UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$

TURMA $2012\backslash 1$

Prof.º Carlos Alberto Pereira dos Santos

BRASÍLIA, JULHO DE 2012

Sumário

1

Exercícios do Livro Análise Real vol.2

1.1 - Topologia do Espaço Euclidiano

1.1.1 O espaço euclidiano n-dimensional

Exercício 1

Se $|u+v| = |u| + |v|$, com $u \neq 0$ (norma euclidiana), prove que existe $\alpha \geq 0$ tal que $v = \alpha \cdot u$.

Solução.

$$\begin{aligned}
|u+v| = |u| + |v| &\Rightarrow |u+v|^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\
&\Rightarrow \langle u+v, u+v\rangle = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\
&\Rightarrow |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\
&\Rightarrow \langle u, v\rangle = |u||v|.
\end{aligned}$$

Tomemos o vetor $w = v - \dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u$. Como $\langle u, v\rangle = |u||v|$, então temos que:

$$\begin{aligned}
\langle w, w\rangle &= \left\langle v - \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u, v - \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u \right\rangle \\
&= \frac{|u|^2|v|^2 - \langle v, u\rangle^2}{|v|^2} = 0 \\
&\Rightarrow v = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}.
\end{aligned}$$

Onde $\dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \dfrac{|u||v|}{|u|^2} = \dfrac{|v|}{|u|} > 0$.

Portanto, desde que $u \neq 0$, $\exists\ \alpha > 0$, tal que $v = \alpha \cdot u$.

Exercício 2

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tais que (na norma euclidiana) $|x - z| = |x - y| + |y - z|$. Prove que existe $t \in [0, 1]$ tal que $y = (1 - t)x + tz$. Mostre que isto seria falso nas normas do máximo e da soma.

Solução. Chamando $u = x - y$ e $v = y - z$, temos que $|u + v| = |u| + |v|$. Ora, mas pela desigualdade triangular $|u + v| \leq |u| + |v|$, onde a igualdade ocorre se, e só se $u = \alpha v$, para a lgum $\alpha \geq 0 \ \in \ \mathbb{R}$, disto resulta que existe $\alpha \geq 0 \ \in \ \mathbb{R}$ tal que $u = \alpha v$, isto é, $x - y = \alpha(y - z) \ \Rightarrow (1+\alpha)y = x + \alpha z \ \Rightarrow \ y = (\frac{1}{1+\alpha})x + (\frac{\alpha}{1+\alpha})z$, daí chamando $t = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, temos que $t \ \in \ [0, 1]$ e satisfaz $y = (1 - t)x + tz$.

Se tomarmos os pontos $x = (1, 0), y = (0, 0)$ e $z = (0, 1)$, é fácil ver que eles não são colineares mas satisfazem $|x-z|_S = |x-y|_S + |y-z|_S$, portanto na norma da soma a afirmação não é verdadeira. Da mesma forma os pontos $x = (2, 0), y = (1, 0)$ e $z = (0, 1/2)$ são um contra-exemplo pra afirmação se considerarmos a norma do máximo.

Exercício 3

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ não-nulos. Se todo $z \in \mathbb{R}^n$ que é ortogonal a x for também ortogonal a y, prove que x e y são múltiplos um do outro.

Solução. Tem-se $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Se $x = y$ não há nada para demonstrar.

Suponha $x \neq y$ então o vetor $y - \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x|^2} \cdot x$ é ortogonal a x e, por hipótese, também é ortogonal a y e assim

$$\left\langle y, y - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2} \cdot x \right\rangle = \left\langle x, y - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2} \cdot x \right\rangle \ \Rightarrow \ \left\langle y - x, y - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2} \cdot x \right\rangle = 0.$$

como $y - x \neq 0$, temos

$$y - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2} \cdot x = 0 \ \Rightarrow \ y = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2} \cdot x,$$

portanto y é múltiplo de x.

Exercício 4

Se $\|x\| = \|y\|$, prove que $z = \frac{1}{2}(x + y)$ é ortogonal a $y - x$. (A medida de um triângulo isósceles é também altura).

Solução.

$$\begin{aligned}\left\langle \tfrac{1}{2}(x+y), y-x \right\rangle &= \tfrac{1}{2}\left\langle x+y, y-x\right\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,x\rangle\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\langle y,y\rangle - \langle x,x\rangle\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(|y|^2 - |x|^2\right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

como queríamos provar.

1.1.2 Bolas e conjuntos limitados

Exercício 1

Dados $a \neq b$ em $\mathbb{R}^n$ determine c, pertencente à reta ab, tal que $c \perp (b-a)$. Conclua que para todo $x \in ab$, com $x \neq c$, tem-se $|c| < |x|$.

Solução. $ab = \{a + t(b-a); t \in \mathbb{R}\}$

Como $c \in ab$; $c = a + t(b-a)$ onde t é tal que $\langle c, b-a\rangle = 0 \Rightarrow \langle a, b-a\rangle + t|b-a|^2 = 0$
$\Rightarrow t = \dfrac{-\langle a, b-a\rangle}{|b-a|^2}$.

Assim, c é completamente determinado.

Por outro lado:

$|c|^2 < |c|^2 + |b-a|^2 = |c+(b-a)|^2 = |a+t(b-a)+(b-a)|^2 = |a+(1-t)(b-a)|^2 = |x|^2$ $\forall x \in ab$ com $x \neq c$.

Portanto, $|c| < |x|, \forall x \in ab$.

Exercício 2

Sejam $|x| = |y| = r$, com $x \neq y$ (norma euclidiana). Se $0 < t < 1$, prove que $|(1-t)x + ty| < r$. Conclua que a esfera $S(0;r)$ não contém segmentos de reta.

Solução. Seja xy o segmento de reta de extremos x e y. Então $xy = \{(1-t)x + ty; t \in [0,1]\}$. Temos que

$$|(1-t)x + ty| = |x - tx + ty| = |x + t(y-x)| \leq |x| + t|y-x| \leq r + t|y-x| < r.$$

Como $S(0;r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = r\}$, vê-se facilmente que a esfera não contém segmentos de reta.

Exercício 3

Dados o conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ e o número real $r > 0$, seja $B_r(X) = \bigcup_{x \in X} B_r(x)$. Prove que $B_r(X)$ é convexo.

Solução. Sejam $a, b \in B_r(X)$. Então existem $x_0, x_1 \in X$ tal que $a \in B_r(x_0)$ e $b \in B_r(x_1)$, portanto $|a - x_0| < r$ e $|b - x_1| < r$.

Seja c um ponto do segmento ab , então $c = (1-t)a + tb$, para algum $t \in (0,1)$, daí para este t tome $x_c = (1-t)x_0 + tx_1 \cdot x_c \in X$ pois X é convexo. Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
|((1-t)a + tb) - x_c| &= |((1-t)a + tb) - ((1-t)x_0 + tx_1)| \\
&= |(1-t)(a - x_0) + t(b - x_1)| \\
&\leq |(1-t)(a - x_0)| + |t(b - x_1)| \\
&= (1-t)|(a - x_0)| + t|(b - x_1)| \\
&< (1-t)r + tr \\
&= r.
\end{aligned}$$

Logo, $c = (1-t)a + tb \in B_r(X)$, e como c é um ponto arbitrário do segmento ab, segue que $ab \subset B_r(X)$, portanto $B_r(X)$ é convexo.

Exercício 4

Prove que o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y\}$ é convexo.

Solução. Tomemos $a = (x_1, y_1)$ e $b = (x_2, y_2) \in X \Rightarrow x_1^2 \leq y_1$ e $x_2^2 \leq y_2$. Seja $z = t(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_1, y_1)$ um ponto pertencente ao segmento que liga a e b. Temos que $[(1-t)x_1 + tx_2]^2 = (1-t)^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + t^2x_2^2$.
Como $(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$, daí $[(1-t)x_1 + tx_2]^2 = (1-t)^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + t^2x_2^2 \leq (1-t)^2x_1^2 + t(1-t)(x_1^2 + x_2^2) + t^2x_2^2 = (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \leq (1-t)y_1 + ty_2$, portanto X é convexo.

Exercício 5

Seja $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Prove que se $T \neq 0$ então T não é uma aplicação limitada. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto limitado, prove que a restrição $T_X : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de T ao conjunto X é uma aplicação limitada.

Solução. De fato, dado $x \in \mathbb{R}^m$ se $|T(x)| = c \in \mathbb{R}^+$ então $|T(nx)| = nc > 0$. Logo T não é limitada, pois $\mathbb{R}$ é um corpo arquimediano.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto limitado. Tomemos a norma da soma, e como X é limitado, existe K tal que $|x| \leq K, \forall x \in X$. Temos $x = x_1e_1 + \cdots + x_me_m$. Seja $M = \text{máx}\{|T(e_1)|, \cdots, |T(e_m)|\}$. Daí,

$$\begin{aligned} |T(x)| = & \ |T(x_1e_1 + \cdots + x_me_m)| = |x_1T(e_1) + \cdots + x_mT(e_m)| \\ \leq & \ |x_1||T(e_1)| + \cdots + |x_m||T(e_m)| \leq M(|x_1| + \cdots + |x_m|) \leq M \cdot K. \end{aligned}$$

Portanto $T(X)$ é um conjunto limitado.

1.1.3 Conjuntos abertos

Exercício 1

Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, prove que int.X é um conjunto aberto, isto é int.int.$X \subset$ int.X.

Solução. Tomemos $\overline{x} \in$ int.$X \Rightarrow \exists\ r_0 > 0;\ B(\overline{x}, r_0) \subset X.$

Afirmação : $B(\overline{x}, r_0) \subset$ int.X.

Prova: De fato, seja $y \in B(\overline{x}, r_0)$ e tomemos $\varepsilon = r_0 - |y - \overline{x}|$. Então para todo $x \in B(y, \varepsilon)$ temos $|x - \overline{x}| \leq |x - y| + |y - \overline{x}| < r_0 - |y - \overline{x}| + |y - \overline{x}| = r_0 \Rightarrow x \in B(\overline{x}, r_0) \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset B(\overline{x}, r_0) \subset X$, portanto $y \in$ int.X, logo int.X é aberto.

Exercício 2

Prove que int.X é o maior conjunto aberto contindo em X, ou seja, se A é aberto e $A \subset X$ então $A \subset$ int.X

Solução. Seja $a \in A$, como A é aberto, $\exists r > 0$ tal que $B(a; r) \subset A$, e já que $A \subset X$, segue-se que $B(a; r) \subset X$, i.e., $x \in$ int.X. Então $A \subset$ int.X. Assim, int.$X = \bigcup\limits_{A_\lambda \subset X} A_\lambda$, com A_λ aberto.

Exercício 3

Dê um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ cuja a fronteira tem interior não vazio e prove que isto não seria possível se X fosse aberto.

Solução. Tomando $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, temos que a fronteira dos racionais são os reais, pois, dado $x \in \mathbb{R}$, toda bola aberta centrada em x irá conter números racionais e numéros irracionais. Fato decorrente da densidade dos racionais em $\mathbb{R}$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto, temos que $X =$ int.$X \Rightarrow \forall\ x \in X,\ \exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset X \Rightarrow \partial X = \emptyset$, pois $x \in \partial X$ se toda bola aberta centrada em x possuir pontos do interior de X e do complementar de X. Assim, nenhum ponto $x \in \partial X$ é ponto interior.

Exercício 4

Seja $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção sobre a i-ésima coordenada, isto é, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ então $\pi_i(x) = x_i$. Prove que se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto então sua projeção $\pi_i(A) \subset \mathbb{R}$ também é um conjunto aberto.

Solução. Consideremos $(\mathbb{R}^n, |.|_{\max})$ onde a bola aberta de centro a e raio $r > 0$ é dada por $B(a;r) = \prod_{j=1}^{n} (a_j - r, a_j + r)$.
Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $a_i \in \pi_i(A)$, então existe $a \in A$ tal que $\pi_i(a) = a_i$.
Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) = \prod_{j=1}^{n} (a_j - r, a_j + r) \subset A$.
Então $a_i \in (a_i - r, a_i + r) = \pi_i(B(a;r)) \subset \pi_i(A)$, donde segue que $\pi_i(A)$ é um conjunto aberto.

Exercício 5

Prove que toda coleção de abertos dois a dois disjuntos e não-vazios de $\mathbb{R}^n$ é enumerável.

Solução. Tome em cada aberto A dessa coleção um ponto pertencente ao conjunto não-vazio $A \cap \mathbb{Q}^n$. Como $\mathbb{Q}^n$ é enumerável o mesmo ocorre com o conjunto dos pontos escolhidos, a cada um dos quais corresponde um único aberto da aberto da coleção, pois estes são disjuntos.

1.1.4 Sequências em $\mathbb{R}^n$

Exercício 1

Dada a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$, sejam $\mathbb{N}'$ e $\mathbb{N}''$ subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tais que $\mathbb{N} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$. Se as subsequências $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}''}$ convergem para o mesmo limite a, prove que $\lim_{k\in\mathbb{N}} x_k = a$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $k > k_1$, $k \in \mathbb{N}' \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$ e $k > k_2$, $k \in \mathbb{N}'' \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$. Seja $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$, segue que $k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$. Logo $\lim x_k = a$.

Exercício 2

Dada a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^n$, prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\lim \|x_k\| = +\infty$

(b) $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ não possui subsequências convergentes.

(c) Para cada conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto $N_x = \{k \in \mathbb{N}; x_k \in X\}$ é finito.

Solução.

$(a) \Rightarrow (b)$

Suponha que houvesse uma subsequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'} \subset (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo para a. Então dado $\epsilon = 1$, $\exists\ k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq k_1,\ k \in \mathbb{N}' \Rightarrow |x_k - a| < 1 \Rightarrow ||x_k| - |a|| \leq |x_k - a| < 1 \Rightarrow |x_k| < 1 + |a|$. Em contrapartida, para $\epsilon = |a| + 1,\ \exists\ k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k > k_2 \Rightarrow |x_k| > |a| + 1$, pois $\lim\limits_{k\to\ \infty} x_k = +\infty$. Daí se tomarmos $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, então $\forall\ k \in \mathbb{N}'$ tal que $k \geq k_0$, temos por um lado que $|x_k| < 1 + |a|$ e por outro lado $|x_k| > |a| + 1$. Contradição! Portanto $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ não admite subsequência convergente.

$(b) \Rightarrow (c)$

Suponha que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ não possui subsequências convergentes e que para algum conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto $N_X = \{k \in \mathbb{N}; x_k \in X\}$ seja infinito. Desse modo a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_x}$ é limitada, então pelo teorema de Bolzano-Weierstrass $\exists\ \mathbb{N}'$ (infinito) $\subset \mathbb{N}_X \subset \mathbb{N}$ tal que $(x_k)_{k\ \in\mathbb{N}'}$ converge, ou seja , $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Contradição!

$(c) \Rightarrow (a)$

Admitindo (c), suponha que $\lim \|x_k\| \neq +\infty \Rightarrow \exists\ A > 0;\ \forall\ k_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, k > k_0$ satisfazendo $|x_k| < A$, e neste caso temos que o conjunto limitado $X = \{k \in \mathbb{N}; x_k \in B(0; A)\}$ é infinito. Contradição!

Exercício 3

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a \in A$. Prove que se $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $k > k_0 \Rightarrow x_k \in A$.

Solução. Como $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\|x_k - a\| < \varepsilon$ quando $k > k_0$ i.e. $\forall\varepsilon > 0$, $x_k \in B(a, \varepsilon)$ para $k > k_0$.

Seja $\varepsilon := |a - \partial A|/2$, daí $x_k \in B(a; \varepsilon) \subset A$ quando $k > k_0$.

Exercício 4

Se $a \in \partial X$, prove que existem sequências de pontos $x_k \in X$ e $y_k \in \mathbb{R}^n - X$ tais que $x_k, y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. Vale a recíproca?

Solução. Como $a \in \partial X, \forall\, \varepsilon > 0$ a bola $B(a; \varepsilon)$ contém pontos de X e $\mathbb{R}^n - X$. Assim, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$ e $y_k \in \mathbb{R}^n - X$ com $|x_k - a| < 1/k$ e $|y_k - a| < 1/k$. Pela denifição de limite de sequências, segue que $x_k, y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Reciprocamente, se $x_k, y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$, com $x_k \in X$ e $y_k \in \mathbb{R}^n - X$, então $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, k_0 > 0$ tal que

$k > k_0 \Rightarrow x_k, y_k \in B(a;\varepsilon)$. Como $\forall\, \varepsilon > 0$ a bola $B(a;\varepsilon)$ contém pontos de X e de seu complementar então $a \in \partial X$.

1.1.5 Conjuntos fechados

Exercício 1

Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo onde não vale $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Solução.

- $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$:

  $X \subseteq \overline{X}$ e $Y \subseteq \overline{Y}$, logo $X \cup Y \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$. Como $\overline{X} \cup \overline{Y}$ é fechado, segue que $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$.

  $X \subseteq X \cup Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{X \cup Y}$ e $Y \subseteq X \cup Y \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$. Logo $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$. Portanto, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

- $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$:

  $X \subseteq \overline{X}$ e $Y \subseteq \overline{Y}$, logo $X \cap Y \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$. $\overline{X} \cap \overline{Y}$ é fechado e contém $X \cap Y$, mas $\overline{X \cap Y}$ é o menor fechado que contém $X \cap Y$, portanto $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

- Exemplo onde não vale $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$:

  Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}$ tais que $a < b < c$. Então para $X = (a, b)$ e $Y = (b, c)$ podemos verificar que $\overline{X} \cap \overline{Y} = \{\, b\} \neq \emptyset = \overline{X \cap Y}$.

Exercício 2

Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é valor de aderência da seqüência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quando a é limite de alguma subseqüência de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Prove o conjunto dos valores de aderência de qualquer seqüência é fechado.

Solução. Seja $F = \{$ conjunto dos valores de aderência da sequência $(x_k)\}$.

Tomemos $a \in \overline{F} \;\Rightarrow\; B(a;\varepsilon_k) \cap F \neq \emptyset,\ \forall\, \varepsilon_k = 1/k,\ k \in \mathbb{N}$.

Para $\varepsilon_1 = 1$, tomemos $a_1 \in B(a, \varepsilon_1) \cap F$. Como $a_1 \in F \;\Rightarrow\; (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \cap B(a_1; \varepsilon_1 - |a - a_1|) \neq \emptyset$.

Seja $x_{k_1} \in (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \cap B(a_1, \varepsilon_1 - |a - a_1|)$.

Prosseguindo dessa forma, no i-ésimo passo teremos $a_i \in B(a;\varepsilon_i) \cap F$. Como $a_i \in F \Rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \cap B(a_i; \varepsilon_i - |a - a_i|) \neq \emptyset$. Tomemos $x_{k_i} \in (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \cap B(a_i, \varepsilon_i - |a - a_i|)$.

Os termos $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ constituem uma subsequência de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, além disso $|x_{k_i} - a| < 1/i,\ \forall\, i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; x_{k_i} \longrightarrow a$, portanto $a \in F$, desse modo $\overline{F} \subset F \;\Rightarrow\; F$ é fechado.

Exercício 3

Prove que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}^n$.

Solução.

($\Rightarrow$) Seja $a \in A \cap \overline{X}$. Então $a = \lim x_k$, $(x_k) \subset X$. $\exists k_0$ tal que $k > k_0 \Rightarrow x_k \in A$. Portanto $x_k \in A \cap X$. Logo $a \in \overline{A \cap X} \Rightarrow A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$.

($\Leftarrow$) Se A não fosse aberto, existiria um ponto a que não lhe seria interior. Mas, neste caso $a \in A \cap \overline{\mathbb{R}^n - A} \subset \overline{A \cap (\mathbb{R}^n - A)} = \emptyset$. Contradição.

Exercício 4

Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, prove que se tem $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Solução. É óbvio que $\overline{X} \times \overline{Y} \supset X \times Y$. Como $\overline{X \times Y}$ é o menor conjunto fechado que contém $X \times Y \Rightarrow \overline{X} \times \overline{Y} \supset \overline{X \times Y}$. Por outro lado se $(x, y) \in \overline{X} \times \overline{Y} \Rightarrow \exists\ (x_k) \subset X$ e $(y_k) \subset Y$ tais que $x_k \longrightarrow x$ e $y_k \longrightarrow y$. Daí $(x_k, y_k) \subset X \times Y$ e $\lim(x_k, y_k) = (x, y) \Rightarrow (x, y) \in \overline{X \times Y}$.
Portanto $\overline{X} \times \overline{Y} = \overline{X \times Y}$.

Exercício 5

Prove que $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Leftrightarrow X \supset \partial X$. Por outro lado $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$.

Solução.

(i) $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Leftrightarrow X \supset \partial X$.

De fato, X é fechado $\Rightarrow X = \overline{X} \Rightarrow \partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X} = X \cap \overline{\mathbb{R}^n - X} \subset X$. Então $\partial X \subset X$. Reciprocamente, se $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X} \subset X$, então $\overline{X} = X$, pois do contrario se $x \in \overline{X}$ e $x \notin X \Rightarrow x \in \overline{X}$ e $x \in \mathbb{R}^n - X$ então $x \in \overline{X}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}^n - X} \Rightarrow x \in \partial X \subset X$, logo X é fechado.

(ii) $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$.

De fato, se sabe que $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n - A)$. Logo:

$$\emptyset = \partial A \cap A = \partial(\mathbb{R}^n - A) \cap A \Leftrightarrow \partial(\mathbb{R}^n - A) \subset \mathbb{R}^n - A \Leftrightarrow \mathbb{R}^n - A \text{ é fechado } \Leftrightarrow A \text{ é aberto.}$$

Exercício 6

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos limitados disjuntos e não-vazios. Se $d(A, B) = 0$, prove que existe $x \in \partial A \cap \partial B$.

Solução. Se $d(A, B) = 0$ então existem sequências $(x_k) \subset A$ e $(y_k) \subset B$ tais que $\lim |x_k - y_k| = 0$. Passando a subsequências, se necessário, podemos afirmar que $a = \lim x_k$, pois A

é limitado. O mesmo vale para y_k, pois B é limitado. Daí, $a = \lim y_k$. Logo, $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Como A e B são disjuntos, não podemos ter $a \in$ A e $a \in$ B. Portanto, $a \in \partial A \cap \partial B$.

Exercício 7

Prove que o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Solução. Sejam $a, b \in \overline{A}$. Então existem sequências (a_k) e (b_k) em A tais que $a = \lim a_k$ e $b = \lim b_k$. Como A é convexo, então fixando $t \in [0,1]$ temos que $(1-t)a_k + tb_k \in A,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Daí, $\lim((1-t)a_k + tb_k) = (1-t)a + tb \in \overline{A}$. Portanto $\overline{A}$ é convexo.

Exercício 8

Prove que se $C \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e fechado então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único $\overline{x} = f(x) \in C$ tal que $d(x, C) = |x - \overline{x}|$

Solução. (Existência): C é fechado e $\{x\}$ é compacto $\Rightarrow\ \exists\, \overline{x}\ \in C; d(x, C) = |x - \overline{x}|$.
(Unicidade): Se $x\ \in\ C$ então $f(x) = x$ e a unicidade é óbvia, pois $\forall\, x \neq\ x', |x - x'| > 0 = |x - x|$. Se $x \notin C$, então suponha que exista outro $\overline{\overline{x}}\ \in\ C;\ d(x, C) = |x - \overline{x}| = |x - \overline{\overline{x}}| = r$. Ora, desse modo temos que $\overline{x}$ e $\overline{\overline{x}}\ \in\ S(x, r)$. Daí $\ \forall\ t \in\ (0,1)$ tem-se que $\overline{x}(1-t) + t\overline{\overline{x}}\ \in\ C$ e $|\overline{x}(1-t) + t\overline{\overline{x}} - x| = |(\overline{x} - x)(1-t) + t(\overline{\overline{x}} - x)| < r = d(x; C)$. Contradição !

1.1.6 Conjuntos compactos

Exercício 1

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, não-vazio. Prove que existem $x, y \in K$ tais que $|x - y| =$ diam.K.

Solução. Por definição, temos que diam.$K = \sup\{|x - y|; x, y \in K\}$. Tome a norma euclidiana. Pela definição de $\sup$, dado $\varepsilon > 0$, existem $x, y \in K$ tais que diam.$K \leq |x - y| + \varepsilon$ e $\forall x, y \in K$ vale $|x - y| \leq$ diam.K.
Temos que existem sequências $x_k, y_k \in K$ tais que diam.$K = \lim |x_k - y_k|$. Como K é limitado, e passando a subsequências se necessário, diam.$K = \lim |x_k - y_k| = |x_0 - y_0|$ onde $x_0, y_0 \in \overline{K}$. Por K ser fechado, segue que $\overline{K} = K$ e $x_0, y_0 \in K$.

Exercício 2

Se toda cobertura aberta de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita, então prove que X é um conjunto compacto.

Solução.

(Limitado)

Suponha que X fosse ilimitado. Então pra nenhum $k \in \mathbb{N},\ X \subset B(0;k)$. Daí neste caso teríamos que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B(0;k)$ é uma cobertura de X que não admite subcobertura finita, portanto X deve ser limitado.

(Fechado)

Suponha que X não seja fechado, então existe $(x_k) \subset X;\ \ x_k \longrightarrow a \notin X$. Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere o aberto $\mathbb{R}^n \backslash B[a;1/k] = A_k$. Então $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ é uma cobertura aberta de X que não admite subcobertura finita, portanto X deve ser fechado.

Exercício 3

Seja (x_k) uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ que possui um único valor de aderência. Prove que (x_k) é convergente. Dê exemplo de uma sequência (não-limitada) não convergente que tem um único valor de aderência.

Solução. Seja a um valor de aderência de (x_k). Se não fosse $a = \lim x_k$, existiriam $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de índices k tais que $|x_k - a| \geq \varepsilon$. Passando a uma subsequência, se necessário, teríamos $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} x_k = b$, com $|b-a| \geq \varepsilon$, logo $b \neq a$ seria outro valor de aderência. Quanto ao exemplo, basta tomar $x_k = 0$ para k ímpar e $x_k = k.e_i$ se k é par.

Exercício 4

Se $K \subset U \subset \mathbb{R}$ com K compacto e U aberto, prove que existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in K, y \in \mathbb{R}^n$, $|x-y| < \varepsilon \Rightarrow [x,y] \in U$.

Solução. Inicialmente vamos tomar o conjunto $\mathbb{R}^n - U$, o complementar de U no $\mathbb{R}^n$. Esse conjunto é fechado, pois seu complementar é aberto. Sabemos que K é compacto, ou seja, fechado e limitado, e $\mathbb{R}^n - U$ é fechado, então, pelo fato desses conjuntos serem disjuntos, existe $a \in K$ e $b \in \mathbb{R}^n - U$ onde a distância é atingida. Em outras palavras, $|x-y| \geq |a-b|$, $\forall\, x \in K$ e $\forall\, y \in \mathbb{R}^n - U$. Fazendo $|a-b| = \varepsilon$, temos que $|x-y| \geq \varepsilon$, $\forall\, y \in (\mathbb{R}^n - U)$, donde $B(x;\varepsilon) \subset U$. Assim, $\forall\, x \in K$ e $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $|x-y| < \varepsilon$, temos que $y \in B(x;\varepsilon) \subset U$. Portanto, $[x,y] \subset B(x;\varepsilon) \subset U$.

Exercício 5

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, a interseção $X \cap K$ é compacta. Prove que X é fechado.

Solução. Seja $a \in \overline{X}$, então existe uma sequência $(x_k) \subset X$ tal que $a = \lim x_k$. Defina $K = \{x_k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$. K é compacto. Daí, por hipótese $X \cap K$ é compacto, em particular $X \cap K$ é fechado. Como $(x_k) \subset X \cap K$, então $a = \lim x_k \in X \cap K$, portanto pertence a X. Logo X é fechado.

1.1.7 Aplicações contínuas

Exercício 1

Seja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ a imagem inversa $f^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^m$ é compacta.

(b) Se x_k é uma sequência em $\mathbb{R}^m$ sem subsequências convergentes, o mesmo se dá com a sequência $\big(f(x_k)\big)$ em $\mathbb{R}^n$. (Ou seja, $\lim x_k = \infty \Rightarrow \lim f(x_k) = \infty$.)

Solução.

$(a) \Rightarrow (b)$ Suponha que $f(x_k)$ possui uma subsequência convergindo para o ponto $f(x_0)$. O conjunto $K = \{f(x_k); k \in \mathbb{N}\} \cup \{f(x_0)\}$ seria compacto, logo $f^{-1}(K)$ seria um compacto contendo todos os $x_k \in \mathbb{R}^m$ e então (x_k) possuiria uma subsequência convergente.

$(b) \Rightarrow (a)$ Seja K compacto e suponha, por absurdo, que $f^{-1}(K)$ não seja compacto. Então, como K é fechado e f é contínua, temos que $f^{-1}(K)$ é ilimitada. Daí, seja $(x_k) \subset f^{-1}(K) \cap \mathbb{R}^m$ uma sequência sem subsequências convergentes (basta tomar uma sequência ilimitada em $f^{-1}(K) \cap \mathbb{R}^m$) $\Rightarrow f(x_k) \subset K$ e portanto admite subsequência convergente. Contradição.

Exercício 2

Prove que um polinômio complexo não-constante $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, considerado como uma aplicação $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cumpre uma das (portanto ambas) condições do exercício anterior.

Solução. Ora para todo $z \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$, temos que

$$p(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right).$$

Tomemos

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right|$$

e

$$|z_k| \to +\infty.$$

Ponha

$$q(z) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n.$$

A sequência $|q(z_k)|$ é limitada, pois

$$\begin{aligned} 0 &< \overbrace{\left| \frac{a_0}{z_k^n} + \frac{a_1}{z_k^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z_k} + a_n \right|}^{|q(z_k)|} \\ &\leq \left|\frac{a_0}{z_k^n}\right| + \left|\frac{a_1}{z_k^{n-1}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{n-1}}{z_k}\right| + |a_n| \to |a_n|, \end{aligned}$$

quando $|z_k| \to +\infty$. Como $|q(z_k)|$ é limitada e $\lim |z_k|^n = +\infty$, tem-se que

$$\lim |z_k|^n \cdot |q(z_k)| = +\infty.$$

Exercício 3

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m, K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : X \times K \to \mathbb{R}^p$ contínua. Suponha que, para cada $x \in X$, exista um único $y \in K$ tal que $f(x, y) = 0$. Prove que y depende continuamente de x.

Solução. Defina

$$\begin{aligned} g : X &\to K \\ x &\mapsto y, \end{aligned}$$

onde y é o único elemento de K que satisfaz $f(x, y) = 0$. Temos que g está bem definida.
Resta provar que g é contínua. Para isto fixemos $a \in X$ e tomemos $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$; $x_k \stackrel{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} a$. Suponha que $g(x_k)$ não convirja pra $g(a)$. Então existe $\overline{\epsilon} > 0$ e infinitos índices $k \in \mathbb{N}$; $g(x_k) \notin B(g(a), \overline{\epsilon})$. Tomemos $\mathbb{N}' = \{k \in \mathbb{N}; g(x_k) \notin B(g(a), \overline{\epsilon})\}$. Assim, $(g(x_k))_{k\in\mathbb{N}'} \subset K \Rightarrow \exists\, \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ e $b \neq g(a) \in K$ tal que $g(x_k) \stackrel{k\in\mathbb{N}''}{\longrightarrow} b$. Como f é contínua em $X \times K \Rightarrow \lim\limits_{k\in\mathbb{N}''} f(x_k, g(x_k)) = f(a, b) \neq 0$, pois $b \neq a$ e $g(a)$ é o único elemento de K que satisfaz $f(a, g(a)) = 0$. Ora, mas $f(x_k, g(x_k)) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}''$, portanto se tomarmos $\epsilon = |f(a, b)|/2$, temos que $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \in \mathbb{N}''$, $k > k_0 \Rightarrow |f(x_k, g(x_k)) - f(a, b)| < \epsilon$, e daí $|f(x_k, g(x_k))| = |f(x_k, g(x_k) - f(a, b) + f(a, b)| \geq |f(a, b)| - |f(x_k, g(x_k)) - f(a, b)| > |f(a, b)| - |f(a, b)|/2 > 0$. Contradição! Portanto $g(x_k) \longrightarrow g(a) \Rightarrow g$ é contínua.

Exercício 4

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Prove que a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transforma todo subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^m \times K$ num conjunto fechado $\pi(F) \subset \mathbb{R}^m$. Dê exemplo de $F \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ fechado tal que $\pi(F) \subset \mathbb{R}^n$ não seja fechado.

Solução. Seja $a \in \overline{\pi(F)}$. Então existe $(x_k = \pi(x_k, y_k))_{k \in N} \in \pi(F)$ tal que $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}} x_k = a$.
Como $(x_k, y_k) \in F \Longrightarrow y_k \in K$, logo como K é compacto $\exists (y_k)_{k \in \mathbb{N}'} \subset (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} y_k = b$.
Logo $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} (x_k, y_k) = (a, b) \in F$ pois F é fechado. Então $a = \pi(a, b) \in \pi(F)$.
Assim temos que $\overline{\pi(F)} \subset \pi(F)$, e como sempre $\pi(F) \subset \overline{\pi(F)}$, logo $\pi(F) = \overline{\pi(F)} \Leftrightarrow \pi(F)$ é fechado.

Exemplo:

Considere $C = \{(x, y) : x > 0, xy \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto fechado.

$\pi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \longmapsto \pi(x, y) = x, \forall (x, y) \in C$.

$\pi(C) = (0, +\infty)$ não é fechado.

1.1.8 Continuidade uniforme

Exercício 1

Sejam F, $G \subset \mathbb{R}^n$ fechados disjuntos não-vazios. A função contínua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$, definida por $f(x) = \dfrac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$ cumpre $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$. Ela se chama a função de Urysohn do par (F, G). Prove que se ela é uniformemente contínua, então $d(F, G) > 0$.

Solução. Vamos assumir, por absurdo, que $d(F, G) = 0$. Então existem $x_k \in F$ e $y_k \in G$ com $|x_k - y_k| < \dfrac{1}{k}$ (consequência da definição de distância).
Além disso para qualquer $\varepsilon > 0$, $d(F, G) + \varepsilon > |x - y|$ para algum $x \in F$ e $y \in G$. Dessa maneira, $\lim |x_k - y_k| = 0$, mas observe que $f(x_k) = 0$ e $f(y_k) = 1$. Assim, $|f(x_k) - f(y_k)| = 1 \Rightarrow \lim |f(x_k) - f(y_k)| = 1$ e consequentemente f não é uniformemente contínua.

Exercício 2

Seja $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$ com Y denso em X. Se a aplicação contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que sua restrição $f|Y$ é uniformemente contínua, prove que f é uniformemente contínua.

Solução. $f|_Y$ uniformemente contínua $\Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo x e y em Y satisfazendo $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Tomemos então x' e y' em X tais que $|x' - y'| < \delta$. Por hipótese Y é denso em X , portanto existem sequências (x_k) e (y_k) em Y, tais que $x_k \longrightarrow x'$ e $y_k \longrightarrow y'$. Daí $|x' - y'| < \delta \Rightarrow \; \exists \; k_0 \; \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \; k > k_0$ tem-se $|x_k - y_k| < \delta$ e portanto $|f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon/2$. Usando a continuidade de f concluimos que $|f(x') - f(y')| = \lim |f(x_k) - f(y_k)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$. Portanto $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.

Exercício 3

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto limitado. Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua, prove que $f(X) \subset \mathbb{R}^n$
também é limitado.

Solução. Se $f(X)$ fosse ilimitada, para cada $k \in \mathbb{N}$ existiria $x_k \in X$ tal que $|f(x_k)| > k$. A sequência assim obtida não possuiria subsequência convergente.
Mas X é limitado, então existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ é de Cauchy. Sendo f uniformemente contínua, temos que $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}'}$ é também de Cauchy, logo convergente. Contradição, pois $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente . Portanto $f(X)$ é limitada.

Exercício 4

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Prove que a soma $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua e o mesmo se dá com o produto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ caso f e g sejam limitadas.

Solução. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Logo, $\forall\ (x_k), (y_k) \subset X$ sequências tais que $|x_k - y_k| \longrightarrow 0$ temos $|f(x_k) - f(y_k)| \longrightarrow 0$ e $|g(x_k) - g(y_k)| \longrightarrow 0$.
Defina $\phi : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $\phi(x) = f(x) + g(x)$. Vamos mostrar que ϕ é uniformemente contínua. De fato, sejam $x_k, y_k \in X$ sequências tais que $|x_k - y_k| \longrightarrow 0$. Assim,

$$\begin{aligned}|\phi(x_k) - \phi(y_k)| &= |f(x_k) + g(x_k) - f(y_k) - g(y_k)| \\ &\leq |f(x_k) - f(y_k)| + |g(x_k) - g(y_k)|.\end{aligned}$$

Como f e g são uniformemente contínuas, segue que

$$|\phi(x_k) - \phi(y_k)| \longrightarrow 0$$

$\forall x_k, y_k \in X$ tais que $|x_k - y_k| \longrightarrow 0$. Portanto, ϕ é uniformemente contínua.
Agora, defina $\psi : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = f(x)g(x)$. Temos que

$$\begin{aligned}|\psi(x_k) - \psi(y_k)| &= |f(x_k)g(x_k) - f(y_k)g(y_k)| \\ &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(y_k) + f(x_k)g(y_k) - f(y_k)g(y_k)| \\ &\leq |f(x_k)||g(x_k) - g(y_k)| + |g(y_k)||f(x_k) - f(y_k)|.\end{aligned}$$

Se f e g são limitadas, isto é, existem $M_f, M_g > 0$ tais que $|f(x)| < M_f$, $\forall x$ e $|g(y)| < M_g$, $\forall y$, então

$$|\psi(x_k) - \psi(y_k)| \leq M_f|g(x_k) - g(y_k)| + M_g|f(x_k) - f(y_k)| \longrightarrow 0.$$

Portanto, ψ é uniformemente contínua se f e g são limitadas.

Exercício 5

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in C$ são tais que $|x-\overline{x}| = d(x, C)$, prove que $\langle x-\overline{x}, y-\overline{x}\rangle \leq 0$ para todo $y \in C$.

Solução. Suponha que exista $y \in C$ tal que $\langle x-\overline{x}, y-\overline{x}\rangle > 0$. Defina $z = (y-\overline{x})t + \overline{x}$. Então

$$|z-x|^2 = |(y-\overline{x})t - (x-\overline{x})|^2 =$$

$$t^2|y-\overline{x}|^2 - 2t\langle y-\overline{x}, x-\overline{x}\rangle + |x-\overline{x}|^2$$

Daí, $\forall\, t \in I = (0,1) \cap \left(0, \dfrac{2\langle y-\overline{x}, x-\overline{x}\rangle}{|y-\overline{x}|^2}\right) \neq \emptyset$, temos que $t^2|y-\overline{x}|^2 - 2t\langle y-\overline{x}, x-\overline{x}\rangle < 0$ $\Rightarrow |z-x| < |x-\overline{x}| \Rightarrow z \notin C$. Absurdo, pois C é convexo.

Exercício 6

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado, seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow C$ definida por $f(x) = \overline{x}$, onde $\overline{x}$, é o único ponto de C tal que $|x-\overline{x}| = d(x, C)$. Prove que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, logo f é uniformemente contínua.

Solução. Sabemos pelo exercício anterior que se C é convexo , $x \in \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in C$ são tais que $|x-\overline{x}| = d(x, C)$, então $\langle x-\overline{x}, y-\overline{x}\rangle \leq 0$ para todo $y \in C$.
Como C é fechado $\exists\, x_0, y_0 \in C$ tal que para $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos, $|x-x_0| = d(x, C)$ e $|y-y_0| = d(y, C)$.
Logo, pelo comentário inicial, temos

$$\langle x-x_0, y_0-x_0\rangle \leq 0, \langle y-y_0, x_0-y_0\rangle \leq 0$$

$$\langle y_0-x_0, x-x_0\rangle \leq 0, \langle y_0-x_0, y_0-y\rangle \leq 0$$

logo

$$\langle y_0-x_0, x-x_0\rangle + \langle y_0-x_0, y_0-y\rangle \leq 0$$

$$\langle y_0-x_0, x-x_0+y_0-y\rangle \leq 0$$

$$\langle y_0-x_0, (y_0-x_0)-(y-x)\rangle \leq 0$$

$$|y_0-x_0|^2 \leq \langle y_0-x_0, y-x\rangle$$

Pela desigualdade de Schwarz

$$|y_0-x_0|^2 \leq |y_0-x_0||y-x|$$

$$|y_0 - x_0| \leq |y - x|$$

Assim

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$$

então f é lipschitziana, portanto uniformemente contínua.

1.1.9 Homeomorfismos

Exercício 1

Chama-se *semi-reta* de origem 0 em $\mathbb{R}^n$ a um conjunto do tipo $\sigma = \{tv; t \geq 0,\ 0 \neq v \in \mathbb{R}^n\}$. Seja $X \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ um conjunto compacto que tem um (único) ponto em comum com cada semi-reta com origem 0. Prove que X é homeomorfo à esfera S^{n-1}.

Solução. Seja $\varphi : X \longrightarrow S^{n-1}$ a aplicação definida por $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Vamos mostrar que φ é um homeomorfismo.

Temos que φ é uma bijeção. De fato, dados $x_1, x_2 \in X$ tais que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, segue que $\dfrac{x_1}{|x_1|} = \dfrac{x_2}{|x_2|} \Leftrightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_2|}x_2 = x_1 \Leftrightarrow$ x_1 e x_2 têm a mesma direção e o mesmo sentido, logo estão na mesma semi-reta e assim $x_1 = x_2$, pois a interseção de cada semi-reta e o conjunto X é única. Logo, φ é injetiva. Além disso, $\forall\ y \in\ S^{n-1},\ \exists\ t > 0$ tal que $ty \in X$, pois $y \neq 0$, com $\varphi(ty) = \dfrac{ty}{|ty|} = \dfrac{ty}{t|y|} = \dfrac{y}{|y|} = y$. Dessa maneira, φ é também sobrejetiva.

Temos ainda que φ é contínua, pois $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é um quociente de funções contínuas ($x \in X \subset \mathbb{R}^n - \{0\} \Rightarrow |x| \neq 0$).

Como X é compacto, logo φ é um homeomorfismo.

Exercício 2

Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e o produto cartesiano $S^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Solução. Defina $f : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ pondo $f(x,t) = e^t x$. Temos que f é contínua pois é o produto de funções contínuas. Além disso, $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}$, definida por $g(y) = \left(\dfrac{y}{|y|}, \ln|y|\right)$, é contínua e satifaz $g(f(x,t)) = (x,t)$ e $f(g(y)) = y$.
Portanto, $f : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ é um homeomorfismo.

Exercício 3

Mostre que existe um homeomorfismo do produto cartesiano $S^m \times S^n$ sobre um subconjunto de $\mathbb{R}^{m+n+1}$.

Solução. $S^m \times S^n \subset S^m \times \mathbb{R}^{n+1} \sim S^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \sim (\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$. Daí, olhando para a função inclusão temos que $S^m \times S^n$ é homeomorfo a um subconjunto de $S^m \times \mathbb{R}^{n+1}$ (a saber, o próprio $S^m \times S^n$), mas este, por sua vez é homeomorfo a um subconjunto de $S^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, que por sua vez é homeomorfo a um subconjunto de $(\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$, como queríamos.

Exercício 4

Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ e pontos $a \in X$, $b \in Y$ tais que $X - \{a\}$ e $Y - \{b\}$ são homeomorfos mas X não é homeomorfo a Y.

Solução. Sejam $X = [0, 2\pi)$ o intervalo semi-aberto e $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário.

a) Mostraremos que a aplicação $f : X - \{a\} \longrightarrow Y - \{b\}$, onde $a = 0$ e $b = (1, 0)$, definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é um homeomorfismo. Com efeito, é claro que a aplicação f é contínua, além disso, f é bijeção. Mostrar que f^{-1} é contínua, é equivalente a mostrar que $f(F)$, donde $F \subset (X - \{a\})$, é um conjunto fechado. Com efeito, suponhamos que $F \subset (0, 2\pi)$ é fechado (sabemos que F é limitado) então F é compacto, logo $f(F)$ é um conjunto compacto, o qual implica que $f(F)$ é fechado em $S^1 - \{(1, 0)\}$, portanto f^{-1} é contínua, e concluímos que f é um homeomorfismo.

b) Agora mostraremos que a aplicação $f : X \longrightarrow Y$ não é um homeomorfismo. Com efeito, é claro que a aplicação f definida por $f = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é contínua e bijetiva. Mas a sua inversa $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ é descontínua no ponto $p = (1, 0)$. De fato, $\forall k \in \mathbb{N}$, sejam $t_k = 2\pi - \dfrac{1}{k}$ e $z_k = f(t_k)$. Então $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = \lim\limits_{k\to\infty} z_k = (1, 0)$, mas $\lim\limits_{k\to\infty} f^{-1}(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} t_k = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1, 0)$, assim f^{-1} é descontínua em $(1, 0)$. Portanto f não é homeomorfismo.

Exercício 5

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ compactos, $a \in X$ e $b \in Y$. Se $X - \{a\}$ é homeomorfo a $Y - \{b\}$, prove que X e Y são homeomorfos.

Solução. Seja $X - \{a\} \overset{\varphi}{\approx} X - \{b\}$. Defina

$$\begin{aligned} g : X &\to Y \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \neq a \\ b & \text{se } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Note que g é bijetiva!

Para verificarmos que g é contínua, basta provarmos que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Ora, tomemos então $(x_k) \subset X - \{a\}$ tal que $x_k \longrightarrow a$ e suponha que $g(x_k) \not\longrightarrow b$. Desse modo devem existir $\epsilon > 0$ e $\mathbb{N}' \overset{inf}{\subset} \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_k) = g(x_k) \notin B(b, \epsilon)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}'$.
Chamemos $\varphi(x_k) = y_k$. Então, como Y é compacto e $(y_k) \subset Y \Rightarrow \exists\, \mathbb{N}'' \subset N'$ e $c \neq b \in Y$ tal que $y_k \overset{k\in\mathbb{N}''}{\to} c$. Mas φ é bijetiva $\Rightarrow \exists\, \overline{a} \in X - \{a\}$ tal que $\varphi(\overline{a}) = c$, e então usando o fato que φ é homeomorfismo, segue que $x_k = \varphi^{-1}(y_k) \overset{k\in\mathbb{N}''}{\to} \varphi^{-1}(c) = \overline{a}$, onde $\overline{a} \neq a$. Contradição! Portanto $g(x_k) \longrightarrow b$. Como X é compacto e g é bijetiva e contínua, segue que g é homeomorfismo de X sobre $g(X) = Y$.

1.1.10 Conjuntos conexos

Exercício 1

Prove que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, para cada par de pontos $a, b \in X$ existe um conjunto conexo $C_{ab} \subset X$ tal que $a \in C_{ab}$ e $b \in C_{ab}$.

Solução.
$(\Rightarrow)$ Se X é conexo, basta tomar $C_{ab} = X$ sempre.
$(\Leftarrow)$ Seja $a \in X$ fixo. Então, para todo $x \in X$ existe um conjunto conexo $C_{ax} \subset X$ tal que $a, x \in C_{ax}$. Logo, $X = \bigcup_{x\in X} C_{ax}$. Como os conjuntos C_{ax} são conexos e têm em comum o ponto a entao X é conexo.

Exercício 2

Seja $Z \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ um conjunto enumerável. Dados arbitrariamente os pontos $a, b \in \mathbb{R}^n - Z$, prove que existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que os segmentos de reta $[a, c]$ e $[c, b]$ estão ambos contidos em $\mathbb{R}^n - Z$. Conclua que o complementar de um conjunto enumerável em $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Solução. Considere em $\mathbb{R}^n$ uma reta r que intersepta o segmento $[a, b]$ em seu ponto médio. Dados $x, y \in r$ onde $x \neq y$, os conjuntos $[a, x] \cup [x, b] = A_x$ e $A_y = [a, y] \cup [y, b]$ têm apenas os pontos a, b em comum. Suponha por absurdo, que nenhum dos $A_x, x \in r$, estivesse contido em $\mathbb{R}^n - Z$, escolheríamos para cada $x \in r$ um ponto $f(x) \in A_x \cap Z$. Isto define uma aplicação $f : r \longrightarrow Z$ injetiva, a qual que não existe pois r é não enumerável e Z por hipotese é enumerável. Logo $\exists c \in r$ tal que $A_c = [a, c] \cup [c, b] \subset \mathbb{R}^n - Z$. Daí podemos concluir que todo complementar de um conjunto enumerável é conexo por caminhos e portanto conexo.

Exercício 3

Prove que S^1 e S^2 não são homeomorfos.

Solução. $S^1 - \{p\} \cong \mathbb{R}$ e $S^2 - \{q\} \cong \mathbb{R}^2$, ambos através da projeção estereográfica. Daí tomando $p \neq p'$ temos que $S^1 - \{p, p'\} \cong \mathbb{R} - \{P\}$, portanto $S^1 - \{p, p'\}$ é desconexo.
Por outro lado, para $q \neq q'$ temos que $S^2 - \{q, q'\} \cong \mathbb{R}^2 - \{Q\}$, portanto $S^2 - \{q, q'\}$ é conexo por caminhos, logo conexo. Desse modo S^1 não é homeomorfo a S^2, pois se assim fosse teríamos $S^2 - \{q, q'\} \cong S^1 - \{p, p'\}$, o que não ocorre.

Exercício 4

Prove que S^1 não é homeomorfo a subconjunto de $\mathbb{R}$.

Solução. Um subconjunto de $\mathbb{R}$, para ser homeomorfo a S^1 deveria ser compacto e conexo, logo seria uma intervalo $[a, b]$, o qual fica desconexo pela remoção de um ponto interior, mas a remoção de qualquer um dos seus pontos não desconecta S^1.

Exercício 5

Quantas componentes conexas tem o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x \cdot y)^2 = (x \cdot y)\}$? Especifique-as.

Solução. X é a união dos dois eixos coordenados (onde ambos contem a origem) com os dois ramos da hipérbole. Portanto X tem três componentes conexas, onde a união dos dois eixos representa uma componente e cada um dos ramos da hipérbole é também uma componente conexa.

1.1.11 Limites

Exercício 1

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, prove que, para todo a, ponto de acumulação de X, existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Solução. Sendo f é uniformemente contínua, toda sequência de Cauchy de pontos (x_k) é levada em uma sequência de Cauchy $(f(x_k))$. Em particular, para toda sequência de pontos $(x_k) \in X - \{a\}$ com $\lim x_k = a$ existe $\lim f(x_k) = b$. Este valor não depende da sequência escolhida, pois se tivéssemos outra sequência (y_k) tal que $\lim y_k = a$ e $\lim f(y_k) = c \neq b$, então definiríamos a sequência $(z_k) \in X - \{a\}$ tal que $z_k = x_k$, se k é par e $z_k = y_k$, se k é ímpar. Neste caso a sequência (z_k) ainda cumpriria $\lim z_k = a$, mas $\lim f(z_k)$ não existiria em virtude de $(f(z_k))$ possuir duas subsequências convergindo para limites distintos.

Exercício 2

Seja $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$, com Y denso em X. Para toda aplicação uniformemente contínua $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$, prove que existe uma única aplicação $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, uniformemente contínua, tal que $F(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$.

Solução. Como Y é denso em X e f é uniformemente contínua em Y, existe $\lim\limits_{y \to x} f(y)$ para todo $x \in X$. Isto define $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, tome-se $\delta > 0$ tal que $y, y' \in Y$, $|y - y'| < \delta$ $\Rightarrow |f(y) - f(y')| < \varepsilon/2$. Agora se $x, x' \in X$ e $|x - x'| < \delta$, tomamos sequências (y_k) e (y'_k) em Y, com $\lim y_k = x$ e $\lim y'_k = x'$. Desprezando alguns termos iniciais, podemos supor que $|y_k - y'_k| < \delta$ onde $|f(y) - f(y')| < \varepsilon/2$ para $k \in \mathbb{N}$, logo $|f(x) - f(x')| = \lim |f(y_k) - f(y'_k)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Exercício 3

Dada $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, diz-se que se tem $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ quando para todo $B > 0$ existe $A > 0$ tal que $|x| > A \Rightarrow |f(x)| > B$. Se $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um polinômio complexo não-constante, prove que $\lim\limits_{z \to \infty} p(z) = \infty$.

Solução. Seja $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k$, polinômio complexo não constante. Temos que:

$$p(z) = z^k \left(\frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z} + a_k \right).$$

Tome

$$\varphi(z) = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z}.$$

Afirmação (*) $\lim\limits_{z \to \infty} \varphi(z) = 0$, isto é, dado $\frac{c}{2} = \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|z| > \delta \Rightarrow |\varphi(z)| < \frac{c}{2}$, onde $c = |a_k|$.

Logo

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z^k(\varphi(z) + a_k)| \\ &= |z^k \varphi(z) + z^k a_k| \\ &\geq |z^k||a_k| - |z^k||\varphi(z)|, \text{ para } |z| > \delta \\ &\geq |z^k| c - |z^k| \frac{c}{2} \\ &= |z^k| \left(c - \frac{c}{2} \right) \\ &= |z^k| \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|p(z)| \geq |z^k|\frac{c}{2}, \text{ para } |z| > \delta$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to\infty} |p(z)| = \infty.$$

Prova da Afirmação (*) $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $|z| > \delta \Rightarrow |\varphi(z)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| = & \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \leq \left|\frac{a_0}{z^n}\right| + \cdots \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| \\
\leq & \left|\frac{a_0}{z}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| \leq \frac{L}{|z|} + \cdots + \frac{L}{|z|} \\
= & \frac{nL}{|z|}
\end{aligned}$$

onde $L = \max\{|a_i|, i = 0, \ldots, n-1\}$.

