é cota inferior de  $A.B$ . Tomando  $t > a.b$  segue que  $\frac{t}{a} > b$  logo existe  $y \in B$  tal que  $\frac{t}{a} > y$  daí  $\frac{t}{y} > a$  logo existe  $x \in A$  tal que  $\frac{t}{y} > x$  logo  $t < x.y$  então  $t$  não pode ser uma cota inferior, implicando que  $a.b$  é o infimo do conjunto.

**Propriedade 54.** Sejam  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  limitadas superiormente, então

$$\sup(f.g) \leq \sup(f) \sup(g).$$

**Demonstração.** Sejam  $C = \{g(x).f(x) \mid x \in A\}$ ,  $B = \{g(y) \mid y \in A\}$  e  $A = \{f(x) \mid x \in A\}$ . Vale que  $C \subset A.B$ , daí

$$\sup(A.B) \geq \sup(C)$$

$$\sup(A) \sup(B) \geq \sup(C)$$

$$\sup(f) \sup(g) \geq \sup(f.g).$$

**Propriedade 55.** Sejam  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  limitadas superiormente, então

$$\inf(f.g) \geq \inf(f) \inf(g).$$

**Demonstração.** Sejam  $C = \{g(x).f(x) \mid x \in A\}$ ,  $B = \{g(y) \mid y \in A\}$  e  $A = \{f(x) \mid x \in A\}$ . Vale que  $C \subset A.B$ , daí

$$\inf(A.B) \leq \inf(C)$$

$$\inf(A) \inf(B) \leq \inf(C)$$

$$\inf(f) \inf(g) \leq \inf(f.g).$$

**Exemplo 9.** Sejam  $f, g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = x$  e  $g(x) = \frac{1}{x}$ , vale  $\sup f = 2$ ,  $\sup g = 1$   $\sup f.\sup g = 2$  e  $\sup(f.g) = 1$ , pois  $f.g = 1$  logo

$$\sup f \sup g > \sup(f.g).$$

Da mesma maneira  $\inf f = 1$ ,  $\inf g = \frac{1}{2}$  vale  $\inf f.\inf g = \frac{1}{2}$  e  $\inf(f.g) = 1$  portanto

$$\inf f.\inf g < \inf(f.g).$$

### Questão 3

**Propriedade 56.** Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  então  $\inf(f^2) = (\inf f)^2$ .

**Demonstração.** Seja  $a = \inf f$  tem-se  $f(x) \geq a \quad \forall x$  daí  $f(x)^2 \geq a^2$  então  $a^2$  é cota inferior de  $f^2$ , e é a maior cota inferior pois se  $a^2 < c$  então  $a < \sqrt{c}$  logo existe  $x$  tal que  $a < f(x) < \sqrt{c}$  e daí  $a^2 < f(x)^2 < c$  logo  $a^2$  é a maior cota inferior  $\inf(f^2) = (\inf f)^2$ .

### Questão 4

**Exemplo 10.** • Sejam  $X = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < 2\}$  e  $Y = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 > 2\}$ .  $X$  é limitado superiormente por 2 pois se fosse  $x > 2$  então  $x^2 > 4$  que é absurdo. Os conjuntos  $X$  e  $Y$  são disjuntos, pois  $x$  não pode satisfazer  $x^2 < 2$  e  $x^2 > 2$ . Dado  $y \in Y$  vale  $y > x$  pois se fosse  $y < x$  teríamos  $y^2 < x^2 < 2$  que é absurdo pois  $y^2 > 2$ .

- $X$  não possui elemento máximo. Seja  $x \in X$  então  $x^2 < 2, 0 < 2 - x^2$ , vale também que  $2x + 1 > 0$ , daí  $0 < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$ , podemos então tomar um racional  $r < 1$  tal que

$0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1}$ , e vale ainda  $x+r \in X$ , pois de  $r < 1$  tem-se  $r^2 < r$  e da relação  $r(2x+1) < 2-x^2$  implica

$$(x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2 < x^2 + 2rx + r = x^2 + r(2x+1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$$

então  $(x+r)^2 < 2$ .

- O conjunto  $Y$  não possui elemento mínimo. Como vale  $y > 0$  e  $y^2 > 2$ , tem-se  $y^2 - 2 > 0$  e  $2y > 0$ , logo existe um racional  $r$  tal que  $0 < r < \frac{y^2-2}{2y}$ , logo  $r2y < y^2 - 2$ ,  $y^2 - 2ry > 2$ . Vale ainda que  $y - r \in Y$  pois

$$(y-r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2$$

logo vale  $(y-r)^2 > 2$ . Vale também  $y-r > 0$  pois de  $2ry < y^2 - 2$  segue  $r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y} < y$ , logo  $y-r > 0$ , logo  $y-r \in Y$ , percebe ainda que  $y-r < y$  então o conjunto  $Y$  realmente não possui mínimo.

- Existe  $\sup X = a$ , vale  $a > 0$ , não pode ser  $a^2 < 2$  pois daí  $a \in X$ , mas  $X$  não possui máximo. Se  $a^2 > 2$  então  $a \in Y$ , porém  $Y$  não possui mínimo o que implica existir  $c \in Y$  tal que  $x < c < a \forall x \in X$  o que contradiz o fato de  $a$  ser a menor cota superior (supremo). Sobre então a possibilidade de ser  $a^2 = 2$ .

### Questão 5

**Propriedade 57.** O conjunto dos polinômios com coeficientes racionais é enumerável.

**Demonstração.** Seja  $P_n$  o conjunto dos polinômios com coeficientes racionais de grau  $\leq n$  a função  $f : P_n \rightarrow Q^{n+1}$  tal que

$$P\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = (a_k)_1^n$$

é uma bijeção. Como  $Q^{n+1}$  é enumerável por ser produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis, segue que  $P_n$  é enumerável.

Sendo  $A$  o conjunto dos polinômios de coeficientes racionais, vale que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

portanto  $A$  é união enumerável de conjuntos enumeráveis, sendo assim  $A$  é enumerável.

**Definição 4** (Número algébrico). Um número real (complexo)  $x$  é dito algébrico quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

**Propriedade 58.** O conjunto dos números algébricos é enumerável.

**Demonstração.** Seja  $B$  o conjunto dos algébricos. Para cada algébrico  $x$  escolhemos um polinômio  $P_x$  tal que  $P_x(x) = 0$ .

Definimos a função  $f : B \rightarrow A$  tal que  $f(x) = P_x$ . Dado  $P_x \in F(B)$ , temos que o conjunto  $f^{-1}(P_x)$  dos valores  $x \in B$  tal que  $f(x) = P_x$  é finito pois  $\underbrace{P_x}_{=y}$  possui um número finito de raízes e daí tem-se

$$B = \bigcup_{y \in f(B)} f^{-1}(y)$$

logo  $B$  é união enumerável de conjuntos enumeráveis (no caso finitos), então  $B$  é enumerável.

**Corolário 6.** Existem números reais que não são algébricos, pois se todos fossem algébricos  $R$  seria enumerável.

**Definição 5** (Números transcendentais). Os números reais que não são algébricos são ditos transcendentais

## Questão 6

**Propriedade 59.** Um conjunto  $I \subset R$  é um intervalo sse  $a' < x < b'$  com  $a', b' \in I$  implica  $x \in I$ .

**Demonstração.** Se  $I$  é um intervalo então ele satisfaz a propriedade descrita. Agora se a definição tomada de intervalo for: dados  $a', b'$  elementos de  $I$  se para todo  $x$  tal que  $a' < x < b'$  então  $x \in I$ , logo o conjunto  $I$  deve ser um dos nove tipos de intervalos.

Caso  $I$  seja limitado,  $\inf I = a$  e  $\sup I = b$ , se  $a < x < b$ , existem  $a', b'$  tais que  $a' < x < b'$  logo  $x \in I$ , isto é, os elementos entre o supremo e o ínfimo do conjunto pertencem ao intervalo. Vejamos os casos

- $\inf I = a, \sup I = b$  são elementos de  $I$ , logo o intervalo é da forma  $[a, b]$ .



- $a \notin I, b \in I$ , o intervalo é do tipo  $(a, b]$ .
- $a \in I$  e  $b \notin I$ , o intervalo é do tipo  $[a, b)$ .
- $a \notin I$  e  $b \notin I$  tem-se o intervalo  $(a, b)$ . Com isso terminamos os tipos finitos de intervalos.

Se  $I$  é limitado inferiormente porém não superiormente.

- $a \in I$ , gera o intervalo  $[a, \infty)$ .
- $a \notin I$ , tem-se o intervalo  $(a, \infty)$ .

Se  $I$  é limitado superiormente porém não inferiormente.

- $b \in I$ , gera o intervalo  $(-\infty, b]$ .
- $b \notin I$ , tem-se o intervalo  $(-\infty, b)$ .

O último caso,  $I$  não é limitado

$$I = (-\infty, \infty)$$

## 1.4 Capítulo 3-Sequências

### 1.4.1 Limite de uma sequência

#### Questão 1

**Propriedade 60.** Uma sequência periódica é convergente sse é constante.

**Demonstração.** Considere as subsequências da sequência  $(x_k)$  que possui período  $p$

$$(x_1, x_{1+p}, x_{1+2p}, \dots) = (x_{1+kp})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$(x_2, x_{2+p}, x_{2+2p}, \dots) = (x_{2+kp})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\vdots$$

$$(x_{p-1}, x_{p-1+p}, x_{p-1+2p}, \dots) = (x_{p-1+kp})_{k \in \mathbb{N}}$$

cada sequência dessas é constante e possui valor sempre igual ao seu primeiro termo pelo fato da sequência ser periódica de período  $p$ ,  $x_{n+p} = x_n$ . Se  $(x_k)$  converge então todas suas

subsequências devem convergir para o mesmo valor, então deve valer  $x_1 = x_2 = \dots = x_{p-1}$  e cada termo da sequência  $(x_k)$  deve pertencer a uma dessas subsequências, disso segue que  $(x_k)$  é constante.

### Questão 2

**Propriedade 61.** Se  $\lim x_{2n} = a$  e  $\lim x_{2n-1} = a$  então  $\lim x_n = a$ .

**Demonstração.** Sejam  $y_n = x_{2n}$  e  $z_n = x_{2n-1}$  como temos  $\lim y_n = \lim z_n = a$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$  existem  $n_0$  e  $n_1$  tais que para  $n > n_0$  vale  $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  e  $n > n_1$  vale  $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , escolhendo  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$  temos simultaneamente  $z_n, y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ,  $x_{2n-1}, x_{2n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , então para  $n > 2n_2 - 1$  temos  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  logo vale  $\lim x_n = a$ .

### Questão 3

**Propriedade 62.** Se  $\lim x_n = a$  então  $\lim |x_n| = |a|$ .

**Demonstração.** Se  $\lim x_n = a$  então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

porém temos a desigualdade  $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$  logo  $||x_n| - |a|| < \varepsilon$  e  $\lim |x_n| = |a|$ .

### Questão 4

**Propriedade 63.** Se uma sequência monótona possui subsequência limitada, então a sequência é limitada.

**Demonstração.** Suponha que  $(x_n)$  seja não-decrescente e possua uma subsequência limitada, vamos mostrar que para todo  $n$  natural vale  $x_n < M$  para algum  $M$ . Como a subsequência de  $(x_n)$  é limitada, então para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > n$  e  $n_0$  é índice da subsequência limitada de  $(x_n)$  com isso tem-se  $x_n \leq x_{n_0}$  e como a subsequência é limitada, existe  $M$  tal que  $x_{n_0} < M$ , daí por transitividade  $x_n < M$ , isso implica que  $(x_n)$  é limitada superiormente e como a sequência não-decrescente é limitada inferiormente então ela é limitada.

**Corolário 7.** Se uma sequência monótona possui subsequência limitada então ela é convergente, pois a sequência monótona será limitada e toda sequência monótona limitada é convergente.

**Corolário 8.** Em especial se uma sequência monótona possui subsequência convergente, então essa subsequência é limitada e daí a sequência monótona é convergente.

### Questão 5

**Definição 6** (Valor de aderência). Um número real  $a$  é dito valor de aderência de uma sequência  $(x_n)$ , quando existe uma subsequência de  $(x_n)$  que converge para  $a$ . Simbolizaremos o conjunto dos valores de aderência de uma sequência por  $A[x_n]$ .

**Corolário 9.** Se uma sequência é convergente então todas subsequências convergem para o mesmo limite que é o limite da sequência, então se uma sequência é convergente ela possui apenas um valor de aderência, isto é, se  $\lim x_n = a$  então  $A[x_n] = \{a\} = \{\lim x_n\}$ .

**Exemplo 11.** Os racionais são densos na reta e são enumeráveis, então podemos tomar uma sequência  $(x_n)$  que enumera os racionais, logo pra essa sequência vale  $A[x_n] = \mathbb{R}$ , pois tomando qualquer valor  $a \in \mathbb{R}$  qualquer intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  para qualquer  $\varepsilon$  possui infinitos racionais, elementos da sequência, então podemos com esses infinitos valores tomar uma subsequência de  $(x_n)$  que converge para  $a$ . Em especial os racionais em  $[0, 1]$  são enumeráveis e densos logo tomando uma enumeração  $(x_n)$  dos racionais nesse conjunto temos  $A[x_n] = [0, 1]$ .

**Exemplo 12.** A sequência  $(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$  que satisfaz  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$  sendo periódica de período 3,  $x_{n+3} = x_n$ , tem  $A[x_n] = \{1, 2, 3\}$ .

**Exemplo 13.** Dar o exemplo de uma sequência  $(x_n)$  que possua  $A[x_n] = \mathbb{N}$ . Para que isso aconteça é necessário que cada número natural apareça infinitas vezes na sequência. Definimos a sequência  $(x_n)$  como  $x_n = k$  se  $n$  é da forma  $p_k^{\alpha_k}$ , onde  $p_k$  é o  $k$ -ésimo primo e  $\alpha_k \in \mathbb{N}$ , daí existem infinitos valores de  $n$  tais que  $x_n = k$  com isso geramos subsequências

que convergem para um  $k$  qualquer dado, definimos também  $x_n = 1$  caso  $n$  não seja da forma  $p_k^{\alpha_k}$ , apenas para completar a definição da sequência.

### Questão 6

**Propriedade 64.**  $a \in A[x_n] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall k \in N$  exista  $n > k$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

#### Demonstração.

$\Rightarrow$ . Se  $a$  é valor de aderência de  $(x_n)$ , então ela possui uma subsequência que converge para  $a$ , logo para qualquer  $\varepsilon > 0$  e  $k \in N$  fixo, existe  $n$  índice da subsequência tal que  $n > k$  e  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$\Leftarrow$ . Supondo que  $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in N$  exista  $n > k$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

No primeiro passo tomamos  $\varepsilon = 1$  e  $k = 1$  daí existe  $n_1 > 1$  tal que  $x_{n_1} \in (a-1, a+1)$ . Podemos tomar agora  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  e  $k = n_1$  então existe  $n_2 > n_1$  tal que  $x_{n_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ , na  $t + 1$ -ésima etapa tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{t+1}$  e  $k = n_t$  daí existe  $n_{t+1} > n_t$  tal que  $x_{n_{t+1}} \in (a - \frac{1}{t+1}, a + \frac{1}{t+1})$ , logo construímos uma subsequência  $(x_{n_t})$  tal que  $\lim x_{n_t} = a$ .

### Questão 7

**Corolário 10.** Negamos a proposição anterior.

$a \notin A[x_n] \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists k \in N$  tal que para todo  $n > k$  implique  $|x_n - a| \geq \varepsilon$ .

## 1.4.2 Limites e desigualdades

### Questão 1

**Propriedade 65.** Se  $\lim x_n = a, \lim y_n = b$  e  $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$  para todo  $n$ , então  $|a - b| \geq \varepsilon$ .

**Demonstração.** Suponha por absurdo que  $\underbrace{|a - b|}_{=\varepsilon_1} < \varepsilon$  e  $|y_n - x_n| \geq \varepsilon$ . Podemos tomar  $n > n_0$  tal que  $|y_n - b| < \varepsilon_2$  e  $|x_n - a| < \varepsilon_3$  onde  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \varepsilon$ , que pode ser feito, pois basta tomar  $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \underbrace{\varepsilon - \varepsilon_1}_{>0}$  logo

$$|y_n - x_n| \leq |y_n - b| + |b - a| + |x_n - a| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon$$

que contradiz  $|y_n - x_n| \geq \varepsilon$ .

**Questão 2**

**Propriedade 66** (Permanência de sinal). Se  $\lim x_n = b$  com  $b > 0$  então no máximo uma quantidade finita de termos dessa sequência pode não ser positiva, isto é, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_0$  vale  $x_n > 0$ .

**Demonstração.** Como  $\lim x_n = b$  para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que para  $n > n_0$  temos  $|x_n - b| < \varepsilon$ ,  $x_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  tomando  $\varepsilon = \frac{b}{2}$  temos  $b - \varepsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{2b - b}{2} = \frac{b}{2}$  e  $b + \varepsilon = b + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}$  logo existe  $n_0$  tal que para  $n > n_0$  tem-se  $x_n \in (\frac{b}{2}, \frac{3b}{2})$  logo  $x_n$  é positivo.

**Corolário 11.** Sejam  $(x_n), (y_n)$  duas sequências com  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$ . Se  $b > a$  então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $y_n > x_n$  para qualquer  $n > n_0$ . Considerando a sequência  $(x_n - y_n)$  ela tem limite  $\lim x_n - y_n = b - a > 0$  logo pela permanência de sinal existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_0$  vale  $x_n - y_n > 0$ ,  $x_n > y_n$   $\square$ .

**Questão 3**

**Propriedade 67.** Se uma sequência limitada não é convergente então ela possui mais de um ponto de aderência.

**Demonstração.**

Como a sequência  $(x_n)$  é limitada ela possui subsequência  $(x_{n_k})$  convergente, convergindo para um valor  $a$ . Como a sequência não é convergente, deve haver uma outra subsequência  $(x_{n_t})$  que não converge para  $a$ , daí existem infinitos valores de  $n_t$  tal que  $x_{n_t}$  não está no intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  para algum  $\varepsilon$ . Como  $(x_{n_t})$  é limitada então ela possui subsequência convergente, que não pode convergir para  $a$ , converge então para um valor  $b \neq a$  e a proposição está demonstrada.

**Questão 4**

**Propriedade 68.** Seja  $(x_n)$  uma sequência limitada.  $(x_n)$  converge  $\Leftrightarrow$  possui um único valor de aderência.

**Demonstração.** Se ela é convergente ela possui um único valor de aderência . Se ela possui um único valor de aderência então ela converge, pois se não convergisse ela teria mais de um valor de aderência (contrapositiva e questão anterior).

### Questão 5

**Exemplo 14.** Quais são os valores de aderência da sequência  $(x_n)$  definida como  $x_{2n-1} = n$  e  $x_{2n} = \frac{1}{n}$ ? Para que um ponto seja de aderência é necessário que existam infinitos termos arbitrariamente próximos de tal ponto, no caso de tal sequência o único número que satisfaz tal propriedade é o 0, além disso tal sequência não é convergente pois não é limitada.

### Questão 6

**Propriedade 69.** Sejam  $a, b > 0 \in R$ ,  $x_1 = \sqrt{ab}$ ,  $y_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$ ,  $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ . Então  $(x_n)$  e  $(y_n)$  convergem para o mesmo limite.

**Demonstração.** Sabemos que  $y_n \geq x_n$  pela desigualdade das médias, então

$$x_n \cdot y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \sqrt{x_n \cdot y_n} \geq x_n \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n,$$

então  $(x_n)$  é crescente . Da mesma maneira  $y_n$  é decrescente pois de  $x_n \leq y_n$  tem-se  $x_n + y_n \leq 2y_n$  daí  $y_{n+1} = \frac{(x_n + y_n)}{2} \leq y_n$  . Como vale  $x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1$  para todo  $n$ , concluímos que  $x_n$  e  $y_n$  são convergentes, por serem monótonas e limitadas .

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

tomando o limite

$$y = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x = y.$$

**Definição 7** (Média aritmético-geométrica). Dados dois números reais positivos  $a$  e  $b$  o valor comum para o qual convergem as sequências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  definidas na propriedade anterior se chama média aritmético-geométrica de  $a$  e  $b$ .

**Questão 7 a)**

**Propriedade 70.** Toda sequência de Cauchy é limitada.

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy, então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n, m > n_0$  vale  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon = 1$  e um número natural  $n_1 > n_0$  fixando  $m = n_1$  segue  $|x_n - x_{n_1}| < 1$  logo para  $n > n_0$  temos  $x_n \in (x_{n_1} - 1, x_{n_1} + 1)$ , consideramos então o conjunto  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1} - 1, x_{n_1} + 1\}$  tomamos  $b = \max A$  e  $a = \min A$  então  $x_n \in [a, b]$ .

**Questão 7 b)**

**Propriedade 71.** Se uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  possui subsequência  $(x_{n_k})$  convergente então  $(x_n)$  é convergente e converge para o mesmo valor de  $(x_{n_k})$ . Com essa propriedade concluímos que uma sequência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência  $a$  e  $b$  distintos, pois se não a sequência iria convergir para  $a$  e para  $b$ , o que não acontece por unicidade do limite.

**Demonstração.** Vale  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ , daí para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $p > n_0$  implica  $|x_{n_p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ , pela sequência ser de Cauchy, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$ , tal que para  $n, m > n_1$  tem-se  $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Tomamos um termo da subsequência  $x_{n_t}$  tal que  $n_t > n_0$  e  $n_t > n_1$  logo vale  $|x_{n_t} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|x_n - x_{n_t}| < \frac{\varepsilon}{2}$  somando por desigualdade triangular tem-se

$$|x_n - a| \leq |x_{n_t} - a| + |x_n - x_{n_t}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

então vale  $|x_n - a| < \varepsilon$  implicando que  $(x_n)$  converge para  $a$ .

**Questão 7 c)**

**Propriedade 72.** Toda sequência convergente é de Cauchy.

**Demonstração.** Se  $\lim x_n = a \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $m > n_0$  e  $n > n_0$  temos  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  e por desigualdade triangular  $|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$  logo a sequência convergente é de Cauchy.

**Corolário 12.** Como toda sequência limitada possui subsequência convergente então toda sequência de Cauchy é convergente. Observe que para provar esse fato usamos o Teorema de Bolzano-Weierstrass que usa o fato de  $R$  ser um corpo completo, em corpos que não sejam completos como  $Q$  o conjunto dos racionais, existem sequências de Cauchy que não são convergentes.

**Corolário 13.** Uma sequência é convergente, se e somente se, é de Cauchy.

### 1.4.3 Operações com limites

#### Questão 1

**Exemplo 15.** Para todo  $p \in N$  tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n+p}} = 1$  pois vale  $1 \leq n^{\frac{1}{n+p}} \leq n^{\frac{1}{n}}$  de onde segue por sanduíche que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n+p}} = 1$ .

#### Questão 2

**Propriedade 73.** Se existem  $\varepsilon > 0$  e  $p \in N$  tais que  $\varepsilon \leq x_n \leq n^p$  para  $n > n_0 \in N$  então  $\lim(x_n)^{\frac{1}{n}}$ .

**Demonstração.** Vale  $\varepsilon \leq x_n \leq n^p$ , tomando a raiz  $n$ -ésima tem-se

$$\varepsilon^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq (n^p)^{\frac{1}{n}}$$

tomando-se o limite segue pelo teorema do sanduíche que  $\lim(x_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ .

**Exemplo 16.** Para  $n$  suficientemente grande tem-se  $1 < n+s < n^2$  e daí  $\lim(n+s)^{\frac{1}{n}} = 1$ .

Da mesma maneira

$$1 < n + \sqrt{n} < (n)^2$$

$$1 < a \ln n < (n)^2$$

$$1 < n \ln n < (n)^2$$

para  $n$  grande, daí

$$\lim \sqrt[n]{n + \sqrt{n}} = 1$$



$$\lim \sqrt[n]{a \ln n} = 1$$

$$\lim \sqrt[n]{n \ln n} = 1.$$

### Questão 3

Generalização da questão do livro.

**Exemplo 17.** Seja a sequência  $(x_n)$  definida como  $x_1 = a$  e  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + b}$ , onde  $x_1^2 < x_1 + b$ , isto é,  $a^2 < a + b$ ,  $a$  e  $b$  positivos, calcular  $\lim x_n$ .

Vamos mostrar primeiro que a sequência é crescente. Por indução sobre  $n$ , temos  $x_2 = \sqrt{a + b}$  e  $a < \sqrt{a + b}$  pois  $a^2 < a + b$ . Supondo para  $n$ ,  $x_n < x_{n+1}$  vamos mostrar que vale para  $n + 1$ ,  $x_{n+1} < x_{n+2}$ . Da hipótese tem-se que  $x_n + b < x_{n+1} + b$  daí  $\sqrt{x_n + b} < \sqrt{x_{n+1} + b}$  implicando  $x_{n+1} < x_{n+2}$ . Vamos mostrar agora que a sequência é limitada superiormente. Existe  $t > 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $t^2 > a + b$  e  $t^2 - b > t$ . Daí a sequência é limitada superiormente por  $t^2 - b$  pois, por indução  $x_1 = a < t^2 - b$  e supondo  $x_n < t^2 - b$  segue  $x_n + b < t^2$  tomando a raiz segue  $x_{n+1} < t < t^2 - b$ . Ela é limitada superiormente e crescente logo é convergente.

Tomando limite em ambos lados de  $x_{n+1}^2 = x_n + b$  resolvendo a equação do segundo grau encontramos  $L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ .

Podemos tomar  $x_1 = 0$  e  $b = a$  daí  $0 < a$ , logo converge e temos o corolário

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

**Exemplo 18.**

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

converge para a razão áurea.

**Questão 4**

**Propriedade 74.** Seja  $e_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$  o erro relativo na  $n$ -ésima etapa do cálculo de  $\sqrt{a}$  por meio da recorrência  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{a}{x_n} + x_n)$ . Vale que

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1 + e_n)}.$$

**Demonstração.**

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

substituindo  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{a}{x_n} + x_n)$  segue que

$$e_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(\frac{a}{x_n} + x_n) - 1.$$

Por outro lado

$$e_n^2 = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{a}$$

$$2(e_n + 1) = 2(\frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1) = 2(\frac{x_n - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}) = 2(\frac{x_n}{\sqrt{a}})$$

daí

$$\frac{e_n^2}{2(e_n + 1)} = (\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_na})\sqrt{a} = (\frac{x_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_n}}{2\sqrt{a}}) = (\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2\sqrt{a}}) - 1 = e_{n+1}.$$

**Exemplo 19.** Usando a expressão  $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1 + e_n)}$ . Se  $e_n \leq 10^{-2}$  tem-se  $e_{n+1} \leq \frac{10^{-4}}{2(1 + 10^{-2})} = \frac{10^{-4}10^2}{2(10^2 + 1)} = \frac{10^{-2}}{2(10^2 + 1)}$  que podemos aproximar por  $\frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0,00005$  aplicando novamente

$$e_{n+2} \leq \frac{1}{8 \cdot 10^8(1 + \frac{1}{2 \cdot 10^4})} = \frac{2 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^8(2 \cdot 10^4 + 1)}$$

que aproximamos para  $\frac{1}{4 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^4} = \frac{1}{8 \cdot 10^8} = 0,00000000125$ .

**Questão 5**

**Propriedade 75.** Definimos uma sequência  $(x_n)$  recursivamente como  $x_1 = \frac{1}{a}$ ,  $a > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{a + x_n}$ .  $(x_n)$  converge para a solução positiva de  $x^2 + ax - 1 = 0$ .

**Demonstração.** Vale  $x_{n+2} = \frac{1}{a + x_{n+1}}$  e  $x_{n+1} = \frac{1}{a + x_n}$  então

$$x_{n+2} = \frac{1}{a + \left(\frac{1}{a+x_n}\right)} = \frac{a + x_n}{a^2 + ax_n + 1}$$

$$x_{n+2} = \frac{a + x_n}{a^2 + ax_n + 1}$$

em especial

$$x_3 = \frac{a + x_1}{a^2 + ax_1 + 1}.$$

De  $c^2 + ac - 1 = 0$  segue que  $c(c + a) = 1$ ,  $c = \frac{1}{c + a}$ . Vale  $x_1 = \frac{1}{a} > c = \frac{1}{c + a} > \frac{1}{a + x_1} = x_2$  e daí  $x_1 > x_2 = \frac{1}{a + x_1}$  que implica

$$ax_1 + x_1^2 > 1$$

multiplicando por  $a$  e depois somando  $x_1$  em ambos lados segue que

$$a^2x_1 + ax_1^2 + x_1 > a + x_1 \Leftrightarrow x_1(a^2 + ax_1 + 1) > a + x_1 \Rightarrow x_1 > \underbrace{\frac{a + x_1}{a^2 + ax_1 + 1}}_{=x_3}$$

daí  $x_1 > x_3$  e como  $x_2 < c$  segue que  $x_3 = \frac{1}{a + x_2} > c = \frac{1}{a + c}$ , logo temos  $x_1 > x_3 > c > x_2$ .

Vale também que  $x_4 = \frac{1}{a + x_3} > x_2 = \frac{1}{a + x_1}$ , pois  $x_1 > x_3$  e  $c > x_4$  pois  $x_3 > c$ , então

$$x_1 > x_3 > c > x_4 > x_2.$$

Seguindo esse procedimento mostramos que a sequência dos ímpares é decrescente limitada inferiormente e a sequência dos pares é crescente limitada superiormente, então ambas as sequências são convergentes. Supondo  $\lim x_{2n} = L_1$  e  $\lim x_{2n-1} = L_2$  segue da identidade  $x_{n+2} = \frac{a + x_n}{a^2 + ax_n + 1}$  que

$$L = \frac{a + L}{a^2 + aL + 1} \Rightarrow a^2L + aL^2 + L = a + L \Rightarrow a^2L + aL^2 = a \Rightarrow aL + L^2 = 1$$

como  $L_1, L_2 > 0$  essa equação possui apenas uma solução positiva, então segue que  $L_1 = L_2 = c$ .

**Questão 6**

**Propriedade 76.** Dado  $a > 0$  definimos  $(y_n)$  com  $y_1 = a$  e  $y_{n+1} = a + \frac{1}{y_n}$ . Vale que  $\lim y_n = a + c$  onde  $c$  é raiz positiva de  $x^2 + ax - 1 = 0$ .

**Demonstração.** Vamos mostrar que  $x_n = \frac{1}{y_n}$  para todo  $n$  natural, onde  $(x_n)$  é a sequência definida na propriedade anterior. Por indução sobre  $n$ , para  $n = 1$  temos  $x_1 = \frac{1}{a} = \frac{1}{y_1}$  ok! Suponha por hipótese que  $x_n = \frac{1}{y_n}$  e vamos mostrar que  $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n+1}}$ .

Vale que  $y_{n+1} = a + \frac{1}{y_n} = \frac{ay_n + 1}{y_n}$ , por definição de  $x_n$  tem-se que

$$x_{n+1} = \frac{1}{a + x_n} = \frac{1}{a + \frac{1}{y_n}} = \frac{y_n}{ay_n + 1} = \frac{1}{y_{n+1}}.$$

Então  $y_{n+1} = a + x_n$  tomando o limite segue que  $\lim y_{n+1} = a + c$ .

**Questão 7**

**Exemplo 20.** Seja a sequência de fibonacci definida como  $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$  com condições iniciais  $f(1) = f(2) = 1$ , definindo  $x_n = \frac{f(n)}{f(n+1)}$  então  $\lim x_n = c$  raiz positiva de  $x^2 + x - 1 = 0$ .

Da recorrência  $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$  dividindo por  $f(n+1)$  em ambos lados segue que  $\frac{f(n+2)}{f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n+1)} + 1$  de  $x_n = \frac{f(n)}{f(n+1)}$  segue que  $x_{n+1} = \frac{f(n+1)}{f(n+2)}$ , logo

$$\frac{1}{x_{n+1}} = x_n + 1 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$$

logo caímos no caso já demonstrado da sequência  $(x_n)$  com  $a = 1$ , daí  $(x_n)$  converge para solução positiva de  $x^2 + x - 1 = 0$ .

**1.4.4 Limites infinitos****Questão 1**

**Exemplo 21.**

$$\lim (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

De  $n! > a^n$ , com  $a > 0$  arbitrário para  $n$  grande, tem-se  $(n!)^{\frac{1}{n}} > a$  então a sequência de termo  $x_n = (n!)^{\frac{1}{n}}$  não é limitada superiormente além disso é crescente, pois de  $n+1 > k > 0$  tem-se  $\prod_{k=1}^n (n+1) > \prod_{k=1}^n k$  logo  $(n+1)^n > n!$  o que implica  $(n!)^n (n+1)^n > n! (n!)^n$  e daí  $((n+1)!)^n > (n!)^{n+1}$  de onde segue  $(n+1)!^{\frac{1}{n+1}} > (n!)^{\frac{1}{n}}$ .

como ela é crescente e ilimitada superiormente, então seu limite é infinito.

### Questão 2

**Propriedade 77.** Se  $\lim x_n = \infty$  e  $a > 0$  então

$$\lim \sqrt{\ln(x_n + a)} - \sqrt{\ln(x_n)} = 0.$$

**Demonstração.**

$$\sqrt{\ln(x_n + a)} - \sqrt{\ln(x_n)} = \frac{\ln(x_n + a) - \ln(x_n)}{\sqrt{\ln(x_n + a)} + \sqrt{\ln(x_n)}}$$

o denominador  $\ln(1 + \frac{a}{x_n}) < 1 + \frac{a}{x_n} \rightarrow 1$  logo o denominador é limitado e o numerador tende ao infinito, então o limite é nulo.

### Questão 3

**Propriedade 78.** Com  $a > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$  vale  $\lim \frac{n^p a^n}{n!} = 0$ .

**Demonstração.** Pelo teste da razão, tomando  $x_n = \frac{n^p a^n}{n!} > 0$  segue

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^p a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n \cdot n^p} = \frac{a}{(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

daí  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$  e  $\lim x_n = 0$ .

**Corolário 14.**  $\lim \frac{n!}{n^p a^n} = \infty$ .

**Propriedade 79.** Seja  $a > 0$  então  $\lim \frac{a^n n! n^p}{n^n} = 0$  se  $a < e$  e  $\lim \frac{a^n n! n^p}{n^n} = \infty$  se  $a > e$ .

**Demonstração.** Definindo  $x_n = \frac{a^n n! n^p}{n^n} > 0$  tem-se

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} (n+1)! (n+1)^p}{(n+1)^{n+1} n^p} \frac{n^n}{a^n \cdot n!} = \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

cujo limite é  $\frac{a}{e}$ , daí, se  $a < e$   $\lim x_n = 0$ , se  $a > e$   $\lim x_n = \infty$ .

**Questão 4**

**Propriedade 80.** Se  $(x_n - y_n)$  é limitada e  $\lim y_n = \infty$  então  $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$ .

**Demonstração.** Existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  e  $n_0$  tal que para  $n > n_0$  vale

$$t_1 < x_n - y_n < t_2, \Rightarrow t_1 + y_n < x_n < t_2 + y_n$$

com  $y_n > 0$  dividimos por esse valor

$$\frac{t_1}{y_n} + 1 < \frac{x_n}{y_n} < \frac{t_2}{y_n} + 1$$

tomando o limite em ambos lados tem-se por sanduíche

$$1 \leq \lim \frac{x_n}{y_n} \leq 1$$

$$\lim \lim \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

**Corolário 15.** A sequência  $(\ln(n+1) - \ln(n))$  é limitada pois vale  $0 < \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{n}$  com  $1 + \frac{1}{n}$  limitada daí  $\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$  pois e  $\lim \ln(n) = \infty$ .

Outra maneira é considerar

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)}$$

como o numerador é limitado e o denominador tende ao infinito o limite é nulo

$$\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 = 0 \Rightarrow \lim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1.$$

**Questões 5 e 6**

**Propriedade 81** (Stolz-Cesàro). Dada uma sequência  $(x_n)$  e uma sequência  $(y_n)$  crescente com

$$\lim y_n = \infty$$

e  $\lim \frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} = a$  então  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ .

**Demonstração.** Como  $\lim \frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} = a$  então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $k > n_0$  tem-se  $a - \varepsilon \leq \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} \leq a + \varepsilon$  e  $y_n > 0$  (pois tende ao infinito), como  $(y_n)$  é crescente vale  $\Delta y_k > 0$ , logo podemos multiplicar por ele em ambos lados da desigualdade sem alterar

$$(a - \varepsilon)\Delta y_k \leq \Delta x_k \leq (a + \varepsilon)\Delta y_k$$

tomamos o somatório  $\sum_{k=n_0+1}^{n-1}$  em ambos lados

$$(a - \varepsilon)(y_n - y_{n_0+1}) \leq (x_n - x_{n_0+1}) \leq (a + \varepsilon)(y_n - y_{n_0+1})$$

isso implica

$$(a - \varepsilon)(y_n - y_{n_0+1}) + x_{n_0+1} \leq x_n \leq (a + \varepsilon)(y_n - y_{n_0+1}) + x_{n_0+1}$$

$$(a - \varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0+1}}{y_n} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq (a + \varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0+1}}{y_n}$$

como  $\lim y_n = \infty$  segue que o que implica  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ .

**Propriedade 82.** Se  $\lim z_n = a$  e  $(w_n)$  é uma sequência de números positivos com

$$\lim \sum_{k=1}^n w_k = \infty \text{ então } \lim \frac{\sum_{k=1}^n w_k z_k}{\sum_{k=1}^n w_k} = a.$$

**Demonstração.** Tomamos  $x_n = \sum_{k=1}^n w_k \cdot z_k$  e  $y_n = \sum_{k=1}^n w_k$  então  $\Delta x_n = w_{n+1} \cdot z_{n+1}$

,  $\Delta y_n = w_{n+1} > 0$  então  $y_n$  é crescente e  $\lim y_n = \infty$ , temos também que  $\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} = \frac{w_{n+1} z_{n+1}}{w_{n+1}} = z_{n+1}$  cujo limite existe e vale  $a$  então nessas condições vale

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\sum_{k=1}^n w_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n w_k} = a.$$

**Corolário 16.** Tomando  $w_n = 1$  então  $\sum_{k=1}^n w_k = n$  e seu limite é infinito, tomando uma sequência  $(z_n)$  tal que  $\lim z_n = a$  então segue que

$$\lim \frac{\sum_{k=1}^n z_k}{n} = a$$

, isto é, se  $\lim z_n = a$  então  $\lim \frac{\sum_{k=1}^n z_k}{n} = a$ .

**Corolário 17.** No corolário anterior tome  $x_n = \sum_{k=1}^n z_k$ , daí segue que  $\lim \Delta x_n = a$  implica que  $\lim \frac{x_n}{n} = a$ .

**Propriedade 83.**

$$\lim \frac{\ln(n+1)}{n} = 0.$$

**Demonstração.** Tomando  $y_n = n$  e  $x_n = \ln(n+1)$  vale que  $\Delta y_n = 1 > 0$  e  $\lim y_n = \infty$ ,  $\Delta x_n = \ln(\frac{n+1}{n})$  vale ainda que

$$\lim \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = \lim \ln(\frac{n+1}{n}) = 0$$

$$\text{logo } \lim \frac{\ln(n+1)}{n} = 0.$$

## 1.5 Capítulo 4-Séries numéricas

### 1.5.1 Séries convergentes

#### Questão 1

**Exemplo 22.** Dadas as séries  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  com  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ,  $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$ , mostre que  $\lim a_n = \lim b_n = 0$ . Calcule explicitamente as  $n$ -ésimas reduzidas  $s_n$  e  $t_n$  destas séries e mostre que  $\lim s_n = \lim t_n = +\infty$ .

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sum_{k=1}^n \Delta \sqrt{k} = \sqrt{k} \Big|_1^{n+1} = \sqrt{n+1} - 1$$

$$\text{logo } \lim s_n = \infty$$

$$t_n = \sum_{k=1}^n \log(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^n \log(k+1) - \log(k) = \sum_{k=1}^n \Delta \log(k) = \log(k) \Big|_1^{n+1} = \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1)$$

logo  $\lim t_n = +\infty$ . O limite dos termos das séries

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \lim a_n = 0$$



$$b_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$0 < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]}{n} \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

como  $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  então tal sequência é limitada, logo  $\lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} = 0$  de onde segue por teorema do sanduíche que  $\lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ . Usamos que  $\log(n) < n$ . Assim temos duas série cujos termos gerais tendem a zero, porém as séries divergem, esse exemplo mostra que a condição de  $\lim f(k) = 0$  em uma série  $\sum_{k=b}^{\infty} f(k)$  ser satisfeita não garante que a série será convergente, a condição é apenas uma condição necessária.

## Questão 2

Usaremos muito a propriedade telescópica que diz que

$$\sum_{k=1}^n \Delta f(k) = f(n+1) - f(1)$$

onde  $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$ .

**Exemplo 23.** Mostrar que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge, usando o critério de comparação.

Começaremos com o somatório

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{k-1} \Big|_2^{n+1} = -\frac{1}{n} + 1 = \frac{n-1}{n}$$

onde usamos soma telescópica  $\sum_{k=a}^b \underbrace{\Delta f(k)}_{=f(k+1)-f(k)} = f(b+1) - f(a) = f(k) \Big|_a^{b+1}$ ,  $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$  é apenas uma notação para essa diferença. Tomando o limite na expressão acima

$$\lim -\frac{1}{n} + 1 = 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Vamos mostrar com esse resultado que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge, temos que para  $k > 1$

$$\frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{k^2}$$

pois

$$k^2 > k^2 - k$$

$$k > 0$$

e  $k > 1$  por análise de sinal, logo aplicando o somatório

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} > \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

somando 1 em ambos lados e usando o resultado da série que foi calculada

$$2 > 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

### Questão 3

Vamos agora demonstrar alguns resultados que não são necessários para resolver a questão, porém achamos que sejam interessantes, simples e podem enriquecer um pouco o material.

Vamos usar o seguinte pequeno resultado em certas demonstrações.

**Propriedade 84.** Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências, se  $\Delta x_n = \Delta y_n$  para todo  $n$ , então  $x_n = y_n + c$  para alguma constante  $c$ .

**Demonstração.** Aplicamos o somatório  $\sum_{k=1}^{n-1}$  em cada lado na igualdade  $\Delta x_k = \Delta y_k$  e usamos a soma telescópica, de onde segue

$$x_n - x_1 = y_n - y_1 \Rightarrow x_n = y_n + \underbrace{x_1 - y_1}_{=c} \quad \square.$$

**Corolário 18.** Se  $\Delta x_n = \Delta y_n \forall n$  e existe  $t \in N$  tal que  $x_t = y_t$  então  $x_n = y_n$  para todo  $n$ . Tal propriedade vale pois  $x_n = y_n + c$ , tomando  $n = t$  segue  $x_t = y_t + c$  que implica  $c = 0$ , logo  $x_n = y_n$  para todo  $n$ .

**Propriedade 85.** Seja  $n > 0 \in N$  então

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} f(k) = \sum_{k=1}^{2^n-1} f(k)$$

**Demonstração.** Para  $n = 1$

$$\sum_{s=0}^0 \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} f(k) = \sum_{k=2^0}^{2-1} f(k) = \sum_{k=1}^{2^1-1} f(k)$$

Temos que

$$\Delta \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} f(k) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f(k)$$

e

$$\Delta \sum_{k=1}^{2^n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} f(k) - \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^r} = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f(k) + \sum_{k=1}^{2^n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{2^n-1} f(k) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f(k).$$

logo está provada a igualdade.

**Propriedade 86** (Critério de condensação de Cauchy). Seja  $(x_n)$  uma sequência não-crescente de termos positivos então  $\sum x_k$  converge, se e somente se,  $\sum 2^k x_{2^k}$  converge.

**Demonstração.** Usaremos a identidade

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} f(k) = \sum_{k=1}^{2^n-1} f(k).$$

Como  $x_k$  é não-crescente então vale

$$2^s x_{2^{s+1}} = \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_{2^{s+1}} \leq \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_k$$

aplicando  $2 \sum_{s=0}^{n-1}$  segue

$$\sum_{s=0}^{n-1} 2^{s+1} x_{2^{s+1}} \leq \sum_{k=1}^{2^n-1} x_k$$

logo se  $\sum 2^s x_{2^s}$  diverge então  $\sum x_k$  diverge.

Usando agora que

$$\sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_k \leq \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_{2^s} = 2^s x_{2^s}$$

aplicando  $\sum_{s=0}^{n-1}$  segue que

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} x_k \leq \sum_{s=0}^{n-1} 2^s x_{2^s}$$

daí se  $\sum 2^s x_{2^s}$  converge então  $\sum x_k$  converge  $\square$ .

**Exemplo 24** (Série Harmônica). Os números harmônicos são definidos como

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  satisfaz a condição necessária para convergência de séries mas vamos mostrar que a série

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

, isto é, a série diverge.

Suponha que a série harmônica seja convergente, denotando  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H$ . Sejam  $N_1$  o subconjunto de  $\mathbb{N}$  dos índices pares e  $N_2$  o conjunto dos números ímpares. Se  $H_n$  converge temos que a série sobre suas subsequências também converge, sendo então

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = t_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = t$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = s_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{H}{2}$$

temos  $H_{2n} = s_n + t_n$  tomando o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{2n} = H = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = s + t$ , como  $s = \frac{H}{2}$  segue que  $t = \frac{H}{2}$  pois a soma deve ser  $H$ , desse modo a diferença  $t - s = 0$ , mas

$$t_n - s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)(2k-1)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(2k)(2k-1)} > 0$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n - s_n = t - s > 0$$

de onde segue  $t > s$  que é absurdo. Pode-se mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n - s_n = \ln(2)$ .

**Exemplo 25.** Na série harmônica percebemos que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

podemos continuar agrupando os termos das somas dessa maneira, vendo que a soma dos termos harmônicos não são limitados superiormente.

Usando o critério de condensação de Cauchy  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k} = \sum 1$  diverge.

**Corolário 19.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  diverge se  $p < 1$ . Para  $p < 1$  vale  $k^p < k$  e daí  $\frac{1}{k} < \frac{1}{k^p}$ , daí por comparação como  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge isso implica que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  também diverge.

Vejamos outro corolário do critério de condensação de Cauchy.

**Propriedade 87.** A série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  converge se  $p > 1$  e diverge se  $p < 1$ .

**Demonstração.** Pelo critério de condensação de Cauchy a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  converge, se e somente se,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{kp}}$  converge daí  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$  logo  $p - 1 > 0$ ,  $p > 1$ , caso  $p < 1$  a série diverge.

Vamos resolver as questões 4 e 5 usando o critério de condensação de Cauchy.

### Questão 4 e Questão 5

**Propriedade 88.** A série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^r}$$

diverge se  $r \leq 1$  e converge se  $r > 1$ .

**Demonstração.**

Usamos o critério de condensação de Cauchy

$$\sum \frac{2^k}{2^{k(\ln(2^k))^r}} = \sum \frac{1}{k^r(\ln(2))^r}$$

que diverge se  $r \leq 1$  e converge se  $r > 1$ .

**Exemplo 26.** Provar que a série  $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$  converge. Pelo critério de condensação de Cauchy temos que

$$\sum \frac{2^n \ln(2^n)}{2^n \cdot 2^n} = \sum \frac{n \ln(2)}{2^n}$$

tal série converge, logo a primeira também converge.

**Questão 6**

**Exemplo 27.** Provar que a série  $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$  converge. Pelo critério de condensação de Cauchy temos que

$$\sum \frac{2^n \ln(2^n)}{2^n \cdot 2^n} = \sum \frac{n \ln(2)}{2^n}$$

tal série converge, logo a primeira também converge.

**Questão 7**

**Propriedade 89.** Seja  $(a_n)$  uma sequência não-crescente de números reais positivos. Se  $\sum a_k$  converge então  $\lim na_n = 0$ .

**Demonstração.** Usaremos o critério de Cauchy. Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n+1 > n_0$  vale

$$\frac{2na_{2n}}{2} = na_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon$$

logo  $\lim 2na_{2n} = 0$ . Agora mostramos que a subsequência dos ímpares também tende a zero. Vale  $a_{2n+1} \leq a_{2n}$  daí  $0 < (2n+1)a_{2n+1} \leq 2na_{2n} + a_{2n}$  por teorema do sanduíche segue o resultado. Como as subsequências pares e ímpares de  $(na_n)$  tendem a zero, então a sequência tende a zero.

**1.5.2 Séries absolutamente convergentes****Questão 1**

**Propriedade 90.** Sejam  $a_n \geq 0$  e  $\sum a_n$  convergente, então  $\sum a_n x^n$  é absolutamente convergente  $\forall x \in [-1, 1]$ .

**Demonstração.** Com  $x \in [-1, 1]$  vale  $|x| \leq 1$  daí

$$\sum |a_n x^n| = \sum a_n |x|^n \leq \sum a_n$$

logo  $\sum a_n x^n$  é absolutamente convergente.

**Questão 2**

**Exemplo 28.** Seja a série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{k+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \dots$  onde  $a_{2k} = \frac{1}{k+2}$  e  $a_{2k-1} = \frac{2}{2+k}$  então  $\lim a_k = 0$  e tem termos alternados, porém diverge. Por que ela não contradiz o teorema de Leibniz? Tal sequência não satisfaz a propriedade de ser não-crescente, pois  $a_{2k+1} > a_{2k}$ ,  $\frac{2}{2+k+1} > \frac{1}{2+k}$ .

Tal série realmente diverge pois

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k (-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{2+k} - \frac{1}{2+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

que diverge pela divergência da série harmônica (perceba acima que separamos os termos pares dos ímpares na soma).

**Questão 3**

**Exemplo 29.** Uma série  $\sum a_n$  pode ser convergente e quando seus termos são multiplicados por uma sequência limitada  $(x_n)$  a série  $\sum a_n x_n$ , pode divergir, como é o caso da série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  com termos multiplicados pela sequência limitada de termo  $(-1)^n$ , gerando a série  $\sum \frac{1}{n}$  que é divergente.  $(x_n)$  pode ser convergente e ainda assim  $\sum a_n x_n$  divergir como é o caso de  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  que converge pelo critério de Leibniz e tomando  $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$   $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n}$  diverge.

**Propriedade 91.** Se  $(x_n)$  é limitada e  $\sum a_n$  é absolutamente convergente então  $\sum a_n x_n$  é convergente.

**Demonstração.** Existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $|x_n| < m \forall n \in \mathbb{N}$  daí  $|x_n a_n| \leq m |a_n|$  daí segue por comparação que  $\sum |x_n a_n|$  é convergente logo  $\sum x_n a_n$  converge.

**Questão 4**

**Propriedade 92.** Seja  $(x_n)$  uma sequência não-crescente com  $\lim x_n = 0$  então a série obtida somando  $p$  termos com sinais positivos da sequência  $(x_n)$  alternando com  $p$  termos negativos alternadamente é convergente.

**Demonstração.** A série pode ser escrita como

$$\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t+1} \underbrace{\sum_{k=1}^p x_{k+(t-1)p}}_{=y_t} = \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t+1} y_t$$

Vamos mostrar que essa série satisfaz os critério de Leibniz. Como  $\lim x_n = 0$  então o limite de qualquer subsequência de  $(x_n)$  também tende a zero, logo  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{k+(t-1)p} = 0$ , para todo  $k$  fixo, tem-se  $\lim y_t = \lim \sum_{k=1}^p x_{k+(t-1)p} = 0$ . Agora vamos mostrar que a sequência  $(y_t)$  é não-crescente, como  $(x_n)$  é não-crescente temos que  $x_{k+tp} \leq x_{k+(t-1)p}$  para todo  $k$ , aplicando  $\sum_{k=1}^p$  tem-se

$$y_{t+1} = \sum_{k=1}^p x_{k+tp} \leq \sum_{k=1}^p x_{k+(t-1)p} = y_t$$

daí  $y_t$  é não-crescente, logo vale o critério de Leibniz, implicando que  $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t+1} \sum_{k=1}^p x_{k+(t-1)p}$  é convergente.

**Exemplo 30.** A série obtida somando  $p$  termos com sinais positivos da sequência  $(x_n) = (\frac{1}{n})$  alternando com  $p$  termos negativos alternadamente é convergente, pois  $\lim x_n = 0$  e  $x_n$  é decrescente.

### Questão 5

**Propriedade 93.** Se  $\sum a_k$  é absolutamente convergente e  $\lim b_n = 0$  então  $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \rightarrow 0$ .

**Demonstração.** Existe  $B > 0$  tal que  $|b_n| < B, \forall n \in N$ . Vale  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = A$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in N$  tal que  $n > n_0$  implica  $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2A}$  e por  $\sum_{k=1}^n |a_k|$  ser de cauchy vale  $|\sum_{k=n_0+1}^n a_k| < \frac{\varepsilon}{2B}$  então para  $n > 2n_0$  ( $n - n_0 > n_0$ ) segue que

$$|\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n-k}| = \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| |b_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^n |a_k| |b_{n-k}| \leq$$



$$\leq \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \frac{\varepsilon}{2A} + \sum_{k=n_0+1}^n |a_k| B \leq \frac{A\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon B}{2B} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

isso implica que  $\lim c_n = 0$ .

### Questão 6

**Propriedade 94.** Seja  $(x_k)$  uma sequência de números não negativos com a série  $\sum x_k$  convergente então  $\sum x_k^2$  é convergente.

**Demonstração.** Como temos  $x_k \geq 0$  segue também  $x_k^2 \geq 0$ , sendo então  $s(n) = \sum_{k=b}^n x_k^2$  temos  $\Delta s(n) = x_{n+1}^2 \geq 0$ , logo  $s(n)$  é não decrescente, se mostrarmos que a série é limitada superiormente teremos uma sequência que é limitada e monótona logo convergente. Temos que  $s(n)$  é limitada superiormente da seguinte maneira

$$\sum_{k=b}^n x_k^2 \leq \left( \sum_{k=b}^n x_k \right) \left( \sum_{k=b}^n x_k \right)$$

logo a série é convergente.

**Corolário 20.** Se  $\sum a_k$  é absolutamente convergente então  $\sum a_k^2$  converge, usamos o resultado anterior com  $x_k = |a_k|$ , então a convergência de  $\sum |a_k|$  implica a convergência de  $\sum |a_k|^2 = \sum a_k^2$ .

### Questão 7

**Propriedade 95.** Se  $\sum x_n^2$  e  $\sum y_n^2$  convergem então  $\sum x_n \cdot y_n$  converge absolutamente.

**Demonstração.** Usando a desigualdade de Cauchy

$$\left( \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right) = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

logo por critério de comparação segue que  $\sum x_n \cdot y_n$  converge absolutamente.

### Questão 8

**Propriedade 96.** Seja  $\sum a_n$  uma série qualquer, denotamos

$$S = \left\{ \sum_{k \in A} a_k, \text{ tal que } A \text{ é qualquer conjunto finito de índices de } (a_k) \right\}.$$

$\sum a_k$  é absolutamente convergente  $\Leftrightarrow S$  é limitado.

**Demonstração.**  $\Rightarrow$  Se  $\sum a_k$  é absolutamente convergente então a soma dos termos positivos é no máximo  $p = \sum p_k$  e a soma dos termos negativos é no máximo  $-q = -\sum q_k$ , logo  $S$  é um conjunto limitado, pois qualquer outra combinação de soma de termos positivos e negativos do conjunto deve estar entre esses dois valores.  $\Leftarrow$ . Se  $S$  é limitado então  $\sum p_n$  e  $\sum q_n$  são limitados e por isso convergentes pois determinam seqüências não-decrescentes limitadas superiormente, daí segue que  $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n$  é convergente.

### 1.5.3 Teste de convergência

#### Questões 1 e 2

**Propriedade 97.** Se  $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$  para uma infinidade de índices  $n$  então  $\lim a_n \neq 0$  e a série  $\sum a_n$  diverge.

**Demonstração.** Se  $\lim a_n = 0$  então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_0$  tem-se  $|a_n| < \frac{1}{2}$ , se  $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$  para uma infinidade de índices  $n$ , então existe um índice  $n_1 > n_0$  tal que  $|a_{n_1}|^{\frac{1}{n_1}} \geq 1$  logo  $|a_{n_1}| \geq 1$  o que entra em contradição com a suposição de que  $\lim a_n = 0$  então tal propriedade não vale, de onde segue que a série  $\sum a_n$  diverge, pois se ela fosse convergente então teríamos  $\lim a_n = 0$ .

**Propriedade 98.** Se  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  e existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$  tem-se  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$  então  $\sum a_n$  diverge.

**Demonstração.** Para  $k > n_0$  vale  $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$  daí aplicando  $\prod_{k=n_0}^n$  de ambos lados, segue por produto telescópico que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_{n_0}|} \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_{n_0}| > 0$$

logo não vale que  $\lim a_n = 0$ , portanto a série  $\sum a_n$  diverge.

**Exemplo 31.** A série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + a^4 + b^4 + \dots$  definida como  $a_{2k} = b^k$  e  $a_{2k-1} = a^k$  onde  $0 < a < b < 1$  converge. O teste de d'Alembert é inconclusivo

pois  $\forall k \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \left(\frac{b}{a}\right)^k > 1$  pois de  $a < b$  segue  $1 < \frac{b}{a}$ . O teste de Cauchy funciona pois para índices pares  $\sqrt[2n]{b^n} = \sqrt{b} < 1$  e para índices ímpares  $\sqrt[2n-1]{a^n} < 1$ , logo vale para todo  $n$ ,  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$  e o teste de Cauchy implica que  $\sum a_n$  converge. No caso do teste de d'Alembert, caso fosse  $a = b$  seguiria que  $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \left(\frac{b}{a}\right)^k = 1$ , porém a série seria convergente pois

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^n a_{2k} + \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = \sum_{k=1}^n a^k + \sum_{k=1}^n b^k$$

sendo que a sequência das reduzidas é convergente logo a série é convergente, em especial esse argumento vale para  $a = b = \frac{1}{2}$ .

### Questão 3

**Propriedade 99.** A sequência de termo  $\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^n$  é limitada.

#### Demonstração.

Para  $n \geq 3$  vale  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$  daí  $(n+1)^n < n^{n+1}$  tomando o logaritmo  $n \ln(n+1) < (n+1) \ln(n)$  logo  $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} < \frac{n+1}{n}$  elevando à  $n$  segue que  $\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ , sendo menor que uma sequência limitada segue que ela é limitada.

**Exemplo 32.** Mostrar que  $\sum \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$  é convergente.

Pelo critério de D'Alembert, temos

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{\ln(n)}{\ln(n)}\right)^n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

o primeiro limite tende a zero, a segunda expressão é limitada e o terceiro limite converge, então tal expressão tende a zero.

Pelo critério de Cauchy,  $\sqrt[n]{\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n} = \frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$  logo a série converge.

### Questão 4

**Propriedade 100.** Seja  $(x_n)$  uma sequência de termos não nulos, se  $\lim \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = L$  então  $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = L$ .

**Demonstração.** Seja  $L > 0$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $k > n_0$  vale

$$0 < L - \varepsilon < t_1 < \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < t_2 < L + \varepsilon$$

aplicando  $\prod_{k=n_0+1}^n$  em ambos lados e usando produto telescópico tem-se

$$|x_{n_0+1}|(t_1)^{n-n_0} < |x_{n+1}| < |x_{n_0+1}|(t_2)^{n-n_0}$$

tomando a raiz  $n$ -ésima

$$|x_{n_0+1}|^{\frac{1}{n}}(t_1)^{1-\frac{n_0}{n}} < |x_{n+1}|^{\frac{1}{n}} < |x_{n_0+1}|^{\frac{1}{n}}(t_2)^{1-\frac{n_0}{n}}$$

para  $n$  grande tem-se

$$L - \varepsilon < |x_{n+1}|^{\frac{1}{n}} < L + \varepsilon$$

daí segue que  $\lim |x_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = L$ .

Se  $L = 0$ , temos argumento similar, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $k > n_0$  vale

$$0 < \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < t_2 < \varepsilon < 1$$

aplicando  $\prod_{k=n_0+1}^n$  em ambos lados e usando produto telescópico tem-se

$$0 < |x_{n+1}| < |x_{n_0+1}|(t_2)^{n-n_0}$$

tomando a raiz  $n$ -ésima

$$0 < |x_{n+1}|^{\frac{1}{n}} < |x_{n_0+1}|^{\frac{1}{n}}(t_2)^{1-\frac{n_0}{n}}$$

para  $n$  grande tem-se

$$0 < |x_{n+1}|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

daí segue que  $\lim |x_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = 0$ .

**Propriedade 101** (Limite da média geométrica). Seja  $(x_n)$  tal que  $x_n > 0$ , se  $\lim x_n = a$

então  $\lim \left( \prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} = a$ .

Usando a notação  $Qx_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ .

**Demonstração.**[1] Usamos o resultado de que se  $\lim Qy_n = a$  então  $\lim \sqrt[n]{y_n} = a$ .

Tomando  $y_n = \prod_{k=1}^n x_k$  segue que  $Qy_n = x_{n+1}$  logo  $\lim Qy_n = \lim x_{n+1} = a$  implica que

$$\lim \sqrt[n]{y_n} = a = \lim \prod_{k=1}^n \sqrt[n]{x_k} = a..$$

**Demonstração.**[2] Seja  $a > 0$ .  $\lim x_n = a$  então  $\lim \ln(x_n) = \ln(a)$  que implica

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{\ln(x_k)}{n} = \ln(a), \quad \lim \ln\left(\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln(a)$$

pela continuidade e propriedade bijetiva de  $\ln$  segue

$$\lim \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} = a.$$

Se  $a = 0$  usamos desigualdade das médias e teorema do sanduíche

$$0 < \left(\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}$$

daí

$$0 \leq \left(\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \lim \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} = 0$$

então

$$\lim \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} = a$$

em todos esses casos.

**Corolário 21.** Sabendo que  $\lim x_n = a$ ,  $x_n > 0$  podemos provar que  $\lim \prod_{k=1}^n a_k^{\frac{1}{n}} = a$  usando a desigualdade das médias e teorema do sanduíche

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \prod_{k=1}^n a_k^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n}$$

usando que  $\lim \frac{n}{\sum_{k=1}^n a_k} = a$  e  $\lim \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} = a$  segue que  $\lim \prod_{k=1}^n a_k^{\frac{1}{n}}$  por sanduíche .

### Questão 5

**Exemplo 33.** Estudamos os valores  $x$  reais com os quais as séries a seguir convergem.

1.  $\sum n^k x^n$ .  $\sqrt[n]{n^k |x|^n} = \sqrt[n]{n^k} |x| \rightarrow |x|$  então a série converge com  $|x| < 1$ , ela não converge se  $x = 1$  ou  $x = -1$  pois nesses casos o limite do termo somado não tende a zero.

2.  $\sum n^n x^n \cdot \sqrt[n]{n^n |x|^n} = n|x| \rightarrow \infty$  se  $x \neq 0$  ela só converge para  $x = 0$ .
3.  $\sum \frac{x^n}{n^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^n}} = \frac{|x|}{n} \rightarrow 0$ , logo ela converge independente do valor de  $x$ .
4.  $\sum n! x^n \cdot \sqrt[n]{n! |x|^n} = \sqrt[n]{n!} |x| \rightarrow 0$ , logo ela só converge com  $x = 0$ .
5.  $\sum \frac{x^n}{n^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^2}} \rightarrow |x|$ , então é garantida a convergência com  $|x| < 1$ , com  $x = 1$  ela converge e com  $x = -1$  também, pois é absolutamente convergente.

### 1.5.4 Comutatividade

#### Questão 1

**Propriedade 102.** Se uma série é condicionalmente convergente então existem alterações na ordem da soma dos seus termos de modo a tornar a série  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Demonstração.** Como vale  $\sum q_n = \infty$  podemos somar uma quantidade suficiente de termos negativos da série tal que a soma resulte em  $-s_1$  e  $q_n$  seja arbitrariamente pequeno, daí como  $\sum p_n = \infty$  somamos um número suficiente de termos positivos para que o resultado seja  $\underbrace{s_2}_{>0} + \underbrace{A}_{>0} > 0$ , como  $q_n$  é pequeno somamos um número suficiente tal que o resultado seja  $s_3$  tal que  $A < s_3 < s_2 + A$ , novamente somamos uma quantidade de termos positivos tal que o resultado seja  $s_4 = s_2 + 2A$ , somamos agora os termos negativos tal que o resultado seja  $s_5$  com  $2A < s_5 < s_2 + 2A$ , continuamos o processo, sendo que para  $n$  suficientemente grande vale  $s_n > p.A$ , onde  $p$  é natural e  $A > 0$ , logo a soma diverge para infinito. Para que a série seja divergente para  $-\infty$  tomamos procedimento semelhante, porém começando a somar termos positivos até que  $p_n$  seja pequeno e depois começamos a somar os termos negativos.

#### Questão 2

(não feita ainda) Demonstrar que (hipótese)

$$\frac{-1}{n} < s(2n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{2k} < 0 < s_{2n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{4n-4} \frac{1}{2k} < \frac{1}{n}$$

daí  $\lim s_n = 0$ ,  $s_n$  é uma reordenação da série  $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ .

**Questão 3 a)**

**Definição 8** (Sequência somável). Uma sequência  $(a_n)$  é somável com soma  $s$  quando

- $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $J_0 \subset N$  tal que  $\forall J \subset N$  finito com  $J_0 \subset J$  tem-se  $|\sum_{k \in J} a_k - s| < \varepsilon$ .

**Propriedade 103.** Se  $(a_n)$  é somável então para toda bijeção  $f : N \rightarrow N$ ,  $(b_n)$  dada por  $b_n = a_{f(n)}$  é somável com a mesma soma.

**Demonstração.** Como  $(a_n)$  é somável então dado  $\varepsilon > 0$  existe  $j_1 \subset N$  finito tal que  $\forall A \subset N$  com  $j_1 \subset A$  tem-se

$$|\sum_{k \in A} a_k - s| < \varepsilon.$$

Tomamos  $j_0 \subset N$  tal que  $f(j_0) = j_1$ , daí  $f(j_0) = j_1 \subset A$ . Se  $j_0 \subset A$  então  $f(j_0) = j_1 \subset A$  que implica

$$|\sum_{k \in f(j_0)} a_k - s| = |\sum_{k \in j_1} a_k - s| = |\sum_{k \in j_1} b_k - s| < \varepsilon$$

**Questão 3 b) e c)**

**Propriedade 104.**  $(a_n)$  é somável com soma  $s \Leftrightarrow$  a série  $\sum a_n$  é absolutamente convergente e vale  $\sum a_n = s$ .

**Demonstração.** Adotaremos a notação  $s_j = \sum_{k \in j} a_k$ , lembrando que  $j$  é um conjunto finito.

$\Rightarrow$  Vamos mostrar que o conjunto das somas finitas é limitado e daí a série irá convergir absolutamente, por resultado já demonstrado.

Dado  $\varepsilon = 1$  existe  $j_0 \in N$  finito tal que  $\forall j$  com  $j_0 \subset j \Rightarrow |s - s_j| < 1$ . Denotaremos  $a = \sum_{k \in j_0} |a_k|$ . Seja  $A \subset N$  um conjunto finito arbitrário, por identidade de conjuntos vale  $A \cup j_0 = (j_0 \setminus A) \cup A$  sendo que essa união é disjunta, daí tomando a soma sobre esses conjuntos finitos segue

$$\sum_{k \in A \cup j_0} a_k = \sum_{k \in j_0 \setminus A} a_k + \sum_{k \in A} a_k \Rightarrow \sum_{k \in A} a_k = \sum_{k \in A \cup j_0} a_k - \sum_{k \in j_0 \setminus A} a_k$$

$$s_A = s_{A \cup j_0} - s_{j_0 \setminus A}$$

pois em geral se  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos vale que<sup>1</sup>  $\sum_{k \in A \cup B} a_k = \sum_{k \in A} a_k + \sum_{k \in B} a_k$ . Disso segue que  $|s - s_A| = |s - s_{A \cup j_0} + s_{j_0 \setminus A}| < |s - s_{A \cup j_0}| + |s_{j_0 \setminus A}| < 1 + a$  pois  $j_0 \subset A \cup j_0$  logo  $|s - s_{A \cup j_0}| < 1$  pela condição de ser somável. concluimos então que o conjunto das somas finitas de  $\sum a_k$  é limitado, então tal série converge absolutamente.

$\Leftarrow$ . Supondo agora que a série  $\sum a_n$  seja absolutamente convergente com  $\sum a_n = \underbrace{\sum p_n}_u - \underbrace{\sum q_n}_v = u - v = s$ . Tomando  $u_j = \sum_{k \in J} p_k$ ,  $v_j = \sum_{k \in J} q_k$  temos  $s_j = u_j - v_j$ .

Pela convergência absoluta de  $\sum a_n$ , dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, sendo  $j_0 = I_{n_0} = \{1, \dots, n_0\}$ ,  $j_0 \subset j \Rightarrow |u - u_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|v - v_j| < \frac{\varepsilon}{2}$  pela definição de limite aplicada as somas, daí  $j_0 \subset j \Rightarrow$

$$|s - s_j| = |u_j - v_j - (u - v)| \leq |u - u_j| + |v - v_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

daí a sequência é somável.

## 1.6 Capítulo 5-Algumas noções topológicas

### 1.6.1 Conjuntos abertos

#### Questão 1

**Propriedade 105.** Se  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$  então  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}A$ .

**Demonstração.** Queremos mostrar que um ponto  $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  arbitrário é ponto interior de  $A$ , daí seguindo que todo intervalo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  é subconjunto de  $\text{int}A$ . Como  $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  então vale  $x - \varepsilon < y$  e  $y < x + \varepsilon$ , podemos tomar um número real  $\delta > 0$  tal que  $x - \varepsilon < y - \delta$  e  $y + \delta < x + \varepsilon$ , daí cada  $(y - \delta, y + \delta) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ,  $y$  é ponto interior de  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ , logo  $y$  é ponto interior de  $A$  o que implica que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}A$ .

**Propriedade 106** (Idempotência de  $\text{int}$ ). Vale  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ .

**Demonstração.** Temos que  $\text{int}(\text{int}A) \subset \text{int}(A)$ , vamos mostrar agora que  $\text{int}(A) \subset \text{int}(\text{int}(A))$ .

Dado  $x \in \text{int}(A)$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$  logo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}A = B$ , então  $x \in \text{int}(B) = \text{int}(\text{int}(A))$ , o que mostra a proposição.

<sup>1</sup>Isso pode ser tomado como parte da definição de soma sobre conjuntos finitos



**Questão 2**

**Propriedade 107.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$ . Se  $\forall (x_n)$  com  $\lim x_n = a \in A$ ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$$

então  $A$  é aberto.

**Demonstração.** Vamos usar a contrapositiva que no caso diz: Se  $A$  não é aberto então existe  $(x_n)$  com  $\lim x_n = a \in A$  e  $x_n \notin A$ . Lembrando que a contrapositiva de  $p \Rightarrow q$  é  $\neg q \Rightarrow \neg p$ , (onde  $\neg$  é o símbolo para negação da proposição) sendo proposições equivalentes, as vezes é muito mais simples provar a contrapositiva do que a proposição diretamente.

Se  $A$  não é aberto, existe  $a \in A$  tal que  $a$  não é ponto interior de  $A$ , assim  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$ , então podemos tomar uma sequência  $(x_n)$  em  $\mathbb{R} \setminus A$  que converge para  $a \in A$ .

**Questão 3**

**Propriedade 108.**

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B).$$

**Demonstração.** Primeiro vamos mostrar que  $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ . Se  $x \in \text{int}(A \cap B)$  então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (A \cap B)$  daí  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$  e  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B$ , o que implica que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}A$  e  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}B$ , provando a primeira parte.

Vamos mostrar agora que  $\text{int}A \cap \text{int}B \subset \text{int}(A \cap B)$ . Dado  $x \in \text{int}A \cap \text{int}B$ , sabemos que tal conjunto é aberto por ser intersecção de abertos, logo existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}A \cap \text{int}B$  daí  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}A$  e  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}B$ , logo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A \cap B$  provando o resultado.

**Exemplo 34.** Podemos ter dois conjunto  $X$  e  $Y$  tais que

$$\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)?$$

Sim, basta tomar  $X = [a, b]$  e  $Y = [b, c]$  temos que  $\text{int}X = (a, b)$ ,  $\text{int}Y = (b, c)$  e que  $X \cup Y = [a, c]$  segue que  $\text{int}(X \cup Y) = (a, c)$  que é diferente de  $(a, b) \cup (b, c)$ . Em especial tomando  $A = (0, 1]$  e  $B = [1, 2)$  vale que  $\text{int}(A \cup B) = (0, 2) \neq \text{int}A \cup \text{int}B = (0, 1) \cup (1, 2)$ .

**Propriedade 109.** Vale

$$\text{int}A \cup \text{int}B \subset \text{int}(A \cup B).$$

**Demonstração.** Seja  $x \in \text{int}A$  então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$  logo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A \cup B$  e  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \text{int}(A \cup B)$  o mesmo para  $B$ , logo vale  $\text{int}A \cup \text{int}B \subset \text{int}(A \cup B)$ .

#### Questão 4

Usamos a notação  $\partial A$  para fronteira do conjunto  $A$ .