Logo, tomando $\delta = \dfrac{nL}{\varepsilon}$, temos

$$|z| > \frac{nL}{\varepsilon} \Rightarrow |\varphi(z)| < \frac{nL}{|z|} = \frac{nL}{\frac{nL}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$|\varphi(z)| < \varepsilon.$$

Exercício 4

Seja $X = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \neq 0\}$. Defina $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = \dfrac{sen\,(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)}{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$. Prove que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Solução. Sabemos da Análise Real que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{sen\,(t)}{t} = 1$. Daí, dado $\varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ t \in \mathbb{R},\ 0 < |t| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{sen\,(t)}{t} - 1\right| < \varepsilon$. Se tomarmos em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo e assumirmos $\delta < 1$, então para todo $x \in X,\ 0 < |x| < \delta$, temos $0 < |x_i| \leq |x| < \delta, \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$, daí $0 < |x_1 \cdot x_2 \cdots x_n| < \delta^n < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{sen\,(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)}{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} - 1\right| < \varepsilon$, como queríamos.

1.2 - Caminhos em $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Caminhos diferenciáveis

Exercício 1

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Se existirem $a \in I$ e $b \in \mathbb{R}^n$ tais que a é ponto de acumulação do conjunto $f^{-1}(b)$, prove que $f'(a) = 0$.

Solução. Existe $x_k \in I - \{a\}$, tal que $\lim x_k = a$ e $(x_k) \subset f^{-1}(b)$, ou seja, $f(x_k) = b, \forall\, k > 0$. Mas f é contínua, logo $f(a) = \lim f(x_k) = \lim b = b$. Então, por f ser diferenciável, $f'(a)$ existe e é unica, daí

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{f(a) - f(a)}{x_k - a} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{0}{x_k - a} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercício 2

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho diferenciável, cuja imagem coincide com o gráfico da função $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g(t) = |t|$. Se a é um ponto interior de I tal que $f(a) = (0, 0)$, prove que $f'(a) = 0$.

Solução. Como a imagem de f coincide com o gráfico de g temos que $f(t) = (x(t), |x(t)|), \forall\, t \in I$, com $f(a) = (0, 0)$. Note que $|x(t)| \geq 0, \forall\, t \in I \Rightarrow$ a é ponto de mínimo da função $t \mapsto |x(t)|$ e então a derivada desta função é zero em $t = a$. Assim, como

$$-|x(t)| \leq x(t) \leq |x(t)| \Rightarrow x'(a) = 0.$$

Portanto,

$$f'(a) = (x'(a), |x|'(a)) = (0, 0).$$

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a hélice cilíndrica, definida por $f(t) = (\cos t, sen\, t, t)$. Prove que, para todo $t \in \mathbb{R}$, a reta que liga os pontos $f(t)$ e $f(t) + f''(t)$ intersecta o eixo vertical de $\mathbb{R}^3$.

Solução. Temos $f'(t) = (-sen\, t, \cos t, 1)$ e $f''(t) = (-\cos t, -sen\, t, 0)$, então

$$f(t) + f''(t) = (cost, sent, t) + (-cost, -sent, 0) = (0, 0, t)$$

o qual já pertence ao eixo vertical de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4

O caminho $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $g(t) = (a \cos bt, asen\, bt, ct)$, é também chamado de hélice. Determine a relação entre as constantes a, b, c a fim de que o caminho g esteja parametrizado pelo comprimento do arco.

Solução. Uma curva α é parametrizada pelo comprimento do arco se $|\alpha^{'}(t)| = 1$.
Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $g(t) = (a \cos bt, asen\, bt, ct)$.
Temos que $g^{'}(t) = (-absen\, bt, ab \cos bt, c)$ logo,

$$\begin{aligned}
|g^{'}(t)| &= \sqrt{\langle g^{'}(t), g^{'}(t)\rangle} \\
&= \sqrt{(-absen\, bt)^2 + (ab\cos bt)^2 + c^2} \\
&= \sqrt{a^2b^2 sen\,^2 bt + a^2b^2 \cos^2 bt + c^2} \\
&= \sqrt{a^2b^2(sen\,^2 bt + \cos^2 bt) + c^2} \\
&= \sqrt{a^2b^2 + c^2}.
\end{aligned}$$

Como queremos que g seja parametrizada pelo comprimento do arco temos que ter

$$\begin{aligned}
|g^{'}(t)| &= 1 \\
&\Rightarrow \sqrt{a^2b^2 + c^2} = 1 \\
&\Rightarrow a^2b^2 + c^2 = 1.
\end{aligned}$$

1.2.2 Cálculo diferencial de caminhos

Exercício 1

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável tal que $f(a) = f(b) = 0$. Prove que existe $c \in (a, b)$ tal que $\langle f(c), f'(c)\rangle = 0$.

Solução. Seja $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(t) = \langle f(t), f(t)\rangle$. Temos que g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Além disso $g(a) = g(b)$. Daí, pelo teorema do valor médio para funções reais, temos que existe $c \in (a, b)$ tal que $0 = g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) = 2\langle f(c), f'(c)\rangle (b - a) \Rightarrow \langle f(c), f'(c)\rangle = 0$.

Exercício 3

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ um caminho diferenciável cujos valores são matrizes $n \times n$. Prove que $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, dado por $g(t) = f(t)^k$, é diferenciável e calcule $g'(t)$.

Solução. Temos que g é diferenciável, pois é a composta $t \mapsto f(t) \mapsto (f(t), \cdots, f(t)) \xrightarrow{\varphi} f(t)^k$, onde $\varphi : \mathbb{R}^{n^2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^2}$ é a aplicação k-linear dada pelo produto de matrizes.

A derivada da função $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^{n^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n^2} \\ & & x & \longmapsto & x^k \end{array}$ é a transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, dada por $f'(x) \cdot v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x^{i-1} \cdot v \cdot x^{k-i}$.

Em dimensão 1 e pela regra da cadeia

$$f'(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} x(t)^{i-1} \cdot x(t)^{k-i} \right) \cdot f'(t).$$

1.2.3 A integral de um caminho

Exercício 1

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se $|f'(t)| \leq \varphi'(t)$ para todo $t \in (a, b)$, prove que $|f(b) - f(a)| \leq \varphi(b) - \varphi(a)$.

Solução. Pelo Teorema Fundamental Cálculo para caminhos temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)dt &= f(b) - f(a) \\ \Rightarrow |f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)|dt \\ &\leq \int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a) \end{aligned}$$

$$\therefore |f(b) - f(a)| \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Exercício 2

Seja $f : [a, a + h] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^k. Prove que

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{k-1}(a) + r_k$$

onde

$$r_k = \frac{h^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1 - t)^{k-1} f^{(k)}(a + th)dt.$$

Solução. Como $f(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$ é um caminho de classe C^k, segue que $f_i(t) : [a, a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$ é um caminho de classe C^k, $\forall i = 1 \ldots n$. Pela fórmula de Taylor com resto integral para funções reais temos que

$$f_i(a+h) = f_i(a) + h \cdot f_i'(a) + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f_i^{k-1}(a) + r_k^i,$$

onde $r_k^i = \dfrac{h^k}{(k-1)!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{k-1} f_i^{(k)}(a+th)dt, \forall\, i = 1, \ldots, n.$
Assim,

$$\begin{aligned}
f(a+h) = & \ \big(f_1(a+h), \ldots, f_n(a+h)\big) \\
= & \ \Big(f_1(a) + h \cdot f_1'(a) + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f_1^{k-1}(a) + r_k^1, \ldots, f_n(a) + h \cdot f_n'(a) + \cdots + \\
& + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f_n^{k-1}(a) + r_k^n\Big) \\
= & \ f(a) + h \cdot f'(a) + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{k-1}(a) + r_k,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
r_k = & \ (r_k^1, \cdots, r_k^n) \\
= & \ \left(\frac{h^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f_1^{(k)}(a+th)dt, \ldots, \frac{h^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f_n^{(k)}(a+th)dt\right) \\
= & \ \frac{h^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(a+th)dt.
\end{aligned}$$

Exercício 3

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ caminhos de classe C^1. Prove que

$$\int_a^b \Big\langle f(t), g^{'}(t) \Big\rangle\, dt = \langle f(b), g(b)\rangle - \langle f(a), g(a)\rangle - \int_a^b \Big\langle f^{'}(t), g(t) \Big\rangle\, dt.$$

Solução. Denotando $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e $g^{'} = (g_1^{'}, \ldots, g_n^{'})$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big\langle f(t), g^{'}(t)\Big\rangle dt = & \ \int_a^b f_1(t) g_1^{'}(t) + \cdots + f_n(t) g_m^{'}(t) dt \\
= & \ \int_a^b f_1(t) g_1'(t) dt + \int_a^b f_2(t) g_2'(t) dt + \cdots + \int_a^b f_n(t) g_n'(t) dt \\
\overset{(*)}{=} & \ f_1(t) g_1(t)|_a^b - \int_a^b f_1^{'}(t) g_1(t) dt + \cdots + f_n(t) g_n(t)|_a^b - \int_a^b f_n^{'}(t) g_n(t) dt \\
= & \ f_1(b) g_1(b) - f_1(a) g_1(a) - \int_a^b f_1^{'}(t) g_1(t) dt + \cdots + f_n(b) g_n(b) - f_n(a) g_n(a) - \\
& - \int_a^b f_n^{'}(t) g_n(t) dt \\
= & \ \langle f(b), g(b)\rangle - \langle f(a), g(a)\rangle - \int_a^b \Big\langle f^{'}(t), g(t)\Big\rangle dt.
\end{aligned}$$

$(*)$ Teorema da Integração por partes:

Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ possuem derivadas integráveis então

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

1.2.4 Caminhos retificáveis

Exercício 1

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho retificável, com $f(a) = A$ e $f(b) = B$. Se seu comprimento é $l(f) = |B - A|$, prove que f é uma reparametrização do caminho retilíneo $[A, B]$.

Solução. Para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ temos que $|B - A| \leq l(f, P) \leq l(f)$. Como $l(f) = |B - A|$, segue-se que $l(f, P) = |B - A|$. Resulta que os pontos $A = f(t_0), f(t_1) \cdots, f(t_k) = B$ estão dispostos ordenadamente sobre o segmento de reta AB. Então, $\forall t \in [a, b]$, tem-se $f(t) = A + \varphi(t) \cdot v$, com $v = B - A$, e a função $\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, b]$ é não-decrescente. Com $f \in C^1$, segue-se que $\varphi \in C^1$, como é não-decrescente, $\varphi' \geq 0$. Logo f é uma reparametrização do caminho retilíneo $f(t) = A + t \cdot v$.

Exercício 3

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Dados $a, b \in U$, prove que existe um caminho retificável $f : I \to U$ começando em a e terminando em b.

Solução. Seja $a, b \in U$. Como U é aberto e conexo, segue que U é conexo por caminhos, logo existe um caminho poligonal contido en U que liga a e b. Isto é, existem $x_0, x_2, \ldots, x_n \in U$ tais que o caminho retilíneo $P_i : [0, 1] \longrightarrow U$ com $P_i(0) = x_{i-1}$ e $P_i(1) = x_i$ está contido em U, $\forall\ i = 1, \ldots, n$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. Defina o caminho $f : [0, 1] \to U$ como a justaposição dos caminhos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ para uma partição $P = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\}$. Assim,

$$l(f; P) = \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} |x_i - x_{i-1}| \leq nK,$$

onde $K = \max\limits_{i=1,n}\{|x_i - x_{i-1}|\}$. Então $l(f; P)$ é limitado para toda partição P. Portanto f é retificável.

Exercício 4

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo, defina a *distância intrínseca* entre os pontos $a, b \in U$ como o ínfimo $d_U(a, b)$ dos comprimentos dos caminhos retificáveis $f : I \longrightarrow U$, que ligam a e b. Prove que se (x_k) é uma sequência de pontos em U e $a \in U$, tem-se que $\lim x_k = a$ se, e somente se, $\lim d_U(x_k, a) = 0$.

Solução.

($\Leftarrow$) Da definição de distância intrínseca entre os pontos x e a concluimos que $|x-a| \leq d_U(x,a)$, logo se $\lim d_U(x_k,a) = 0 \Rightarrow \lim x_k = a$.

($\Rightarrow$) Seja $B = B(a;r) \subset U$. Para pontos $x_k \in B$, tem-se que $d_U(x_k,a) = |x-a|$, portanto $\lim x_k = a \Rightarrow \lim |x_k - a| = 0 \Rightarrow \lim d_U(x_k,a) = 0$, pois $x_k \in B$ para todo k suficientemente grande.

1.3 - Funções Reais de n Variáveis

1.3.1 Derivadas parciais

Exercício 1

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *i-convexo* $(1 \leq i \leq n)$ quando para quaisquer $a, b \in X$ tais que $b = a + te_i$, tem-se $[a,b] \subset X$. (Se $X \subset \mathbb{R}^2$, diz-se então que X é *horizontalmente convexo* ou *verticalmente convexo*, conforme seja $i = 1$ ou $i = 2$). Prove que se o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é i-convexo e a função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpre $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ para todo $x \in U$ então f não depende da i-ésima variável, isto é, $x, x + te_i \in U \;\Rightarrow\; f(x + te_i) = f(x)$.

Solução. Como U é i-convexo, o segmento de extremos x e $x + te_i$ está contido em U. Além disso, a existência de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ para todo $x \in U$ nos assegura que f é contínua em $[x, x+te_i]$ e é diferenciável em $(x, x+te_i)$, daí pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\ \theta \in (0,1)$ tal que $f(x+te_i) - f(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i)t = 0 \;\Rightarrow\; f(x+te_i) = f(x)$, como queríamos.

Exercício 2

Sejam $X = \{(x,0); x \geq 0\}$ e $U = \mathbb{R}^2 - X$. Defina $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x,y) = x^2$ quando $x > 0, y > 0$ e $f(x,y) = 0$ quando $x \leq 0$ ou $y < 0$. Mostre que se tem $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ em todos os pontos de U mas f depende de y.

Solução. O conjunto aberto $U = \mathbb{R}^2 - X$ é horizontalmente convexo. E, para determinarmos as derivadas parciais de f em relação à y, consideremos as duas restrições que definem f:

(i) Para $x > 0, y > 0, f(x,y) = x^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0;$

(ii) Para $x \leq 0$ ou $y < 0, f(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Para mostrar que f depende de y, basta mostrar que f assume valores diferentes para diferentes valores de y. Para tal, considerando $x > 0, y > 0$, temos que $f(x, y) = x^2$ é estritamente positiva e, tomando o simétrico da segunda coordenada (essa passa a ser negativa), obtemos $f(x, -y) = 0$.

Exercício 3

Diz-se que um caminho retilíneo $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é *paralelo ao i-ésimo eixo* quando ele é da forma $f(t) = a + te_i,\ t \in I$. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo, prove que dois pontos $a, b \in U$ quaisquer podem ser ligados por um caminho poligonal contido em U, cujos trechos retilíneos são paralelos aos eixos. Conclua que se $U \subset \mathbb{R}^n$ é conexo e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpre $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ para todo $x \in U$ e qualquer i com $1 \leq i \leq n$, então f é constante.

Solução. Dois pontos quaisquer de uma bola podem ser ligados por um caminho poligonal contido nela, o qual tem seus lados paralelos aos eixos. Segue-se daí, que o mesmo ocorre em qualquer aberto conexo. Fixando $a \in U$, para todo ponto $x \in U$, unindo-o ao ponto a por um caminho desse tipo, em cada segmento retilíneo do caminho varia apenas a i-ésima coordenada, e como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, a função f se mantém constante ao longo desse segmento. Então $f(x) = f(a)$ para todo $x \in U$ e f é constante.

Exercício 4

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$ limitadas, prove que f é contínua.

Solução. Seja $M > 0$ tal que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M, \forall\ i = 1, \ldots, n$ e $\forall\, x \in M$.
Dados $x, x + v \in U$ com $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definamos a seguinte sequência de vetores em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} v_0 & = & 0 \\ v_1 & = & v_0 + \alpha_1 e_1 \\ v_2 & = & v_1 + \alpha_2 e_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & = & v_{n-1} + \alpha_n e_n = v. \end{array}$$

Daí

$$\begin{array}{rcl} f(x+v) - f(x) & = & f(x+v_1) - f(x+v_0) + f(x+v_2) - f(x+v_1) + \ldots + f(x+v_n) - f(x) \\ \Rightarrow f(x+v) - f(x) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [f(x+v_i) - f(x+v_{i-1})] \end{array}$$

Pelo T.V.M (de uma variável),

$|f(x+v_i) - f(x+v_{i-1})| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| .|\alpha_i| \leq M|\alpha_i|, z \in [v_{i-1}, v_i]$

Então,

$|f(x+v) - f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = M|v|$, daí fazendo $y = x + v$ obtemos que $|f(y) - f(x)| \leq M|x-y|$, logo f é contínua.

1.3.2 Funções de classe C^1

Exercício 1

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Mostre que, para todo $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, existe a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ mas f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Solução. Se $v = (\alpha, \beta)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(t\alpha)^2 t\beta}{(t\alpha)^2 + (t\beta)^2} \frac{1}{t} = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \ \forall\, v \neq 0.$$

Em particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \implies \nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 0.$$

Se f fosse diferenciável no ponto $(0,0)$, teríamos $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla(0,0), v \rangle$, o que não ocorre.

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que possui todas as derivadas direcionais em qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ para todo $u \in S^{n-1}$, prove que existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, seja qual for $v \in \mathbb{R}^n$.

Solução. Seja $u \in S^{n-1}$. Então a condição $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ satisfazendo $-\delta < t < 0$ tem-se $\dfrac{f(u+tu) - f(u)}{t} > 0 \Rightarrow f(u+tu) < f(u)$.

Note que se $-\delta < t < 0$ então $1 - \delta < 1 + t < 1 \Rightarrow |(1+t)u| < |u| = 1$ e assim $(1+t)u \in B(0,1)$. Além disso, $f\big((1+t)u\big) < f(u)$. Como esta desigualdade vale para todo $u \in S^{n-1}$, temos que o mínimo de $f|_{B[0,1]}$ é assumido em algum ponto $a \in B(0,1)$.

Definindo $\varphi_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_v(t) = f(a+tv), \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n$, temos que φ tem um mínimo local quando $t = 0$ e assim $0 = \varphi_v'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Outra Solução.

Temos que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{f(u+tu) - f(u)}{t} > 0.$
Considere $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_u(t) = f(tu)$.
Como

$$\varphi_u'(1) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\varphi_u(1+h) - \varphi_u(1)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f\big((1+h)u\big) - f(u)}{h} = \frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0 \;\Rightarrow\; \varphi_u'(1) > 0,$$

então existe $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \varepsilon < t < 1 \Rightarrow \varphi_u(t) < \varphi_u(1)$.
Assim,

$$f(tu) < f(u),\ 1 - \varepsilon < t < 1,\ u \in S^{n-1}. \qquad (i)$$

Como f é contínua na bola fechada $B[0,1]$, pelo Teorema de Weierstrass, f assume um mínimo nesse conjunto, o qual é atingido num ponto a tal que $|a| < 1$. Se essa desigualdade não fosse estrita, teríamos que $a \in S^{n-1}$ e assim, de (i), a não seria ponto de mínimo.
Como $a \in \text{int}B[0,1]$, temos que $a + tv \in B[0,1]$, para t suficientemente pequeno.
Definindo $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\psi_v(t) = f(a+tv)$, segue que

$$\psi_v(t) = f(a+tv) \geq f(a) = \psi_v(0), \text{ para cada } v \in \mathbb{R}^n. \qquad (ii)$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\psi_v(t) - \psi_v(0)}{t} = \psi_v'(0) = 0,\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n,$$

pois, por (ii), 0 é um ponto de mínimo local de ψ para cada $v \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto 0. Se $f(tx) = t \cdot f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, prove que f é linear. Conclua que a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $\varphi(0,0) = 0$, não é diferenciável na origem.

Solução. Primeiro note que f diferenciável em $0 \Rightarrow f$ contínua em 0. Como $\forall\ t > 0$, $f(tx) = tf(x)$, então $\lim\limits_{t \to 0^+} f(tx) = f\left(\lim\limits_{t \to 0^+} tx\right) = f(0)$. Além disso,

$$f(tx) = tf(x) \;\Rightarrow\; f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(tx) = \lim_{t \to 0^+} tf(x) = 0.$$

Por outro lado, temos que

$$f'(0)x = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(tx) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} f(x) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto f é linear.

No caso da função $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } x^2+y^2 \neq 0 \text{ e } \varphi(x,y) = 0 \text{ se } x^2+y^2 = 0,$$

temos que $f(tx,ty) = \dfrac{t^3x^3}{t^2(x^2+y^2)}$. Daí, $\forall\, t > 0,\ \varphi(tx,ty) = t\left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right) = t\varphi(x,y)$ e então se φ fosse diferenciável em $(0,0)$, pelo que foi provado anteriormente, teríamos $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ linear, o que não ocorre.

Exercício 4

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Prove que, dados $a \in U$ e $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $x, y \in U, |x-a| < \delta, |y-a| < \delta \Rightarrow f(x)-f(y) = \langle \nabla f(a), x-y\rangle + r(x,y)$, onde $|r(x,y)| < \varepsilon |x-y|$.

Solução. $f \in C^1 \Rightarrow r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \in C^1(U)$ e $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}(a) = 0,\ i = 1,\ldots,n$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{\partial r}{\partial x_i}(x) - \partial r \partial x_i(a)\right| < \varepsilon, \forall\, x$ com $|x-a| < \delta$.
Então pelo T.V.M., $|x-a| < \delta, |y-a| < \delta \Rightarrow |r(x) - r(a)| < \varepsilon|x-y|$, pois $B(a;\delta)$ é convexa.
Agora note que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$ e $f(y) = f(a) + f'(a)(y-a) + r(y)$ implicam $f(x) - f(y) = f'(a)(x-y) + r(x) - r(y)$.
$r(x,y) := r(x) - r(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = \langle \nabla f(a), x-y\langle + r(x,y)$, onde $|r(x,y)| < \varepsilon|x-y|$.

1.3.3 O Teorema de Schwarz

Exercício 1

Seja $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no retângulo aberto $I \times J \subset \mathbb{R}^2$. Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é identicamente nula, prove que existem $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, \psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tais que $f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$ para todo $(x,y) \in I \times J$.

Solução. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são identicamente nulas, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não depende de x e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não depende de y. Fixando $(x_0, y_0) \in I \times J$ podemos então definir as funções $\overline{\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\overline{\psi} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\overline{\varphi}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ e $\overline{\psi}(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$, as quais são de classe C^1 e cumprem $\overline{\varphi}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \overline{\psi}(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para todo $(x,y) \in I \times J$. Então

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,t)dt + f(x_0,y_0) \\
&= \int_{x_0}^{x} \overline{\varphi}(s)ds + \int_{y_0}^{y} \overline{\psi}(t)dt + f(x_0,y_0) \\
&= \varphi(x) + \psi(y).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Use o exercício anterior para provar que se $g : R \times R \to R$ é de classe C^2, com $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, então existem $\varphi : R \longrightarrow R$ e $\psi : R \longrightarrow R$ de classe C^2, tais que $g(x,y) = \varphi(x+y) + \phi(x-y)$ para todo (x,y).

Solução. Definamos $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, pondo $f(u,v) = g\,(u+v, u-v)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = 0.
\end{aligned}
$$

Logo f satisfaz as condições do exercício anterior, donde segue que existem $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(u,v) = \varphi(u) + \psi(v) = g\,(u+v, u-v)$, fazendo $u+v = x$ e $u-v = y$ temos $u = x+y$ e $v = x-y$

$$\therefore g(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y),\ \forall\ (x,y).$$

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, tal que $f(t,x) = t^2 f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i,j = 1,\dots,n)$ tais que $f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_i x_j$ para todo $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Como explicar $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$?

Solução.

(i) Derivando a igualdade $t^2 f(x) = f(tx)$ em relação a t, obtemos $2tf(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)x_j$ onde se usou a regra da cadeia. Derivando outra vez em relação a t (isso é possível, pois $f \in C^2$):

$$2f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)x_i x_j,$$

ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)x_i x_j.$$

Tomando o limite quando $t \longrightarrow 0$, obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\lim_{t\to 0} tx\right)x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

onde $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$.

(ii) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ não é de classe C^2, pois não tem derivadas parciais contínuas no ponto $(0,0)$. Portanto, $f(x,y) \neq \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}xy$.

Exercício 4

Sejam $f, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. (Isto é, as funções-coordenada de f e φ são de classe C^2.) Suponha que $\left\langle f(x), \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle = 0$ para todo $x \in U$ e todo $i = 1,\dots n$. Prove que a matriz $[a_{ij}(x)]$, onde $a_{ij}(x) = \left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x), \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$, é simétrica, seja qual for $x \in U$.

Solução. Temos que $f, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ são de classe C^2 . Seja $\left\langle f(x), \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle = 0\ \forall x \in U$ e todo $i = 1,\dots,n$. Em particular, $\left\langle f(x), \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = 0$.

Logo, derivando a primeira igualdade em relação a x_j temos:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j x_i}(x) \right\rangle = 0 \qquad (1)$$

e derivando a segunda igualdade em relação a x_i temos:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) \right\rangle = 0. \qquad (2)$$

Igualando (1) e (2) obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j x_i}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) \right\rangle$$

$\Rightarrow$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j x_i}(x) \right\rangle - \left\langle f(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle.$$

Pelo Teorema de Schwarz, segue que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$.

Portanto a matriz $[a_{ij}]$, onde $a_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$ é simétrica.

1.3.4 A fórmula de Taylor

Exercício 1

Seja $r : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém a origem 0. Se r, juntamente com todas as suas derivadas parciais até as de ordem k, se anulam no ponto 0, prove que $\lim\limits_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|^k} = 0$.

Solução. Provaremos por indução sobre k.

Para $k = 1$ a afirmação é verdadeira, pois por hipótese r é diferenciável e $r'(0) = r(0) = 0$, então $r(v) = r(0) + r'(0)v + \overline{r}(v)$, onde $0 = \lim\limits_{v\to 0} \frac{\overline{r}(v)}{|v|} = \lim\limits_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|}$.

Supondo o resultado válido para $k-1$ e seja r uma função k vezes diferenciável em 0, com todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k nulas na origem. Então para cada $i = 1, \ldots, n$ a função $\frac{\partial r}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ é $k-1$ vezes diferenciável e também tem todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k-1$ nulas na origem.

Daí, pela hipótese de indução, temos que $\lim\limits_{v\to 0} \frac{\frac{\partial r}{\partial x_i}(v)}{|v|^{k-1}} = 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $r(v) - r(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_i}(\theta_v)v_i$, onde $r(0) = 0$. Daí, $\frac{r(v)}{|v|^k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial r}{\partial x_i}(\theta_v)}{|v|^{k-1}} \cdot \frac{v_i}{|v|}$.

Note que, para todo $i = 1, \ldots, n$, $\frac{v_i}{|v|}$ é limitado, então no limite temos $\lim\limits_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|^k} = 0$.

1.3.5 Pontos críticos

Exercício 1

Uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, chama-se *harmônica* quando $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x) = 0$ para todo $x \in U$. Prove que a matriz hessiana de uma função harmônica não pode ser definida (nem positiva nem negativa).

Solução. Se $[h_{ij}]$ é a matriz da forma quadrática H então $h_{ii} = H \cdot v^2$, com $v = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Portanto os elementos da diagonal da matriz de uma forma quadrática positiva (ou negativa) são todos números positivos (ou negativos) e assim sua soma não pode ser igual a zero.

Exercício 2

Sejam $f : U \longrightarrow R$ uma função arbitrária,definida num aberto $U \subset R^n$. Prove que o conjunto dos pontos de máximo (ou de mínimo) local estrito de f é enumerável.

Solução. Seja U o conjunto dos pontos de máximo local estrito de f. Dado $x \in U, \exists\ B(x; 2\delta) \subset U$, tal que $y \in B(x; 2\delta),\ y \neq x\ \Rightarrow f(y) < f(x)$ (pois U é aberto e x é máximo local estrito). Para cada $x \in U$ escolhamos um ponto $q_x \in \mathbb{Q}^n \cap B(x; \delta)$, (isto é possível pois $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$) e um número racional $r_x > 0$ tal que $|x - q_x| < r_x < \delta$, portanto $B(q_x; r_x) \subset B(x; 2\delta)$ e daí $y \in B(q_x, r_x)$ com $y \neq x \Rightarrow f(y) < f(x)$.

A correspondência $x \mapsto (q_x, r_x)$ é injetiva pois se $q_x = q_{x'}$ e $r_x = r_{x'}$ então $x' \in B(q_x; r_x)$ e $x \in B(q_{x'}; r_{x'})$. Se fosse $x \neq x'$, teríamos $f(x') < f(x)$ e $f(x) < f(x')$, o que é um absurdo. Disto segue que f é injetiva e assim existe uma correspondência injetiva entre os elementos de U e um subconjunto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, portanto U é enumerável.

Exercício 3

Determine os pontos críticos de função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ e da função $g(x, y) = x^3 - y^3 - x + y$.

Solução. Como $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = -2sen\,(x^2 + y^2) \cdot (x, y)$, os pontos críticos de f são aqueles para os quais $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Temos $x = y = 0$ ou $\text{sen}(x^2 + y^2) = 0$, i.é, a origem e os pontos (x, y) com $x^2 + y^2 = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ (circunferências com centro na origem e raio $\sqrt{k\pi}$).

Como $\nabla g(x, y) = (3x^2 - 1, -3y^2 + 1)$, os pontos críticos (x, y) devem satisfazer $3x^2 - 1 = 0$ e

$-3y^2 + 1 = 0$, assim os pontos críticos são

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), C = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ e } D = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

A matriz Hessiana $Hg(x, y)$ é dada por $\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$. Vejamos a natureza dos pontos críticos. Seja $v = (\alpha, \beta)$.

No ponto A, tem-se

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2\sqrt{3}(\alpha^2 - \beta^2).$$

Logo a forma quadrática é indefinida. Portanto, A é um ponto de sela.

Analogamente podemos observar que C é un ponto mínimo local, B é um máximo local e D é outro ponto de sela.

Exercício 4

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^n$. Se, para todo $a \in \partial U$, tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, prove que existe em U pelo menos um ponto crítico de f.

Solução. Defina $F : \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = f(x)$, se $x \in U$, e $F(x) = 0$, se $x \in \partial U$. Por hipótese, temos que $f|_U$ é contínua, pois f é diferenciável em U. Além disso, se $a \in \partial U$, então $\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \overset{\text{hip.}}{=} F(a)$. Logo, F é contínua em $\bar{U}$. Como $\bar{U}$ é compacto, pelo Teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimo em $\bar{U}$. Como $F(x) = 0, \ \forall \ x \in \partial U$, então, exceto se F for identicamente nula, pelo menos um ponto crítico (máximo ou mínimo) é assumido em U. Portanto, f possui pelo menos um ponto crítico.

Exercício 5

Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2 - 1)^2$ e calcule as matrizes hessianas correspondentes.

Solução. Temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2(x^2 - y^2 - 1)2x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2(x^2 - y^2 - 1)2y$. Então os pontos críticos de f são as duplas (x, y) que satisfazem:

$$\begin{cases} x + x(2x^2 - 2y^2 - 2) = 0 \\ y - y(2x^2 - 2y^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

Então segue da primeira expressão que devemos ter $x = 0$ ou $2x^2 - 2y^2 = 1$ e da segunda expressão devemos ter $y = 0$ ou $2x^2 - 2y^2 = 3$.

Daí as soluções desse sistema são os pontos $(0,0)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e suas respectivas matrizes hessianas são:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6

Dados $a_1, \ldots, a_k$ em $\mathbb{R}^n$, determine o ponto em que a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} |x - a_i|^2$, assume o valor mínimo.

Solução. $f(x) = |x - a_1|^2 + |x - a_2|^2 + \cdots + |x - a_k|^2$.

Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2(\langle x - a_1, e_i\rangle + \langle x - a_2, e_i\rangle + \cdots + \langle x - a_k, e_i\rangle) = 2\left\langle kx - \sum_{j=1}^{k} a_j, e_i \right\rangle.$$

Daí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow kx - \sum_{j=1}^{k} a_j = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j}{k}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = 0, \ \text{ se } i \neq j, \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 2k, \ \text{ se } i = j.$$

Desse modo

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 2k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2k & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2k \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow \det Hf(x) = (2k)^n > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j$ é ponto de mínimo de f.

1.3.6 Funções convexas

Exercício 1

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Prove que a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = d(x, A)$, é convexa.

Solução. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1]$, sejam $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{A}$ tais que $d(x, A) = |x - \overline{x}|$ e $d(y, A) = |y - \overline{y}|$. Então $(1 - t)\overline{x} + t\overline{y} \in \overline{A}$ (pois o fecho de um conjunto convexo é também convexo). E como $d(x, A) = d(x, \overline{A})$, temos:

$$\begin{aligned} f\big((1-t)x + ty\big) &= d\big((1-t)x + ty, A\big) \\ &\leq \big|[(1-t)x + ty] - [(1-t)\overline{x} + t\overline{y}]\big| \\ &= |(1-t)(x - \overline{x}) + t(y - \overline{y})| \\ &\leq (1-t)|x - \overline{x}| + t|y - \overline{y}| \\ &= (1-t)f(x) + tf(y). \end{aligned}$$

Exercício 2

Prove que todo ponto de mínimo local de uma função convexa é um ponto de mínimo global. Além disso, o conjunto dos pontos de mínimo é convexo.

Solução. Seja $a \in X$ um ponto de mínimo local da função convexa $f : X \longrightarrow R$. Se existisse um $x \in X$ tal que $f(x) < f(a)$ então, para todo $t \in [0, 1]$, teríamos $f\big((1-t)a + tx\big) \leq (1 - t)f(a) + tf(x) < (1-t)f(a) + tf(a) = f(a)$. Tomando $t > 0$ pequeno, obteríamos pontos $y = (1 - t)a + tx$ tão próximos de a quanto se deseje, com $f(y) < f(a)$, logo a não seria um ponto de mínimo local. Além disso, se x e y são pontos de mínimo de f, então como o mínimo local de f é mínimo global, segue que $f(x) = f(y)$, daí se $z = (1-t)x + ty$, para algum $t \in [0, 1]$, então $f(x) \leq f(z) \leq (1-t)f(x) + tf(x) = f(x)$, portanto $f(z) = f(x) \Rightarrow z$ é mínimo global.

Exercício 3

Prove que uma função convexa, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, com U aberto, (mesmo não-diferenciável) não possui pontos de máximo local estrito.

Solução. Seja $a \in U$. Como U é aberto, a é ponto médio de segmentos de reta $[b, c] \subset U$. Como f é convexa, tem-se

$$f(a) \leq \frac{1}{2}\big(f(b) + f(c)\big)$$

Suponha que a é um máximo local estrito, assim $f(a) > f(b)$ e $f(a) > f(c)$, logo $2f(a) > f(b) + f(c)$. Segue-se que

$$f(b) + f(c) \geq 2f(a) > f(b) + f(c)$$

Esta contradição conclui a prova.

Exercício 4

Prove que o conjunto dos pontos críticos (todos necessariamente mínimos globais) de uma função convexa diferenciável é um conjunto convexo, no qual f é constante.

Solução. Dados $a, b \in U$ pontos críticos arbritrários. Sabemos que ambos são pontos de mínimo global de f e, em particular, $f(a) = f(b)$. Assim, dado $t \in [0,1] \Rightarrow f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) = f(a)$, como $f(a)$ é ponto mínimo global, então concluimos que $f(1-t)a+tb)) = f(a)$ e portanto o conjunto dos pontos críticos de f é convexo.

Exercício 5

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa, prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) \leq c$ é convexo. Dê exemplo mostrando que a recíproca é falsa.

Solução. Tomemos a e $b \in X$, tais que $f(a)$ e $f(b) \leq c$. Se $t \in [0,1]$, então defina $z = t(b-a) + a = (1-t)a + tb$. Temos que

$$f(z) = f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \leq (1-t)c + ct = c,$$

portanto $z \in Y$, onde $Y = \{x \in X; f(x) \leq c\} \Rightarrow Y$ é convexo.

Agora note que $f(x) = -x^2$ não é uma função convexa, mas para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $Y = \{x \in X; f(x) \leq c\}$ é convexo, portanto a recíproca é falsa.

Exercício 6

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *quase convexa* quando, para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $X_c = \{x \in X; f(x) \leq c\}$ é convexo. Prove que f é quase-convexo se, e somente se, $f\big((1-t)x + ty\big) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ para $x, y \in X$ e $t \in [0,1]$ quaisquer.

Solução.

$(\Rightarrow)$

Para $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ quase-convexa, $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo, seja $c = \max\{f(x), f(y)\}$. Então, $f(x) \leq c$

e $f(y) \leq c$. Logo, pela convexidade de X, $f\big((1-t)x+ty\big) \leq c = \max\{f(x), f(y)\}$ para todo $t \in [0,1]$.

($\Leftarrow$)

Suponha que $f\big((1-t)x+ty\big) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0,1]$. Sejam $x, y \in X$ tais que $f(x) \leq c$ e $f(y) \leq c$. Então, $\max\{f(x), f(y)\} \leq c$. Portanto, $t \in [0,1] \Rightarrow f((1-t)x+ty) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq c$ e f é quase-convexa.

2

Exercícios do Livro Curso de Análise vol.2

2.1 - Topologia do Espaço Euclidiano

2.1.1 Limites

Exercício 1

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ ilimitado, $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação e $a \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $x \in X$, $|x| > r \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$. Prove que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim |x_k| = \infty$, tem-se que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

Solução. $(\Rightarrow)$ Suponha que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ e tomemos $(x_k) \subset X$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = \infty$.
Assim, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Rightarrow$ dado $\epsilon > 0, \exists\, r = r(a, \epsilon)$ tal que $x \in X,\ |x| > r \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$.
Mas $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = \infty \Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq k_0, |x_k| > r$.
Portanto, $\forall\, k > k_0$ tem-se $|f(x_k) - a| < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

$(\Leftarrow)$ Suponha, por absurdo, que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq a$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, x_k \in X$ tal que $|x_k| > k$ e $|f(x_k) - a| \geq \epsilon_0$. Daí, olhando para esta sequência (x_k) temos que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = \infty$, mas $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq a$. Contradição!

Exercício 3

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num conjunto ilimitado $X \subset \mathbb{R}^m$. Defina o que se entende por $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$ e dê uma caracterização deste conceito por meio de sequências.

Solução. Diz-se que se tem $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$ quando para todo $B > 0$ existe $A > 0$ tal que $|x| > A \Rightarrow |f(x)| > B$.

Diz-se que se tem $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f(x_k) = \infty$ quando (x_k) é uma sequência em $\mathbb{R}^m$ que não possui subsequência convergente, isto é,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} x_k = \infty \Rightarrow \lim_{k\longrightarrow\infty} f(x) = \infty.$$

Exercício 4

Seja $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um polinômio complexo não constante. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} p(z) = \infty$.

Solução. Seja $p(z) = a_n.z^n + \cdots + a_1.z + a_0$, com $a_n \neq 0$.

Temos que $p(z) = z^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n})$, daí $\lim\limits_{x\to\infty} p(z) = \lim\limits_{x\to\infty} z^n(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \dfrac{a_0}{z^n}) = \lim\limits_{x\to\infty} z^n.a_n$.

Tomemos $B > 0$ arbitrário, então para $A > \sqrt[n]{\frac{B}{|a_n|}}$, temos que $\forall\, z \in \mathbb{R}^2;\ |z| > A \Rightarrow |z|^n > A^n > \frac{B}{|a_n|} \Rightarrow |a_n.z^n| > |a_n|.A^n > B \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} p(z) = \infty$

Exercício 6

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$ e $f(0,0) = 0$. Mostre que $\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} f(x,y))$.

Solução. Para que se tenha $\lim_{y\to0} f(x,y) = b \in \mathbb{R}$ é necessário e suficiente que $\lim_{y_k\to0} f(x,y_k) = b$ seja qual for a sequência de pontos $y_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$.

Assim, tomando as sequências $y_k \to 0$ e $x_k \to 0$ quaisquer temos

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} x_k = 0$$

e

$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} f(x,y)) = \lim_{x_k\to0}(\lim_{y_k\to0} f(x_k,y_k))$$

Daí,

$$\lim_{x_k\to0}\left(\lim_{y_k\to0} \frac{{x_k}^2 - {y_k}^2}{{x_k}^2 + {y_k}^2}\right) = \lim_{x_k\to0}\left(\frac{\lim_{y_k\to0}({x_k}^2 - {y_k}^2)}{\lim_{y_k\to0}({x_k}^2 + {y_k}^2)}\right) = \lim_{x_k\to0}\left(\frac{{x_k}^2}{{x_k}^2}\right) = \lim_{x_k\to0} 1 = 1$$

$$\lim_{y_k\to0}\left(\lim_{x_k\to0} \frac{{x_k}^2 - {y_k}^2}{{x_k}^2 + {y_k}^2}\right) = \lim_{y_k\to0}\left(\frac{\lim_{x_k\to0}({x_k}^2 - {y_k}^2)}{\lim_{x_k\to0}({x_k}^2 + {y_k}^2)}\right) = \lim_{y_k\to0}\left(\frac{-{y_k}^2}{{y_k}^2}\right) = \lim_{x_k\to0} -1 = -1$$

Portanto,

$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} f(x,y)).$$

2.1.2 Conjuntos compactos

Exercício 1

O conjunto dos valores de aderência de uma sequência limitada é um conjunto compacto não - vazio.

Solução. Seja F={ conjunto dos valores de aderência de (x_k) }.

Já provamos anteriormente que o conjunto dos valores de aderência de uma sequência é fechado (exercício 5.2 - Análise Real vol.2), portanto resta provar que F é limitado e não-vazio.

Ora, como (x_k) é limitado $\Rightarrow\ \exists\, r > 0$ tal que $(x_k)\ \subset B(0,r)$, daí F, no máximo, está contido em $B[0,r]$ e portanto é limitado.

O fato de F ser não-vazio decorre do Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Exercício 2

As matrizes ortogonais $n \times n$ formam um subconjunto compacto de R^{n^2}.

Solução. Uma matriz é ortogonal se, e só se $A^tA = I$.

i) O conjunto X das matrizes ortogonais é limitado, pois

Se $A \in X$, $\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^TAx\rangle = \langle x, x\rangle \Longrightarrow \|A\| = 1$.

ii) X é fechado, pois

Se $A \in \overline{X} \Longrightarrow \exists (A_k)_{k\in N}$, $A_k \in X$ tal que $A_k \to A$, como $A_k \in X \Longrightarrow A_k^TA_k = I$ além disso como $A_k \to A \Longrightarrow A_k^T \to A^T$ pois $\|A_k^T - A^T\| = \|A_k - A\|$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k^TA_k = I \Longrightarrow A^TA = I$, portanto A∈X.

De (i) e (ii) se conclui a prova.

Exercício 3

Todo conjunto infinito $X \subset \mathbb{R}^n$ possui um subconjunto não-compacto.

Solução. De fato, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é não-limitado então é não-compacto e assim X é o conjunto procurado.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ infinito e limitado. Então X admite pelo menos um ponto de acumulação. De fato, se X não contém um ponto de acumulação então todo ponto de X é isolado e daí $X \subset \mathbb{Z}^n$, mas X é limitado, logo X é finito, um absurdo.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \in X'$. Então $\exists (x_k) \subset X\backslash\{y\}$ tal que $x_k \to y$. Definindo $Y = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$, temos que $Y \subset X$, mas não é fechado, pois $x_k \to y \notin Y$. Portanto, Y é um subconjunto não compacto de X.

Exercício 4

"Dada uma sequência decrescente $K_1 \supset \cdots \supset K_k \supset \cdots$ de compactos não vazios, a interseção $k = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ é compacta e não é vazia."
Provar que essa proposição é falsa se tomarmos conjuntos fechados $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_i \supset \cdots$ em vez de compactos.

Solução. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina $F_k = [k, \infty) \subset \mathbb{R}$.
F_k é fechado pois $\mathbb{R} - F_k = (-\infty, k)$ é aberto. Além disso $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_i \supset \cdots$.
Agora note que $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$, caso contrário tome $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.
Existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > a \Rightarrow a \notin F_k, \forall\, k \in \mathbb{N}$ com $k > j$, e isto contradiz o fato de $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.
Portanto $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$

Exercício 5

Seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ um conjunto compacto que contém exatamente um ponto em cada semi-reta de origem 0 em $\mathbb{R}^{n+1}$. Prove que X é homeomorfo à esfera unitária S^n.

Solução. Lembremos que uma semi-reta de origem 0 em $\mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto do tipo

$$\sigma = \{tv; t \geq 0,\ 0 \neq v \in \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Seja $\varphi : X \subset S^n$ a aplicação definida por $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Vamos mostrar que φ é um homeomorfismo.
Temos que φ é bijeção. De fato, dados $x_1, x_2 \in X$ tais que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, segue que $\dfrac{x_1}{|x_1|} = \dfrac{x_2}{|x_2|} \Leftrightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_2|} x_2 = x_1 \Leftrightarrow$ x_1 e x_2 têm a mesma direção e o mesmo sentido, logo estão na mesma semi-reta e assim $x_1 = x_2$, pois a interseção de cada semi-reta e o conjunto X é única. Logo, φ é injetiva.
Além disso, $\forall\, y \in\ S^n,\ \exists\, t > 0$ tal que $ty \in X$, pois $y \neq 0$, com $\varphi(ty) = \dfrac{ty}{|ty|} = \dfrac{ty}{t|y|} = \dfrac{y}{|y|} = y$.
Dessa maneira, φ é também sobrejetiva.
Temos ainda que φ é contínua, pois $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é um quociente de funções contínuas ($x \in X \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \ \Rightarrow\ |x| \neq 0$).
Como X é compacto, logo φ é um homeomorfismo.

Exercício 6

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se todo conjunto homeomorfo a X for limitado então X é compacto.

Solução. A aplicação $h : X \to X$, $h(x) = x$ é um homeomorfismo. Logo X é limitado. Ora sabemos que X é homeomorfo ao gráfico da aplicação contínua h, que é fechado (veja o livro de Espaços Métricos do Elon). Com o gráfico G é homeomorfo a X, ele é limitado, logo G é compacto, portanto X é compacto.

Exercício 7

Se todo conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a X for fechado, então X é compacto.

Solução. Temos que $\mathbb{R}^n \overset{\varphi}{\approx} B(0,1)$.

Daí, seja Y homeomorfo a X. Sabemos que Y é homeomorfo a $\varphi(Y) \subset B(0,1)$, então pela transitividade do homeomorfismo, obtemos que $X \approx \varphi(Y)$. Por hipótese, segue que $\varphi(Y)$ é fechado. Por outro lado, $\varphi(Y) \subset B(0,1) \Rightarrow \varphi(Y)$ é compacto.

Portanto, X é compacto.

Exercício 8

Seja $K = [0,2\pi] \times [0,2\pi] \subset \mathbb{R}^2$. Defina as aplicações $f : K \to \mathbb{R}^3$, $g : K \to S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4$ e $h : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ pondo

$$f(s,t) = ((a + b\cos s)\cos t, (a + b\cos s)sen\, t, bsen\, s), \qquad a > b$$

$$g(s,t) = (\cos s, sen\, s, \cos t, sen\, t), \qquad h(g(s,t)) = f(s,t)$$

i) Mostre que h é bem definida e contínua.

ii) h é um homeomorfismo de $S^1 \times S^1$ sobre $T = f(K) =$ toro gerado pela rotação de um círculo vertical de raio b e centro $(a,0,0)$ em torno do eixo z.

Solução.

i) Sejam $g(s_1,t_1) = g(s_2,t_2)$, i.e.,

$$(\cos s_1, sen\, s_1, \cos t_1, sen\, t_1) = (\cos s_2, sen\, s_2, \cos t_2, sen\, t_2)$$

então $\cos s_1 = \cos s_2$, $sen\, s_1 = sen\, s_2$, $\cos t_1 = \cos t_2$ e $sen\, t_1 = sen\, t_2$
logo

$$f(s_1,t_1) = f(s_2,t_2)$$

Portanto $h(g(s_1,t_1)) = h(g(s_2,t_2))$ e h está bem definida.

Agora como f é uma aplicação contínua, pois suas funções coordenadas são contínuas, segue-se que $h \circ g$ é contínua. Além disso, a função g é contínua e está definida num compacto, logo tem-se que h é contínua.
(Teo. (12.6) pag. 46).

ii) Provaremos agora que h é injetiva.

De fato, suponha que: $h(g(s_1,t_1)) = h(g(s_2,t_2))$ i.e. $f(s_1,t_1) = f(s_2,t_2)$,

$((a+b\cos s_1)\cos t_1, (a+b\cos s_1)sen\, t_1, bsen\, s_1) = ((a+b\cos s_2)\cos t_2, (a+b\cos s_2)sen\, t_2, bsen\, s_2)$

Igualando os terceiros componentes, tem-se $sen\, s_1 = sen\, s_2$.
Como

$$(a+b\cos s_1)^2\cos^2 t_1 = (a+b\cos s_1)^2\cos^2 t_1$$

e

$$(a+b\cos s_1)^2 sen^2 t_1 = (a+b\cos s_1)^2 sen^2 t_1$$

somando as duas equações anteriores

$$(a+b\cos s_1)^2 = (a+b\cos s_2)^2$$

de onde obtemos

$$\cos s_1 = \cos s_2$$

pois $sen^2 s_1 = sen^2 s_2$, logo

$$\cos t_1 = \cos t_2 \qquad sen\, t_1 = sen\, t_2$$

e $g(s_1,t_1) = g(s_2,t_2)$.

Portanto, h é uma função contínua e injetiva definida em um compacto, então h é um homeomorfismo sobre sua imagem $T = f(K)$.

2.1.3 Distância entre dois conjuntos

Exercício 1

Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, não existem $x_0, y_0 \in U$ tais que $|x_0 - y_0| = \text{diam}\, U$.
Solução. Por definição, diam $U = \sup\{|x-y|;\ x, y \in U\}$. Então existem sequências $x_k, y_k \in U$ tais

que $\lim |x_k - y_k| = \text{diam } U$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Suponha que existem $x_0, y_0 \in U$ tais que $|x_0 - y_0| = \text{diam } U$. Como U é limitado, podemos supor que existem sequências $(x_k), (y_k) \subset U$, passando a subsequências, se necessário, tais $\lim x_k = x_0$ e $\lim y_k = y_0$.

Temos que U é aberto $\Rightarrow \exists\ \delta, \varepsilon > 0$ tais que $B_1(x_0, \delta) \subset U$ e $B_2(y_0, \varepsilon) \subset U$, portanto existem $x \in B_1$ e $y \in B_2$ tais que $|x - y| > |x_0 - y_0| = \text{diam } U$, o que é uma contradição, visto que $|x_0 - y_0| = \sup\{|x - y|;\ x, y \in U\}$.

Exercício 2

Seja $B = B[a, r] \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se $d(x, B) = max\{0, |x - a| - r\}$.

Solução. Se $x \in B$ então $d(x, B) = 0$, além disso

$$|x - a| - r \leq 0 \Rightarrow d(x, B) = 0 = max\{0, |x - a| - r\}.$$

Se porém $x \notin B[a, r]$, então $d(x, B[a, r]) > 0$, pois $\{x\}$ é fechado, $B[a, r]$ é compacto e eles são disjuntos. Além disso, $\exists\, \overline{x} \in B[a, r]$ tal que $d(x, B[a, r]) = |x - \overline{x}|$.

Primeiro note que $w = (x - a).\frac{r}{|x-a|} + a \in B[a, r]$ e $|x - w| = |x - a| - |w - a| = |x - a| - r$, (pois w, x e a são colineares e w está entre x e a). Portanto, $d(x, B[a, r]) \leq |x - a| - r$.

Por outro lado, se $\overline{x}$ fosse tal que $|x - \overline{x}| < |x - a| - r$, então pela desigualdade triangular teríamos $|x - a| \leq |x - \overline{x}| + |\overline{x} - a| < |x - a| - r + r = |x - a|$. Contradição.

Portanto se $x \notin B[a, r] \Rightarrow d(x, B[a, r]) = |x - a| - r = max\{0, |x - a| - r\}$. Então em qualquer caso temos $d(x, B[a, r]) = max\{0, |x - a| - r\}$.

Exercício 3

Seja $T = \mathbb{R}^n - B[a, r]$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se $d(x, T) = \max\{0, |x - a|\}$.

Solução. Seja $x \in \mathbb{R}^n$, se $x \in T$ então $d(x, T) = 0$ e $|x - a| > r \Rightarrow r - |x - a| > 0$, donde $d(x, T) = \max\{0, r - |x - a|\}$.

Se $x \notin T$ então $x \in B[a, r]$, donde $|x - a| \leq r$, isto é, $r - |x - a| \geq 0$.

$r \leq |y - a| = |y - x + x - a| \leq |y - x| + |x - a| \Rightarrow |y - x| \geq r - |x - a|,\ \forall y \in T$

Dessa forma, $d(x, T) = \inf\{|x - y|; y \in T\} \leq r - |x - a|$

Como $d(x, T) = d(x, \overline{T})$, se mostrarmos que existe $\overline{x} \in \overline{T}$ tal que $|x - \overline{x}| = r - |x - a|$ teremos que $d(x, \overline{T}) = r - |x - a|$, ou seja, $d(x, T) = r - |x - a|$.

Considere $\overline{x} = \frac{r}{|x-a|} \cdot (x - a) + a$ um ponto da reta que contem a e x.

$|\overline{x} - a| = r \Rightarrow \overline{x} \in \overline{T}$, mais do que isso, $|x - \overline{x}| = |\overline{x} - a| - |x - a| = r - |x - a|$. Logo

$d(x,T) = r - |x-a| \geq 0.$

Portanto, em qualquer caso, temos $d(x,T) = \max\{0, r - |x-a|\}$

Exercício 4

$d(S,T) = \inf\limits_{s\in S} d(s,T).$

Solução. Lembre que:

i) $d(S,T) = \inf\{|s-t|; s\in S, t\in T\}$.

ii) $d(s,T) = \inf\{|s-t|; t\in T\}$.

iii) $S_1 \subset S_2, T_1 \subset T_2 \Rightarrow d(S_2,T_2) \leq d(S_1,T_1)$.

Veja que para cada $s \in S$, podemos considerar $s = \{s\} \subset S$ e com $T \subset T$, temos que $d(S,T) \leq d(s,T)$, isso $\forall s \in S$. Então $d(S,T) \leq \inf d(s,T)$ (i). Tem-se $d(s,T) \leq |s-t|$, $\forall s \in S$ e $t \in T$. Assim, $d(s,T) \leq |s-t|$, $\forall s \in S, \forall t \in T$. Logo $\inf d(s,T) \leq d(S,T), \forall s \in S$ e portanto $\inf\limits_{s\in S} d(s,T) \leq d(S,T)(ii)$ de (i) e (ii) temos

$$\inf_{s\in S} d(s,T) \leq d(S,T)$$

Exercício 5

A função de Urysohn de um par de fechados disjuntos $F, G \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua se, e somente se, $d(F,G) = 0$.

Solução. $(\Rightarrow)$ Primeiramente, sabemos que $d(F,G) \geq 0$.

Se f é uniformemente contínua, suponha por absurdo que $d(F,G) = 0$. Então existe $(x_k) \subset F$ e $(y_k) \subset G$, com $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - y_k| = 0$. Daí, como $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) = 1$ e $f(y_k) = 0$, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_k) - f(y_k)| = \lim\limits_{k\to\infty} |1| = 1 \neq 0$, e isto contradiz o fato de f ser uniformemente contínua.

Portanto, $d(F,G) > 0$.

Exercício 6

Considerando em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana, sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado convexo, a um ponto de $\mathbb{R}^n$ e $y_0 \in F$ tal que $|a - y_0| = d(a,F)$. Mostre que, para todo $x \in F$ tem-se $\langle x - y_0, a - y_0\rangle \leq 0$.

Solução. Tem-se que $|a - y_0| \leq |a - x|\ \forall\ x \in F$, F é convexo $\Rightarrow tx + (1-t)y_0 \in F$, para $t \in [0,1] \Rightarrow$

$$|a - y_0|^2 \leq |a - y_0 - t(x - y_0)|^2 = |a - y_0|^2 - 2\langle a - y_0, t(x - y_0)\rangle + t^2|x - y_0|^2$$

então

$$2\langle a - y_0, t(x - y_0)\rangle \leq t^2|(x - y_0)|,$$

para $t \neq 0$ tem-se

$$2\langle a - y_0, x - y_0\rangle \leq t|(x - y_0)|,$$

logo quando $t \to 0^+$ obtemos

$$\langle x - y_0, a - y_0\rangle \leq 0$$

$\forall\, x \in F$.

2.1.4 Conexidade

Exercício 1

Uma decomposição $X = A \cup B$ é uma cisão se, e somente se, nenhum dos conjuntos A, B contêm um ponto aderente ao outro. Isto se exprime por $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$.

Solução. Por definição: Cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$ onde $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A, B são abertos em X.

A ser aberto em X equivale a dizer que $\forall a \in A$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(a; \varepsilon) \cap X \subset A$. De forma equivalente podemos definir B aberto em X.

$(\Rightarrow)$ Vamos supor por absurdo que $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, isto é, $\exists\, x \in \bar{A} \cap B$. Isso equivale a dizer que $\exists\, (x_k) \subset A$ tal que $x_k \to x$. Assim, pela definição de limite de sequência, $\forall \varepsilon > 0$, a bola $B(x; \varepsilon)$ contém uma infinidade de termos de $x_k \in A$. Portanto, pelo fato de $A \cap B = \emptyset$ podemos concluir que $B(x; \varepsilon) \cap X \nsubseteq B$, logo B não pode ser aberto em X, um absurdo. Analogamente, $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Portanto, $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Temos que $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Seja $x \in \bar{A} \cap X$. Como $\bar{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow x \notin B$, logo $x \in A$ ($X = A \cup B$). Daí $\bar{A} \cap X \subset A$. Portanto, $A = \bar{A} \cap X$, isto é, A é fechado em X. De maneira análoga mostramos que B é fechado em X. Como $A = X \backslash B$ e $B = X \backslash A$, temos que A e B são abertos em X. Portanto, $X = A \cup B$ é uma cisão.

Exercício 2

Um subconjunto conexo não vazio $X \subset \mathbb{Q}^n$ consta de um único ponto.

Solução. Primeiro, note que $\emptyset \neq X \subset \Pi_1(X) \times \cdots \times \Pi_n(X)$, onde $\Pi_i(X) \subset \mathbb{Q}, \forall\, i = 1, \cdots, n$. Como X é conexo e $\forall\, i = 1, \cdots, n$, Π_i é contínua, segue que $\Pi_i(X)$ é conexo.

Além disso $X \neq \emptyset \Rightarrow \Pi_i(X) \neq \emptyset$. Daí, $\forall\ i = 1, \cdots, n;\ \ \Pi_i(X)$ consta de um único ponto. Caso contrário, tomemos $a \neq b \in \Pi_i(X)$. Como $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R} \Rightarrow\ \ \exists\, y\ \in\ \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ tal que $a < y < b$. Daí considere $A = \Pi_i(X) \cap (-\infty, y)$ e $B = \Pi_i(X) \cap (y, \infty)$. (A, B) é uma cisão não trivial de $\Pi_i(X)$, mas isto contradiz o fato de $\Pi_i(X)$ ser conexo.

Portanto $\Pi_1(X) \times \cdots \times \Pi_n(X)$ consta de um único ponto, e como $X \neq \emptyset$ implica que X consta de um único ponto.

Exercício 3

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial próprio. O complementar $\mathbb{R}^n - E$ é conexo se, e somente se, $dim(E) \leq n-2$.

Solução. $(\Rightarrow)$ Se $\mathbb{R}^n - E$ é conexo, suponha $dim(E) > n-2$. Como $dim(E) < n$, temos que $dim(E) = n-1$, donde $dim(E^{\perp}) = 1$

Seja $E^{\perp} = \langle x \rangle$. Defina $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle x, w \rangle$. Como f é contínua, temos que $A = \{v \in \mathbb{R}^n; f(v) > 0\}$ e $B = \{\overline{v} \in \mathbb{R}^n; f(\overline{v}) < 0\}$ são abertos.

Além disso, $\mathbb{R}^n - E = A \cup B$ com $A \cap B = \emptyset$. Logo (A, B) é uma cisão de $\mathbb{R}^n - E$. Contradição.

Exercício 9

Um conjunto conexo enumerável $X \subset \mathbb{R}^n$ possui no máximo um ponto.

Solução.

Lema: Seja $X \subset \mathbb{R}$, enumerável e conexo, então X tem no máximo um ponto.

Demonstração do lema: Suponha que existam $a, b \in X$, com $a < b$. Como X é enumerável, existe um irracional $\alpha \notin X$ e $a < \alpha < b$ (lembre que os irracionais do intervalo (a, b) é não-enumerável). Considere $A = \{x \in X; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in X; \alpha < x\}$. Então $X = A \cup B$ é uma cisão não-trivial. Contradição.

Veja que A e B são abertos disjuntos em X, pois

$$A = X \cap (-\infty, \alpha) \text{ e } B = X \cap (\alpha, +\infty).$$

Demonstração da questão:

Sabemos que a projeção $\pi_i\ :\ X\ \to\ \mathbb{R}\ ,\ \pi_i(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)\ =\ x_i$ é contínua. O conjunto das i-ésimas coordernadas dos pontos de X é enumerável. Ora, π_i contínua, X conexo $\Rightarrow \pi_i(X) \subset \mathbb{R}$ conexo. Mas, $\pi_i(X) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}, \cdots\}$ se reduz a um único ponto, pois é enuméravel, digamos $a_i \in \mathbb{R}$, pelo lema acima $\pi_i(X) = (a_i)$. Assim tem-se $X = (a_1, \cdots, a_n)$.

Exercício 10

Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é conexo por caminhos e $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua então $f(X)$ é conexo por caminhos.

Solução. Tomemos $f(a)$ e $f(b)$ em $f(X)$. Sendo $X \subset \mathbb{R}^m$ conexo por caminhos, então existe $\varphi : [0,1] \to X \subset \mathbb{R}^m$, um caminho contínuo satisfazendo $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$.

Daí, como f é contínua $\Rightarrow$ $f \circ \varphi : [0,1] \to f(X) \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua que satisfaz $f \circ \varphi(0) = f(a)$ e $f \circ \varphi(1) = f(b)$. Portanto $f(X)$ é conexo por caminhos.

Exercício 11

Se $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ são conexos por caminhos então $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é conexo por caminhos.

Solução. Sejam X e Y conexos por caminhos, e $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ em $X \times Y$. Logo existem caminhos $f : [0,1] \to X$ e $g : [0,1] \to Y$ tais que $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$ e $g(0) = y_1$, $g(1) = y_2$.

Definamos $h = (f, g) : [0,1] \to X \times Y$, o caminho definido por $h(t) = (f(t), g(t))$. É claro que h liga z_1 e z_2 em $X \times Y$.

Exercício 12

A reunião de uma família de conjuntos conexos por caminhos com um ponto em comum é conexa por caminhos.

Solução. Seja $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$, onde cada X_λ é conexo por caminhos, e seja $a \in X_\lambda,\ \forall\ \lambda \in L$. Dados pontos quaisquer $x, y \in X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$, temos duas possibilidades:

1. Se $x, y \in X_\lambda$, não há nada a fazer, já que X_λ é conexo por caminhos.

2. $\forall\ x, y \in X,\ \exists\ \mu, \eta \in L$ tais que $x \in X_\mu$ e $y \in X_\eta$.

Como X_μ e X_η são conexos por caminhos, com $a, x \in X_\mu$ e $a, y \in X_\eta$, então existem caminhos $f : [0,1] \longrightarrow X_\mu$ e $g : [0,1] \longrightarrow X_\eta$ tais que $f(0) = x$, $f(1) = a = g(0)$ e $g(1) = y$.

Dessa maneira, o caminho justaposto $h = f \wedge g : [0,1] \longrightarrow X$ com $h(0) = x$ e $h(1) = y$ é um caminho que une os pontos x e y. Portanto, $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ é conexo por caminhos.

Exercício 13

O fecho de um conjunto conexo por caminhos pode não ser conexo por caminhos.

Solução. Tome $f : (0,1] \to [-1,1]$ tal que $f(x) = sen(\frac{1}{x})$.

$f(x)$ é contínua pois é a composição de funções contínuas. Daí, como $Gr(f) = \{(x, f(x)), x \in (0,1]\} \cong (0,1]$, $Gr(f)$ é conexo por caminhos. pois $(0,1]$ o é.
No entando $\overline{Gr(f)} = Gr(f) \cup \{0\} \times [-1,1]$, que não é conexo por caminho.

Exercício 14

Seja B uma bola (fechada ou aberta) em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. Para todo $x \in B$, o conjunto $B - \{x\}$ é conexo.

Solução. Obs: Se $n = 1, B$ é um intervalo (aberto ou fechado) e claramente $B - \{x\}$ não é conexo para $x \in int(B)$.
Sejam $x - 0, y_0 \in B - \{x\}$. Se os pontos x_0, y_0 e x são não-colineares, temos que o segmento de extremos x_0 e y_0 não intercepta x e está totalmente contido no conjunto convexo B. Logo $B - \{x\}$ é conexo por caminhos e portanto, conexo.
Caso $x_0.y_0$ e x sejam colineares, a hipótese $n \geq 2$ garante a existência de um ponto $\overline{a}$ que não pertence ao segmento que contém os pontos x_0, y_0 e x.
B convexa implica que o segmento de extremos x_0 e está contido em B, isto é, existe uma função contínua $f : [0,1] \to B$ tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = \overline{a}$ (a saber, a função $f(t) = (1-t)x_0 + t\overline{a}$).
Analogamente, existe um caminho $g : [0,1] \to B$ tal que $g(0) = \overline{a}$ e $g(1) = y_0$.
Consideranto o caminho justaposto $f \wedge g$, temos que este caminho liga o ponto x_0 ao ponto y_0 e está totalmente contido em $B - \{x\}$.
Logo $B - \{x\}$ é conexo por caminhos e portanto é conexo.

Exercício 15

Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola fechada na norma euclidiana. Para todo subconjunto $X \subset \partial B$, $B - X$ é convexo. Numa norma arbitrária, $B - X$ é conexo mas não necessariamente convexo.

Solução. Seja $B = B[x_0, r]$. Sabemos que $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| = r\}$. Seja $X \subset \partial B$ e $B - X$. Tomemos $x, y \in B - X$ e façamos as seguintes hipóteses:
1ª) $x, y \in int\ B = B(x_0, r)$. Neste caso $x \notin \partial B$ e $y \notin \partial B$ e como $B(x_0, r)$ é convexa, tem-se $[x, y] \subset B(x_0, r)$.
2ª) $x, y \in \partial B$, então $|x - x_0| = r$ e $|y - x_0| = r$, seja $0 \leq t \leq 1$ e $(1-t)x + ty$, queremos mostrar que $(1-t)x + ty \in B - X$. De fato, se $t = 0$, então $(1-0)x + 0y = x \in B - X$; se $t = 1$, então $(1-1)x + 1y = y \in B - X$. Seja $0 < t < 1$. Pelo exercício 2.2 do capítulo 1 do livro Análise Real Vol. 2, temos que $|(1-t)x + ty - x_0| = |(1-t)(x - x_0) + t(y - x_0)| < r$. Assim

$(1-t)x+ty \in int\ B \subset B-X$.

3ª) $x \in \partial X$ e $Y \notin \partial B$. Então temos $|x-x_0| = r$ e $|y-x_0| < r$. Seja $0 < t < 1$, então

$$\begin{aligned} |(1-t)x+ty-x_0| &= |(1-t)(x-x_0)+t(y-x_0)| \\ &\leq (1-t)|x-x_0| + t|y-x_0| \\ &= (1-t)r + t|y-y_0| \\ &< (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

portanto

$$|(1-t)x+ty-x_0| < r,$$

ou seja,

$$(1-t)x+ty \in int\ B \subset B-X.$$

Se $t = 0$ ou $t = 1$, isso só define que $x, y \in B-X$.

4ª) $x \in \partial B$ e $y \notin \partial B$. Esse caso é análogo ao anterior.

Em qualquer caso

$$x, y \in B-X \Rightarrow [x,y] \subset B-X \Rightarrow B-X$$

é convexo.

2.2 - Caminhos no Espaço Euclidiano

2.2.1 Caminhos diferenciáveis

Exercício 2

Seja $f : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável com $f'(a) \neq 0$ para algum $a \in I$. Se existe uma reta $L \subset \mathbb{R}^n$ e uma sequência de números distintos $t_k \to a$ tais que $f(t_k) \in L$, então L é tangente a f no ponto $f(a)$.

Solução. Para provar o que se pede, devemos concluir que $L = \{f(a)+tf'(a), t \in \mathbb{R}\}$. A priori, concluímos que $f(a) \in L$ pois, caso contrário, isto é, se $f(a) \notin L$ então $\varepsilon = d(f(a), L) > 0$.

Como $\lim f(t_k) = f(a)$, existem infinitos pontos de L em $B(f(a), \varepsilon)$ e isto contradiz o fato de ε ser o ínfimo das distâncias de L a $f(a)$.

Seja $v \neq 0$ um vetor direcional de L e $E = \langle v \rangle$. Considere também $E^{\perp}$ o complemento ortogonal de

E e $\{v_1, v_{n-1}\}$ uma base de $E^\perp$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$; $\frac{f(t_k)-f(a)}{t_k-a}$ é um múltiplo de v pois $f(t_k) \in L$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, para $t_k \neq a$, tem-se

$$\left\langle \frac{f(t_k)-f(a)}{t_k-a}, v_i \right\rangle = 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n-1$$

Passando ao limite, temos $\langle f'(a), v_i \rangle = 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n-1$. Como $f'(a) \neq 0 \Rightarrow f'(a)$ é um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ paralelo a v. Portanto $L = \{f(a) + tf'(a), t \in \mathbb{R}\}$ é tangente a f no ponto $f(a)$.

Exercício 3

Seja $f : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a fim de que $f(t)$ pertença, para todo $t \in I$, à esfera de centro a e raio r, é necessário e suficiente que isto ocorra para um valor $t_0 \in I$ e que o vetor velocidade $f'(t)$ seja perpendicular a $f(t) - a$, para todo $t \in I$.

Solução.

($\Rightarrow$) Que ocorre para um $t_0 \in I$ é óbvio, provemos a outra assertiva. $\forall t \in I$, tem-se $|f(t) - a| = r$, logo temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|f(t)-a| &= \frac{dr}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{\langle f(t)-a, (f(t)-a)' \rangle}{|f(t)-a|} \\ &= \frac{\langle f(t)-a, f'(t) \rangle}{|f(t)-a|} = 0, \end{aligned}$$

pois $\dfrac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow f'(t) \perp (f(t) - a)$. ($\Leftarrow$) Seja $t_0 \in I$, tal que $|f(t_0) - a| = r$ e $g(t) = |f(t) - a|$ como $(f(t) - a) \perp f'(t)$, temos

$$\langle f(t) - a, f'(t) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\langle f(t)-a, f'(t) \rangle}{|f(t)-a|} = 0 \Rightarrow g'(t) = 0, \forall t \in I,$$

logo $g(t)$ é constante em I. Mas $g(t_0) = |f(t_0) - a| = r$, portanto

$$g(t) = r \Rightarrow |f(t) - a| = r, \forall t \in I.$$

Exercício 4

Seja $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho fechado diferenciável. Mostre que existe algum $t \in (a, b)$ tal que $\langle \lambda(t), \lambda'(t) \rangle = 0$.

Solução. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; $\;f(t) = \langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle$.

f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), além disso $f(a) = f(b)$. Então , pelo Teorema do Valor Médio temos que existe $t \in (a, b)$ tal que $0 = f(b) - f(a) = f'(t)(b - a) \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow \langle \lambda(t), \lambda'(t) \rangle = 0$, como queríamos provar.

Exercício 10

Seja $f : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável, com $f'(a) \neq 0$ para um certo $a \in I$. Uma reta $L \subset \mathbb{R}^n$ contendo o ponto $f(a)$, é a reta tangente a f nesse ponto se , e somente se,

$$\lim_{t\to a} \frac{d(f(t), L)}{|f(t) - f(a)|} = 0.$$

Solução. $(\Rightarrow)$ $L = \{f(a) + f'(a)(t-a),\ t \in \mathbb{R}\}$ é a reta tangente a f em $f(a)$. Ora

$$\frac{d(f(t), L)}{|f(t) - f(a)|} \leq \frac{|f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)|}{|f(t) - f(a)|} = \frac{\left|\dfrac{f(t) - f(a)}{t-a} - f'(a)\right|}{\left|\dfrac{f(t) - f(a)}{t-a}\right|},$$

aplicando limite quando $t \to a$ temos;

$$0 \leq \lim_{t\to a} \frac{d(f(t), L)}{|f(t) - f(a)|} \leq \frac{|f'(a) - f'(a)|}{|f'(a)|} = 0$$

portanto

$$\lim_{t\to a} \frac{d(f(t), L)}{|f(t) - f(a)|} = 0.$$

$(\Leftarrow)$temos a reta $L = \{f(a) + V(t-a),\ t \in \mathbb{R}\}$, onde V é o vetor direção da reta que contem a $f(a)$, então precisamos demostar que $V = f'(a)$.

De fato

$$\frac{d(f(t), L)}{|f(t) - f(a)|} = \frac{|f(t) - f(a) - V(t-a)|}{|f(t) - f(a)|} = \frac{\left|\dfrac{f(t) - f(a)}{t-a} - V\right|}{\left|\dfrac{f(t) - f(a)}{t-a}\right|}$$

aplicando limite $t \to a$ temos

$0 = \dfrac{\left|\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t-a} - V\right|}{\left|\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t-a}\right|} = |(f'(a) - V|)/f'(a)$ portanto $|f'(a) - V| = 0 \Rightarrow V = f'(a)$. A reta L é a reta tangente contendo o ponto $f(a)$.

Exercício 11

Sejam $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma caminho (admita-se $b = +\infty$) tal que $\lim_{t\to b} |f(t)| = \infty$ e $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha x + \beta y = c\}$ uma reta. Ponhamos $u = (\alpha, \beta)$. Podemos supor $|u|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\lim\limits_{t\to b} d(f(t), L) = 0;$

ii) $\lim\limits_{t\to b} \langle f(t), u\rangle = c$ e $\lim\limits_{t\to b} \left\langle \dfrac{f(t)}{|f(t)|}, u \right\rangle = 0.$

Quando isto ocorre, diz-se que a reta L é assíntota do caminho f quando $x \to b$.

Solução. $(i) \Rightarrow (ii)$

Temos que $\lim\limits_{t\to b} d(f(t), L) = 0$. Podemos supor que existe uma sequência $f(t_i) \in f[a, b)$ tais que $\lim\limits_{t\to b} f(t_i) = z \in L$, pois a distância de $f(t)$ a L tende 0 . Tomando $z = \{(x, y)|\alpha x + \beta y = c\}$ note que $x = \frac{c-\beta y}{\alpha}$ $\alpha \neq 0$.

Portanto $\lim\limits_{t\to b} \langle f(t), u\rangle = \left\langle \lim\limits_{t\to b} f(t_i), u \right\rangle = \langle z, u\rangle = \langle (x, y), (\alpha, \beta)\rangle = \left\langle \left(\dfrac{c - \beta y}{\alpha}, y \right), (\alpha, \beta) \right\rangle = c - \beta y + \beta y = c.$

e

$\lim\limits_{t\to b} \left\langle \dfrac{f(t)}{|f(t)|}, u \right\rangle = \lim\limits_{t\to b} \dfrac{1}{|f(t)|} \langle f(t), u\rangle = 0 \cdot c = 0$

Exercício 12

Se $b < +\infty$ e o caminho $f : [a, b) \to \mathbb{R}^2$ é da forma $f(t) = (t, \varphi(t))$, com $\lim\limits_{t\to b} \varphi(t) = +\infty$, a reta vertical $x = b$ é assíntota do caminho f quando $t \to b$.

Solução. Seja $L = \{(b, 0) + t(0, 1); t \in \mathbb{R}\}$ a reta vertical $x = b$. A partir da definição de assíntota dada no exercício 11, precisamos apenas provar que $\lim\limits_{t\to b} d(f(t), L) = 0$, visto que já temos $\lim\limits_{t\to b} |f(t)|_m = \infty$. Ora, mas $d(f(t), L) = |f(t) - Pr(f(t), L)|$, onde $Pr(f(t), L)$ é a projeção do ponto $f(t)$ sobre a reta L. É fácil ver que $Pr(f(t), L) = (b, \varphi(t))$. Daí

$$d(f(t), L) = |(t, \varphi(t)) - (b, \varphi(t))| = |(t - b, 0)| \Rightarrow \lim_{t\to b} d(f(t), L) = \lim_{t\to b} |(t - b, 0)| = 0,$$

como queríamos.

2.2.2 Integral de um Caminho

Exercício 1

Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ são de classe C^1 então

$$\int_a^b \langle f(t), g'(t)\rangle\, dt = \langle f, g\rangle \,|_a^b - \int_a^b \langle f'(t), g(t)\rangle\, dt$$

Solução. Definamos $\varphi(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$, então $\varphi'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$.

Então segue que

$$\int_a^b \varphi'(t)dt = \int_a^b (\langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle)dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi'(t)dt = \int_a^b \langle f'(t), g(t)\rangle\, dt + \int_a^b \langle f(t), g'(t)\rangle\, dt$$

$$\Rightarrow \varphi(t)|_a^b = \int_a^b \langle f'(t), g(t)\rangle\, dt + \int_a^b \langle f(t), g'(t)\rangle\, dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b \langle f(t), g'(t)\rangle\, dt = \langle f(t), g(t)\rangle\, |_a^b - \int_a^b \langle f'(t), g(t)\rangle\, dt$$

Exercício 2

Se uma sequência de caminhos integráveis $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ converge uniformemente para um caminho $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ então f é integrável e

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f_k(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Solução. Vimos que se (f_k) converge uniformemente para f e todas as funções f_k são contínuas em $c \in X$, então f é contínua em c. Disto concluímos que se $x \in D_f$, então $x \in D_{f_n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, daí $D_f \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{f_n}$ e como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{f_n}$ tem medida nula, segue que D_f tem medida nula e portanto é integrável.

Agora note que

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_k(t)dt\right| = \left|\int_a^b (f(t) - f_k(t))dt\right| \leq \int_a^b |f(t) - f_k(t)|dt.$$

Como (f_k) converge uniformemente para f , então dado

$$\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ \forall\, n > n_0, |f(t) - f_k(t)| < \varepsilon/(b - a),$$

daí

$$\forall\, n > n_0,\ \int_a^b |f(t) - f_k(t)|dt < \varepsilon \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_a^b f_k(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Exercício 3

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo. Dado um caminho integrável $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(t) \in A$ para todo t, prove que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \in \overline{A}$.

Solução. Aqui usaremos um resultado elementar sobre conjuntos convexos: se $A \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e

$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ com $\alpha_1 \geq 0, \cdots, \alpha_k \geq 0$ então $x_1, \cdots, x_k \in A \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in A$.

Daí resulta que se (P_k^*) é uma sequência de partições pontilhadas de $[0,1]$ com $\lim_{k\to\infty} |P_k| = 0$ então $\sum(f, P_k^*) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{k\to\infty} \sum(f; P_k) \in \overline{A}$.

2.2.3 Caminhos retificáveis

Exercício 1

Sejam $f : [0:2\pi] \to \mathbb{R}$ e $g : [0:2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definidos por $f(t) = sen\, t$ e $g(t) = (t, \cos t)$. Determine $l(f)$ e $l(g)$.

Solução. Vimos que todo caminho $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é retificável e $l(f) = \int_a^b |f'(t)|dt$. Sendo $f, g \in C^1$, temos:

$l(f) = \int_0^{2\pi} |\cos t|dt = \int_0^{\pi/2} \cos t dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos t dt = 4$ e

$l(g) = \int_0^{2\pi} |(1, \cos t)|dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt$

Exercício 2

Qual é o comprimento da ciclóide $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t - sen\, t, 1 - \cos t)$?

Solução. Como $f'(t) = (1 - \cos t, sen\, t)$ logo

$|f'(t)| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + sen^2 t} = \sqrt{2(1 - \cos t)}$. Então o comprimento de f é igual a

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \int_0^{2\pi} 2sen \left(\frac{t}{2}\right) dt = -4 \cos \left(\frac{t}{2}\right) |_0^{2\pi} = 4(1 - (-1)) = 8$$

2.3 - Funções Reais de n Variáveis

2.3.1 Derivadas parciais

Exercício 2

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e conexo. Se $f : U \to \mathbb{R}$ possui, em todos os pontos de U, derivadas parciais nulas então f é constante.

Solução. Utilizaremos um corolário do Teorema do Valor Médio, isto é,

"Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e conexo. Se $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas direccionais em todo ponto $x \in U$

e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ para qualquer vetor v então f é constante."
Como f possui derivadas parciais em todo U e elas são contínuas então f é diferenciável em U e além

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x) \cdot v = 0,$$

pois

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 = \cdots = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

onde

$$df(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}),$$

portanto f é constante.

Exercício 3

Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, assume seu valor máximo (ou mínimo) num ponto $a \in U$ então qualquer derivada parcial de f que exista no ponto a é nula.

Solução. Sabemos da análise na reta que se φ é definida de $I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e atinge seu máximo ou minimo local em $x_0 \in I$ então $\varphi^{'}(x_0) = 0$.
Seja a um ponto de máximo da função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina $\varphi : [-\delta, \delta] \longrightarrow U$, onde $\delta > 0$ e $\forall t \in [-\delta, \delta] \longrightarrow \varphi(t) = a + th$, onde h é um vetor unitário do $\mathbb{R}^n$.
Note que
$\varphi(0) = a + 0h = a$. Tome $g : [-\delta, \delta] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f(a + th)$.
Temos $g(0) = f(\varphi(0)) = f(a)$. Como a é valor de máximo de f temos que $\forall t \in [-\delta, \delta]$
$f(a) \geq f(a + th)$. Portanto 0 vai ser ponto de máximo de g, pois

$$g(0) = f(a) \geq f(a + th) = f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t) = g(t)$$

Como $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow g^{'}(0) = 0 \quad (1)$.
Observe que $\varphi^{'}(t) = h \; \forall t \in [-\delta, \delta] \Rightarrow \varphi^{'}(0) = h$.
Pela Regra da Cadeia:
$g^{'}(0) = (f \circ \varphi)^{'}(0) = f^{'}(\varphi(0))\varphi^{'}(0) = f^{'}(a)h \overset{(1)}{=} 0$. Logo como $h \in \mathbb{R}^m$ é arbitrário e $|h| = 1$ temos que $f^{'}(a) = 0$.
Para $a \in U$ ponto de mínimo a demonstração é análoga.

Exercício 4

[Teorema de Rolle] Seja $f : U \to \mathbb{R}$ contínua no aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^m$, possuindo derivadas parciais em todos os pontos de U. Se, para todo $a \in \partial U$ tem-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ então existe $c \in U$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$ para $i = 1, \cdots, m$.

Solução. Defina $F : \overline{U} \to \mathbb{R}$ pondo $F(x) = f(x)$ se $x \in U$ e $F(x) = 0$ se $x \in \partial U$. F assim definida é contínua, e sendo $\overline{U}$ compacto, temos pelo teorema de Weierstrass que F atinge seu máximo e seu mínimo em $\overline{U}$. Como $\forall\ x\ \in \partial U, F(x) = 0$, então, exceto se F for identicamente nula (neste caso todo $x \in U$ satisfaz $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ para $i = 1, \cdots, m$), seu valor máximo ou seu valor mínimo é atingido num ponto $c \in U$ e este será ponto crítico de f, isto é, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$ para $i = 1, \cdots, m$.

Exercício 5

Se $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas parciais com $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq M$, $(i = 1, 2, ..., m)$ em todos os pontos do aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^m$ então $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para quaisquer $x, y \in U$. Conclua que se f possui derivadas parciais limitadas num aberto qualquer, ela é contínua (mas não necessariamente uniformemente contínua).

Solução. Sejam $x, v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in U$ (convexo), então $y = x + v \in U$.

Definamos os vetores

$v_0 = 0$

$v_1 = v_0 + \alpha_1 e_1$

$v_2 = v_1 + \alpha_2 e_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$

$\vdots$

$v_i = v_{i-1} + \alpha_i e_i$

$\vdots$

$v_m = v$

$|f(x+v)-f(x)| = |f(x+v_1)-f(x+v_0)+f(x+v_2)-f(x+v_1)+\cdots+f(x+v_m)-f(x+v_{m-1})| \leq \sum_{i=1}^{k} |f(x + v_i) - f(x + v_{i-1})|$

Pelo T.V.M.

$|f(x + v_i) - f(x + v_{i-1})| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| |v_i - v_{i-1}| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| |\alpha_i|$, em que z é um ponto do segmento $[v_{i-1}, v_i]$.

Por hipótese $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| \leq M$, então temos que $|f(x + v) - f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| = M|v|_S, v = y - x$.

Então $|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|, \forall\ x, y \in U$.

Agora, se U é aberto, dado $x \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$.

Se f possui derivadas limitadas em U, então o mesmo ocorre em $B(x, \delta) \subset U$, daí o fato de $B(x, \delta)$ ser conexo, implica que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall\ x, y \in B(x, \delta)$, em que $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| \leq M, \forall\ x \in U$.

Daí f é contínua (Lipschitz em $B(x, \delta)$) em $x \in U$. Como x foi tomado arbitrariamente, segue que f

é contínua em U.

Exercício 6

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo aberto, de lados paralelos aos eixos. Se $f : A \to \mathbb{R}$ possui derivadas parciais em todos os pontos de A então, dados (a, b) e $(a + h, b + k)$ em A existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(a + h, b + k) - f(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + k) \cdot h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta k) \cdot k.$

Solução. Como A é paralelo aos eixos tem-se que $[(a, b), (a+th, b+k)] \subset A$ e $[(a, b), (a+h, b+tk)] \subset A, \forall t \in [0, 1]$, logo faz sentido definir $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = f(a + th, b + k) + f(a, b + tk), \forall t \in [0, 1].$$

Temos que ψ é contínua em $[0, 1]$ e derivável em $(0, 1)$, logo existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)(1 - 0).$$

Logo

$$f(a + h, b + k) + f(a, b + k) - f(a, b + k) - f(a, b) = f'(a + \theta h, b + k)h + f'(a, b + \theta k)k$$

portanto

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta k)k.$$

2.3.2 Derivadas direcionais

Exercício 1

Uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$ e $f(tx) = tf(x)$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^m$ e $t \neq 0$, tem todas as derivadas direcionais na origem, e vale $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = f(v)$.

Solução. Por hipótese temos que $f(tx) = tf(x),\ \forall\ t \neq 0$, daí

$$\frac{f(0 + tv) - f(0)}{t} = \frac{tf(v) - f(0)}{t} = f(v),\ \forall\ t \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} f(v) = f(v),$$

portanto $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ existe e coincide com $f(v)$.

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ se $x^2 + y^2 > 0$ e $f(0, 0) = 0$. Para todo caminho $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$, diferenciável no ponto 0, com $\lambda(0) = (0, 0)$, existe a derivada $(f \circ \lambda)'(0)$.

Solução. Seja $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ se $t \neq 0$ e $\lambda(t) = 0$ se $t = 0$, então

$$
\begin{aligned}
(f \circ \lambda)'(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \lambda)(0 + t) - (f \circ \lambda)(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\lambda(t))}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} . \frac{x^2(t) y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{x^2(t)}{t^2} . \frac{y(t)}{t}}{\frac{x^2(t)}{t^2} + \frac{y^2(t)}{t^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{(\frac{x(t)}{t})^2 . (\frac{y(t)}{t})}{(\frac{x(t)}{t})^2 + (\frac{y(t)}{t})^2} \\
&= \lim_{t \to 0} f\Big(\frac{\lambda(t)}{t}\Big) = f\Big(\lim_{t \to 0} \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t}\Big) = f(\lambda'(0))
\end{aligned}
$$

Como λ é diferenciável em 0, existe $(f \circ \lambda)'(0)$ e é igual a $f(\lambda'(0))$.

Exercício 3

Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos por:

$$\varphi(x, y) = \frac{(x^2 - y^2) y^2}{x^8}, \ \psi(x, y) = \frac{(x^2 - y^2) y^2}{x^7 \sqrt{x}} \text{ se } x > 0 \ \text{ e } \ 0 < y < x^2.$$

Nos demais pontos de $\mathbb{R}^2$, ponha $\varphi(x, y) = \psi(x, y) = 0$. Mostre que φ e ψ possuem derivadas direcionais em todos os pontos do plano e que essas derivadas dependem linearmente de v. Mostre ainda que ψ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$, mas φ é contínua apenas em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Finalmente, considerando o caminho diferenciável $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\lambda(t) = (t, t^2)$, a função composta $\psi \circ \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é derivável em $t = 0$.

Solução. Para $y \neq 0$ ou $y^2 \neq x^2$, $x > 0$, temos que φ e ψ possuem derivadas direcionais em todos os pontos. Analisaremos então os seguintes casos:

1º caso: $y = 0, x = 0, v = (v_1, v_2)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x,0) = & \lim_{t\to 0}\frac{\varphi[(x,0)+t(v_1,v_2)]-\varphi(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+tv_1,tv_2)}{t}\\ = & \lim_{t\to 0}\frac{[(x+tv_1)^2-(tv_2)]^2t^2v_2^2}{t(x+tv_1)^8} = \lim_{t\to 0}\frac{t[(x+tv_1)^2-(tv_2)]^2v_2^2}{(x+tv_1)}\\ = & \ 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial v}(x,0) = & \lim_{t\to 0}\frac{\psi[(x,0)+t(v_1,v_2)]-\psi(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\psi(x+tv_1,tv_2)}{t}\\ = & \lim_{t\to 0}\frac{[(x+tv_1)^2-tv_2]^2t^2v_2^2}{t(x+tv_1)^7\sqrt{x+tv_1}} = \lim_{t\to 0}\frac{t[(x+tv_1)^2-tv_2]^2v_2^2}{(x+tv_1)^7\sqrt{x+tv_1}}\\ = & \ 0.\end{aligned}$$

2º caso: $y = x^2, x > 0, v = (v_1, v_2)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = & \lim_{t\to 0}\frac{\varphi[(x,x^2)+t(v_1,v_2)]-\varphi(x,x^2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+tv_1,x^2+tv_2)}{t}\\ = & \lim_{t\to 0}\frac{[(x+tv_1)^2-(x^2+tv_2)]^2(x^2+tv_2^2)^2}{t(x+tv_1)^8} = \lim_{t\to 0}\frac{(x^2+2xtv_1+t^2v_1^2-x^2-tv_2^2)^2(x^2+tv_2)^2}{t(x+tv_1)^8}\\ = & \lim_{t\to 0}\frac{(2xtv_1+t^2v_1^2-tv_2^2)^2(x^2+tv_2)^2}{t(x+tv_1)^8} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2(2xtv_1+tv_1^2-v_2)^2(x^2+tv_2)^2}{t(x+tv_1)^8}\\ = & \ 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial v} = & \lim_{t\to 0}\frac{\psi[(x,x^2)+t(v_1,v_2)]-\psi(x,x^2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\psi(x+tv_1,x^2+tv_2)}{t}\\ = & \lim_{t\to 0}\frac{[(x+tv_1)^2-(x^2+tv_2)]^2(x^2+t^2v_2)^2}{t(x+tv_1)^7\sqrt{x+tv_1}} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2(2xv_1+tv_1^2-v_2)^2(x^2+tv_1)^2}{t(x+v_1)^7\sqrt{x+tv_1}}\\ = & \ 0.\end{aligned}$$

3º caso: $(x,y) = (0,0), v = (v_1, v_2)$ $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \lim_{t\to 0}\dfrac{\varphi(v_1,v_2)}{t} = \lim_{t\to 0}\dfrac{\varphi(tv)}{t} = 0$, pois $\varphi(tv) = 0, \forall v \in \mathbb{R}^2$ e t suficientemente pequeno.

Para $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(0,0) = 0$ é análogo.

Afirmação: as derivadas direcionais dependem linearmente de v, pois para $y \neq 0$ e $y \neq x^2$, $x > 0$, temos que φ, ψ são diferenciáveis. Além disso $\forall u \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(x,y) = \langle\nabla\varphi(x,y),v\rangle \text{ e } \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \langle\nabla\varphi(x,y),u\rangle$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(x,y) = \langle\nabla\varphi(x,y),\lambda v\rangle = \lambda\langle\nabla\varphi(x,y),v\rangle = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial(u+v)}(x,y) = \langle\nabla\varphi(x,y),u+v\rangle = \langle\nabla\varphi(x,y),u\rangle + \langle\nabla\varphi(x,y),v\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Analogamente, isso vale para ψ.
Por fim, para $y = 0$ ou $y = x^2, x > 0$ obtemos $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(x,y) = \dfrac{\partial\psi}{\partial v}(x,y) = 0$.
Portanto, φ e ψ dependem linearmente de v.

Exercício 4

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função contínua, possuindo todas as derivadas direcionais em qualquer ponto de $\mathbb{R}^m$. Se $\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ para todo $u \in S^{m-1}$ então existe um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ seja qual for $v \in \mathbb{R}^m$.

Solução. Seja $u \in S^{m-1}$, então a condição $\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ implica que $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ t \in \mathbb{R}$ satisfazendo $-\delta < t < 0$ tem-se $\frac{f(u+tu)-f(u)}{t} > 0 \Rightarrow f(u+tu) < f(u)$. Agora note que se $-\delta < t < 0$ então $1-\delta < 1+t < 1 \Rightarrow |(1+t)u| < |u| = 1$, portanto $(1+t)u \in B(0,1)$ e além disso $f((1+t)u) < f(u)$. Como isto se verifica pra todo vetor direcional $u \in S^{m-1}$, então , necessariamente o mínimo de $f|_{B[0,1]}$ é assumido em algum ponto $a \in B(0,1)$.
Para cada $v \in \mathbb{R}^m$, considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = f(a+tv)$. Temos que φ tem um mínimo local quanto $t = 0$, daí $0 = \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

2.3.3 Funções diferenciáveis

Exercício 1

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $f(tx) = |t|f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^m$ e $t \in \mathbb{R}$ quaisquer. Se f é diferenciável na origem, então $f(x) = 0$ para todo x.

Solução. Observemos que para $t = 0$, temos $f(0.x) = 0.f(x) \Rightarrow f(0) = 0$.
Se $t > 0, f(tx) = t.f(x)$ e
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0^+) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+tx)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{tf(x)}{t} = f(x)$$
Se $t < 0, f(tx) = -t.f(x)$ e
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0^-) = \lim_{t\to 0^-}\frac{f(0+tx)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^-}\frac{-tf(x)}{t} = -f(x)$$
Como, por hipótese, f é diferenciável na origem, devemos ter $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0^+) = \frac{\partial f}{\partial x}(0^-)$, ou seja, $f(x) = -f(x)$, o que implica que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Exercício 2

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto tal que $x \in U, t > 0 \Rightarrow tx \in U$, e k um número real. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ diz-se positivamente homogênea de grau k quando $f(tx) = t^k f(x)$ para quaisquer $x \in U$ e $t > 0$. Para todo $k \in \mathbb{R}$ mostre que existe uma função $f : \mathbb{R}^m - 0 \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, positivamente homogênea de grau k, tal que $f(x) > 0$ para todo x e f não é um polinômio.
Solução. Seja $f : \mathbb{R}^m - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x_1^{2k} + \cdots + x_m^{2k}}$, então

$$f(tx) = \sqrt{(tx_1)^{2k} + \cdots + (tx_m)^{2k}} = t\sqrt{x_1^{2k} + \cdots + x_m^{2k}} = tf(x).$$

Tem-se que f é classe C^∞ e positivamente homogênea de grau k.

Exercício 3

Seja $U \subset R^m$ como no exercício anterior. Se $f : U \to R$ é diferenciável, então f é positivamente homogênea de grau k se, e somente se, cumpre a relação de Euler, $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)x_i = kf(x)$. Escreva a relação de Euler para a função $f(x) = \langle x, x\rangle^k = |x|^{2k}$.
Solução.
$(\Rightarrow)$ f positivamente homogênea de grau k $\Rightarrow \quad f(tx) = t^k f(x),\ \forall\, t > 0$. Derivando dos dois lados da última igualdade com relação a t obtemos $f'(tx)x = kt^{k-1}f(x),\ \forall\, t > 0$. Em particular, para $t = 1$ temos $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = kf(x)$, isto é , $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)x_i = kf(x)$, como queríamos provar.
$(\Leftarrow)$ Defina $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, pondo $g(t) = \frac{f(tx)}{t^k}$.
g assim definida é diferenciável e $g'(t) = \frac{t^{k-1}\langle \nabla f(tx), tx\rangle - kt^{k-1}f(tx)}{t^{2k}} = 0$, portanto g é constante, visto que $(0, \infty)$ é conexo. Desse modo $g(t) = g(1),\ \forall\, t \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{f(tx)}{t^k} = f(x) \Rightarrow f(tx) = t^k f(x)$, portanto f é positivamente homogênea.
A relação de Euler pra função $f(x) = \langle x, x\rangle^k = |x|^{2k}$ é $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)x_i = 2k|x|^{2k}$.

Exercício 4

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $a \in U$. Prove que existem $\varepsilon > 0$ e $M > 0$ tais que $|h| < \varepsilon \Rightarrow a + h \in U$ e $|f(a + h) - f(a)| \leq M|h|$.
Solução. Como U é aberto e $a \in U$, a é um ponto interior e $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset U$, por hipotese $|h| < \varepsilon$ então

$$|(a + h) - a| = |h| < \varepsilon$$

i.e, $a+h \in B(a,\varepsilon)$, portanto $a+h \in U$.

Logo, como f é diferenciável no ponto a, tem-se

$$f(a+h)-f(a)=f'(a).h+r(h), \qquad \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{|h|}=0$$

já que $\lim_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{|h|}=0$, aplicando a definição, $\forall\ \delta>0, \exists\ \varepsilon>0$ tais que $|h|<\varepsilon \Rightarrow \dfrac{|r(h)|}{|h|}<\delta$, assim $|r(h)|<\delta_0|h|$, para algum $\delta_0>0$.

Seja $M=max\{|f'(a)|,\delta_0\}$, então

$$|f(a+h)-f(a)|=|f'(a).h+r(h)|\le |f'(a)||h|+\delta_0|h|\le M|h|$$

o que conclui a prova.

Exercício 6

Seja $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto $U\subset\mathbb{R}^m$. Dados $a\in U$ e $\epsilon>0$, prove que existe $\delta>0$ tal que

$$x,y\in U, |x-a|<\delta, |y-a|<\delta \Rightarrow f(y)-f(x)=f'(a)(y-x)+r(x,y)$$

onde $|r(x,y)|\le\epsilon|x-y|$.

Solução. $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $C^1 \Rightarrow r:U\to\mathbb{R}\ \in\ C^1$, onde $r(x)=f(x)-f(a)-\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)$. Além disso $\frac{\partial r}{\partial x_i}(a)=0, \forall\ i=1,...,m$, daí, dado $\epsilon>0, \exists\ \delta>0$ tal que $B(a,\delta)\subset U$ e $\forall\ x\ \in B(a,\delta)$ tem-se $|\nabla r(x)|<\epsilon$. Tomemos x e $y\ \in\ B(a,\delta)$, arbitrários. Então pelo teorema do valor médio, existe $\theta=\theta(x,y)\ \in\ (0,1)$ tal que $r(x)-r(y)=\langle\nabla r(x+\theta(y-x)),x-y\rangle \Rightarrow |r(x)-r(y)|\le|\nabla r(x+\theta(y-x))||x-y|<\epsilon|x-y|$. Além disso $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+r(x)$ e $f(y)=f(a)+f'(a)(y-a)+r(y) \Rightarrow f(x)-f(y)=f'(a)(x-y)+r(x)-r(y)$. Se fizermos $r(x,y)=r(x)-r(y)$, então obtemos o resultado esperado.

Exercício 7

Uma fonção holomorfa que só assume valores reais num aberto conexo é constante. (Idem para uma reta qualquer do plano.)

Solução. Seja $f:U\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=u(z)+iv(z)$, onde as funções $u,v:U\to\mathbb{R}$ são respectivamente, as partes real e imaginária de f. Assim, se a função f é derivável no ponto $z=x+yi$ então sua parte real e sua parte imaginária são diferenciáveis no ponto (x,y) e, além disso, cumprem as condições de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

A função complexa $f : U \to \mathbb{C}$ diz-se holomorfa quando possui derivada $f'(z)$ em todos os pontos do aberto U.

Porém, como f só assume valores reais no aberto $S \subset U$, concluímos que $v(z) = 0,\ \forall\ z = (x, y) \in U$.

Então $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Assim concluímos que $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ é nula para todo $z = (x, y) \in S$. Daí (pelo exercício 1.2 do capítulo 03 - Curso de Análise) segue que f é constante.

Exercício 8

Seja $f = u + iv$ uma função holomorfa e φ, ψ caminhos diferenciáveis, com valores do domínio de f, tais que $u \circ \varphi$ e $v \circ \psi$ são constantes. Se $\varphi(s) = \psi(t)$ e $f^{'}(\varphi(s)) \neq 0$ então $\langle \varphi^{'}(s), \psi^{'}(t) \rangle = 0$. ("As curvas de nível da parte real e da parte imaginária de uma função holomorfa cortam-se ortogonalmente".)

Solução. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, f = u + iv$ holomorfa e $\varphi : I_\varphi \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2, \psi : I_\psi \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ caminhos diferenciaveis onde $u \circ \varphi : I_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v \circ \psi : I_\psi \longrightarrow \mathbb{R}$ são constantes. Devemos mostrar que se existem s_0, t_0 tais que $\varphi(s_0) = \psi(t_0) \Rightarrow \langle \varphi^{'}(s_0), \psi^{'}(t_0) \rangle = 0$.

De fato

$\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s))$ e $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$, $\forall s, \forall t$. Queremos mostrar que

$\langle (\varphi_1^{'}(s_0), \varphi_2^{'}(s_0)), (\psi_1^{'}(t_0), \psi_2^{'}(t_0) \rangle = 0$. Como $u \circ \varphi(s) = cte$ tem-se

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(s))\varphi_1^{'}(s) + \frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(s))\varphi_2^{'}(s)\ .$$

$\Rightarrow 0 = \langle (u_x(\varphi(s)), u_y(\varphi(s)), \varphi^{'}(s) \rangle, \forall s \in I_\varphi$ (I)

e

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}(\psi(t))\psi_1^{'}(t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\psi(t))\varphi_2^{'}(t)\ .$$

$\Rightarrow 0 = \langle (v_x(\psi(t)), v_y(\psi(t)), \psi^{'}(t) \rangle, \forall t \in I_\psi$ (II)

Por hipotese, $f^{'}(\varphi(s_0)) = u_x(\varphi(s_0)) - iu_y(\varphi(s_0)) \neq 0$

e

$0 \neq f^{'}(\varphi(s_0)) = f^{'}(\psi(t_0)) = v_y(\psi(t_0) + iv_x(\psi(t_0)$

$\Rightarrow (u_x(\varphi(s_0)), u_y(\varphi(s_0)) \neq 0 \neq (v_y(\psi(t_0), v_x(\psi(t_0))$ De (I),(II) e de Cauchy Riemann vem que

$0 = \langle (v_y(\varphi(s_0), -v_x(\varphi(s_0)), \varphi^{'}(s_0) \rangle$

$0 = \langle (v_x(\psi(t_0), v_y(\psi(t_0)), \psi^{'}(t_0) \rangle$ (III)

Como

$0 = \langle (v_y(\varphi(s_0), -v_x(\varphi(s_0)), (v_x(\psi(t_0), v_y(\psi(t_0))\rangle$já que $\varphi(s_0) = \psi(t_0)$, temos de (III) que $\exists\lambda \neq 0$ tal que

$(v_y(\varphi(s_0), -v_x(\varphi(s_0)) = \lambda\psi^{'}(t_0)$.

De (III),

$0 = \lambda\langle\psi^{'}(t_0), \varphi^{'}(s_0)\rangle$.

Exercício 12

Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável positivamente homogênea de grau 1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ contendo zero. Mostre que f é a restrição de U de uma transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$. Conclua que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$ não é diferenciável na origem.

Solução. Observe, inicialmente, que para $t = 0$ temos $f(0, x) = 0 \cdot f(x) \Rightarrow f(0) = 0$. Como, por hipótese, f é diferenciável então existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$.

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \lim_{t\to 0} f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{tf(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tx) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tx) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, tx) - f(0)}{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \bigtriangledown f(0) \cdot x
\end{aligned}
$$

Como $\bigtriangledown f(0)$ é uma transformação linear, concluímos que f é linear.

Seja

$$
f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = y = 0. \end{cases}
$$

Temos:

- Se $x = y = 0, f(tx, ty) = 0 \Rightarrow f(tx, ty) = t \Rightarrow f(x, y) = 0$
- Se $x, y \neq 0, f(tx, ty) = \frac{(tx)^3}{(tx)^2+(ty)^2} = \frac{t^3x^3}{t^2x^2+t^2y^2} = \frac{tx^3}{x^2+y^2} = tf(x, y)$

Assim, f é positivamente homogênea de grau 1. Agora

$$
f(x_1+x_2, y_1+y_2) = \frac{(x_1 + x_2)^3}{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \neq \frac{(x_1)^3}{(x_1)^2 + (y_1)^2} + \frac{(x_2)^3}{(x_2)^2 + (y_2)^2} = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)
$$

ou seja, f não é linear. Portanto, segue que f é diferenciável na origem.

Exercício 13

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $f(x/2) = f(x)/2$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Prove que f é linear.

Solução. Inicialmente provaremos por indução, que $f(\frac{x}{2^n}) = \frac{f(x)}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, temos $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)}{2}$, que é verdadeiro, por hipótese.

Suponhamos que a relação acima seja válida para $n = k$, e vamos mostrar que ela também é válida para $n = k + 1$. Com efeito,

$$f(\frac{x}{2^{k+1}}) = f(\frac{x/2^k}{2}) = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2^k}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x)}{2^k} \Rightarrow f(\frac{x}{2^{k+1}}) = \frac{f(x)}{2^{k+1}}.$$

Logo, $f(\frac{x}{2^n}) = \frac{f(x)}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, observamos que $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)}{2}, \forall x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(0) = 0$.

Tomando $t = \frac{1}{2^n}$, e usando o fato que f é diferenciável, temos

$$f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{tf(x)}{t} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1/2^n) \cdot f(x)}{(1/2^n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\frac{x}{2^n})}{1/2^n} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{t}$$

$$f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + tx) - f(0)}{t} =< \nabla f(0), x > .$$

Portanto, como $< \nabla f(0), x >$ é linear, resulta f linear.

2.3.4 A diferencial de uma função

Exercício 1

Todo funcional linear $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $df(x).v = f.v$ para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^m$.

Solução. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

i) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\Sigma_{i=1}^m x_i e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Sigma_{i=1}^m x_i f(e_i)) = f(e_i), \quad i = 1, \ldots, m$ Portanto existem as derivadas parciais, $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

ii) $f(v) = f(\Sigma_{i=1}^m \alpha_i e_i) = \Sigma_{i=1}^m \alpha_i f(e_i) = \Sigma_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x).v$

Além disso, $\forall v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que $a + v \in U$ temos

$$f(x + v) = f(x) + f(v) = f(x) + df(x).v = f(x) + df(x).v + r(v)$$

onde $r(v) = 0$ logo $\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$.

Portanto f é diferenciável e $df(x).v = f.v \ \forall x, v \in \mathbb{R}^m$

Exercício 2

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas direcionais $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ num ponto $a \in U,\ U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se não existirem pelo menos $m-1$ vetores v, linearmente independentes, tais que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, então f não é diferenciável no ponto a.

Solução. Vamos provar a contrapositiva.