**Propriedade 110.** Dado  $A \subset R$  vale que

$$R = \text{int}(A) \cup \text{int}(R \setminus A) \cup \partial A$$

onde a união é disjunta.

**Demonstração.**

Dado  $x \in R$  e  $A \subset R$  vale uma e apenas uma das propriedades a seguir:

- Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ , daí  $x \in \text{int}(A)$ . Caso contrário  $\forall \varepsilon > 0$   $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subset A$  e fica valendo uma das propriedades a seguir:
- Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (R \setminus A)$  daí  $x \in \text{int}(R \setminus A)$  ou vale que
- $\forall \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  e  $\forall \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (R \setminus A) \neq \emptyset$ , nessas condições  $x \in \partial A$ .

Com isso concluímos que  $R \subset \text{int}(A) \cup \text{int}(R \setminus A) \cup \partial A$  e como  $\text{int}(A) \cup \text{int}(R \setminus A) \cup \partial A \subset R$  segue que  $R = \text{int}(A) \cup \text{int}(R \setminus A) \cup \partial A$ .

**Propriedade 111.**  $A$  é aberto  $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ . Se  $A$  é aberto, então  $\text{int}A = A$  com  $\text{int}A$  e  $\partial A$  disjuntos.

$\Leftarrow$ . Supondo que  $A \cap \partial A = \emptyset$ , então, dado  $a \in A$  vale  $a \in \text{int}(A) \cup \text{int}(R \setminus A) \cup \partial A$ , não pode valer  $a \in \partial A$  ou  $a \in \text{int}(R \setminus A)$ , daí forçosamente tem-se  $a \in \text{int}(A)$  implicando  $A \subset \text{int}(A)$  logo  $A = \text{int}A$  e  $A$  é aberto.

**Questão 5**

**Propriedade 112.** Dado  $A = [a, b]$  tem-se  $\partial A = \{a, b\}$ .

**Demonstração.** Os pontos de  $(a, b)$  não podem ser pontos de fronteira de  $A$  pois são pontos interiores do conjunto, da mesma maneira os pontos de  $(b, \infty)$  e  $(-\infty, a)$  não podem ser pontos de fronteira pois são pontos de  $R \setminus A$ , daí segue que  $\partial A = \{a, b\}$

**Exemplo 35.** Dado  $A = [0, 1]$  tem-se  $\partial A = \{0, 1\}$ .

**Exemplo 36.** Achar a fronteira do conjunto  $A = (0, 1) \cup (1, 2)$ . Tal conjunto é aberto, então nenhum ponto desse conjunto pode pertencer a sua fronteira. Temos  $R \setminus A = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$ , cujo interior é  $\text{int}(R \setminus A) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ , logo a fronteira é o que resta  $\partial A = \{0, 1, 2\}$ .

**Exemplo 37.**  $\partial Q = R$  pois  $\text{int}Q = \emptyset$ ,  $\text{int}(R \setminus Q) = \emptyset$ , daí  $\partial Q = R$ .

**Propriedade 113.** Se  $R \setminus A$  é aberto e  $\text{int}A = \emptyset$  então  $\partial A = A$ .

**Demonstração.** Vale que  $\text{int}(R \setminus A) = (R \setminus A)$  e  $\text{int}A = \emptyset$  logo

$$\partial A = R \setminus (\text{int}(A) \cup \text{int}(R \setminus A)) = R \setminus ((R \setminus A)) = A.$$

**Exemplo 38.**  $R \setminus Z$  é aberto, por ser reunião de abertos e além disso  $Z$  tem interior vazio, daí  $\partial Z = Z$ .

**Questão 6**

**Propriedade 114.** Sejam  $(I_k)$  uma sequência de intervalos limitados dois a dois disjuntos tais que  $I_k \supset I_{k+1} \forall k \in N$  e a intersecção  $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$  não é vazia.

Nessas condições  $I$  é um intervalo que não é um intervalo aberto.

**Demonstração.** Sejam  $a_k$  e  $b_k$  extremidades de  $I_k$  então vale  $a_k \leq b_p, \forall k, p \in N$ . As sequências  $(a_k)$  e  $(b_k)$  são limitadas,  $(a_k)$  é não-decrescente e  $(b_k)$  não-crescente, logo elas são convergentes sendo  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ .

- Dado  $x \in I$  não pode valer  $x < a$ , pois existe  $x_n$  tal que  $x < x_n < a$  e  $(x_n)$  é não-decrescente, da mesma maneira não pode valer  $b < x$ , pois daí existe  $y_n$  tal que  $b < y_n < x$  e  $y_n$  é não-crescente. Com isso concluímos que  $I \subset [a, b]$ .

- Se  $a = b$ , então  $I \subset [a, a] = \{a\}$  de onde segue  $I = \{a\}$ .
- Se  $a < b$  então  $\forall x$  com  $a < x < b \Rightarrow a_n < a < x < b < b_n$ , logo  $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ .  
Daí concluímos que  $I$  é um intervalo com extremos  $a$  e  $b$ .
- Como os  $I_n$  são dois-a-dois distintos então  $(a_n)$  ou  $(b_n)$  tem uma infinidade de termos distintos. Digamos que seja  $(a_n)$ , então  $\forall n \in N$  existe  $p \in N$  tal que  $a_n < a_{n+p} \leq a$  logo  $a \in (a_n, b_n) \subset I$ , como  $a \in I$  então  $I$  não pode ser um intervalo aberto, sendo do tipo  $[a, b)$  ou  $[a, b]$ .

### 1.6.2 Conjuntos fechados

#### Questão 1

**Propriedade 115.** Sejam  $I$  um intervalo não degenerado e  $k > 1$  natural. O conjunto  $A = \{\frac{m}{k^n} \in I \mid m, n \in Z\}$  é denso em  $I$ .

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in N$  tal que  $k^n > \frac{1}{\varepsilon}$ , daí os intervalos  $[\frac{m}{k^n}, \frac{m+1}{k^n}]$  tem comprimento  $\frac{m+1}{k^n} - \frac{m}{k^n} = \frac{1}{k^n} < \varepsilon$ .

Existe um menor inteiro  $m+1$  tal que  $x + \varepsilon \leq \frac{m+1}{k^n}$  daí  $\frac{m}{k^n} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  pois se fosse  $x + \varepsilon < \frac{m}{k^n}$  iria contrariar a minimalidade de  $m+1$  e se fosse  $\frac{m}{k^n} < x - \varepsilon$  então  $[\frac{m}{k^n}, \frac{m+1}{k^n}]$  teria comprimento maior do que de  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , que é  $\varepsilon$ , uma contradição com a suposição feita anteriormente.

#### Questão 2

**Propriedade 116.** Vale  $\overline{A} = A \cup \partial A$ .

**Demonstração.** Iremos mostrar inicialmente que  $\overline{A} \subset A \cup \partial A$ .

Se  $x \in A$  então  $x \in A \cup \partial A$ . Caso  $x \notin A$  e  $x \in \overline{A}$  então existe uma sequência  $(x_n)$  em  $A$  tal que  $\lim x_n = x$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in N$  tal que para  $n > n_0$  tem-se  $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , logo nessas condições  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  e  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (R \setminus A) \neq \emptyset$ , pois  $x \notin A$  e  $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , então temos pelo menos esse elemento no conjunto, implicando pela definição que  $x \in \partial A$ .

Agora  $A \cup \partial A \subset \bar{A}$ , basta mostrar que  $\partial A \subset \bar{A}$ , pois já sabemos que  $A \subset \bar{A}$ . Dado  $a \in \partial A$  então para todo  $\varepsilon > 0$   $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , logo podemos tomar uma sequência de pontos em  $A$  que converge para  $a$ , daí  $a \in \bar{A}$ .

**Propriedade 117.**  $A$  é fechado se, e somente se,  $\partial A \subset A$ .

**Demonstração.** Se  $A$  é fechado então  $\bar{A} = A$ , usando a identidade  $\bar{A} = A \cup \partial A$ , segue que  $A \cup \partial A = A$  logo deve valer  $\partial A \subset A$ .

Suponha agora que  $\partial A \subset A$  então

$$A \cup \partial A = A = \bar{A}$$

logo  $A$  é fechado.

### Questão 3

**Propriedade 118.**  $a \notin \bar{A} \Leftrightarrow a \in \text{int}(R \setminus A)$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ . Se  $a \notin \bar{A}$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \emptyset$ , daí todo  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  não pertence a  $A$  logo pertence a  $R \setminus A$ , então  $a \in \text{int}(R \setminus A)$ .

$\Leftarrow$ . Se  $a \in \text{int}(R \setminus A)$  então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (R \setminus A)$ , logo existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \emptyset$  portanto  $a \notin \bar{A}$ .

**Corolário 22.**  $(R \setminus \bar{A}) = \text{int}(R \setminus A)$ . Pois  $a \notin \bar{A} \Leftrightarrow a \in \text{int}(R \setminus A)$ .

Concluimos então que  $R \setminus \bar{A}$  é um conjunto aberto.

**Propriedade 119.** Vale que

$$\bar{A} = \partial A \cup \text{int}(A).$$

**Demonstração.** Temos que  $R = \text{int}A \cup \partial A \cup \text{int}(R \setminus A)$  e  $R \setminus \bar{A} = \text{int}(R \setminus A)$ , daí segue

$$\bar{A} = \partial A \cup \text{int}(A).$$

**Propriedade 120.** Vale que  $R \setminus \text{int}(A) = \overline{R \setminus A}$ .

**Demonstração.** Temos que  $R = \text{int}(A) \cup \text{int}(R \setminus A) \cup \partial A$  daí

$$R \setminus \text{int}(A) = \text{int}(R \setminus A) \cup \partial A = \text{int}(R \setminus A) \cup \partial(R \setminus A) = \overline{(R \setminus A)}.$$

**Questão 4**

**Propriedade 121.** Se  $A$  é aberto e  $A = B \cup C$  é uma cisão de  $A$ , então  $C$  e  $B$  são abertos.

**Demonstração.** Vale  $\overline{B} \cap C = \emptyset$  e  $\overline{C} \cap B = \emptyset$ . Seja  $x \in A$  e  $x \in B$ , por  $A$  ser aberto, sabemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ . Se tivéssemos  $\forall r > 0$   $(x - r, x + r) \cap C \neq \emptyset$  então teríamos uma sequência em  $C$  convergindo para  $x$  e daí  $x \in \overline{C}$  o que contraria  $\overline{C} \cap B = \emptyset$ , então deve existir um  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \cap C = \emptyset$ , daí temos  $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset B$ , logo  $B$  é aberto. De maneira semelhante para  $A$ .

**Propriedade 122.** Seja  $A = B \cup C$  cisão com  $A$  fechado, então  $B$  e  $C$  são fechados.

**Demonstração.**

Seja  $x \in \overline{B}$  então  $x \in A$ , pois  $A$  é fechado. Por  $\overline{B} \cap C = \emptyset$  segue que  $x \notin C$ , daí forçosamente tem-se  $x \in B$ . De maneira análoga para  $C$ .

**Questão 5**

**Propriedade 123.** Se  $\partial A = \emptyset$  então  $A = R$  ou  $A = \emptyset$

**Demonstração.** Sabendo a identidade  $R = \text{int}A \cup \partial A \cup \text{int}(R \setminus A)$  união disjunta, sendo  $\partial A$  vazio segue  $R = \text{int}A \cup \text{int}(R \setminus A)$  e sabendo que  $R$  é conexo isso implica que  $A = R$  ou vazio.

**Questão 6**

**Propriedade 124.** Vale que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

**Demonstração.** Vamos mostrar inicialmente que  $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

De  $A \subset A \cup B$  e  $B \subset A \cup B$  segue que  $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$  e  $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$  daí  $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Agora mostramos que  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ . Seja  $x \in \overline{A \cup B}$ , então existe uma sequência  $(x_n) \in A \cup B$  tal que  $\lim x_n = x$ , tal sequência possui um número infinito de elementos em  $A$  ou  $B$ , logo podemos tomar uma sequência  $(y_n)$  em  $A$  ou  $B$  tal que  $\lim y_n = x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ . Que prova o que desejamos.

**Propriedade 125.** Vale que  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

**Demonstração.** Tem-se que  $A \cap B \subset A$  e  $A \cap B \subset B$ , logo  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$  e  $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$  de onde segue  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

**Exemplo 39.** Podemos ter conjuntos  $X$  e  $Y$  tais que

$$\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}?$$

Sim, basta tomar  $X = (a, b)$  e  $Y = (b, c)$ , temos que  $\overline{X} = [a, b]$ ,  $\overline{Y} = [b, c]$ ,  $\overline{X} \cap \overline{Y} = \{b\}$  e  $X \cap Y = \emptyset$  de onde  $\overline{X \cap Y} = \emptyset$ , logo são diferentes.

### Questão 7

**Propriedade 126.** Dada uma sequência  $(x_n)$  o fecho de  $X = \{x_n, n \in N\}$  é  $\overline{X} = X \cup A$  onde  $A$  é o conjunto dos valores de aderência de  $(x_n)$ .

**Demonstração.** Inicialmente podemos perceber que  $X \cup A \subset \overline{X}$  pois  $X \subset \overline{X}$  e  $A \subset \overline{X}$ , esse último pois é formado pelo limite de subsequências de  $X$ , que definem de modo natural sequências.

Agora iremos mostrar que  $\overline{X} \subset X \cup A$ . Se  $x \in X$  então  $x \in A \cup X$ . Se  $x \in \overline{X} \setminus X$  então vamos mostrar que  $x \in A$ , isto é, existe uma subsequência de termos de  $(x_n)$  que converge para  $x$ .  $x \in \overline{X} \setminus X$  implica que todo intervalo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  possui elementos de  $X$  distintos de  $x$ , isto é, possui termos  $x_n$  da sequência.

Definimos indutivamente  $n_1 = \min\{n \in N \mid |x_n - a| < 1\}$  supondo definidos de  $n_1$  até  $n_k$  definimos  $n_{k+1} = \min\{n \in N \mid |x_n - a| < \frac{1}{k+1}\}$ , daí  $(x_{n_k})$  é subsequência de  $(x_n)$  e converge para  $a$ , logo  $a \in A$ .

## 1.6.3 Pontos de acumulação

### Questão 1

**Propriedade 127.** Dado  $A \subset R$  então  $\overline{A} \subset A \cup A'$ .

**Demonstração.** Se  $a \in \overline{A}$  então

$$\begin{cases} a \in A \Rightarrow a \in A \cup A' \\ a \notin A, \text{ daí existe } (x_n) \text{ em } A \setminus \{a\} \text{ tal que } \lim x_n = a, \text{ logo } a \in A'. \end{cases}$$

**Corolário 23.** Temos que  $A \cup A' \subset \overline{A}$  logo

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

**Propriedade 128.**  $A$  é fechado se, e somente se,  $A' \subset A$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ . Se  $A$  é fechado vale  $A = \overline{A}$  daí  $A = A \cup A'$ , que implica  $A' \subset A$ .  
 $\Leftarrow$ . Da mesma maneira se  $A' \subset A$  então  $\overline{A} = A \cup A' = A$  logo  $A$  é fechado.

## Questão 2

**Propriedade 129.** Toda coleção de intervalos não degenerados dois a dois disjuntos é enumerável.

**Demonstração.** Seja  $A$  o conjunto dos intervalos não degenerados dois a dois disjuntos. Para cada intervalo  $I \in A$  escolhemos um número racional  $q$  e com isso definimos a função  $f : A \rightarrow Q$ , definida como  $f(I) = q$ , tal função é injetiva pois os elementos  $I \neq J$  de  $A$  são disjuntos, logo não há possibilidade de escolha de um mesmo racional  $q$  em pontos diferentes do domínio, logo a função nesses pontos assume valores distintos. Além disso Podemos tomar um racional em cada um desses conjuntos pois os intervalos são não degenerados e  $Q$  é denso. Como  $f : A \rightarrow Q$  é injetiva e  $Q$  é enumerável então  $A$  é enumerável.

## Questão 3

**Definição 9** (Conjunto discreto). Um conjunto  $A$  é dito discreto quando todos os seus pontos são isolados.

**Propriedade 130.** Se  $A$  é discreto então para cada  $x, y \in A$  existem intervalos abertos  $I_x, I_y$  de centro  $x, y$  respectivamente tais que se  $x \neq y$  então  $I_x \cap I_y = \emptyset$ , isto é, podemos tomar intervalos de centro  $x$  e  $y$  respectivamente, tais que eles sejam disjuntos em  $R$  (não possuam elementos em comum de  $R$ ).

**Demonstração.**

Para cada  $x \in A$  existe  $\varepsilon_x > 0$  tal que  $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap \{x\}$ . Definimos para cada  $x$ ,  $I_x = (x - \frac{\varepsilon_x}{2}, x + \frac{\varepsilon_x}{2})$ . Tomando  $x \neq y \in A$  podemos supor  $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$ . Se  $z \in I_x \cap I_y$  então



$z \in I_x$  e  $z \in I_y$ , logo  $|z - x| \leq \frac{\varepsilon_x}{2}$ ,  $|z - y| \leq \frac{\varepsilon_y}{2}$  daí

$$|x - y| \leq |z - y| + |z - x| \leq \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} \leq \frac{\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} = \varepsilon_y$$

daí iríamos concluir que  $x \in I_y$ , o que é absurdo pois  $I_y$  contém um único ponto de  $A$ , que é  $y$ , logo podemos tomar intervalos disjuntos como queríamos demonstrar.

#### Questão 4

**Propriedade 131.** Se  $A$  é discreto então  $A$  é enumerável.

**Demonstração.** Pelo resultado anterior vimos que podemos para cada  $x, y \in A$  escolher intervalos centrados em  $x, y$  denotados por  $I_x, I_y$  respectivamente tais que  $I_x \cap I_y = \emptyset$ , então  $A \subset \bigcup_{x \in A} I_x$ , sendo que  $\bigcup_{x \in A} I_x$  é enumerável por ser reunião de intervalos não degenerados dois a dois disjuntos, portanto seu subconjunto  $A$  também é enumerável.

**Propriedade 132.** Se  $A$  é não enumerável então  $A' \neq \emptyset$ , isto é, se  $A$  é não enumerável então  $A$  possui ponto de acumulação.

**Demonstração.** Usamos a contrapositiva que é: se  $A' = \emptyset$  (daí  $A$  não possui pontos de acumulação, logo todos seus pontos são isolados) então  $A$  é enumerável, porém essa proposição já foi demonstrada.

#### Questão 5

**Propriedade 133.**  $A'$  é fechado.

**Demonstração.**[1] Vamos mostrar que  $R \setminus A'$  é aberto, então  $A'$  é fechado.

Seja  $a \in R \setminus A'$  então  $a \notin A'$  portanto existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \setminus \{a\} = \emptyset$  logo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A' = \emptyset$  que implica  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset R \setminus A'$ , logo  $R \setminus A'$  é aberto.

**Demonstração.**[2] Vale em geral que  $B \subset \overline{B}$ , o mesmo vale tomando  $B = A'$ , falta mostrar então que  $\overline{A'} \subset A'$ .

Tomamos  $a \in \overline{A'}$ , logo existe uma sequência  $(x_n)$  em  $A'$  tal que  $\lim x_n = a$ , por definição temos que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  tem-se  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ , como cada  $x_n$  é ponto de acumulação de  $A$ , então existem termos  $y_n \in A$  arbitrariamente próximos de  $x_n$ , logo existem termos  $y_n$  em  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$  com  $\varepsilon$  arbitrário, sendo assim podemos construir uma sequência  $(y_n)$  que converge para  $a$ , portanto  $a \in A'$

**Questão 6**

**Propriedade 134.** Seja  $a \in A'$  então existem  $(x_n)$  ou  $(y_n)$  em  $A$ , crescentes ou decrescentes respectivamente tais que  $\lim x_n = \lim y_n = a$ .

**Demonstração.**

Sejam  $A_n = (a - \frac{1}{n}, a)$  e  $B_n = (a, a + \frac{1}{n})$ , como  $a \in A'$  então um desses conjunto possui infinitos elementos de  $A$ , se  $A_n$  é infinito podemos definir  $(x_n)$  em crescente com  $\lim x_n = a$  caso contrário definimos  $(y_n)$  decrescente, ambos com limite  $a$

**1.6.4 Conjuntos compactos****Questão 1**

**Propriedade 135.** O conjunto  $A$  dos valores de aderência de uma sequência  $(x_n)$  é fechado.

**Demonstração.** Temos que mostrar que  $A = \overline{A}$ . Já sabemos que vale  $A \subset \overline{A}$ , falta mostrar que  $\overline{A} \subset A$ . Se  $a \in \overline{A}$  então  $a \in A$ , vamos usar a contrapositiva que é se  $a \notin A$  então  $a \notin \overline{A}$ .

Se  $a \notin A$  então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  não possui elementos de  $(x_n)$  daí não pode valer  $a \in \overline{A}$ .

**Propriedade 136.** Se uma sequência  $(x_n)$  for limitada então seu conjunto de pontos de aderência é compacto.

**Demonstração.** Já vimos que  $A$  é fechado, agora se  $(x_n)$  for limitada então  $A$  é limitado, sendo limitado e fechado é compacto.

Nessas condições  $A$  possui elemento mínimo e elemento máximo. o Mínimo de  $A$  é denotado como  $\liminf x_n$  e o elemento máximo de  $A$  é denotado como  $\limsup x_n$ .

**Questão 2**

**Propriedade 137.** Se  $A_1$  e  $A_2$  são compactos então  $A_1 \cup A_2$  é compacto.

**Demonstração.**[1] Seja uma cobertura  $\bigcup_{k \in L} B_k = B$  para  $A_1 \cup A_2$ , como  $A_1 \subset \bigcup_{k \in L} B_k$  e  $A_1$  compacto, podemos extrair uma subcobertura finita da cobertura  $B$ ,  $A_1 \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$ , da mesma maneira podemos extrair uma subcobertura finita para  $A_2$ ,  $A_2 \subset \bigcup_{k=n+1}^m B_k$ , daí  $\bigcup_{k=1}^m B_k = \bigcup_{k=1}^n B_k \cup \bigcup_{k=n+1}^m B_k$  é uma subcobertura finita para a união.

**Propriedade 138.** Reunião finita de compactos é um conjunto compacto.

**Demonstração.**[2] Seja  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$  a reunião, como cada  $A_k$  é fechado tem-se que  $A$  é fechado por ser reunião finita de fechados. Além disso o fato de cada  $A_k$  ser limitado implica que  $A$  também é limitado, pois, cada  $A_k$  pertence a um intervalo do tipo  $[a_k, b_k]$ , tomando  $a < a_k \forall k$  e  $b > b_k \forall k$  tem-se que  $A_k \subset [a_k, b_k] \subset [a, b]$  daí  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k \subset [a, b]$  então  $A$  é limitado. Sendo limitado e fechado segue que  $A$  é compacto.

**Propriedade 139.** A intersecção arbitrária de compactos é um conjunto compacto.

**Demonstração.** Seja  $A = \bigcap_{k \in B} A_k$  a intersecção arbitrária de compactos, como cada  $A_k$  é fechado a intersecção arbitrária de fechados é fechado segue que  $A$  é fechado, além disso  $A$  é limitado, pois dado  $t \in B$ ,  $A \subset A_t$ , sendo  $A$  subconjunto de um conjunto limitado implica que  $A$  é limitado.  $A$  é fechado e limitado, portanto é compacto.

### Questão 3

**Exemplo 40.** Dê um exemplo de uma sequência decrescente de conjuntos fechados não vazios  $F_k \subset F_{k+1}$  tal que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$ .

Perceba que os conjuntos não podem ser intervalos fechados do tipo  $[a, b]$ , pois nesse caso iríamos cair no caso do teorema de intervalos encaixados e nesse caso a intersecção não seria vazia. Sabendo disso tomamos  $F_k = [k, \infty)$ , não pode existir  $x$  nessa intersecção, pois dado  $x$  real, existe  $k > x$  e daí  $x \notin [k, \infty)$ .

**Exemplo 41.** Dê um exemplo de uma sequência decrescente de conjuntos limitados não vazios  $L_k \subset L_{k+1}$  tal que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} L_k = \emptyset$ .

Nesse caso escolhemos  $L_k = (0, \frac{1}{k})$ , nenhum número pode pertencer a intersecção pois dado  $x$  existe  $k$  tal que  $\frac{1}{k} < x$  e daí  $x$  não pode pertencer ao conjunto  $L_K$ , assim também não pertence a intersecção .

#### Questão 4

**Propriedade 140.** Sejam  $A, B$  não vazios com  $A$  compacto e  $B$  fechado, então existem  $x_0 \in A$  e  $y_0 \in B$  tais que  $|x_0 - y_0| \leq |x - y| \forall x \in A, y \in B.$

**Demonstração.** Seja  $C = \{|x - y|, x \in A, y \in B\}$ , tal conjunto é limitado inferiormente por 0. Sendo assim possui ínfimo. Seja  $a = \inf C$ . Pelo fato de  $a$  ser ínfimo de  $C$  existe sequência de elementos de  $C$  que converge para  $a$ , isso implica que existem sequências  $x_n \in A$  e  $y_n \in B$  tais que  $\lim |x_n - y_n| = a$ .

Como  $A$  é compacto, portanto limitado a sequência  $(x_n)$  possui subsequência convergente, de modo que podemos admitir que  $(x_n)$  seja convergente (se não passamos a uma subsequência), logo  $\lim x_n = a \in A$  pelo fato de  $A$  ser fechado.

Da desigualdade

$$|y_n| \leq |x_n - y_n| + |x_n|$$

concluimos que  $(y_n)$  é limitada, logo possui subsequência convergente, tomando sua subsequência convergente se necessário, tem-se que  $\lim y_n = y_0 \in B$ , pelo fato de  $B$  ser fechado. Dessas propriedades segue que

$$\lim |y_n - x_n| = \lim |x_0 - y_0| = a$$

daí fica provado o resultado.

#### Questão 5

**Propriedade 141.** Seja  $A$  compacto. Se  $A$  é discreto então  $A$  é finito.

**Demonstração.** Contrapositiva, se  $A$  fosse infinito sendo limitado ele teria ponto de acumulação, pelo fato de ser fechado esse ponto de acumulação pertenceria ao conjunto. observe que a contrapositiva de  $A$  é discreto que é todos os pontos de  $A$  são isolados é existe pelo menos um ponto de  $A$  que não é isolado, isto é, que é ponto de acumulação.

**Exemplo 42.**  $Z$  é um conjunto fechado ilimitado em que todos seus pontos são isolados.  $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  é um conjunto limitado não fechado em que todos os pontos são isolados. Perceba nesse último exemplo que existem termos do conjunto arbitrariamente próximos, mesmo assim todos seus pontos são isolados, tal conjunto admite ponto de acumulação 0, mas tal elemento não pertence ao conjunto o conjunto não é fechado.

### Questão 6

**Propriedade 142.** Seja  $A$  compacto então os seguintes conjuntos também são compactos

- $S = \{x + y, x, y \in A\}$
- $D = \{x - y, x, y \in A\}$
- $P = \{x.y, x, y \in A\}$
- $Q = \{\frac{x}{y}, x, y \in A\}$

**Demonstração.** Primeiro vamos mostrar que tais conjuntos são limitados. Como  $A$  é limitado então existe  $M > 0$  tal que  $|x| \leq M, \forall x \in A$ .

- $|x + y| \leq |x| + |y| \leq M + M = 2M$  daí  $S$  é limitado.
- $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M$ , portanto  $D$  é limitado.
- Vale  $|x| \leq M$  e  $|y| \leq M$  logo  $|x.y| = |x|.|y| \leq M^2$ .
- Vale  $|x| \leq M$  como  $0 \notin A$  e  $A$  é fechado então não existem termos arbitrariamente próximos de zero, logo existe  $c$  tal que vale  $0 < c < |y|$  disso segue que  $\frac{1}{|y|} < \frac{1}{c}$  multiplicando pela primeira relação tem-se  $\frac{|x|}{|y|} \leq \frac{M}{c}$ .

Vamos mostrar que os conjuntos são fechados.

- $S$  é fechado, tomamos  $(z_n)$  em  $S$  tal que  $\lim z_n = a$  vamos mostrar que  $a \in S$ .  $z_n = x_n + y_n$ , como  $A$  é compacto conseguimos uma subsequência de  $(x_n)$  que seja convergente, daí passando para a subsequência temos  $\lim x_n = x_0$ ,  $\lim x_n + y_n - x_n = \lim y_n$  converge para  $y_0$  daí  $\lim x_n + y_n = a = \lim x_n + \lim y_n = x_0 + y_0$  é a soma

de dois elementos de  $A$  logo  $\lim x_n + y_n$  converge para um elemento de  $S$ . Esse argumento de passar a uma subsequência será usado nos próximos itens sem ser mencionado novamente.

- $D$  é fechado, tomamos  $(z_n)$  em  $D$  tal que  $\lim z_n = a$  vamos mostrar que  $a \in S$ .  $z_n = x_n - y_n$ , conseguimos  $x_n$  convergente em  $A$ , daí  $\lim x_n - y_n + x_n = \lim -y_n = -y_0$ , logo  $\lim x_n - y_n = x_0 - y_0 \in D$
- $P$  é fechado  $\lim x_n \cdot y_n = a$  se um dos limites tende a zero o limite também tende a zero, pois a outra sequência é limitada, pois tem termos no conjunto limitado  $A$ . Seja então  $\lim x_n = x_0 \neq 0$ ,  $\lim x_n \cdot y_n \frac{1}{x_n} = \lim y_n = y_0$ , daí  $(y_n)$  converge e o limite do produto converge para um elemento de  $P$ .
- Da mesma maneira que as anteriores,  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ ,  $(y_n)$  converge para um elemento não nulo daí  $\lim y_n \frac{x_n}{y_n} = x_0$ , portanto o limite do quociente converge para um elemento de  $Q$ .

### 1.6.5 O conjunto de Cantor

#### Questão 1

**Exemplo 43.** Quais são os números da forma  $\frac{1}{n}$  com  $2 \leq m \leq 10$ ,  $m$  natural, que pertencem ao conjunto de Cantor?.

Os números que devemos analisar são

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}.$$

Já sabemos de antemão que  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{9}$  são elementos conjunto de Cantor pois são extremos de intervalos que permanecem no conjunto após as remoções. Sabemos que  $\frac{1}{2}$ , não pertence ao conjunto de Cantor, pois ele pertence a um intervalo removido  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .  $\frac{1}{4}$  pertence ao conjunto de cantor pois temos sua representação como

$$0, \overline{02} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{9^k} = \frac{2}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$$

lembrando que um traço em cima da parte decimal significa que tal parte se repete na representação.

$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{8}$  não pertencem ao conjunto de Cantor, pois são elementos pertencentes ao intervalo removido  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ .

Agora vemos que  $\frac{1}{10}$  pertence ao conjunto de cantor, pois ele pode ser representado por

$$0, \overline{0022} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{4k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{4k}} = \frac{1}{27} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{81^k} + \frac{1}{81} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{81^k} = \frac{1}{27} \frac{81}{80} + \frac{1}{81} \frac{81}{80} = \frac{6}{80} + \frac{2}{80} = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}.$$

Então os números que pertencem ao conjunto de cantor são  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$  e  $\frac{1}{10}$ . Os números que não pertencem ao conjunto de cantor são  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ .

Para determinar a expressão de um número entre 0 e 1 na base 3, pode-se usar esse processo que mostramos abaixo por meio de um exemplo

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

multiplicamos por 3

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = x_1 + 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

logo  $x_1 = 1$ , continuamos o processo para encontrar  $x_2$

$$\frac{1}{2} = 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

multiplicamos por 3

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = x_2 + 9 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

daí  $x_2 = 1$ , nesse caso concluímos que  $\frac{1}{2} = 0,11\dots$ , e concluímos de outra maneira que ele não pertence ao conjunto de Cantor, por possuir algarismos 1.

## Questão 2

**Propriedade 143.** Seja  $a \in (0, 1]$  então existem  $x > y \in K$  tais que  $y - x = a$ .

**Demonstração.** Dado  $a = \frac{m}{3^n}$ , existem  $x, y \in K$  tais que  $x - y = a$ , pois se  $a = \frac{m}{3^n}$  é extremo de intervalo removido que pertence ao conjunto de Cantor, então tomamos

$y = 0 \in K$  e  $x = a$ . Caso contrário  $a = \sum_{k=1}^s \frac{x_k}{3^k}$ , podemos sempre arranjar  $y$  finito formado por algarismos  $x_k$  sendo 0 ou 2 (ou no máximo o último algarismo sendo 1) tal que a soma  $y + a$  também seja elemento do conjunto de cantor

por exemplo  $a = 0,1212$ , tomamos  $y$  de forma conveniente para que a soma seja um elemento do conjunto de cantor, escolhendo os algarismos que devem ser somados, nesse caso podemos tomar  $y = 0,0020$ . (Falta provar isso de forma rigorosa!!!)

Definimos agora o conjunto  $D = \{|x - y|, x, y \in K\}$ , tal conjunto é limitado, pois vale  $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 1 + 1 = 2$  por  $x$  e  $y$  serem elementos do conjunto de Cantor que é limitado. Vamos agora mostrar que tal conjunto é fechado, seja  $(z_n)$  uma sequência convergente nesse conjunto, vamos mostrar que o limite da sequência pertence ao conjunto,  $\lim z_n = \lim |x_n - y_n| = t \in D$ . Como o conjunto de Cantor é limitado as sequências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são limitadas, logo possuem subsequências convergentes, passando para estas subsequências denotando ainda por  $(x_n), (y_n)$  elas convergem para elementos  $x_0, y_0$  no conjunto de cantor (pelo fato de tal conjunto ser fechado), daí temos

$$\lim z_n = \lim |x_n - y_n| = |x_0 - y_0| = t$$

logo, existem  $x_0, y_0 \in K$  tais que  $|x_0 - y_0| = t$  limite de uma sequência arbitrária de pontos de  $D$ , portanto  $D$  é fechado. O conjunto das frações do tipo  $a = \frac{m}{3^n}$  (que são elementos de  $D$ ) é denso em  $[0, 1]$ , disso seque também que  $D$  é denso  $[0, 1]$ , sendo conjunto fechado concluímos que  $D = [0, 1]$  logo para qualquer valor  $a \in (0, 1]$  existem  $x, y$  no conjunto de Cantor, tais que  $y - x = a$ .

### Questão 3

**Propriedade 144.** A soma da série cujos termos são os comprimentos dos intervalos omitidos para formar o conjunto de Cantor é igual a 1.

**Demonstração.** Cada intervalo  $I_k$  remove  $2^{k-1}$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^k}$ . Assim  $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  remove um comprimento limite de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{3-2} \right) = 1$$



**Questão 4**

**Propriedade 145.** O conjunto  $A$  dos extremos dos intervalos removidos  $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  é enumerável .

**Demonstração.** Para cada  $k$  seja  $A_k$  o conjunto dos extremos de intervalos de  $I_k$ ,  $A_k$  é finito e vale

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

como  $A$  é união enumerável de conjuntos enumeráveis(finitos) então  $A$  é enumerável.

**Propriedade 146.** Os extremos de intervalos removidos que pertencem ao conjunto de Cantor, possuem representação finita na base 3. Da mesma maneira se um número possui representação finita na base 3 e pertence ao conjunto de Cantor então ele é extremo de um intervalo omitido.

**Demonstração.** Os extremos de intervalos removidos possuem representação finita na base 3 pois são da forma  $\frac{t}{3^s}$  que pode ser expandido em  $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k}$  com  $x_k$  0 ou 2, que dá a sua representação na base 3.

Suponha agora que um número possui representação finita na base 3 e pertence ao conjunto de Cantor, então ele é da forma

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k 3^{n-k}}{3^n} = \frac{1}{3^n} \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k 3^{n-k}}_{=m} = \frac{m}{3^n}$$

então ele é extremo de um intervalo removido.

**Propriedade 147.** Os extremos dos intervalos removidos que pertencem ao conjunto de Cantor são densos nele.

**Demonstração.** Os elementos do conjunto de Cantor são da forma  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ , onde cada  $x_k$  assume valor 0 ou 2, como cada  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k}$  nessas condições é extremo de intervalo removido, segue que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$  é limite de pontos de extremos, então tal conjunto é denso no conjunto de Cantor.

## 1.7 Capítulo 6-Limite de funções

### 1.7.1 Definição e primeiras propriedades

#### Questão 1

**Propriedade 148.** Seja  $f : A \rightarrow R, a \in A', B = f(A \setminus \{a\})$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  então  $L \in \overline{B}$ .

Tal propriedade significa que o limite  $L$  pertence ao fecho da imagem  $f(A \setminus \{a\})$ , isto é, existem pontos de  $f(A \setminus \{a\})$  arbitrariamente próximos de  $L$ .

**Demonstração.** Usaremos o critério de sequências. Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então existe sequência  $(x_n)$  em  $A \setminus \{a\}$  tal que  $\lim f(x_n) = L$ , daí tome  $f(x_n) = y_n$ ,  $(y_n)$  é uma sequência em  $f(A \setminus \{a\})$  tal que  $\lim y_n = L$ , portanto  $L \in \overline{B}$ .

#### Questão 2

**Propriedade 149.** Se  $\forall (x_n)$  em  $A \setminus \{a\}$  com  $\lim x_n = a$  implicar  $(f(x_n))$  convergente então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe.

**Demonstração.** Usaremos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (z_n) \in A \setminus \{a\}$  com  $\lim z_n = a$  vale  $\lim f(z_n) = L$ . Por isso vamos tomar duas sequências arbitrárias  $(x_n)$  e  $(y_n)$  com  $\lim x_n = \lim y_n = a$  em  $A \setminus \{a\}$  e vamos mostrar que  $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ . Tomamos  $(z_n)$  definida como  $z_{2n} = x_n$  e  $z_{2n-1} = y_n$ , daí  $\lim z_n = a$ , portanto  $\lim f(z_n)$  existe, como  $(f(x_n))$  e  $(f(y_n))$  são subsequências de  $(f(z_n))$  então elas convergem para o mesmo limite  $L$ , daí provamos que  $\forall (z_n) \in A \setminus \{a\}$  com  $\lim z_n = a$  vale  $\lim f(z_n) = L$  que implica  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

#### Questão 3

**Teorema 2** (Limite da composição de funções). Sejam  $A, B \subset R$ ,  $f$  de  $A$  em  $R$  e  $g$  de  $B$  em  $R$  com  $f(A) \subset B$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$  ainda com  $c = g(b)$ , tem-se  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$ .

**Demonstração.** Da existência do limite de  $g(x)$  temos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $y \in B, |y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon$ , onde tiramos a restrição de

$y \neq b$ , pois no caso  $y = b$  a propriedade vale. Agora usando a existência do limite de  $f$  tomando  $\delta_1$  como  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon$  para  $f$ , temos que para  $\delta_1$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $x \in A$ ,  $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \delta_1$  como  $f(x) \in B$ , podemos tomar  $y = f(x)$  de onde do primeiro limite que  $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$  implicando que  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$ .

Se  $x \neq a$  implicar  $f(x) \neq b$  ainda teremos a propriedade pois, repetindo o argumento com pequenas alterações:

Da existência do limite de  $g(x)$  temos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $y \in B$ ,  $0 < |y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon$ , onde agora mantemos a restrição de  $y \neq b$ . Usando a existência do limite de  $f$  tomando  $\delta_1$  como  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon$  para  $f$ , temos que para  $\delta_1$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $x \in A$ ,  $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \delta_1$  (aqui usamos que  $x \neq a$  implica  $f(x) \neq b$ ) como  $f(x) \in B$ , podemos tomar  $y = f(x)$  de onde do primeiro limite que  $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$  implicando que  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$ .

#### Questão 4

**Exemplo 44.** Sejam  $f : gR \rightarrow R$  definidas como

- $f(x) = 0$  se  $x \in R \setminus Q$ ,  $f(x) = x$  se  $x \in Q$ .
- $g(0) = 1$  e  $g(x) = 0$  se  $x \neq 0$ .

Nessas condições vale  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  e não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ .

Vale  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , pois tomamos  $\varepsilon = \delta$  então par  $0 < |x| < \delta$  vale  $|f(x)| < \delta = \varepsilon$ , tanto para  $x$  irracional, pois no caso vale  $|f(x)| = 0 < \varepsilon$ , tanto no caso de  $x$  racional pois nesse caso vale  $|f(x)| = |x| < \delta = \varepsilon$ , então em qualquer desses casos temos  $|f(x)| < \varepsilon$ .

Também vale que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , pois tomando  $\varepsilon = \delta$ ,  $0 < |x| < \delta$  implica  $x$  não nulo, portanto  $g(x) = 0$  e daí  $|g(x)| = 0 < \delta = \varepsilon$ .

Não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ .

Seja  $x_n \rightarrow 0$  por valores racionais, então  $f(x_n) = x_n$  e daí  $\lim g(f(x_n)) = \lim g(x_n) = 0$ . Tomando  $y_n \rightarrow 0$  por valores irracionais temos  $f(y_n) = 0$  e  $\lim g(f(y_n)) = \lim g(0) = 1$ , logo não pode existir  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ , pois o limite depende de como se aproxima de zero (usamos o critério de divergência por meio de seqüências).

**Questão 5**

**Exemplo 45.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  não existe.

Tomamos as sequências  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$  e  $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$  vale  $\lim x_n = 0 = \lim y_n$  e  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0$  e  $\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$  logo os limites são distintos então  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  não existe.

Em geral, existe  $t \in R$  tal que  $\operatorname{sen}(t) = v \in [-1, 1]$ , tomando  $x_n = \frac{1}{t + 2\pi n}$  vale  $\lim x_n = 0$  e  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{sen}(t + 2\pi n) = \operatorname{sen}(t) = v$ .

**1.7.2 Limites laterais****Questão 1**

**Propriedade 150.**  $a \in A'_+ (a \in A'_-) \Leftrightarrow$  existe  $(x_n)$  em  $A$  decrescente (crescente) com  $\lim x_n = a$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ ). Se  $a \in A'_+$  então existe sequência de termos  $z_n > a$  com  $\lim z_n = a$ , daí podemos tomar uma subsequência  $(x_n)$  de  $(z_n)$  que seja decrescente e  $\lim x_n = a$ .

$\Leftarrow$ ). Se existe  $(x_n)$  decrescente com  $\lim x_n = a$  então por definição  $\forall \varepsilon > 0 \ A \cap (a, a + \varepsilon) \neq \emptyset$  e daí  $a$  é ponto de acumulação à direita.

De maneira similar, só trocando as palavras na argumentação acima se prova o caso para pontos de acumulação à esquerda.

$\Rightarrow$ ). Se  $a \in A'_-$  então existe sequência de termos  $z_n < a$  com  $\lim z_n = a$ , daí podemos tomar uma subsequência  $(x_n)$  de  $(z_n)$  que seja crescente e  $\lim x_n = a$ .

$\Leftarrow$ ). Se existe  $(x_n)$  crescente com  $\lim x_n = a$  então por definição  $\forall \varepsilon > 0 \ A \cap (a - \varepsilon, a) \neq \emptyset$  e daí  $a$  é ponto de acumulação à esquerda.

**Questão 2**

**Propriedade 151.**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \ (\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L) \Leftrightarrow \forall (x_n)$  em  $A$  decrescente (crescente) com  $\lim x_n = a$  tem-se  $\lim f(x_n) = L$ .

**Demonstração.** Vale que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  onde  $g : B \rightarrow R$  onde  $B = A \cap (a, \infty)$ . Porém  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n) \text{ em } B \text{ com } \lim x_n = a \text{ vale } \lim g(x_n) = L$ . Vamos então provar a propriedade.

$\Rightarrow$ ). Se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  então  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  que implica  $\forall (x_n) \text{ em } B \text{ com } \lim x_n = a$  vale  $\lim g(x_n) = L$ , em especial para as sequências  $(x_n)$  que sejam decrescentes.

$\Leftarrow$ ). Vamos usar a contrapositiva que é se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq L$  então existe  $(x_n)$  em  $A$  decrescente com  $\lim x_n = a$  tal que  $\lim g(x_n) \neq L$ . Supondo que temos  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq L$  então existe sequência  $(y_n)$  em  $B$  com  $\lim y_n = a$  tal que  $\lim g(y_n) \neq L$ , como  $(y_n) \in (a, a + \varepsilon) \cap A$ , podemos tomar  $(x_n)$  subsequência de  $(y_n)$  tal que  $\lim x_n = a$  e  $\lim g(x_n) \neq L$  (pois as subsequências devem convergir para o mesmo valor das sequências), assim fica provado o resultado.

### Questão 3

**Exemplo 46.** Tomamos  $f : R \setminus \{0\} \rightarrow R$  definida como  $f(x) = \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}}$  com  $a > 1$ , vamos analisar os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

Seja  $(x_n)$  em  $R \setminus \{0\}$  tal que  $\lim x_n = 0$  então vale  $\lim a^{\frac{1}{x_n}} = \infty$ , pois como  $\lim x_n = 0$  podemos tomar  $c > 0$  tal que  $a^c > M > 0$  arbitrário e  $0 < x_{n_0} < \frac{1}{c} < 1$  daí  $a^{x_{n_0}} < a^{\frac{1}{c}} \Rightarrow M < a^c < a^{\frac{1}{x_{n_0}}}$  e como  $x_n$  é decrescente para  $n_0 < n$  vale  $x_n < x_{n_0}$  portanto  $a^{x_n} < a^{x_{n_0}} \Rightarrow M < a^{\frac{1}{x_{n_0}}} < a^{\frac{1}{x_n}}$  logo  $\lim a^{\frac{1}{x_n}} = \infty$  de onde segue que  $\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x_n}}} = 0$  que por sua vez implica  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

Admitimos agora  $(y_n)$  crescente em  $R \setminus \{0\}$  tal que  $\lim y_n = 0$ .  $a^{\frac{1}{y_n}} = \frac{1}{a^{-\frac{1}{y_n}}}$ , como  $y_{n+1} > y_n$  segue que  $-y_n > -y_{n+1}$ ,  $(-y_n)$  é decrescente e tende a zero logo pelo resultado anterior  $\lim a^{-\frac{1}{y_n}} = \infty \Rightarrow \lim a^{\frac{1}{y_n}} = \lim \frac{1}{a^{-\frac{1}{y_n}}} = 0$ , portanto  $\lim 1 + a^{\frac{1}{y_n}} = 1$  e  $\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x_n}}} = 1$  daí vale  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ .

### Questão 4

**Propriedade 152.** Seja  $f : A \rightarrow R$  monótona. Se existe  $(x_n)$  em  $A$  com  $x_n > a$ ,  $\lim x_n = a$  e  $\lim f(x_n) = L$  então  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .

**Demonstração.** Suponha  $f$  não decrescente, vamos mostrar que

$$B = \{f(x), x \in R, x > a\}$$

é um conjunto limitado inferiormente. Dado  $x$  arbitrário e fixo tal que  $x > a$  existe  $x_n > a$  que satisfaz  $x > x_n > a$ , pois  $\lim x_n = a$ ,  $f$  não decrescente implica  $f(x) \geq f(x_n)$ , como  $(f(x_n))$  é convergente, vale que tal sequência é limitada inferiormente, portanto existe  $M$  tal que  $f(x_n) > M \forall n \in N$  daí  $f(x) \geq f(x_n) > M$  para  $f(x) \in B$  arbitrário, logo  $B$  é limitado inferiormente. Por  $B$  ser limitado inferiormente ele possui ínfimo .

Seja  $L' = \inf B = \inf\{f(x), x \in R, x > a\}$ , vale que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L'$  (resultado já demonstrado), disso segue pelo critério de sequências para limite lateral que  $\lim f(x_n) = L' = L$ , pela unicidade de limite, portanto  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

### Questão 5

**Exemplo 47.** Seja  $f : R \setminus \{0\}$  dada por  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ . Determine o conjunto dos pontos  $L$  tais que  $\lim f(x_n) = L$ , com  $\lim x_n = 0, x_n \neq 0$ .

Tomando o módulo da expressão

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right| = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} < 1$$

pois  $0 < 2^{\frac{1}{x}}$ , daí não podemos ter limites dessa expressão fora do intervalo  $[-1, 1]$ , vamos mostrar que temos limites em cada ponto desse intervalo .

Existe  $-t \in R$  tal que  $\sin(-t) = v \in [-1, 1]$ , Tomando  $x_n = \frac{-1}{t + 2\pi n}$  vale  $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(-t) = v$ , além disso  $(x_n)$  é decrescente com  $\lim x_n = 0$ , portanto vale  $\lim f(x_n) = \lim \frac{v}{1 + 2^{\frac{1}{x_n}}} = v$ , pois o limite no denominador resulta em 1 (limite já calculado).

### 1.7.3 Limites no infinito, limites infinitos, etc.

#### Questão 1

**Propriedade 153.** Seja  $P : R \rightarrow R$  com  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  com  $a_n \neq 0, n \geq 1$ . Se  $n$  é par então  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$  sendo  $\infty$  se  $a_n > 0$  e  $-\infty$  se  $a_n < 0$ . Se  $n$  é ímpar então  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$  com  $a_n > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$  se  $a_n < 0$ .

**Demonstração.** Escrevemos  $P(x) = a_n x^n \left( \overbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n x^{n-k}}}^{\rightarrow 1} + 1 \right)$ . Se  $n$  é par  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n a_n = \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a_n$  com  $a_n > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n a_n = -\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a_n$  se  $a_n < 0$ , portanto o mesmo segue para  $P(x)$ .

Se  $n$  é ímpar,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n a_n = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a_n = -\infty$  com  $a_n > 0$ , caso  $a_n < 0$  tem-se  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n a_n = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a_n = \infty$ .

## Questão 2

**Exemplo 48.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x \sin(x)$ , então para todo  $c \in \mathbb{R}$  existe  $(x_n)$  em  $\mathbb{R}$  com  $\lim x_n = \infty$  e  $\lim f(x_n) = c$ .

Para  $x$  suficientemente grande a oscilação de  $f(x)$  é tão grande quanto queremos e a oscilação é crescente.

- Para  $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , vale  $\sin(x) = 1$  e  $f(x_2) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ .
- Para  $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , vale  $\sin(x) = -1$  e  $f(x_1) = \frac{\pi}{2} - 2\pi n$ .
- Daí segue que  $f(x_2) - f(x_1) = 4\pi n$ , a oscilação cresce pois
- Para  $x_4 = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)$ , vale  $\sin(x) = 1$  e  $f(x_4) = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)$ .
- Para  $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)$ , vale  $\sin(x) = -1$  e  $f(x_3) = \frac{\pi}{2} - 2\pi(n+1)$ .
- Segue que  $f(x_3) - f(x_2) = 4\pi(n+1) > f(x_2) - f(x_1) = 4\pi n$ , portanto a oscilação da função é tão grande quanto queremos e cresce.

Então, dado  $c \in \mathbb{R}$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $c \in [\frac{\pi}{2} - 2\pi n_0, \frac{\pi}{2} + 2\pi n_0]$  e por continuidade existe  $x_1 \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n_0, \frac{\pi}{2} + 2\pi n_0]$  tal que  $f(x_1) = c$ . Da mesma maneira existe  $x_2 \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi(n_0+1), \frac{\pi}{2} + 2\pi(n_0+1)]$  tal que  $f(x_2) = c$ , em geral  $x_n \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi(n_0+n-1), \frac{\pi}{2} + 2\pi(n_0+n-1)]$  tal que  $f(x_n) = c$ , valendo  $\lim x_n = \infty$  e  $\lim f(x_n) = c$ .

**Questão 3**

**Propriedade 154.** Seja  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Para cada  $t \geq a$  definimos

$$M_t = \sup\{f(x) \mid x \in [t, \infty)\} = \sup A_t$$

$$m_t = \inf\{f(x) \mid x \in [t, \infty)\} = \inf A_t$$

$w_t = M_t - m_t$ , chamada de oscilação de  $f$  em  $I = [t, \infty)$ . Nessas condições, existem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} m_t.$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} w_t = 0.$$

**Demonstração.**  $M_t$  é não-crescente e  $m_t$  é não-decrescente. Se  $s > t$  vale que  $\{f(x) \mid x \in [s, \infty)\} = A_s \subset \{f(x) \mid x \in [t, \infty)\} = A_t$ , portanto  $\sup A_t \geq \sup A_s$ , implicando  $M_t \geq M_s$  logo  $m_t$  é não-crescente. Da mesma maneira  $m_t$  é não-decrescente, pois de  $A_s \subset A_t$  segue  $\inf A_s \geq \inf A_t$  e daí  $m_s \geq m_t$  que significa que  $m_t$  é não-decrescente. Ambas funções são limitadas logo os limites  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t$  existem.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = L, \lim_{t \rightarrow \infty} m_t = l \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} w_t = L - l.$$

Agora provamos a equivalência enunciada.  $\Leftarrow$ ). Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t = 0$  então  $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe. Vale que  $m_t \leq f(t) \leq M_t$  (pois  $m_t$  e  $M_t$  são ínfimo e supremo respectivamente), se  $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} w_t = 0$  então  $L - l = 0 \Rightarrow L = l$ , daí por teorema do sanduíche tem-se

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t \leq \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} M_t = L$$

de onde segue  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$ .

$\Rightarrow$ ). Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$  então  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \geq a$  tal que para  $t \geq a$  vale  $L - \varepsilon < f(t) < L + \varepsilon$ , logo  $L - \varepsilon \leq m_t \leq f(t) \leq M_t \leq L + \varepsilon$  pois  $m_t$  é ínfimo e  $M_t$  é supremo, portanto  $M_t - m_t \leq 2\varepsilon$  (pois ambos pertencem ao intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ) e isso implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t = L$  daí  $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t = 0$ .

## 1.8 Capítulo 7-Funções contínuas

### 1.8.1 Definição e primeiras propriedades

#### Questão 1

**Propriedade 155.** Vale  $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$  e  $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$



**Demonstração.** Se  $x \geq y$  então  $x - y = |x - y|$  daí  $\frac{x + y + x - y}{2} = x$  como vale  $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$  então  $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$ .

**Propriedade 156.** Se  $f : A \rightarrow R$  é contínua em  $a$  então  $|f| : A \rightarrow R$  também é contínua em  $a$ .

**Demonstração.** Vale  $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Propriedade 157.** Dadas  $f, g : A \rightarrow R$  contínuas, então  $h, t : A \rightarrow R$  dada por  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  e  $t(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  são contínuas.

**Demonstração.** Vale  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$  e  $t(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$ , daí  $h$  e  $t$  são uniformemente contínuas.

## Questão 2

**Propriedade 158.** Sejam  $f, g : B \rightarrow R$  contínuas

$$Y = \{x \in B \mid f(x) < g(x)\}$$

$$Z = \{x \in B \mid f(x) \leq g(x)\}$$

então existem  $A$  aberto e  $F$  fechado tais que  $Y = B \cap A$  e  $Z = B \cap F$ .

**Demonstração.** Pela continuidade de  $f$  e  $g$ , para cada  $y \in Y$  existe um intervalo  $I_y$  de centro  $y$ , tal que

$$\{y\} \subset B \cap I_y \subset Y$$

daí

$$Y = \bigcup_{y \in Y} y \subset \bigcup_{y \in Y} (B \cap I_y) \subset Y$$

logo  $Y = \bigcup_{y \in Y} (B \cap I_y)$  e por identidade de conjuntos temos que  $\bigcup_{y \in Y} (B \cap I_y) = B \cap (\bigcup_{y \in Y} I_y)$ ,

tomando  $A = \bigcup_{y \in Y} I_y$  segue que  $A$  é aberto por ser união de abertos, daí  $Y = B \cap A$ .

Vale que  $Z = B \setminus \{\xi \in B, g(\xi) < f(\xi)\}$ , pelo que provamos acima, existe  $B$  aberto tal que

$$Z = B \setminus (B \cap A) = B \cap (R \setminus A)$$

onde essa última passagem se deu por identidade de conjuntos, temos que  $R \setminus A = F$  é um conjunto fechado, logo provamos que  $Z = B \cap F$ , onde  $F$  é fechado.

**Corolário 24.** Se  $B$  é aberto  $Y = B \cap A$  é aberto por ser intersecção de abertos, se  $B$  é fechado então  $Z = B \cap F$  é fechado por ser intersecção de fechados.

**Corolário 25.** Se  $f, g : B \rightarrow R$  são contínuas e  $B$  aberto então  $\{x \in B \mid f(x) \neq g(x)\}$  é aberto pois  $\{x \in B \mid f(x) < g(x)\} \cup \{x \in B \mid f(x) > g(x)\}$  onde ambos conjuntos são abertos.

**Corolário 26.** Se  $f, g : B \rightarrow R$  são contínuas e  $B$  fechado então  $\{x \in B \mid f(x) = g(x)\}$  é fechado pois  $\{x \in B \mid f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in B \mid f(x) \geq g(x)\}$  onde ambos conjuntos são fechados.

### Questão 3

**Definição 10** (Semi-contínua superiormente (scs)).  $f : A \rightarrow R$  é *scs* em  $a \in A$  quando

$$\forall c > f(a) \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c.$$

**Definição 11** (Semi-contínua inferiormente (sci)).  $f : A \rightarrow R$  é *sci* em  $a \in A$  quando

$$\forall c < f(a) \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow c < f(x).$$

**Propriedade 159.**  $f : A \rightarrow R$  é contínua em  $a \in A \Leftrightarrow f$  é *sci* e *scs* em  $a$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ ). Se  $f$  é contínua em  $a$  então

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

temos então  $f(x) < f(a) + \varepsilon$  e  $f(a) - \varepsilon < f(x)$ . Sendo  $c > f(a)$  arbitrário, podemos tomar  $\varepsilon = c - f(a)$ ,  $\varepsilon + f(a) = c$ , logo  $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta$  implicando  $f(x) < f(a) + \varepsilon = c$ , portanto  $f$  é *scs* em  $a$ .

Da mesma maneira se  $c < f(a)$ , tomamos  $\varepsilon = f(a) - c \Rightarrow f(a) - \varepsilon = c$  e a continuidade garante que  $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta$  implicando  $c = f(a) - \varepsilon < f(x)$ , logo  $f$  é *sci* em  $a$ .

$\Leftarrow$ ). Suponha que  $f$  seja *scs* e *sci* em  $a$ , seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário então pela primeira condição podemos tomar  $c - f(a) = \varepsilon$  que fica garantida a existência de  $\delta_1$ , tal que  $|x - a| < \delta_1$  implica  $f(x) < c$ ,  $f(x) - f(a) < \varepsilon$ , por  $f$  ser *sci* em  $a$  para qualquer, podemos tomar  $f(a) - c_2 = \varepsilon$  e daí existe  $\delta_2$  tal que  $|x - a| < \delta_2$  implica  $c_2 < f(x)$ ,  $f(a) - \varepsilon < f(x)$ , daí tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  as duas condições são satisfeitas logo vale  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

**Propriedade 160.** Se  $f$  é *scs* e  $g$  é *sci* em  $a$  e  $f(a) < g(a)$  então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in A$ ,  $|x - a| < \delta$  implica  $f(x) < g(x)$ .

**Demonstração.** Como  $f$  é *scs* tomamos  $c = \frac{f(a) + g(a)}{2} > f(a)$ , então existe  $\delta_1 > 0$ ,  $x \in A$ ,  $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) < \frac{f(a) + g(a)}{2}$ . Da mesma maneira como  $g$  é *sci*, tomando o mesmo  $c = \frac{f(a) + g(a)}{2} < g(a)$  existe  $\delta_2 > 0$ ,  $x \in A$ ,  $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow \frac{f(a) + g(a)}{2} < g(x)$ . Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  tem-se com  $x \in A$ ,  $|x - a| < \delta$  que  $f(x) < \frac{f(a) + g(a)}{2}$  e  $\frac{f(a) + g(a)}{2} < g(x)$  que implica  $f(x) < g(x)$ .

#### Questão 4

**Propriedade 161.** Seja  $f : R \rightarrow R$  contínua e  $f(x) = c$  uma constante para todo  $x \in A$  um conjunto denso em  $B$ , então  $f(x) = c$  para todo  $x \in B$ .

**Demonstração.** Dado  $a \in B$  arbitrário, por  $A$  ser denso em  $B$ , podemos tomar uma sequência  $(x_n)$  em  $A$  tal que  $\lim x_n = a$  daí  $f(x_n) = c$  e  $\lim f(x_n) = c = f(a)$ , logo  $f(a) = c$  para todo  $a \in B$ .

**Corolário 27.** Em especial  $A$  é denso em  $\overline{A}$ , daí  $f(x) = c \forall x \in \overline{A}$ .

#### Questão 5

**Propriedade 162.**  $f : R \rightarrow R$  é contínua sse  $\forall A \subset R$  vale  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ . Supondo  $f$  contínua, vamos mostrar que dado  $a \in f(\overline{A})$  então  $a \in \overline{f(A)}$ . Seja  $a \in f(\overline{A})$ , então existe  $y \in \overline{A}$  tal que  $f(y) = a$ , mas como  $y \in \overline{A}$ , então existe uma sequência  $(x_n)$  em  $A$  tal que  $\lim x_n = y$ , por  $f$  ser contínua segue que  $f(x_n) \in f(A)$  e  $\lim f(x_n) = f(y) = a \in \overline{f(A)}$ , o que conclui a demonstração.

$\Leftarrow$ . Vamos usar a contrapositiva, se  $f$  é descontínua, então existe um ponto  $a \in R$  tal que  $f$  é descontínua em  $a$ , assim existe uma sequência  $(x_n)$  em  $R$  tal que

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \frac{1}{n} > 0 \quad |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

tomando  $A$  como conjunto dos termos da sequência  $(x_n)$  segue que  $a \in \overline{A}$ , logo  $f(a) \in f(\overline{A})$  mas a propriedade  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$  nos garante que  $f(a) \notin f(\overline{A})$ , de onde segue o resultado.

### Questão 6

**Propriedade 163.** Seja  $f : A \rightarrow R$  contínua em  $a \in A$ . Se para toda vizinhança de  $a$  existem  $x$  e  $y \in A$  tais que  $f(x)$  e  $f(y)$  tem sinais contrários então  $f(a) = 0$ .

**Demonstração.** Usando a contrapositiva, temos que mostrar que se  $f(a) \neq 0$  então existe vizinhança do ponto  $a$  tal que para todos  $x$  e  $y$  em tal vizinhança vale que  $f(x)$  e  $f(y)$  tem o mesmo sinal. Essa propriedade vale realmente para funções contínuas, logo a proposição é verdadeira.

**Corolário 28.** Sejam  $f, g : A \rightarrow R$  contínuas no ponto  $a$ , tal que para toda vizinhança  $V$  de  $a$  existam pontos  $x$  e  $y$ , tais que  $f(x) < g(x)$  e  $f(y) > g(y)$  então  $f(a) = g(a)$ . Tomamos  $h : A \rightarrow R$  com  $h(x) = f(x) - g(x)$  daí em toda vizinhança de  $a$  existem  $x, y$  tais que  $h(x) < 0$  e  $h(y) > 0$ , portanto pelo resultado anterior vale que  $h(a) = 0 = f(a) - g(a) \Rightarrow f(a) = g(a)$ .

### Questão 7

**Propriedade 164.** Seja  $f : A \rightarrow R$  descontínua em  $a \in A$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que

- Existe  $(x_n)$  em  $A$  com  $\lim x_n = a$  e  $f(x_n) > f(a) + \varepsilon \forall n \in N$ , ou
- existe  $(y_n)$  em  $A$  com  $\lim y_n = a$  e  $f(y_n) < f(a) - \varepsilon \forall n \in N$ .

**Demonstração.** Usamos o critério de sequências, usando a negação da continuidade  $\exists (x_n) \in A$  com  $\lim x_n = a$  e  $\lim f(x_n) \neq f(a)$  (podendo não existir), disso segue que  $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$  para  $n \in N'$  um subconjunto infinito de  $N$ . Para cada  $n \in N'$  vale

- $f(x_n) - f(a) > \varepsilon$  ou  $-f(x_n) + f(a) > \varepsilon$

uma das duas condições é satisfeita para um número infinito de índices, logo podemos tomar uma subsequência  $(t_n)$  de  $(x_n)$  que satisfaz  $\lim t_n = a$  (pois toda subsequência tende ao mesmo limite) e vale uma das propriedades citadas acima para todo  $n \in \mathbb{N}$   $\square$ .

## 1.8.2 Funções contínuas num intervalo

### Questão 1

**Propriedade 165.** Toda função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  localmente constante é constante, onde  $I$  é um intervalo.

**Demonstração.** Dado  $a \in I$ , definimos

$$A = \{x \in I \mid f(x) = f(a)\}, \quad B = \{x \in I \mid f(x) \neq f(a)\},$$

vale que  $A \neq \emptyset$ , pois  $a \in A$ , vale também que  $I = A \cup B$ . Como  $f$  é localmente constante,  $\forall x \in A$  existe  $I_x = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  tal que  $f(I_x) = \{f(a)\}$  logo  $I_x \cap B = \emptyset$ , daí não poder existir sequência em  $B$  tendendo à  $x$ , portanto  $x \notin \overline{B} \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$ . Suponha por absurdo que exista pelo menos um  $y \in B$ , então para  $y \in B$  arbitrário vale  $f(y) = c_y \neq f(a)$  e existe  $\varepsilon$  tal que, para  $I_y = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$  tem-se  $f(I_y) = \{c_y\}$ , portanto  $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap A$  é vazio, logo  $y \notin \overline{A}$ ,  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ . Daí temos que  $A \cap B = I$  é uma cisão não trivial de um intervalo, o que é um absurdo, logo  $B = \emptyset$  e  $f$  é constante. Suponha por absurdo que  $B$  não seja vazio.

### Questão 2

**Propriedade 166.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona,  $I$  um intervalo. Se  $f(I)$  é um intervalo então  $f$  é contínua.

**Demonstração.** Seja  $a \in \text{int}(I)$ . Suponha  $f$  não-decrescente. Existem<sup>2</sup> os limites laterais  $l = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  e  $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , onde

$$\bullet \quad L = \inf\{f(x), x \in A, x > a\} = \inf B$$

---

<sup>2</sup>Essa propriedade segue por resultado já demonstrado para limite de funções

- $l = \sup\{f(x) , x \in A, x < a\} = \sup C$  sendo que  $f(a)$  é cota superior de  $C$  e cota inferior de  $B$  pelo fato da função ser não-decrescente. Além disso vale  $l \leq L$ .

Como  $a \in \text{int}(I)$  então existem  $x, y \in I$  com  $x < a < y$ . Suponha por absurdo que  $f$  seja descontínua em  $a$ , daí  $L > l$  e vale uma das possibilidades

- $l < f(a) \leq L$  ou
- $l \leq f(a) < L$ , pois não pode acontecer de  $L = f(a) = l$ , se não  $f$  seria contínua em  $a$ . Por isso podemos tomar  $z \neq f(a)$  tal que  $l < z < L$ , valendo  $f(x) < z < f(y)$ , temos também que  $z \notin f(I)$ , portanto  $f(I)$  não é intervalo, o que é absurdo.

O caso de  $a$  ser uma extremo inferior ou superior do intervalo se fazem de maneira similar.

Se  $a$  é extremidade inferior do intervalo, existe  $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x) , x \in A, x > a\}$ , vale  $L \geq f(a)$  pelo fato de  $f$  ser não-decrescente. Suponha que  $L > f(a)$  ( $f$  ser descontínua em  $a$ ), então existe  $z$  tal que  $L > z > f(a)$ , daí de  $x > a$  segue  $f(x) > z$  e  $z \notin f(I)$ , logo  $f(I)$  não é intervalo. Se  $a$  é extremo superior procedemos de maneira similar.

### Questão 3

**Exemplo 49.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$  para  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ , tem a propriedade do valor intermediário, porém é descontínua em 0.

Separamos os intervalos de  $\mathbb{R}$  em dois tipos:

- Os intervalos que contém 0.
- Os intervalos que não contém 0.

Em todo intervalo que contém 0 a imagem da função é o intervalo  $[-1, 1]$ , que já mostramos por meio de sequências da forma  $x_n = \frac{1}{2n\pi + c}$ , onde  $c$  é tal que  $\sin(c) = v \in [-1, 1]$ , todo intervalo que contém 0 possui termos desse tipo para  $n$  suficientemente grande.

Em intervalos que não contém 0, a função  $f$  é contínua logo sua imagem é um intervalo. Portanto para qualquer tipo de intervalo vale a propriedade do valor intermediário para a função  $f$ .

**Questão 4**

**Propriedade 167.** Seja  $f : I \rightarrow R$  com a propriedade do valor intermediário. Se  $\forall c \in R$  existe apenas um número finito de pontos  $x \in I$  tais que  $f(x) = c$ , então  $f$  é contínua.

**Demonstração.** Suponha que exista  $a \in I$ , em que  $f$  seja descontínua. Pelo critério de seqüências, existe  $(x_n)$  em  $I$  com  $\lim x_n = a$  e  $f(x_n) > f(a) + \varepsilon \forall n \in N$  (ou  $f(x_n) < f(a) - \varepsilon$ , garantido por resultado já mostrado). Tomando algum  $c \in (f(a), f(a) + \varepsilon)$ , observamos o intervalo  $(f(a), f(x_n))$ , como  $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$  segue que

$$c \in (f(a), f(a) + \varepsilon) \subset (f(a), f(x_n)) \forall n \in N$$

a propriedade de valor intermediário garante a existência de  $z_1$  entre  $a$  e  $x_1$  tal que  $f(z_1) = c$ , como  $\lim x_n = a$ , podemos tomar  $x_{n_1}$  tal que  $z_1$  não esteja entre  $a$  e  $x_{n_1}$ , porém novamente a propriedade de valor intermediário garante a existência de  $z_1$  entre  $a$  e  $x_{n_1}$  tal que  $f(z_1) = c$ , com esse processo conseguimos infinitos valores  $z$  tais que  $f(z) = c$ , o que contraria a hipótese, então a função deve ser contínua.

**Questão 5**

**Propriedade 168.** Sejam  $p \geq 0$  real,  $f : [0, 2p] \rightarrow R$  contínua com  $f(0) = f(2p)$ . Então existe  $c \in [0, p]$  tal que  $f(c) = f(c + p)$ .

**Demonstração.** Definimos  $g : [0, p] \rightarrow R$ , por  $g(x) = f(x + p) - f(x)$ . Temos

$$g(p) = f(2p) - f(p) = k$$

$$g(0) = f(p) - \underbrace{f(0)}_{=f(2p)} = -k$$

como  $g$  é contínua, por ser soma de funções contínuas, segue que, existe  $c \in [0, p]$  tal que  $g(c) = 0 = f(c + p) - f(c)$ , logo  $f(c + p) = f(c)$ .

**Exemplo 50.** Tomando  $p = \frac{1}{2}$  então  $f : [0, 1] \rightarrow R$  contínua com  $f(0) = f(1)$  implica que existe  $c \in [0, \frac{1}{2}]$  tal que  $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ . Da mesma maneira tomando  $p = \frac{1}{3}$  então  $f : [0, \frac{2}{3}] \rightarrow R$  contínua com  $f(0) = f(\frac{2}{3})$  implica que existe  $c \in [0, \frac{1}{3}]$  tal que  $f(c) = f(c + \frac{1}{3})$ .

### 1.8.3 Funções contínuas em conjuntos compactos

#### Questão 1

**Propriedade 169.** Seja  $f : R \rightarrow R$  contínua com  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ . Então existe  $x_0 \in R$  tal que  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in R$ .  $f$  possui mínimo global.

**Demonstração.** Tomamos  $a \in R$  qualquer, da definição dos limites infinito temos

- $\exists B > 0$  tal que  $x > B \Rightarrow f(x) > f(a)$
- $\exists B_1 > 0$  tal que  $x < -B_1 \Rightarrow f(x) > f(a)$ .

Podemos tomar  $A > 0$  tal que  $A > B, A > a, -A < -B_1, -A < a$ , logo para  $x > A, y < -A$  tem-se  $f(x) > f(a), f(y) > f(a)$ ,  $f$  restrita à  $[-A, A]$  possui mínimo  $f(x_0)$  pois o conjunto é compacto, além disso como  $a \in [-A, A]$  segue que  $f(x_0) \geq f(a)$ , tal valor  $f(x_0)$  é mínimo global da função, pois em  $[-A, A]$  tal valor é mínimo e fora desse intervalo a função assume valores maiores que  $f(x_0)$ .

#### Questão 2

**Propriedade 170.** Seja  $f : R \rightarrow R$  contínua com  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Então para todo  $c \in R$  existe entre as raízes da equação  $f(x) = c$  uma cujo módulo é mínimo.

**Demonstração.** Começamos de maneira similar ao resultado anterior, pela definição dos limites infinitos

- $\exists B > 0$  tal que  $x > B \Rightarrow f(x) > c$
- $\exists B_1 > 0$  tal que  $x < -B_1 \Rightarrow f(x) < -c$ .

Podemos tomar  $A > 0$  tal que  $A > B, A > c, -A < -B_1, -A < -c$ , logo para  $x > A, y < -A$  tem-se  $f(x) > c, f(y) < -c$ . As raízes de  $f(x) = c$  pertencem ao conjunto  $[-A, A]$ . Seja  $V = \{|x| \in [-A, A] \mid f(x) = c\}$ , tal conjunto é limitado inferiormente, logo possui ínfimo. Seja  $t = \inf V$ . Se o ínfimo pertence ao conjunto nada precisamos fazer, essa é nossa raiz com módulo mínimo. Se não, existe  $(x_n) \in V$  tal que  $\lim x_n = t$ , vale  $f(x_n) = c \forall n \in N$  e por continuidade de  $f$  temos  $\lim f(x_n) = f(t) = c$ , então o ínfimo pertence ao conjunto, logo existe sempre uma raiz cujo módulo é mínimo.