Se f é diferenciável no ponto a, temos que $f'(a)v = \dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = 0 \Rightarrow f'(a)v = 0 \Rightarrow v \in \ker(f'(a))$, onde $f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$. Note que $\dim Im(f'(a)) \leq 1$. Usando o Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que $m - \dim\ker(f'(a)) \leq 1 \Rightarrow \dim\ker(f'(a)) \geq m-1$. Portanto, existem pelo menos $m-1$ vetores linearmente independentes tais que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$.

Exercício 3

Dada $f : U \to \mathbb{R}$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, defina $f^k : U \to \mathbb{R}$ pondo $f^k(x) = f(x)^k$. Prove que f^k é diferenciável e que $df^k(x) \cdot v = k \cdot f^{k-1}(x) \cdot df(x) \cdot v$ para $x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^m$.

Solução. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^k.g$ é C^∞, além disso $f^k(x) = g(f(x))$, daí, f^k é diferenciável pois é a composição de funções diferenciáveis e pela regra da cadeia $df^k(x).v = dg(f(x)).df(x).v = k(f(x))^{k-1}.df(x).v,\ \forall\, x \in\ U$ e $v\ \in\ \mathbb{R}^n$.

Exercício 4

Para cada uma das funções abaixo, escreva a diferencial sob a forma

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)dx_m$$

e use esta expressão para calcular $df(x) \cdot v$ para x e v dados.

Solução.

1. $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - 0) \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x}{y}$. Calcule $df(x,y) \cdot v$ com $v = (tx, ty)$ e relacione este resultadocom a curva de nível de f.

$$\begin{aligned} df(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}d_x + \frac{\partial f}{\partial y}d_y \\ &= \frac{1}{y}d_x - \frac{x}{y^2}d_y \end{aligned}$$

   Então

$$df(x,y) \cdot (tx,ty) = (\frac{1}{y}d_x - \frac{x}{y^2}d_y) \cdot (tx,ty) = \frac{tx}{y} - \frac{txy}{y^2} = 0$$

2. $f : \mathbb{R}^3 - 0 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{-1}$. Mostre que $df(x,y,z)\cdot v = 0$ se, e somente se, v é perpendicular a (x,y,z). Calcule $df(x,y,z)\cdot v$ para $x=1, y=2, z=3$ e $v=(4,2,2)$.

$$\begin{aligned} df(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)d_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)d_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)d_z \\ &= -x\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-3}d_x - y\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-3}d_y - z\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-3}d_z \\ &= -\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-3}(xd_x+yd_y+zd_z) \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} df(x,y,z)\cdot v &= -\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-3}(xd_x+yd_y+zd_z)\cdot(v_1,v_2,v_3) \\ &= -\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-3}(xv_1+yv_2+zv_3) \end{aligned}$$

Assim,

$$df(x,y,z)\cdot v = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-3}(xv_1+yv_2+zv_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow xv_1+yv_2+zv_3 = 0 \Leftrightarrow (v_1,v_2,v_3) \perp (x,y,z).$$

Agora, para $(x,y,z) = (1,2,3)$ e $v=(4,2,2)$, temos $df(1,2,3)\cdot(4,2,2) = \frac{-\sqrt{14}}{14}$

3. $f : \mathbb{R}^2 - 0 \to \mathbb{R}, f(z) = log|z|$. Calcule $df(z)v$ com $z=(x,y)$ e $v=(-y,x)$.

$$\begin{aligned} df(z) = df(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)d_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)d_y \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}d_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}d_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xd_x+yd_y) \end{aligned}$$

Aplicando em $v=(-y,x)$, encontramos $df(x,y)\cdot v = 0$

Exercício 5

Considere em $\mathbb{R}^m$ a norma euclidiana. Se $f : \mathbb{R}^m - 0 \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |x|^a$, com $a \in R$, então $df(x)\cdot v = a|x|^{a-2} < x, v >$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

Solução. $df(x)\cdot v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\alpha_i$, onde $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial |x|^a}{\partial x_i} &= a|x|^{a-1}\cdot(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_i^2+\cdots+x_m^2})' \\ &= a|x|^{a-1}\frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+\cdots+x_i^2+\cdots+x_m^2}} \\ &= a|x|^{a-1}\frac{x_i}{|x|} = a|x|^{a-2}\cdot x_i \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} df(x)\cdot v &= \sum_{i=1}^{m} a|x|^{a-2}x_i\alpha_i \\ &= a|x|^{a-2}\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i \\ &= a|x|^{a-2} < x, v >, \forall v \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Exercício 7

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \in \mathbb{R}^m$. Dado $a \in U$, suponha que, para todo caminho $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$, com $\lambda(0) = a$, que possua vetor velocidade $v = \lambda'(0)$ no ponto $t = 0$, o caminho composto $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ também possua vetor velocidade $(f \circ \lambda)'(0) = T.v$, onde $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear. Prove que, nestas condiÃ§oes, f é diferenciável no ponto a.

Solução. Defina $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ por $\lambda(t) = a + te_i$ logo $\lambda(0) = a$, $\lambda'(0) = e_i \Longrightarrow (f \circ \lambda)'(0) = T(e_i)$(hipótese) $\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{(f \circ \lambda)(t) - (f \circ \lambda)(0)}{t} = (f \circ \lambda)'(0) = T(e_i) \Longrightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ \forall i = 1 \cdots m$ Por outro lado tem $[T] = (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ e como T é continua $\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ é continua $\forall\ i = 1 \cdots m$ logo f é diferenciável en a.

Exercício 8

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ difrenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Suponha $df(a) \neq 0$ para um certo $a \in U$ e considere o vetor unitário $u \in \mathbb{R}^m$ tal que $df(a) \cdot u = \max\{df(a) \cdot h; |h| = 1\}$. Se $v \in \mathbb{R}^m$ é tal que $df(a) \cdot v = 0$, mostre que v é perpendicular a u.

Solução. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ difrenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $df(a) \neq 0$ para $a \in U$ e considere $u \in \mathbb{R}^m$ o vetor unitário tal que $df(a) \cdot u = \max\{df(a) \cdot h\}$ onde $|h| = 1$.

Temos que

$df(a) \cdot u \geq df(a) \cdot h$

para todo h tal que $|h| = 1$ em especial para $h = \dfrac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$

$$\begin{aligned} df(a)\cdot u &\geq df(a)\cdot \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|} = \left\langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|} \right\rangle = |\nabla f(a)| \\ & e \\ df(a)\cdot u &= \langle \nabla f(a), u\rangle \leq |\nabla f(a)| \cdot |u| = |\nabla f(a)| \end{aligned}$$

Portanto $df(a) \cdot u = |\nabla f(a)| \cdot |u| = |\nabla f(a)|$.

Logo a igualdade vale se, e somente se $u = \alpha \nabla f(a) \Rightarrow \alpha \pm 1$

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $df(a) \cdot v = 0$ logo, $\langle \nabla f(a), v \rangle = 0 \Rightarrow v \perp \nabla f(a)$.

Mas $\nabla f(a)//u \Rightarrow u \perp v$.

Exercício 9

Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \langle x, y \rangle$. Mostre que f é diferenciável e que $df(x,y) \cdot (v,w) = \langle v, y \rangle + \langle x, w \rangle$. Generalize, considerando uma forma bilinear $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qualquer. Generalize ainda mais, tomando $\psi : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}$ k-linear. Obtenha a diferencial da função determinante como caso particular.

Solução. Parte 1:

Fixemos um ponto (x,y) arbitrário em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Então $f(x+h, y+k) = f(x,y) + f(x,k) + f(h,y) + f(h,k)$. Note que $f(x,k) + f(h,y)$ é uma função linear de (h,k) e $\frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|} = \frac{|\langle h,k \rangle|}{|(h,k)|} \leq \frac{|h|_E . |k|_E}{\sqrt{|h|_E^2 + |k|_E^2}} \leq |h|_E$. Portanto $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|_E} = 0 \Rightarrow f$ é diferenciável e $df(x,y).(h,k) = \langle x, k \rangle + \langle h, y \rangle$.

Parte 2:

Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear qualquer e $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Então $\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x,y) + \varphi(h,y) + \varphi(x,k) + \varphi(h,k)$, onde $\varphi(h,y) + \varphi(x,k)$ é uma função liner de (h,k) e $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\varphi(h,k)|}{|(h,k)|_S} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\varphi(\sum_{j=1}^{m} h_j.e_j, \sum_{i=1}^{n} k_i.e_i)|}{|(h,k)|_S} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(e_j,e_i) h_j.k_i|}{|h|_S + |k|_S} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\varphi(e_j,e_i)||h_j||k_i|}{|h|_S + |k|_S}$.

Se $c = max\{|\varphi(e_j,e_i)|, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$, temos ainda que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\varphi(h,k)|}{|(h,k)|_S} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{c|h|_S.|k|_S}{|h|_S + |k|_S} = 0$.

Portanto φ é diferenciável e $\varphi'(x,y)(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y)$.

Parte 3:

No caso geral considere $\psi : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}$ uma aplicação k-linear e $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}$. Temos então que

$\psi(x_1 + h_1, ..., x_k + h_k) = \psi(x_1, ..., x_k) + \sum_{i=1}^{k} \psi(x_1, .., x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, .., x_k) +$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\psi(x_1,..,x_{i-1},h_i,x_{i+1},..,x_{j-1},h_j,x_{j+1},...,x_k)+...+\psi(h_1,..,h_k)$$

onde $\sum_{i=1}^{k}\psi(x_1,..,x_{i-1},h_i,x_{i+1},..,x_k)$ é uma função linear de $(h_1,...,h_k)$.
Se $c=\max\{|\psi(e_{i_1},..,e_{i_k})|,1\leq i_1\leq m_1,1\leq i_2\leq m_2,...,1\leq i_k\leq m_k\}$, então temos que
$\frac{|\psi(x_1+h_1,...,x_k+h_k)-\psi(x_1,...,x_k)-\sum_{i=1}^{k}\psi(x_1,..,x_{i-1},h_i,x_{i+1},..,x_k)|}{|(h_1,...,h_k)|_S}\leq$
$\frac{c}{|h_1|_S+...+|h_k|_S}(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(|x_1|..|x_{i-1}||h_i||x_{i+1}|...|x_{j-1}||h_j||x_{j+1}|...|x_k|)+...+|h_1|...|h_k|)$.
Desse modo temos que

$$\lim_{(h_1,..,h_k)\to(0,..,0)}\frac{|\psi(x_1+h_1,..,x_k+h_k)-\psi(x_1,..,x_k)-\sum_{i=1}^{k}\psi(x_1,..,x_{i-1},h_i,x_{i+1},..,x_k)|}{|(h_1,..,h_k)|_S}=0.$$

Portanto ψ é diferenciável e $\psi'(x_1,..,x_k)(h_1,..,h_k)=\psi(h_1,x_2,..,x_k)+...+\psi(x_1,x_2,..,h_k)$.

Exercício 10

Prove que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $c=(a,b)$ se, e somente se, existem funções $\alpha,\beta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ contínuas na origem, tais que,para todo $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, se tem $f(a+h,b+k)=f(a,b)+\alpha\cdot h+\beta\cdot k$, onde $\alpha=\alpha(h,k)$ e $\beta=\beta(h,k)$.

Solução. $(\Rightarrow)$

f é diferenciável em $c=(a,b)$ então

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(c)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}(c)\cdot k+\rho(h,k)|(h,k)|$$

com $\lim_{h\to0,k\to0}\rho(h,k)=0$.
Então

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c)+\frac{\rho(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot h\right)\cdot h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(c)+\frac{\rho(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot k\right)\cdot k$$

Defina $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ por:

$$\alpha(h,k)=\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(c)+\frac{\rho(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot h, & \text{se}\quad (h,k)\neq(0,0),\\ \frac{\partial f}{\partial x}(c), & \text{se}\quad (h,k)=(0.0).\end{cases}$$

$$\lim_{h\to0,k\to0}\alpha(h,k)=\lim_{h\to0,k\to0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c)+\rho(h,k)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(c)=\alpha(0,0)$$

Logo α é contínua em $(0,0)$

Analogamente $\beta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $\beta(h,k)=\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial y}(c)+\frac{\rho(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot k, & \text{se}\quad (h,k)\neq(0,0),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(c), & \text{se}\quad (h,k)=(0.0).\end{cases}$

é uma função contínua em $(0,0)$.

Portanto podemos escrever

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \alpha(h,k)\cdot h + \beta(h,k)\cdot k$$

em que $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $(0,0)$.

$(\Leftarrow)$

Se $f(a+h,b+k) = f(a,b)+\alpha(h,k)\cdot h+\beta(h,k)\cdot k$ então $k \neq 0, h = 0 \Rightarrow \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} = \beta(0,k)$.
Por hipótese, β é contínua em $(0,0)$, então $\beta(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Analogamente, $\alpha(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

Defina $\overline{\beta}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \beta(a,b)$ e $\overline{\alpha}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \alpha(a,b)$

Então, $f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \overline{\alpha}(h,k)\right)\cdot h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \overline{\beta}(h,k)\right)\cdot k$.
$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot k - (\overline{\alpha}(h,k)\cdot h + \overline{\beta}(h,k)\cdot k)$

Defina $r(h,k) = \overline{\alpha}(h,k)\cdot h + \overline{\beta}(h,k)\cdot k$.
$\lim\limits_{h\to 0,k\to 0} \dfrac{r(h,k)}{|(h,k)|} = \lim\limits_{h\to 0,k\to 0} \left(\overline{\alpha}(h,k)\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \overline{\beta}(h,k)\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0$
Portanto f é diferenciável em (a,b) e então f é diferenciável.

Observação: $\lim\limits_{h\to 0,k\to 0} \overline{\alpha}(h,k) = 0$
$\lim\limits_{h\to 0,k\to 0} \overline{\alpha}(h,k) = \lim\limits_{h\to 0,k\to 0} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \overline{\alpha}(h,k)\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \alpha(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$
É análogo para $\overline{\beta}$.

Exercício 11

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se a função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$ cumpre a condição de Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$ então $|df(x)\cdot v| \leq c|v|$ para $x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^m$.

Solução. Suponha por absurdo que existam $x_0 \in U$ e $v_0 \in \mathbb{R}^m$ tais que $|df(x_0)\cdot v_0| > c|v_0|$, logo $\left|df(x_0)\cdot \dfrac{v_0}{|v_0|}\right| > c$. Fazendo $u_0 = \dfrac{v_0}{|v_0|}$, temos $|df(x_0)\cdot u_0| > c$. Isto nos diz que $|df(x_0)\cdot u_0| = c+\varepsilon$, onde $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Queremos achar um vetor tal que

$$|f(x_0+v) - f(x_0)| > c|v|.$$

Pela defnição de diferenciabilidade temos que $\forall v \in \mathbb{R}^n$, tal que $x_0 + v \in U$, temos que

$$f(x_0 + v) - f(x_0) = df(x_0) \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Fixemos u_0, temos que $tu_0 \to 0$ quando $t \to 0$. Para todo $\varepsilon > 0$, dado acima, existe $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} 0 < t < \delta \Rightarrow \frac{|r(tu_0)|}{|tu_0|} &= \frac{|r(tu_0)|}{|t||u_0|} = \frac{|r(tu_0)|}{t} < \varepsilon \\ &\Rightarrow |r(tu_0)| < t\varepsilon. \end{aligned}$$

Pela definição de diferenciabilidade temos

$$\begin{aligned} |f(x_0 + tu_0) - f(x_0)| &= |df(x_0)tu_0 + r(tu_0)| \\ &\geq |df(x_0)tu_0| - |r(tu_0)| \\ &= t|df(x_0)u_0| - |r(tu_0)| \\ &> t(c + \varepsilon) - t\varepsilon = tc. \end{aligned}$$

Veja que $|tu_0| = |t||u_0| = t$, para todo $0 < t < \delta$, logo

$$0 < t < \delta \Rightarrow |f(x_0 + tu_0) - f(x_0)| > tc = |tu_0|c.$$

Contradição.

Exercício 12

Sejam $U = x \in \mathbb{R}^m; |x_i| <, i = 1, ..., m$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq 3$, para todo $x \in U$. Então $f(U)$ é um intervalo de comprimento $\leq 3m$.

Solução. (Afirmação 1: U é aberto) De fato, seja $x = (x_1, ..., x_n) \in U$. Considerando $M = max\{|x_i|, i = 1, ..., m\} < 1$. Então $1 - M > 0$. Dado $y \in B(x, 1 - M)$, temos $y = (y_1, ..., y_n)$. Assim $|y_i| = |y_i - x_i + x_i| \leq |y_i - x_i| + |x_i|$. Como $|x - y| < 1 - M$, temos $|y_i - x_i| < 1 - M$. Além disso, uma vez que $M = max\{|x_i|, i = 1, ..., m\} < 1$, $M \geqslant m$ resulta que $-M \leq -|x_i|, i = 1, ...m$. Logo $|y_i| \leq |y_i - x_i| + |x_i| < | - M + x_i| \leq 1 - |x_i| + |x_i| = 1, i = 1, ..., m$, tal que $y \in U$. Portanto $B(x; 1 - m) \subset U$, isto é U é aberto.

(Afirmação 2: U é convexo) De fato. Sejam $x, y \in U \Rightarrow |x_i|, |y_i| < 1, i = 1, 2, ..., m$ e $0 \leq t \leq 1$. Temos que $|(1 - t)x_i + ty_i| \leq |1 - t|$ e $|x_i| + t\,|y_i| < 1 - t + t = 1, i = 1, ..., m$. Logo, $(1 - t)x + ty \in U, 0 \leq t \leq 1$. Portanto U é convexo.

(Afirmação 3: U é conexo) De fato se U é conexo. De fato Como U é convexo, temos que U é conexo por caminhos, portanto U é conexo, pois é aberto e conexo por caminhos. Como $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então temos que f é contínua. Portanto $f(U)$ é um intervalo. Agora sejam $x, y \in U$. Como U é conexo, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = v + u$. Logo pela Teorema do Valor Medio temos $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq M \Rightarrow |f((x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$ para cualquier $x, y \in U$

$$|f((x) - f(y)| \leq \left|\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + \theta(y - x))\right| |x - y| \leqslant \sum_{i=1}^{m} 3 = 3m.$$

2.3.5 O gradiente de uma função diferenciável

Exercício 1

Dada a transformação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, defina as funções $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pondo $f(x, y) = \langle A \cdot x, y\rangle$ e $g(x) = \langle A \cdot x, x\rangle$. Determine $\nabla f(x, y)$ e $\nabla g(x)$.

Solução. Para $1 \leq i \leq m$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t \cdot e_i, y) - f(x, y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle A(x + t \cdot e_i), y\rangle - \langle Ax, y\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle Ax, y\rangle + t\,\langle Ae_i, y\rangle - \langle Ax, y\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\,\langle Ae_i, y\rangle}{t} = \lim_{t\to 0} \langle Ae_i, y\rangle = \langle Ae_i, y\rangle
\end{aligned}$$

Para $m + 1 \leq i \leq m + n$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x, y + t \cdot e_i) - f(x, y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle Ax, y + t \cdot e_i\rangle - \langle Ax, y\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle Ax, y\rangle + t\,\langle Ax, e_i\rangle - \langle Ax, y\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\,\langle Ax, e_i\rangle}{t} = \lim_{t\to 0} \langle Ax, e_i\rangle = \langle Ax, e_i\rangle
\end{aligned}$$

Portando, $\nabla f(x, y) = (\langle Ae_1, y\rangle, \langle Ae_2, y\rangle, \cdots, \langle Ae_m, y\rangle, \langle Ax, e_{m+1}\rangle, \cdots, \langle Ax, e_{m+n}\rangle)$.

Determinaremos agora, $\nabla g(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(x+t\cdot e_i)-g(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\langle A(x+t\cdot e_i), x+t\cdot e_i\rangle - \langle Ax, x\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\langle Ax, x\rangle + t\langle Ax, e_i\rangle + t\langle Ae_i, x\rangle + t^2\langle Ae_i, e_i\rangle - \langle Ax, x\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\langle Ax, e_i\rangle + \langle Ae_i, x\rangle + t\langle Ae_i, e_i\rangle = \langle Ax, e_i\rangle + \langle Ae_i, x\rangle
\end{aligned}$$

Portanto $\nabla g(x) = (\langle Ax, e_1\rangle + \langle Ax, e_2\rangle + \cdots + \langle Ax, e_n\rangle + \langle Ae_n, x\rangle)$.

Exercício 2

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Dada uma base ortogonal $\{u_1, \cdots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, mostre que, para todo $x \in U$, tem-se

$$\text{grad } f(x) = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{|u_i|^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}(x)\cdot u_i.$$

Mais geralmente, dada uma base arbitrária $\{v_1, \cdots, v_m\}$ em $\mathbb{R}^m$, indique com (g^{ij}) a matriz inversa da matriz cujo ij-ésimo elemento é o produto interno $< v_i, v_j >$. Mostre que a expressão de grad $f(x)$ em relação à base $\{v_1, \cdots, v_m\}$ é a seguinte:

$$\text{grad } f(x) = \sum_i\left(\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial v_j}\right)v_i.$$

Solução. Como $\nabla f(x)$ é um vetor, pomos $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m}\beta_i u_i$, onde $\{u_1, \cdots, u_m\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^m$ e $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Seja $v \in \mathbb{R}^m$. Então, $v = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Por um lado,

$$df(x)\cdot v =< \nabla f(x), v >=< \sum_{i=1}^{m}\beta_i u_i, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i >= \sum_{i=1}^{m}\beta_i\alpha_i|u_i|^2.$$

Por outro,

$$df(x)\cdot v = df(x)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{m}df(x)\alpha_i u_i.$$

Logo,

$$df(x)\alpha_i u_i = \beta_i\alpha_i|u_i|^2 \Rightarrow \beta_i = \frac{1}{|u_i|^2}df(x)u_i \Rightarrow \beta_i = \frac{1}{|u_i|^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}(x).$$

Portanto
$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|u_i|^2} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x) \cdot u_i.$$

Sejam $v = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j$ e $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i,\ \alpha_j, \beta_i \in \mathbb{R}$. Então

$$df(x) \cdot v = df(x) \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{m} df(x) \alpha_j v_j.$$

Por outro lado, temos

$$df(x) \cdot v =< \nabla f(x), v >=< \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j, \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i >= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \beta_i < v_i, v_j > .$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} df(x) \alpha_j v_j &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \beta_i < v_i, v_j > \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v_j} \alpha_j v_j &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \beta_i < v_i, v_j > \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v_j}(x) v_j &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i < v_i, v_j > . \end{aligned}$$

Para $i = 1, \cdots, m$, temos $\beta_i = \sum_{j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j}(x)$, onde (g^{ij}) é a matriz inversa da matriz cujo ij-ésimo elemento é $< v_i, v_j >$.

Portanto
$$\nabla f(x) = \sum_{i} \left(\sum_{j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial v^j} \right) v_i.$$

2.3.6 O Teorema de Schwarz

Exercício 1

Com a notação da Regra da Cadeia, suponha f e g duas vezes diferenciáveis, obtenha uma fórmula para
$$\frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(a.)$$

Solução. Pela regra do cadeia temos:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g(f(a))}{\partial y_k} . \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_j}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2(g\circ f)}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(g\circ f)(a)}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g(f(a))}{\partial y_k}.\frac{\partial f_k(a)}{\partial x_j}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial g(f(a))}{\partial y_k}.\frac{\partial f_k(a)}{\partial x_j})$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g(f(a))}{\partial y_k}.\frac{\partial f_k(a)}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial g(f(a))}{\partial y_k}.\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_k(a)}{\partial x_j}\right)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\partial f_k(a)}{\partial x_j}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial f_p(a)}{\partial x_i}.\frac{\partial^2 g(f(a))}{\partial y_p\partial y_k}\right]+\frac{\partial g(f(a))}{\partial y_k}.\frac{\partial^2 f_k(a)}{\partial x_i x_j}\right\}$$

Exercício 2

Uma função diferenciável $f:U\to R$ definida no aberto $U\subset R^m$, é de classe C^1 se, e somente se, para cada $h\in R^m$, a função $\varphi_h:U\to R$ dada por $\varphi_h(x)=df(x)\cdot h$ é contínua. Analogamente, f é duas vezes diferenciável se, e somente se, φ_h é diferenciável.

Solução. $(\Rightarrow)$

$f:U\to R, U\subset R^m$, uma função de classe $C^1\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x_i}:U\to R$, são funções contínuas, $\forall\ i=1,...,m$.

Daí dado $h=(h_1,...,h_m)\in R^m$, temos que $\varphi_h:U\to R$, é dado por $\varphi_h(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).h_i$. Desse modo φ_h é contínua em U, pois é soma de funções contínuas.

$(\Leftarrow)$

Se $\varphi_h:U\to R$, dada por $\varphi_h(x)=df(x)\cdot h$ é contínua, $\forall\ h\in R^m$, então, em particular, se tomarmos os vetores da base canônica $e_1,.....,e_m$, temos que $\varphi_{e_i}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ é contínua, $\forall\ i=1,...,m$. Portanto $f\in C^1(U)$.

Analogamente, se f é duas vezes diferenciável em U, então $f':U\to\mathcal{L}\{R^m,R\}, f'(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x))$, é diferenciável e portanto cada uma de sua funções coordenadas é diferenciável em U. Daí $\forall\ h\in\mathbb{R}^m$, $\varphi_h(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).h_i$ é diferenciável, pois é soma de funções diferenciáveis. Reciprocamente, se $\forall\ h\in R^m$, $\varphi_h(x)=df(x)\cdot h$ é diferenciável, então, em particular, se tomarmos os vetores $e_1,...,e_m$,temos que $\varphi_{e_i}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ é diferenciável em U, e daí $f':U\to\mathcal{L}\{R^m,R\}, f'(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x))$ será diferenciável, pois suas funções coordenadas o são.

Exercício 3

Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no aberto convexo $U \in \mathbb{R}^2$. Afim de que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ seja identicamente nula, é necessário e suficiente que existam funções reais $\varphi : I \to \mathbb{R}, \gamma : J \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis em intervalos I, J da reta, tais que $f(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para todo $(x, y) \in U$.
Solução. Como $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ são identicamente nulas, e $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ não dependem de x e y respetivamente. Fixando $(x_0, y_0) \in I$ x J definamos as funções

$$\begin{array}{ll} \varphi : I \to \mathbb{R} & \gamma : J \to \mathbb{R} \\ x \to \varphi(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) & y \to \gamma(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \end{array}$$

as quais são duas vezes diferenciáveis em intervalos I, J. Logo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) + f(x_0.y_0) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(s, y) ds + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, t) dt + f(x_0, y_0) = \varphi(x) + \gamma(y) \end{aligned}$$

Reciprocamente se $f(x, y) = \varphi(x) + \gamma(y)$ derivando respeito a y e logo x obtemos o resultado desejado.

Exercício 4

A fim de que uma função duas vezes diferenciável $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaça a equação

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

é necessário e suficiente que existam funções $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis, tais que $g(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$.
Solução.
$(\Rightarrow)$
Considere a seguinte mudança de variáveis: $r = x + y$ e $s = x - y$.
Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $F(r, s) = g(x, y)$. Assim, F é uma composição de funções duas vezes diferenciável e, daí, F é duas vezes diferenciável.
Então

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial s}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial r} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial r} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}.\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, temos $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} = 0$.
Portanto, pelo exercício 7.3 (Curso de Análise Vol. 2 - Capítulo 3), existem $\varphi : I \to \mathbb{R}$ e $\psi : J \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável tais que $F(r, s) = \varphi(r) + \psi(s)$, donde $g(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$.

($\Leftarrow$)

Suponhamos que existam funções $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis, tais que $g(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$.
Então, considere a seguinte mudança de variáveis: $r = x+y$ e $s = x-y$. Assim $g(x, y) = \varphi(r)+\psi(s)$.

Aplicando a regra da cadeia à g, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}$$

Portanto $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Exercício 5

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Suponha que $f_{yy} = c^2 f_{xx}$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, onde c é uma constante. Prove que existem funções $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis, tais que $f(x,y) = \varphi(x-cy) + \psi(x+cy)$.

Solução. Defina $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x,y) = g(u,v)$, onde $u = x - cy$ e $v = x + cy$ (*).

Daí, segue que

$$f_x = g_u \cdot u_x + g_v \cdot v_x = g_u + g_v.$$

Derivando novamente em relação a x, obtemos que

$$f_{xx} = (f_x)_x = (g_u + g_v)_x = g_{uu}\cdot u_x + g_{uv}\cdot v_x + g_{vu}\cdot u_x + g_{vv}\cdot v_x = g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv}.$$

Calculando agora as derivadas parciais de f em relação a y, obtemos:

$$f_y = g_u \cdot u_y + g_v \cdot v_y = -cg_u + cg_v = c(g_v - g_u);$$

$$f_{yy} = c(-g_{vu}\cdot u_y + g_{vv}\cdot v_y + g_{uu}\cdot u_y - g_{uv}\cdot v_y) = c^2(g_{uu} - 2g_{uv} + g_{vv}).$$

Dessa maneira,

$$f_{yy} = c^2 f_{xx} \Leftrightarrow c^2(g_{uu} - 2g_{uv} + g_{vv}) = c^2(g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv}) \Leftrightarrow 4g_{uv} = 0 \Leftrightarrow g_{uv} = 0.$$

Como $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e $\mathbb{R}^2$ é aberto e convexo, pelo exercício 7.3 (Curso de Análise, p.182), existem $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis tais que $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$, $\forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, de (*), temos que $f(x,y) = \varphi(x-cy) + \psi(x+cy)$.

Exercício 6

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Para toda função $f : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, o *Laplaciano* de f é a função $\Delta f : U \to \mathbb{R}$, definida por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$$

. Prove que se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear ortogonal então $\Delta(f \circ T) = (\Delta f) \circ T : V \to \mathbb{R}$, onde $V = T^{-1}(U)$. [Invariância do Laplaciano por rotações]

Solução. Sem perda de generalidade, consideremos $n = 2$. Assim, sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $f > U \to \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Suponhamos que $Te_1 = (a, b)$ e $Te_2 = (c, d)$. Então

$$T(x, y) = T(ye_2) = xTe_1 + yTe_2 = x(a, b) + t(c, d) = (ax + cy, bx + dy)$$

Pela rega da cadeia, temos:

$(1) : \frac{\partial(f\circ T}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(T(x, y)) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(T(x, y)) \cdot b$
$\Rightarrow \frac{\partial^2(f\circ T}{\partial x^2}(x, y) = a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(T(x, y)) \cdot a + \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(T(x, y)) \cdot b\right) + b\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(T(x, y)) \cdot a + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(T(x, y)) \cdot b\right)$
$\Rightarrow \frac{\partial^2(f\circ T}{\partial x^2}(x, y) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(T(x, y)) + 2ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(T(x, y)) + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(T(x, y))$

$(2) : \frac{\partial(f\circ T}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(T(x, y)) \cdot c + \frac{\partial f}{\partial y}(T(x, y)) \cdot d$
$\Rightarrow \frac{\partial^2(f\circ T}{\partial y^2}(x, y) = c\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(T(x, y)) \cdot c + \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(T(x, y)) \cdot d\right) + d\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(T(x, y)) \cdot c + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(T(x, y)) \cdot d\right)$
$\Rightarrow \frac{\partial^2(f\circ T}{\partial y^2}(x, y) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(T(x, y)) + 2cd\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(T(x, y)) + d^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(T(x, y))$

Logo, de (1) e (2):

$$(3) : \Delta(f \circ T)(x, y) = (a^2 + c^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}T(x, y) + 2(ab + cd)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}T(x, y) + (b^2 + d^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}T(x, y)$$

Além disso, $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Como T é uma trnasformação linear ortogonal, temos $[T][T]^t = [I]$. Então:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, de (3) temos

$$\Delta(f \circ T)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}T(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}T(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)T(x,y) = \Delta(f)(T(x,y)) = [(\Delta f)\circ T](x,y)$$

Portanto, $\Delta(f \circ T) = (\Delta f) \circ T$. Como $f : U \to \mathbb{R}$, temos $\Delta(f \circ T) = (\Delta f) \circ T : V \to \mathbb{R}$, onde $V = T^{-1}(U)$.

2.3.7 Fórmula de Taylor; pontos críticos

Exercício 1

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ harmônica no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, isto é $f \in C^2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ em todos os pontos de U. Suponha que os pontos críticos de f são todos não-degenerados. Mostre que f não possui máximos nem mínimos locais.

Solução. Seja $x = (x_0, y_0)$ um ponto crítico de f, temos que $\nabla f(x) = 0$ e a matriz Hessiana é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x) \end{pmatrix}$$

seja $v = (\alpha, \beta)$, temos a forma quadrática

$$H(x).v^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\beta^2$$

se consideramos $v_1 = (1,0)$, temos $H(x).v_1^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
se consideramos $v_2 = (0,1)$, temos $H(x).v_2^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
agora como f é harmônica, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

e já que x é um ponto não-degenerado, segue-se que ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, assim se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ tem-se que $H(x).v_1^2 > 0$, logo $H(x).v_2^2 < 0$, i.e., a forma quadrática é indefinida (o outro caso é análogo), por tanto o ponto crítico não pode ser máximo nem mínimo.

Exercício 2

O conjunto dos pontos em que uma função arbitrária $f : X \to \mathbb{R}$, definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, admite um máximo ou mínimo estrito é enumerável.

Solução. Seja Y o conjunto dos pontos de máximo local estrito de f. Dado $x \in Y$, existe uma bola $B(x, 2\delta) \subset X$ tal que $y \in B(x, 2\delta), y \neq x \Rightarrow f(y) < f(x)$, pois x é ponto de máximo local estrito.

Para cada $x \in X$, escolhamos um ponto $q_x \in Q^n \cap B(x, 2\delta)$ e um número racional $r_x > 0$ tal que $|x - q_x| < r_x < \delta$ (isto é possível pois $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$). Então $a \in B(q_x, r_x) \Leftrightarrow |a - q_x| < r_x < \delta$ e $|x - a| \leq |x - q_x| + |q_x - a| < \delta + \delta = 2\delta \Rightarrow a \in B(x, 2\delta)$. Portanto, $B(q_x, r_x) \subset B(x, 2\delta)$ e daí $y \in B(q_x, r_x)$ com $y \neq x \;\Rightarrow\; f(y) < f(x) \qquad (*)$.

A correspondência $x \longmapsto (q_x, r_x)$ é injetiva, pois se $q_x = q'_x$ e $r_x = r'_x$ então $|x' - q_x| < r_x \Rightarrow x' \in B(q_x, r_x)$ e analogamente $x \in B(q'_x, r'_x)$. Daí, se fosse $x \neq x'$, de $(*)$ teríamos $f(x') < f(x)$ e $f(x) < f(x')$. Logo, $x = x'$. Obtivemos assim uma correspondência injetiva entre Y e $\mathbb{Q}^n$.

Portanto, Y é enumerável.

Exercício 3

Dada $\varphi : (a, b) \to R$ derivável, defina $f : (a, b) \times (a, b) \to R$ pondo $f(x, y) = \int_x^y \varphi(t)dt$. Determine os pontos críticos de f, caracterize os pontos críticos não-degenerados, os máximos e os mínimos locais e os pontos de sela. Considere $\varphi(t) = 3t^2 - 1$ e esboce as curvas de nível de f neste caso.

Solução. a é ponto crítico de f se $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. Mas pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\varphi(x)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(y)$.

Logo, para que um ponto (x, y) seja ponto crítico de f, x e y devem ser raízes da função φ.

Seja então (x_1, x_2) ponto crítico de f.

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi'(x_1) & 0 \\ 0 & \varphi'(x_2) \end{bmatrix} = -\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)$$

Daí se x_1 ou x_2 são pontos críticos de φ então (x_1, x_2) é um ponto crítico degenerado de f.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varphi'(x_1) & 0 \\ 0 & \varphi'(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1\varphi'(x_1) & \alpha_2\varphi'(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = -\alpha_1^2\varphi'(x_1) + \alpha_2^2\varphi'(x_2)$$

1. Se $\varphi'(x_1) > 0$ e $\varphi'(x_2) > 0$ ou $\varphi'(x_1) < 0$ e $\varphi'(x_2) < 0$, H é indefinida e neste caso (x_1, x_2) é ponto de sela.

2. Se $\varphi'(x_1) > 0$ e $\varphi'(x_2) < 0$, H é definida negativa, portanto (x_1, x_2) é ponto de máximo local.

3. Se $\varphi'(x_1) < 0$ e $\varphi'(x_2) > 0$, H é definida positiva, portanto (x_1, x_2) é ponto de mínimo local.

No caso em que $\varphi(t) = 3t^2 - 1, \varphi'(t) = 6t$, temos o seguinte:

$f(x,y)=\displaystyle\int_x^y (3t^2-1)dt,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-3x^2+1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-1$, daí os pontos críticos de f são $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}),(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}),(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}),(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$. Além disso $\forall\ (x,y)\ \in\ R^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y$. Desse modo

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix},$$

e então $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$ são pontos de sela de f, $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ é ponto de mínimo e $(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$ é ponto de máximo de f.

Exercício 4

Seja $f:U\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ contínua no aberto $U\subset\mathbb{R}^n$. Se a função $g:U\to\mathbb{R}$, dada pela expressão $g(x)=\int_0^{f(x)}(t^2+1)dt$ for de classe C^∞, então f também será C^∞.

Solução. Seja a função $\varphi\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y)=g(x)-\int_0^y(t^2+1)dt$. Derivando-a em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=-y^2-1$$

e seu valor é diferente de zero para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, para todo $x_0\in\mathbb{R}^n$, pondo $y_0=f(x_0)\in\mathbb{R}$, temos $\varphi(x_0,y_0)=0$. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma bola $B=B(x_0,\delta)\subset\mathbb{R}^n$, um intervalo $J=[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ e uma função $\xi:B\to J$ de classe C^∞ tal que, para todo $x\in B$, existe um único $y=\xi(x)$ em J tal que

$$\varphi(x,y)=\varphi(x,\xi(x))=0$$

Como f é contínua, podemos obter $\delta>0$ suficientemente pequeno que $f(B)\subset J$. Como $\varphi(x,f(x))=0$ para tobo $x\in B$, podemos concluir que $f(x)=\xi(x)$ para $x\in B$.

Portanto, f é C^∞.

Exercício 7

Seja $U\subset\mathbb{R}^m$ um aberto convexo. Uma função $f:U\to\mathbb{R}$ diz-se convexa quando, para $x,y\in U$ e $t\in[0,1]$ quaisquer, tem-se $f((1-t)x+ty)\le(1-t)f(x)+tf(y)$. Seja $E(f)=\{(x,y)\in U$ x $\mathbb{R};y\ge f(x)\}$. Mostre que

a) f é convexa se, e somente se, $E(f)$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{m+1}$.

b) Seja f convexa. Se $x_1, \ldots, x_k \in U$, e $0 \leq t_1, \ldots, t_k \leq 1$, com $\Sigma t_i = 1$ então $f(\Sigma t_i x_i) \leq \Sigma t_i f(x_i)$.

c) Se $C \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo então a função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = dist(x, C)$, é convexa.

Solução.

a) Seja $E(f)$ convexo. Para mostrar que f é convexa, tomamos $x, y \in U$ e $\alpha \in [0,1]$. Então $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ pertencem a $E(f)$, portanto $((1-\alpha)x + \alpha y, (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)) \in E(f)$. Isto significa que $(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \geq f((1-\alpha)x + \alpha y)$, logo f é convexa. Reciprocamente, supondo f convexa, sejam $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ pontos em $E(f)$ e $\alpha \in [0,1]$. então $y \geq f(x)$ e $y' \geq f(x')$ e daí $(1-\alpha)y + \alpha y' \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x') \geq f[(1-\alpha)x + \alpha x']$, a última desigualdade devendo-se à convexidade de f. Logo $(1-\alpha)z + \alpha z'$ pertence a $E(f)$, ou seja, $E(f)$ é um conjunto convexo.

b) Por indução, para $k = 1$ isto é óbvio e para $k = 2$ é a definição de função convexa.

Supondo que este resultado é verdadeiro para um certo k, escrevamos uma combinação convexa dos elementos $x_1, \ldots, x_k \in U$ sob a forma

$$\Sigma_{i=1}^{k+1} t_i x_i = \Sigma_{i=1}^{k} t_i x_i + t_{k+1} x_{k+1}$$

pondo $t = \Sigma_{i=1}^{k} t_i$ temos $t_{k+1} = 1 - t$, levando em conta que $\Sigma_{i=1}^{k} \frac{t_i}{t} = 1$,

$$\begin{aligned} f\left(\Sigma_{i=1}^{k+1} t_i x_i\right) &= f\left(\Sigma_{i=1}^{k} t_i x_i + t_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &= f\left(t \Sigma_{i=1}^{k} \frac{t_i}{t} x_i + (1-t) x_{k+1}\right) \\ &\leq t.f\left(\Sigma_{i=1}^{k} \frac{t_i}{t} x_i\right) + (1-t) f(x_{k+1}) \\ &\leq t \Sigma_{i=1}^{k} \frac{t_i}{t} f(x_i) + (1-t) f(x_{k+1}) = \Sigma_{i=1}^{k+1} t_i f(x_i). \end{aligned}$$

c) Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0,1]$, sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{C}$ tais que $d(x, C) = |x - \bar{x}|$ e $d(y, C) = |x - \bar{y}|$. Então $(1-t)\bar{x} + t\bar{y} \in \bar{C}$ (pois o fecho de um conjunto convexo é também convexo). E como $d(x, C) = d(x, \bar{C})$, temos: $f((1-t)x + ty) = d((1-t)x + ty, C) \leq |[(1-t)x - ty] - [(1-t)\bar{x} + t\bar{y}]| = |(1-t)(x - \bar{x}) + t(y - \bar{y})| \leq (1-t)|x - \bar{x}| + t|y - \bar{y}| = (1-t)f(x) + tf(y)$.

Exercício 8

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto convexo. Uma função diferenciável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se , e somente se, para cada $x, x + v \in U$ quaisquer, tem-se $f(x + tv) \geq f(x) + df(x) \cdot v$.

Solução.

Afirmação. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, a função $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = f(x+tv)$, é convexa.

Portanto pelo teorema visto na análise na reta tem-se $\varphi(1) \geq \varphi(0) + \varphi^{'}(0)$.

Mas $\varphi(1) = f(x+v), \varphi(0) = f(a)$ e $\varphi^{'}(0) = \langle \nabla f(x), v \rangle$. Logo $f(x+v) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), v \rangle$.

Reciprocamente suponhamos que esta desigualdade valha para quaisquer $x, x+v \in U$. Então, pondo $\varphi(t) = f(x+tv)$ temos uma função $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi^{'}(t) = \langle \nabla f(x+tv), v \rangle$ para todo $t \in [0,1]$. Ora, para quaisquer $t, t_0 \in [0,1]$, tem-se $f(x+tv) = f(x+t_0v+(t-t_0)v) = f(x+t_0v+sv)$, com $s = t - t_0$, logo, pela hipótese admitida sobre f.

$$
\begin{aligned}
f(x+tv) &\geq f(x+t_0v) + \langle \nabla f(x+t_0v), sv \rangle \\
&= f(x+t_0v) + \langle \nabla f(x+t_0v), v \rangle (t-t_0),
\end{aligned}
$$

que pode ser lido como $\varphi(t) \geq \varphi(t_0) + \varphi^{'}(t_0)(t-t_0)$, Logo pelo visto na análise na reta a função φ é convexa. A afirmação assegura então que f é convexa.

Prova da Afirmação Equivale ao teorema: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. A fim de que a função $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ seja convexa, é necessário e sufuciente que para quaisquer $a, b \in C$, a função $\varphi[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = f(a+tv), v = b-a$, seja convexa. Equivalente $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, sua restrição a qualquer segmento de reta $[a,b] \subset C$ é convexa

demonstração Se f é convexa então, para $s, t, \alpha \in [0,1]$ temos

$$
\begin{aligned}
\varphi((1-\alpha)s + \alpha t) &= f(\alpha + [(1-\alpha)s + \alpha t]v) \\
&= f[(1-\alpha)\cdot(a+sv) + \alpha \cdot (a+tv)] \\
&\leq (1-\alpha)f(a+sv) + \alpha f(a+tv) \\
&= (1-\alpha)\varphi(s) + \alpha\varphi(t)
\end{aligned}
$$

logo φ é convexa.

, Reciprocamente, se todas as funções φ, definidas do modo acima, são convexas então, dados $x, y \in C$ e $\alpha \in [0,1]$ pomos $\varphi(t) = f(x+t(y-x))$ e temos:

$$
\begin{aligned}
f((1-\alpha)x + \alpha y) &= f(x+\alpha(y-x)) = \varphi(\alpha) = \varphi((1-\alpha)\cdot 0 + \alpha \cdot 1) \\
&\leq (1-\alpha)\cdot\varphi(0) + \alpha\cdot\varphi(1) = (1-\alpha)\cdot f(x) + \alpha \cdot f(y),
\end{aligned}
$$

portanto f é convexa.

Exercício 9

Seja $U \subset R^m$ aberto e convexo. Uma função duas vezes diferenciável $f : U \to R$ é convexa se, e somente se, para cada $x \in U$, $d^2f(x)$ é uma forma quadrática não-negativa, isto é,$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \alpha_i\alpha_j \geq 0$ para todo vetor $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in R^m$.

Solução. $(\Rightarrow)$ f é convexa $\Leftrightarrow$ $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(x + tv)$ é convexa $\Leftrightarrow$ $g''(t) \geq 0,\ \forall\, t \in [0,1]$. Daí, assumindo que f é convexa, temos que $g''(t) \geq 0$,$\forall\, t \in [0,1]$, onde

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tv).\alpha_i,\ \forall\, t \in [0,1]$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + tv).\alpha_i\alpha_j \geq 0,\ \forall\, t \in [0,1]$$

Em particular, quanto $t = 0$ temos

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).\alpha_i\alpha_j \geq 0.$$

$(\Leftarrow)$ Defina $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f(x + tv)$; por hipótese, $g''(t) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + tv).\alpha_i\alpha_j \geq 0 \Rightarrow g$ é convexa, e portanto f é convexa.

Exercício 12

Por meio de sucessivas mudanças de coordenadas, como foi indicado no Exemplo 18, exprima cada uma das formas quadráticas abaixo como soma de termos do tipo $\pm u^2$ e decida quais são positivas, negativas ou indefinidas.

Solução.

1. $A(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$

   $A(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 = x^2 - 3xy + \frac{9y^2}{4} - \frac{9y^2}{4} + y^2 = \left(x - \frac{3y}{2}\right)^2 - \frac{5y^2}{4}$

   $*$ Para $\left(x - \frac{3y}{2}\right)^2 = \frac{5y^2}{4}$, temos $A(x, y) = 0$.
   $*$ Para $\left(x - \frac{3y}{2}\right)^2 > \frac{5y^2}{4}$, temos $A(x, y) > 0$.

$*$ Para $\left(x - \frac{3y}{2}\right)^2 < \frac{5y^2}{4}$, temos $A(x, y) < 0$.

Portanto $A(x, y)$ é indefinida.

2. $B(x, y, z) = 2xy + yz - 3xz$.

   Para esta forma quadrática, consideremos a mudança de coordenadas $x = u + v$ e $y = u - v$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(u, v, z) = (x, y, z)$ tal que $B(x, y, z) = B \circ T(u, v, z)$. Então

   $B(x, y, z) = 2xy + yz - 3xz = 2(u + v)(u - v) + (u - v)z - 3(u + v)z = 2u^2 - 2v^2 + uz - vz - 3uz - 3vz = 2u^2 - 2v^2 - 2uz - 4vz =$
   $= 2(u^2 - uz) - 2(v^2 + 2vz) = 2(u^2 - uz + \frac{z^2}{4}) - 2(v^2 + 2vz + z^2) - 2\frac{z^2}{4} + 2z^2 =$
   $= 2(u - \frac{z}{2})^2 - 2(v + z)^2 - \frac{z^2}{2} + 2z^2 = 2(u - \frac{z}{2})^2 - 2(v + z)^2 - \frac{3z^2}{2}$

   $*$ Para $u^2 - uz > v^2 + 2vz$, temos $B(x, y, z) > 0$.
   $*$ Para $u^2 - uz = v^2 + 2vz$, temos $B(x, y, z) = 0$.
   $*$ Para $u^2 - uz < v^2 + 2vz$, temos $B(x, y, z) < 0$.

   Portanto, $B(x, y, z)$ é indefinida.

3. $C(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xy - xt + 2yt$.

   Completando os quadrados, temos

   $C(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xy - xt + 2yt = x^2 + 2x(y - \frac{t}{2}) + y^2 + 2yt =$
   $= x^2 + 2x(y - \frac{t}{2}) + (y - \frac{t}{2})^2 - (y - \frac{t}{2})^2 + y^2 + 2yt =$
   $= (x + y - \frac{t}{2})^2 - y^2 + yt - \frac{t^4}{4} + y^2 + 2yt = (x + y - \frac{t}{2})^2 - \frac{t^4}{4} + 3yt =$
   $= (x + y - \frac{t}{2})^2 - (\frac{t^4}{4} - 3yt + 9y^2) + 9y^2 = (x + y - \frac{t}{2})^2 - (\frac{t}{2} - 3y)^2 + 9y^2$

   Novamente, temos uma expressão indefinida, uma vez que $C(x, y, z, t)$ pode assumir valores positivos, negativos ou ser igual a zero caso $(x + y - \frac{t}{2})^2 + 9y^2$ seja, respectivamente, maior, menos ou igual a $(\frac{t}{2} - 3y)^2$.

Exercício 13

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Se, para algum ponto $(a,b) \in U$, com $f(a,b) = c$, temos $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0$, existe $k > 0$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) > k$ para todo (x,y) suficientemente próximo de (a,b). Então existe um retângulo $R = [a-\delta, a+\delta] \times [b-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset U$ tal que $f(x, b-\varepsilon) < c - k \cdot \varepsilon$ e $f(x, b+\varepsilon) > c + k \cdot \varepsilon$ para todo $x \in [a-\delta, a+\delta]$. Logo $f(R) \supset (c - k\varepsilon, c + k\varepsilon)$. Conclua que se f não possui pontos críticos então, para cada aberto $A \subset U$, $f(A)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

Solução. Ponhamos

$$h(x,y) = f(x,y) - yk \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - k > 0.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que pondo $I = (a-\delta, a+\delta)$, $J = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, temos $\overline{I} \times \overline{J} \subset U$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - k > 0$, para todo $(x,y) \in \overline{I} \times \overline{J}$. Então para todo $x \in \overline{I}$, a função $g : \overline{J} \to \mathbb{R}$, dada por $g(y) = f(x,y) - yk$ é estritamente crescente em $\overline{J}$. Como em particular de $g(b) = f(a,b) - bk = c - bk$, temos que

$$\begin{aligned} g(b-\varepsilon) < g(b) &\Rightarrow f(x, b-\varepsilon) - (b-\varepsilon)k < f(a,b) - bk \\ &\Rightarrow f(x, b-\varepsilon) - bk + k\varepsilon < f(a,b) - bk \\ &\Rightarrow f(x, b-\varepsilon) - bk + \varepsilon k < c - bk \\ &\Rightarrow f(x, b-\varepsilon) < c - k\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} g(b+\varepsilon) > g(b) &\Rightarrow f(x, b+\varepsilon) - (b+\varepsilon)k > f(a,b) - bk \\ &\Rightarrow f(x, b+\varepsilon) - bk - k\varepsilon > c - bk \\ &\Rightarrow f(x, b+\varepsilon) > c + k\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in [a-\delta, a+\delta]$. Daí como f é contínua e $(c - k\varepsilon, c + k\varepsilon) \subset (f(x, b-\varepsilon), f(x, b+\varepsilon))$ o teorema do valor intermediário nos garante que $f(R) \supset (c - k\varepsilon, c + k\varepsilon)$.
Se f não possui pontos críticos então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, para todo $(a,b) \in U$, pelo que vimos acima para todo abeto A e $(a,b) \in A$, tomando o retângulo tal que $R \subset A$, vemos que $f(A) \supset (c - k\varepsilon, c + k\varepsilon)$, onde $c = f(a,b)$, ou seja, $f(A)$ é aberto.

Exercício 14

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $m \geqslant 2$ tal que para algum $c \in \mathbb{R}$, a imagem inversa $f^{-1}(c)$ é compacta e não-vazia. Mostre que um dos fechados $F = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \leqslant c\}$ ou $G = \{x \in \mathbb{R}^m :$

$f(x) \geqslant c\}$ é compacto. Conclua que f assume um valor de máximo ou um valor de mínimo em $\mathbb{R}^m$.

Solução. Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^m; f(x) = c\}$. Temos que $F \cap G = X$ é compacto e portanto limitado. Daí, se supormos por absurdo que F e G são ilimitados, temos que F'= $\{x \in \mathbb{R}^m; f(x) < c\}$ e $G' = \{x \in \mathbb{R}^m; f(x) > c\}$ são ilimitados.

Como X é compacto, então existe $r > 0$ tal que $X \subset B[0,r]$, assim $F' - B[0,r]$ e $G' - B[0,r]$ são ainda conjuntos ilimitados. Tomemos então $x_0 \in F' - B[0,r]$ e $y_0 \in G' - B[0,r]$, desse modo x_0 e $y_0 \in B[0,r]^c$, $f(x_0) < c$ e $f(y_0) > c$. Mas $B[0,r]^c$ é conexo por caminhos, daí existe um caminho contínuo $\alpha : [0,1] \to B[0,r]^c$, tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = y_0$. Sendo $f \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(\alpha(0)) < c$ e $f(\alpha(1)) > c$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $f(\alpha(\theta)) = c$, onde $\alpha(\theta) \in B[0,r]^c \subset X^c$. Contradição! Portanto F ou G deve ser limitado e portanto compacto.

Sem perda de generalidade admita que G é compacto. Sendo f contínua $\Rightarrow f$ admite máximo em G. Seja m o máximo de f em G. Temos que para todo $x \in F,\ f(x) \leq c \leq m$, portanto m é o máximo global de f.

2.3.8 O teorema da função implícita

Exercício 1

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ em todos os pontos, e $\xi : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, \xi(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Prove que ξ é de classe C^1.