**Questão 3**

**Propriedade 171.** Não existe  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua que assume cada um dos seus valores  $f(x)$  exatamente duas vezes.

**Demonstração.**  $[a, b]$  possui apenas dois extremos, temos 2 pontos de máximo e 2 pontos de mínimo da função  $f$ , então obrigatoriamente teremos que um desses pontos críticos deve ser imagem de um ponto interior de  $[a, b]$ . Suponha que seja o máximo. O valor máximo de  $f$  será então assumido num ponto  $x_{m_1} \in \text{int}[a, b]$  vamos supor o outro ponto  $x_{m_2}$  em que a função atinge máximo também no interior do intervalo, com  $x_{m_1} > x_{m_2}$ .

Tomamos  $x_3 < x_{m_2}$ ,  $x_{m_2} < x_2 < x_{m_1}$ ,  $x_{m_1} < x_1$  e  $A = \max\{f(x_3), f(x_1), f(x_2)\}$ , pelo TVI existe valores  $x \in [x_3, x_{m_2})$ ,  $y \in [x_2, x_{m_1})$  e  $z \in (x_{m_1}, x_1]$ , tais que  $f(x) = f(y) = f(z) = A$ , absurdo, pois deveria haver apenas 2 valores distintos em  $[a, b]$  tais que suas imagens fossem iguais.

**Questão 4**

**Propriedade 172.** Toda função contínua periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e atinge valores máximo e mínimo.

**Demonstração.** Seja  $p$  o período da função, então  $\forall x \in \mathbb{R}$  vale  $f(x + p) = f(x)$ , a função repete os valores de sua imagem no intervalo  $[0, p]$  logo estudamos a sua restrição ao compacto  $[0, p]$ .  $f|_{[0, p]}$  é contínua e sua imagem é um compacto, logo ela possui máximo e mínimo, existindo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1)$  é mínimo e  $f(x_2)$  é máximo.

**Questão 5**

**Propriedade 173.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$  compacto. Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon > 0 \mid |y - x| \geq \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq c_\varepsilon |y - x|.$$

**Demonstração.** Vamos usar a contrapositiva

$$\exists \varepsilon > 0, \forall c_\varepsilon > 0 \mid |y - x| \geq \varepsilon \text{ e } |f(y) - f(x)| > c_\varepsilon |y - x| \geq c_\varepsilon \varepsilon$$

a relação  $|f(y) - f(x)| \geq c_\varepsilon \varepsilon \mid \forall c_\varepsilon > 0$  implica que  $f(A)$  não é limitado, logo  $f$  não pode ser contínua, pois a imagem do compacto  $A$  seria o compacto  $f(A)$  que é limitado.

### 1.8.4 Continuidade uniforme

#### Questão 1

**Propriedade 174.** Toda função  $f : N \rightarrow R$  é uniformemente contínua.

**Demonstração.** Podemos tomar  $\delta < 1$  daí  $|x - y| < \delta$  implica  $x = y$ , que implica  $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$ .

$N$  é fechado, porém não é limitado, toda sequência é uma função uniformemente contínua.

**Propriedade 175.** Se toda função  $f : A \rightarrow R$  é uniformemente contínua então  $A$  é fechado, porém não necessariamente compacto.

**Demonstração.** Usaremos a contrapositiva. Se  $A$  não é fechado então existe função  $f : A \rightarrow R$  que não é uniformemente contínua. Daremos então um exemplo desse tipo de função. Como  $A$  não deve ser fechado então deve existir  $a \in \overline{A}$  tal que  $a \notin A$ , tomamos  $f : A \rightarrow R$  definida como  $f(x) = \frac{1}{x - a}$  o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não existe então  $A$  não pode ser uniformemente contínua.

#### Questão 2

**Exemplo 51.** A função  $f : R \rightarrow R$  dada por  $f(x) = \text{sen}(x^2)$  não é uniformemente contínua.

Tomamos  $x_n = \sqrt{(n + \frac{1}{2})\pi}$  e  $y_n = \sqrt{n\pi}$ , então

$$y_n - x_n = \sqrt{(n + \frac{1}{2})\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})\pi} + \sqrt{n\pi}} \rightarrow 0$$

onde acima racionalizamos a fração. Porém

$$f(y_n) - f(x_n) = \text{sen}((n + \frac{1}{2})\pi) - \text{sen}(n\pi) = \text{sen}((n + \frac{1}{2})\pi)$$

e tal sequência não tende a zero.

**Questão 3**

**Propriedade 176.** Dada  $f : A \rightarrow R$  uniformemente contínua, definimos  $g : \overline{A} \rightarrow R$  como  $g(x) = f(x)$  se  $x \in A$  é um ponto isolado e  $g(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  se  $a \in A'$ . Nessas condições  $g$  é uniformemente contínua e vale  $g(x) = f(x) \forall x \in A$ .

**Demonstração.** Vamos mostrar inicialmente que vale  $g(x) = f(x) \forall x \in A$ . Se  $x$  é ponto isolado sabemos por definição de  $g$  que tem-se  $g(x) = f(x)$ . Seja agora um ponto  $a \in A$  que não seja isolado, então existe  $(x_n) \in A$  tal que  $\lim x_n = a$ , por  $f$  ser contínua vale que  $\lim f(x_n) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$ , onde a última passagem foi pela definição da  $g$ . Fica provado então que  $g(x) = f(x) \forall x \in A$ .

Vamos mostrar agora que  $g$  é uniformemente contínua.  $f$  é uniformemente contínua, daí para  $x, y \in A$  com  $|x - y| < \delta$  tem-se  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , sendo  $a, b \in \overline{A}$  existem  $(x_n), (y_n)$  em  $A$ , tais que  $\lim x_n = a$ ,  $\lim y_n = b$ , se  $|a - b| < \delta$  temos  $|x_n - y_n| < \delta$  para  $n$  grande, por causa da desigualdade

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - a| + |y_n - b| + |a - b|$$

isso implica que  $|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , passando o limite temos  $|g(a) - g(b)| = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , daí  $g$  é uniformemente contínua.

**Questão 4**

**Propriedade 177.** Seja  $f : R \rightarrow R$  contínua. Se existem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  então  $f$  é uniformemente contínua.

**Demonstração.** Pela definição de limite temos que

- $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \mid x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists B > 0 \mid x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Se  $x > A, y > A$  vale que  $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$  e  $|f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$ , daí

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da mesma maneira se  $x < -B, y < -B$  vale que  $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4}$  e  $|f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{4}$ , daí

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

O conjunto  $[-B, A]$  é compacto, então  $f$  é uniformemente contínua em tal conjunto, daí se  $x, y \in [-B, A]$  com  $|x - y| < \delta$  tem-se  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Caso  $x < -B$  e  $y \in [-B, A]$  com  $|x - y| < \delta$  temos também que  $|-B - y| < |x - y| < \delta$ , pois  $x < -B \leq y$ , a distância de  $y$  até  $B$  é menor que a distância de  $y$  até  $x$ , portanto

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(-B)| + |f(-B) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da mesma forma se  $x > A$  e  $y \in [-B, A]$  com  $|x - y| < \delta$  vale  $y \leq A < X$  daí  $|A - y| < |x - y| < \delta$  e vale

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluimos que  $f$  é uniformemente contínua em qualquer um dos casos

- $x, y > A$
- $x \in [-B, A]$   $y > A$
- $x, y \in [-B, A]$
- $x, y < -B$ .

Logo  $f$  é uniformemente contínua em  $R$ .

**Exemplo 52.** Suponha  $f : R \rightarrow R$  contínua, então  $g : R \rightarrow R$  dada por  $g(x) = f(x) - x$  também é contínua, se existem  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = l$  então  $g$  é uniformemente contínua. A soma de funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua então  $g(x) + x = f(x)$  também é uniformemente contínua.

### Questão 5

**Propriedade 178.** Se  $f, g : A \rightarrow R$  são uniformemente contínuas, então  $f + g$  é uniformemente contínua.

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon$  arbitrário existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $\delta_2 > 0$  tal que  $|x - y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  segue que  $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , pela desigualdade triangular tem-se

$$|g(x) + f(x) - g(y) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

logo  $f + g$  é uniformemente contínua.

**Propriedade 179.** Sejam  $f, g : A \rightarrow R$  limitadas e uniformemente contínuas, então  $f.g$  é uniformemente contínua.

**Demonstração.** Tomamos duas seqüências  $(x_n), (y_n)$  em  $A$  tais que  $\lim y_n - x_n = 0$ . Escrevemos

$$\begin{aligned} f(y_n).g(y_n) - f(x_n).g(x_n) &= f(y_n).g(y_n) - f(x_n).g(y_n) + f(x_n).g(y_n) - f(x_n).g(x_n) = \\ &= \underbrace{[f(y_n) - f(x_n)]}_{\rightarrow 0} g(y_n) + f(x_n) \underbrace{[g(y_n) - g(x_n)]}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pois  $(f(x_n))$  e  $(g(y_n))$  são limitadas, usamos também que  $f$  e  $g$  são uniformemente convergentes e o critério de seqüências. Portanto vale que  $\lim f(y_n).g(y_n) - f(x_n).g(x_n) = 0$  e daí  $f.g$  é uniformemente contínua.

**Propriedade 180.** Dadas  $f, g : A \rightarrow R$  uniformemente contínuas, então  $h, t : A \rightarrow R$  dada por  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  e  $t(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  são uniformemente contínuas.

**Demonstração.** Vale  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$  e  $t(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$ , daí  $h$  e  $g$  são uniformemente contínuas.

## 1.9 Capítulo 8-Derivadas

### 1.9.1 A noção de derivada

#### Questão 1

**Propriedade 181** (Caracterização de Carathéodory).  $f$  é derivável em  $a \Leftrightarrow$  existe  $g : A \rightarrow R$  contínua em  $a$  tal que  $f(x) = f(a) + g(x)(x - a) \forall x \in A$ .

**Demonstração.**  $\Leftarrow$  . Suponha que existe  $g : A \rightarrow R$  contínua em  $a$  tal que  $f(x) = f(a) + g(x)(x - a)$ , daí para  $x \neq a$  tem-se

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(x)$$

como existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  por  $g$  ser contínua em  $a$ , então existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a)$ , logo  $f$  é derivável.

$\Rightarrow$ ). Supondo que  $f$  seja derivável, então podemos escrever  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$ , se  $h \neq 0$ , definimos  $g(a+h) = f'(a) + \frac{r(h)}{h}$ , se  $h = 0$  definimos  $g(a) = f'(a)$ , então vale que

$$f(a+h) = f(a) + g(a+h).h$$

se  $h \neq 0$  e se  $h = 0$  também, além disso  $g$  é contínua em  $a$ , pois de  $g(a+h) = f'(a) + \frac{r(h)}{h}$ , tomando  $\lim_{h \rightarrow 0}$ , tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = f'(a) = g(a).$$

## Questão 2

**Propriedade 182** (Teorema do sanduíche para derivadas). Sejam  $f, g, h : X \rightarrow R$  tais que para todo  $x \in X$  se tenha

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

. Se num ponto  $a \in X \cap X'$  tem-se  $f(a) = h(a)$  e existem  $f'(a) = h'(a)$  então existe  $g'(a) = f'(a)$ .

**Demonstração.** Da identidade  $f(a) = h(a)$  e da desigualdade  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , temos

$$f(a) \leq g(a) \leq h(a) = f(a), \Rightarrow g(a) = f(a) = h(a)$$

tem-se também

$$f(a+h) \leq g(a+h) \leq h(a+h), \Leftrightarrow f(a+h) - f(a) \leq g(a+h) - g(a) \leq h(a+h) - h(a)$$

pois  $f(a) = h(a) = g(a)$ , como as derivadas  $f'(a)$  e  $h'(a)$  existem, então também existem as derivadas laterais

$$f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a) = g'(a) = h'_+(a) = h'_-(a)$$

dividindo a última desigualdade por  $h > 0$  e tomando o limite a direita segue

$$f'(a) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \leq f'(a)$$

e dividindo por  $h < 0$  e tomando o limite a esquerda

$$f'(a) \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \geq f'(a)$$

assim

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) = g'(a) \quad \square.$$

**Questão 3**

Veremos um lema que ajudará na próximo resultado.

**Lema 1.** Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  sequências limitada tais que  $a_n + b_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(z_n)$  e  $(t_n)$  com o mesmo limite  $a$ , então  $\lim a_n \cdot z_n + b_n \cdot t_n = a$ .

**Demonstração.** Escrevemos

$$\begin{aligned} a_n \cdot z_n + b_n \cdot t_n &= a_n \cdot z_n - a \cdot a_n + a \cdot \underbrace{a_n}_{=1-b_n} + b_n \cdot t_n = a_n(z_n - a) + a(1 - b_n) + b_n \cdot t_n = \\ &= a_n(z_n - a) + a - a \cdot b_n + b_n \cdot t_n = a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) \end{aligned}$$

daí

$$\lim a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) = a = \lim a_n \cdot z_n + b_n \cdot t_n$$

pois  $a_n$  e  $b_n$  são limitadas e  $z_n - a, t_n - a$  tendem a zero.

**Propriedade 183.** Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $a$ . Se  $x_n < a < y_n \forall n$  e  $\lim x_n = \lim y_n = a$  então  $\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$ .

**Demonstração.** Começamos com uma manipulação algébrica

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{f(y_n) - f(a) - f(x_n) + f(a)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} - \frac{f(x_n) - f(a)}{y_n - x_n} = \\ &= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left( \frac{-x_n + a}{y_n - x_n} \right) \left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left( \frac{y_n - x_n - y_n + a}{y_n - x_n} \right) \left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left( 1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n} \right) \left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= \left( \underbrace{\frac{y_n - a}{y_n - x_n}}_{=t_n} \right) \left( \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \right) + \left( 1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n} \right) \left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= t_n \underbrace{\left( \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} + (1 - t_n) \underbrace{\left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} \end{aligned}$$

observamos que  $(t_n)$  é limitada pois  $x_n < a \Rightarrow y_n - a < y_n - x_n \Rightarrow \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$ , pois  $y_n > x_n$  daí podemos dividir por  $y_n - x_n$  sem alterar a desigualdade. Da mesma maneira vale  $0 < y_n - a$  e daí  $0 < \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$ , logo  $(t_n)$  é limitada, o mesmo vale para  $1 - t_n$ , logo aplicamos o lema anterior que nos garante que

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim t_n \underbrace{\left( \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} + (1 - t_n) \underbrace{\left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} = f'(a).$$

#### Questão 4

**Exemplo 53.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ , tomamos  $x_n = \frac{1}{n\pi}$  e  $y_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ , daí vale  $\lim x_n = \lim y_n = 0$

$$f(x_n) = \frac{1}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

$$f(y_n) = \frac{1}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} \operatorname{sen}(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^n}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2}$$

pois  $\operatorname{sen}(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}_{=0} \cos(\frac{\pi}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \cos(n\pi) = (-1)^n$ , daí

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n)}{y_n - x_n}$$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n\pi} = \frac{n\pi - n\pi - \frac{\pi}{2}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})(n\pi)} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})(n\pi)}$$

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} \cdot 2n(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})} \cdot 2n = \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} \cdot 2$$

que não converge, pois para  $n$  par temos  $\frac{-1}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} \cdot 2 \rightarrow \frac{-1}{\pi} \cdot 2$  e para  $n$  ímpar tem-se  $\frac{1}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} \cdot 2 \rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot 2$  duas subsequências convergindo para valores distintos, logo a sequência não converge.

Tal função é derivável no 0, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

em outros pontos distintos de 0 a função também é derivável por ser produto de funções deriváveis.



**Questão 5**

**Propriedade 184.** Se  $f : A \rightarrow R$  é derivável em  $a \in \text{int}(A)$  então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

**Demonstração.** Como  $f$  é derivável em  $a \in \text{int}A$  podemos escrever  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$  onde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ , podemos tomar  $f(a-h) = f(a) - f'(a)h + r(-h)$ , subtraindo as duas expressões e dividindo por  $2h$ , tem-se

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + \underbrace{\frac{r(h) - r(-h)}{2h}}_{\rightarrow 0}$$

tomando o limite segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

**Exemplo 54.** O limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$  pode existir porém a função pode não ser derivável em  $a$ , considere por exemplo  $f : R \rightarrow R$  dada por  $f(x) = |x|$ , no ponto  $a = 0$  ela não é derivável porém

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = 0.$$

**1.9.2 Regras operacionais****Questão 1**

**Propriedade 185.** A função  $f : R \rightarrow R$  com  $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$  para  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ , satisfaz  $D^n f(0) = 0$  para todo  $n \in N$ .

**Demonstração.** Para  $x \neq 0$  vale  $f^n(x) = g_n(\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x^2}}$  onde  $g_n$  é um polinômio. Tal resultado segue por indução sobre  $n$ , pois para  $n = 1$  a identidade se verifica  $f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x^2}}$  pela regra da cadeia. Supondo a validade para  $n$ , vamos provar para  $n + 1$

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= (f^n(x))' = (g_n(\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x^2}})' = g_n(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3}e^{\frac{-1}{x^2}} - \frac{1}{x^2}g_n'(\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x^2}} = (g_n(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}g_n'(\frac{1}{x}))e^{\frac{-1}{x^2}} = \\ &= (g_{n+1}(\frac{1}{x}))e^{\frac{-1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Agora provamos por indução que  $D^n f(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $n = 1$  temos

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0.$$

Supondo que  $D^n f(0) = 0$ , provamos agora que  $D^{n+1} f(0) = 0$

$$\begin{aligned} D^{n+1} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D^n f(x) - D^n f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D^n f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y g_n(y)}{e^{y^2}} = 0 \end{aligned}$$

logo fica provado que  $D^n f(0) = 0$  para todo  $n$  natural.

## Questão 2

**Propriedade 186.** Sejam  $I$  um intervalo aberto,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Se  $f(I) \subset J$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  então a composta  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ .

**Demonstração.** Pela regra da cadeia a função  $g \circ f$  é de classe  $C^1$ , pois é derivável e vale  $(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$ ,  $g'(f(x))$  é contínua pois  $f$  é contínua e  $g'$  é contínua, da mesma maneira  $f'$  é contínua logo o produto das funções também é uma função contínua.

Definindo  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $h(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$ , vamos mostrar que tal função é derivável e possui derivada contínua.

$f'$  é derivável pois  $f$  é de classe  $C^2$ .  $g' \circ f$  é derivável, pois dado  $a \in I$  arbitrário existem  $f'(a)$  e  $g''(f(a))$  pois  $f$  e  $g'$  são deriváveis. Portanto  $f' \cdot (g' \circ f) = h$  é derivável, valendo a regra da cadeia

$$h'(x) = f''(x) \cdot g'(f(x)) + f'(x) g''(f(x))$$

como  $f''$ ,  $g' \circ f$ ,  $f'$  e  $g'' \circ f$  são contínuas, segue-se que  $h'$  é contínua, portanto  $h$  é  $C^1$ , que implica  $g \circ f$  ser  $C^2$ .

## Questão 3

**Propriedade 187.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  com  $f(I) = J$  e  $f(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ . Então  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ .

**Demonstração.** Temos que  $f$  é derivável em  $x \in I$  arbitrário, valendo  $f'(x) \neq 0$ , supondo  $g = f^{-1}$  contínua em  $f(x) = y$  segue pelo teorema da derivada da inversa que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

como  $f$  é  $C^2$  tem-se que  $f'$  é derivável e daí  $\frac{1}{f'}$  também é derivável portanto

$$\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2} = (g'(y))'$$

dessa expressão tiramos que  $g'$  é derivável e contínua pois  $f''$  e  $f'$  são contínuas, logo  $g$  é  $C^2$ .

O cálculo explícito de  $g''(y)$  nos dá

$$g''(y) = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

#### Questão 4

**Propriedade 188.** Seja  $f : R \rightarrow R$  uma função par  $C^\infty$ , então vale  $D^n f(-x) = (-1)^n D^n f(x)$ .

**Demonstração.** Por indução sobre  $n$ , temos que  $f(-x) = f(x)$ , derivando pela regra da cadeia tem-se  $-f'(-x) = f'(x)$ , logo a propriedade vale para  $n = 1$ . Suponha que vale para  $n$ ,  $D^n f(-x) = (-1)^n D^n f(x)$ , vamos provar a validade para  $n + 1$ . Seja  $g(x) = D^n f(x)$  então  $g(-x) = D^n f(-x)$  e vale

$$g(-x) = (-1)^n g(x)$$

derivando pela regra da cadeia tem-se  $g'(-x) = (-1)^{n+1} g'(x)$  portanto

$$D^{n+1} f(-x) = (-1)^{n+1} D^{n+1} f(x).$$

**Corolário 29.** Se  $n$  é par tem-se  $D^n f(-x) = D^n f(x)$  e se  $n$  é ímpar  $D^n f(-x) = -D^n f(x)$ .

Se uma função  $g$  é ímpar ela satisfaz  $g(x) = -g(-x)$  daí tomando  $x = 0$  tem-se  $g(0) = -g(0)$ , portanto  $g(0) = 0$ . Daí segue que se  $f$  é par e  $n$  ímpar então  $D^n f(0) = 0$ .

**Propriedade 189.** Seja  $f : R \rightarrow R$  uma função ímpar  $C^\infty$ , então vale  $D^n f(-x) = (-1)^{n+1} D^n f(x)$ .

**Demonstração.** Por indução sobre  $n$ , temos que  $f(-x) = -f(x)$ , derivando pela regra da cadeia tem-se  $-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$ , logo a propriedade vale

para  $n = 1$ . Suponha que vale para  $n$ ,  $D^n f(-x) = (-1)^{n+1} D^n f(x)$ , vamos provar a validade para  $n + 1$ . Seja  $g(x) = D^n f(x)$  então  $g(-x) = D^n f(-x)$  e vale

$$g(-x) = (-1)^{n+1} g(x)$$

derivando pela regra da cadeia tem-se  $g'(-x) = (-1)^n g'(x) = (-1)^{n+2} g'(x)$  portanto

$$D^{n+1} f(-x) = (-1)^{n+2} D^{n+1} f(x).$$

### Questão 5

**Propriedade 190.** Seja  $f : R \rightarrow R$   $k$  vezes derivável tal que  $f(tx) = t^k f(x) \forall t, x \in R$ .

Nessas condições temos  $f(x) = \frac{D^k f(0)}{k!} x^k = cx^k$ .

**Demonstração.** Aplicamos  $\frac{D^k}{k!}$  na identidade  $f(tx) = t^k f(x)$ , isto é, derivamos  $k$  vezes em relação à  $t$ , aplicando a regra da cadeia.

Usamos que  $D^k f(tx) = x^k f^{(k)}(tx)$  e  $\frac{D^k}{k!} t^k f(x) = f(x)$  logo

$$\frac{x^k}{k!} f^{(k)}(tx) = f(x)$$

tomando  $t = 0$  tem-se

$$\frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = f(x).$$

Em especial se  $k = 1$ ,  $f(x) = x.f'(0) = c.x$ .

## 1.9.3 Derivada e crescimento local

### Questão 1

**Propriedade 191.** Se  $f : R \rightarrow R$  é de classe  $C^1$  então o conjunto dos seus pontos críticos é fechado.

**Demonstração.** Definimos

$$F = \{x \in R \mid f'(x) = 0\}.$$

Podemos ver que  $F$  é fechado de diversas maneiras, como  $R$  é fechado segue por resultado já demonstrado na parte de funções contínuas do texto que  $F$  é fechado, podemos olhar também para  $R \setminus F = \{x \in R \mid f'(x) < 0\} \cup \{x \in R \mid f'(x) > 0\}$  como  $R$  é aberto segue que esses dois últimos conjuntos são aberto, portanto  $F$  é fechado.

**Exemplo 55.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{13}$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . A derivada no ponto zero é

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{13}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{13}$$

a derivada em outros pontos é dada por

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{13}.$$

Podemos tomar  $x \neq 0$  arbitrariamente perto de 0 tal que  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  e  $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$  daí tem-se  $f'(x) < 0$ , da mesma maneira com  $x \neq 0$  arbitrariamente próximo de zero com  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ ,  $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  e  $f'(x) > 0$ .

Como  $f'$  é contínua existem pontos muito próximos de zero tais que  $f'(x) = 0$  (pontos críticos), daí temos sequências de pontos críticos que tendem a zero, porém  $f'(0) > 0$ .

## Questão 2

**Propriedade 192.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e  $c$  um ponto crítico de  $f$ , se existe  $\delta > 0$  tal que

1. Se  $f'(x) \geq 0$  para  $x \in (c - \delta, c)$  e  $f'(x) \leq 0$  para  $x \in (c, c + \delta)$  então  $c$  é um máximo local de  $f$ .
2. Se  $f'(x) \leq 0$  para  $x \in (c - \delta, c)$  e  $f'(x) \geq 0$  para  $x \in (c, c + \delta)$  então  $c$  é um mínimo local de  $f$ .

## Demonstração.

1.  $f$  é não-decrescente em  $(c - \delta, c)$  e  $f$  é não-crescente em  $(c, c + \delta)$ . Dado qualquer  $y \in (c - \delta, c)$  existe uma sequência de pontos  $(y_n)$  em  $(y, c)$  tal que  $\lim y_n = c$ , vale que  $f(y) \leq f(y_n)$  pelo fato da função ser não-decrescente, tomando o limite e usando a continuidade segue que  $f(y) \leq f(c)$ . Da mesma maneira, dado  $x \in (c, c + \delta)$  existe  $(x_n)$  em  $(c, x)$  implicando que vale  $f(x) \leq f(x_n)$  pelo fato da função ser não-crescente então tomando o limite e usando a continuidade tem-se que  $f(x) \leq f(c)$ .

Resumindo para quaisquer  $x \in (c, c + \delta), y \in (c - \delta, c)$  vale que  $f(y) \leq f(c)$  e  $f(x) \leq f(c)$  então  $c$  é um máximo local de  $f$ .

2.  $f$  é não-crescente em  $(c - \delta, c)$  daí para qualquer  $x$  nesse conjunto tomamos uma sequência  $(x_n)$  em  $(x, c)$  que converge para  $c$ , vale  $f(x_n) \leq f(x)$ , por continuidade passando o limite tem-se que  $f(c) \leq f(x)$ .  $f$  é não-crescente em  $(c, c + \delta)$ , dado  $y$  nesse intervalo tomamos uma sequência  $(y_n)$  em  $(c, y)$  tal que  $\lim y_n = c$ , temos  $f(y_n) \leq f(y)$ , tomando o limite, temos por continuidade que  $f(c) \leq f(y)$ , como vale  $f(c) \leq f(y)$  e  $f(c) \leq f(x)$  para  $x \in (c - \delta, c), y \in (c, c + \delta)$  tem-se que  $f(c)$  é ponto de mínimo local de  $f$ .

**Corolário 30.** • Seja  $c$  ponto crítico e  $f'$  não-crescente para  $x \in (c - \delta, c)$  tem-se  $x < c$  implicando  $f'(x) \geq f'(c) = 0$  e  $y \in (c, c + \delta)$  implica  $y > c$  e  $f'(c) = 0 \geq f'(y)$ , então  $c$  é ponto de máximo.

- Se  $f''(x) \leq 0, \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  então  $f'$  é não-crescente portanto  $c$  é ponto de máximo.
- Se  $f''$  for contínua em  $c$  e vale  $f''(c) < 0$ , então por continuidade vale o item anterior.

Resultados similares valem para mínimo.

**Corolário 31.** • Seja  $c$  ponto crítico e  $f'$  não-decrescente para  $x \in (c - \delta, c)$  tem-se  $x < c$  implicando  $f'(x) \leq f'(c) = 0$  e  $y \in (c, c + \delta)$  implica  $y > c$  e  $f'(c) = 0 \leq f'(y)$ , então  $c$  é ponto de mínimo.

- Se  $f''(x) \geq 0, \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  então  $f'$  é não-decrescente portanto  $c$  é ponto de mínimo.
- Se  $f''$  for contínua em  $c$  e vale  $f''(c) > 0$ , então por continuidade vale o item anterior.

**Definição 12** (Ponto crítico não-degenerado). Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável no intervalo aberto  $I$ . Um ponto crítico  $c \in I$  é dito ser não-degenerado quando  $f''(c) \neq 0$ .

**Propriedade 193.** Todo ponto crítico não degenerado é um ponto de máximo local ou mínimo local.

**Demonstração.** Se vale  $f''(c) > 0$  então  $c$  é um ponto de mínimo e se vale  $f''(c) < 0$  então  $c$  é um ponto de máximo pelos resultados anteriores.

### Questão 3

**Propriedade 194.** Sejam  $f : I \rightarrow R$ ,  $c \in I$  um ponto crítico não degenerado, então existe  $\delta > 0$  tal que  $c$  é o único ponto crítico de  $f$  em  $(c - \delta, c + \delta)$ .

**Demonstração.** Vale  $f''(c) > 0$  ou  $f''(c) < 0$ , supondo a primeira condição existe  $\delta > 0$  tal que

$$c - \delta < x < c < y < c + \delta \Rightarrow f(x) < \underbrace{f'(c)}_{=0} < f(y)$$

logo só existe um ponto crítico no intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  que é no ponto  $c$ . No caso de  $f''(c) < 0$  segue que existe  $\delta > 0$  tal que

$$c - \delta < x < c < y < c + \delta \Rightarrow f(y) < \underbrace{f'(c)}_{=0} < f(x)$$

daí concluímos o mesmo do caso anterior.

**Propriedade 195.** Se  $f$  é de classe  $C^1$  num conjunto compacto  $K \subset I$  em que todos pontos críticos de  $f$  são não degenerados, só existe um número finito deles.

**Demonstração.** Suponha por absurdo que exista uma infinidade de pontos  $(c_n)$  críticos não-degenerados em  $K$ .  $(c_n)$  é limitada logo possui subsequência convergente, passamos a tal subsequência convergente que também simbolizaremos por  $(c_n)$ .  $\lim c_n = c \in K$  pois  $K$  é fechado.  $\forall c_n$  vale  $f'(c_n) = 0$ , como  $f'$  contínua tem-se que  $\lim f'(c_n) = f'(c) = 0$ , daí  $c$  é ponto crítico, porém isso é absurdo pois deveria existir  $\delta > 0$  tal que  $(c - \delta, c + \delta) \cap K$  tivesse apenas um ponto crítico de  $K$  mas nessas condições teria uma infinidade pois  $\lim c_n = c$  com cada  $c_n \in K$ .

### Questão 4

**Propriedade 196.** Se o ponto crítico  $c$  da função  $f : I \rightarrow R$  é limite de uma sequência de pontos críticos  $c_n \neq c$  e  $f''(c)$  existe então  $f''(c) = 0$ , nessas condições  $c$  é um ponto crítico degenerado.

**Demonstração.** Se  $f''(c)$  existe então para qualquer sequência  $(c_n) \rightarrow c$  devemos ter

$$\lim \frac{f'(c_n) - f'(c)}{c_n - c} = f''(c),$$

tomamos então a sequência de pontos críticos e vale

$$\lim \frac{f'(c_n) - f'(c)}{c_n - c} = 0 = f''(c),$$

pois  $f'(c_n) = f'(c) = 0$ .

### Questão 5

**Propriedade 197.** o conjunto dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função  $f : R \rightarrow R$  é enumerável.

**Demonstração.** Seja  $M$  o conjunto dos pontos de máximo local estrito de  $f$ , vamos mostrar que  $M$  é enumerável. Para cada  $c \in M$  podemos tomar racionais  $I_c, S_c$  tais que  $c \in (I_c, S_c)$  e  $c$  seja o ponto de máximo estrito de  $(I_c, S_c) \setminus \{c\}$ , isto é,  $\forall x \in (I_c, S_c)$  e  $x \neq c$  vale que  $f(c) > f(x)$ .

Seja  $B$  o conjunto dos intervalos da forma  $(p, q)$ , com  $p$  e  $q$  racionais, tal conjunto é enumerável pois em bijeção com um subconjunto de  $Q \times Q$  que é enumerável. Definimos a função  $f : M \rightarrow B$  tal que  $f(d) = (I_d, S_d)$ , tal função é injetiva, dado  $c \neq d$  não vale  $c \in (I_d, S_d)$  e  $d \in (I_c, S_c)$ , pois se fosse teríamos  $f(c) < f(d)$  e  $f(d) < f(c)$ , que é absurdo, então tais intervalos devem ser diferentes e portanto  $f$  é injetiva implicando que  $M$  é enumerável.

O argumento para pontos de mínimo é o mesmo, só trocamos as desigualdades na demonstração acima.

Seja  $m$  o conjunto dos pontos de mínimo local estrito de  $f$ , vamos mostrar que  $m$  é enumerável. Para cada  $c \in m$  podemos tomar racionais  $I_c, S_c$  tais que  $c \in (I_c, S_c)$  e  $c$  seja o ponto de mínimo estrito de  $(I_c, S_c) \setminus \{c\}$ , isto é,  $\forall x \in (I_c, S_c)$  e  $x \neq c$  vale que  $f(c) < f(x)$ .

Definimos a função  $f : M \rightarrow B$  tal que  $f(d) = (I_d, S_d)$ , tal função é injetiva, dado  $c \neq d$  não vale  $c \in (I_d, S_d)$  e  $d \in (I_c, S_c)$ , pois se fosse teríamos  $f(c) < f(d)$  e  $f(d) < f(c)$ , que é absurdo, então tais intervalos devem ser diferentes e portanto  $f$  é injetiva implicando que  $m$  é enumerável.



### 1.9.4 Funções deriváveis num intervalo

#### Questão 1

**Propriedade 198.** Seja  $g : I \rightarrow R$  contínua, exceto em  $c$ . Se existem  $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = L$  com  $l \neq L$  então não existe  $f : I \rightarrow R$  com  $f' = g$ .

**Demonstração.** Como  $g$  é descontínua em  $c$  e possui os limites laterais então existe  $\delta > 0$  tal que

$$c - \delta \leq x < c < y \leq c + \delta \Rightarrow g(x) < l - \varepsilon < L + \varepsilon < g(y)$$

tomamos  $d \neq g(c)$  em  $(l - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Vale  $g(c - \delta) < l + \varepsilon$  e  $g(c + \delta) > L - \varepsilon$  mas não existe  $x \in (c - \delta, c + \delta)$  tal que  $g(x) = d$ . Se  $g$  fosse derivada de alguma função, então pelo teorema de Darboux existiria  $x$  em tal intervalo tal que  $g(x) = d$ .

#### Questão 2

**Exemplo 56.** Seja  $f : R^+ \rightarrow R$  dada por  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ , determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de  $f$ , seus pontos críticos e seus limites  $x \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow \infty$ .

Calculamos a derivada  $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$  pela regra do quociente, o ponto crítico da função acontece quando  $\ln(x) = 1$  logo  $x = e$ , a derivada é positiva quando  $1 - \ln(x) > 0$ ,  $1 > \ln(x)$  daí  $x < e$ , a derivada é negativa quando  $1 - \ln(x) < 0$ ,  $1 < \ln(x)$  daí  $x > e$ . Então temos

- Para  $x < e$ ,  $f$  é crescente.
- Para  $x > e$ ,  $f$  é decrescente.

Vamos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ . Para o primeiro limite tomamos  $x$  da forma  $\frac{1}{2^n}$ , daí

$$2^n \cdot \ln(2^{-n}) = 2^n \cdot (-n) \ln(2) \rightarrow -\infty$$

logo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$  pelo fato de  $f$  ser crescente para  $x < e$ . Para o outro limite tomamos  $x = 2^n$  logo

$$\frac{\ln(2^n)}{2^n} = n \frac{\ln(2)}{2^n} \rightarrow 0$$

logo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  pois  $f$  é decrescente para  $x > e$ .

### Questão 3

**Exemplo 57.** Seja  $g : R^+ \rightarrow R$  com  $g(x) = \frac{e^x}{x}$ . Calculamos  $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$  logo temos ponto crítico apenas para  $x = 1$ . Vale que  $e^x > 0$  e  $\frac{1}{x^2} > 0$ , daí o sinal de  $g'(x)$  depende de  $x - 1$ .

- Se  $x > 1$  então  $g'(x) > 0$  e  $g$  é crescente.
- Se  $x < 1$  então  $g'(x) < 0$  e  $g$  é decrescente.

Vale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \infty$ , pois tomando da da forma  $x = \ln(1 + \frac{1}{2^n})$  temos com esse  $x$  aplicado a função

$$(1 + \frac{1}{2^n}) \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{2^n})} \rightarrow \infty$$

como a função é decrescente para  $x < 1$  então  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \infty$ . Da mesma forma, vale que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ , pois  $f$  é crescente para  $x > 1$  e tomando  $x = \ln(n)$  tem-se

$$\frac{e^{\ln(n)}}{n} = \frac{n}{\ln(n)} \rightarrow \infty$$

pois  $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$ .

### Questão 4

**Exemplo 58.** Prove que

- $\text{sen} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1)$
- $\text{cos} : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$
- $\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow R$

são bijeções com derivadas não nulas e calcule a derivada das funções inversas  $\text{arcsen}$ ,  $\text{arccos}$  e  $\text{arctg}$ .

- $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$ , que não se anula em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , para  $x$  nesse intervalo vale que  $\cos(x) = (\operatorname{sen}(x))' > 0$  logo a função é crescente. A imagem da função é  $(-1, 1)$ , pois  $\operatorname{sen}(\frac{-\pi}{2}) = -1$ ,  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$  e a função é contínua. Como ela é crescente, então temos bijeção.
- Da mesma maneira com  $\cos$ , temos  $(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$  em  $(0, \pi)$   $\operatorname{sen}(x)$  é positivo, logo  $-\operatorname{sen}(x) < 0$ , portanto  $\cos$  é decrescente. Vale  $\cos(0) = 1$  e  $\cos(\pi) = -1$  e a função é contínua logo sua imagem é o intervalo  $(-1, 1)$ , além disso a derivada nunca se anula em  $(0, \pi)$ . Pelo fato da função ser decrescente temos bijeção.
- A derivada de  $\operatorname{tg}(x)$  é  $\sec^2(x) > 0$  em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , portanto a função é crescente. Vale  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = \infty$ , tomamos  $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ , aplicando na função e simplificando

$$\frac{\cos(\frac{1}{n})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})} \rightarrow \infty$$

portanto  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = \infty$ , de maneira semelhante mostramos que  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = -\infty$ .

Tomamos  $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$ , aplicando na função e simplificando

$$-\frac{\cos(\frac{1}{n})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})} \rightarrow -\infty$$

Pelo fato da função ser contínua segue que sua imagem é  $\mathbb{R}$ , por ser crescente, temos bijeção.

Todas essas funções são bijeções, logo podemos definir suas funções inversas.

**Propriedade 199.**  $D[\operatorname{arcsen}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Demonstração.** Tomando  $\operatorname{arcsen}(x) = y$  então  $\operatorname{sen}(y) = x$ , derivando  $y' \cos(y) = 1$  e daí  $y' = \frac{1}{\cos(y)}$  como  $\cos^2(y) = 1 - \operatorname{sen}^2(y)$  segue que  $\cos(y) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(y)}$  e

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Propriedade 200.** Vale  $D[\operatorname{arccos}(x)] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Demonstração.** Tomando  $y = \arccos(x)$  tem-se  $\cos(y) = x$  e daí  $-y' \sin(y) = 1$  logo

$$y' = -\frac{1}{\sin(y)}$$

como  $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$  tem-se  $\sin(y) = \sqrt{1 - x^2}$  então

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Propriedade 201.** Vale  $D[\arctg(x)] = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

**Demonstração.** Se  $\arctg(x) = y$  então  $\tg(y) = x$ , derivando ambos lados tem-se  $y' \sec^2(y) = 1$  logo  $y' = \frac{1}{\sec^2(y)}$ . Da identidade  $\sec^2(y) = \tg^2(y) + 1$  então  $\sec^2(y) = x^2 + 1$  de onde segue

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \square.$$

### Questão 5

**Propriedade 202.** Sejam  $f$  derivável em  $I$ ,  $A = \{f'(x) \mid x \in I\}$  e

$$B = \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, x \neq y \in I \right\}.$$

Vale que

- $B \subset A$
- $\overline{B} = \overline{A}$
- $\sup(B) = \sup(A)$  e  $\inf(B) = \inf(A)$ .

**Demonstração.**

- $B \subset A$ , pelo TVM que diz  $x, y \in I$  então existe  $x < c < y$  tal que  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$ .
- $B \subset A$  implica que  $\overline{B} \subset \overline{A}$ , por definição de derivada temos que  $A \subset \overline{B}$  daí  $\overline{A} \subset \overline{B}$  implicando finalmente que  $\overline{B} = \overline{A}$ .

- Da relação  $A \subset B$  temos que  $\sup(B) \leq \sup(A)$  porém não pode valer  $\sup(A) > \sup(B)$  pois  $\sup(B) \in \overline{A}$  (de  $\overline{A} = \overline{B}$ ) da mesma relação temos  $\inf(B) \geq \inf(A)$  e não pode valer  $\inf(B) > \inf(A)$ . Portanto  $\sup(B) = \sup(A)$  e  $\inf(B) = \inf(A)$ .

O conjunto  $A$  pode estar contido em  $B$  propriamente, um exemplo e a função de lei  $f(x) = x^3$ , temos  $A = \{3x^2 \mid x \in I\}$  e  $B = \{y^2 + yx + x^2 \mid x \neq y \in I \mid x \in I\}$ , o primeiro conjunto contém o número 0 o segundo não contém o número zero.

### Questão 6

**Propriedade 203.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow R$  limitada e derivável. Se não existir  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  então para todo  $c \in R$  existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f'(x) = c$ .

**Demonstração.** Vamos mostrar que  $f'$  é ilimitada superiormente e inferiormente.

Suponho por absurdo que  $f'$  fosse limitada inferiormente, então valeria  $f'(x) \geq m \forall x$ , daí tomando  $g : (a, b) \rightarrow R$  dada por  $g(x) = f(x) - mx$  teríamos  $g'(x) = f'(x) - m \geq 0$ , logo  $g$  seria não-decrescente e limitada e por isso existiriam os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$  e o mesmo valeria para  $f$  por causa da identidade  $g(x) = f(x) - mx$ , o que contraria nossa suposição. Da mesma maneira  $f'$  não pode ser limitada superiormente.

Suponho por absurdo que  $f'(x) \leq M \forall x$ , daí tomando  $g : (a, b) \rightarrow R$  dada por  $g(x) = -f(x) + Mx$  teríamos  $g'(x) = -f'(x) + M \geq 0$ , logo  $g$  seria não-crescente e limitada e por isso existiriam os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$  e o mesmo valeria para  $f$  por causa da identidade  $g(x) = -f(x) + Mx$ , o que contraria nossa suposição novamente.

Então  $f'$  não é limitada inferiormente ou superiormente, então dado qualquer  $c \in R$  existem  $x_1, x_2 \in (a, b)$  tais que

$$f'(x_1) < c < f'(x_2)$$

daí segue pelo teorema de Darboux que existe  $x_3$  com  $x_1 < x_3 < x_2$  tal que  $f'(x_3) = c$ .

### Questão 7

**Propriedade 204.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  contínua e derivável em  $(a, b)$  com  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ . Se  $\{x \in [a, b] \mid f'(x) = 0\}$  é finito então  $f$  é crescente.

**Demonstração.** Como vale  $f'(x) \geq 0$  então  $f$  é não-decrescente. Suponha por absurdo que  $f$  não seja crescente, então existem  $x < y \in (a, b)$  tais que  $f(x) = f(y)$  daí

$f$  é constante no intervalo  $[x, y]$ , pois dado  $z \in [x, y]$  vale que  $f(x) \leq f(z) \leq f(y) = f(x)$  pois  $f$  é não-decrescente, logo  $f(z) = f(x) = c$  nesse intervalo e  $f'(z) = 0$ . Nesse caso a derivada seria nula numa quantidade infinita de pontos, o que contraria a hipótese, portanto  $f$  é crescente.

### Questão 8

**Propriedade 205.** Seja  $f$  de  $I$  em  $R$  uma função contínua em um intervalo  $I$  tal que  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é constante.

**Demonstração.** Sejam dois pontos  $a$  e  $b$  em  $A$ , com  $b > a$  pelo TVM existe  $\alpha \in A$  tal que  $f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ , logo temos que ter  $f(b) - f(a) = 0$ , logo  $f(b) = f(a)$  o que implica a função ser constante, dada a arbitrariedade dos pontos  $a$  e  $b$  escolhidos em  $A$ .

**Demonstração.**[2-Intervalos encaixados] Suponha por absurdo que  $f$  não seja constante em  $I$ , então existem  $a, b \in I$  tais que

$$\alpha := |f(a) - f(b)| > 0$$

em uma das metades do intervalo  $[a, b]$  deve valer  $|f(b_1) - f(a)| \geq \frac{\alpha}{2}$ , pois caso contrário valeria  $|f(b) - f(b_1)| \leq \frac{\alpha}{2}$  e  $|f(b_1) - f(a)| \leq \frac{\alpha}{2}$ , daí pela desigualdade triangular teríamos

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(b_1)| + |f(b_1) - f(a)| \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

o que contraria nossa definição inicial. Podemos continuar o processo, tomando intervalos encaixados  $[a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$  com  $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$  e  $(a_n - b_n \rightarrow 0)$

$$|f(b_n) - f(a_n)| \geq \frac{\alpha}{2^n} \Rightarrow \frac{|f(b_n) - f(a_n)|}{b_n - a_n} \geq \frac{\alpha}{b - a}$$

por propriedade de intervalos encaixados, existe  $c \in [a_n, b_n] \forall n$  com  $a_n, b_n \rightarrow c$  logo

$$|f'(c)| = \lim \frac{|f(b_n) - f(a_n)|}{b_n - a_n} \geq \frac{\alpha}{b - a} > 0$$

portanto não valeria  $f'(x) = 0$  o que contradiz a hipótese.

**Questão 9**

**Propriedade 206.** Seja  $f$  de  $I$  (um intervalo aberto) em  $\mathbb{R}$  derivável em  $I$ . Se existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $|f'(x)| \leq k$  para todo  $x \in I$  então  $f$  é lipschitziana em  $I$  (implicando também ser uniformemente contínua em  $I$ ).

**Demonstração.** Pelo TVM existem  $y, x, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $y > x$  com  $\alpha$  entre  $x$  e  $y$  tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\alpha), \quad f(y) - f(x) = f'(\alpha)(y - x), \quad |f(y) - f(x)| = |f'(\alpha)|(y - x)|$$

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\alpha)|(y - x) \leq k(y - x)$$

**Demonstração.** [2-Intervalos encaixados] Suponha por absurdo que existem  $a < b \in I$  tais que

$$|f(b) - f(a)| > k(b - a) = \alpha > 0$$

dai seguimos a mesma construção da demonstração anterior existindo  $c \in [a_n, b_n] \forall n$  tal que

$$|f'(c)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(b_n) - f(a_n)|}{b_n - a_n} \geq \frac{\alpha}{b - a} = k > 0$$

o que entra em contradição com a hipótese de  $|f'(x)| \leq k$  para todo  $x \in I$ .

**Questão 10**

**Propriedade 207.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, em que a princípio é garantida a diferenciabilidade em  $[a, b] \setminus \{c\}$ . Se existe  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = L$  então  $f'(x)$  existe e vale  $f'(c) = L$ .

**Demonstração.**

Para todo  $x \neq c$  em  $(a, b)$  existe  $z_x$  entre  $x$  e  $c$  tal que pelo TVM

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(z_x)$$

daí

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f'(z_x) = L$$

**Questão 11**

**Propriedade 208.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $(a, b)$ , com  $f'$  limitada no mesmo conjunto. Se  $f$  possui propriedade do valor intermediário, então  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** Basta prova que  $f$  é contínua em  $a$  e  $b$ , pois nos outros pontos ela já é contínua por ser derivável.

$f$  restrita ao conjunto  $(a, b)$  é uniformemente contínua, pelo fato da derivada ser limitada (aplicação do teorema do valor médio), isso implica que os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l$  existem<sup>3</sup>

Suponha por absurdo que  $f(a) < L$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in (a, a + \delta)$  implica  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  com  $L - \varepsilon > f(a)$ , seja  $f(a + \delta) = t \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ , não existe  $x \in (a, a + \delta)$  tal  $f(x) = y \in (f(a), L - \varepsilon)$ , porém tomando o intervalo  $[a, a + \delta)$  sua imagem contém intervalo  $(f(a), t)$  daí existe  $x \in (a, a + \delta)$  tal que  $f(x) \in (f(a), L - \varepsilon)$  que é garantido pela propriedade do valor intermediário, mas isso é absurdo! Da mesma maneira podemos argumentar para  $L < f(a)$ , concluindo que  $L = f(a)$  e para o ponto  $b$ .

**Questão 12**

**Propriedade 209.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$  com  $\alpha > 1, c > 0, x, y \in I$  arbitrários então  $f$  é constante.

**Demonstração.** De  $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$  tomamos  $x = a \in I$  fixo porém arbitrário

$$0 \leq \frac{|f(y) - f(a)|}{y - a} \leq c|y - a|^{\alpha-1}$$

com  $\alpha - 1 > 0$ , aplicamos o limite de ambos os lados e pelo teorema do sanduíche segue que  $f'(a) = 0$ , logo  $f$  é constante.

**Questão 13**

**Propriedade 210.** Se  $f$  é derivável em  $I$  e  $f'$  é contínua em  $a$  então  $\forall x_n \neq y_n$  com  $\lim x_n = \lim y_n = a$  então

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

---

<sup>3</sup>Propriedade de funções uniformemente contínuas.



**Demonstração.** Pelo TVM, para cada  $y_n, x_n$  existe  $z_n$  entre eles tal que

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(z_n)$$

daí  $\lim z_n = a$  por sanduiche e  $\lim f'(z_n) = f'(a)$  por continuidade, logo

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim f'(z_n) = f'(a).$$

## 1.10 Capítulo 9-Fórmula de Taylor e aplicações da Derivada

### 1.10.1 Fórmula de Taylor

#### Questão 1

**Exemplo 59.** Calcule as derivadas sucessivas da função  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

Tomamos

$$P(h) = \sum_{k=0}^n h^k = \frac{h^{n+1} - 1}{h - 1} = \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h} = \frac{1}{1 - h} - \frac{h^{n+1}}{1 - h}$$

e  $r(h) = \frac{h^{n+1}}{1 - h}$  daí

$$R(h) = f(h) - P(h) = \frac{h^{n+1}}{1 - h}$$

vale  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1 - h} = 0$  portanto  $P$  é o polinômio de Taylor de  $f$  em 0 então  $\frac{D^k f(0)}{k!} = a_k$  coeficiente do polinômio  $P$ , então  $D^k f(0) = k!$  para  $k$  de 1 até  $n$ .

#### Questão 2

**Exemplo 60.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = \frac{x^5}{1 + x^6}$ , calcular as derivadas de ordem 2001 e 2003 de  $f$  em 0.

Usamos a identidade

$$\frac{y^{n+1}}{1 - y} = \frac{1}{1 - y} - \sum_{k=0}^n y^k$$

tomando  $y = -x^6$  multiplicando por  $x^5$

$$\frac{(-x^6)^{n+1}x^5}{1+x^6} = \frac{x^5}{1+x^6} - \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{6k+5}$$

vale  $D^k \frac{f(0)}{k!} = a_k$  o coeficiente de  $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{6k+5}$ , daí se  $k$  não é da forma  $6t+5$  vale

$$a_k = 0 \text{ e } a_{6k+5} = D^{6k+5} \frac{f(0)}{(6k+5)!} = (-1)^k \text{ que implica } D^{6k+5} f(0) = (-1)^k (6k+5)!$$

tomando  $k = 333$  segue que  $D^{2003} f(0) = -(2003)!$  e  $D^{2001} f(0)$  pois 2001 não é da forma  $6k+5$ .

### Questão 3

**Propriedade 211.** Seja  $f : I \rightarrow R$  de classe  $C^\infty$  no intervalo  $I$ , Suponha que exista  $K > 0$  tal que  $|f^{(n)}(x)| \leq K$  para todo  $x \in I$  e todo  $n \in N$ , então para  $x_0, x \in I$  quaisquer vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}.$$

**Demonstração.** Pela função ser  $C^\infty$  podemos escrever o polinômio de taylor de ordem  $n$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + r_n(h)$$

com

$$r_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\psi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

tomando o valor absoluto

$$|r_n(h)| = \frac{|f^{(n+1)}(\psi)| |(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{K |(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}$$

com  $x, x_0, K$  fixos, podemos aplicar o teorema do sanduíche, sendo que os limites tendem a zero, concluímos daí que  $\lim r_n(h) = 0$  logo a série de taylor converge para a função

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}.$$

**Questão 4**

**Propriedade 212.** Se  $f''(x) \geq 0$  então  $f$  é convexa .

**Demonstração.** Pela fórmula de Taylor com resto de lagrange vale a identidade

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)(x - a)^2}{2}$$

com algum  $c$  entre  $a$  e  $x$  arbitrários, daí

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = \frac{f''(c)(x - a)^2}{2} \geq 0$$

portanto

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

desigualdade que implica  $f$  ser convexa<sup>4</sup>.

**Questão 5**

**Propriedade 213.** Seja  $f : I \rightarrow R$   $C^2$  em  $I$ . Dado  $a \in I$  definimos  $g : I \rightarrow R$  como  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  se  $x \neq a$  e  $g(a) = f'(a)$ .

- Nessas condições  $g$  é de classe  $C^1$ .
- Se  $f \in C^3 \Rightarrow g \in C^2$ .

**Demonstração.** Pela fórmula de Taylor podemos escrever

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + R(x)$$

onde vale  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x - a)^2} = 0$  e vale também  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R'(x)}{(x - a)} = 0$  pois derivando a identidade acima tem-se

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + R'(x)$$

agrupando convenientemente e dividindo por  $x - a$

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} - f''(a) = \frac{R'(x)}{x - a}$$

---

<sup>4</sup>Propriedade equivalente a definição de função convexa.

como  $f$  é  $C^2$  podemos aplicar o limite  $\lim_{x \rightarrow a}$  resultando em

$$f''(a) - f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'(x)}{x - a} = 0.$$

Tem-se então que

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + f''(a) \frac{x - a}{2} + \frac{R(x)}{x - a}$$

derivando temos que

$$g'(x) = \frac{f''(a)}{2} + \frac{R'(x)}{x - a} - \frac{R(x)}{(x - a)^2}$$

tomando o limite  $\lim_{x \rightarrow a}$  segue

$$\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(a)}{2} + \underbrace{\frac{R'(x)}{x - a}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{R(x)}{(x - a)^2}}_{\rightarrow 0} = \frac{f''(a)}{2}$$

portanto  $g'(a)$  existe e vale  $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = g'(a)$ , portanto  $g$  é  $C^1$ .

Para o segundo caso procedemos de maneira similar

Pela fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a) \frac{(x - a)^2}{2} + f'''(a) \frac{(x - a)^3}{3!} + R(x)$$

onde vale  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x - a)^3} = 0$  e vale também  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R'(x)}{(x - a)} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R''(x)}{(x - a)} = 0$  pois derivando a identidade acima tem-se

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + f'''(a) \frac{(x - a)^2}{2!} + R'(x)$$

agrupando convenientemente e dividindo por  $x - a$

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} - f''(a) = \frac{R'(x)}{x - a} + f'''(a) \frac{(x - a)}{2!}$$

como  $f$  é  $C^3$  podemos aplicar o limite  $\lim_{x \rightarrow a}$  resultando em

$$f''(a) - f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'(x)}{x - a} = 0.$$

Derivando a identidade  $f'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + f'''(a) \frac{(x - a)^2}{2!} + R'(x)$  segue

$$f''(x) = f''(a) + f'''(a)(x - a) + R''(x)$$

agrupando e dividindo por  $x - a$

$$\frac{f''(x) - f''(a)}{x - a} - f'''(a) = \frac{R''(x)}{x - a}$$

aplicando o limite  $\lim_{x \rightarrow a}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - f''(a)}{x - a} - f'''(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R''(x)}{x - a} = 0.$$

Tem-se então que

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + f''(a) \frac{x - a}{2} + f'''(a) \frac{(x - a)^2}{3!} + \frac{R(x)}{x - a}$$

derivando

$$g'(x) = \frac{f''(a)}{2} + f'''(a) \frac{(x - a)}{2!} + \frac{R'(x)}{x - a} - \frac{R(x)}{(x - a)^2}$$

tomando o limite  $\lim_{x \rightarrow a}$  segue

$$\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(a)}{2} + f'''(a) \underbrace{\frac{(x - a)^2}{3!}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{R'(x)}{x - a}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{R(x)}{(x - a)^2}}_{\rightarrow 0} = \frac{f''(a)}{2}$$

portanto  $g'(a)$  existe e vale  $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = g'(a)$ , portanto  $g$  é  $C^1$ . Agora provamos que  $g$  é

$C^2$ , derivamos a relação  $g'(x) = \frac{f''(a)}{2} + f'''(a) \frac{(x - a)}{2!} + \frac{R'(x)}{x - a} - \frac{R(x)}{(x - a)^2}$

$$g''(x) = f'''(a) \frac{1}{2!} + \frac{R''(x)}{x - a} - \frac{R'(x)}{(x - a)^2} - \frac{R'(x)}{(x - a)^2} + 2 \frac{R(x)}{(x - a)^3}$$

aplicando o limite  $\lim_{x \rightarrow a}$  tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} g''(x) = f'''(a) \frac{1}{2!}$$

pois  $\frac{R''(x)}{x - a} \rightarrow 0$ ,  $\frac{R'(x)}{(x - a)^2} \rightarrow 0$  por L'Hospital e  $\frac{R(x)}{(x - a)^3} \rightarrow 0$ . Portanto  $\lim_{x \rightarrow a} g''(x) = g''(a)$  e  $g$  é  $C^2$ .

## Questão 6

**Propriedade 214.** Se  $P : R \rightarrow R$  é um polinômio de grau  $n$  então para  $a, x \in R$  tem-se

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

**Demonstração.** Usamos a fórmula de Taylor infinitesimal

$$P(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)h^k}{k!} + r(h)$$

com  $x = a + h$ ,  $h = x - a$  logo

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + r(x-a)$$

como  $P$  é polinômio e  $\sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$  também é, segue que  $r(h)$  também é polinômio

e tem grau até  $n$ , por ser diferença de polinômios. Como vale  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$  então vale que  $r^{(t)}(0) = 0$  para todo  $t$  de 0 até  $n$ , se  $r(h)$  não fosse nulo, sendo de grau  $s \leq n$  então  $r^{(s)}(0) \neq 0$  o que não acontece, então  $r(h) = 0$  e daí

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}.$$

### Questão 7

**Propriedade 215.** Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  ambas duas vezes deriváveis em  $a$ . Se  $f(a) = g(a)$ ,  $f'(a) = g'(a)$  e  $f(x) \geq g(x) \forall x \in I$  então  $f''(a) \geq g''(a)$ .

**Demonstração.** Pela fórmula de Taylor infinitesimal temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_1(h)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + g''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(h)$$

usando que  $f(x) \geq g(x)$  e anulando os termos semelhantes temos

$$f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_1(h) \geq g''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(h) \Rightarrow$$

$$(x-a)^2 \left[ \frac{f''(a) - g''(a)}{2} + \frac{r_1(h) - r_2(h)}{(x-a)^2} \right] \geq 0$$

se fosse  $g''(a) > f''(a)$  então o termo entre colchetes teria o sinal de negativo pois  $r_1(h) - r_2(h) \rightarrow 0$ , com  $h$  pequeno, o que não pode acontecer, logo  $f''(a) \geq g''(a)$ .

### 1.10.2 Funções côncavas e convexas

#### Questão 1

**Propriedade 216.** Sejam  $f : I \rightarrow R$  e  $g : J \rightarrow R$  convexas com  $f(I) \subset J$  e  $g$  não-decrescente. Nessas condições  $g \circ f : I \rightarrow R$  é convexa.

**Demonstração.** Sejam  $t_1, t_2$  tais que  $t_1 + t_2 = 1$  como  $f$  e  $g$  são convexas então vale

$$f(t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2)$$

e

$$g(t_1 \cdot y_1 + t_2 \cdot y_2) \leq t_1 g(y_1) + t_2 g(y_2)$$

$a_1, a_2 \in I$  e  $y_1, y_2 \in J$ .

Pelo fato de  $g$  ser não-decrescente ela preserva a desigualdade, então

$$g(f(t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2)) \leq g(\underbrace{t_1 f(a_1)}_{y_1} + \underbrace{t_2 f(a_2)}_{y_2}) = g(t_1 \cdot y_1 + t_2 \cdot y_2) \leq t_1 g(y_1) + t_2 g(y_2)$$

logo

$$g(f(t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2)) \leq t_1 g(f(a_1)) + t_2 g(f(a_2))$$

logo  $g \circ f$  é convexa.

**Demonstração.**[2] Supondo  $f$  e  $g$  duas vezes deriváveis vale  $g''(x) \geq 0$ ,  $f''(x) \geq 0$  e  $g'(y) \geq 0$  as duas primeiras por serem funções convexas e a última desigualdade por  $g$  ser não-decrescente, então

$$(g \circ f)(x)' = f'(x)g'(f(x)).$$

$$(g \circ f)(x)'' = \underbrace{f''(x)}_{\geq 0} \underbrace{g'(f(x))}_{\geq 0} + \underbrace{(f'(x))^2}_{\geq 0} \underbrace{g''(f(x))}_{\geq 0} \geq 0$$

portanto  $g \circ f$  é convexa.

**Exemplo 61.** Se  $g$  não é monótona não-decrescente, então  $g \circ f$  pode não ser convexa, como por exemplo, tomando  $g(x) = -x$  que é convexa,  $f(x) = x^2$  daí  $g(f(x)) = -x^2$  que não é convexa.

**Questão 2**

**Propriedade 217.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  possui ponto crítico não degenerado  $c \in \text{int}(I)$  e  $f''$  é contínua, então existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é convexa ou côncava em  $(c - \delta, c + \delta)$ .

**Demonstração.** Se o ponto crítico  $c$  é não degenerado então  $f''(c) > 0$  ou  $f''(c) < 0$  pela continuidade de  $f''$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in (c - \delta, c + \delta)$  implica  $f''(x) > 0$  ou  $f''(x) < 0$ , portanto  $f$  é convexa ou côncava em tal intervalo, respectivamente.

**Questão 3**

**Propriedade 218.** A soma de funções convexas é uma função convexa .

**Demonstração.** Temos que mostrar que

$$(f + g)(t_1 a_1 + t_2 a_2) \leq t_1(f + g)(a_1) + t_2(f + g)(a_2)$$

onde  $t_1 + t_2 = 1$ .

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2) + g(t_1 a_1 + t_2 a_2) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + t_1 g(a_1) + t_2 g(a_2) = t_1(f + g)(a_1) + t_2(f + g)(a_2) \quad \square.$$

**Exemplo 62.** O produto de funções convexas pode não resultar numa função convexa.

Por exemplo  $f(x) = x^2 - 1$  e  $g(x) = x^2$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  são convexas, porém seu produto  $p(x) = x^4 - x^2$  não é convexa, pois  $p'(x) = 4x^3 - 2x$ ,  $p''(x) = 12x^2 - 2$ , em  $x = 0$  o resultado é negativo, se ela fosse convexa deveria resultar um valor não negativo.

**Questão 4**

**Propriedade 219.** Toda função convexa é quase-convexa e toda função côncava é quase côncava.

**Demonstração.** Sejam  $f$  convexa e  $A = \{x \in I \mid f(x) \leq c\}$  dados  $x, y \in A$  e  $z \in [x, y]$  tem-se  $z = t_1 x + t_2 y$  com  $t_1 + t_2 = 1$  então

$$f(z) = f(t_1 x + t_2 y) \leq t_1 f(x) + t_2 f(y) \leq (t_1 + t_2)c = c$$

portanto  $f(z) \leq c$  e  $A$  é um intervalo, isso prova que  $f$  é quase-convexa.



Sejam  $f$  côncava e  $B = \{x \in I \mid f(x) \geq c\}$  dados  $x, y \in B$  e  $z \in [x, y]$  tem-se  $z = t_1x + t_2y$  com  $t_1 + t_2 = 1$  então

$$f(z) = f(t_1x + t_2y) \geq t_1f(x) + t_2f(y) \geq (t_1 + t_2)c = c$$

portanto  $f(z) \geq c$  e  $B$  é um intervalo, isso prova que  $f$  é quase-côncava.

**Propriedade 220.** Toda função monótona é ao mesmo tempo quase-convexa e quase-côncava.

**Demonstração.** Sejam  $f$  monótona não-decrescente e  $A = \{x \in I \mid f(x) \leq c\}$  dado  $x, y \in A$  e  $z \in [x, y]$  vale  $f(z) \leq f(y) \leq c$  portanto  $z \in A$ .  $A$  é intervalo portanto  $f$  é quase-convexa.

Da mesma forma, seja  $B = \{x \in I \mid f(x) \geq c\}$  dados  $x, y \in B$  e  $z \in [x, y]$ ,  $c \leq f(x) \leq f(z)$  portanto  $c \leq f(z)$  e  $B$  é um intervalo, portanto  $f$  é quase-côncava.

Sejam  $f$  monótona não-crescente e  $A = \{x \in I \mid f(x) \leq c\}$  dado  $x, y \in A$  e  $z \in [x, y]$  vale  $f(z) \leq f(x) \leq c$  portanto  $z \in A$ .  $A$  é intervalo portanto  $f$  é quase-convexa.

Da mesma forma, seja  $B = \{x \in I \mid f(x) \geq c\}$  dados  $x, y \in B$  e  $z \in [x, y]$ ,  $c \leq f(y) \leq f(z)$  portanto  $c \leq f(z)$  e  $B$  é um intervalo, portanto  $f$  é quase-côncava.

### Questão 5

**Propriedade 221.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é quase-convexa  $\Leftrightarrow x, y \in I$  e  $t \in [0, 1]$  vale

$$f(t_1x + t_2y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

onde  $t_1 = 1 - t, t_2 = t$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$  .) Suponha  $f$  quase-convexa, então definimos  $c = \max\{f(x), f(y)\}$  como  $A = \{x \in I \mid f(x) \leq c\}$  é um intervalo, então para qualquer  $z$  entre  $x$  e  $y$  tem-se  $f(z) \leq c$ , porém, todo  $z$  dessa forma pode ser escrito como  $z = t_1x + t_2y$  daí

$$f(t_1x + t_2y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

$\Leftarrow$  .) Sejam  $x, y \in A = \{x \in I \mid f(x) \leq c\}$  então  $A$  é intervalo pois dado  $z$  entre  $x$  e  $y$  tem-se  $z = t_1x + t_2y$  e vale

$$f(t_1x + t_2y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq c$$

portanto  $A$  é um intervalo.

**Propriedade 222.**  $f : I \rightarrow R$  é quase-côncava  $\Leftrightarrow x, y \in I$  e  $t \in [0, 1]$  vale

$$f(t_1x + t_2y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

onde  $t_1 = 1 - t, t_2 = t$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$  .) Suponha  $f$  quase-côncava, então definimos  $c = \max\{f(x), f(y)\}$  como  $B = \{x \in I \mid f(x) \geq c\}$  é um intervalo, então para qualquer  $z$  entre  $x$  e  $y$  tem-se  $f(z) \geq c$ , porém, todo  $z$  dessa forma pode ser escrito como  $z = t_1x + t_2y$  daí

$$f(t_1x + t_2y) \geq \max\{f(x), f(y)\}.$$

$\Leftarrow$  .) Sejam  $x, y \in B = \{x \in I \mid f(x) \geq c\}$  então  $A$  é intervalo pois dado  $z$  entre  $x$  e  $y$  tem-se  $z = t_1x + t_2y$  e vale

$$f(t_1x + t_2y) \geq \max\{f(x), f(y)\} \geq c$$

portanto  $B$  é um intervalo.

### Questão 6

**Propriedade 223.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  contínua, quase-convexa, cujo valor mínimo é atingido em  $c \in [a, b]$ .

- Se  $c = a$  então  $f$  é não-decrescente.
- Se  $c = b$  então  $f$  é não-crescente.

**Demonstração.**

- Mínimo em  $a$ . Dados  $x < y$  em  $[a, b]$  temos  $x \in [a, y]$  daí

$$f(x) \leq \max\{f(a), f(y)\} = f(y)$$

logo  $f$  é não-decrescente.

- Mínimo em  $b$ . Dados  $y < x$  em  $[a, b]$  temos  $x \in [y, b]$  daí

$$f(x) \leq \max\{f(b), f(y)\} = f(y)$$

logo  $f$  é não-crescente.

**Corolário 32.** Se  $f$  é quase-convexa e atinge mínimo em  $c \in (a, b)$  então  $f$  é não-crescente em  $[a, c]$  e não-decrescente em  $[c, b]$ , basta considerar as restrições a esses conjuntos e aplicar a propriedade anterior.

**Propriedade 224.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  contínua, quase-côncava, cujo valor mínimo é atingido em  $c \in [a, b]$ .

- Se  $c = a$  então  $f$  é não-crescente.
- Se  $c = b$  então  $f$  é não-decrescente.

**Demonstração.**

- Mínimo em  $a$ . Dados  $x < y$  em  $[a, b]$  temos  $x \in [a, y]$  daí

$$f(x) \geq \max\{f(a), f(y)\} = f(y)$$

logo  $f$  é não-crescente.

- Mínimo em  $b$ . Dados  $y < x$  em  $[a, b]$  temos  $x \in [y, b]$  daí

$$f(x) \geq \max\{f(b), f(y)\} = f(y)$$

logo  $f$  é não-decrescente.

**Corolário 33.** Se  $f$  é quase-côncava e atinge mínimo em  $c \in (a, b)$  então  $f$  é não-decrescente em  $[a, c]$  e não-crescente em  $[c, b]$ , basta considerar as restrições a esses conjuntos e aplicar a propriedade anterior.

**Propriedade 225.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  contínua.  $f$  é quase-convexa  $\Leftrightarrow$  existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f$  é não-crescente em  $[a, c]$  e não decrescente em  $[c, b]$ .

**Demonstração.**  $f$  é contínua num conjunto compacto  $[a, b]$  então  $f$  assume máximo e mínimo, digamos mínimo em  $c \in [a, b]$ .

$\Rightarrow$ ).  $f$  é quase-convexa daí  $f$  é não-crescente em  $[a, c]$  e não decrescente em  $[c, b]$  por resultado já demonstrado.

$\Leftarrow$ .) Seja  $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq l\}$ , vamos mostrar que tal conjunto é um intervalo, dados  $x, y \in A$  se  $x < z < y \in [a, c]$  nesse intervalo a função é não-crescente, logo

$f(y) \leq f(z) \leq f(x) \leq l$ . Se  $x < z < y \in [c, b]$ , nesse intervalo a função é não-decrescente portanto

$$f(x) \leq f(z) \leq f(y) \leq l$$

No último caso  $x \in [a, c]$  e  $y \in [c, b]$ ,  $f(c)$  é mínimo então  $f(c) \leq f(x) \leq l$  e  $f(c) \leq f(y) \leq l$  pois  $c$  é ponto de mínimo, se  $z = c$  a propriedade vale, se  $z \neq c$  então  $z$  pertence a um dos intervalos  $(c, b)$  ou  $(a, c)$  daí a propriedade recai nos casos já demonstrados.

### Questão 7

**Propriedade 226.** Para cada  $n \in N$  seja  $f_n : I \rightarrow R$  uma função convexa tal que  $\forall x \in I$   $(f_n(x))$  seja convergente, então  $f : I \rightarrow R$  definida como  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  é convexa. O mesmo vale para funções côncavas, quase-côncavas e quase-convexas.

#### Demonstração.

1. Caso de funções convexas. Para cada  $n$  vale a desigualdade

$$f_n(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f_n(x_1) + t_2f_n(x_2)$$

como o limite preserva a desigualdade, na passagem do limites temos

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$

logo  $f$  é convexa.

2. Caso de funções côncavas. Usamos procedimento similar a das funções convexas. Para cada  $n$  vale a desigualdade

$$f_n(t_1x_1 + t_2x_2) \geq t_1f_n(x_1) + t_2f_n(x_2)$$

como o limite preserva a desigualdade, na passagem do limites temos

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$$

3. Caso de funções quase-convexas. Para cada  $n$  vale a desigualdade

$$f_n(t_1x_1 + t_2x_2) \leq \max\{f_n(x_1), f_n(x_2)\} = \frac{f_n(x_1) + f_n(x_2) + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|}{2}$$

novamente a passagem do limite implica

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + |f(x_1) - f(x_2)|}{2} = \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

4. Finalmente para funções quase-côncavas. Para cada  $n$  vale a desigualdade

$$f_n(t_1x_1 + t_2x_2) \geq \max\{f_n(x_1), f_n(x_2)\} = \frac{f_n(x_1) + f_n(x_2) + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|}{2}$$

novamente a passagem do limite implica

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + |f(x_1) - f(x_2)|}{2} = \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

### Questão 8

**Propriedade 227.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e convexa tal que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Então existe um único  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Demonstração.** Existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$  pelo fato de  $f$  ser contínua. Suponha  $a < c_1 < c_2 < b$  com  $f(c_1) = f(c_2) = 0$ . Tomamos o intervalo  $[a, c_2]$  podemos escrever  $c_1 = t_1a + t_2c_2$  e usando a propriedade de  $f$  ser convexa, segue que

$$0 = f(c_1) \leq t_1f(a) + t_2f(c_2) = t_1f(a)$$

daí teríamos  $f(a) > 0$  o que é absurdo, então existe um único  $c$  com tal propriedade.