Solução. Suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é continua, então $\exists_m \delta > 0, \varepsilon > 0$ tais que pondo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0\ \forall (x,y) \in I$ x $\bar{J}$. Assim, a função $y \to f(x,y)$ é estritamente crecente no intervalo $\bar{J}$, onde $x \in I$.

Como $f(x_0, y_0) = c = 0$, pelo teorema da função implícita, para cada $x \in I$ existe um único $y = \xi(x)$. Seja $h \in \mathbb{R}^2$ com $|h| < \delta$ então $x = x_0 + h \in I$. Daí, se $k = \xi(x+h) - \xi(x)$, Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists \theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \xi(x) + k).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta h, \xi(x) + k).k = 0$$

pois $f(x + h, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) = 0$, logo

$$\frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \xi(x) + \theta k)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x + \theta h, \xi(x) + k)}$$

Pelo exercício 7.3 do livro analise real Vol 2-pag 38, tem-se que ξ é continua, isto significa que $\lim_{h\to 0} k = 0$. A continuidade das derivadas parciais de f nos dá portanto

$$\xi'(x) = \frac{\xi(x+h)-\xi(x)}{h} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x))}$$

$\xi'(x)$ é continua, pois $f \in C^1$, segue-se que $\xi(x) \in C^1$.

Exercício 2

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(x^2+y^4)f(x,y)+f(x,y)^3 = 1,\ \forall\ (x,y) \in U$. Prove que $f \in C^\infty$.

Solução. Defina $F(x,y,z) = (x^2+y^4)z+z^3$. Tome $(x_0,y_0) \in U$. Assim, $F\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)= 1$. Temos que $\dfrac{\partial F}{\partial z}\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big) = x_0^2+y_0^2+3\big(f(x_0,y_0)\big)^2 \neq 0$ (Veja que $x_0^2+y_0^2+3\big(f(x_0,y_0)\big)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0 = f(x_0,y_0) = 0$, mas isto não ocorre pois implicaria $F\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big) = 0 \neq 1$).
Pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos $V_{(x_0,y_0)}, W_{f(x_0,y_0)}$ tais que $\forall\ (x,y) \in V_{(x_0,y_0)},\ \exists!\ z = \xi(x,y) \in W_{f(x_0,y_0)}$ ($\xi \in C^\infty$) tal que $F\big(x,y,\xi(x,y)\big) = 1$.
Note que $F\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big) = 1$ e assim da unicidade de ξ podemos concluir que $f(x_0,y_0) = \xi(x_0,y_0)$. Como f é contínua e $W_{f(x_0,y_0)}$, então $f^{-1}(W_{f(x_0,y_0)})$ é aberto e contém (x_0,y_0). Consideremos o aberto $A = f^{-1}(W_{f(x_0,y_0)}) \cap V_{(x_0,y_0)} \subset V_{(x_0,y_0)}$. Temos que $\forall\ (x,y) \in A,\ \exists!\ \xi(x,y) \in C^\infty$ que satisfaz $F\big(x,y,\xi(x,y)\big) = 1$.
Por outro lado, $\forall\ (x,y) \in A$ temos que $f(x,y) \in W_{f(x_0,y_0)}$ e $F\big(x,y,f(x,y)\big) = 1$.
Assim, da unicidade de ξ segue que $f(x,y) = \xi(x,y),\ \forall\ (x,y) \in A$.
Portanto, $f \in C^\infty$.

Exercício 3

Sejam $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) = f(x)+(f(x))^5$. Se f é contínua e $g \in C^r$ então $f \in C^r$.

Solução. Fixemos um ponto x_0 arbitrário em $\mathbb{R}^n$. Defina $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $F(x,y) = g(x)-y-y^5$. Temos que $F(x_0,f(x_0)) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,f(x_0)) = -1-5f(x_0)^4 \neq 0$. Daí, pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos $I \subset \mathbb{R}^n$ e $J \subset \mathbb{R}$, contendo x_0 e $f(x_0)$, respectivamente, tais que $\forall\ x \in I$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $F(x,y) = 0$ e $\xi : I \to J$ assim definida é C^r. Ora, f contínua em $\mathbb{R}^n$ e J aberto em $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(J) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Tomemos então $W = (f^{-1}(J) \times J) \cap (I \times J)$. Temos que $(x_0,f(x_0) \in W$ e $\forall\ (x,f(x)) \in W,\ F(x,f(x)) = 0$, daí, pela unicidade de ξ temos que $\xi(x) = f(x), \ \forall \ x \ \in F^{-1}(J) \Rightarrow \ f$ é C^r numa vizinhança de x_0, e como x_0 foi tomado arbitrariamente, segue que f é C^r em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 4

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se a função $g : U \to \mathbb{R}$, dada pela expressão $g(x) = \int_0^{f(x)}(t^2+1)dt$ for de classe C^∞, então f também será C^∞.

Solução. Seja a função $\varphi \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y) = g(x) - \int_0^y (t^2+1)dt$. Derivando-a em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -y^2 - 1$$

e seu valor é diferente de zero para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Assim, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pondo $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}$, temos $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$, um intervalo $J = [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ e uma função $\xi : B \to J$ de classe C^∞ tal que, para todo $x \in B$, existe um único $y = \xi(x)$ em J tal que

$$\varphi(x,y) = \varphi(x, \xi(x)) = 0$$

Como f é contínua, podemos obter $\delta > 0$ suficientemente pequeno que $f(B) \subset J$. Como $\varphi(x, f(x)) = 0$ para tobo $x \in B$, podemos concluir que $f(x) = \xi(x)$ para $x \in B$.

Portanto, f é C^∞.

Exercício 10

Seja $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva, tal que $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = 1$. Para cada $x \in [0,1]$, prove que existe um único $g(x) \in [1,2]$ tal $\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1$. Mostre que que a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida é de classe C^1.

Solução. Observações preliminares:

i) Para cada $x_0 \in [0,1]$, a função $H : [1,2] \to \mathbb{R}$, $H(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ é crescente, contínua e de classe C^1.

ii) Para cada $x_0 \in (0,1)$, $\exists y_0 \in (1,2)$ tal que $\displaystyle\int_{x_0}^{y_0} f(t)dt = 1$.

De fato fixe $x_0 \in (0,1)$, e considere $H : [1,2] \to \mathbb{R}$, dada por $H(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, então

$H(1) < \int_1^2 f(t)dt = 1 < H(2)$. Logo pelo teorema do valor intermediário $\exists y_0 \in (1,2)$ tal que $H(y_0) = \int_{x_0}^{y_0} f(t)dt = 1$.

Agora considere a função $F : (0,1) \times (1,2) \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = \int_x^y f(t)dt$. Tem-se que F é de classe C^1, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f(y) > 0$ e para cada $x_0 \in (0,1)$ arbitrário $\exists y_0 \in (1,2)$ tal que $F(x_0, y_0) = 1$. Pelo teorema da função inversa existem intervalos abertos $I \subset (0,1)$, $J \subset (1,2)$ tais que $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, e para cada $x \in I$, existe um único $\xi(x) \in J$ tal que $F(x, \xi(x)) = 1$, e a função $\xi : I \to J$ assim definida é de classe C^1.

Vamos definir $g : [0,1] \to [1,2]$ dessa forma $\begin{cases} g(x) = & \xi(x), \quad x \in (0,1) \\ g(0) = & 1 \\ g(1) = & 2 \end{cases}$

Afirmações:

a) g é contínua em $x = 0$ e $x = 1$.

De fato seja $x_n \to 0$ ($x_n \in (0,1)$), então $\int_{x_n}^{g(x_n)} f(t)dt = 1$ como $x_n \to 0$ e $1 \leq g(x_n) \leq 2$ e para $1 < k < 2$, tem-se $\int_0^k f(t)dt > 1$, devemos ter que $g(x_n) \to 1$ quando $x_n \to 0$, pois $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

Analogamente $x_n \to 1 \Rightarrow g(x_n) \to 2$. E portanto $g(x)$ é contínua em $x = 0$ e $x = 1$.

b) g é derivável em $x = 0$ e $x = 1$.

Veja que

$$\int_y^{g(x)} f(t)dt = 1 \Rightarrow f(g(x)) \cdot g'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{f(x)}{f(g(x))}, \forall \in (0,1).$$

Nossa conclusão se baseia no seguinte fato:

Seja f contínua em $[x_0, b]$ e derivável em (x_0, b) e suponha que existe $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$. Mostre que $f'_d(x_0)$ existe e $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'_d(x_0)$.

De fato, use a regra de L'Hôpital no quociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'}$$
$$= \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = L = f'_d(x_0).$$

Assim $\lim_{x \to 0^+} g'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{f(g(x))} = \frac{f(0)}{f(1)}$, pois f e g são contínuas com $f(x) > 0$. De modo análogo existe $\lim_{x \to 1^-} g'(x)$.

Ao mesmo passo da relação $g'(x) = \dfrac{f(x)}{f(g(x))}$ mostramos que $g(x)$ é contínua em $x = 0$ e $x = 1$. Logo $g(x)$ é de classe C^1.

2.3.9 Multiplicador de Lagrange

Exercício 1

Dentre os pontos do elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, determine os mais próximos da origem em $\mathbb{R}^3$.
Solução. Considere a seguinte matriz autoadjunta:

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$ Queremos minimizar $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, restrito à condição $g(\underline{x}) = \langle A\underline{x}, \underline{x}\rangle = 1$. Este mínimo de fato existe, pois $g^{-1}(1)$ é um conjunto compacto e f é uma função contínua. Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, os pontos críticos de $f|_{g^{-1}(1)}$ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(\underline{x}) = \lambda \nabla g(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x} = \lambda A\underline{x} \\ g(\underline{x}) = 1 \end{cases}$$

Deste sistema resulta que os pontos de mínimo de $f|_{g^{-1}(1)}$ são os autovetores de A que pertencem à hiperfície $g^{-1}(1)$ e que estão associados aos autovalores de maior módulo.

Exercício 2

Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) =< x, y >$, restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$ e mostre como daí se obtém a desigualdade de Schwarz.

Solução. Consideradas as funções $f, \varphi : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) =< x, y >$ e $\varphi(x,y) = |x|^2 + |y|^2$ temos $S = \varphi^{-1}$, $gradf(x,y) = (y,x)$ e $grad\varphi(x,y) = 2(x,y)$. Portanto $(x,y) \in S$ é ponto crítico de $f|_S$ se, e somente se, $(y,x) = 2\lambda(x,y)$, logo $y = 2\lambda x$ e $x = 2\lambda y$, o que nos dá $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$, e $y = x$ ou $y = -x$. Assim, os pontos críticos de $f|_S$ são da forma (x,x) ou $(x,-x)$ com $|x|^2 = \frac{1}{2}$ pois, $(x,x) \in S$. Já que $f(x,x) = |x|^2$ e $f(x,-x) = -|x|^2$, os pontos (x,x) são de máximo e os pontos $(x,-x)$ de mínimo, logo $-\frac{1}{2} \leq < x, y > \leq \frac{1}{2}$ para todo $(x,y) \in S$. Para todo par de vetores não-nulos $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $(\dfrac{\sqrt{2}}{2|x|}x, \dfrac{\sqrt{2}}{2|y|}y) \in S$, portanto $\Big| < \dfrac{\sqrt{2}}{2|x|}x, \dfrac{\sqrt{2}}{2|y|}y > \Big| \leq \dfrac{1}{2}$ e daí $| < x, y > | \leq |x||y|$, a igualdade é válida só quando $\dfrac{\sqrt{2}}{2|x|}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2|y|}y$ ou $\dfrac{\sqrt{2}}{2|x|}x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2|y|}y$, i.e., quando x e y são colineares.

2.4 - Aplicações Diferenciáveis

2.4.1 Diferenciabilidade de uma aplicação

Exercício 1

Sejam $\alpha > 1$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, cumpre a condiçãoo $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in U$ então f é constante em cada componente de U.

Solução. Uma aplicaçãoo $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a+v) - f(a) = T.v + r(v),\ onde \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

.

De fato

Afirmação:$df(a) = 0, \forall a \in U$

Prova: $f(a+v) - f(a) = r(v)$, só resta provar que $\lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$, por hipoteses $|f(a+v) - f(a)| \leq c|v|^\alpha$, onde $\alpha > 1$ então $|r(v)| \leq c|v|^\alpha \Rightarrow |\frac{r(v)}{|v|}| \leq c|v|^{\alpha-1} \Rightarrow \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ com isto termina a prova da afirmação. Portanto como cada componente conexa C de U é conexa e além $df(x) = 0\ \forall x \in C$, utilizando o corolário do teorema do valor mádio f é constante em C.

Exercício 2

Sejam $U \in \mathbb{R}^m$ aberto e $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no ponto $a \in U$, com $f(a) = g(a)$. A fim de que $f'(a) = g'(a)$, é necessário e suficiente que

$$\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = 0.$$

Solução. Como f, g são diferenciáveis em a, com $f(a) = g(a)$, temos:

$$\begin{aligned}
f'(a) = g'(a) \Rightarrow &\quad f(a+v) - f(a) - r_f(v) = g(a+v) - g(a) - r_g(v) \\
\Rightarrow &\quad \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = \frac{r_f(v) - r_g(v)}{|v|} \\
\Rightarrow &\quad \lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = \lim_{v\to 0} \frac{r_f(v)}{|v|} - \frac{r_g(v)}{|v|} \\
\Rightarrow &\quad \lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = 0.
\end{aligned}$$

Reciprocamente:

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to 0}\frac{f(a+v)-g(a+v)}{|v|}=0 \Rightarrow & \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-g(a+tu)}{|tu|}=0\\
\Rightarrow & \lim_{t\to 0}\frac{f'(a)(tu)-g'(a)(tu)+r_f(tu)-r_g(tu)}{|tu|}=0\\
\Rightarrow & \lim_{t\to 0}\pm\frac{f'(a)\cdot u-g'(a)\cdot u}{|u|}+\lim_{t\to 0}\frac{r_f(tu)-r_g(tu)}{|tu|}=0\\
\Rightarrow & \lim_{t\to 0}\pm\frac{f'(a)\cdot u-g'(a)\cdot u}{|u|}=0\\
\Rightarrow & f'(a)\cdot u-g'(a)\cdot u=0,\ \forall\, u\in\mathbb{R}^m\\
\Rightarrow & f'(a)=g'(a).
\end{aligned}$$

Exercício 3

Sejam $V\subset U\subset\mathbb{R}^m$ abertos e $\delta>0$ tais que $x\in V$, $|h|<\delta\Rightarrow x+h\in U$. Seja $B=B(0;\delta)$. Se $f:U\ \to\ \mathbb{R}^n$ é diferenciável então $\varphi:\ V\times B\to\mathbb{R}^n$, definida por $\phi(x,h)=f(x+h)$, é diferenciavel, sendo $\varphi^{'}(x_0,h_0):\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ dada por $\varphi^{'}(x_0,h_0).(u,v)=f^{'}(x_0+h_0).(u+v)$.

Solução. Uma aplicação $f:\ U\to\ \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U\subset\mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a\in U$ quando existe uma aplicação linear $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ tal que $f(a+v)-f(a)=T.v+r(v),\ \mathit{onde}\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|}=0$

Então

$\varphi((x_0,h_0)+(v_1,v_2))+\varphi(x_0,h_0)=f(x_0+h_0+v_1+v_2)+f(x_0+h_0)=\varphi^{'}(x_0,h_0).(v_1,v_2)+r(v_1,v_2)$, onde $\lim\limits_{(v_1,v_2)\to 0}\dfrac{r(v_1,v_2)}{|v_1,v_2|}=0$,por outro lado , como f é diferenciável cumpre-se que $f(x_0+h_0+v_1+v_2)+f(x_0+h_0)=f^{'}(x_0+h_0).(u+v)+r^1(v_1+v_2)$, onde $\lim\limits_{(v_1+v_2)\to 0}\dfrac{r^1(v_1+v_2)}{|v_1+v_2|}=0$. Agora só precisamos demostrar que $\lim\limits_{(v_1,v_2)\to 0}\dfrac{r^1(v_1+v_2)}{|v_1,v_2|}=0$. De fato , $\dfrac{r^1(v_1+v_2)}{|(v_1,v_2)|}=\dfrac{r^1(v_1+v_2)}{|v_1|+|v_2|}\le\dfrac{r^1(v_1+v_2)}{|v_1+v_2|}$, então $\lim\limits_{(v_1,v_2)\to 0}\dfrac{r^1(v_1+v_2)}{|v_1,v_2|}=0$

Exercício 4

Seja $U\subset\mathbb{R}^m$ aberto. A fim de que uma aplicação $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ seja diferenciável no ponto $a\in U$ é necessário e sufuciente que exista, para cada $h\in\mathbb{R}^m$ com $a+h\in U$, uma transformação linear $A(h):\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ tal que $f(a+h)-f(a)=A(h)\cdot h$ e $h\mapsto A(h)$ seja contínua no ponto $h=0$.

Solução. Como $f:U\subset\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ é diferenciável $\forall\, a,a+h\in U\subset\mathbb{R}^m$ temos:

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)\cdot h+r(h),$$

Pondo $A(h)=f'(a)+r(h)$, aplicando em $h\in U$ tem-se $A(h)\cdot h=f'(a)\cdot h+r(h)\cdot h$.

Dividindo por $|h|$ tem-se:

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{A(h)\cdot h}{|h|}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f'(a)\cdot h}{|h|}+\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{r(h)}{|h|}\Leftrightarrow \lim_{h\longrightarrow 0}A(h)=\lim_{h\longrightarrow 0}f'(a)\Leftrightarrow A(h)=f'(a)\Leftrightarrow A(h)h=f'(a)\cdot h.$$

Como $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{r(h)}{|h|}=0$, segue que

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)\cdot h\Leftrightarrow f(a+h)-f(a)=A(h)\cdot h.$$

Portanto, $A(h):\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ é contínua em 0.

Exercício 5

Dado $U\subset\mathbb{R}^m$ aberto, seja $f:U\to\mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $a\in U$. Prove que se $\lim v_k=v$ em $\mathbb{R}^m$ e $\lim t_k=0$ em $\mathbb{R}$ então $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{f(a+t_kv_k)-f(a)}{t_k}=f'(a)\cdot v$.

Solução. U aberto e $a\in U\ \Rightarrow\exists\delta>0$ tal que $B(a,\delta)\subset U$. Daí, para todo $a+h\in B(a,\delta)$, tem-se $f(a+h)=f(a)\ +f'(a)h+r(h)$, onde $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{|h|}=0$. Em particular, como $\displaystyle\lim_{k\to\infty}t_k.v_k=0$, então para k suficientemente grande temos $a+t_k.v_k\in B(a,\delta)$ e daí $f(a+t_k.v_k)=f(a)+f'(a)t_k.v_k+r(t_k.v_k)\Rightarrow\frac{f(a+t_k.v_k)-f(a)}{t_k}=f'(a)v_k+\frac{r(t_k.v_k)}{t_k}\ \Rightarrow lim_{k\to\infty}\frac{f(a+t_k.v_k)-f(a)}{t_k}=lim_{k\to\infty}(f'(a)v_k+\frac{r(t_k.v_k)}{t_k})=f'(a)v\pm lim_{k\to\infty}\frac{r(t_k.v_k).|v_k|}{|t_k.v_k|}=f'(a).v.$

Exercício 6

Seja $f:U\to\mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U\subset\mathbb{R}^m$. Se, para algum $b\in\mathbb{R}^n$, o conjunto $f^{-1}(b)$ possui um ponto de acumulação $a\in U$ então $f'(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ não é injetiva.

Solução. Seja a um ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$ então $\exists\ hk\neq 0, hk\to 0$ tal que $f(a+hk)=b$. f diferenciável em $U\Rightarrow$

$$f(a+hk)=f(a)+f'(a)hk+r(hk)\Rightarrow\left|f'(a)\frac{hk}{|hk|}\right|=\left|-\frac{r(hk)}{|hk|}\right|.$$

Como $\left(\frac{hk}{|hk|}\right)\subset S^1$ temos que existe $\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}$ e $h\in S^1$ tal que $\frac{hk}{|hk|}\to h\Rightarrow|f'(a)h|=0\Rightarrow f'(a)h=0\Rightarrow f'(a)$ não é injetiva.

Exercício 7

Dada $f:S^m\to\mathbb{R}^n$ defina a *extensão radial* de f como a aplicação $F:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^n$ tal que $F(0)=0$ e $F(x)=|x|\cdot f(\frac{x}{|x|})$ se $x\neq 0$. Mostre que F é diferenciável na origem $0\in\mathbb{R}^{m+1}$ se, e somente se f é (a restrição de uma aplicação) linear.

Solução. $(\Rightarrow)$

F diferenciável em $0\ \Rightarrow\exists\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{F(tx)}{t}$ e este coincide com $F'(0)x$. Além disso $\frac{F(tx)}{t}=F(x)$, se

$t > 0$ e $\frac{F(tx)}{t} = -F(-x)$ se $t < 0$, daí $F'(0)x = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{F(tx)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{F(tx)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{F(tx)}{t}$, onde $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{F(tx)}{t} = F(x)$ e $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{F(tx)}{t} = -F(-x)$. Em qualquer caso $F(x) = F'(0)x, \forall\, x \in \mathbb{R}^{m+1}$, em particular $\forall\, x \in S^m,\ F(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = F'(0)x$, portanto f é a restrição de uma aplicação linear.

$(\Leftarrow)$

Se $f = T|_{S^m}$, onde T é linear, então F é linear, pois $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $F(\alpha.y+x) = |x+\alpha.y|.f(\frac{\alpha.y+x}{|\alpha.y+x|}) = |x+\alpha.y|.T(\frac{\alpha.y+x}{|\alpha.y+x|}) = |x|.T(\frac{x}{|x|}) + \alpha|y|.T(\frac{y}{|y|}) = |x|.f(\frac{x}{|x|}) + \alpha|y|.f(\frac{y}{|y|}) = F(x) + \alpha F(y)$. Agora observe que $lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)-F(x)}{|x|} = 0$. Portanto F é diferenciável em 0 e $F'(0)x = F(x)$.

Exercício 9

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, enuncie e demonstre um teorema que traduza a igualdade $f'(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Solução. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $\sigma(t) = (x(t), y(t)), t \in I$, tal que $\sigma(I) \subset \mathbb{R}^n$ um caminho. Se $\sigma(t)$ é diferenciável em $t_0 \in I$, e $f(x,y)$ é diferenciável em $\sigma(t_0) = (x_0, y_0)$, então a função composta $z = f(\sigma(t)), t \in I$, é diferenciável em t_0 e $\dfrac{dz(t_0)}{dt} = f'(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Demonstração: Como f é diferenciável em (x,y), temos

$$f(w,z) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot(w-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot(z-y) + E(w,z), \tag{2.1}$$

onde $\lim \dfrac{E(w,z)}{|(w,z)-(x,y)|} = 0$. Portanto, a função

$$g(w,z) = \begin{cases} \dfrac{E(w,z)}{|(w,z)-(x,y)|} & ,\quad (w,z) \neq (x,y) \\ 0 & ,\quad (w,z) = (x,y) \end{cases}$$

é contínua em (x,y).

Assim, dividindo (**??**) por $t - t_0$, $t \neq t_0$, temos

$$\frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0))\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} + g(\sigma(t))\frac{|\sigma(t)-\sigma(t_0)|}{t-t_0}$$

Observe que

$$\frac{|\sigma(t)-\sigma(t_0)|}{t-t_0} = \left|\frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0}\right| \frac{|t-t_0|}{t-t_0}.$$

Como $\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t)) = 0$ e como a função $\dfrac{|t-t_0|}{t-t_0}$ é limitada, temos

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\frac{|t-t_0|}{t-t_0} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to t_0}\left|\frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0}\right| = |\sigma'(t_0)|.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\frac{|\sigma(t)-\sigma(t_0)|}{t-t_0} = 0.$$

Logo,

$$f'(x,y) = \lim_{t\to t_0}\frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t-t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Exercício 10

Seja $f : U \to \mathbb{R}^p$ duas vezes diferenciável no aberto $U \subset R^m \times R^n$. Defina as derivadas mistas $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ e estabeleça a relação que existe entre elas.

Solução. A derivada mista $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ é a aplicação $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} : U \to R^p$, que associa a cada ponto $a \in U$ o vetor $f''(a)(e_1,0)(0,e_1)$. De maneira análoga, a derivada mista $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ é a aplicação $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} : U \to R^p$, que associa a cada ponto $a \in U$ o vetor $f''(a)(0,e_1)(e_1,0)$. No caso de f ser duas vezes diferenciável, o Teorema de Schwarz nos diz que essas duas derivadas coincidem em cada ponto.

Exercício 11

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ diferenciável, com $f(0) = 0$. Se a transformação linear $f'(0)$ não tem valor próprio 1 então existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \{0\}$.

Solução. Como a transformação linear $f'(0)$ não possui valor próprio em $S_1(0)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|u| = 1$ e $|f'(0)u - u| \geq \varepsilon$. Sendo f diferenciável, com $f(0) = 0$ temos que

$$f(0+x) = f(0) + f'(0)x + p(x)|x|,$$

logo

$$f(x) = f'(0)x + p(x)|x| = |x|\left(f'(0)\frac{x}{|x|} + p(x)\right)$$

e existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x| < \delta \Rightarrow |p(x)| < \varepsilon$. Portanto, se $0 < |x| < \delta$ então

$$\begin{aligned} |f(x) - x| &= \left| |x| \left(f'(0)\frac{x}{|x|} \right) + p(x) - x \right| \\ &= \left| |x| \left(f'(0)\frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x|} \right) + p(x) \right| \\ &\geq \left[|x| \left(f'(0)\frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x|} \right) + p(x) \right] > 0 \end{aligned}$$

e daí $f(x) \neq x$.

2.4.2 A regra da cadeia

Exercício 1

Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitziana, com constante de lipschitz igual a c, no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$,com $a \in U$, e $g : V \to \mathbb{R}^P$ diferenciável no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $f(U) \subset V$ e $b = f(a)$. Se $g'(b) = 0$ então $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a, com $(g \circ f)'(a) = 0$.

Solução. Devemos mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|g \circ f(a+h) - g \circ f(a)|}{|h|} = 0$$

Faça $f(a+h) = f(a)+k$. Como f é lipschitziana em U,então f é contínua em U e daí $k \to 0$ quando $h \to 0$. Sendo g diferenciável em $f(a)$ com $g'(b) = 0$ temos que, para h suficientemente pequeno, $g(f(a+h)) = g(f(a)+k) = g(f(a)) + r(k)$, onde $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(k)}{|k|} = 0$. Daí

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{|g \circ f(a+h) - g \circ f(a)|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{|g \circ f(a+h) - g \circ f(a)|\,|k|}{|h|\,|k|} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|g \circ f(a+h) - g \circ f(a)|\,|f(a+h) - f(a)|}{|h|\,|f(a+h) - f(a)|} \leq$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{c\,|g \circ f(a+h) - g \circ f(a)|\,|h|}{|h||k|} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|g \circ f(a+h) - g \circ f(a)|}{|h|} = 0,$$

como queríamos provar.

Exercício 2

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitziana no aberto $U \subset \mathbf{R}^m$. Dado $a \in U$,suponha que, para todo $v \in \mathbf{R}^m$, exista la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ e dependa linearmente de v.Prove que, para todo caminho g :

$(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$, con $g(0) = a$, diferenciável no ponto $t = 0$, existe o vetor-velocidade $(f \circ g)'(0)$. conclua que f é diferenciável no ponto a.

Solução. Como g é diferenciável en 0, temos que

$$g(t) = g(0) + g'(0)(t) + tr(t)$$

com $\lim_{t\to 0} r(t) = 0$ logo

$$(f \circ g)'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + g'(0)(t) + tr(t)) - f(a)}{t}$$

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{f(a + g'(0)(t) + tr(t)) - f(a + g'(0)(t))}{t} + \lim_{t\to 0} \dfrac{f(a + g'(0)(t)) - f(a)}{t}$ pero como f Lipschitziana, temos

$$\left| \frac{f(a + g'(0)(t) + tr(t)) - f(a + g'(0)(t))}{t} \right| \leq C \left| \frac{a + g'(0)(t) + tr(t) - a - g'(0)(t)}{t} \right|$$

$= C|r(t)| \longrightarrow 0, t \to 0 \Longrightarrow (f \circ g)'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial g'(0)}(a) \cdots\cdots (1)$

por outro lado f é diferenciável em $a \Longleftrightarrow f_i\ \forall i = 1 \cdots m$ o fosse em a

de (1) tenemos $((f_1 \circ g)'(0), \ldots, (f_m \circ g)'(0)) = \dfrac{\partial f}{\partial g'(0)}(a) = T(v) = (T_1(v), \ldots, T_m(v))$ onde $v = g'(0)$ (T é lineal p. h.) $\Longrightarrow (f_i \circ g)'(0) = T_i(v)$ existe e T_i é linear (porque T Ã©) em seguida, pelo exercício **Cap 3-4.7 análise vol 2** podemos concluir que $f_i\ \forall i = 1 \cdots m$ é diferenciável em a.

Exercício 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto tal que $x \in U,\ t > 0 \Rightarrow tx \in U$, e k um número real. Defina a aplicação positivamente homogêneas $f : U \to \mathbb{R}^n$ de grau k. Prove que a relação de Euler $f'(x) \cdot x = kf(x)$ é necessária e suficiente para que uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$ seja positivamente homogênea de grau k.

Solução. Uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se *positivamente homogênea de grau* k quando $f(tx) = t^k f(x),\ \forall\, x \in U$ e $\forall\, t > 0$.

Note que f é positivamente homogênea de grau k

$$\Leftrightarrow \quad f_i : U \longrightarrow \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n, \text{ é positivamente homogênea de grau } k$$

$$\overset{\text{ex. 3.3 cap.3}}{\Leftrightarrow} \quad \nabla f_i(x) \cdot x = k f_i(x),\ 1 \leq i \leq n$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = kf(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad Jf(x) \cdot x = kf(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot x = kf(x).$$

Exercício 4

Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : V \to \mathbb{R}^m$ diferenciáveis nos abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, com $g(f(x)) = x$ para todo $x \in U$. Se $y = f(x)$, prove que as transformações lineares $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g'(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ têm o mesmo posto.

Solução. Pela regra da cadeia: $g'(f(x))_{m\times n} \cdot f'(x)_{n\times m} = Id_{m\times m}$, $\forall\, x \in U$. $(*)$

Sabemos que o posto de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem. Seja então $\{f'(x)v_1, \cdots, f'(x)v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ base de $Im\ f'(x)$. Provaremos que $\mathbb{R}^m \supset \{v_1, \cdots, v_r\}$ é base de $Im\ g'(f(x))$. De fato:

(1) Se $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = 0$, então $a_1f'(x)v_1 + \cdots + a_rf'(x)v_r = f'(x)0 = 0$ e como $\{f'(x)v_1, \cdots, f'(x)v_r\}$ é base , então $a_1 = \cdots = a_r = 0$, portanto $\{v_1, \cdots, v_r\}$ são L.I.'s.

(2) Seja $w \in Im\ g'(f(x))$. De $(*)$ temos que $w = g'(f(x))(f'(x)w)$, onde $f'(x)w \in Im\ f'(x)$. Daí $f'(x)w = b_1f'(x)v_1 + ... + b_rf'(x)v_r$, para alguns $b_1, ..., b_r \in \mathbb{R}$.

Portanto $w = g'(f(x))(b_1f'(x)v_1 + \cdots + b_rf'(x)v_r) = b_1v_1 + \cdots + b_rv_r$, portanto $\{v_1, \cdots, v_r\}$ gera $Im\ g'(f(x))$.

De (1) e (2) temos que $\{v_1, \cdots, v_r\}$ é base de $Im\ g'(f(x))$ e então $dim(Im\ g'(f(x))) = dim(Im\ f'(x)) = r$, como queríamos.

Exercício 5

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $\varphi(f(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Dado $a \in U$, se $grad\varphi(b) \neq 0$, $b = f(a)$, então $det.f'(a) = 0$.

Solução. Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial y_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial y_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) = 0 \\ ... \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial y_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) = 0 \end{cases}$$

O sistema acima é válido para todo $x \in U$, em particular, para $x = a$, temos $Jf(a) \bigtriangledown \varphi(b) = 0$. Logo, $Jf(a) \cdot x = 0$ adimite uma solução não-trivial.

Portanto, a matriz jacobiana de f em a não é invertível, isto é, $detf'(a) = 0$.

Exercício 6

Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $|f(x)|$ é constante quando x varia em U então o determinante jacobiano de f é identicamente nulo.

Solução. Seja $|f(x)| = c$ (cte),$\forall \in U$.

Se $c = 0$, então

$$|f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \det Jf(x) = 0, \forall x \in U.$$

Se $c \neq 0$, então $|f(x)| = c \Rightarrow |f(x)|^2 = c^2$, donde $< f'(x) \cdot v, f(x) >= 0, \forall x \in U, \forall v \in \mathbb{R}^m$.

Fixando $x \in U$, temos que

$$Imf'(x) =< f(x) >^{\perp} \Rightarrow \dim Im\ f'(x) < m \Rightarrow \dim \ker f'(x) \geq 1,$$

isto é, $f'(x)$ não é injetiva.

Portanto, $\det Jf(x) = 0, \forall x \in U$.

Exercício 8

Sejam $U = (0, +\infty)$ x $(0, 2\pi)$ x $\mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^3$ menos o semiplano $y = 0$, $x \geq 0$. Mostre que $\varphi : U \to V$ definida por $\varphi(r, \theta, z) = (rcos\theta, rsen\theta, z)$ é um difeomorfismo C^∞. (se $q = \varphi(r, \theta, z)$, os números r, θ, z são chamados as "coordenadas cilíndricas"de q).

Dada $f : V \to \mathbb{R}$ diferenciável, explique o significado e demostre a seguinte fórmula para o gradiente de f em coordenadas cilíndricas:

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial r}.u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}u_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}u_z$$

onde u_r, u_θ e u_z são os vetores unitários tangentes às curvas r, θ e z em V.

Solução.

i) $\varphi : U := (0, +\infty)$ x $(0, 2\pi)$ x $\mathbb{R} \to V$ definida por

$\varphi(r, \theta, z) = (rcos\theta, rsen\theta, z)$

φ é diferenciável, pois cada componente de φ o é.

$\varphi(r, \theta, z) = \varphi(r', \theta', z')$ então

$$\begin{cases} rcos\theta & = & r'cos\theta' \\ rsen\theta & = & r'sen\theta' \\ z & = & z' \end{cases}$$

Daí $(r, \theta, z) = (r', \theta', z')$

Assim φ é injetora e portanto existe inversa de φ, definida por $\varphi^{-1} : V \to U$ onde $\varphi^{-1}(u, v, w) = (\sqrt{u^2 + v^2}, arctg\frac{v}{u}, w)$. φ^{-1} é diferenciável, pois cada componente de φ^{-1} o é.

Portanto φ é um difeomorfismo de classe C^∞.

ii) seja

$$\begin{cases} u_r & = & (cos\theta, sen\theta, 0) \\ u_\theta & = & (-sen\theta, cos\theta, 0) \\ u_z & = & (0, 0, 1) \end{cases}$$

onde $|u_r| = |u_\theta| = |u_z| = 1$ e $\bar{f}(r, \theta, z) = f(rcos\theta, rsen\theta, z) = (f \circ \varphi)(r, \theta, z)$.

Calculando as derivadas parciais respeito a r, θ, z respectivamente e usando a regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \bar{f}_r & = & f_x.cos\theta + f_y.sen\theta \\ \bar{f}_\theta & = & f_x.(-rsen\theta) + f_y.(rsen\theta) \\ \bar{f}_z & = & f_z \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} \bar{f}_r & = & f_x.cos\theta + f_y.sen\theta \\ \frac{\bar{f}_\theta}{r} & = & f_x.(-sen\theta) + f_y.(cos\theta) \\ \bar{f}_z & = & f_z \end{cases}$$

Daí

$$\begin{cases} \bar{f}_r.u_r & = & (f_x.cos\theta + f_y.sen\theta)(cos\theta, sen\theta, 0) \\ & = & (f_x cos^2\theta + f_y sen\theta cos\theta, f_x sen\theta cos\theta + f_y sen\theta, 0) \\ \frac{\bar{f}_\theta}{r}.u_\theta & = & (f_x.(-sen\theta) + f_y.(ccs\theta)(-sen\theta, cos\theta, 0) \\ & = & (f_x sen^2\theta - f_y sen\theta cos\theta, -f_x sen\theta cos\theta + f_y cos^\theta, 0) \\ \bar{f}_z.u_z & = & f_z(0,0,1) & = & (0,0,f_z) \end{cases}$$

Somando as três últimas igualdades, obtemos:

$$\bar{f}_r.u_r + \frac{1}{r}\bar{f}_\theta.u_\theta + \bar{f}_z.u_z = (f_x, f_y, f_z) = gradf$$

iii) O gradiente é um vetor que indica em que direção aumentam, em mayor grado os valores do campo, ou seja que o gradiente num ponto nos informa a direção na cual vamos a encontrar valores mas altos.

Exercício 9

a) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis, com $f(U) \subset V$. Para todo $x \in U$, pondo $y = f(x)$ tem-se

$$\nabla(g \circ f)(x) = [f'(x)]^* \cdot \nabla g(y).$$

b) Interprete a igualdade $\nabla_x\, z = \sum_i \dfrac{\partial z}{\partial y_i} \cdot \nabla_x\, y_i$, escrita na notação clássica, e identifique-a com o resultado anterior.

Solução. Pela Regra da Cadeia, sabemos que $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Utilizando a notação matricial, temos que

$$\Big[(g \circ f)'(x)\Big]_{1\times m} = \Big[g'(f(x)) \cdot f'(x)\Big]_{1\times m} = \Big[g'(f(x))\Big]_{1\times n}\Big[f'(x)\Big]_{n\times m}.$$

Tomando a transposta, obtemos

$$\Big[(g \circ f)'(x)\Big]^*_{m\times 1} = \Big(\Big[g'(f(x))\Big]_{1\times n}\Big[f'(x)\Big]_{n\times m}\Big)^* = \Big[f'(x)\Big]^*_{m\times n}\Big[g'(f(x))\Big]^*_{n\times 1}.$$

Portanto,

$$\nabla(g \circ f)(x) = \Big[f'(x)\Big]^* \cdot \nabla g(y).$$

Exercício 11

Seja $f : U \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ diferenciável no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$. A fim de que seja $|f(x)|$ = constante, é necessário e suficiente que $f'(x) \cdot h$ seja perpendicular a $f(x)$, para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$.

Solução. ($\Rightarrow$) Suponha $|f(x)| = c$, então $\langle f(x), f(x)\rangle = c^2$, $\forall x \in U$. Daí f diferenciável em $U \Rightarrow \langle f(x), f(x)\rangle$ diferenciável em U e além disso $(\langle f(x), f(x)\rangle)'h = 0, \forall\ h \in \mathbb{R}^m \Rightarrow 2\langle f'(x)h, f(x)\rangle = 0$. Portanto $f'(x)\cdot h$ é perpendicular a $f(x)$, para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$.
($\Leftarrow$)
Suponha agora que $\langle f'(x)h, f(x)\rangle = 0$, para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$ e defina $H : U \to \mathbb{R}^n - \{0\}$, onde $H(x) = \langle f(x), f(x)\rangle$. H é diferenciável e satisfaz $H'(x)v = 2\langle f'(x)v, f(x)\rangle = 0$, para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$. Daí, como U é conexo, segue que H é constante e portanto $|f|$ é constante.

2.4.3 A desigualdade do valor médio

Exercício 2

Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 num aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^m$, com $0 \in U$ e $f(0) = 0$. Se $|f'(x)| \le |x|$ para todo $x \in U$ então $|f(x)| \le \frac{1}{2}|x|^2$ seja qual for $x \in U$. Conclua que se $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, com $f \in C^2$, então $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x)\right| \le |u||v|$ para $x \in U$, $u, v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer implica ainda $|f(x)| \le \frac{1}{2}|x|^2$. Generalize.
Solução. Defina $F : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, por $F(t) = f(\sqrt{t}x)$. Então $F'(t) = f'(\sqrt{t}x)(\sqrt{t})'x = f'(\sqrt{t}x)\frac{x}{2\sqrt{t}}$. Assim

$$\begin{aligned} |F'(t)| &= |f'(\sqrt{t}x)\frac{x}{2\sqrt{t}}| \\ &\le |f'(\sqrt{t}x)|\frac{|x|}{2\sqrt{t}} \\ &\le \sqrt{t}|x|\frac{|x|}{2\sqrt{t}} = \frac{|x|^2}{2}. \end{aligned}$$

Assim pela desigualdade do valor médio

$$|F(1) - F(0)| \le \frac{|x|^2}{2}(1-0) = \frac{|x|^2}{2}.$$

Portanto $|f(x)| \le \frac{|x|^2}{2}$.
Como $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x)\right| \le |u||v|$, então $|f'(x)| \le |x| \Rightarrow |f(x)| \le \frac{|x|^2}{2}$.

Exercício 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $[a,b] \subset U$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ existe $c_y \in (a,b)$ tal que $\langle f(b) - f(a), y\rangle = \langle f^{'}(c_y)(b-a), y\rangle$.
Solução. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, defina $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, onde $\varphi(t) = \langle f(a + t(b-a)), y\rangle$. Temos

que φ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, daí pelo T.V.M temos que $\exists\ t_0 \in (0,1)$ tal que $\varphi(1)-\varphi(0) = 1.\varphi^{'}(t_0)\ \Rightarrow \langle f(b)-f(a), y\rangle = \langle f^{'}(a+t_0(b-a))(b-a), y\rangle$. Fazendo $c_y = a+t_0(b-a)$, temos então que $\langle f(b)-f(a), y\rangle = \langle f^{'}(c_y)(b-a), y\rangle$, como queríamos provar.

Exercício 4

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e conexo. Dada $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciavel, considere as seguintes afirmações.

1. $|f^{'}(x)| \leq c$ para todo $x \in U$
2. $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$ para quaisquer $x, y \in U$
3. f é uniformemente contínua
4. Para todo $x_0 \in \bar{U}$ existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
5. Se U é limitado então $f(U)$ é limitado.

Mostre que $(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$ mas as demais implicações são falsas.

Solução. $(1) \Leftrightarrow (2)$ Se f é diferenciável em U então f é contínua em U e $x, y \in U \Rightarrow [x,y] \subset U$, pela convexidade de U. Como $|f'(x)| \leq c,\ \forall\ x \in U$, logo $|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|,\ \forall\ x, y \in U$.

Reciprocamente, suponhamos por contradição que existe $x_0 \in U$ tal que $|f'(x_0)| > c$. Então $|f'(x_0)v| > c|v| \Rightarrow |f'(x_0)u| = c+\varepsilon$, onde $u = \dfrac{v}{|v|}$. Pela diferenciabilidade de f, existe $\delta > 0$ tal que $0 < t < \delta \Rightarrow |f(x+tu) - f(x)| = |f^{'}(x)tu + r(tu)| \geq\ |f^{'}tu| - |r(tu)|$, com $|r(tu)| < t\delta$. Então $\forall t$, onde $0 < t < \delta \Rightarrow |f(x+tu) - f(x)| \geq (c+\varepsilon)t - t\varepsilon = ct + \varepsilon t - \varepsilon t = ct > c$. Tomando $y = x + tu$ obtemos $|y-x| = |t||u| \Rightarrow |y-x| = t$.

Portanto, $|f(x)-f(y)| > c|x-y|$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ e observar que f é lipschitziana, e consequentemente uniformemente contínua, isto é, $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \frac{\varepsilon}{c}$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in U$.

$(3) \not\Rightarrow (2)$. De fato, se considerarmos a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, sabemos que f é uniformente contínua, mas não é lipschitziana.

$(3) \Rightarrow (4)$ Dado $x_0 \in \bar{U}$, como $\bar{U} = U \cup U'$, temos que $x_0 \in U$ ou $x_0 \in U'$.

Se $x_0 \in U$ então $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pois f é contínua. Logo, existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Agora, se $x_0 \in U'$, como f é uniformemente contínua, então toda sequência de Cauchy $(x_k) \subset U$ é transformada por f em uma sequência de Cauchy $\big(f(x_k)\big) \subset \mathbb{R}^n$. Em particular, para toda sequência $(x_k) \subset U\backslash\{x_0\}$ com $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0,\ \exists\ \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ e este valor independe da sequência escolhida. De fato, se $(y_k) \subset U\backslash\{x_0\}$ fosse uma outra sequência com $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = c \neq b$,

teríamos uma sequência $(z_k) \subset U \backslash \{x_0\}$ definida por $z_{2k} = x_k,\ z_{2k+1} = y_k$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x_0$, mas não existe $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)$, pois $\lim\limits_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = b$, se $k_j = 2j$, e $\lim\limits_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = c$, se $k_j = 2j+1$.
Portanto, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$.

(4) $\not\Rightarrow$ (3). Consideremos $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2)$. Como $\cos(x)$ é uma função contínua, temos $\lim\limits_{x\to x_0} \cos(x^2) = \cos(x_0^2)$, isto é, existe $\lim\limits_{x\to x_0} \cos(x^2),\ \forall\ x_0 \in [0, 2\pi]$. No entanto, a função não é uniformemente contínua, pois basta considerar $x_k = \sqrt{(k+1)\pi}$ e $y_k = \sqrt{k\pi}$. Então $x_k - y_k = \dfrac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}}$. Dessa maneira, $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - y_k| = 0$, mas $|f(x_k) - f(y_k)| = 2$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Defina $F : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $F(x) = f(x)$ se $x \in U$ e $F(x) = \lim\limits_{y\to x} f(y)$, se $x \in \bar{U} \backslash U$. Esta função está bem definida, pois $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe para todo $x_0 \in \bar{U}$.
Além disso, F é contínua. Como $F|_U = f$ é diferenciável, temos F é contínua em U, então basta provar que F é contínua em ∂U, já que $\bar{U} = \text{int}U \cup \partial U = U \cup \partial U$.
Seja $a \in \partial U$, então $F(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ tal que $x \in U,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - F(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dado $\bar{x} \in \bar{U} \backslash U$, temos que $0 < |\bar{x} - a| < \delta \Rightarrow\ \exists\ (x_k) \subset U$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$. Daí, para k suficientemente grande, $|x_k - a| < \delta \Rightarrow |f(x_k) - F(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim, $|x_k - a| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |f(x_k) - F(a)| = |F(\bar{x}) - F(a)| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Logo, $\lim\limits_{x\to a} F(\bar{x}) = F(a)$ e assim F é contínua em a.
Provamos que F é contínua em $\bar{U}$ e, como $\bar{U}$ é compacto, segue que $F(\bar{U})$ é compacto. Portanto, $F(U) = f(U)$ é limitado.

(5) $\not\Rightarrow$ (4). Temos que $0 \in [0, 1] = \overline{(0, 1)}$. Considerando $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen\,(\frac{1}{x})$, segue que $U = (0, 1)$ é limitado e $f(U)$ é limitado, mas não existe $\lim\limits_{x\to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercício 5

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto conexo. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $f'(x) = T$ (constante) para todo $x \in U$ então existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = T \cdot x + a$. Mais geralmente, se $f^{k+1}(x) = 0$ para todo $x \in U$ então f é um *polinômio de grau* k (soma de formas multilineares de grau $\le k$, restritas à diagonal).

Solução. Basta tomar a função $g : U \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = f(x) - Tx$.

Como f é diferenciável e T uma transformação linear (portanto diferenciável), temos que g será diferenciável em U e $g'(x) \cdot v = f'(x) \cdot v - T \cdot v$ para todos $x \in U,\ v \in \mathbb{R}^m$. Então temos g diferenciável no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f'(x) = T \Rightarrow g'(x) \cdot v = 0$ para todos $x \in U,\ v \in \mathbb{R}^m$.
Portanto, g é constante em U (corolário da desigualdade do valor médio), digamos $g(x) = g(b)$, para

algum $b \in U$.

Dessa maneira, $f(x) = T \cdot x + g(b)$. Fazendo $a = g(b) \in \mathbb{R}^n$, obtemos $f(x) = T \cdot x + a$, para algum $a \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 6

Seja $f : U \to R^m$ diferenciável no aberto convexo $U \subset R^m$. Mostre que

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \sup_{z \in U} |f'(z)|$$

Solução. Sejam $\alpha := \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ e $\beta := \sup_{z \in U} |df_z|$

Afirmamos que $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$.

$x, y \in U$; U conexo $\Rightarrow [x, y] \subset U$. Então, pela Desigualdade do Valor Médio, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in [x,y]} |df_z|.|x - y|$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in U} |df_z|.|x - y|$$
$$\overset{x \neq y}{\Rightarrow} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{z \in U} |df_z|$$
$$\Rightarrow \alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{z \in U} |df_z| = \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

Por outro lado, seja $v \in R^m$ tal que $|v| = 1$, então $|df_z(v)| = \lim\limits_{t \to 0} \left| \dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t} \right|$,daí chamando $x = a + tv$ e $y = a$

$$\Rightarrow |df_z(v)| = \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{u,v; u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} = \alpha$$
$$\Rightarrow |df_z| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1} |df_z(v)| \leq \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha$$

Então segue que $\alpha = \beta$.

Exercício 7

Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável com $\lim\limits_{|x| \to \infty} f'(x) \cdot x = 0$ então a aplicação $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(x) = f(2x) - f(x)$ é limitada.

Solução. Defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por $\varphi(t) = f(tx + x)$.

φ é contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$, implica, pelo T.V.M.,

$|\varphi(1)-\varphi(0)| = |\varphi'(c)|$ para algum $c \in (0,1) \Rightarrow |f(2x)-f(x)| = |f'(x+cx)\cdot x|$ $(*)$

$\lim\limits_{|x|\to\infty} f'(x)\cdot x = 0 \Rightarrow$ dado $\epsilon = 1, \exists\, A > 0$ tal que $|x| > A \Rightarrow |f'(x)\cdot x| < 1$.
Daí $c \in (0,1) \Rightarrow |(1+c)x| > A \Rightarrow |f'((1+c)x)((1+c)x)| < 1 \Rightarrow |f'((1+c)x)x| < \frac{1}{|1+c|}$.
Em $(*)$ temos $|g(x)| = |f(2x)-f(x)| < \frac{1}{|1+c|}$.

Portanto g é limitada quando $|x| > A$.
Como o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $|x| \leq A$ é compacto, segue que g é limitada neste conjunto.
Portando g é limitada.

Exercício 8

Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $f' : U \to L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ é contínua e $K \subset U$ é compacto então existe $a > 0$ tal que $x, y \in K \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq a|x-y|$. O mesmo resultado vale se supusermos f' limitada em U, em vez de contínua.
Solução. Suponhamos por absurdo que não vale a conclusão, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $(x_n), (y_n) \in K$ tais que $|f(x_n)-f(y_n)| > n|x_n-y_n|$. Como K é compacto passando a subsequências se necessário podemos supor que $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$.
Afirmo que: $x_0 = y_0$. De fato caso contrário

$$|f(x_0)-f(y_0)| = \lim |f(x_n)-f(y_n)| \geq \lim |x_n-y_n| = \infty|x_0-y_0| = +\infty.$$

Contradição. Logo $x_0 = y_0$. Sabemos que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in K e y \in U$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow [x,y] \subset U$. Daí como $x_n - y_n \to 0$ para todo n suficientemente grande temos que $[x,y] \subset U$ (pode até supor sem perda de generalidade que $[x_n,y_n] \subset U, \forall n \in \mathbb{N}$). Fixemos um indice n tal que $[x_n,y_n] \subset U$, assim $[x_n,y_n] \supset [x_{n+1},y_{n+1}] \supset \cdots$. Como f' é contínua e $[x_n,y_n]$ é compacto existe $c > 0$ tal que $|f'(x)| \leq c, \forall x \in [x_n,y_n]$ e portanto $\forall x \in [x_{n+1},y_{n+1}], i = 1,2,\cdots$. Pela desigualdade do valor médio temos que $|f(x_n)-f(y_n)| \leq c|x_n-y_n|$, para todo n suficientemente grande, daí concluirmos que $c|x_n-y_n| \geq |f(x_n)-f(y_n)| > n|x_n-y_n|$. Daí para todo n suficientemente grande tal que $|x_n-y_n| \neq 0$ temos que $c > n$. Contradição.
Se f' for limitada o argumento é o mesmo pois existe $c > 0$ tal que $|f'(x)| \leq c, \forall x \in U$, daí $|f'(x)| \leq c, \forall x \in [x_n,y_n]$. Argumentando assim chegamos a uma contradição.

2.4.4 O teorema da aplicação inversa

Exercício 1

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma função diferenciável $f : I \to \mathbb{R}$ é um difeomorfismo sobre $f(I)$ se, e somente se $f^{'}(x).f^{'}(y) > 0$ para quasquier $x, y \in I$.

Solução. ($\Rightarrow$) Se f é um difeomorfismo sobre $f(I)$,então $f^{'}(x) \neq 0,\ \forall\ x\ \in\ I$.Pelo Teorema de Darboux temos que $f^{'}(x) > 0$ ou $f^{'}(x) < 0,\ \forall\ x\ \in\ I$. Em qualquer caso temos $f^{'}(x).f^{'}(y) > 0$, $\forall x,\ y \in I$, dado que $f^{'}(x)$ e $f^{'}(y)$ têm sempre o mesmo sinal.

($\Leftarrow$) $f^{'}(x).f^{'}(y) > 0, \forall\ x, y\ \in\ I \Rightarrow f^{'}(x) \neq 0, \forall\ x\ \in I$,daí pelo Teorema da Funçao Inversa f é difeomorfismo local. Note agora que a condição $f^{'}(x).f^{'}(y) > 0 \ \Rightarrow\ f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$. Suponha que $f'(x) > 0$ e tomemos $a \neq b\ \in\ I$. Sem perda de generalidade admita $b > a$. Pelo Teorema do Valor Médio temos que $\exists\, c\ \in\ (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) > 0\ \Rightarrow\ f(b) \neq f(a)$, portanto f é injetiva, logo f é difeomorfismo global.

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leq k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pondo $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre se mesmo.