### 1.10.3 Aproximações sucessivas e método de Newton

#### Questão 1

**Propriedade 228.** Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I = [a - \delta, a + \delta]$  tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|$$

com  $c \in [0, 1)$ . Se  $|f(a) - a| \leq (1 - c)\delta$  então existe um único  $x \in I$  com  $f(x) = x$ .

#### Demonstração.

$f$  é contração,  $I$  é fechado, para que possamos usar o teorema do ponto fixo de contrações basta mostrar que  $f(I) \subset I$ , isto é,  $x \in I$  implica  $f(x) \in I$ .

Se  $x \in I = [a - \delta, a + \delta]$  então  $|x - a| \leq \delta$ , o que implica por desigualdade triangular

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \leq c|x - a| + (1 - c)\delta \leq c\delta + (1 - c)\delta = \delta$$

portanto  $f(x)$  pertence ao intervalo  $[a - \delta, a + \delta] = I$  e podemos usar o teorema do ponto fixo das contrações, daí  $f$  possui um único ponto fixo.

**Questão 2**

**Exemplo 63.** Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $f(x) = 2^{-\frac{x}{2}}$ .  $f$  é uma contração.

Derivando a função temos  $f'(x) = \frac{-\ln(2)2^{-\frac{x}{2}}}{2}$  e vale  $|f'(x)| \leq 1$ ,  $2^0 = 1$ ,  $2^{\frac{x}{2}}$  é crescente, portanto

$$\frac{\ln(2)}{2} < 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow |f'(x)| = \frac{\ln(2)}{2 \cdot 2^{\frac{x}{2}}} < 1$$

portanto  $f$  é contração definida num conjunto fechado e com contradomínio igual ao domínio, portanto podemos aplicar o teorema do ponto fixo, que nos garante que tal função possui apenas um ponto fixo  $a$ , valendo

$$2^{-\frac{a}{2}} = a \Rightarrow 2^{-a} = a^2$$

$-a$  é raiz negativa da equação  $2^x = x^2$ . Agora utilizamos o método das aproximações sucessivas para obter o valor de  $a$  com 8 algarismos decimais exatos, tomamos  $x_0 = 0$

$$x_1 = 2^{-\frac{0}{2}} = 1$$

$$x_2 = 2^{-\frac{1}{2}} \approx 0,70710678$$

$$x_3 = 2^{-\frac{x_2}{2}} \approx 0,78265402$$

$$x_4 = 2^{-\frac{x_3}{2}} \approx 0,76247990$$

$$x_5 = 2^{-\frac{x_4}{2}} \approx 0,76779123$$

$$x_6 = 2^{-\frac{x_5}{2}} \approx 0,76636542$$

$$x_7 = 2^{-\frac{x_6}{2}} \approx 0,76674421$$

$$x_8 = 2^{-\frac{x_7}{2}} \approx 0,76664356$$

$$x_9 = 2^{-\frac{x_8}{2}} \approx 0,76667031$$

$$x_{10} = 2^{-\frac{x_9}{2}} \approx 0,76666320$$

$$x_{11} = 2^{-\frac{x_{10}}{2}} \approx 0,76666509$$

$$x_{12} = 2^{-\frac{x_{11}}{2}} \approx 0,76666459$$

$$x_{13} = 2^{-\frac{x_{12}}{2}} \approx 0,76666472$$

$$x_{14} = 2^{-\frac{x_{13}}{2}} \approx 0,76666469$$

o valor com 8 algarismos decimais exatos é 0,76666469, observe que precisamos de bastante iterações para chegar nesse valor, apesar de termos tomado uma condição inicial próxima. As contas foram feitas no site wolfram alpha (<http://www.wolframalpha.com>).

### Questão 3

**Propriedade 229.** Seja  $I = [a - \delta, a + \delta]$ . Se  $f : I \rightarrow R$  é  $C^2$  com

$$f'(x) \neq 0, \left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| \leq c < 1 \quad \forall x \in I$$

e  $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| \leq (1 - c)\delta$  então independente do valor inicial  $x_0 \in I$  o método de Newton converge para a única raiz  $x \in I$  de  $f(x) = 0$ .

**Demonstração.** Primeiro vamos mostrar que  $N : I \rightarrow R$  com  $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  é contração. Derivando temos  $N'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$  logo pelo TVM temos que

$$|N(y) - N(x)| \leq c|y - x| \leq c\delta$$

Portanto  $N$  é contração,  $I$  é fechado, falta mostrar que  $N(I) \subset I$ . Temos também que  $N(a) - a = \frac{f(a)}{f'(a)}$  portanto  $|N(a) - a| = \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| \leq (1 - c)\delta$  que iremos usar na próxima desigualdade. Dado  $x \in I$ , por desigualdade triangular temos

$$|N(x) - a| \leq |N(x) - N(a)| + |N(a) - a| \leq c\delta + (1 - c)\delta = \delta$$

portanto  $N(x) \in I$ , assim  $N$  satisfaz todas condições necessárias para aplicação do teorema do ponto fixo, portanto o método de Newton converge para a única raiz de  $f$ , pois se houvesse mais uma  $N$  teria mais de um ponto fixo.

### Questão 4

**Propriedade 230.** Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow R$  com  $f(x) = \frac{1}{a + x}$ ,  $a > 1$ .

Dado  $x_0 > 0$  fixo, a sequência definida como  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge para a raiz positiva da equação  $x^2 + ax - 1 = 0$ .

**Demonstração.** Usaremos o método de Newton. Vale  $f'(x) = \frac{-1}{(a+x)^2}$ ,

$$1 < a \Rightarrow a < a^2 \Rightarrow a < a^2 + \underbrace{2ax}_{\geq 0} + \underbrace{x^2}_{\geq 0} = (a+x)^2 \Rightarrow$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{(a+x)^2} \leq \frac{1}{a} < 1.$$

Portanto  $f$  é contração. Vale também que  $[0, \infty)$  é fechado e  $f(x) \in [0, \infty)$ . Daí podemos aplicar o teorema do ponto fixo. Existe um único valor  $c$  tal que  $c = \frac{1}{a+c} \Rightarrow c^2 + ac - 1 = 0$ . Tal valor não pode ser negativo, pois a sequência é de valores positivos.

### Questão 5

**Exemplo 64.** Mostre que 1,0754 é um valor aproximado com 4 algarismos exatos da raiz positiva da equação  $x^6 + 6x - 8 = 0$ .

Tomamos  $f(x) = x^6 + 6x - 8$ , vale  $f'(x) = 6x^5 + 6$  que possui sua única raiz real em  $-1$ . Observamos que  $f(1) = -1$  e  $f(2) > 0$ , logo existe raiz em  $[1, 2]$  por continuidade de  $f$ , aplicamos o método de Newton com  $x_0 = 1$ .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 + 6x_n - 8}{6x_n^5 + 6}$$

$$x_1 = 1,083$$

$$x_2 = 1,07554$$

$$x_3 = 1,0754$$

no terceiro termo, já conseguimos uma aproximação com 4 dígitos, o método de Newton converge "rápido".

### Questão 6

**Propriedade 231.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, duas vezes derivável. Se  $f(a) < 0 < f(b)$  então para qualquer condição inicial  $x_0 \in [a, b]$  com  $f(x_0) > 0$  o método de Newton converge sempre para a única raiz  $x \in [a, b]$  da equação  $f(x) = 0$ .



**Demonstração.** Como  $f(a) < 0 < f(b)$  e  $f$  é contínua então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ , portanto  $f$  possui raiz.

Vamos mostrar que a sequência  $(x_n)$  obtida com o método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge para uma raiz de  $f$ , sendo que a condição inicial  $f(x_0) > 0$ . Como  $f$  é duas vezes derivável então  $f$  e  $f'$  são contínuas se  $x_n \rightarrow c$  então de  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  temos pela passagem do limite e usando a continuidade que

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)} \Rightarrow \frac{f(c)}{f'(c)} = 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

portanto o limite da sequência é a raiz.

A função  $f$  é contínua definida num compacto logo ela possui um mínimo, esse mínimo é único e global pelo fato de  $f$  ser convexa, o mínimo é alcançado em  $t \in [a, b]$ , nesse ponto de mínimo a função deve assumir valor negativo pois vale  $f(a) < 0$ , no intervalo  $[a, t]$  a função é não-crescente e no intervalo  $[t, b]$  a função é não-decrescente, portanto  $x_0 \in [t, b]$ , pois  $f(x_0) > 0$ . Por  $f$  ser convexa e duas vezes derivável vale que  $f''(x) \geq 0$  portanto  $f'(x)$  é não-decrescente em  $[t, b]$  tem-se  $f'(x) > 0$ .

Vamos provar por indução que  $f(x_n) \geq 0 \forall n$ . Para  $n = 0$  o resultado vale, agora supondo  $f(x_n) \geq 0$  vamos provar que  $f(x_{n+1}) \geq 0$ .

Pela recorrência do método de Newton vale que  $x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$ , pela função ser convexa tem-se que seu gráfico está sempre acima dos pontos da tangente  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \forall x, a$  disso segue que tomando  $x = x_{n+1}$  e  $a = x_n$  tem-se

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_n) - f(x_n) = 0$$

portanto vale que  $f(x_n) \geq 0 \forall n$  por indução. Como  $f(x_n) \geq 0$  segue que  $f'(x_n) \geq 0$  pois os pontos  $x_n$  pertencem todos ao intervalo  $[c, b]$  onde a função é não-decrescente. Como vale  $x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} \leq 0$  então  $(x_n)$  é não decrescente, como ela é limitada inferiormente, então ela converge, e converge para a raiz da função. Notamos que não precisamos nos preocupar com  $f'(x_n) = 0$  pois  $x_n \in [c, b]$  o único ponto em que a derivada se anula é no mínimo global  $t$ , que está fora desse intervalo.

## Questão 7

**Exemplo 65** (Cálculo aproximado de  $a^{\frac{1}{p}}$ ). Dados  $a > 0, p \in \mathbb{N}$  consideramos o intervalo  $I = [a^{\frac{1}{p}}, \infty)$  a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = x^p - a$ . Vale  $f'(x) = px^{p-1}$  a função de

Newton  $N : I \rightarrow R$  satisfaz

$$N(x) = \frac{1}{p}((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}).$$

$N(x)$  é a média aritmética dos  $p$  números  $\overbrace{(x, \dots, x, \frac{a}{x^{p-1}})}^p$ . Da desigualdade entre média aritmética e geométrica ( $M.A \geq M.G$ ) tem-se

$$N(x) \geq (x^{p-1} \frac{a}{x^{p-1}})^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}}$$

daí  $x \in I \Rightarrow N(x) \in I$ . Seja  $(x_n)$  com  $x_{n+1} = N(x_n)$  vale que

$$x_n > a^{\frac{1}{p}} \Rightarrow x_n^{p-1} > a^{\frac{p-1}{p}} = \frac{a}{a^{\frac{1}{p}}}$$

onde usamos racionalização, daí

$$a^{\frac{1}{p}} > \frac{a}{x_n^{p-1}}$$

portanto vale

$$\frac{a}{x_n^{p-1}} < a^{\frac{1}{p}} < x_n$$

a média aritmética dos números  $\overbrace{(x_n, \dots, x_n, \frac{a}{x_n^{p-1}})}^p$  deve estar entre  $x_n$  e  $\frac{a}{x_n^{p-1}}$ , mas tal média é  $N(x_n) = x_{n+1}$ , daí segue que  $x_{n+1} < x_n$  e a sequência é decrescente.

## 1.11 Capítulo 10-A integral de Riemann

### 1.11.1 Integral de Riemann

#### Questão 1

**Exemplo 66.** Seja  $f[0, 1] \rightarrow R$  com  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{2^n}$  se  $x \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ ,  $n \in N \cup \{0\}$ , então  $f$  é integrável.

Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $t \in N$  tal que  $\frac{1}{2^t} < \frac{\varepsilon}{2}$  a restrição  $f_1$  de  $f$  ao intervalo  $[\frac{1}{2^t}, 1]$  é uma função escada, logo é integrável, portanto existe uma partição  $P_1$  de tal intervalo com

$$S(f_1, P_1) - s(f_1, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja a partição  $P = P_1 \cup \{0\}$  de  $[0, 1]$ , tem-se

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta t_{k-1} = \frac{1}{(2^t)^2} + S(f_1, P_1), \quad M_1 = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2^t}]} f = \frac{1}{2^t}, \quad \Delta T_0 = \frac{1}{2^t}$$

$$s(f, P) = s(f_1, p_1), \quad m_1 = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2^t}]} f = 0$$

logo

$$S(f, P) - s(f, p) = S(f_1, P_1) - s(f_1, p_1) + \frac{1}{(2^t)^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

logo a função é integrável .

Para calcular o valor da integral, calculamos o limite da soma

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \left( \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2 \cdot 4^k} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

## Questão 2

**Propriedade 232.** Seja  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Se  $f$  é ímpar então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Se  $f$  é par então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

**Demonstração.**[1] Suponha  $f$  ímpar

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx =$$

por mudança de variável temos que

$$= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a -f(x) dx = 0.$$

Suponha  $f$  par

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx =$$

por mudança de variável temos que

$$= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

**Demonstração.**[2] Suponha  $f$  ímpar. Vamos provar que  $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ .  
Seja  $P$  uma partição de  $[0, a]$  com pontos  $t_0, t_1, \dots, t_n$  então temos

$$t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = a$$

correspondendo a uma partição  $P'$  com pontos  $t'_0, t'_1, \dots, t'_n$  de  $[-a, 0]$  da seguinte maneira

$$t'_n = -t_0 = 0, t'_{n-1} = -t_1, \dots, t'_0 = -t_n = -a$$

como temos cada  $0 \leq t_k \leq a$  então  $-a \leq -t_k \leq 0$ . Vale ainda que  $f(-x) = -f(x)$ .  
Dado um  $k$ -ésimo intervalo de  $P$ ,  $[t_{k-1}, t_k]$  temos uma correspondência com um intervalo de  $P'$ ,

$$[-t_k, -t_{k-1}] = [t'_{n-k}, t'_{n-k+1}],$$

na partição  $P$ , temos o supremo no intervalo  $M_k$  e o ínfimo  $m_k$ , por propriedade de supremo e ínfimo temos os correspondentes no intervalo de  $P'$

$$\sup -f(x) = -\inf f(x) = -m_k = M'_{n-k}$$

$$\inf -f(x) = -\sup f(x) = -M_k = m'_{n-k}$$

com isso calculamos a soma inferior e superior relativa a partição  $P'$

$$\begin{aligned} S(f, P') &= \sum_{k=1}^n M'_k \Delta t'_{k-1} = \sum_{k=1}^n M'_{n+1-k} (t'_{n+1-k} - t'_{n-k}) = \\ &= \sum_{k=1}^n -m_{n+1-k} (-t_{k-1} + t_k) = -s(f, p), \end{aligned}$$

de maneira similar

$$\begin{aligned} s(f, P') &= \sum_{k=1}^n m'_k \Delta t'_{k-1} = \sum_{k=1}^n m'_{n+1-k} (t'_{n+1-k} - t'_{n-k}) = \\ &= \sum_{k=1}^n -M_{n+1-k} (-t_{k-1} + t_k) = -S(f, p), \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \inf_P S(f, P') &= \inf_P (-s(f, P)) = -\sup_P s(f, P) = -\int_0^a f(x)dx \\ \sup_P s(f, P') &= \sup_P (-S(f, P)) = -\inf_P S(f, P) = -\int_0^a f(x)dx \end{aligned}$$

logo vale  $\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx$ .

Para  $f$  par vamos mostrar que  $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ . Tomamos a mesma partição associada  $P'$ , porém agora o ínfimo e supremo são diferentes do caso anterior, pois  $f(-x) = f(x)$ , logo vale  $M_k = M'_{n-k}$  e  $m_k = m'_{n-k}$ , daí as somas ficam como

$$\begin{aligned} S(f, P') &= \sum_{k=1}^n M'_k \Delta t'_{k-1} = \sum_{k=1}^n M'_{n+1-k} (t'_{n+1-k} - t'_{n-k}) = \\ &= \sum_{k=1}^n M_{n+1-k} (-t_{k-1} + t'_k) = S(f, p), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s(f, P') &= \sum_{k=1}^n m'_k \Delta t'_{k-1} = \sum_{k=1}^n m'_{n+1-k} (t'_{n+1-k} - t'_{n-k}) = \\ &= \sum_{k=1}^n m_{n+1-k} (-t_{k-1} + t_k) = s(f, p), \end{aligned}$$

portanto  $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ .

### Questão 3

**Exemplo 67.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = 0$  se  $x$  é irracional,  $f(x) = \frac{1}{q}$  se  $x = \frac{p}{q}$  irredutível com  $q > 0$ ,  $f(0) = 1$  caso  $0 \in [a, b]$ . Nessas condições  $f$  é contínua nos irracionais, descontínua nos racionais e integrável com

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

$f$  é descontínua nos racionais. Tome um racional  $\frac{p}{q}$ , vale  $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \neq 0$ . Existe uma sequência de irracionais  $x_n \rightarrow \frac{p}{q}$ , vale

$$f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim f(x_n) = 0 \neq \frac{1}{q}$$

logo  $f$  é descontínua nos racionais.

Seja  $(x_n)$  sequência de número reais tal que  $\lim x_n = a$  irracional, vamos mostrar que  $\lim f(x_n) = f(a) = 0$ .

$x_n \in (a - \delta, a + \delta)$ , se  $x_n$  é irracional vale  $f(x_n) = 0$ , se  $x_n$  é racional ele é da forma  $x_n = \frac{p}{q}$ . O conjunto dos  $q$  tais que  $\varepsilon \leq \frac{1}{q}$  é finito então podemos tomar o intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  contendo nenhum ponto  $x$  racional tal que  $f(x) \geq \varepsilon$ , portanto vale  $0 \geq f(x_n) < \varepsilon$ , daí  $\lim f(x_n) = 0$ ,  $f$  é contínua nos irracionais.

Vale que  $s(f, P) = 0$  para qualquer partição  $P$ , pois todo intervalo não-degenerado contém números irracionais, logo o ínfimo em qualquer desses intervalos  $m_k = 0$ , daí

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Agora iremos mostrar que a integral superior é nula. Dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, seja  $F = \{x_1, \dots, x_t\}$  o conjunto dos pontos de  $[a, b]$  para os quais tem-se  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f(x_k)$ . Com centro em cada  $x_k$  tomamos  $t$  intervalos dois a dois disjuntos com comprimento menor que  $\frac{\varepsilon}{M2t}$  onde  $M = \sup_{x \in [a, b]} f$ , daí completamos uma partição  $P$  com  $s$  intervalos onde  $M_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ , pois os pontos que assumem valores maiores que esse estão em outros intervalos, então dividimos a soma da partição em duas como se segue

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{k=1}^t M_k \underbrace{\Delta t_{k-1}}_{\leq \frac{\varepsilon}{M2t}} + \sum_{k=1}^s \underbrace{M_k}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta y_{k-1} \leq \frac{\varepsilon}{2tM} \underbrace{\sum_{k=1}^t M_k}_{\leq tM} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^s \Delta y_{k-1} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(y_s - y_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a integral superior também é nula e a integral existe e vale zero.

#### Questão 4

**Propriedade 233.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável com  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ . Se  $f$  é contínua em  $c \in [a, b]$  com  $f(c) > 0$  então

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

**Demonstração.**[1] Existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in [c - \delta, c + \delta] \Rightarrow f(x) > 0$ , pela continuidade de  $f$ , portanto

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{c-\delta} f(x)dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx}_{> 0} + \underbrace{\int_{c+\delta}^b f(x)dx}_{\geq 0} > 0$$

**Demonstração.**[2] Seja  $m = \frac{f(c)}{2}$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > m$  para todo  $x \in [c - \delta, c + \delta]$  por continuidade no ponto  $c$ , tomamos partições que contenham os pontos  $c - \delta$  e  $c + \delta$ , logo existe  $s$  tal que  $t_{s-1} = c - \delta$ ,  $t_s = c + \delta$ ,

$$m_s = \inf_{f \in [c-\delta, c+\delta]} f \geq m > 0$$

pois o ínfimo é a maior das cotas inferiores, logo

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{s-1} \underbrace{m_k}_{\geq 0} \underbrace{\Delta t_{k-1}}_{> 0} + \underbrace{m_s}_{\geq m} \underbrace{\Delta t_{s-1}}_{\geq 2\delta} + \sum_{k=s+1}^n \underbrace{m_k}_{\geq 0} \underbrace{\Delta t_{k-1}}_{> 0} \geq m(c + \delta - c + \delta) = 2m\delta,$$

como  $f$  é integrável temos

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_p s(f, p) \geq s(f, p) \geq 2m\delta > 0$$

logo a integral é positiva.

### Questão 5

**Exemplo 68.** Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow R$ ,  $g$  integrável e  $f$  com  $f(x) = g(x)$  se  $x$  é racional,  $f(x) = g(x) + 1$  para  $x$  irracional. Calcule a integral inferior e superior de  $f$  em função de  $g$ .

Vale que  $M_{k_f} = M_{k_g} + 1$  e  $m_{k_f} = m_{k_g}$ , daí para uma partição qualquer  $P$  tem-se

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_{k_f} \Delta t_{k-1} = \sum_{k=1}^n M_{k_g} \Delta t_{k-1} + \sum_{k=1}^n \Delta t_{k-1} = S(g, P) + b - a$$

$$s(f, P) = s(g, P)$$

Disso segue

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b g(x)dx + b - a.$$

### 1.11.2 Propriedades da integral

#### Questão 1

**Propriedade 234.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  integrável. Prove que  $g : [a, b] \rightarrow R$  com  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$  é lipschitziana.

**Demonstração.** Como  $f$  é integrável, então  $f$  é limitada, existindo  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M \forall x$ . Daí temos que

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \int_x^y Mdt \leq M|y - x| \end{aligned}$$

portanto  $f$  é lipschitziana e uniformemente contínua. Em especial se  $M < 1$   $g$  é uma contração.

#### Questão 2

**Propriedade 235.** Se  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  são integráveis então também são integráveis as funções

- $h : [a, b] \rightarrow R$  com  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ .
- $T : [a, b] \rightarrow R$  com  $T(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ .
- $f_+ : [a, b] \rightarrow R$  com  $f_+(x) = 0$  se  $f(x) \leq 0$ ,  $f_+(x) = f(x)$  se  $f(x) > 0$ .
- $f_- : [a, b] \rightarrow R$  com  $f_-(x) = 0$  se  $f(x) \geq 0$ ,  $f_-(x) = -f(x)$  se  $f(x) < 0$ .

**Demonstração.**

- Vale que  $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$ , daí  $\max\{f(x), g(x)\}$  é integrável pois o valor absoluto é integrável.
- Da mesma maneira que o item anterior  $\min(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$ , logo o mínimo é integrável.
- Vale que  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ , pois se  $f(x) > 0$   $f_+(x) = f(x)$  se  $f(x) \leq 0$  então  $f_+(x) = 0$ , portanto pelo primeiro item segue que  $f_+$  é integrável.



- Vale que  $f_-(x) = \min\{-f(x), 0\}$ , pois se  $-f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < 0$  e  $f_-(x) = -f(x)$  se  $-f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$  então  $f_-(x) = 0$ , portanto pelo segundo item segue que  $f_+$  é integrável.

### Questão 3

**Definição 13** (Produto interno em  $R$ ). Seja  $V$  um espaço vetorial real, um produto interno sobre  $V$  é uma função que associa a cada par de vetores  $v, w$  de  $V$  um número real  $\langle v, w \rangle$ , satisfazendo as propriedades

1. Positividade .  $\langle v, v \rangle \geq 0$  e  $\langle v, v \rangle = 0$  sse  $v = 0$ .
2. Linearidade .  $\langle av + bw, u \rangle = a\langle v, u \rangle + b\langle w, u \rangle$ .
3. Simetria .  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ .

$\forall v, w, u$  vetores de  $V$  e  $a, b$  números reais.

**Definição 14.** Seja  $V$  um espaço com produto interno  $\langle, \rangle$ , definimos a norma (ou comprimento) de um vetor  $v$  em relação a esse produto interno por

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

**Propriedade 236** (Desigualdade de Schwarz).

$$\|w\| \|v\| \geq |\langle v, w \rangle|.$$

**Demonstração.** Para  $v = 0$  vale a igualdade, pois  $\|v\| = 0$  e  $\langle 0, w \rangle = 0$ , então seja  $v \neq 0$ , para qualquer  $t$  real vale

$$\langle tv + w, tv + w \rangle \geq 0$$

logo

$$t^2 \langle v, v \rangle + 2t \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \geq 0$$

(tentar ver potenciação de produtos internos) como  $\langle v, v \rangle$  é sempre positivo, temos que ter o discriminante negativo, logo

$$4 \langle v, w \rangle^2 - 4 \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq 0$$

donde segue

$$\|w\| \|v\| \geq |\langle v, w \rangle|.$$

Se  $\langle v, w \rangle \geq 0$  temos

$$\|w\| \|v\| \geq \langle v, w \rangle$$

se  $\langle v, w \rangle < 0$  ainda temos

$$\|w\| \|v\| \geq \langle v, w \rangle$$

pois a norma é um número não negativo.

**Propriedade 237.** No espaço vetorial das funções contínuas em  $[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define um produto interno.

**Demonstração.** As propriedades de linearidade e simetria são decorrentes da linearidade da integral e o produto ser comutativo, falta mostrar a positividade, tal propriedade segue de: se  $f$  for não nula em ponto em  $[a, b]$  então  $\int_a^b f(x)^2 dx > 0$  por propriedade de funções contínuas, então para que o produto interno seja nulo é necessário que  $f$  seja identicamente nula.

**Corolário 34** (Desigualdade de Cauchy Schwarz para integrais). Se  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  são contínuas então pela propriedade de produto interno

$$\sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \geq \left| \int_a^b g(x)f(x)dx \right|$$

que implica, ao elevarmos ao quadrado que

$$\left[ \int_a^b g(x)f(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b g(x)^2 dx \cdot \int_a^b f(x)^2 dx.$$

**Demonstração.**[2]

Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  integráveis, então  $[f(x) + tg(x)]^2$  é integrável  $\forall t \in R$ , definimos

$$h(t) = \int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx$$

e vale  $h(t) \geq 0$ , expandindo e usando linearidade da integral temos que

$$h(t) = \underbrace{\int_a^b [f(x)]^2 dx}_c + 2 \underbrace{\int_a^b f(x)g(x)dx}_b t + \underbrace{\int_a^b [g(x)]^2 dx}_a t^2$$

uma equação de segundo grau satisfaz essa condição quando  $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ , isto é

$$\left[ \int_a^b g(x)f(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b g(x)^2 dx \cdot \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Perceba que a propriedade vale para  $f$  e  $g$  integráveis, não necessariamente contínuas, porém para ter o produto interno as funções devem ser contínuas.

### 1.11.3 Condições suficientes de integrabilidade

#### Questão 1

**Exemplo 69.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = 0$  se  $x$  é irracional,  $f(x) = \frac{1}{q}$  se  $x = \frac{p}{q}$  irredutível com  $q > 0$ ,  $f(0) = 1$  caso  $0 \in [a, b]$ .  $f$  é integrável pois  $f$  é limitada o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula, pois é  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  que é enumerável.

#### Questão 2

**Propriedade 238.** O conjunto de pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável.

**Demonstração.** Seja  $f$  não-decrescente,  $D$  o conjunto de pontos de descontinuidade da função, para cada  $a \in D$ , pelo fato de  $f$  ser monótona existem os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a_2$ , com  $a \neq b$  ponto de descontinuidade os intervalos  $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$  são disjuntos. Definimos a função  $g : D \rightarrow \mathbb{Q}$  dado  $a \in D$  tomamos um racional  $r_a \in (a_1, a_2)$  e colocamos  $f(a) = r_a$ .  $g$  é injetora com  $\mathbb{Q}$  enumerável segue que  $D$  é enumerável.

O caso de uma função  $g$  não-crescente segue de tomar  $-g$  que é não-decrescente.

**Corolário 35.** Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável (logo tem medida nula), então toda função monótona é integrável.

**Questão 3**

**Propriedade 239.** Seja  $D$  o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitada. Se  $D'$  é enumerável então  $f$  é integrável .

**Demonstração.**

$D \setminus D'$  é um conjunto de pontos isolados, portanto enumerável . Vale que  $(D \setminus D') \cup D'$  é enumerável por ser união de conjuntos enumeráveis e  $D \subset (D \setminus D') \cup D'$  ,  $D$  é subconjunto de um conjunto enumerável então  $D$  é enumerável, daí segue que  $f : [a, b] \rightarrow R$  é integrável, pois seu conjunto de pontos de descontinuidade tem medida nula.

**Questão 4**

**Propriedade 240.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitada que se anula em um conjunto de medida não nula . Se  $f$  é integrável então  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .

**Demonstração.** Em qualquer subintervalo de  $[a, b]$  o ínfimo de  $|f|$  é zero, logo

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0 = \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = 0$$

pois

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx = 0 \Rightarrow |\int_a^b f(x)dx| = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = 0.$$

**Exemplo 70.** Uma função pode se anular num conjunto de medida não nula e sua integral não existir, como a função  $f : [a, b] \rightarrow R$  com  $f(x) = 1$  se  $x$  é racional e  $f(x) = 0$  se  $x$  é irracional , pois nesse caso as somas inferiores valem 0 e as somas superiores valem 1.

**Questão 5****Questão 5-a)**

**Propriedade 241.** Se  $X$  tem conteúdo nulo então  $\overline{X}$  também.

**Demonstração.** Se  $X \subset \bigcup_{k=1}^n I_K$  então  $\overline{X} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^n I_K}$ , usamos que  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ , logo

$$\overline{X} \subset \bigcup_{k=1}^n \overline{I_K},$$

podemos tomar para cada  $I_k$  um intervalo  $J_k$  com o dobro do comprimento de  $I_k$  e mesmo centro, logo  $\overline{I_k} \subset J_k$ , pois o fecho de um intervalo aberto  $(a, b)$  só acrescenta as bordas  $a$  e  $b$ , que estão contidas num intervalo do dobro de comprimento, logo se  $\sum_{k=1}^n |I_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ , o que pode ser tomado pois  $X$  tem conteúdo nulo, vale

$$|J_k| = 2|I_k| \Rightarrow \sum_{k=1}^n |J_k| = 2 \sum_{k=1}^n |I_k| \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

logo  $\overline{X}$  tem conteúdo nulo.

### Questão 5-b)

**Corolário 36.** Um conjunto  $X$  de conteúdo nulo é limitado. Pois  $X \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$  com

$\sum_{k=1}^n |I_k| < \varepsilon$ , logo cada intervalo  $I_k$  é limitado e  $X$  também é limitado, pois está contido

num conjunto limitado  $\bigcup_{k=1}^n I_k$  (União finita de conjuntos limitados é um conjunto limitado).

**Exemplo 71.** Existem conjuntos de medida nula que não contém conteúdo nulo, basta tomar  $A$  um conjunto enumerável não limitado, ele possui medida nula porém não sendo limitado não pode ter conteúdo nulo, como exemplos podemos tomar  $Z$  e  $Q$ .

Existem ainda conjuntos limitados, de medida nula que não possuem conteúdo nulo, como é o caso de  $Q \cap [a, b]$ , pois seu fecho é  $[a, b]$  que não possui conteúdo nulo.

### Questão 5-c)

**Corolário 37.** Todo conjunto com conteúdo nulo tem medida nula.

**Propriedade 242.** Um compacto tem medida nula  $\Leftrightarrow$  tem conteúdo nulo.

**Demonstração.**

$\Rightarrow$ ).

Suponha  $X$  com medida nula, logo temos

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon,$$

como  $X$  é compacto então  $X$  admite uma subcobertura finita,

$$X \subset \bigcup_{k \in A} I_k,$$

$A$  finito, logo  $\sum_{k \in A} |I_k| < \varepsilon$  e  $x$  tem conteúdo nulo.

$\Leftrightarrow$ ). Em geral se  $X$  tem conteúdo nulo (para qualquer  $X$ , não necessariamente compacto), então  $X$  tem medida nula.

### Questão 5-d)

**Propriedade 243.** Se  $g : [a, b] \rightarrow R$  satisfaz  $g(x) = f(x)$  limitada  $\forall x \in [a, b] \setminus X$  onde  $X$  tem conteúdo nulo, então  $g$  é integrável e sua integral é igual a de  $f$ .

**Demonstração.**  $g - f : [a, b] \setminus X \rightarrow R$  é nula. Seja  $M = \sup_{x \in [a, b]} |g - f|$ . Vale que  $\inf |g - f| = 0$  em qualquer intervalo de  $[a, b]$  pois  $X$  não pode conter um intervalo, portanto sempre existe um elemento de  $[a, b] \setminus X$  em qualquer intervalo. Disso segue que qualquer soma inferior de  $|g - f|$  é nula. Dado  $\varepsilon > 0$  existem intervalos abertos  $(I_k)_1^n$  tais que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n I_k = u \text{ e } \sum_{k=1}^n |I_k| < \frac{\varepsilon}{M},$$

supondo que cada  $I_k \subset [a, b]$ , então as extremidades desses intervalos e  $a, b$  formam uma partição  $P$  de  $[a, b]$ , os intervalos dessa partição que contém os pontos de  $X$  são os  $I_k$ , logo temos a soma superior

$$S(|g-f|, P) = \sum_{\exists j \mid [t_{k-1}, t_k] = I_j} M_k \Delta t_{k-1} + \sum_{[t_{k-1}, t_k] \neq I_j, \forall j} \overbrace{M_k}^0 \Delta t_{k-1} \leq M \sum_{\exists j \mid [t_{k-1}, t_k] = I_j} \Delta t_{k-1} = M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

logo  $\int_a^b |g - f| = 0$ ,  $g - f$  é integrável e sua integral é nula, daí  $g = f + (g - f)$  é integrável e

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \square.$$

Questão 6

Questão 7

Questão 8

Questão 9

## 1.12 Capítulo 11-Cálculo com integrais.

### 1.12.1 Os teoremas clássicos do cálculo integral.

Questão 2

**Teorema 3** (Fórmula de Newton-Leibniz-FNL-TFC parte II.). Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável, então

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

onde  $g(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , isto é,  $g'(x) = f(x)$ .

**Demonstração.** Seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$ . Por hipótese temos  $g'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$  e pelo TVM para derivadas existe  $u_k \in [t_{k-1}, t_k]$  tal que  $\forall k \in I_n$  vale

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = \Delta g(t_{k-1}) = g'(u_k)(t_k - t_{k-1}) = f(u_k)\Delta t_{k-1}$$

$$\Delta g(t_{k-1}) = f(u_k)\Delta t_{k-1}$$

aplicando  $\sum_{k=1}^n$  segue

$$\sum_{k=1}^n \Delta g(t_{k-1}) = g(t_n) - g(t_0) = g(b) - g(a) = \sum_{k=1}^n f(u_k)\Delta t_{k-1}$$

vale que  $m_k \leq f(u_k) \leq M_k$ , multiplicando por  $\Delta t_{k-1}$  e somando, segue que

$$s(f, P) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n f(u_k)\Delta t_{k-1}}_{g(b)-g(a)} \leq S(f, P)$$

de onde tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

**Questão 3**

**Propriedade 244.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável com  $f'(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ .

Se  $\{x \in [a, b] \mid f'(x) = 0\}$  tem conteúdo nulo então  $f$  é crescente.

**Demonstração.** Sabemos que  $f$  é não-decrescente por propriedade de derivada. Se  $f$  não fosse crescente existiriam  $y > x$  em  $[a, b]$  com  $f(x) = f(y)$ , logo dado  $z \in (x, y)$  teríamos  $f(y) \geq f(z) \geq f(x) \Rightarrow f(y) = f(z) = f(x)$ , então  $f$  é constante em  $[x, y]$  logo  $f'(t) = 0$  nesse intervalo, que não possui conteúdo nulo.

**Questão 4**

**Corolário 38** (TVM para derivadas). Seja  $f : [a, b]$  com derivada contínua, então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$ .