Solução. Como f é de classe C^1, segue-se que φ é de classe C^1, além disso,

$$detJ\varphi(x, y) = 1 - f'(x)f'(y) \neq 0$$

pois $|f'(t)| \leq k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $\varphi'(x, y)$ é um isomorfismo. Pelo corolário 1 do livro de Curso de Análise-pag 282, tem-se que φ é um difeomorfismo local.

Agora precisamos provar que φ é injetora, assim φ será um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

De fato:

$|\varphi(x, y) - \varphi(z, w)|_s = |(x + f(y), y + f(x)) - (z + f(w), w + f(z))|$

$= |(x - z + f(y) - f(w)), (y - w + f(x) - f(z))|$

$= |(x - z, y - w) + (f(y) - f(w), f(x) - f(z))|$

$= |x - z| + |y - w| - |f(y) - f(w)| - |f(x) - f(z)|$

$> |x - z| + |y - w| - k|x - z| - k|y - w| = (1 - k)|x - z| + (1 - k)|y - w|$

Portanto, se $\varphi(x, y) = \varphi(z, w)$ implica que $(x, y) = (z, w)$.

Assim f é um difeomorifismo global. Resta provar que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, para provar que $f(\mathbb{R}^2)$ é fechado, seja (x_k) uma sequência tal que $\lim f(x_k) = y \in \mathbb{R}^2$, como $|x_k - x_r| \leq \frac{1}{1-k}|f(x_k) - f(x_r)|$, vemos que (x_k) é de Cauchy portanto converge, seja $x = \lim x_k$. Então $f(x) = \lim f(x_k) = y \in f(\mathbb{R}^2)$. Assim, $f(\mathbb{R}^2)$ é aberto e fechado. como $\mathbb{R}^2$ é conexo, tem-se $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Exercício 3

Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Defina $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ pondo $F(x, y) = \big(f(x) \cdot h(y), g(y)\big)$. Suponha que f e g são difeomorfismos de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Mostre que F é um difeomorfismo se, e somente se, $0 \notin h(\mathbb{R})$.

Solução. $(\Rightarrow)$ F difeomorfismo $\Rightarrow$ $F'(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é isomorfismo $\forall a \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow det[F'(a)] \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}^2$

Em outras palavras, $det[F'(x, y)] = \begin{vmatrix} f'(x)h(y) & f(x)h'(y) \\ 0 & g'(y) \end{vmatrix} \neq 0$ Como f e g são difeomorfismos, temos que $f'(x) \neq 0$ e $g'(y) \neq 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Desta forma, temos que $h(y) \neq 0$, $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \notin h(\mathbb{R})$

$(\Leftarrow)$ Se $0 \notin h(\mathbb{R}) \Rightarrow det[F'(x, y)] \neq 0$, pois f e g são difeomorfismos. Logo como F é diferenciável (f, g, h são diferenciáveis), podemos aplicar o teorema da função inversa. Assim concluímos que F é difeomorfismo local. Como F é uma aplicação aberta, falta mostrar que F é bijetora para concluir o difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Para mostrar a injetividade de F seja $(x, y) \neq (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$. Temos dois possíveis casos. No primeiro caso temos $x = x'$ e $y \neq y'$ ou $x \neq x'$ e $y \neq y'$ assim, em ambas possibilidades, $F(x, y) \neq F(x', y')$, pois $g(y) \neq g(y')$ (fato que decorre de g ser difeomosfismo e consequentemente uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$). Em um segundo caso, temos $x \neq x'$ e $y = y'$ assim $f(x)h(y) \neq f(x')h(y')$, fato que decorre de $0 \notin h(\mathbb{R})$ e $f(x) \neq f(x')$.

Para mostrar a sobrejetividade de F vamos tomar $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, vemos claramente da sobrejetividade de g que existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $g(y) = v_2$. Fixando esse y vemos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x).h(y) = v_1$ uma vez que f é sobrejetiva e $0 \notin h(\mathbb{R})$.

Assim, concluimos que F é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em si mesmo.

Exercício 11

Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle > 0$ para $\forall\, x \in U$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer então f é injetiva. Se $f \in C^1$ então f é um difeomorfismo de U sobre um subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Dê um exemplo em que $U = \mathbb{R}^m$ mas f não é sobrejetiva.

Solução. Tomemos $a \neq b$ elementos de U. U convexo $\Rightarrow$ $[a,b] \subset U$. Defina então $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = \langle f(a+(b-a)t), b-a \rangle$. Temos que $\psi|_{[0,1]}$ é contínua, $\psi|_{(0,1)}$ é diferenciável, então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)$ $\Rightarrow \langle f(b), b-a \rangle - \langle f(a), b-a \rangle = \langle f'(a+(b-a)\theta)(b-a), (b-a) \rangle > 0$, isto é , $\langle f(b) - f(a), b-a \rangle > 0$ $\Rightarrow$ $f(b) \neq f(a)$, portanto f é injetiva.

A condição $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle > 0, \forall\ x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ $f'(x) \cdot v \neq 0$, $\forall\ v \in \mathbb{R}^m$ e $x \in U$, então pelo Teorema da Função Inversa temos que f é um difeomorfismo local. Mas acabamos de provar que f é injetiva, portanto f é um difeomorfismo global de U sobre $f(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x, e^y)$. f é diferenciável e

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^y \end{bmatrix},$$

donde $\langle f'(x,y)(v_1,v_2), (v_1,v_2) \rangle = \langle (v_1, v_2 e^y), (v_1,v_2) \rangle = v_1^2 + e^y.v_2^2 > 0$, $\forall\ v = (v_1,v_2) \neq (0,0)$ e $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Agora note que f não é sobrejetiva, pois, por exemplo, o elemento (0, -1) $\notin f(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 12

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que para $x, v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer tem-se $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle \geq |\alpha||v|^2$, onde $\alpha > 0$ é uma constante. Prove que $|f(x) - f(y)| \geq \alpha|x-y|$ para $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários. Conclua que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado, e daí, que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo.(A hipótese "$f \in C^1$" pode ser substituída por "f diferenciável".)

Solução. Defina $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $\varphi(t) = \langle f(x + t(y-x)), y - x \langle$.

$\varphi|_{[0,1]}$ é contínua e $\varphi|_{(0,1)}$ é diferenciável, então, pelo T.V.M., existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi(\theta)(1-0) \Rightarrow \langle f(y), y-x \rangle - \langle f(x), y-x \rangle = \langle f'(x + \theta(y-x))(y-x), y-x \rangle$

$\Rightarrow \langle f(y) - f(x), y-x \rangle = \langle f'(x + \theta(y-x))(y-x), y-x \rangle$

$\Rightarrow |(f(y) - f(x), y-x)| = |f'(x + \theta(y-x), y-x)| \geq \alpha|y-x|^2$

$|f(y) - f(x)|.|y-x| \geq |(f(y) - f(x), y-x)| \geq \alpha|y-x|^2 \Rightarrow |f(y) - f(x)| \geq \alpha|y-x|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$. Se $x = y$ a desigualdade é trivial.

Afirmação: $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado.

Seja $y \in \overline{f(\mathbb{R}^m)}, y = \lim f(x_k), (x_k) \subset \mathbb{R}^m$, temos que $|x_r - x_s| \leq \frac{1}{2}|f(x_r) - f(x_s)|$, donde

(x_k) é de Cauchy e portanto converge.

Seja $x = \lim x_k$. Da continuidade de f temos que $f(x) = \lim f(x_k) = y \Rightarrow y \in f(\mathbb{R}^m) \Rightarrow f(\mathbb{R}^m)$ é fechado.

Note que $f \in C^1$ e $f'(x) \cdot v \neq 0, \forall\, v \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f$ é difeomorfismo global sobre sua imagem aberta $f(\mathbb{R}^m)$.

Assim, $f(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto e fechado, e como $\mathbb{R}^m$ é conexo, temos que $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$.

Portando, f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo.

Exercício 13

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que $f'(x)$ é, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, uma isometria (isto é, $|f'(x) \cdot v| = |v|$) na norma euclidiana. Então f é uma isometria (isto é, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$). Conclua que existem $T \in L(\mathbb{R}^m)$ ortogonal e $a \in \mathbb{R}^m$ tais que $f(x) = T \cdot x + a$.

Solução. Defina

$$\begin{array}{rccc} \psi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \psi(t) = < f(a + t(b-a)), b - a > \end{array}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}^m$, são arbitrários e $a \neq b$. ψ é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, então $\exists \theta \in (0,1)$ tal que $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)$ então

$$< f(b), b-a > - < f(a), b-a > = < f'(a + \theta(b-a))(b-a), b-a > \Rightarrow$$

$$< f(b) - f(a), b-a > = < f'(a + \theta(b-a))(b-a), b-a > \Rightarrow$$

$$< f(b) - f(a), b-a > - < f'(a + \theta(b-a))(b-a), b-a > = 0$$

$$< f(b) - f(a) - f'(a + \theta(b-a))(b-a), b-a > = 0 \overset{b-a \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$f(b) - f(a) - f'(a + \theta(b-a))(b-a) = 0 \Rightarrow$$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a) \Rightarrow$$

$$|f(b) - f(a)| = |f'(a + \theta(b-a))(b-a)| = |b-a|$$

Daí temos que f é uma isometria.

Lema: Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função tal que $f(0) = 0$ e $|f(u) - f(v)| = |u - v|$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^m$. Então:

i) $\forall v \in \mathbb{R}^m$, tem-se $|f(v)| = |v|$.

De fato $|f(v) - f(0)| = |v - 0| \Rightarrow |f(v)| = |v|$.

ii) $\forall u, v \in \mathbb{R}^m$, tem-se $< f(u), f(v) >=< u.v >$.

De fato

$$
\begin{aligned}
< f(u), f(v) > &= \frac{1}{2}(|f(u)|^2 + |f(v)|^2 - |f(u) - f(v)|^2) \\
&= \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2) \\
&=< u, v > .
\end{aligned}
$$

iii) Os vetores $u_1 = f(e_1), \cdots, u_m = f(e_m)$ formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^m$.

De fato,

$$< u_i, u_j >=< f(e_i), f(e_j) >=< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se } i = j \\ 0 & \text{, se } i \neq j \end{cases},$$

e portanto, $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ é ortonormal.

iv) Dado $v = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m \in \mathbb{R}^m$, tem-se $< f(v), u_i >= x_i$, logo $f(v) = x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m$.

De fato $< f(v), u_i >=< f(v), f(e_i) >=< v, e_i >= x_i$. Mas, se $f(v) = \sum y_i u_i$, teríamos $< f(v), u_i >= y_i$, pois $< u_i >$ é uma base ortonormal. Logo $x_i = y_i$ e, portanto $f(v) = \sum x_i u_i$.

v) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um operador linear, logo ortogonal.

Dados $v = \sum x_i e_i$ e $w = \sum y_i e_i$, temos $v + \lambda w = \sum (x_i + \lambda y_i) e_i$ e, portanto, pelo item anterior,

$$f(v + \lambda w) = \sum (x_i + \lambda y_i) u_i = \sum x_i u_i + \lambda \sum y_i u_i = f(v) + \lambda f(w),$$

isto é, f é linear e como f preserva distância, f será um operador ortogonal.

Conclusão: Toda isometria $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tem a forma $g(v) = A \cdot v + b$, onde $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma operador linear ortogonal e $b \in \mathbb{R}^m$ é um vetor constante (independente de v).

De fato, seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma isometria, e seja $b = g(0)$. Defina $f(v) = g(v) - b$. Então $f(0) = 0$ e

$$|f(u) - f(v)| = |(g(u) - b) - (g(v) - b)| = |g(u) - g(v)| = |u - v|,$$

isto é, f satisfaz às condições dos itens anteriores,assim f é um operador ortogonal $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e temos $g(v) = f(v) + b = A \cdot v + b$.

Conclusão do exercício 8.13

Pela conclusão do lema e como f é uma isometria existem $T \in L(\mathbb{R}^m)$ ortogonal e $a \in \mathbb{R}^m$ tais que $f(x) = T \cdot x + a$.

Exercício 14

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1,com $|f'(x).v| \geq \alpha\,|v|$ para $x, y \in \mathbb{R}^m$ quaisquer ($\alpha > 0$ constante). Então f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo. Em particular, $|f(x) - f(y)| \geq \alpha\,|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Solução. (Esta solução está resumida e para entende-lá melhor deve-se consultar o livro Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento do Elon ou algum livro clássico de Topologia Algébrica. Serão usados conceitos de levantamento de caminhos e aplicações de recobrimento e proposições encontradas no livro citado acima do Elon).

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1, cujos valores estão contidos no aberto conexo $Y \subset \mathbb{R}^m$. Suponhamos que existe uma cobertura de y por um aberto V, a cada um dos quais corresponde um número $\epsilon_v > 0$, de tal modo que $f(x) \in V$ implica $|f'(x).u| \geq \epsilon_v\,|u|$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$. Então $f(\mathbb{R}^m) = Y$ e $f : \mathbb{R}^m \to Y$ é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração do Teorema: Eis a parte mais interessante da demonstração. Mostraremos em primeiro lugar, que se $a : [0, 1] \to y$ é um caminho de casse C^1 em Y e $b : [0, 1) \to \mathbb{R}^m$ é tal que $f(b(a)) = a(s)$, $0 \leq s \leq 1$, então b é de casse C^1 e existe $lim_{s\to 1} b(s)$ em $\mathbb{R}^m$. Que $b \in C^1$ segue-se imediatamente do fato de f ser um difeomorfismo local de classe C^1. Além, disso, seja $Y_1 = a(1)$ e considere $V \ni Y_1$, $\epsilon_v > 0$ como no enunciado do Teorema. Existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < s < 1$ então $f(b(s)) = a(s) \in V$ e portanto $|f'(b(s)).b'(s)| \geq \epsilon_v\,|b'(s)|$. Por outro lado $f'(b(s)).b'(s) = a'$, logo $|b'(s)| \leq \frac{|a'(s)|}{\epsilon_v}$ quando $1 - \delta < s < 1$. como o intervalo $[0, 1]$ é compacto e a é de classe C^1, $\exists A > 0$ tal que $|a'(A)| < A\epsilon_v\ \forall s \in [0, 1]$. Portanto se $1 - \delta < s_1, s_2, < 1$ vale:

$$|b(s_2) - b(s_1)| = \left|{}^{s_1}_{s_2} b'(s)ds\right| \leq |s_2 - s_1|\,.A$$

. Pelo Critério de Cauchy segue-se que $lim_{s\to 1} b(s)$ existe. Emseguida, provaremos que todo caminho retilíneo, contido em Y, começando num ponto arbitrário $Y_0 \in f(\mathbb{R}^m$, pode ser levantada a partir de qualquer ponto $x_0 \in f^-1(Y_0)$. De fato, se isso não ocorresse, existiria um caminho retilíneo $a(s) = (1 - \delta)Y_0 + sY_1$ em Y tal que a restrição $\frac{a}{[0,1]}$ possuiria um levantamento $b : [0, 1) \to \mathbb{R}^m$, com $b_0 = x_0$,sem que $lim_{s\to 1} b(s)$ existisse. Isto, porém, contradiz o que acabamos de provar. Vemos agora que $f(\mathbb{R}^m 0$ é um subconjunto do aberto Y, pois todo Y_1 pertence ao fecho de $f(R^m)$ relativamente a Y pode ser ligado a um ponto $Y_0 \in f(R^m)$ por um caminho retilíneo contido em Y, o qual pode ser levantado a R^m, de modo que $Y_1 \in f(R^m)$. Como Y é conexo e $f(R^m)$ é evidentemente aberto, segue-se que $f(R^m) = Y$.

Demonstração do exercício 14: Com efeito, tome $Y = V = R^m$ e $\epsilon_v = \alpha$ no teorema acima. Então f é um recobrimento de R^m. Como R^m é simplesmente conexo, segue-se da proposição 11(pág. 136. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento) que f é uma bijeção e portanto um difeomorfismo.

2.5 - Integrais Múltiplas

2.5.1 A definição de integral

Exercício 3

Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ limitadas no bloco A. Prove que

$$\underline{\int}_A f(x)dx + \underline{\int}_A g(x)dx \leq \underline{\int}_A [f(x)+g(x)]dx \leq \overline{\int}_A [f(x)+g(x)]dx \leq \overline{\int}_A f(x)dx + \overline{\int}_A g(x)dx.$$

Dê um exemplo em que todas as desigualdades acima são estritas. Prove também que

$$\underline{\int}_A c\cdot f(x)dx = c\cdot \underline{\int}_A f(x)dx \ \text{ se } c > 0 \ \text{ e } \ \underline{\int}_A c\cdot f(x)dx = c\cdot \overline{\int}_A f(x)dx \ \text{ quando } c < 0.$$

Prove ainda que se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$ então

$$\underline{\int}_A f(x)dx \leq \underline{\int}_A g(x)dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_A f(x)dx \leq \overline{\int}_A g(x)dx.$$

Solução.

Para todo bloco $B \subset A$, temos que

$$m_B(f) + m_B(g) \leq m_B(f+g) \quad \text{e} \quad M_B(f+g) \leq M_B(f) + M_B(g).$$

Daí resulta que, para quaisquer partições P, Q do bloco A, vale:

$$s(f,P) + s(g,P) \leq s(f+g,P) \leq S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P)$$

e portanto

$$\underline{\int}_A f(x)dx + \underline{\int}_A g(x)dx \leq \underline{\int}_A [f(x)+g(x)]dx \leq \overline{\int}_A [f(x)+g(x)]dx \leq \overline{\int}_A f(x)dx + \overline{\int}_A g(x)dx.$$

Quanto ao exemplo, podemos tomar $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dessa maneira,
$$0 = \underline{\int}_A f(x)dx + \underline{\int}_A g(x)dx < 1 = \underline{\int}_A [f(x)+g(x)]dx.$$
Além disso,
$$1 = \overline{\int}_A [f(x)+g(x)]dx < 2 = \overline{\int}_A f(x)dx + \overline{\int}_A g(x)dx.$$
Agora seja P uma partição de A. Então para $c > 0$ temos que

$$m_B(cf) = \inf\{cf(x); x \in P\} = c \cdot \inf\{f(x); x \in P\} = c \cdot m_B(f).$$

Analogamente,

$$M_b(c \cdot f) = \sup\{c \cdot f(x); x \in P\} = c \cdot \sup\{f(x); x \in P\} = c \cdot M_B(f).$$

Então, multiplicando pelo volume de cada bloco da partição e somando, obtemos:

$$s(cf, P) = \sum_{B \in P} m_b(cf) \cdot vol(B) = \sum_{B \in P} c \cdot m_b(f) \cdot vol(B) = c \cdot s(f; P);$$
$$S(cf, P) = \sum_{B \in P} M_b(cf) \cdot vol(B) = \sum_{B \in P} c \cdot M_b(f) \cdot vol(B) = c \cdot S(f; P).$$

Portanto
$$\underline{\int}_A c \cdot f(x)dx = c \cdot \underline{\int}_A f(x)dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_A c \cdot f(x)dx = c \cdot \overline{\int}_A f(x)dx.$$
Por fim, se $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A$, basta observar que se P é uma partição de A, temos que $\sup_{x \in B} f(x) \leq \sup_{x \in B} g(x)$. Da mesma maneira, $\inf_{x \in B} f(x) \leq \inf_{x \in B} g(x)$.
Assim,

$$s(f,P) \leq s(g,P) \text{ e } S(f,P) \leq S(g,P) \Rightarrow \sup\ s(f,P) \leq \sup\ s(g,P) \text{ e } \inf\ S(f,P) \leq \inf\ S(g,P).$$

Portanto,
$$\underline{\int}_A f(x)dx \leq \underline{\int}_A g(x)dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_A f(x)dx \leq \overline{\int}_A g(x)dx.$$

Exercício 4

Sejam $f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}$ funções limitadas não negativas nos blocos A e B. Defina $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Prove que
$$\overline{\int}_{A \times B} \varphi(z)dz = \overline{\int}_A f(x)dx \cdot \overline{\int}_B g(y)dy$$

Solução. Seja $(P, \overline{P})$ uma partição de $A \times B$. Então para todo bloco $(B, \overline{B})$ da partição $(P, \overline{P})$, temos que $0 \leq m_B(f) \leq f(x), \forall\ x \in B$ e $0 \leq m_{\overline{B}}(g) \leq g(y), \forall\ y \in \overline{B}$

$\Rightarrow 0 \leq m_B(f) \cdot m_{\overline{B}}(g) \leq f(x) \cdot g(y), \forall\ (x,y) \in (B, \overline{B})$

$\Rightarrow 0 \leq m_B(f) \cdot m_{\overline{B}}(g) \leq \inf\limits_{(x,y)\in(B,\overline{B})} (f(x) \cdot g(y))$

$\Rightarrow 0 \leq m_B(f) \cdot m_{\overline{B}}(g) \leq m_{(B,\overline{B})}(\varphi)$

Por outro lado,

$m_{(B,\overline{B})}(\varphi) = \inf\limits_{(x,y)\in(B,\overline{B})} (f(x) \cdot g(y)) \leq f(x) \cdot g(y), \forall\ (x,y) \in (B, \overline{B})$

Daí $m_{(B,\overline{B})}(\varphi) \leq \inf\limits_{x\in B} (f(x) \cdot g(y)) = g(y) \inf\limits_{x\in B} (f(x)) = g(y) \cdot m_B(f)$

$\Rightarrow m_{(B,\overline{B})}(\varphi) \leq \inf\limits_{g\in\overline{B}} (g(y) \cdot m_B(f)) = m_B(f) \cdot \inf\limits_{g\in\overline{B}} (g(y)) = m_B(f) \cdot m_B(\overline{g})$

Portanto $m_{(B,\overline{B})}(\varphi) = m_B(f) \cdot m_B(\overline{g}) \Rightarrow s(\varphi, (P, \overline{P})) = \sum\limits_{(B,\overline{B})\in(P,\overline{P})} m_{(B,\overline{B})}(\varphi) vol(B, \overline{B}) =$

$= \sum\limits_{(B,\overline{B})\in(P,\overline{P})} m_{(B,\overline{B})}(\varphi) vol(B) vol(\overline{B}) = \sum\limits_{(B,\overline{B})\in(P,\overline{P})} m_B(f) \cdot m_B(\overline{g}) vol(B) vol(\overline{B}) =$

$= \sum\limits_{B\in P, \overline{B}\in\overline{P}} (m_B(f) \cdot vol(B))(m_B(\overline{g}) \cdot vol(\overline{B})) = \sum\limits_{B\in P} m_B(f) \cdot vol(B) \cdot \sum\limits_{\overline{B}\in\overline{P}} m_B(\overline{g}) \cdot vol(\overline{B})$

$= s(f, P) \cdot s(g, \overline{P})$

e daí $\underline{\int}_{A\times B} \varphi(z)dz = \sup\limits_{(P,\overline{P})} s(\varphi, (P, \overline{P})) = \sup\limits_{(P,\overline{P})} s(f, P) \cdot s(g, \overline{P})$

$= \sup\limits_{P} s(f, P) \cdot \sup\limits_{\overline{P}} s(g, \overline{P}) = \underline{\int}_A f(x)dx \cdot \underline{\int}_B g(y)dy$

Da mesma forma provamos para a integral superior.

Exercício 5

Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ são integráveis, prove a desigualdade de Schuarz:

$$\left[\int_A f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_A f^2(x)dx \int_A g^2(x)dx.$$

Solução. Defina

$$p(\lambda) = \int_A (f(x) + \lambda g(x))^2 dx = \lambda^2 \int_A g^2(x)dx + 2\lambda \int_A f(x).g(x)dx + \int_A f^2(x)dx$$

Como $p(\lambda) \geq 0$, temos que $\Delta_{p(\lambda)} \leq 0$, isto é,

$$4\left(\int_A f(x).g(x)dx\right)^2 - 4\int_A f^2(x)dx \cdot \int_A g^2(x)dx \leq 0$$

Daí

$$\left(\int_A f(x).g(x)dx\right)^2 \leq \int_A f^2(x)dx \cdot \int_A g^2(x)dx$$

2.5.2 Caracterização das funções integráveis

Exercício 4

Se $f : A \to \mathbb{R}$, definida no bloco A, é integrável e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua num intervalo contendo $f(A)$ então $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável. ("Uma função contínua de uma função integrável é integrável.")

Solução.

Lema: Indicando genericamente com a notação D_φ o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma aplicação φ, mostre que se a composta $g \circ f$ faz sentido então $D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$.

Demonstração do lema:

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to \mathbb{R}^m$, tal que $f(B) \subset C$. Então $g \circ f : A \to \mathbb{R}^m$.

Seja x um ponto de descontinuidade de $g \circ f$, ou seja, $x \in D_{g \circ f}$. Então se f não é contínua em $x \Rightarrow x \in D_f$, ou se f é contínua em x tem-se que g não é contínua em $b = f(x)$, mas $b \in D_g$, logo

$$x \in f^{-1}(b) \subset f^{-1}(D_g) \Rightarrow x \in f^{-1}(D_g).$$

Em qualquer caso $x \in D_{g \circ f} \Rightarrow x \in D_f \cup f^{-1}(D_g) \Rightarrow D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$.

Demonstração do exercício:

De fato pelo **Lema 1**, $D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g) \Rightarrow D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(\emptyset) = D_f$, pois g é contínua, então como D_f tem medida nula $D_{g \circ f}$ também tem medida nula, logo $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

Exercício 5

Seja $f : A \to B$ contínua tal que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$ com $c > 0$ constante e $x, y \in A$ quaisquer. Prove que, para todo $g : B \to \mathbb{R}$ integrável, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

Solução. Primeiro notemos que $D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$.De fato, tomemos $x \in D_{g \circ f}$ e suponha que $x \notin D_f \Rightarrow f(x) \in D_g$, pois caso contrário g seria contínua em $f(x)$ e como estamos admitindo f contínua em x, então teríamos $g \circ f$ contínua em x e isto é absurdo pois tomamos $x \in D_{g \circ f}$, daí $f(x) \in D_g \Rightarrow x \in f^{-1}(D_g)$, portanto $D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$.

Note agora que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|, c > 0, \forall\, x, y \in A \Rightarrow f$ é injetiva. Portanto existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de D_g e os pontos de $f^{-1}(D_g)$, daí como $med(D_g) = 0$ resulta que $medf^{-1}(D_g) = 0$. Além disso, supomos f contínua $\Rightarrow$ $D_f = \emptyset$ e portanto $D_{g \circ f} \subset f^{-1}(D_g) \Rightarrow med_{g \circ f} = 0 \Rightarrow g \circ f$ é integrável.

Exercício 9

Se uma sequência de funções integráveis $f_k : A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : A \to \mathbb{R}$, então f é integrável e $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)dx = \int_A f(x)dx$.

Solução. Lembremos inicialmente que D_{f_k} é o conjunto dos puntos onde f_k é descontínua. Seja

$$B = A - \cup_{k=1}^{\infty} D_{f_k}$$

Tem-se que todas as funções f_k são contínuas em B. Além disso, f_k converge uniformemente a f em $B \subseteq A$. Então, como o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é contínua, segue-se que f é contínua em B. Portanto,

$$D_f \subseteq A - B = \cup_{k=1}^{\infty} D_{f_k}$$

Mas como $med(D_{f_k}) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, pois as funções f_k são integráveis, então $med(A - B) = 0$ já que é uma união de conjuntos de medida zero, daí $med(D_f) = 0$ ($D_f \subseteq A - B$). Assim f é integrável. Vejamos agora que $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)dx = \int_A f(x)dx$. Dado $\varepsilon > 0$, já que $f_k \to f$ uniformemente em A, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que se $k \geq N$ e $x \in A$, então

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{vol(A)}$$

então se $k \geq N$ tem-se

$$|\int_A f_k(x)dx - \int_A f(x)dx| \leq \int_A |f_k(x) - f(x)|dx \leq \int_A \frac{\varepsilon}{vol(A)} = \varepsilon$$

Portanto $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)dx = \int_A f(x)dx$.

Exercício 12

Solução.

2.5.3 Integração repetida

Exercício 1

Sejam $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis. A função $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no retângulo $A = [a, b] \times [c, d]$ por $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, é integrável e

$$\int_A f(x, y)dxdy = \left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)\left(\int_c^d \psi(x)dy\right).$$

Solução. Temos que f é integrável, uma vez que $D_f \subset (D_\varphi \times [c,d]) \cup ([a,b] \times D_\psi) \Rightarrow \text{med}(D_f) = 0 \ \big(\text{med}(D_\varphi), \text{med}(D_\psi) = 0 \Rightarrow \text{med}(D_\varphi \times [c,d]), \text{med}([a,b] \times D_\psi) = 0\big)$.

Assim, pelo Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)dxdy = & \int_{[a,b]} \left(\int_{[c,d]} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x)\psi(y)dy \right) dx \\ = & \int_a^b \varphi(x) \underbrace{\left(\int_c^d \psi(y)dy \right)}_{\text{cte em x}} dx = \left(\int_a^b \varphi(x)dx \right) \left(\int_c^d \psi(y)dy \right).\end{aligned}$$

2.5.4 Mudança de variáveis

Exercício 1

Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Para algum $a \in U$, seja $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um isomorfismo. Mostre que $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\text{vol. } f(B[a;r])}{\text{vol. } B[a;r]} = |\det . f'(a)|$.

Solução. Pomos para cada $r > 0$, $m(r) = inf\{f(x); x \in B[a,r]\}$ e $M(r) = sup\{f(x); x \in B[a,r]\}$. Temos para cada $r > 0$, $m(r) \leq f(x) \leq M(r)$. Também quando $r \to 0$, temos que $m(r) \to f(a)$ e $M(r) \to f(a)$. Note que uma bola é um conjunto J-mensurável, pois $\text{med}(\partial B[a,r]) = 0$.

Daí resulta que

$$\begin{aligned} m(r) \leq f(x) \leq M(r) &\Rightarrow \int_{B[a,r]} m(r)dx \leq \int_{B[a,r]} f(x)dx \leq \int_{B[a,r]} M(r)dx \\ &\Rightarrow m(r)\text{vol. } B[a,r] \leq \int_{B[a,r]} f(x)dx \leq M(r)\text{vol. } B[a,r] \\ &\Rightarrow m(r) \leq \frac{1}{\text{vol. } B[a,r]} \int_{B[a,r]} f(x)dx \leq M(r) \\ &\Rightarrow \lim_{r\to 0} m(r) \leq \lim_{r \to 0} \frac{1}{\text{vol. } B[a,r]} \int_{B[a,r]} f(x)dx \leq \lim_{r\to 0} M(r) \\ &\Rightarrow \lim_{r \to 0} \frac{1}{\text{vol. } B[a,r]} \int_{B[a,r]} f(x)dx = f(a). \end{aligned}$$

A bola $B[a,r]$ é compacta J-mensurável, a função det é um difeomorfismo de classe C^1 e a função constante f : det$(B[a,r]) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ é integrável, logo

$$\begin{aligned}
&\text{vol. } f(B[a,r]) = \int_{f(B[a,r])} 1dy = \int_{B[a,r]} |\det f'(x)|dx \\
&\Rightarrow \text{vol. } f(B[a,r]) = |\det f'(x)| \int_{B[a,r]} 1dx = |\det f'(x)|\text{vol. } B[a,r] \\
&\Rightarrow \frac{\text{vol. } f(B[a,r])}{\text{vol. } B[a,r]} = |\det f'(x)| \\
&\Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{\text{vol. } f(B[a,r])}{\text{vol. } B[a,r]} = |\det f'(a)|.
\end{aligned}$$

Exercício 2

No exercício anterior (1), mostre que se $f'(a)$ não for um isomorfismo, então

$$\lim_{r\to 0} \frac{vol.f(B[a;r])}{vol.B[a;r]} = 0$$

Solução. Suponha que $\lim_{r\to 0} \dfrac{vol.f(B[a;r])}{vol.B[a;r]} \neq 0$. Pelo exercicio (1), temos que

$$|det.f'(a)| = \lim_{r\to 0} \frac{vol.f(B[a;r])}{vol.B[a;r]} \neq 0 \Rightarrow f'(a)$$

é um isomorfismo. Contradição.

3

Exercícios de Sala de Aula

3.1 - Topologia do $\mathbb{R}^n$

3.1.1 O espaço euclidiano n-dimensional; bolas e conjuntos limitados; sequências

Exercício 1- 13/03

Mostre que são normas no $\mathbb{R}^n$:

(i) $|x|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,$;

(ii) $|x|_M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$;

(iii) $|x|_S = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$.

Solução.

(i) $|x|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,$.

- $N_1 : |x|_E \geq 0$,$\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, pois $|x|_E$ é, por definição, a raiz positiva de $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$.
- $N_2 : |x|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

$$|x|_E = 0 \Leftrightarrow {|x|_E}^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0,\ \ \forall\ i = 0, \ldots, n.$$

- $N_3 : |\alpha x|_E = |\alpha|\,|x|_E,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}|\alpha x|_E &= |(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)| \\ &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \ldots (\alpha x_n)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)} \\ &= |\alpha|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2} \\ &= |\alpha||x|_E.\end{aligned}$$

- $N_4 : |x+y|_E \leq |x|_E + |y|_E \ , \forall \ x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x+y|_E{}^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = |x|_E{}^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|_E{}^2.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $(|\langle x, y \rangle| \leq |x|\,|y|)$, temos que

$$|x+y|_E{}^2 = |x|_E{}^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|_E{}^2 \leq |x|_E{}^2 + 2|x|\,|y| + |y|_E{}^2 = (|x|_E + |y|_E)^2$$

$$\Rightarrow |x+y|_E \leq |x|_E + |y|_E.$$

(ii) $|x|_M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

- $N_1 : |x|_M \geq 0 \ , \forall \ x \in \mathbb{R}^n$

  $|x|_M = |x_i|$, para algum $i = 1, \ldots, n$ e $|x_i| \geq 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, n$.

  Portanto $|x|_M \geq 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$.

- $N_2 : |x|_M = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ , \forall \ x \in \mathbb{R}^n$

  Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então $0 \leq |x_i| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

  Portanto, $|x|_M = 0 \Rightarrow |x_i| = 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \ x = 0$.

  Reciprocamente,

  se $x = 0$ então $x_i = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, n \Rightarrow |x|_M = \max\{|x_i|, \ i = 1, \ldots, n\} = 0$.

- $N_3 : |\alpha x|_M = |\alpha|\,|x|_M \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}|\alpha x|_M = &\ \max\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \max\{|\alpha|.|x_1|, \ldots, |\alpha|.|x_n|\} \\ = &\ |\alpha| \cdot \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\alpha|\,|x|_M.\end{aligned}$$

- $N_4 : |x+y|_M \leq |x|_M + |y|_M \ , \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x+y|_M = \max\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\} \leq \max\{|x_1|+|y_1|, \ldots, |x_n|+|y_n|\} \leq$$

$$\leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} = |x|_M + |y|_M.$$

(iii) $|x|_S = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

- $N_1 : |x|_S \geq 0 \ , \forall \, x \in \mathbb{R}^n$.

  Como $|x_i| \geq 0, \ \ \forall \ i = 1, \ldots, n$, então $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = |x|_S \geq 0$.

- $N_2 : |x|_S = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ , \forall \, x \in \mathbb{R}^n$.

$$|x|_S = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0, \ \ \forall \ i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0 \ \ , \forall \ i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow x = 0.$$

- $N_3 : |\alpha x|_S = |\alpha||x|_S \ , \forall \, x \in \mathbb{R}^n$.

  Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} |\alpha x|_S &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \cdots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| + \cdots + |\alpha||x_n| \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \right) \\ &= |\alpha| \, |x|_S. \end{aligned}$$

- $N_4 : |x + y|_S \leq |x|_S + |y|_S \ , \forall \, x, \ y \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} |x + y|_S &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x|_S + |y|_S. \end{aligned}$$

Exercício 2 - 13/03

Mostre que $|x|_M \leq |x|_E \leq |x|_S \leq n|x|_M, \ \forall \, x \ \in \ \mathbb{R}^n$. Em particular, $|x|_M \sim |x|_S, \ \ |x|_E \sim |x|_S$ e $|x|_M \sim |x|_E$.

Solução.

1) $|x|_M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \sqrt{\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}^2} \leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

2) $|x|_S^2 - |x|_E{}^2 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 - (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2) \geq 0 \ \Rightarrow |x|_S^2 \geq |x|_E^2 \ \Rightarrow |x|_E \leq |x|_S$.

3) Temos que $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$, onde $x_i \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \ \forall \ i = 1, \ldots, n$, daí $|x|_S \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \cdots + \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = n|x|_M$.

Exercício 3 - 13/03

Mostre que

(i) $|x-y| \leq |x|+|y|$;

(ii) $||x|-|y|| \leq |x-y|$;

(iii) $|z-x| \leq |z-y|+|y-x|$.

Solução.

(i) $|x-y| \leq |x+y|$ pela desigualdade triangular obtemos $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$, isto é, $|x-y| \leq |x|+|y|$.

(ii) Fazendo $x = (x-y)+y$ resulta que $|x| \leq |x-y|+|y|$, logo $|x|-|y| \leq |x-y|$. De forma análoga para y obtemos $|y|-|x| \leq |y-x| \Leftrightarrow |y|-|x| \leq |x-y| \Leftrightarrow -(|x|-|y|) \leq |x-y|$. Daí conclui-se que $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

(iii) $|z-x| = |z-y+y-x|$ pela desigualdade triangular temos $|(z-y)+(y-x)| \leq |z-y|+|y-x|$. Logo $|z-x| \leq |z-y|+|y-x|$.

Exercício 4 - 13/03

Mostre que $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitada em $|\cdot|_E \Leftrightarrow$ é limitada em $|\cdot|_S \Leftrightarrow$ é limitada em $|\cdot|_M$.

Solução. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado com respeito à norma $||\cdot||$ em $\mathbb{R}^n$, quando $\exists\ c > 0$ tal que $||x|| \leq c, \forall\, x \in X$. Como $|x|_M \leq |x|_E \leq |x|_S \leq n|x|_M,\ \forall\ x \in\ \mathbb{R}^n$, então temos claramente que $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitada em $|\cdot|_E \Leftrightarrow$ é limitada em $|\cdot|_S \Leftrightarrow$ é limitada em $|\cdot|_M$.

Exercício 5 - 13/03

Mostre que em qualquer norma

(i) $B_r(x_0), \overline{B}_r(x_0)$ são convexos;

(ii) $S_r(x_0)$ não é convexa.

Solução.

(i) Sejam $x, y \in B_r(x_0) \Rightarrow |x - x_0| < r$ e $|y - x_0| < r$. Logo:
$|(1-t)x + ty - x_0| = |(1-t)x + ty - (1-t)x_0 - tx_0| \leq |(1-t)(x - x_0)| + |t(y - x_0)| < (1-t)r + tr = r,\ \forall t \in [0,1]$, pois $1 - t > 0$ e $t \leq 0$. De modo análogo, provamos que a bola fechada $\overline{B}_r(x_0)$ é convexa.

(ii) Sejam $x \neq y$, $x, y \in S_r(x_0) \Rightarrow |x - x_0| = r\ |y - x_0| = 0$.
Suponha que para $t \in (0,1),\ S_r(x_0)$ é convexo, daí:
$|(1-t)x + y - x_0| = |(1-t)x + ty - (1-t)x_0 - tx_0| < |(1-t)(x - x_0)| + |t(y - x_0)| = (1-t)r + tr = r.$
A desigualdade estrita provém do fato de que $x \neq y$ pois a igualdade somente cumpre-se quando x e múltiplo de y.
Logo o segmento $\{(1-t)x + ty\ t \in (0,1)\} \nsubseteq S_r(x_0)$ o que é uma contradiçao. Assim $S_r(x_0)$ não é convexo.

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass) - 16/03

$(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ limitada $\Rightarrow$ existem $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito e $a \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_k \overset{k \in \mathbb{N}'}{\longrightarrow} a$.

Demonstração. Sabemos que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Deste modo, dada a sequência limitada $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$, as primeiras coordenadas dos seus termos formam uma sequência limitada $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$ de números reais, a qual possui uma subsequência convergente. Isto é, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e $a_1 \in \mathbb{R}$ tais que $x_{k1} \overset{k \in \mathbb{N}_1}{\longrightarrow} a_1$.
Por sua vez, a sequência limitada $(x_{k2})_{k \in \mathbb{N}_1}$ de números reais, possui uma subsequência convergente. Assim podemos obter um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ e $a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_{k2} \overset{k \in \mathbb{N}_2}{\longrightarrow} a_2$. Prosseguindo assim encontramos conjuntos infinitos $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $x_{ki} \overset{k \in \mathbb{N}_i}{\longrightarrow} a_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.
Portanto $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_n} \subset (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que $x_k \overset{k \in \mathbb{N}_n}{\longrightarrow} (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. ■

Exercício 1 - 16/03

Mostre que se $|\cdot|$ provém de um produto interno, então

(i) Vale a identidade do paralelogramo, isto é, $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

Solução. Temos que
$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$, ou seja, $|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$. Da mesma maneira, $|x - y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2$. Somando

membro a membro as duas equações, obtemos
$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

(i) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$

Solução. Do item anterior: $\frac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4} = \frac{4\langle x, y\rangle}{4} = \langle x, y\rangle$.

Exercício 2 - 16/03

Mostre que a norma da soma $|\cdot|_S$ e a norma do máximo $|\cdot|_M$ não provém de produto interno.

Solução. Se $|\cdot|_S$ proveniesse de um produto interno então valeria a seguinte identidade:

$$|x+y|_S^2 + |x-y|_S^2 = 2(|x|_S^2 + |y|_S^2),\ \forall\, x, y\ \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, mas note que se tomarmos os pontos $x = (1/2, 1/2)$ e $y = (1/2, -1/2)$, x e y não satisfazem tal identidade, portanto $|\cdot|_S$ não provém de produto interno algum. Da mesma forma podemos ver que $x = (1/2, 1/2)$ e $y = (1/2, -1/2)$ não satisfazem a identidade $|x+y|_M^2 + |x-y|_M^2 = 2(|x|_M^2 + |y|_M^2)$, desta forma $|\cdot|_M$ não provém de produto interno.

Exercício 3 - 16/03

(i) Seja $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Então, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $z \perp x$ em que $z = y - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}x$.

(ii) Mostre que $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $|\langle x, y\rangle| = |x| \cdot |y| \Leftrightarrow x = \alpha y$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solução.

(i)

$$\begin{aligned}\langle z, x\rangle &= \langle y - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}x, x\rangle \\ &= \langle y, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}\langle x, x\rangle \\ &= \langle y, x\rangle - \langle y, x\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $z \perp x$.

(ii) A desigualdade é trivial se $x = 0$. Se $x \neq 0$, defina $z = y - \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}x$. Temos que $z \perp x$ daí $|y|^2 = |z|^2 + \frac{\langle x, y\rangle^2}{|x|^2} \geq \frac{\langle x, y\rangle^2}{|x|^2} \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$, onde a igualdade ocorre se e só se $z = 0 \Leftrightarrow y = \alpha x$.

Exercício 4 - 16/03

Mostre que $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ e $|\langle x, y\rangle| = |x||y| \Leftrightarrow x = \alpha y, \alpha \in \mathbb{R}$, não vale para $|\cdot|_M$ e $|\cdot|_S$.

Solução. Isto é óbvio se $x = 0$. Supondo $x \neq 0$, podemos escrever $y\alpha x + Z$ com $z \perp x$ e $\alpha = \frac{<x,y>}{|x|^2}$. Por Pitágoras, $|y|^2 = \alpha^2|x|^2 + |z|^2$, logo $|y|^2 \geq \alpha^2|x|^2$, valendo a igualdade se,e somente se, $y = \alpha x$. Entrando com o valor de α, vem $|y|^2 \geq \frac{<x,y>^2}{|x|^2}$, ou seja, $\langle x, y\rangle^2 \leq |x|^2|y|^2$, o que nos dá $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$, valendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha \cdot x$.
Como $|\cdot|_M$ e $|\cdot|_S$ não provém de produto interno, então não tem sentido falar nessas desigualdades.

Exercício 5 - 16/03

Mostre que $d(x, y) = ||x - y||$ é uma métrica em $\mathbb{R}^n = \big(\mathbb{R}^n, ||\cdot||\big)$.

Solução.

$d_1)\ d(x, y) = ||x - y|| \geq 0,\ \forall\ x, y\ \in \mathbb{R}^n.$

$d_2)\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow\ x - y = 0 \Leftrightarrow\ x = y.$

$d_3)\ d(x, y) = ||x - y|| = ||(-1)(y - x)|| = |-1|||y - x|| = ||y - x|| = d(y, x).$

$d_4)\ d(x, z) = ||x - z|| = ||x - y + y - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| = d(x, y) + d(y, z).$

De d_1, d_2, d_3 e d_4 resulta que $d(x, y) = ||x - y||$ é uma métrica em $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$.

Exercício 6 - 16/03

$(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitado $\Leftrightarrow (x_{ki}) \subset \mathbb{R}$ é limitada para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Solução. Como em $\mathbb{R}^n$ quaisquer duas normas são equivalentes, consideremos a norma do máximo.

$(\Rightarrow)$

$(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitado $\Rightarrow \exists\, c > 0$ tal que $\|x_k\|_M \leq c$.

Daí $|x_{ki}| \leq \|x_k\|_M = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq c$ para algum $c > 0\ \Rightarrow (x_{ki}) \subset \mathbb{R}$ é limitada.

$(\Leftarrow)$

$(x_{ki}) \subset$ é limitado $\Rightarrow\ \exists\ c > 0$ tal que $|x_i| \leq c \Rightarrow \|x_k\|_M = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_{ki}| \leq c$ para algum $c > 0$ $\Rightarrow (x_k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitado.

Exercício 7 - 16/03

Mostre:

(i) $x_k \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} a$ e $x_k \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} b \Rightarrow a = b$.

Solução. Suponhamos que $a \neq b$. Considerando $\varepsilon = \dfrac{d(a,b)}{2}$, temos que $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon) = \emptyset$. Além disso, pela definição de limite, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $x_k \in B(a,\varepsilon)\ \forall k \geq k_1$ e $x_k \in B(b,\varepsilon)\ \forall k \geq k_2$. Tomando $k \geq \max\{k_1, k_2\}$, obtemos $x_k \in B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon)$, o que contradiz $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon) = \emptyset$. Portanto, $a = b$.

(ii) $x_k \xrightarrow{|\cdot|_E} a \;\Leftrightarrow\; x_k \xrightarrow{|\cdot|_S} a \;\Leftrightarrow\; x_k \xrightarrow{|\cdot|_M} a$.

Solução.

Parte 1: $x_k \xrightarrow{|\cdot|_E} a \;\Leftrightarrow\; x_k \xrightarrow{|\cdot|_S} a$.

$(\Rightarrow)$ Como $x_k \xrightarrow{|\cdot|_E} a$, dado $\frac{\varepsilon}{n} > 0$, $\exists\, k_0 = k_0(\frac{\varepsilon}{n}) \in \mathbb{N}$ tal que:
$|x_k - a|_E < \frac{\varepsilon}{n}$, $\forall\, k \geq k_0$. Como $|\cdot|_E \sim |\cdot|_S$, então existe $n > 0$ tal que $|\cdot|_S \leq n|\cdot|_E$ e assim
$|x_k - a|_S \leq n|x_k - a|_E < n\dfrac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \;\Rightarrow\; |x_k - a|_S < \varepsilon$.
Portanto, $x_k \xrightarrow{|\cdot|_S} a$.

$(\Leftarrow)$ Como $x_k \xrightarrow{|\cdot|_S} a, \;\Rightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\, k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:
$|x_k - a|_S < \varepsilon,\ \forall\, k \geq k(\varepsilon)$. Como $|x|_E \leq |x|_S,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, segue que
$|x_k - a|_E \leq |x_k - a|_S < \varepsilon \;\Rightarrow\; |x_k - a|_E < \varepsilon$.
Portanto, $x_k \xrightarrow{|\cdot|_E} a$.

Parte 2: $x_k \xrightarrow{|\cdot|_S} a \;\Leftrightarrow\; x_k \xrightarrow{|\cdot|_M} a$.

$(\Rightarrow)$ $x_k \xrightarrow{|\cdot|_S} a, \;\Rightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\, k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:
$|x_k - a|_S < \varepsilon,\ \forall\, k \geq k(\varepsilon)$. Como $|x|_M \leq |x|_S,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, segue que
$|x_k - a|_M \leq |x_k - a|_S < \varepsilon \;\Rightarrow\; |x_k - a|_M < \varepsilon$.
Portanto, $x_k \xrightarrow{|\cdot|_M} a$.

$(\Leftarrow)$ $x_k \xrightarrow{|\cdot|_M} a$, dado $\frac{\varepsilon}{n} > 0$, $\exists\, k(\frac{\varepsilon}{n}) \in \mathbb{N}$ tal que:
$|x_k - a|_M < \frac{\varepsilon}{n},\ \forall\, k \geq k(\frac{\varepsilon}{n})$. Como $|x|_S \leq n|x|_M,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, segue que
$|x_k - a|_S \leq n|x_k - a|_M < n\dfrac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \;\Rightarrow\; |x_k - a|_S < \varepsilon$.
Portanto, $x_k \xrightarrow{|\cdot|_S} a$.

Obs.: Como "$\Leftrightarrow$"é relação de equivalência, logo é transitiva. Assim $x_k \xrightarrow{|\cdot|_E} a \;\Leftrightarrow\; x_k \xrightarrow{|\cdot|_M} a$.

Exercício 8 - 16/03

Mostre que duas normas quaisquer do $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Solução. Seja $|.|_S$ a norma do soma. Como a propriedade de equivalência de normas é transitiva, então precisamos apenas mostrar que uma norma arbitrária $\| \cdot \|$ em $\mathbb{R}^n$ é equivalente a $| \cdot |_S$. Em primeiro lugar, seja $b = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Então, para qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \cdots + x_1e_n\| \leq |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \leq b.|x|_S.$$

Resta-nos agora provar que existe $a > 0$ tal que $|x|_S \leq a\|x\|$;$\forall x \in \mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que não seja assim. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_k|_S > k\|x_k\|$. Ponhamos $u_k = x_k/|x_k|_S$. Isto nos dá $\|u_k\| = \|x_k\|/|x_k|_S < 1/k$ e $|u_k|_S = 1$ para todo k. A sequência (u_k) é, portanto, limitada em relação à norma da soma. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequencîa (u_{k_j}) que converge para um ponto $u \in \mathbb{R}^n$. Por um lado, temos que $|u|_S = \lim_{j\to\infty} |u_{k_j}|_S = 1$, donde $u \neq 0$. Por outro lado, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\|u\| \leq \|u_{k_j} - u\| + \|u_{k_j}\| \leq b|u_{k_j} - u|_S + 1/k_j.$$

Como as duas últimas parcelas acima tendem para zero quando $j \longrightarrow \infty$, concluímos que $\|u\| = 0$, donde $u = 0$. Esta contradição demonstra o exercício.

Exercício 9 - 16/03

Mostre que se (x_k) é sequência de Cauchy então (x_k) é limitada.

Solução. A sequência (x_k) é dita sequência de Cauchy quando dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - x_j| < \varepsilon$ sempre que $k, j > k_0$. Dado $\varepsilon = 1$, existe n_0, tal quq $n, p > n_0 \Rightarrow |x_n - y_p| < 1$. Assim para todo $n > n_0$ temos que $|x_n - x_{n_0+1}| < 1 \Rightarrow x_n \in B_1(x_{n_0+1})$. Daí os elementos da sequência estão contidos no conjunto $\{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup B_1(x_{n_0+1})$ que é limitada. Portanto (x_n) é limitada.

Exercício 10 - 16/03

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_k = \dfrac{x_{k-2} + x_{k-1}}{2} \in \mathbb{R}$. Mostre que (x_n) é uma sequência de Cauchy e $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5}{3}$.

Solução. Temos que

$$x_k - x_{k-1} = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}(x_2 - x_1)\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}, \quad \forall\ k \geq 3.$$

Daí

$$x_{p+k} - x_k = (x_{k+p} - x_{k+p-1}) + \cdots + (x_{k+1} - x_k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+p-2} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+p-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{k,p\longrightarrow\infty} |x_{k+p} - x_k| = \frac{1}{3}\lim_{k,p\to\infty}\left|-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+p-2}\right| = 0.$$

Portanto (x_k) é de Cauchy.

Além disso,

$$x_{2+p} - x_2 = \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^p - \left(-\frac{1}{2}\right)^0\right] \Rightarrow x_{2+p} = 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^p \;\Rightarrow\; \lim_{p\to\infty} x_p = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

3.1.2 Conjuntos abertos, fechados e compactos

Teorema 1 - 20/03

(i) $A_1, \ldots, A_n$ abertos $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. **Demonstração.** $a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \;\Rightarrow\; a \in A_i,\ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Como A_i é aberto, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, existem $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tais que $B(a, \delta_i) \subset A_i$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, obtemos que $B(a, \delta) \subset A_i,\ \forall\, i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow\; B(a, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. ■

(ii) $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\lambda \in L-$ família de índices, então $\bigcup_{\lambda\in L} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. **Demonstração.** Dado $a \in \bigcup_{\lambda\in L} \subset \mathbb{R}^n$, temos que $a \in A_\lambda$, para algum $\lambda \in L$. Como $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \Rightarrow B(a, \delta) \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. Logo, $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ é aberto.

■

Teorema 2 - 20/03

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Então A é aberto em $X \Leftrightarrow A = U \cap X$, onde U é aberto em $\mathbb{R}^n$. **Demonstração.**

($\Rightarrow$)

Seja A aberto em X, então para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B(a; r_a) \cap X \subset A$. Daí,

$$\left(\bigcup_{a\in A} B(a; r_a)\right) \cap X = \bigcup_{a\in A} \big(B(a; r_a) \cap X\big) \subset A.$$

Por outro lado,

$$A \subset X \;\text{ e }\; A \subset \bigcup_{a\in A} B(a;r_a) \Rightarrow A \subset X \cap \bigcup_{a\in A} B(a;r_a).$$

Portanto, $A = X \cap \bigcup\limits_{a\in A} B(a;r_a)$, onde $\bigcup\limits_{a\in A} B(a;r_a)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

($\Leftarrow$)

$a \in A \Rightarrow a \in U$ e $a \in X$. Como $a \in U$ então $\exists\, r > 0$ tal que $B(a;r) \subseteq U$.

Logo $a \in B(a;r) \cap X \subset U \cap X = A$. Portanto, A é aberto em X. ∎

Teorema 3 - 20/03

(i) $a \in \overline{X} \Leftrightarrow B(a;r) \cap X \neq \emptyset,\ \forall\, r > 0$.

(ii) $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Leftrightarrow$ $F^C \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

(iii) $\overline{F} \subset \mathbb{R}^n$ é fechado.

(iv) $F_1, \ldots, F_n \subset \mathbb{R}^n$ fechado $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \subset \mathbb{R}^n$ é fechado.

(v) Se $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos fechados então $\bigcap\limits_{\lambda\in L} F_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ é fechado.

Demonstração.

(i) ($\Rightarrow$)

$a \in \overline{X} \Rightarrow \exists\, (x_k) \subset X$ tal que $x_k \to a$, daí se tomarmos $r > 0$ arbitrário, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B(a;r),\ \forall\, k \geq k_0$. Como $(x_k) \subset X \Rightarrow B(a;r) \cap X \neq \emptyset,\ \forall\, r > 0$ em $\mathbb{R}$.

($\Leftarrow$)

Suponha $B(a;r) \cap X \neq \emptyset,\ \forall\, r > 0$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in B(a;1/k)$, daí $|x_k - a| < 1/k,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_k \to a$, portanto $a \in \overline{X}$.

(ii) ($\Rightarrow$)

$F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Tomemos $x \in \mathbb{R}^n \backslash F \Rightarrow \exists\, r > 0$ tal que $B(x;r) \cap F = \emptyset$ (caso contrário teríamos $B(x;r) \cap F \neq \emptyset,\ \forall\, r > 0 \Rightarrow x \in F = \overline{F}$). Daí $B(x;r) \subset \mathbb{R}^n \backslash F \Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash F$ é aberto.

($\Leftarrow$)

$F^C \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Tomemos $x \in \overline{F}$. Se $x \notin F \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n \backslash F$. Como $\mathbb{R}^n \backslash F$ é aberto, isto implica que existe $\overline{r} > 0$ tal que $B(x;\overline{r}) \subset \mathbb{R}^n \backslash F$, isto é, $B(x;\overline{r}) \cap F = \emptyset$. Mas $x \in \overline{F} \Rightarrow$

$\forall\ r > 0,\ B(x;r) \cap F \neq \emptyset$, em particular, para $r = \overline{r}$, temos $B(x,\overline{r}) \cap F \neq \emptyset$. Contradição! Portanto $x \in F\ \Rightarrow\ \overline{F} \subset F$.

(iii) Tomemos $x\ \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{F}\ \Rightarrow\ \exists\ r > 0$ tal que $B(x;r) \cap F = \emptyset$, isto é, $B(x;r) \subset \mathbb{R}^n \backslash F$. Afirmamos que $B(x;r) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{F}$. De fato, se $B(x;r) \not\subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{F}\ \Rightarrow\ \exists\ y \in\ B(x;r) \cap \overline{F}$, daí tomando $\varepsilon = r - |y - x|$, temos que $B(y;\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$, mas $B(y;\varepsilon) \subset B(x;r)\ \Rightarrow\ B(x;r) \cap F \neq \emptyset$. Contradição! Portanto $B(x;r) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{F}\ \Rightarrow\ \overline{F}$ é fechado.

(iv) $F_1, \ldots, F_n \subset \mathbb{R}^n$ fechado $\Rightarrow\ \mathbb{R}^n \backslash F_i$, aberto , $i = 1, \ldots, n$. Daí $\mathbb{R}^n - \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{R}^n \backslash F_i)$ é aberto. Portanto $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é fechado.

(v) F_λ fechado, $\lambda\ \in\ L$.
$\mathbb{R}^n - \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R}^n - F_\lambda)$, que é aberto $\Rightarrow\ \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado.

■

Teorema 4 - 20/03

(i) F é fechado em $X \Leftrightarrow F = G \cap X$, em que $G \subset \mathbb{R}^n$ é fechado.

(ii) F é fechado em $X \Leftrightarrow X \backslash F$ é aberto em X.

Demonstração.

(i) Se $F = G \cap X$ com G fechado então $\overline{F} \subset G$, logo $F = F \cap X \subset \overline{F} \cap X \subset G \subset X = F$, o que implica $F = \overline{F} \cap X$, portanto F é fechado em X.

(ii) $F = G \cap X \Leftrightarrow X - F = (\mathbb{R}^n - G) \cap X$, onde $G \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, $\mathbb{R}^n - G$ é aberto.

■

Teorema 6 - 20/03

Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Então existem $x_\circ \in K$ e $y_\circ \in F$ tais que $|x_\circ - y_\circ| \leq |x - y|,\ \forall\ x \in K,\ \forall y \in F$. **Demonstração.** Pela definição de distância, $d(K, F) = \inf\{|x - y|; x \in K,\ y \in F\}$. Pela definição de ínfimo, podemos escolher sequências $(x_k) \subset K, (y_k) \subset F$ tais que

$d(K,F) = \lim |x_k - y_k|$. Como $|y_k| = |y_k - x_k + x_k| \leq |y_k - x_k| + |x_k|$, segue que (y_k) é limitada, pois $|x_k - y_k|$ é limitada (uma vez que é convergente) e (x_k) é também limitada, já que $x_k \in K$ e K é compacto. Passando a subsequências, se necessário, podemos então admitir que $\lim x_k = x_\circ$ e $\lim y_k = y_\circ$. Como K e F são fechados, temos que $x_\circ \in K$ e $y_\circ \in F$. Logo, $|x_\circ - y_\circ| = \lim |x_k - y_k| = d(K,F) \leq |x - y|$, $\forall\, x \in K$, $\forall y \in F$.

■

Teorema 7 (Borel-Lebesgue) - 22/03

Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita. **Demonstração.** Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Suponhamos, por absurdo, que $K \subset \bigcup A_\lambda$ seja uma cobertura aberta que não admite subcobertura finita.

Afirmamos que podemos exprimir K como reunião finita de compactos todos com diâmetro menor do que 1. De fato, para cada $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, defina $C_m = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{m_i}{\sqrt{n}}, \frac{(m_i+1)}{\sqrt{n}}\right]$.

Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pertencentes a C_m, então para cada $i = 1, \ldots, n$, temos $|x_i - y_i| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, logo $|x - y| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = 1$.

Por outro lado, se $x_i = \frac{m_i}{\sqrt{n}}$ e $y_i = \frac{(m_i+1)}{\sqrt{n}}$, para todo $i = 1, \ldots, n$, então $|x - y| = 1$, portanto $\text{diam}(C_m) = 1$.

Temos assim que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} C_m$ e então $K = K \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} K \cap C_m$, onde $K \cap C_m$ é compacto para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, além disso temos que $\text{diam}(K \cap C_m) \leq \text{diam}(C_m) = 1$.

Como K é limitado, apenas um número finito dessas interseções são não vazias, donde segue que podemos escrever K como união finita de compactos. Sendo assim, pelo menos um desses compactos, digamos $K_1 \subset \bigcup A_\lambda$ não admite subcobertura finita e pelo mesmo argumento usado anteriormente, podemos escrever K_1 como a união finita de compactos de diâmetro menor que $1/2$. Vemos que pelo menos um deles, digamos K_2, não pode ser coberto por um número finito de A_λ's.

Prosseguindo assim, obtemos uma sequência decrescente de compactos $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_k \supset \cdots$ com $\text{diam}(K_k) \leq \frac{1}{k}$ e tal que nenhum deles está contido numa reunião finita de A_λ's.

Em particular, todos os K_k são não vazios. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, escolhemos um ponto $x_k \in K_k$. A sequência $(x_k) \subset K$ é limitada, logo possui uma subsequência $(x_r)_{r \in \mathbb{N}'}$ convergente. Seja $\lim_{r \in \mathbb{N}'} x_r = a$. Dado k $\in \mathbb{N}$ temos $K_r \subset K_k$ sempre que $r \in \mathbb{N}'$ e $r > k$, assim se $r \in \mathbb{N}'$, $r > k \Rightarrow x_r \in K_k \Rightarrow a \in K_k$. Disto concluímos que $a \in \bigcap_{k=1}^{n} K_k \subset \bigcup A_\lambda$, daí, para algum λ, tem-se $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, tem-se $B(a; \frac{1}{k}) \subset A_\lambda$ para algum k $\in \mathbb{N}$.

Sendo $a \in K_k$ e diam$(K_k) < \frac{1}{k}$, concluímos que $K_k \subset B(a;\frac{1}{k})$, donde $K_k \subset A_\lambda$, o que é uma contradição, pois supomos que $K_k \subset \bigcup A_\lambda$ não admite subcobertura finita. ■

Exercício 2 - 20/03

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Prove que $\mathbb{R}^n =$ int.$X \cup$ int.$(\mathbb{R}^n - X) \cup \partial X$.

(ii) Prove que X' é fechado.

(iii) Prove que ∂X é fechado.

(iv) Prove que int.X é aberto.

(v) Prove que $\overline{X} = X \cup X'$.

Solução.

(i) Como int.$X \subset \mathbb{R}^n$ e $\partial X \subset \mathbb{R}^n$ para todo $X \subset \mathbb{R}^n$, logo int.$X \cup$ int.$(\mathbb{R}^n - X) \cup frX \subset \mathbb{R}^n$.
Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}^n$ então $x \in X$ ou $x \in \mathbb{R}^n - X \quad \forall X \subset \mathbb{R}^n$.
Se $x \in X$, logo já que $X \subset \overline{X} =$ int.$X \cup \partial X \subset$ int.$X \cup \partial X \cup$ int.$(\mathbb{R}^n - X)$, segue que $x \in$ int.$X \cup \partial X \cup$ int.$(\mathbb{R}^n - X)$.
Analogamente, se $x \in \mathbb{R}^n - X$, trocando $\mathbb{R}^n - X$ por X e usando o fato que $\mathbb{R}^n - (\mathbb{R}^n - X) = X$, segue que $x \in$ int.$X \cup \partial X \cup$ int.$(\mathbb{R}^n - X)$.
Portanto, $\mathbb{R}^n \subset$ int.$X \cup$ int.$(\mathbb{R}^n - X) \cup \partial X$.

(ii) Seja $(x_k) \subset X'$ tal que $x_k \longrightarrow a$. Devemos provar que $a \in X'$.
De fato, se $x_k = a$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $a \in X'$.
Agora, se $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$, como $x_k \longrightarrow a \;\Rightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, k > k_0, x_k \in B(a;\varepsilon)$.
como $x_k \neq a \Rightarrow x_k \in B(a;\varepsilon) - \{a\} \Rightarrow x_k \in X \cap \big(B(a;\varepsilon) - \{a\}\big) \Rightarrow X \cap \big(B(a;\varepsilon) - \{a\}\big) \neq \emptyset$ então $a \in X'$.

(iii) Sabemos que $\partial X = \overline{X} \cup \overline{\mathbb{R}^n}$, como $\overline{X}$ é fechado para todo $X \in \mathbb{R}^n$ e a interseção de fechados é fechado, tem-se ∂X é fechado.

(iv) Seja $a \in$ int.$X \Rightarrow \exists\, r > 0, B(a;r) \subset X$.
Se $x \in B(a;r) \Rightarrow |x-a| < r$. Pondo $s = r - |x-a| > 0$, se $y \in B(x;s) \Rightarrow |y-x| < s$, logo $|y-a| \leq |y-x| + |x-a| < s + |x-a| = r \Rightarrow y \in B(a;r)$.

Logo $B(x;s) \subset B(a;r) \Rightarrow B(x;s) \subset X \Rightarrow x \in$ int.X.

Portanto, $\forall\ a \in$ int.$X,\ B(a;r) \subset$ int.X e assim int.X é aberto.

(v) Seja $x \in \overline{X} \Rightarrow \exists\ (x_k) \subset X$ com $x_k \longrightarrow x$, i.e. $\forall r > 0,\ B(x;r) \cap X \neq \emptyset$.

Se $x = x_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x \in X$.

Se $x \neq x_k,\ \forall\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall\ r > 0,\ B(x;r) - \{x\} \cap X \neq \emptyset \Rightarrow x \in X'$.

Assim $x \in X \cup X'$, logo $\overline{X} \subset X \cup X'$.

Reciprocamente se $x \in X \Rightarrow \exists (x_k) \subset X, x_k = x \forall\ k$, então $x_k \longrightarrow x$ e $x \in \overline{X}$ logo $X \subset \overline{X}$.

Se $x \in X' \Rightarrow \forall\ r > 0,\ B(x;r) \cap X \neq \emptyset \Rightarrow \forall\ r_k > 0, \exists\ x_k \in B(x,k) \cap X$.

Tome $r_k = \dfrac{1}{k} > 0 \Rightarrow \exists\ x_k \in X, |x - x_k| < \dfrac{1}{k}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, logo $x_k \longrightarrow x \Rightarrow x \in \overline{X}$, assim $X' \subset \overline{X}$. Logo $X \cup X' \subset \overline{X}$.

Portanto, $X \cup X' = \overline{X}$.

Exercício 4 - 20/03

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$.

(i) $d(X,Y) = d(\overline{X}, \overline{Y})$;

(ii) $|d(x,X) - d(y,X)| \leq |x - y|, \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$;

(iii) diam$(X) =$ diam$(\overline{X})$.

Solução.

(i) $d(X,Y) = d(\overline{X}, \overline{Y})$.

Sabemos que $X \subset \overline{X}$ e $Y \subset \overline{Y}$. Assim,

$d(X,Y) = \inf\{|x-y|;\ x \in X,\ y \in Y\} \geq \inf\{|\overline{x} - \overline{y}|,\ \overline{x} \in \overline{X},\ \overline{y} \in \overline{Y}\} = d(\overline{X}, \overline{Y})$.

Por outro lado, $d(\overline{X}, \overline{Y}) = \inf\{|\overline{x} - \overline{y}|; \overline{x} \in \overline{X}, \overline{y} \in \overline{Y}\}$, então pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ existem $\overline{x_0} \in \overline{X}$ e $\overline{y_0} \in \overline{Y}$ tais que $d(\overline{x_0}, \overline{y_0}) < d(\overline{X}, \overline{Y}) + \varepsilon/3$. Além disso, como $\overline{x_0} \in \overline{X}$ e $\overline{y_0} \in \overline{Y}$ então existem $x' \in X$, $y' \in Y$ tais que $|x' - \overline{x_0}| < \varepsilon/3$ e $|y' - \overline{y_0}| < \varepsilon/3$.

Assim:

$$\begin{aligned}
d(X,Y) &= \inf\{|x-y|; x\in X, y\in Y\}\\
&\leq |x'-y'| = |x'-\overline{x_0}+\overline{x_0}-\overline{y_0}+\overline{y_0}-y'|\\
&\leq |x'-\overline{x_0}|+|\overline{x_0}-\overline{y_0}|+|\overline{y_0}-y'|\\
&< \varepsilon/3 + d(\overline{X},\overline{Y}) + \varepsilon/3+\varepsilon/3\\
&< d(\overline{X},\overline{Y})+\varepsilon,\ \forall\,\varepsilon>0.
\end{aligned}$$

Então $d(X,Y)\leq d(\overline{X},\overline{Y})$. Portanto $d(X,Y)=d(\overline{X},\overline{Y})$.

(ii) $|d(x,X)-d(y,X)|\leq|x-y|, \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n$.

Pelo item anterior, $d(x,X)=d(x,\overline{X})$. Por outro lado, como $\{x\}$ é compacto e $\overline{X}$ é fechado, existe $x_0\in\overline{X}$ tal que $|x-x_0|=d(x,\overline{X})=d(x,X)$. Da mesma forma, existe $y_0\in\overline{X}$ tal que $|y-y_0|=d(y,\overline{X})=d(y,X)$. Assim $|x-x_0|\leq|x-y_0|$, pois $|x-x_0|=\inf\{|x-\overline{x}|;\overline{x}\in\overline{X}\}$. Daí,

$d(x,X)=|x-x_0|\leq|x-y_0|\leq|x-y|+|y-y_0|=|x-y|+d(y,X)$

$\Rightarrow d(x,X)-d(y,X)\leq|x-y|$.

Analogamente,

$d(y,X)=|y-y_0|\leq|y-x_0|\leq|y-x|+|x-x_0|\leq|y-x|+d(x,X)\Rightarrow d(y,X)-d(x,X)\leq |y-x|$.

Portanto $|d(y,X)-d(x,X)|\leq|y-x|,\ \forall\,x,y\in\mathbb{R}^n$.

(iii) $\text{diam}(X)=\text{diam}(\overline{X})$.

$$\text{diam}(X)=\sup\{|x-y|;x,y\in X\}$$

$X\subset\overline{X}\Rightarrow\text{diam}(X)\leq\text{diam}(\overline{X})$.

Dado $\varepsilon>0$, existem pontos $\overline{x},\ \overline{y}\in\overline{X}$ tais que $\text{diam}(\overline{X})<|\overline{x}-\overline{y}|+\varepsilon/3$ (pela definição de supremo) e existem $x,y\in X$ tais que $|x-\overline{x}|<\varepsilon/3$ e $|y-\overline{y}|<\varepsilon/3$.

Então temos:

$\text{diam}(\overline{X})-\varepsilon/3\leq|\overline{x}-\overline{y}|<|x-\overline{x}|+|x-y|+|y-\overline{y}|<\varepsilon/3+|x-y|+\varepsilon/3$

$\Rightarrow\text{diam}(\overline{X})<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3+|x-y|$

$\Rightarrow$ diam$(\overline{X}) < |x-y| + \varepsilon < \sup\{|x-y|; x, y \in X\} + \varepsilon$

$\Rightarrow$ diam$(\overline{X}) <$ diam$(X) + \varepsilon$.

Como ε é arbitrário, temos que diam$(\overline{X}) \leq$ diam(X).

Portanto diam$(\overline{X}) =$ diam(X).

Exercício 5 - 22/03

Mostre que $S^1 \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ - cobertura aberta, então existe $\rho > 0$ tal que $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, em que $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (1-\rho)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (1+\rho)^2\}$.

Solução. Seja $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ uma cobertura aberta de S^1. Como S^1 é um conjunto compacto, temos que existe uma subcobertura finita, digamos $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$. Assim, o conjunto $B^c = B \backslash A$ é um conjunto fechado pois B é reunião finita de abertos. Como $S^1 \subset B$, segue que $S^1 \cap B^c = \emptyset$. Daí, como a função distância é contínua, S^1 é compacto e B^c é fechado, existem $(x_1, y_1) \in S^1$ e $(x_2, y_2) \in B^c$ tais que

$$d(S^1, B^c) = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = \rho > 0$$

pois, $S^1 \cap B^c = \emptyset$.

Logo, tomando $K = \{(x,y) \in \mathbb{R} | (1-\rho)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (1+\rho)^2\}$ temos que $S^1 \subset K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

3.1.3 Aplicações contínuas; homeomorfismos

Teorema 1 - 22/03

(i) f é contínua em $x = a \Leftrightarrow f(x_k) \longrightarrow f(a),\ \forall\, (x_k) \subset X$, com $x_k \longrightarrow a$.

(ii) f é contínua em $x = a \Leftrightarrow f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x = a$, para cada $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração.

(i) $(\Rightarrow)$ Tomemos $(x_k) \subset X$ tal que $x_k \longrightarrow a$. Como f é contínua em $a \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in B(a;\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a);\varepsilon)$.

Por outro lado, $x_k \longrightarrow a \Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N};\ \forall\, k > k_0,\ |x_k - a| < \delta \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon$, portanto $f(x_k) \longrightarrow f(a)$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que f não seja contínua em $a \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0;\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, podemos obter

$x_k \in X$ tal que $|x_k - a| < 1/k$, mas $|f(x_k) - f(a)| > \varepsilon$. Daí $x_k \to a$, mas $f(x_k) \not\to f(a)$. Contradição.

(ii) $(\Rightarrow)$ f contínua. Sabemos que $\pi_i : X \to \mathbb{R}$ é contínua, daí $f_i = \pi_i \circ f$ é contínua, $\forall\, i = 1, ..., m$. $(\Leftarrow)$ Suponha agora que $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja contínua, $\forall\, i = 1, ..., m$. Tomemos então $\varepsilon > 0$ arbitrário. Existem $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ tais que

$$\forall\, x \in X;\ |x - a| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon/m,\ \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, temos que

$$\forall\, x \in X;\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon/m,\ \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Daí

$$|f(x) - f(a)|_S = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(a)| < m \cdot \varepsilon/m = \varepsilon.$$

Logo f é contínua em a.

■

Exercício 1 - 22/03

Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$, $E, F \subset X$ e $G, H \subset Y$ subconjuntos. Mostre que

a) $E \subset F \implies f(E) \subset f(F)$

b) $G \subset H \implies f^{-1}(G) \subset f^{-1}(G)$

c) $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$

d) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

e) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

f) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$

g) $f(E \setminus F) \subset f(E)$

h) $f^{-1}(G \setminus H) = f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$

Solução.

a) É obvio!

b) Tomemos $y \in f^{-1}(G) \Longrightarrow f(y) \in G \Longrightarrow f(y) \in H \Longrightarrow y \in f^{-1}(H)$.
Logo $f^{-1}(G) \subset f^{-1}(G)$.

c) Tomemos $b \in f(E \cap F) \Longrightarrow \exists a \in E \cap F$ tal que $f(a) = b$. Como $a \in E \cap F$, então $a \in E \Longrightarrow b \in f(E)$ e $a \in F \Longrightarrow b \in f(F)$, portanto $b \in f(E) \cap f(F)$.

d) Tomemos $x \in f^{-1}(G \cap H) \Longrightarrow f(x) \in G \cap H$. Daí $f(x) \in G \Longrightarrow x \in f^{-1}(G)$ e $f(x) \in H \Longrightarrow x \in f^{-1}(H)$, portanto $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \Longrightarrow f^{-1}(G \cap H) \subset f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.

Tomemos $y \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \Longrightarrow f(y) \in G$ e $f(y) \in H \Longrightarrow f(y) \in G \cap H \Longrightarrow y \in f^{-1}(G \cap H)$, portanto $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \subset f^{-1}(G \cap H)$.

e) Tomemos $y \in f(E \cup F) \Longrightarrow \exists x \in E \cup F$ tal que $f(x) = y$. Se $x \in E \Longrightarrow f(x) \in f(F)$, portanto a $f(E) \cup f(F)$. Por outro lado, $x \in F$, então $y = f(x) \in f(F) \subset f(E) \cup f(F)$, em qualquer caso $y \in f(E) \cup f(F)$. Por outro lado $f(E) \subset f(E \cup F)$ e $f(F) \subset f(E \cup F) \Longrightarrow f(E) \cup f(F) \subset f(E \cup F)$.

f) Por (b) vimos que, como $HeG \subset G \cup H$, então $f^{-1}(G) \subset f^{-1}(G \cup H)$ e $f^{-1}(H) \subset f^{-1}(G \cup H)$, daí $f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) \subset f^{-1}(G \cup H)$. Por outro lado se $y \in f^{-1}(G \cup H) \Longrightarrow f(y) \in G \cup H$. Se, porém $f(y) \in H \Longrightarrow y \in f^{-1}(H)$, em qualquer caso $y \in f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$.

g) $E \setminus F \subset E$, por (a) $\Longrightarrow f(E \setminus F) \subset f(E)$.

h) Tomemos $x \in f^{-1}(G \setminus H) \Longrightarrow f(x) \in G \setminus H \Longrightarrow f(x) \in G$ e $f(x) \notin H \Longrightarrow x \in f^{-1}(G)$ e $x \notin f^{-1}(H) \Longrightarrow x \in f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$, seja agora $x \in f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H) \Longrightarrow f(x) \in G$ e $f(x) \notin H \Longrightarrow f(x) \in G \cap H^c \Longrightarrow x \in f^{-1}(G \setminus H)$.

Exercício 2 - 22/03

Se $f : X \subset (\mathbb{R}^n, |\cdot|_1) \longrightarrow Y \subset (\mathbb{R}^m, |\cdot|_2)$ é contínua então f é contínua em qualquer norma de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Solução. Seja f contínua em $x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|_2 < \varepsilon$.
Usando as equivalências de normas
$\Rightarrow \exists c > 0$ e $d > 0$ $/c|x - x_0|_{\mathbb{R}^n} \leq |x - x_0|_1 < \delta$ e.d $|f(x) - f(x_0)|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.

Daí obtemos:
$|x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \dfrac{\delta}{c} := \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{d} = \varepsilon_1$
$\Rightarrow \forall\, \varepsilon_1 > 0,\ \exists\, \delta_1 > 0 / |x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon_1$
$\Leftrightarrow f$ é contínua em x_0.

Exercício 3 - 22/03

Mostre que $H : L\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\} \longrightarrow M^{m\times n}$ definida por $H(T) = (a_{ij})$, em que $T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e_i$, $j = 1, \ldots, n$ é uma bijeção.

Solução. Dada a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ do $\mathbb{R}^n$, queremos mostrar que existe uma bijeção natural do conjunto $L\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}$ no conjunto $M^{m\times n}$.
A matriz (a_{ij}) que corresponde à transformação linear $T \in L\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}$ é definida por

$$T(e_j) = \sum_{1=1}^{m} a_{ij}e_i,\ j = 1, \ldots, n \qquad (*).$$

Assim, para cada transformação linear $T \in L\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}$ associa-se uma "única"matriz que tem como coluna os n vetores $T(e_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{R}^m$, o que mostra que H é injetiva.

Para mostrar que H é sobrejetiva, dado uma matriz $(a_{ij}) \in M^{m\times n}$, a igualdade em (*) define os valores de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nos n vetores da base canônica. Desta forma, podemos definir o valor de T em qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, H é sobretiva.

Portanto H é bijeção.

Teorema 1 - 23/03

$f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ \ g : Y \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, com $f(X) \subset Y$. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a. **Demonstração.** Seja $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como g é contínua em $f(a) \Rightarrow \exists\, \overline{\delta} > 0$ tal que, $\forall\, y \in Y \cap B\big(f(a); \overline{\delta}\big) \Rightarrow g(y) \in B\big(g\big(f(a)\big); \varepsilon\big)$. Mas f é contínua em $a \Rightarrow \exists\ \delta > 0;$ $\forall\, x \in X \cap B(a; \delta) \Rightarrow f(x) \in Y \cap B\big(f(a); \overline{\delta}\big) \Rightarrow g(f(x)) \in B\big(g\big(f(a)\big); \varepsilon\big)$. Portanto $g \circ f$ é contínua em a.

$\blacksquare$

Exercício 1 - 23/03

Determine $O(f, a)$ e conclua se é contínua:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

$a = 0$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$a = 0$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2 \\ -x+2, & 2 \leq x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$

$a = -2$ e $a = 0$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$a = 0$

Solução.

(i) $O(f, 0) = M(0, f, \delta) - m(0, f, \delta) = 1 - 0 = 1.$

Não é contínua, pois $\lim\limits_{\delta \to 0} h(\delta) = 1 \neq 0.$

(ii) $M(0, f, \delta) - m(0, f, \delta) = \delta - 0 = \delta.$

$\lim\limits_{\delta \to 0} h(\delta) = \lim\limits_{\delta \to 0} \delta = 0 = O(f, 0)$, logo f é contínua $a = 0$.

(iii) Tomando $\delta < 1$, temos $(-\delta, \delta)$

$M(0, f, \delta) - m(0, f, \delta) = \delta + 2 - 2 = \delta \Rightarrow \lim\limits_{\delta \to 0} h(\delta) = 0$, logo f é contínua em $a = 0$.

$(-2 - \delta, -2 + \delta)$

$M(-2, f, \delta) - m(-2, f, \delta) = 4 - (-\delta) = 4 + \delta \Rightarrow \lim\limits_{\delta \to 0} h(\delta) = 4$, logo f não é contínua em $a = -2$.

(iv) $M(0, f, \delta) - m(0, f, \delta) = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{\delta \to 0} h(\delta) = 2$, logo f não é contínua em $a = 0$.

Teorema 1 - 27/03

$f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uniformemente contínua $\Leftrightarrow$ $|f(x_k) - f(y_k)| \longrightarrow 0, \ \forall \ (x_k), (y_k) \subset X$ com $|x_k - y_k| \longrightarrow 0$. **Demonstração.**

($\Rightarrow$) Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uniformemente contínua, então $\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall \ x, y \in X$. Além disso, como $|x_k - y_k| \longrightarrow 0$, temos que

$\forall\ \bar{\delta} > 0,\ \exists\ k_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_\circ \Rightarrow |x_k - y_k| < \bar{\delta}$, onde $x_k, y_k \in X\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Tomando $\bar{\delta} = \delta > 0$, obtemos que $|f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon,\ \forall\ k > k_\circ$. Assim, $|f(x_k) - f(y_k)| \longrightarrow 0$.

($\Leftarrow$) Vamos provar a contrapositiva desta implicação.

Suponhamos que f não é u.c. Então existe $\varepsilon_\circ > 0$ tal que $\forall\ k \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_k, y_k \in X$ tais que $|x_k - y_k| \longrightarrow 0$, mas $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon_\circ$. Dessa maneira,

$$|x_k - y_k| \longrightarrow 0 \ \not\Rightarrow\ |f(x_k) - f(y_k)| \longrightarrow 0.$$

■

Teorema 3 - 27/03

$f : K \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow f(K) \subset \mathbb{R}^n$, f contínua, injetiva e K compacto $\Longrightarrow f$ é homeomorfismo.

Demonstração. É suficiente provar que $g = f^{-1} : f(K) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$ é contínua.

Seja $C \subset K$ um conjunto fechado. Como K é compacto $\Longrightarrow C$ é compacto portanto fechado .

Logo $g^{-1}(C) = f(C)$ é compacto pois f é contínua $\Longrightarrow g^{-1}(C)$ é fechado.

Assim: $g = f^{-1}$ é uma funcão contínua.

Daí f é um homeomorfismo.

■

Exercício 1 - 27/03

(i) Mostre que $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0,1]$ é uniformemente contínua, mas $f \notin$ Lip$([0,1])$.

(ii) Mostre que $f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \dfrac{1}{1-xy}$ é contínua mas não é uniformemente contínua.

Solução.

(i) Toda função contínua em domínio compacto é uniformemente contínua, portanto $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,1]$, é uniformemente contínua.

Suponha que $f \in$ Lip$([0,1])$. Neste caso existiria $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,\ \ \forall\ x,\ y\ \in [0,1]$. Em particular, fixando $y = 0$ temos que $|f(x)| \leq c|x|,\ \ \forall\ x \in [0,1]$. Daí, para todo $x \in (0,1]$, temos $\dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq c \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{x} \leq c \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq c$. Ora, mas isto é uma contradição, pois $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ é ilimitado no intervalo $(0,1]$. Portanto $f \notin$ Lip$([0,1])$.

(ii) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-xy}$ é contínua pois é o quociente de funções contínuas cujo denominador é sempre diferente de zero, pra todos os pontos (x,y) do domínio. Agora para verificar que f não é uniformemente contínua, considere as sequências (x_k) e (y_k), em que $x_k = \left(1 - \dfrac{1}{k}, 1\right)$ e $y_k = \left(1 - \dfrac{2}{k}, 1\right)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $|y_k - x_k| \longrightarrow 0$, mas $|f(y_k) - f(x_k)| = \left|\dfrac{-k}{2}\right| \longrightarrow \infty$. Portanto f não é uniformemente contínua.

Exercício 2 - 27/03

Considere $\emptyset \neq F, G \subset \mathbb{R}^n$ fechados, disjuntos e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}.$$

(função de Urysohn do par F e G)

(i) Mostre que f é contínua, $F|_F = 0$, $F|_G = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Em que condições, sobre F e G, f é uniformemente contínua ?

(iii) Se f for uniformemente contínua o que deve ocorrer com F e G?

Solução.

(i) Primeiramente observemos que $d(x,F) + d(x,G) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, pois se x é tal que $d(x,F) + d(x,G) = 0$, então $d(x,F) = d(x,G) = 0 \Rightarrow x \in \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap G = \emptyset$. Portanto $d(x,F) + d(x,G) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$. Daí, como f é o quociente de funções contínuas cujo denominador é sempre não-nulo, então segue que f é contínua.

(ii) $f(x)$ é uniformemente contínua se, e somente se, $d(F,G) > 0$.

(iii) Se f for uniformemente contínua implica $d(F,G) > 0$ (i.e. F e G são disjuntos).
Com efeito, se $d(F,G) = 0$ então existem sequências de pontos $x_k \in F = \overline{F}$ e $y_k \in G = \overline{G}$ tais que $\lim |x_k - y_k| = 0$. Agora, como $(x_k) \subset F$ e $(y_k) \subset G$, segue que $f(x_k) = 0$ e $f(y_k) = 1$, portanto $|f(x_k) - f(y_k)| = 1$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ e isto contradiz o fato de f ser uniformemente contínua.

Exercício 3 - 27/03

Conclua do exercício anterior que dados quaisquer $\emptyset \neq F, G \subset \mathbb{R}^n$ fechados e disjuntos, existem $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos e disjuntos com $F \subset A$ e $G \subset B$.

Solução. Sejam $A = f^{-1}\Big((-\infty, \frac{1}{2})\Big)$ e $B = f^{-1}\Big((\frac{1}{2}, +\infty)\Big)$. Como f é contínua e os intervalos $(-\infty, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, +\infty)$ são abertos em $\mathbb{R}$, segue-se que A e B são abertos. Além disso,

i) $F \subset A$, pois $0 \in (-\infty, \frac{1}{2})$ e $F = f^{-1}(0)$, pois $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

ii) $G \subset A$, pois $1 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ e $f^{-1}(1) = G$, porque $f(x) \Leftrightarrow x \in G$.

iii) Também $A \cap B \neq \emptyset$, pois se $x \in A$, então $f(x) < \frac{1}{2}$ e se $x \in B$, então $f(x) > \frac{1}{2}$.

Exercício 4 - 27/03

$f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^n$, contínua. Definamos $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)dt$ Mostre que φ é contínua em cada ponto $x_0 \in X$.

Solução. Com efeito, $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \displaystyle\int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)|dt$. Pela teorema 21 b (pag. 47 Curso de Análise vol. 2 E.L. Lima), dado $\varepsilon > 0$, podemos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X,\ \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x, t) - f(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$, seja qual for $t \in [a, b]$, logo tem-se $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$.

Exercício 5 - 27/03

Mostre que se:

(i) $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^p$ são limitados e $\varphi : X \times Y \xrightarrow{bilinear} \mathbb{R}^m$, então $\varphi|_{X \times Y}$ é uniformemente contínua (u.c.).

(ii) $f : X \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{u.c.}} Y \subset \mathbb{R}^p$ e $g : Y \in \mathbb{R}^p \xrightarrow{\text{u.c.}} Y \subset \mathbb{R}^m$, então $f(x) \subset Y \Rightarrow g \circ f$ é u.c.

(iii) $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, f é u.c. $\Leftrightarrow$ cada f_i for u.c.

Solução.

(i) Vamos mostrar que φ é lipschitz. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$ quaisquer e seja $c = \max \varphi(e_i, e_j)$ tal que $1 < i < n$ e $1 < j < p$.

Temos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ e } y = \sum_{j=1}^{p} y_i e_i, \qquad |x| \cdot |y| = \sum_{i,j=1}^{n,p} |x_i|\,|y_j| \text{ e } \varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n,p} x_i y_j (e_i, e_j).$$

Desta maneira,

$$|\varphi(x,y)| = \sum_{i,j=1}^{n,p} |x_i|\,|y_j|\,|\varphi(e_i,e_j)| \leq c \sum_{i,j=1}^{n,p} |x_i|\,|y_j| = c|x_i|\,|y_j|.$$

Vamos a prova:

Sejam $z, z' \in X \times Y$ quaisquer. Assim:

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - \varphi(z')| = &\ |\varphi(x,y) - \varphi(x',y')| = |\varphi(x,y) - \varphi(x,y') + \varphi(x,y') - \varphi(x',y')| \\ = &\ |\varphi(x,y-y') + \varphi(x-x',y')| \leq |\varphi(x,y-y')| + |\varphi(x-x',y')| \\ \leq &\ c|x|\,|y-y'| + |y'|\,|x-x'|. \end{aligned}$$

Como X e Y são limitados por hipótese, o cartesiano $X \times Y$ também é limitado e como z e $z' \in X \times Y$ temos que $\exists\, r > 0$ tal que $|x| \leq r$ e $|y| \leq r$.

Assim,

$$|\varphi(z) - \varphi(z')| \leq c|x|\,|y-y'| + |y'|\,|x-x'| \leq c \cdot r(|y-y'| + |x-x'|) \leq c \cdot r|z-z'|.$$

Portanto φ é Lipschitz.

(ii) Como g é u.c, dados $f(x), f(y) \in f(X) \subset Y$ arbitrários, tem-se que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$. Tomando η e usando a continuidade uniforme de f tem-se que dados $x, y \in X$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$.

Tomando x e $y \in X$ quaisquer, tem-se que $|x-y| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$.

Logo $g \circ f$ é uniformemente contínua.

(iii) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ com $x \subset \mathbb{R}^n$ é u.c $\Leftrightarrow \forall\, x_k, y_k \in X$, com $\lim(x_k - y_k) = 0$, tem-se que $\lim [f(x_k) - f(y_k)] = 0$.

Alem disso, $\lim\, [f(x_k) - f(y_k)] = 0 \Leftrightarrow$ para cada $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq m$, tem-se que $\lim[f_i(x_k) - f_i(y_k)] = 0$.

Dados então x_k, $y_k \in X$ com $\lim(x_k - y_k) = 0$, tem-se que $\lim[f_i(x_k) - f_i(y_k)] = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq m \Leftrightarrow f_i$ é u.c para cada $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq m$.

3.1.4 Conjuntos conexos

Teorema 1 - 29/03

(i) Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo, então $f(X)$ é conexo.

(ii) $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ (L- família de índices), X_λ é conexo e existe $a \in \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Então X é conexo.

(iii) $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, então o produto cartesiano $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ é um conjunto conexo se, e somente se, X e Y são conexos.

(iv) Sejam $X \subset Y \subset \overline{X}$ em $\mathbb{R}^n$. Se X é conexo, então Y é conexo.

Demonstração.

(i) Seja (A, B) uma cisão de $f(X) \Rightarrow f(X) = A \cup B$, onde A e B são disjuntos e abertos em $f(X)$. Daí $X = f^{-1}\big(f(X)\big) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Como f é contínua, segue que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos em X, daí $\big(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\big)$ é uma cisão de X. Como X é conexo, temos que $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$ é o conjunto vazio, daí, sendo $f : X \longrightarrow f(X)$ sobrejetiva, segue que ou A ou B é vazio, portanto $f(X)$ é conexo.

(ii) Seja a tal que $a \in X_\lambda$, para todo $\lambda \in L$ e $X = A \cup B$ uma cisão de X. Como $A \cap B = \emptyset$, então o ponto a pertence a um dos conjuntos, A ou B. Digamos que $a \in A$. Para todo $\lambda \in L, X_\lambda = (A \cap X_\lambda) \cup (B \cap X_\lambda)$ é uma cisão de X_λ, a qual é trivial pois X_λ é conexo. Como $a \in A \cap X_\lambda$, segue que $B \cap X_\lambda = \emptyset,\ \forall\ \lambda \in L$. Logo $B = \bigcup_{\lambda \in L} (B \cap X_\lambda)$ é vazio e a cisão $X = A \cup B$ é trivial. Portanto X é conexo.

(iii) Se $X \times Y$ é conexo então X e Y são conexos porque são imagens de $X \times Y$ pelas projeções $p : X \times Y \longrightarrow X, p(x, y) = x$ e $q : X \times Y \longrightarrow Y, q(x, y) = y$, as quais são contínuas.
Reciprocamente, se X e Y são conexos, tomemos $c = (a, b) \in X \times Y$. Para cada $z = (x, y) \in X \times Y$ considere o conjunto $C_z = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$. Temos que C_z é conexo pois é reunião dos conjuntos conexos $X \times \{b\}$ e $\{x\} \times Y$ (homeomorfos, respectivamente, a X e Y) com o ponto (x, b) em comum.
Além disso, $c = (a, b) \in C_z$, para todo $z \in X \times Y$ e $X \times Y = \bigcup_z C_z$, logo, pelo item anterior, $X \times Y$ é conexo.

(iv) Seja $Y = A \cup B$ uma cisão não-trivial de Y. Então, por um resultado já visto, temos que $X \subset A$ ou $X \subset B$. Suponhamos $X \subset A$. Então $Y \subset \overline{X} \subset \overline{A}$. Como $\overline{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow Y \cap B = \emptyset$, isto é, $B = \emptyset$. Contradição, pois admitimos que (A, B) é uma cisão não-trivial de Y. Portanto Y não admite cisão não-trivial, logo é conexo.

■

Teorema 3 (Teorema do Valor Intermediário) - 29/03

$f : X \subset \mathbb{R}^m \overset{cont}{\longrightarrow} \mathbb{R}$, X conexo. Se $f(a) < f(b)$, $a, b \in X$, então para cada $d \in \big(f(a), f(b)\big)$ existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$. **Demonstração.** X conexo e f contínua $\Rightarrow$ $f(X)$ intervalo. Como $f(a)$ e $f(b) \in f(X)$, então $\forall\, d \in \big(f(a), f(b)\big)$ temos que $d \in f(X)$, portanto $\exists\, c \in X$ tal que $f(c) = d$.

■

Teorema 4 (Teorema da Alfândega) - 29/03

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário. Se um conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}^n$ contém um ponto $a \in X$ e um ponto $b \notin X$ então C contém um ponto $c \in \partial X$. **Demonstração.** A função contínua $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = d(x, X) - d(x, \mathbb{R}^n - X)$ é tal que $f(a) \leq 0$ e $f(b) \geq 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, deve existir $c \in C$ tal que $f(c) = 0$, isto é, $d(c, X) = d(c, \mathbb{R}^n - X)$. Como $c \in X$ ou $c \in \mathbb{R}^n - X$, um desses dois números é zero, logo ambos o são e daí $c \in \partial X$.

■

Exercício 1 - 29/03

(i) Se (A, B) é uma cisão de X então $A = \overline{A} \cap X$ e $B = \overline{B} \cap X$, (i.e., A e B são fechados em X) $\Rightarrow A$ e B são abertos em X e $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \subset X$ aberto e fechado em $X \Rightarrow (A, X \setminus A)$ é uma cisão de X.

(iii) X é conexo $\Leftrightarrow$ os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados em X são X e $\emptyset$.

Solução.

(i) Se (A, B) é uma cisão de X, então $X = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Daí,

$$X \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap \overline{A} = (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cap \overline{A} = A.$$

Da mesma forma, concluímos que $B = X \cap \overline{B}$.
$\overline{B} \cap A = \emptyset \Rightarrow B \cap A = \emptyset$, pois $B \subset \overline{B}$. Desse modo, como $X = A \cup B$ e $X = A \cap B$, temos que $B = X - A$ e portanto, sendo A fechado em X, segue que B é aberto em X.
Da mesma forma, concluímos que A é aberto em X.

(ii) Em primeiro lugar temos que $X = A \cup (X - A)$. Daí, A fechado em $X \Rightarrow A = \overline{A} \cap X$ e então $\overline{A} \cap (X - A) = \overline{A} \cap (X - \overline{A} \cap X) = \emptyset$. Da mesma forma, $\overline{X - A} \cap A = \emptyset$. Daí, $(A, X - A)$ é uma cisão de X.

(iii) X conexo $\Rightarrow X$ não admite cisão não -trivial. Daí se houvesse $A \subset X$ tal que A fosse aberto e fechado em X então, pelo item (ii), $(A, X - A)$ seria uma cisão não-trivial de X, o que é uma contradição. Reciprocamente, se os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados em X forem X e $\emptyset$, então X não admite cisão não-trivial, caso contrário existiriam subconjuntos próprios A e $B \subset X$ tal que (A, B) constitui uma cisão de X então, pelo item (i), A e B seriam abertos e fechados em X. Contradição.

Exercício 2 - 29/03

$I \subset \mathbb{R}$ é conexo $\Leftrightarrow$ for um intervalo.

Solução.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que I não seja um intervalo, então existiriam $a < d < b$ com $a, b \in I$ e $d \notin I$. Consideremos, $A = \{x \in I, x < d\}$ e $B = \{x \in I, x > d\}$ estes conjuntos. Seja $a \in A$ e $b \in B$ então a decomposição $I = A \cup B$ formam uma cisão, na qual não seria trivial. Então teriamos que I não seria conexo, mas isso é um absurdo pois por hipótese temos que I é conexo, ou seja, a única cisão que o conjunto admite é a trivial . Portanto I é um intervalo.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que o intervalo I admite a cisão não trivial, ou seja, que I não seja conexo. Seja $I = A \cup B$, tomemos $a \in A$ e $b \in B$. digamos sem perda de generalidade que $a < b$, logo $[a, b] \subset I$. Agora se dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, isto é , $\frac{a+b}{2} = d$. Então $d \in A$ ou $d \in B$. Observe que se $d \in A$, poremos $a_1 = d, b_1 = b$. Agora se $d \in B$, escrevemos $a_1 = a, b_1 = d$. Daí em qualquer caso teremos um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$,com $b_1 - a_1 = \frac{(b-a)}{2}$ e $a_1 \in A, b_1 \in B$. Se dividimos ao meio o intervalo $[a_1, b_1]$ ao meio, então o ponto médio do intervalo decompõe em dois novos intervalos justapostos de comprimento $\frac{(b-a)}{4}$, na qual chamaremos de $[a_2, b_2]$, onde $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$. Se prosseguimos analogamente com este processo, obteremos uma sequência de intervalos encaixados, onde $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ com $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ com $a_n \in A, b_n \in B$ para do $n \in \mathbb{N}$. Então pelo teorema dos intervalos encaixados, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < c < b_n$. Daí temos que $c \in I = A \cup B$, logo c não pode esta em A, pois $c = \lim b_n \in \overline{B}$ e não pode esta em B, pois $c = \lim a_n \in \overline{A}$. Mas isso é uma contradição, logo I é conexo.

Exercício 3 - 29/03

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ contínua com X conexo. Mostre que Graf$(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ é conexo.

Solução. Seja $\varphi : X \longrightarrow \text{Graf}(f)$ tal que $\varphi(x) = \big(x, f(x)\big)$.
Como as componentes de φ são contínuas, pois por hipótese f é contínua, φ é contínua, logo como X é conexa , segue-se que $\varphi(X) = \text{Graf}(f)$ é conexo.

Teorema 1 - 10/04

Seja o homeomorfismo $h : X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in X$, $y_0 = h(x_0) \Rightarrow C_{y_0} = h(C_{x_0})$.
Demonstração. $x_0 \in C_{x_0} \Rightarrow y_0 = h(x_0) \in h(C_{x_0})$ que é conexo, pois C_{x_0} é conexo e h é contínua, daí $h(C_{x_0}) \subset C_{y_0}$. Por outro lado h^{-1} é contínua e C_{y_0} é conexo $\Rightarrow$ $h^{-1}(C_{y_0})$ é conexo e contém $x_0 \Rightarrow h^{-1}(C_{y_0}) \subset C_{x_0} \Rightarrow C_{y_0} \subset h(C_{x_0})$. Portanto $C_{y_0} = h(C_{x_0})$.

■

Corolário 1 - 10/04

$X \overset{\text{homeo}}{\simeq} Y \Rightarrow \underset{x\in X}{\#} C_x = \underset{y\in Y}{\#} C_Y$. **Demonstração.** Seja $x \in X$, então como $h : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo fazendo $y = h(x)$, tem-se que $C_y = h(C_x)$ pelo teorema anterior. Como h leva componente conexa de X em componente conexa Y e $C_x \cap C_y = 0 \Rightarrow h(C_x) \cap h(C_j) = 0$, temos que a função que leva componente conexa em componente conexa é injetiva. Analogamente, tomando $h^{-1} : Y \longrightarrow X$, h^{-1} leva as componentes conexas de Y, nas componentes conexas de X, logo há uma bijeção das componentes conexas, ou seja, $\underset{x\in X}{\#} C_x = \underset{y\in Y}{\#} C_Y$. ■

Exercício 1 - 10/04

Seja $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$. Mostre:

1. $C_x \subset X$ é conexo.
2. $C \subset X$, C conexo, $x \in X$ e $C \cap C_x \neq \emptyset \Rightarrow C \subset C_x$.
3. $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow C_x \cap C_y = \emptyset$ ou $C_x = C_y$.
4. $C_x \subset X$ fechado em X e $X = \dot{\bigcup\limits_{x\in X}} C_x$.

Solução.

1. $C_x \subset X$ é união de conexos com um ponto em comum, a saber, o ponto x. Logo C_x é conexo.
2. Seja $C \subset X$ conexo. Como C_x é conexo e $C_x \cap C \neq \emptyset$ então $C \cup C_x$ é conexo. Além disso $x \in C \cup C_x \Rightarrow C \cup C_x \subset C_x \Rightarrow C \subset C_x$.

3. Sejam $x, y \in X, x \neq y$. Se $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, então como C_x e C_y são conexos $\Rightarrow$ $C_x \cup C_y$ é conexo.

   Por um lado $x \in C_x \cup C_y \Rightarrow C_x \cup C_y \subset C_x \Rightarrow C_y \subset C_x$. Por outro lado $y \in C_x \cup C_y \Rightarrow C_x \cup C_y \subset C_y \Rightarrow C_x \subset C_y$. Portanto, $C_x = C_y$.

4. $\overline{C_x}$ é conexo e contém $x \Rightarrow \overline{C_x} \subset C_x$, portanto C_x é fechado.

   Além disso, $X \subset \dot{\bigcup\limits_{x \in X}} C_x$. Por outro lado, $\forall\, x \in X, C_x \subset X \Rightarrow \dot{\bigcup\limits_{x \in X}} C_x \subset X$.

   Então, segue que $X = \dot{\bigcup\limits_{x \in X}} C_x$.

Exercício 2 - 10/04

Mostre que se $X = \{(x, y);\ y = sen\left(\frac{1}{x}\right)\ , 0 < x \leq 1\}$ e $Z = \{0\} \times [-1, 1]$, então $Y = X \cap Z$ não é conexo por caminhos.

Solução. Provaremos que não existe um caminho $\alpha : [0, 1] \longrightarrow Y$ tal que $\alpha(0) \in X$ e $\alpha(1) \in Z$. Suponha que tal caminho existe. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha(1) = (0, 1)$. Considerando $\varepsilon = \frac{1}{2}$; pela continuidadede de α, existe $\delta > 0$ tal que $\|\alpha(t) - (0, 1)\| < \frac{1}{2}$ se $1 - \delta \leq t \leq 1$. Note que $\alpha([1 - \delta, 1])$ é conexo. Denotemos por $\alpha(1 - \delta) = (x_0, y_0)$ e $\pi_1(x, y) = x$ a primeira projeção de $\mathbb{R}^2$; então $\pi_1 \circ \alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e o seguinte conjunto $C = (\pi_1 \circ \alpha)([1 - \delta, 1])$ é conexo com $0 \in C$, pois $\alpha(1) = (0, 1)$; também $x_0 \in C$. Por outro lado, C é um intervalo e contém $[0, x_0]$; logo para todo $x_1 \in (0, x_0]$, existe $t \in [1 - \delta, 1]$ tal que $\alpha(t) = \big(x_1, sen\,(1/x)\big)$. Em particular, se $m = 2n\pi - \pi/2$, para n grande, temos que se $x_1 = 1/m$, então $0 < x_1 < x_0$ e $sen\,(1/x_1) = sen\,(-\pi/2) = -1$; logo o ponto $(1/m, -1) = \alpha(t)$, para algum $t \in [1 - \delta, 1]$, ou seja, o ponto $(1/m, -1)$ está uma distância menor que 1/2 do ponto $(0, 1)$. Isto é uma contradição, pois $(1/m, -1)$ está a uma distância de pelo menos 2 do ponto $(0, 1)$.

Exercício 3 - 10/04

$X \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos $\Rightarrow X$ é conexo.

Solução. Sejam $a, b \in X \Rightarrow$ existe um caminho $f : [0, 1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = a$, $f(1) = b$. Como $[0, 1]$ é conexo e f contínua $\Rightarrow f([0, 1])$ é conexo e $a, b \in f([0, 1])$. Assim temos que dados a, b $\in X$, existe um conjunto convexo $C_{ab} = f[0, 1] \subset X$ onde $a, b \in C_{ab}$.

Logo, pelo Exercício 10.1 (Livro Análise Real Vol.2 Elon Lages), X é conexo.

Exercício 4 - 10/04

(i) $f : X \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{contínua}} Y \subset \mathbb{R}^m$, X conexo por caminhos $\Rightarrow f(X)$ é conexo por caminhos.

(ii) $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$, onde cada X_λ é conexo por caminhos e $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow X$ é conexo por caminhos.

(iii) $M_1 \times \cdots \times M_n$ é conexo por caminhos $\Leftrightarrow M_j$ o é também.

Solução.

(i) Dados quaisquer dois pontos $f(a), f(b) \in f(X)$, precisamos mostrar que existe um caminho ligando esses pontos.

Como X é conexo por caminhos e $a, b \in X$, então existe um caminho ligando os pontos a e b, digamos, $g : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $g(0) = a$ e $g(1) = b$.

Sendo f e g contínuas, temos que $f \circ g : [0,1] \longrightarrow Y$ é também contínua com

$$(f \circ g)(0) = f\big(g(0)\big) = f(a) \text{ e } (f \circ g)(1) = f\big(g(1)\big) = f(b).$$

Dessa maneira, $f \circ g$ é um caminho em $f(X)$ que une os pontos $f(a)$ e $f(b)$.

Portanto, $f(X)$ é conexo.

(ii) Seja $a \in X_\lambda,\ \forall\, \lambda \in L$.

Dados pontos quaisquer $x, y \in X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$, temos duas possibilidades:

(1) Se $x, y \in X_\lambda$, não há nada a fazer, já que X_λ é conexo por caminhos.