Sabemos que  $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$  e pelo TVM para integrais sabemos que  $\int_a^b f'(x)dx = f'(c)(b - a)$  para alguma constante  $c \in (a, b)$  então segue

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a).$$

**Questão 5**

**Exemplo 72** (Derivada da composição). Derivar  $\int_a^{g(x)} f(t)dt = t(x)$ , onde  $f$  é contínua e  $g$  derivável. Definimos  $h(x) = \int_a^x f(t)dt$ , daí  $t(x) = h(g(x))$ , derivamos pela regra da cadeia

$$t'(x) = g'(x)h'(g(x)) = g'(x)f(g(x))$$

pois  $h'(x) = f(x)$ .

Se tivéssemos

$$t(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = \int_a^{h(x)} f(t)dt + \int_{h(x)}^a f(t)dt = \int_a^{h(x)} f(t)dt - \int_a^{h(x)} f(t)dt.$$

derivando pela regra da cadeia temos

$$t'(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x)).$$



**Questão 6**

**Exemplo 73.** Seja  $f, g$  definidas em  $[0, 1]$  da seguinte maneira.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{N}, \ \text{mdc}(p, q) = 1. \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

$g(0) = 0$  e  $g(x) = 1$  se  $x > 0$ . Ambas  $g$  e  $f$  são integráveis, porém  $g \circ f$  não é integrável, pois se  $x$  racional  $g \circ f(x) = 1$  e para  $x$  irracional  $g \circ f(x) = 0$ . A composição de funções integráveis pode não ser integrável.

As duas funções são descontínuas apenas em conjunto de medida nula,  $f$  nos racionais de  $[0, 1]$  e  $g$  em 0, logo são integráveis.

**Questão 7**

**Exemplo 74.** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada integrável,  $m = \frac{a+b}{2}$ , então vale que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) + (x-m)f'(x)dx.$$

Integramos por partes

$$\int_a^b x f'(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx$$

então o resultado da integral fica como

$$\frac{2}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx - \frac{a+b}{2} (f(b) - f(a)) + \frac{2b f(b) - 2a f(a)}{2} - \int_a^b f(x) dx \right)$$

que podemos simplificar em  $f(a) + f(b)$ .

**1.12.2 A integral como limite de somas de Riemann****Questão 1**

Alguns limites de somatórios podem ser encontrados usando a integral definida com a seguinte relação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx.$$

Considerando  $f$  integrável em  $[0, 1]$ , sendo tomada a partição pontilhada

$$P = (t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) = \left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\right)$$

em cada  $[t_{k-1}, t_k] = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$  tomando o ponto  $\frac{k}{n}$  para pontilhar a partição, com isso formamos a soma de Riemann que deve convergir para a integral.

**Exemplo 75** ((a)). Calcular

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}}$$

onde  $p > -1$ .

Temos

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}} = \lim \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

**Exemplo 76** ((b)). Tomando  $f(x) = \text{sen}(xt)$ , temos  $f\left(\frac{k}{n}\right) = \text{sen}\left(\frac{kt}{n}\right)$  daí

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{kt}{n}\right) = \int_0^1 \text{sen}(tx) dx = \frac{1 - \cos(t)}{t}.$$

Por exemplo, temos

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^1 \text{sen}(tx) dx = \frac{1 - \cos(\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

## Questão 2

**Propriedade 245.** Se existe  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum (f, P^*)$  então  $f$  é uma função limitada.

**Demonstração.** Vamos provar a contrapositiva, que é, se  $f$  é uma função ilimitada então não existe  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum (f, P^*)$ .

$f$  é uma função ilimitada, então ela deve ser ilimitada em algum intervalo  $[t_{s-1}, t_s]$  com comprimento fixo de uma partição qualquer dada  $P$ , como  $f$  é ilimitada em  $[t_{s-1}, t_s]$ , podemos escolher  $u_s$  em tal intervalo tal que

$$|f(u_s) \Delta t_{s-1}| > \left| \sum_{k=1, k \neq s}^n f(u_k) \Delta t_{k-1} \right| + A$$

logo

$$|\sum(f, P^*)| = |f(u_s)\Delta t_{s-1} + \sum_{k=1, k \neq s}^n f(u_k)\Delta t_{k-1}| \geq ||f(u_s)\Delta t_{s-1}| - \sum_{k=1, k \neq s}^n f(u_k)\Delta t_{k-1}|| > A$$

logo o limite não pode existir, pois se existisse o limite, ela seria limitada para partições com norma pequena. Para qualquer  $\varepsilon > 0$  existiria  $\delta > 0$  tal que

$$|\sum(f, P^*) - L| < \varepsilon \Rightarrow |\sum(f, P^*)| \geq |\sum(f, P^*) - L| + |L| < \varepsilon + |L|$$

para qualquer partição com  $|P| < \delta$ .

### Questão 3

**Propriedade 246.** Se  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitada.  $f$  é integrável  $\Leftrightarrow$  existe o limite

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f, P^*).$$

Nessas condições vale

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f, P^*).$$

**Demonstração.**

$\Rightarrow$ ) Se  $f$  é integrável então

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} s(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P) = \int_a^b f(x)dx$$

como tem-se  $s(f, p) \leq \sum(f, P^*) \leq S(f, P)$  então por sanduíche tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f, P^*).$$

$\Leftarrow$ ).

Dado  $\varepsilon > 0$  existe partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  tal que

$$|\sum(f, P^*) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para qualquer maneira que pontilhamos  $P$ . Fixamos  $P$  e partilhamos a partição de 2 modos.

1. Em cada  $[t_{k-1}, t_k]$  escolhemos  $u_k$  tal que

$$f(u_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{4n\Delta t_{k-1}}$$

(podemos tomar elementos tão próximos do ínfimo quanto quisermos), obtemos assim uma partição pontilhada  $P^*$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(u_k)\Delta t_{k-1} &< \sum_{k=1}^n m_k\Delta t_{k-1} + \frac{\varepsilon}{4} \\ \sum(f, P^*) &< s(f, p) + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

2. Em cada  $[t_{k-1}, t_k]$  escolhemos  $v_k$  tal que

$$M_k - \frac{\varepsilon}{4n\Delta t_{k-1}} < f(v_k)$$

, obtemos assim uma partição pontilhada  $P'$  tal que

$$-\frac{\varepsilon}{4} + S(f, P) < \sum(f, P').$$

Usando as duas desigualdades temos que

$$S(f, P) - s(f, P) < \sum(f, P') - \sum(f, P^*) + \frac{\varepsilon}{2}$$

como

$$|\sum(f, P') - L| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ e } |\sum(f, P^*) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$$

tem-se

$$|\sum(f, P') - \sum(f, P^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

portanto

$$S(f, P) - s(f, P) < \sum(f, P') - \sum(f, P^*) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e  $f$  é integrável.

**Questão 4**

**Propriedade 247.** Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis. Para toda partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$ , sejam  $P^* = (P, x)$  e  $P' = (P, y)$  então

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k)g(y_k)\Delta t_{k-1} = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

**Demonstração.** Escrevemos

$$f(x_k)g(y_k) = f(x_k)g(x_k) + f(x_k)[g(y_k) - g(x_k)]$$

multiplicando por  $\Delta t_{k-1}$  e somando, tem-se

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)g(y_k)\Delta t_{k-1} = \sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\Delta t_{k-1} + \sum_{k=1}^n f(x_k)[g(y_k) - g(x_k)]\Delta t_{k-1}$$

o segundo membro tende a zero pois

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{f(x_k)}_{\leq M} [g(y_k) - g(x_k)]\Delta t_{k-1} \leq M \sum_{k=1}^n [g(y_k) - g(x_k)]\Delta t_{k-1} \leq M[S(g, P) - s(g, P)] \leq M\varepsilon$$

pois  $g$  é integrável.

**Questão 5**

**Propriedade 248.** Se  $f$  é integrável e  $g$  possui derivada integrável então

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum (f, g, P') = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

**Demonstração.**

$g$  é derivável, então aplicamos o *TVM* para derivadas e temos  $v_k \in [t_k, t_{k-1}]$  tal que

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(v_k)(t_k - t_{k-1}),$$

daí

$$\sum_{k=1}^n f(u_k)\Delta g(t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(u_k)g'(v_k)\Delta t_{k-1}$$

que pelo resultado anterior converge para

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

### Questão 6

**Propriedade 249.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow R$ , definimos para cada  $n \in N$

$$M(f, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a + kh)$$

onde  $h = \frac{b-a}{n}$ . Se  $f$  é integrável então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(f, n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Tal limite é chamado de valor médio de  $f$  em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** Tomamos a partição  $P$  com  $t_0 = a, t_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, t_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \dots, t_n = b$  com  $\Delta t_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ , pontilhamos a partição tomando em cada  $[t_{k-1}, t_k]$  o ponto  $t_k$ , temos com isso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + kh) = \int_a^b f(x)dx$$

e daí segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(f, n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

### Questão 7

**Propriedade 250.** Se  $f : [a, b] \rightarrow R$  é convexa então

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

**Demonstração.** Lembre-se que, com  $f$  convexa temos

$$\sum_{k=1}^n t_k f(a_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^n t_k a_k\right)$$

com cada  $t_k \in [0, 1]$  e  $\sum_{k=1}^n t_k = 1$ . Aplicamos tal propriedade com a soma

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(a + hk)$$

com  $t_k = \frac{1}{n}$  (temos  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ ), logo

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(a + hk) \geq f\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} [a + hk]\right).$$

como  $h = \frac{b-a}{n}$ , temos

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} [a + hk] = a + \frac{(b-a)n(n+1)}{2n^2} \rightarrow a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Lembre também que  $f$  convexa é contínua no interior de  $[a, b]$ , pois sempre temos as derivadas laterais existindo no interior ( não necessariamente de igual valor, apenas a existência de ambas já implica a continuidade, não necessitando que sejam iguais). Podemos trocar a ordem do limite com a função, pois  $a < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} [a + hk] < b$  por ser média e  $b \neq a$ , logo o ponto é interior e por propriedade de limite temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(a + hk) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} [a + hk]\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} [a + hk]\right) = f\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

isto é,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

### 1.12.3 Logaritmos e exponenciais

#### Questão 1

**Propriedade 251.** Seja  $f : R \rightarrow R$  contínua tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in R.$$

Nessas condições  $f$  é uma função linear.

**Demonstração.**

- Vale  $f(0) = 0$  pois  $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = f(0)$  se fosse  $f(0) \neq 0$  chegaríamos no absurdo de  $2 = 1$  então vale  $f(0) = 0$ .
- Dado  $x$  real arbitrário, vale que  $f(-x) = -f(x)$  pois  $f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0$  portanto  $f(-x) = -f(x)$ .
- Vale que  $f(nx) = nf(x)$  para qualquer  $x$  real e  $n$  natural pois, por indução  $f(1.x) = 1.f(x)$ , supondo  $f(nx) = nf(x)$  tem-se que

$$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

- $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$  logo a propriedade  $f(nx) = nf(x)$  vale para  $n$  inteiro.
- Dado  $n$  natural vale que  $f(\frac{x}{n}) = \frac{f(x)}{n}$  pois  $f(\frac{nx}{n}) = nf(\frac{x}{n}) = f(x)$  logo  $\frac{f(x)}{n} = f(\frac{x}{n})$  isso para  $x$  real arbitrário.
- Daí concluímos que  $f(\frac{px}{q}) = \frac{p}{q}f(x)$  onde  $\frac{p}{q}$  é um número racional.
- Podemos denotar  $f(1) = a$  daí vale  $f(x) = xf(1) = ax$  onde  $x$  é racional.
- Tomamos uma sequência  $(x_n)$  de números racionais que convergem para um valor  $x$  real arbitrário (racional ou irracional), vale que

$$f(x_n) = x_n.f(1) = x_n.a$$

aplicando o limite e usando a continuidade segue que

$$\lim f(x_n) = f(x) = \lim x_n.a = a.x$$

logo  $f(x) = a.x$ .

**Corolário 39.** Seja  $f : R \rightarrow R$  com  $f(x+y) = f(x)f(y) \forall x, y \in R$ , contínua não nula, então existe  $a \in R$  tal que  $f(x) = e^{ax}$ .

A função  $f$  só assume valor positivo pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$$



então a função assume valores em  $R^+$ , podemos aplicar o logaritmo, gerando ainda uma função contínua  $h$  com  $h(x) = \ln f(x)$  e temos pela relação funcional

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y),$$

isto é,

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

com  $h$  contínua, por ser composição de contínuas e  $h : R \rightarrow R$ , pela propriedade anterior temos que

$$h(x) = ax$$

para algum valor  $a \in R$ , logo

$$\ln f(x) = ax \Rightarrow f(x) = e^{ax}.$$

Sendo  $g : R^+ \rightarrow R$  continua, que satisfaz  $g(uv) = g(u) + g(v)$ . Como  $u$  e  $v$  são arbitrário em  $R^+$ , então existem  $x, y \in R$  tais que  $e^x = u, e^y = v$ , substituindo segue

$$g(e^{x+y}) = g(e^x) + g(e^y)$$

definindo  $h : R \rightarrow R^+$  com  $h(x) = g(e^x)$  temos pela relação funcional acima que

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

$h$  contínua, por ser composição de contínuas, então é uma função linear  $h(x) = bx$  para alguma constante  $b \in R$

$$g(e^x) = bx$$

tomando  $y = e^x$  temos  $x = \ln(y)$  então

$$g(y) = b \ln(y).$$

**Questão 2**

**Propriedade 252.** Seja  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ , tal sequência é decrescente e limitada, logo convergente, seu limite é denotado por  $\gamma$  chamada de constante de Euler-Mascheroni

**Demonstração.** Sendo  $f(x) = \frac{1}{x}$  ela é decrescente, logo usamos desigualdade usada para demonstração o teste de integral para séries

$$\int_1^n \frac{1}{x} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

daí  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) > 0$  a sequência é limitada inferiormente, além disso é decrescente pois

$$x_n - x_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} < 0$$

pois

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n+1}} \frac{dx}{x} > \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Sendo decrescente e limitada inferiormente ela converge.

**Questão 3****Propriedade 253.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

**Demonstração.** Seja  $f(x) = x - \ln x$ , temos  $f(1) = 1$  e  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$  para  $x > 1$  logo  $x > \ln x$  para  $x > 1$ . Temos  $0 < \ln x < x$  para  $x > 1$  daí

$$\ln x^{\frac{1}{2}} < x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \ln x < x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{4} (\ln x)^2 < x, \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{4}{\ln x}$$

tomando  $x \rightarrow \infty$  segue que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

**Corolário 40.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

tomando  $x = \frac{1}{y}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{y}}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\ln y}{y} = 0.$$

**Questão 4****Exemplo 77.** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{cx+b}.$$

Tomamos  $y = \frac{a}{x}$ , daí  $x = \frac{a}{y}$  e o limite fica como

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{ca}{y}} (1 + y)^b = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{ca}{y}} = e^{ca}.$$

**1.12.4 Integrais impróprias****Questão 1****Exemplo 78.** Estudar a convergência da integral  $\int_0^1 \frac{1}{1 - \cos(x)} dx$ .

Usamos que  $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ , daí caímos na integral

$$\int \frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})} dx = \int \frac{\operatorname{cosec}^2(\frac{x}{2})}{2} dx = -\cotg(\frac{x}{2}) + c$$

aplicando os limites, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - \cos(x)} dx = -\cotg(\frac{1}{2}) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \infty$$

**Exemplo 79.** Estude a integrabilidade de  $x^\alpha$  para valores reais de  $\alpha$ , com  $x \in (0, 1]$ . Se

$\alpha = -1$  então

$$\int_0^1 x^{-1} dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1) - \ln(x) = \infty$$

logo a integral não existe, caso  $\alpha < -1$  temos também

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha + 1} - \frac{1}{x^{-\alpha-1}(\alpha + 1)} = \infty$$

portanto a integral não existe para  $\alpha \leq -1$ . Se  $\alpha > -1$ ,  $\alpha + 1 > 0$ , daí

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha + 1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

**Exemplo 80.** Estude a convergência das integrais

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2} \text{ e } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Na primeira integral temos  $\alpha = -2$  e na segunda  $\alpha = -\frac{1}{3} > -1$  logo a primeira diverge e a segunda converge.

## Questão 2

**Exemplo 81.** Estudar a convergência de

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Separamos a integral em duas  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$  e analisamos a convergência de cada uma delas, primeiro para a infinita.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

onde a da direita converge logo a da esquerda também converge.

Na integral  $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$  fazemos a transformação  $y = \frac{1}{x}$  de onde podemos chegar na integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

que já vimos que converge.

**Exemplo 82.** Estudar a convergência de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

A função integrada é par, logo basta estudar a convergência de  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6}$  que converge por comparação.

**Exemplo 83.** Estudar a convergência de

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{1-e^x}.$$

$$\int_1^\infty \frac{x dx}{1 - e^x} = - \int_1^\infty \frac{x dx}{e^x - 1}$$

então estudamos a convergência de  $\int_1^\infty \frac{x dx}{e^x - 1}$  que é integral de uma função positiva em  $[1, \infty)$ , para  $x$  suficientemente grande temos

$$\frac{x}{e^x - 1} < \frac{x^2}{e^x}$$

pois isso equivale a  $e^x > \frac{x}{x-1}$ , porém a integral infinita de  $\frac{x^2}{e^x}$  converge e daí  $\int_1^\infty \frac{x dx}{e^x - 1}$  também, por comparação.

### Questão 3

**Exemplo 84.** Estudar convergência e convergência absoluta de  $\int_1^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^r} dx$  com  $r > 0$ .

Por meio de integração por partes temos

$$\int_1^x \frac{\text{sen}(t)}{t^r} dt = - \frac{\cos(t)}{t^r} \Big|_1^x - r \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{r+1}} dt$$

onde cada um dos limites acima com  $x \rightarrow \infty$  converge, a primeira parcela por ser limitada e a segunda converge pois é absolutamente convergente,

$$\int_1^x \frac{|\cos(t)|}{t^{r+1}} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^{r+1}} dt = \frac{1}{-rt^r} \Big|_1^x$$

logo a integral converge.

$\int_0^\infty \frac{|\text{sen}(x)|}{x^r} dx$  não converge, pois

$$\int_{2\pi}^\infty \frac{|\text{sen}(x)|}{x^r} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|\text{sen}(x)|}{x^r} dx$$

como  $\frac{1}{x^r}$  decresce temos

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|\text{sen}(x)|}{x^r} dx \geq \sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|\text{sen}(x)|}{(2\pi)^r (n+1)^r} dx =$$

em cada intervalo  $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$  a integral tem um valor constante por  $|\text{sen}(x)|$  ser periódica de período  $\pi$ , então o valor da integral é  $C$ , a série fica como

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{C}{(\pi 2)^r (n+1)^r}$$

que é uma série divergente com  $r \leq 1$ , nesse caso a integral não converge absolutamente.

Se  $r > 1$  a série converge absolutamente, pois

$$\int_1^\infty \frac{|sen(x)|}{x^r} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^r} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(-r+1)x^{r-1}} \Big|_1^t$$

como  $r > -1, r-1 > 0$  ela converge.

**Exemplo 85.**  $\int_0^\infty sen(x^2) dx$  converge, mas não absolutamente. Basta estudar a convergência de  $\int_1^\infty sen(x^2) dx$ , fazendo a mudança  $y = x^2$  a integral fica como

$$\int_1^\infty \frac{sen(y)}{2\sqrt{y}} dy$$

que caí no caso da integral  $\int_1^\infty \frac{sen(y)}{y^r} dy$ , com  $0 < r = \frac{1}{2} < 1$ , que converge porém não absolutamente.

#### Questão 4

**Exemplo 86.** Mostre que  $\int_0^\infty x sen(x^4) dx$  converge porém  $x sen(x^4)$  não é limitada. Estudamos a convergência de  $\int_1^\infty x sen(x^4) dx$ . Fazemos a mudança  $x^4 = y$ , a integral fica como

$$\int_1^\infty \frac{sen(y)}{4\sqrt{y}} dy$$

que converge, mas não absolutamente, como já vimos.

#### Questão 5

**Propriedade 254.** Seja  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , contínua, não-crescente. Se  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge então  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$ .

**Demonstração.** Seja  $g(x) = \int_a^x f(t) dt, x \geq a$ , existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ , logo dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$ , tal que  $x > A \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L$ . Para  $x > 2A \Rightarrow \frac{x}{2} > A \Rightarrow L - \varepsilon < g(\frac{x}{2}) < L$ ,  $g$  é crescente

$$L - \varepsilon < g(\frac{x}{2}) < g(x) < L,$$

daí  $\varepsilon > g(x) - g(\frac{x}{2})$ , pois o comprimento do intervalo é  $L - (L - \varepsilon) = \varepsilon$ ,

$$\varepsilon > g(x) - g(\frac{x}{2}) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt \geq (x - \frac{x}{2})f(x) = \frac{x}{2}f(x).$$

**Demonstração.**[2-Por critério de Cauchy] Como a integral converge, então para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $M$  tal que  $x > \frac{x}{2} > M$  vale

$$\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt < \varepsilon$$

como  $f$  é decrescente e positiva

$$0 \leq \frac{x}{2}f(x) \leq \varepsilon$$

logo segue que o limite é zero.

### Questão 6

**Propriedade 255** (Critério de Cauchy). Seja  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  em que  $f|_{[a,r]}$  é integrável  $\forall r > a$ . Nessas condições  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M$  tal que para  $B > A > M$  tenhamos

$$|\int_A^B f(x)dx| < \varepsilon.$$

### Demonstração.

$\Rightarrow$ ). Suponha que a integral converge para  $L$ , seja  $\varepsilon > 0$ , usando a definição de convergência, podemos tomar  $M \geq a$  suficientemente grande tal que se  $A \geq M$  temos

$$|\int_a^A f(x)dx - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tomando  $B > A \geq M$  temos

$$|\int_A^B f(x)dx - L| = |\int_a^B f(x)dx - \int_a^A f(x)dx| = |\int_a^B f(x)dx - L + L - \int_a^A f(x)dx| \leq$$

por desigualdade triangular

$$|\int_a^B f(x)dx - L| + |\int_a^A f(x)dx - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

logo vale  $|\int_A^B f(x)dx - L| < \varepsilon$  como queríamos mostrar.

$\Leftrightarrow$ ).

Para  $n$  natural, definimos

$$a_n = \int_a^n f(x)dx.$$

Para  $\varepsilon > 0$ , existe  $m \geq a$  tal que se  $m, n \geq M$  temos

$$|a_n - a_m| = \left| \int_m^n f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

logo  $(a_n)$  é uma sequência de Cauchy, logo é convergente, seja  $\lim a_n = L$ . Dado  $\varepsilon > 0$  escolhamos  $M \geq a$  ( $M$  natural) tal que  $n > m$ , e quaisquer  $A_1, B_1$  com  $B_1 > A_1 > M$  tem-se  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  e

$$\left| \int_{A_1}^{B_1} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

.

Tomando  $\underbrace{A}_{B_1} \geq M + 1$  então  $\underbrace{\lfloor A \rfloor}_{A_1} > M$ , tal que<sup>5</sup>

$$\left| \int_a^A f(x)dx - L \right| = \left| \int_a^{\lfloor A \rfloor} f(x)dx - L + \int_{\lfloor A \rfloor}^A f(x)dx \right| \leq |a_{\lfloor A \rfloor} - L| + \left| \int_{\lfloor A \rfloor}^A f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square.$$

### Questão 7

**Propriedade 256.** Seja  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  decrescente. Nessas condições

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(t)dt < \infty.$$

Se a série converge para  $s$ , vale a estimativa

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leq s - s_n \leq \int_n^{\infty} f(t)dt$$

onde  $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ .

**Demonstração.** De

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

---

<sup>5</sup>Lembre que  $\lfloor \cdot \rfloor$  é a função piso, que dado  $x \in [n, n+1)$ ,  $n$  inteiro, associa  $x$  a  $n$ .



onde  $M, m$  são o supremo e ínfimo de  $f$  em  $[a, b]$ , se tomamos o intervalo  $[k-1, k]$  com  $f$  decrescente essa identidade implica que

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1)$$

aplicando a soma  $\sum_{k=2}^n$  tem-se

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(1) = s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=2}^n f(k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = s(n-1)$$

$$s(n) - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq s(n-1)$$

portanto segue o resultado de convergência.

Da desigualdade  $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1)$  aplicando  $\sum_{n+1}^m$  resulta

$$s(m) - s(n) \leq \int_n^m f(t)dt \leq s(m-1) - s(n-1) \Rightarrow \int_n^m f(t)dt \leq s(m) - s(n) \leq \int_n^m f(t)dt$$

tomando  $m \rightarrow \infty$  segue

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leq s - s_n \leq \int_n^{\infty} f(t)dt.$$

## 1.13 Capítulo 12-Sequências e série de funções

### 1.13.1 Convergência simples e convergência uniforme

#### Questões 1 e 2

**Exemplo 87.** A sequência de funções  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1}{1+x^n}$ , converge simplesmente, pois em 0 a sequência é constante assumindo valor zero, para  $x \in (0, 1)$  fixo vale  $\lim x^n = 0$  logo  $\lim \frac{x^n}{1+x^n} = 0$ , se  $x = 1$  a sequência é constante assumindo valor  $\frac{1}{2}$ , para  $x > 1$ ,  $\lim x^n = \infty$  logo  $\frac{x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1}{1+x^n} \rightarrow 1$ , logo a convergência não pode ser uniforme, pois apesar das funções serem contínuas não há convergência para função contínua.

Porém temos que a sequência converge uniformemente em  $[0, a]$  e  $[b, \infty)$ , com  $a < 1$  e  $b > 1$ , pois em  $[0, a]$  a sequência é decrescente valendo

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \frac{x^n}{1+x^n}$$

que vale em  $x = 0$  e com  $x > 0$  a desigualdade equivale a

$$x(1+x^n) \leq (1+x^{n+1}) \Leftrightarrow x+x^{n+1} \leq 1+x^{n+1} \Leftrightarrow x \leq 1$$

que é verdadeira pois  $x \leq a < 1$ , temos uma sequência de funções definida em um compacto que é monótona e converge simplesmente, logo pelo teorema de Dini a sequência converge uniformemente. Para  $x \in [b, \infty)$  temos que a sequência é crescente, pois

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \geq \frac{x^n}{1+x^n}$$

vale em  $x = 0$  e com  $x > 0$  a desigualdade equivale a

$$x(1+x^n) \geq (1+x^{n+1}) \Leftrightarrow x+x^{n+1} \geq 1+x^{n+1} \Leftrightarrow x \geq 1$$

que é verdadeira pois  $x \geq b > 1$ .

Provamos o resultado por definição, mas primeiro provamos que dado  $n$  fixo  $f_n$  é crescente Dados  $x \geq y \geq b > 1$

$$1 - \frac{1}{1+x^n} \geq 1 - \frac{1}{1+y^n} \Leftrightarrow \frac{1}{1+y^n} \geq \frac{1}{1+x^n} \Leftrightarrow x^n \geq y^n$$

o que vale para potências maiores que 1.

Dado  $\varepsilon > 0$  vale que  $(f_n(b))$  converge para 1, sendo crescente, então para  $n > n_0$  temos

$$|f_n(b) - 1| < \varepsilon \Rightarrow -f_n(b) + 1 < \varepsilon \Leftrightarrow f_n(b) > 1 - \varepsilon$$

isso pois  $f_n(b)$  é crescente como sequência, dado  $x \geq b$  vale  $f_n(x) \geq f_n(b)$  pelo fato da função ser crescente, então  $f_n(x) \geq 1 - \varepsilon$ , isto é,  $1 - f_n(x) \leq \varepsilon$ ,  $|f_n(x) - 1| \leq \varepsilon$  para qualquer  $x$  em  $[b, \infty)$  e  $n > n_0$ , logo a convergência é uniforme.

**Questão 3**

**Exemplo 88.** A série  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x^k)$  converge com  $x \in (-1, 1]$  e converge uniformemente em  $[-a, a]$  com  $\frac{1}{2} < a < 1$ .

A série converge em  $(-1, 1)$  por ser soma de séries geométricas, além disso converge em 1 pois se anula,  $\sum_{k=1}^{\infty} 1^k(1-1^k) = 0$ .

Agora vejamos a convergência uniforme. Com  $|x| \leq a$  temos  $|x|^k \leq a^k < 1$ , temos ainda  $|1-x^k| \leq |1| + |x^k| \leq 2$ , agora aplicando essas desigualdades na série temos

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x^k(1-x^k)| \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} |x^k| \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} a^k = 2 \frac{a^k}{a-1} \Big|_n^{\infty} = 2 \frac{a^n}{1-a}$$

expressão que pode ser tomada menor que qualquer  $\varepsilon$  independente de  $x$  para  $n$  suficientemente grande, logo temos convergência uniforme.

**Questão 4**

**Definição 15** (Sequência de Cauchy de funções). Uma sequência de funções  $(f_n)$ , cada  $f_n : T \rightarrow R$  chama-se uma sequência de Cauchy  $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \mid \forall x \in T, (m, n > n_0) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

**Teorema 4** (Critério de Cauchy para convergência uniforme.). Uma sequência de funções  $(f_n)$  é uniformemente convergente  $\Leftrightarrow$  é uma sequência de Cauchy.

**Demonstração.**

$\Rightarrow$ ). Suponhamos que  $f_n \rightarrow_u f$ , então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \mid \forall x \in T, n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e para  $m > n_0$  acontece o mesmo fato

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

, somando ambas desigualdades tem-se

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

logo a sequência é de Cauchy.

$\Leftarrow$ ). Se  $(f_n)$  é uma sequência de funções de Cauchy então  $(f_n(x))$  é uma sequência de cauchy logo  $(f_n(x))$  é convergente e definimos uma função  $f(x)$  no seu limite para cada  $x$ . Mostraremos agora que  $f_n \rightarrow_u f$ , por ser uma sequência de Cauchy de funções temos

$$\forall x \in T, (m, n > n_0) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$f_m(x) - \varepsilon < f_n(x) < \varepsilon + f_m(x)$$

que tomando  $m \rightarrow \infty$  segue

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq \varepsilon + f(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

isso para todo  $x$ , logo  $f_n \rightarrow_u f$ .

### Questão 5

**Propriedade 257.** Seja  $f_n : A \rightarrow R$  que converge uniformemente para  $f : A \rightarrow R$ .

$f$  é limitada  $\Leftrightarrow$  existem  $K > 0$  e  $n_0 \in N$  tais que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| \leq K \forall x \in A$ .

**Demonstração.** Se  $f_n \rightarrow_u f$  em  $A$  então dado  $\varepsilon = 1$  existe  $n_0 \in N$  tal que para  $n > n_0$  tem-se

$$||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1 \forall x \in A$$

pela continuidade uniforme. Usaremos que  $||f_n(x)| - |f(x)|| \leq 1$ .

$\Rightarrow$ ). Se  $f$  é limitada existe  $K > 0$  tal que  $|f(x)| \leq K \forall x \in A$ , daí por desigualdade triangular

$$|f_n(x)| \leq ||f_n(x)| - |f(x)|| + |f(x)| < 1 + |f(x)| \leq 1 + K$$

logo cada  $f_n$  é limitada para  $n > n_0$ .

$\Leftarrow$ ).

Se vale  $|f_n(x)| \leq K \forall x$  e  $n > n_0$

$$|f(x)| \leq ||f_n(x)| - |f(x)|| + |f_n(x)| < 1 + |f_n(x)| \leq 1 + K$$

daí  $f$  é limitada.

**Questão 7**

**Propriedade 258.** Se  $\sum_{k=1}^n |f_k(x)|$  converge uniformemente em  $A$ , então  $\sum_{k=1}^n f_k(x)$  também converge uniformemente.

**Demonstração.** Usamos o critério de Cauchy, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $m > n > n_0$  e qualquer  $x \in A$  vale

$$\left| \sum_{k=1}^m |f_k(x)| - \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \right| < \varepsilon,$$

isto implica,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| < \varepsilon, \quad \forall x$$

portanto  $\sum_{k=1}^n f_k(x)$  é de cauchy uniformemente, logo converge uniformemente.

**1.13.2 Propriedades da convergência uniforme****Questão 1**

**Propriedade 259** (Adição de uniformemente convergentes). Se  $f_n \rightarrow_u f$  e  $g_n \rightarrow_u g$  em  $A$  então  $f_n + g_n \rightarrow_u f + g$  em  $A$ .

**Demonstração.** Dado  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  arbitrário por continuidade uniforme de  $f_n$  e  $g_n$ , temos que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, n > n_0$$

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, n > n_1$$

tomando  $n > n_1 + n_0$  valem as duas desigualdades, daí aplicamos a desigualdade triangular

$$|f_n(x) + g_n(x) - [f(x) + g(x)]| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de onde segue a convergência uniforme da soma.

**Propriedade 260** (Produto de uniformemente convergentes). Se  $f_n \rightarrow_u f$ ,  $g_n \rightarrow_u g$ , com  $f$  e  $g$  limitadas em  $A$  então  $f_n \cdot g_n \rightarrow_u f \cdot g$

**Demonstração.** Sabemos que se  $f$  e  $g$  são limitadas então para valores de  $n$  suficientemente grandes cada  $f_n$  e  $g_n$  são limitadas, valendo  $|f_n(x)| \leq K$  e  $|g(x)| \leq K_1$ .

Podemos escrever

$$\begin{aligned} f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x) &= f_n(x) \cdot g_n(x) + \underbrace{-f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x)}_0 - f(x) \cdot g(x) = \\ &= f_n(x) \cdot [g_n(x) - g(x)] + g(x)[f_n(x) - f(x)] \end{aligned}$$

para  $n$  grande podemos tomar  $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2K}$  e  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2K_1}$ , tomando a desigualdade triangular aplicada na expressão acima

$$\begin{aligned} &|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| = \\ &= |f_n(x) \cdot [g_n(x) - g(x)] + g(x)[f_n(x) - f(x)]| \leq |f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| |f_n(x) - f(x)| \leq \\ &K \frac{\varepsilon}{2K} + K_1 \frac{\varepsilon}{2K_1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**Propriedade 261** (Quociente de uniformemente convergente). Se  $g_n \rightarrow_u g$ , com  $|g(x)| \geq c$  em  $A$  então  $\frac{1}{g_n} \rightarrow_u \frac{1}{g}$ .

**Demonstração.**

Como  $|g(x)| \geq c \ \forall x$  então  $\frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{c}$ , logo para  $n > n_0$  vale  $\frac{1}{g_n(x)} \leq K \Rightarrow \frac{1}{|g(x)| |g_n(x)|} \leq \frac{K}{c}$ , por convergência uniforme, podemos tomar  $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{c\varepsilon}{K}$  logo

$$\left| \frac{1}{g_n(x)} - \frac{1}{g(x)} \right| = \left| \frac{g(x) - g_n(x)}{g_n(x)g(x)} \right| = \frac{|g_n(x) - g(x)|}{|g_n(x)g(x)|} \leq \frac{K}{c} \frac{c\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

logo temos  $\frac{1}{g_n} \rightarrow_u \frac{1}{g}$ .

**Corolário 41.** Se  $f_n \rightarrow_u f$ ,  $g_n \rightarrow_u g$ , com  $|g(x)| \geq c$  e  $f$  limitada em  $A$  então  $\frac{f_n}{g_n} \rightarrow_u \frac{f}{g}$ , pois  $\frac{1}{g_n} \rightarrow_u \frac{1}{g}$  e daí por produto de funções uniformemente convergentes que convergem para funções limitadas vale que  $\frac{f_n}{g_n} \rightarrow_u \frac{f}{g}$ .

## Questão 2

**Exemplo 89.** Se  $x_n \rightarrow 0$  uma sequência não nula e  $g(x)$  é ilimitada em  $A$  então  $f_n(x) = [x_n + g(x)]^2$  não converge uniformemente.

Vale que

$$f_n(x) = x_n^2 + 2g(x)x_n + g(x)^2$$

temos que  $h_n(x) = x_n^2$  e  $t_n(x) = g(x)^2$  convergem uniformemente, então para mostrar que  $f_n$  não converge uniformemente basta mostrar que  $s_n(x) = g(x)x_n$  não converge uniformemente.

Dado  $\varepsilon = 1$  para qualquer  $n$  fixado, como  $g$  é ilimitada em  $A$ , podemos tomar  $x$  tal que  $|g(x)| > \frac{1}{|x_n|}$  daí  $|x_n||g(x)| > 1$ , isto é,

$$|x_n g(x) - 0| > 1$$

então  $s_n(x)$  não converge uniformemente.

Como um exemplo podemos tomar  $g(x)$  polinômio e  $x_n = \frac{1}{n}$ . Essa exemplo mostrar como o produto de sequências uniformemente convergentes pode não ser uniformemente convergente.

## 1.14 Agradecimentos