(2) $\forall\, x, y \in X,\ \exists\, \mu, \eta \in L$ tais que $x \in X_\mu$ e $y \in X_\eta$.

Como X_μ e X_η são conexos por caminhos, com $a, x \in X_\mu$ e $a, y \in X_\eta$, então existem caminhos $f : [0,1] \longrightarrow X_\mu$ e $g : [0,1] \longrightarrow X_\eta$ tais que $f(0) = x$, $f(1) = a = g(0)$ e $g(1) = y$.

Dessa maneira, o caminho justaposto $h = f \wedge g : [0,1] \longrightarrow X$ com $h(0) = x$ e $h(1) = y$ é um caminho que une os pontos x e y.

Portanto, $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ é conexo por caminhos.

(iii) Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} f(0) = x \text{ e } f(1) = y &\Leftrightarrow (f_1, \ldots, f_n)(0) = x \text{ e } (f_1, \ldots, f_n)(1) = y \\ &\Leftrightarrow (f_1(0), \ldots, f_n(0)) = (x_1, \ldots, x_n) \text{ e } (f_1(1), \ldots, f_n(1)) = (y_1, \ldots, y_n) \\ &\Leftrightarrow f_j(0) = x_j \text{ e } f_j(1) = y_j,\ \forall\, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Além disso, sabemos que $(f_1, \ldots, f_n)$ é contínua $\Leftrightarrow$ f_j o é.

Usando os dois fatos acima, temos que

$M_1 \times \cdots \times M_n$ é conexo por caminhos $\Leftrightarrow$

$$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n,$$

existe um caminho $f = (f_1, \ldots, f_n) : [0, 1] \longrightarrow M_1 \times \cdots \times M_n$ tal que

$$(f_1, \ldots, f_n)(0) = (x_1, \ldots, x_n) \text{ e } (f_1, \ldots, f_n)(1) = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow$$

existem caminhos $f_j : [0, 1] \longrightarrow M_j$, com $f_j(0) = x_j$ e $f_j(1) = y_j$, $\forall\ j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow M_j$ é conexo por caminhos.

3.1.5 Limites

Teorema 1 - 12/04

$f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in X'$ e $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_m) \Leftrightarrow \lim_{y\to a} f_i(x) = b_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Demonstração.

($\Rightarrow$)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_m) \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Como $|f_i(x) - b_i| \leq \max\{|f_i(x) - b_i|\} = |f(x) - b| < \varepsilon$, então

$$\forall\ x \in X;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n.$$

Portanto $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i, \forall\, i = 1, \ldots, n$.

($\Leftarrow$)

$\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \frac{\varepsilon}{n},\ \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Mas $|f(x) - b| = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - b_i|$. Daí,

$$\forall\, x \in X;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - b_i| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Portanto $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. ∎

Teorema 2 - 12/04

$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = b,\ \forall\ (x_k) \subset X\backslash\{a\}$, com $x_k \longrightarrow a$. **Demonstração.**

($\Rightarrow$) Suponha $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e considere a sequência $(x_k) \subset X\backslash\{a\}$, com $x_k \to a$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$; $\forall\ x \neq a \in B(a,\delta)$, $f(x) \in B(b,\varepsilon)$. Ora, mas $x_k \to a$, desse modo existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall\ k > k_0$, $x_k \in B(a,\delta) \Rightarrow f(x_k) \in B(b,\varepsilon)$, portanto $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = b,\ \forall\ (x_k) \subset X\backslash\{a\}$, com $x_k \to a$ e que $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$. Desse modo existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta_k = 1/k$ podemos obter $x_k \in X\backslash\{a\}$; $|x_k - a| < 1/k$ mas $|f(x_k) - b| \geq \varepsilon$. Agora olhando pra sequência (x_k), temos que $x_k \to 0$ enquanto $f(x_k) \not\to 0$. Contradição!

■

Teorema 4 - 12/04

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Prove que:

(i) $\lim_{x\to a} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle b, c\rangle$.

(ii) Se $\lim_{x\to a} \alpha(x) = d$ então $\lim_{x\to a} \alpha(x)f(x) = db$. Em particular, se $d = 0$ e f for limitada, então $\lim_{x\to a} \alpha(x)f(x) = 0$.

Demonstração.

(i) Temos que:

$0 \leq |\ \langle f(x), g(x)\rangle - \langle b, c\rangle\ | = |\ \langle f(x) - b, g(x)\rangle + \langle b, g(x) - c\rangle\ | \leq |g(x)||f(x) - b| + |b||g(x) - c|$. Portanto, $\lim_{x\to a} |\ \langle f(x), g(x)\rangle - \langle b, c\rangle\ | = 0$.

(ii) A primeira parte se faz de maneira análoga ao item anterior.

Suponha agora que $d = 0$ e f é limitada. Tomemos $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$, onde $|f(x)| \leq M,\ \forall\ x \in X$.

Daí, $\forall\ x \in X;\ \ 0 < |x - a| < \delta$ temos que $|\alpha(x)f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to a} \alpha(x)f(x) = 0$.

■

Corolário do Teorema 5 - 12/04

Se $f(x) \leq g(x),\ x$ em uma vizinhança de a, então $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) \leq \lim_{x\longrightarrow a} g(x)$ se esses limites existirem.
Demonstração. Vamos supor que $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) > \lim_{x\longrightarrow a} g(x)$. Neste caso,

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) - \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = \lim_{x \longrightarrow a} [f(x) - g(x)] > 0.$$

Então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - g(x) > 0, \ \forall \ x \in V_\delta = B(a, \delta) \cap X \backslash \{a\}$.

Portanto, $f(x) > g(x), \ \forall \ x \in V_\delta$. Uma contradição.

■

Teorema 7 - 12/04

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformemente contínua. Então o limite $\lim\limits_{y \to x} f(x)$ existe para todo $x \in \overline{X}$.

Demonstração. Como f é uniformemente contínua em X, dadas as sequências $x_k, y_k \in X$ tais que $\lim\limits_{k \to \infty} |x_k - y_k| = 0$, tem-se $\lim\limits_{k \to \infty} |f(x_k) - f(y_k)| = 0$. Assim, a aplicação f leva sequências de Cauchy de X em sequências de Cauchy em $f(X)$.

Seja $x \in \overline{X}$. Então para toda sequência $x_k \in X \backslash \{x\}$ tal que $x_k \to x$, o limite $\lim\limits_{x_k \to x} f(x_k) = b$. E este limite é único. De fato, se $y_k \in X \backslash x$ é uma sequência tal que $y_k \to x$ e $\lim\limits_{k \to \infty} f(y_k) = c \neq b$, tomando a sequência $z_k \in X \backslash x$ definida por

$$z_{2k} = x_k, z_{2k+1} = y_k.$$

Temos $z_k \to x$ mas não existe $\lim f(z_k)$. Contradição.

■

Teorema 8 - 12/04

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Então f possui uma única extensão uniformemente contínua ao fecho $\overline{X}$ se, e somente se, f é uniformemente contínua.

Demonstração.

($\Leftarrow$) Se f é uniformemente contínua, defina $\overline{f} : \overline{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $\overline{f}(x) = f(x)$, se $x \in X$ e $\overline{f}(x) = \lim\limits_{y \to x} f(x)$, se $x \in X'$.

Afirmação: $\overline{f}$ é uniformemente contínua.

De fato, da continuidade uniforme de f temos que dado $\varepsilon > 0, \ \exists \ \delta > 0$ tal que $\forall \ x, y \in X$ com $\|x - y\| \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sejam $\overline{x}, \ \overline{y} \in \overline{X}$ satisfazendo $|\overline{x} - \overline{y}| < \delta$. Como $\overline{x}$ e $\overline{y} \ \in \ \overline{X}$, então existem sequências $(x_k), (y_k) \subset X$ tais que $\overline{x} = \lim x_k$ e $\overline{y} = \lim y_k$. Daí, para k suficientemente grande temos que $\|x_k - y_k\| < \delta$ e então

$\|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{y})\| = \| \lim f(x_k) - \lim f(y_k)\| = \lim \|f(x_k) - f(y_k)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Portanto $\overline{f}$ é uniformemente contínua.

Unicidade: Suponhamos que exista $G : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, uniformemente contínua tal que

$G|_X = f = \overline{f}|_X$. Seja $\overline{x} \in \overline{X}$ e $(x_k) \subset X$ tal que $x_k \longrightarrow x$. Temos que
$G(\overline{x}) = G(\lim x_k) = \lim G(x_k) = \lim f(x_k) = \lim \overline{f}(x_k) = \overline{f}(\overline{x})$. Portanto $G = \overline{f}$.

($\Rightarrow$) Suponha que f possui uma extensão $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{f}$ é uniformemente contínua em $\overline{X}$. Como $\overline{f}|_X = f$, segue que f é uniformemente contínua em X.

$\blacksquare$

Exercício 1 - 12/04

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) := \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \qquad (1)$$
$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) := \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \qquad (2)$$

Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ e (1) e (2) existirem, então $A = (1) = (2)$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ tal que $(x,y) \in X$:

$$0 < |x - x_0| \le |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x,y) = A.$$

Portanto
$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0} A = A.$$
Analogamente $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $(x,y) \in X$ e

$$0 < |y - y_0| \le |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to x_0} A = A$$

Portanto
$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = A = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right).$$

Exercício 2 - 12/04

$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona e limitada. Mostre que $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\exists \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

Solução. Suponha, sem perda de generalidade, que f seja não descrescente. Considere $L = \inf\{f(x); x \in X, x > a\}$. Afirmamos que $L = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $L + \varepsilon$ não é cota inferior do conjunto $\{f(x); x \in X, x > a\}$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta \in X$ e $L \leq f(a + \delta) < L + \varepsilon$. Como f é não descrescente, se $x \in X$ e $a < x < a + \delta$, então $L \leq f(x) < L + \varepsilon$, o que prova a afirmação feita.

Pondo $M = \sup\{f(x); x \in X, x < b\}$, verificamos de modo análogo que $M = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

3.2 - Diferenciabilidade

3.2.1 Aplicações; diferencial

Exercício 1 - 19/04

Demostrar que toda aplicação bilinear $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e diferenciável em cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ e $DB(x, y)(k, h) = B(x, h) + B(k, y)$.

Solução.

$$\lim_{(k,h)\to 0} \frac{|B(x + k, y + h) - B(x, y) - [B(x, h) + B(k, y)]|}{|(k, h)|} = \lim_{(k,h)\to 0} \frac{|B(k, h)|}{|(k, h)|} \tag{3.1}$$

seja $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ que têm 1 só no i-ésimo lugar. Como B é bilinear, temos:

$$B(k, h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} k_i h_j B(e_i, e_j) \Rightarrow \exists M(B) := M > 0$$

tal que $|B(k, h)| \leq M|k_i||h_j| \leq M \max|k_i| \max|h_j| \leq M|k||h|$ e como $|(k, h) = \sqrt{|k|^2 + |h|^2}$ temos

$$\lim_{(k,h)\to 0} \frac{|B(k, h)|}{|(k, h)|} \leq \lim_{(k,h)\to 0} \frac{M|k||h|}{\sqrt{|k|^2 + |h|^2}} = 0 \tag{3.2}$$

Portanto de **??** concluímos em **??** que $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ e $DB(x, y)(k, h) = B(x, h) + B(k, y)$.

Exercício 2 - 24/04

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in U$ com U aberto, $f \in C^1$ e $|Df(a)| > 0$.

(i) $\nabla f(a)$ aponta para a direção crescente de f;

(ii) $\nabla f(a)$ é a direção de crescimento mais rápido de f em a;

(iii) $\nabla f(a)$ é perpendicular à superfície de nível de f que contem a.

Solução.

(i) Seja $w = \nabla f(a)$. Então $\dfrac{\partial f}{\partial w}(a) = \langle \nabla f(a), w \rangle = |\nabla f(a)|^2 > 0$.
Daí temos que se $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é tal que $\lambda \in C^1, \lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = w$, então a função $t \mapsto f(\lambda(t))$ é diferenciável no ponto $t = 0$ e pela regra da cadeia

$$(f \circ \lambda)'(0) = f'(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = f'(a)w = \frac{\partial f}{\partial w}(a) > 0.$$

Daí temos que numa vizinhança de $t = 0$, f é uma função crescente, isto é, f cresce na direção do gradiente.

(ii) Seja $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $|v| = |w| = |\nabla f(a)|$. Então
$\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle \leq |\nabla f(a)| \cdot |v| = |\nabla f(a)|^2 = \dfrac{\partial f}{\partial w} = \nabla f(a) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial v}(a) \leq \dfrac{\partial f}{\partial \nabla f(a)}$.
Daí f cresce mais rápido na direção do gradiente.

(iii) $w = \nabla f(a)$ é perpendicular a $f^{-1}(c) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\} \Leftrightarrow$ dado qualquer caminho $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(c)$ diferenciável em $t = 0$ com $\lambda(0) = a$ tem-se $\langle \nabla f(a), \lambda'(0) \rangle = 0$. Mas note que $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ é tal que $(f \circ \lambda)(t) = c, \ \forall \ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, donde $(f \circ \lambda)'(0) = 0$. Daí, $0 = (f \circ \lambda)'(0) = \langle \nabla f(a), \lambda'(0) \rangle$, portanto $\nabla f(a)$ é perpendicular a $f^{-1}(c)$.

Exercício 4 - 24/04

Mostre que são diferenciáveis e defina $[f'(a)]$:

(i) $f(x, y) = x^y$;

(ii) $f(x, y, z) = x^y$;

(iii) $f(x, y, z) = \text{sen}(x \,\text{sen}(y \,\text{sen}\, z))$;

(iv) $f(x, y) = (\text{sen}(x, y), \cos y^2)$.

Solução.

(i) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^y$. Defina

$$\begin{array}{cccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} \pi_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Daí temos que $f(x, y) = \pi_1^{\pi_2}$, onde π_1 e π_2 são diferenciáveis, logo f é diferenciável.
Observe que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$.

Por outro lado, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)x^y \ln x$.

Portanto, $\nabla f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right) = (yx^{y-1}, x^y \ln x)$, onde $a = (x,y)$.

(ii) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dado por $f(x,y,z) = x^y$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \pi_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array}$$

Daí, $f(x,y,z) = \pi_1^{\pi_2}$, onde π_1 e π_2 são diferenciáveis, logo f é diferenciável. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^y \ln x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$. Portanto,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a)\right) = (yx^{y-}, x^y \ln x, 0),$$

onde $a = (x,y,z)$.

(iii) Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $f(x,y,z) = sen\,(xsen\,(ysen\;\, z))$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & ysen\, z \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \pi_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & xsen\,(\pi_1) \end{array}$$

Temos que π_1 é diferenciável, pois é o produto de duas funções contínuas. Agora π_2 também é diferenciável, pois é o produto e a composição de duas funções contínuas.

Logo $f(x,y,z) = sen\,(\pi_2)$ é diferenciável.

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= sen\,(ysen\;\, z)\cos(xsen\,(ysen\;\, z)) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \cos(xsen\,(ysen\;\, z))\cos(ysen\;\, z)sen\;\, z \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \cos(xsen\,(ysen\;\, z))\cos(ysen\;\, z)y\cos z
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a), \dfrac{\partial f}{\partial z}(a)\right)$, onde $a = (x,y,z)$.

(iv) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y) = (sen\,(xy), \cos y^2)$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \pi_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array}$$

Temos que $f(x,y) = (sen\,(xy), \cos y^2)$ é diferenciável, pois suas funções coordenadas são diferenciáveis, onde cada uma é composição de funções diferenciáveis. Portanto f é diferenciável.

Seja $f(x,y) = (f_1, f_2)$, onde $f_1 = sen\,(xy)$ e $f_2 = \cos y^2$.

Observe que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -2ysen\,(y^2).$$

Portanto, $[f'(a)] = \begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 0 & -2ysen\,(y^2) \end{bmatrix}_{2\times 2}.$

Observação (do corolário 2) - 24/04

(i) $[T] = \Big[T[e_1]\,T[e_2]\ldots T[e_n]\Big]$ é uma matriz $m \times n$.

(ii) $Tv = [T]v^T$.

Solução. Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ basta escolher para cada $j = 1, \ldots, n$ um vetor $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ e dizer que $v_j = Te_j$ é a imagem do j-ésimo vetor da base canônica, $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, pela trasformação linear T. A partir daí fica determinada a imagem Tv de qualquer vertor $v = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Com efeito, tem-se $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, logo

$$T{\cdot}v = T\left(\sum_{j=1}^n x_je_j\right) = \sum_{j=1}^n x_jT{\cdot}e_j = \sum_{j=1}^n (a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \ldots, a_{mj}x_j) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right),$$

ou seja, $T(x_1, x_2, \ldots x_n) = (y_1, y_2, \ldots y_m)$,

onde

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

Portanto, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fica inteiramente determinada por uma matriz $A = [a_{ij}] \in M(m \times n)$. Os vetores colunas dessa matriz são as imagens Te_j dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. A imagens da $T \cdot v$ de um vetor arbitrário $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor $w = (y_1, \ldots, y_m)) \in \mathbb{R}^m$ cujas coordenadas são dadas pelas equações acima.

Teorema 1 - 26/04

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é de classe $C^1(U)$.

(ii) As funções-coordenadas $f_1, \ldots, f_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$ da aplicação f possuem derivadas parciais contínuas $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, existe a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ em qualquer ponto $x \in U$ e a aplicação $\dfrac{\partial f}{\partial v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua.

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$

De fato:

f é de Classe $C^1(U) \Rightarrow f$ é diferenciável e a aplicação derivada $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é contínua. Como $f = (f_1, \ldots, f_m)$ é diferenciável então f_i é diferenciável, $i = 1, \ldots, m$, daí temos que existem $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Por outro lado as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são as funcões-coordenadas da aplicação f'. Portanto como f' é contínua então suas funções-coordenada $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são contínuas.

$(ii) \Rightarrow (i)$

De fato:

Da hipótese temos pelo Teorema 1 (Pag. 133 Elon Lages Curso de análise) que f_i é diferenciável, logo f é diferenciável. Além disso, f' é contínua pois suas funções-coordenada $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são contínuas. Portanto, f é de classe $C^1(U)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

De fato:

De $(ii) \Rightarrow (i)$ temos que f é diferenciável, logo $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \sum \alpha_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, onde $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ora, cada aplicação $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua pois suas funções-coordenada $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ o são. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ é contínua, pois é combinação linear de funções contínuas.

$(iii) \Rightarrow (ii)$

De fato: Tomando $v = e_j$, vemos que para $j = 1, \ldots, n$, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas, logo é contínua cada uma de suas funções-coordenada $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

■

Exercício 1 - 26/04

Determine as derivadas parciais de:

(i) $F(x, y) = f\big(g(x)k(y), g(x) + h(y)\big)$;

(ii) $F(x, y, z) = f\big(g(x + y), h(y + z)\big)$;

(iii) $F(x, y) = f\big(x, g(x)k(y), h(x, y)\big)$.

Solução.

(i) Seja $v = (v_1, v_2)$. Defina $G(x, y) = f\big(g(x)k(y), g(x) + h(y)\big)$ e seja $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\lambda'(0) = v, \lambda(0) = (x, y)$. Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}F(x,y) = {} & (F \circ \lambda)'(0) = (f \circ G\circ)'(0) = (f \circ G)'\big(\lambda(0)\big) \cdot \lambda'(0)\\ = {} & (f')\Big(G\big(\lambda(0)\big)\Big) \cdot (G)'\big(\lambda(0)\big) \circ \lambda'(0)\\ = {} & \frac{\partial}{\partial x} f\big(g(x)k(y), g(x) + h(y)\big) \cdot \frac{\partial}{\partial y} f\big(g(x)k(y), g(x) + h(y)\big).\end{aligned}$$

(ii) Considere $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\lambda(0) = (x, y, z)$, $\lambda'(0) = v(v_1, v_2, v_3)$ e $G(x, y, z) = (g(x + y), h(y + z))$. Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}F(x,y,z) = {} & (F \circ \lambda)'(0) = (f \circ G \circ \lambda)'(0)\\ = {} & Df(G(\lambda(0))) \cdot DG(\lambda(0)) \cdot [v_1, v_2, v_3]^T\\ = {} & \left[\frac{\partial}{\partial x} f(g(x + y), h(y + z)) \frac{\partial}{\partial y} f(g(x + y), h(y + z))\right] \cdot (A),\end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} g'(x+y) & g'(x+y) & g'(x+y).0 \\ h'(y+z).0 & h'(y+z) & h'(y+z) \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3)^T.$$

(iii) Seja $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\lambda(0) = (x, y, z)$; $\lambda'(0) = v(v_1, v_2, v_3)$ e $G(x, y, z) = (xg(x), h(xy))$. Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}F(x,y,z) = {} & (F \circ \lambda)'(0) = (f \circ G \circ \lambda)'(0)\\ = {} & Df(G(\lambda(0)))DG(\lambda(0)).[v_1, v_2, v_3]^T\\ = {} & \left[\frac{\partial}{\partial x} f(xg(x), h(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(xg(x), h(xy))\right] \cdot (A),\end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} g(x) + g'(x) & 0 & 0 \\ h'(xy)y & xh'(xy) & 0 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3)^T.$$

Exercício 2 - 26/04

Mostre que $\{d\pi_1, \ldots, d\pi_n\}$ é base de $\mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\}$ em que $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \pi_i(x_1 \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$.

Solução. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

$[(i)]$ Dado $a \in \mathbb{R}^n$, temos que $a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Assim, se $T \in \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\}$ então

$$\begin{aligned} T{\cdot}a = &\ \alpha_1 Te_1 + \cdots + \alpha_n Te_n \\ = &\ d\pi_1{\cdot}a\, Te_1 + \cdots + d\pi_n{\cdot}a\, Te_n \\ = &\ \beta_1 d\pi_1{\cdot}a + \cdots + \beta_n d\pi_n{\cdot}a \\ = &\ (\beta_1 d\pi_1 + \cdots + \beta_n d\pi_n) \cdot a \quad \big(\text{onde } \beta_i = Te_i, i = 1, \ldots, n\big) \\ \Rightarrow &\ T = \beta_1 d\pi_1 + \cdots + \beta_n d\pi_n,\ \text{onde } \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$[(ii)]$ Suponha que existam $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que $b_1 d\pi_1 + \cdots + b_n d\pi_n = 0$, onde 0 é a transformação nula. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos que $b_1 d\pi_1(x) + \cdots + b_n d\pi_n(x) = 0$.

Aplicando sucessivamente os vetores da base canônica a ambos os membros da igualdade anterior, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} &\big(b_1 d\pi_1(x) + \cdots + b_i d\pi_i(x) + \cdots + b_n d\pi_n(x)\big)(e_i) = 0(e_i),\ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \Rightarrow\ & b_1 d\pi_1(x) \cdot e_i + \cdots + b_i d\pi_i(x) \cdot e_i + \cdots + b_n d\pi_n(x) \cdot e_i = 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \Rightarrow\ & b_1 \pi_1(e_i) + \cdots + b_i \pi_i(e_i) + \cdots + b_n \pi_n(e_i) = 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \Rightarrow\ & b_1 \cdot 0 + \cdots + b_i \cdot 1 + \cdots + b_n \cdot 0 = 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \Rightarrow\ & b_i = 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Portanto, de (i) e (ii), temos que $\{d\pi_1, \ldots, d\pi_n\}$ é base de $\mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\}$.

Exercício 3 - 26/04

Mostre que $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz + yz)$ é diferenciável e calcule $f'(x, y, z)$.

Solução. f é diferenciável pois suas funções coordenadas são polinômios, e portanto são C^∞. Além disso,

$$[f'(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & z & x + y \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Teoremas do Valor Médio

Teorema 4 (Derivação termo a termo) - 03/05

Suponha $f_k : U \subset \mathbb{R}^m \overset{\text{dif.}}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$, U aberto e conexo, com $\{f_k(c)\} \subset \mathbb{R}^n$ convergente para algum $c \in U$ e $f_k' : U \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} g \in \mathcal{L}\{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\}$. Então $f_k' : U \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} f$ para alguma $f : U \overset{\text{dif.}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ tal que $f' = g$. Isto é, $\lim f_k' = (\lim f_k)'$. **Demonstração.** Primeiramente, vamos provar o seguinte lema:

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto conexo e limitado. Se a sequência de aplicações diferenciáveis $f_k : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ converge num ponto $c \in U$ e a sequência das derivadas $f_k' : U \longrightarrow \mathcal{L}\{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\}$ converge uniformemente em U para uma aplicação $g : U \longrightarrow \mathcal{L}\{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\}$, então (f_k) converge uniformemente em U para uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, a qual é diferenciável, com $f' = g$.

Da convergência uniforme de f_k' temos que dado $\varepsilon > 0, \exists\, K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j, k > k_0, |f_j'(x) - g(x)| < \varepsilon/2 \text{ e } |f_k(x) - g(x)| < \varepsilon/2, \forall\, x \in U.$$

Daí,

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leq |f_j(x) - g(x)| + |f_k(x) - g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad (1)$$

Como U é conexo, aplicando o corolário da Desigualdade do Valor Médio à função $f_j - f_k$ temos que para quaisquer $x, y \in U$,

$$|f_j(y) - f_k(y) - [f_j(x) - f_k(x)]| \leq \varepsilon|x - y|, \forall\, x, y \in U. \quad (2)$$

Em particular, para $x = c$, temos

$$\begin{aligned} j, k > k_0 \Rightarrow \quad & |f_j(y) - f_k(y)| - |f_j(c) - f_k(c)| \leq |f_j(y) - f_k(y)| - |f_j(c) - f_k(c)| \leq \varepsilon|y - c| \\ \Rightarrow \quad & |f_j(y) - f_k(y)| \leq |f_j(c) - f_k(c)| + \varepsilon|y - c|. \end{aligned}$$

Usando o critério de Cauchy, o fato de U ser limitado e a convergência de $\left(f_k'(c)\right)$, concluímos que (f_k) converge uniformemente para uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Mostraremos agora que f é diferenciável em todo ponto $x \in U$, com $f'(x) = g(x)$. Fazendo $j \to \infty$ em (2) e $y = x + v$ temos:

$$k > k_0 \Rightarrow |f(x + v) - f(x) - (f_k(x + v) - f_k(x))| \leq \varepsilon|v|. \quad (3)$$

Se f_k é diferenciável no ponto x, então

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, \delta_k(x) > 0 \text{ tal que } |v| < \delta_k(x) \Rightarrow |f_k(x + v) - f_k(x) - f_k'(x) \cdot v| < \varepsilon|v|. \quad (4)$$

$$|g(x) - f_k'(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\, x \in U. \quad (5)$$

Vamos mostrar que $f'(x) = g(x)$.

Dado $\varepsilon > 0$ tome k_0 como em (1). Para algum inteiro $k > k_0$ considere $\delta = \delta_k(x)$. Então $|v| < \delta \Rightarrow |f(x+v) - f(x) - g(x) \cdot v| =$
$= |f(x+v) - f(x) - \big(f_k(x+v) - f_k(x)\big) + \big(f_k(x+v) - f_k(x)\big) - f_k'(x) \cdot v + f_k'(x) \cdot v - g(x) \cdot v|$
$\leq |f(x+v) - f(x) - f_k(x+v) - f_k(x)| + |f_k(x+v) - f_k(x) - f_k'(x) \cdot v| + |f_k'(x) \cdot v - g(x) \cdot v|$
$\leq 3\varepsilon|v|$,
em que na última desigualdade utilizamos os resultados obtidos em $(3), (4)$ e (5).
Portanto f é diferenciável e $f' = g$.

Voltemos a demonstração do Teorema.

Podemos escrever $U = \bigcup B_\alpha$, onde B_α é uma bola aberta na qual as derivadas f_k' convergem uniformemente. Pelo Lema, se (f_k) converge em algum ponto de B_α então (f_k) converge uniformemente em B_α. Tem-se assim uma cisão $U = A \cup B$, onde A é a reunião das bolas B_α nas quais (f_k) converge uniformemente e B é a reunião das demais bolas, nas quais não há convergência em ponto algum. Como U é conexo e A não é vazio (pois se $c \in B_\alpha$ então $B_\alpha \subset A$), segue-se que $A = U$, logo (f_k) converge de modo localmente uniforme em U para uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Pelo Lema, tem-se $f' = g$. ∎

Corolário 4 - 03/05

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $c \in U$. Se a aplicação contínua $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, f contínua, diferenciável em $U - \{c\}$ e existe $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = T \in \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}$, então f é diferenciável no ponto c, com $f'(c) = T$.

Demonstração. Em virtude da definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |v| < \delta \Rightarrow |f'(c + tv) - T| < \varepsilon$$

seja qual for $t \in (0,1)$. Podemos supor δ tão pequeno que $|v| < \delta \Rightarrow [c, c+v] \subset U$. (Basta tomar $\delta =$ raio de uma bola de centro c, contida em U.) Então, pelo Corolário 3 abaixo, pondo $r(v) = f(c+v) - f(c) - T \cdot v$, temos $|r(v)| \leq \varepsilon|v|$ sempre que $0 < |v| < \delta$. Isto mostra que f é diferenciável no ponto c, com $f'(c) = T$.

Observação (Corolário 3): Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $[a, a+v] \subset U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em cada ponto do intervalo aberto $(a, a+v)$, com $f|_{[a,a+v]}$ contínua. Seja ainda $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Se $|f'(x) - T| \leq M$ para todo $x \in (a, a+v)$ então

$$|f(a+v) - f(a) - T \cdot v| \leq M \cdot |v|.$$

■

Exercício 1 - 03/05

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}, U$ aberto e conexo em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, para todo $a \in U$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n$, então f é constante.

Solução. Fixemos $a \in U$. Seja x um ponto qualquer de U. Como U é aberto e conexo, temos que existe um caminho poligonal contido em U com vértices $a = a_0 = a_1 = \cdots = a_k = x$. Pelo Teorema do Valor Médio pra funções de uma variável real temos que existe $\theta_i \in (0, 1)$ tal que $f(a_i) - f(a_{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial v_i}(a_{i-1} + \theta_i(a_i - a_{i-1})) = 0$, onde $v_i = a_i - a_{i-1}$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Logo, temos $f(a) = f(a_1) = \cdots = f(a_k) = f(x)$. Portanto, $f(x) = f(a)$, para todo $x \in U$, ou seja, f é constante.

Exercício 2 - 03/05

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se,} \quad x = 0 \end{cases}$$

com $a \in (0, 1)$. Mostre que f é diferenciável em $x = 0$, $f'(0) = a$, mas f não é injetiva em vizinhança alguma do zero.

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{ax + x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[a + x\, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right] = a.$$

Portanto f é diferenciável em 0 e $f'(0) = a$.
Nos pontos diferentes de 0 temos que $f'(x) = a + 2x\, sen\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, daí em qualquer vizinhança de zero $f'(x)$ muda de sinal, desse modo f não pode ser injetiva.

Exercício 3 - 03/05

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $f'(x_0) \in \mathcal{L}\{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m\}$ é injetiva, então existem $\delta, c > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|,\ \forall\, x, y \in B_\delta(x_0)$.

Solução. Como $f'(x_0)$ é injetiva $\Longrightarrow \exists\, c > 0$ tal que $|f'(x_0)(h)| \geq 2c|h|\ \forall h \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$.
Para todo $x \in U$, defina

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x - x_0) \qquad (2)$$

Então, para $x, y \in U$ temos $f(x) - f(y) = f'(x_0)(x - y) + \varphi(x) - \varphi(y)$

$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| \geq |f'(x_0)(x - y)| - |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq 2c|x - y| - |\varphi(x) - \varphi(y)|$ (por (1))

no outro lado do (2) temos que φ é de classe C^1 (pois f é de classe C^1 e $f'(x_0) \in \mathcal{L}\{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m\}) \Longrightarrow$ φ' é contínua, logo dado $\varepsilon = c$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi'(x) - \varphi'(x_0)| < c$, no entanto $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ então $\varphi'(x_0) = 0$.

Então temos $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi'(x)| < c$.

Aplicando o corolário 2 (03/05) à φ no conjunto convexo $B(x; \delta)$ temos que φ é Lipschitziana, i.e., $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c|x - y|$. Consequentemente,

$$x, y \in B_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq 2c|x - y| - c|x - y| = c|x - y|.$$

Exercício 4 - 03/05

Suponha f_k contínua em $x = a \in U \subset \mathbb{R}^n$ e $f_k \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} f$ para algum $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Então f é contínua em $x = a$.

Solução. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall\ x \in U$. Fixando um índice $k > k_0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$, $x \in U \Rightarrow |f_k(x) - f_k(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, pela continuidade de f_k no ponto a. Dessa maneira, $x \in U$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Portanto, f é contínua no ponto a.

3.2.3 Derivadas superiores; Teorema de Schwarz

Exercício 1 - 04/05

Mostre que $\mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}\} \cong L_2\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\} = \{B : \mathbb{R}^n \times R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m |$ B é bilinear$\}$.

Solução.

Defina $\varphi : L_2\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\} \longrightarrow \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}\}$, onde $\varphi(B) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}$, $\varphi(B)v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\varphi(B)vu := B(v, u)$ pois φ é isomorfismo. De fato: suponha que $B \in$ Kerφ, então $\varphi(B) = 0$ (aplicação nula). Logo $\varphi(B)vu = 0vu = 0 \Rightarrow B(v, u) = 0$, $\forall\ v, u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow B = 0$, portanto φ é injetora. Agora, pelo teorema da dimensão temos que: Nulidade(φ) + posto(φ) $=$ $\dim \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}\}$, como nulidade$(\varphi) = 0$, então posto$(\varphi) = \dim \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\}\}$, então φ é sobrejetora. Alem disso, temos que:

$$\varphi(\alpha B + B')vu = (\alpha B + B')(v, u) = \alpha B(v, u) + B'(v, u) = \alpha\varphi(B)vu + \varphi(B')vu.$$

Logo φ é linear. Portanto φ é um isomorfismo.

Exercício 2 - 04/05

Mostre que $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_k(x) = \begin{cases} x^k & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$ tal que $f_k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ e$f_k \notin C^k(\mathbb{R})$.

Solução. Para $x > 0$, tem-se $f_k' = kx^{k-1}$.
Para $x < 0$, tem-se $f_k' = 0$.
Para $x = 0$ tem-se $f_k'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^k}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{k-1} = 0$.
De um modo geral tem-se

$$f_k^{(j)} = \begin{cases} k\cdots(k-j+1)x^{k-j} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$$

para $0 \leq j \leq k-1$ e todas $f_k^{(j)}$ são contínuas, pois $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{k-j} = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} 0$.
Mas quando $j = k-1$, temos

$$f_k^{(k-1)} = \begin{cases} k!x & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$$

$(f^{(k-1)}(x))' = 1$ se $x > 0$ e $(f^{(k-1)}(x) = 0$ se $x < 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{k!x}{x} = k! \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0-0}{x} = 0.$$

Logo não existe $f'(0)$. Portanto ela não é de classe $C^k(\mathbb{R})$.

Lema 2 (Regra de Leibniz) - 08/05 (Seminário)

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a i-ésima derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ existe para todo ponto $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua. Então a função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$, possui a i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt$.

Demonstração. Para todo s suficientemente pequeno, o segmento de reta $[x, x+se_i]$ está contido em U. Daí

$$\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt = \int_a^b \left[\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe $\theta = \theta_t \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i, t) = \frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s},$$

assim

$$\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt = \int_a^b \left[\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $[a,b]$ é compacto, então dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $\delta > 0$ tal que $|s| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, seja qual for $t \in [a,b]$. Isto completa a demonstração.

■

Teorema 2 - 08/05

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existem $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e são contínuas. Então a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existe em todos os pontos de U e vale $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $U = I \times J$ é um retângulo em $\mathbb{R}^2$.

Tomando um ponto $b \in J$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos permite escrever, para todo ponto $(x,y) \in U$:

$$f(x,y) = f(x,b) + \int_b^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt.$$

A continuidade de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, admitida por hipótese, faz com que a regra de Leibniz seja aplicável. Derivando respeito a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,b) + \int_b^y \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,t)dt.$$

Derivando em seguida relativamente a y, obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$

pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,b)$ não depende de y e o integrando na segunda parcela é contínuo.

■

Exercício 1 - 08/05 (Seminário)

Seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n$, é contínua, e seja $g : U \longrightarrow [a,b]$ uma função de classe $C^1(U)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Mostre:

(i) $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f(x,t)dt$ é de classe $C^1(U)$.

(ii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\int_a^{g(x)} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x) \cdot f\big(x, g(x)\big), \ \forall\, x \in U.$

Solução. Seja $\xi : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $\xi(x,u) = \displaystyle\int_a^u f(x,t)dt$. Como a função $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua, segue que $\dfrac{\partial \xi}{\partial u}(x,u) = f(x,u), \ \forall\ (x,u) \in U \times [a,b]$. Além disso, pela Regra de Leibniz, $\dfrac{\partial \xi}{\partial x_i}(x,u) = \displaystyle\int_a^u \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt$.
Dessa maneira, ξ é de classe $C^1(U)$, portanto é diferenciável. Como g é também de classe $C^1(U)$ (por hipótese), temos, pela Regra da Cadeia, que a função composta $\varphi(x) = \xi\big(x, g(x)\big)$ é diferenciável e, para todo $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\big(x, g(x)\big) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u}\big(x, g(x)\big) = \int_a^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \cdot f\big(x, g(x)\big),$$

o que prova (ii).
Portanto, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ é contínua para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja, φ é de classe $C^1(U)$, provando (i).

3.2.4 Fórmulas de Taylor; máximos e mínimos

Lema 2 - 10/05 (Seminário)

Seja $T : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \longrightarrow \mathbb{R}$, k-linear. Sejam $v = (v_1, \dots, v_k)$ e $w = (w_1, \dots, w_k)$ pertencentes a $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}$. Então

$$\begin{aligned} T'(v_1, \dots, v_k)(w_1, \dots, w_k) = &\ T(w_1, v_2, \dots, v_k) + T(v_1, w_2, v_3, \dots, v_k) + \cdots + T(v_1, \dots, v_{k-1}, w_k) \\ = &\ \sum_{i=1}^{k} T(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Demonstração. Temos que

$$T(v_1 + w_1, \dots, v_k + w_k) = T(v_1, \dots, v_k) + \sum_{i=1}^{k} T(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k) +$$

$$+ \sum_{i \neq j, i=1}^{k} T(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, w_j, v_{j+1}, \dots, v_k) + \cdots + T(w_1, \dots, w_k).$$

Pondo $c = \max\{|T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})|; 1 \leq i_1 \leq m_1, 1 \leq i_2 \leq m_2, \dots, 1 \leq i_k \leq m_k\}$, então

$$\frac{\left| T(v_1 + w_1, \dots, v_k + w_k) - T(v_1, \dots, v_k) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k) \right|}{|(w_1, \dots, w_k)|_S} =$$

$$= \frac{\left| \displaystyle\sum_{i\neq j, i=1}^{k} T(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, w_j, v_{j+1}, \ldots, v_k) + \cdots + T(w_1, \ldots, w_k) \right|}{|(w_1, \ldots, w_k)|_S} \leq$$

$$\leq \frac{c}{|(w_1, \ldots, w_k)|_S} \left[\sum_{i\neq j, i=1}^{k} \Big(\big(|v_1|, \ldots, |v_{i-1}|, |w_1|, |v_{i+1}|, \ldots, |v_{j-1}|, |w_j|, |v_{j+1}|, \ldots, |v_k|\big) + \right.$$

$$\left. + \cdots + \big(|w_1|, \ldots, |w_k|\big) \Big) \right].$$

Portanto,

$$\lim_{(w_1,\ldots,w_k)\to(0,\ldots,0)} \frac{T(v_1 + w_1, \ldots, v_k + w_k) - T(v_1, \ldots, v_k) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)}{|(w_1, \ldots, w_k)|_S} = 0.$$

Logo T é diferenciável e $T'(v_1, \ldots, v_k)(w_1, \ldots, w_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)$.

■

Exercício 2 - 11/05

Seja $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivada de ordem $n + 1$ integrável em $[0, 1]$. Então

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^n(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.\varphi^{n+1}(t)dt.$$

Solução. Tomemos $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = \varphi'(t)$ de modo que $f'(t) = -1$ e

$$\int_0^1 \varphi'(t)dt = -\int_0^1 f'(t).g(t)dt.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes obtemos

$$\int_0^1 \varphi'(t)dt = f(t)g(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(t)g'(t)dt = \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt.$$

Se φ possui derivada segunda integrável no intervalo $[0, 1]$ então

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt.$$

Suponhamos agora que φ possua derivada terceira integrável em $[0, 1]$ e tentemos a sorte outra vez na integração por partes. Escrevamos agora $f(t) = \dfrac{(1-t)^2}{2}$ e $g(t) = \varphi''(t)$, então $f(t) = -(1-t)$ e $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt = -\int_0^1 f'(t)g(t)dt$. A fórmula de integração por partes nos dá:

$$\int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt = f(t)g(t)\Big|_1^0 + \int_0^1 f(t)g'(t) = \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt$$

portanto podemos escrever

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{n!}\varphi''(t)dt$$

continuando o proceso tem-se o resultado desejado.

Proposição 2 - 17/05 (Seminário)

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U aberto e f diferenciável. Se $a \in U$ é ponto extremo de f, então $\nabla f(a) = 0$. **Demonstração.** Defina, para cada $i = 1, \ldots, n,\ \ \varphi_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\varphi(t) = f(a + te_i)$ e $a + te_i \in U,\ \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sendo a um ponto de máximo local de f, temos que $t = 0$ é um máximo local de φ_i, onde φ_i é uma função diferenciável. Daí, por um resultado de análise real, temos que $0 = \varphi_i'(0) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$. Como isso se verifica pra todo $i = 1, \ldots, n$, resulta que $\nabla f(a) = 0$.

■

Exercício 1 - 18/05 (Seminário)

Determine a natureza dos extremos da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}xy + \dfrac{y^2}{2}$.

Solução. Como $f \in C^\infty \Longrightarrow P_{ND} = \emptyset$, logo os candidatos são apenas $P_C(f)$, ou seja, $f_x(x, y) = x + \dfrac{3}{2}y = 0$, $f_y(x, y) = \dfrac{3}{2}x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0$, logo $P_C(f) = \{(0, 0)\}$
$\Longrightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
Assim,

$$f''(0, 0)h^2 = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1^2 + 3h_1h_2 + h_2^2 = (h_1 + \frac{3}{2}h_2)^2 - \frac{5}{4}h_2^2.$$

Isto mostra que $f''(0, 0)$ é indefinida, pois assume valores positivos quando $h_2 = 0$ e valores negativos, quando $h_1 = -\frac{3}{2}h_2$.

3.2.5 Funções convexas

Teorema 2 - 22/05

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. A fim de que a função $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ seja convexa, é necessario é suficiente que, para quaisquer $a, b \in C$, a função $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = f(a + tv), v = b - a$, seja convexa.

Equivalentemente, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se , e somente se, sua restrição a qualquer segmento de reta $[a, b] \subset C$ é convexa.

Demonstração. Seja f convexa. Então, para $s, t, \alpha \in [0, 1]$ temos:

$$\begin{aligned}
\varphi((1-\alpha)s + \alpha t) &= f(a + [(1-\alpha)s + \alpha t]v) \\
&= f(a + (1-\alpha)sv + \alpha tv) \\
&= f(a - a\alpha + (1-\alpha)sv + a\alpha + \alpha tv) \\
&= f((1-\alpha)a + (1-\alpha)sv + \alpha(a + tv)) \\
&= f((1-\alpha)(a + sv) + \alpha(a + tv)) \\
&\leq (1-\alpha)f(a + sv) + \alpha f(a + tv) \\
&= (1-\alpha)\varphi(s) + \alpha\varphi(t),
\end{aligned}$$

logo φ é convexa .

Reciprocamente, se todas as funções φ, definidas do modo acima, são convexas então, dados $x, y \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, pomos $\varphi(t) = f\big(x + t(y - x)\big)$.

$$\begin{aligned}
f((1-\alpha)x + \alpha y) &= f(x - \alpha x + \alpha y) \\
&= f(x + \alpha(y - x)) \\
&= \varphi(\alpha) \\
&= \varphi((1-\alpha)0 + \alpha 1) \\
&\leq (1-\alpha)\varphi(0) + \alpha\varphi(1) \\
&= (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y),
\end{aligned}$$

portanto f é convexa. ∎

Exercício 1 - 22/05 (Seminário)

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, I$ intervalo aberto. Mostre que:

(i) Se f é derivável em I, então f é convexa $\Longleftrightarrow f(t) \geq f(a) + f'(a)(t - a),\ \forall\, t, a \in I.$

(ii) Se $f \in C^2(I)$, então f é convexa $\Longleftrightarrow\ f''(t)\ \geq 0,\ \forall\, t, a \in I.$

Solução. Dizer que f é convexa, significa dizer que

$$a < x < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x},$$

onde $a, b, x \in I$.

(i) $(\Rightarrow)$

Seja $a < b$. Tomando x, com $a < x < b$, temos que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x},$$

pois por hipótese f é convexa. Daí,

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \lim_{x\to a^+} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{x\to b^-} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \lim_{x\to b^-} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(b).$$

Portanto, $\forall\, a < b$, tem-se que $f'(a) \leq f'(b)$, isto é, f' é uma função monótona não-decrescente. Disto segue que se $x > a$, então pelo Teorema do Valor Médio $\exists\, z \in (a, x)$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(z)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Da mesma forma ocorre de $x < a$.

$(\Leftarrow)$

Sejam $a < c < b$ em I. Escrevamos $\alpha(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ e chamemos $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \alpha(x)\}$ o semi-plano superior determinado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Claramente H é um conjunto convexo, isto é, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de H está contido em H. Daí temos que $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencem a H, (por hipótese todo ponto do gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes), portanto o segmento de reta que une $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ está contido em H. Em particular, o ponto desse segmento que tem abcissa c pertence a H, isto é, tem ordenada $\geq \alpha(c) = f(c)$. Isto significa que $f(c) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(c-a)$. Como $a < c < b$ são quaisquer em I, então a função f é convexa.

(ii) $(\Leftarrow)$

Se $f''(x) \geq 0, \forall\, x \in I$, então pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos que quaisquer que sejam a e $a+h \in I$, existe c entre a e $a+h$ com

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(c)h^2.$$

Como $f''(c) \geq 0$, então $f(a+h) \geq f(a) + f'(a)h$, daí pelo item (i), segue que f é convexa.

$(\Rightarrow)$

Suponha que f seja convexa. Então, dados $a < b$ em I e tomando x com $a < x < b$, temos que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \quad \Rightarrow \quad f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

Logo f' é não-decrescente em I. Segue-se que $f''(x) \geq 0,\ \forall\, x\ \in I$.

Exercício 2 - 22/05 (Seminário)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo. Toda função convexa $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Solução. A solução deste exercício se baseia nos dois lemas abaixo. Lema 1. Todo ponto de um bloco retangular $B = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ é uma combinação convexa dos vértices desses blocos.
Lema 2. Toda função convexa $f : U \to \mathbb{R}$, definida num aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$, é localmente majorada por uma constante.

Para simplificar a notação, a fim de provar a continuidade de f no ponto arbitrário $a \in U$, podemos admitir que $a = 0$ e que $f(0) = 0$, pois o conjunto $U_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; a - x \in U\}$ é convexo, aberto, contém 0 e a função $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(a - x) - f(a)$, cumpre $g(0) = 0$, é convexa e é contínua no ponto 0 se, e somente se, f é contínua no ponto a. Pelo Lema 2, existem $c > 0$ e $M > 0$ tais que $|x| \leq c \Rightarrow f(x) \leq M$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\varepsilon < M$. A convexidade de f nos permite afirmar que

$$f\left(\frac{\varepsilon}{M}x\right) = f\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{M}\right)\cdot 0 + \frac{\varepsilon}{M}x\right) \leq \frac{\varepsilon}{M}\cdot f(x),$$

logo

$$f(x) \leq \frac{\varepsilon}{M}\cdot f\left(\frac{\varepsilon}{M}x\right).$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon c}{M}$, vemos que

$$|x| < \frac{\varepsilon c}{M} \Rightarrow |\frac{M}{\varepsilon}x| < c \Rightarrow f\left(\frac{M}{\varepsilon}x\right) \leq M \Rightarrow f(x) \leq \varepsilon.$$

Além disso,

$$0 = f(0) = f\left(\frac{M}{M+\varepsilon}x + \frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}\left(\frac{-M}{\varepsilon}x\right)\right) \leq \frac{M}{M+\varepsilon}f(x) + \frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}f\left(\frac{-M}{\varepsilon}x\right).$$

Simplificando, vem $M \cdot f(x) + \varepsilon \cdot f(-Mx/\varepsilon) \geq 0$, donde:

$$f(x) \geq \frac{\varepsilon}{M}\cdot(-f(-Mx/\varepsilon)) \geq \frac{\varepsilon}{M}\cdot(-M) = -\varepsilon.$$

Em resumo, $|x| < c\varepsilon/M \Rightarrow -\varepsilon \leq f(x) \leq \varepsilon$, logo f é contínua no ponto 0.

Exercício 3 - 22/05 (Seminário)

Considere $f(x,y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y$. Mostre que f tem um único ponto de mínimo local que não é mínimo global.

Solução. $f(x,y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y$, f é de classe C^∞, logo os pontos críticos de f são $\{x \in \mathbb{R}^2; f'(x) = 0\}$. Temos que

$$f_x = 3x^2 - 3e^y$$
$$f_y = 3e^{3y} - 3xe^y$$

Daí

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3e^y = 0 &\Rightarrow e^y = x^2 \\ 3e^{3y} - 3xe^y = 0 &\Rightarrow 3(e^y)^3 - 3xe^y = 0 \\ &\Rightarrow 3(x^2)^3 - 3x \cdot x^2 = 0 \\ &\Rightarrow 3x^6 - 3x^3 = 0 \Rightarrow 3x^3(x^3 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Para $x = 0$ não existe $e^y = 0$.

Para $x = 1 \Rightarrow e^y = 1 \Rightarrow y = 0$. Logo o único ponto crítico de f é $(1,0)$.

$f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3e^y = f_{yx}$, $f_{yy} = 9e^{3y} - 3xe^y$

$$\begin{aligned} Hf(1,0) &= \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6u - 3v \\ -3u + 6v \end{bmatrix} \\ &= 6u^2 - 3uv - 3uv + 6v^2 \\ &= 6u^2 - 6uv + 6v^2. \end{aligned}$$

Portanto $Hf(1,0) = 6(u^2 - uv + v^2)$.

Mostremos que para $(u,v) \neq (0,0)$ tem-se $u^2 - uv + v^2 > 0$. De fato pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica temos

$$u^2 + v^2 \geq 2\sqrt{u^2v^2} = 2|u| \cdot |v| > |u| \cdot |v| \geq u \cdot v.$$

Daí

$$u^2 + v^2 > u \cdot v \Rightarrow u^2 - uv + v^2 > 0$$

para $(u, v) \neq (0, 0)$. Logo, a forma hessiana é positiva, portanto $(1, 0)$ é ponto de mínimo local. Mas $(1, 0)$ não é ponto de mínimo global, pois

$$f(-3, 0) = -27 + 1 + 9 = -17 < -1 = f(1, 0).$$

3.2.6 Teorema da Função Inversa; Teorema da Função Implícita

Proposição 1' - 29/05

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, I intervalo aberto e $f^{'}(x) \neq 0, \ \forall \ x \in I$. Então f é um difeomorfismo global. **Demonstração.** Se $f'(x) \neq 0, \ \forall \ x \in I$, então pelo Teorema de Darboux temos que $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0, \ \forall \ x \in I$. Se $f'(x) > 0, \ \forall \ x \in I$, então, por um resultado de Análise I, f será um homeomorfismo global crescente. Da mesma forma se $f'(x) < 0, \ \forall \ x \in I$, então f será um homeomorfismo global decrescente. Em qualquer caso seja $g = f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ e b um ponto arbitrátrio de $f(I)$.
Como g é contínua em b temos $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b) = a$, disto resulta que

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - a}{f\big(g(y)\big) - f\big(g(b)\big)} = \lim_{y \to b} \left[\frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} \right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Portanto $g'(b)$ existe e é igual a $\dfrac{1}{f'(a)}$, sempre que $f'(a) \neq 0$. Como b foi tomado arbitrariamente, segue que g é diferenciável em todos os pontos de $f(I)$, desse modo f é um difeomorfismo global.

■

Exercício 1 - 29/05 (Seminário)

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ difeomorfismo local. Mostre que f é uma aplicação aberta.

Solução. Como f é um difeomorfismo local, para todo $x \in U$, existem abertos V_x e W_x tais que $f|_{V_x}$ é um difeomorfismo, em particular, é um homeomorfismo. Se consideramos $V \subset V_x$, para algum $x \in U$, tem-se que $f(V)$ é aberta pois, $f|_{V_x}$ é contínua.
No caso geral, temos que $V = \bigcup\limits_{x \in U} \big(V_x \cap V\big)$ e assim $f(V) = \bigcup\limits_{x \in U} f\big(V_x \cap V\big)$. Como cada $V_x \cap V$ é um aberto contido em V_x, sua imagem é aberta, logo $f(V)$ é uma reunião de conjuntos abertos, portanto aberta.

Exercício 2 - 29/05 (Seminário)

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(I) \subset \mathbb{R}$, onde I é aberto em $\mathbb{R}$. Mostre que f é um difeomorfismo local se e só se f é um difeomorfismo global.

Solução.

($\Rightarrow$) Se f é um difeomorfismo local então $f'(x) \neq 0,\ \forall\ x \in I$. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário para a derivada, temos que $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0,\ \forall\ x \in I$. (De fato, se existisse algum intervalo $[a, b]$ em que $f'(a) < 0 < f'(b)$ então existiria $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$, pelo TVI aplicado à derivada.)

Daí, ou f é um homeomorfismo crescente ou f é um homeomorfismo decrescente. Em qualquer caso, $(f^{-1})' = \big(f'(x)\big)^{-1}$ e assim $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ é diferenciável.

($\Leftarrow$) Difeomorfismo global $\Rightarrow$ difeomorfismo local (trivialmente).

Exercício 3 - 29/05

Seja $f : U \longrightarrow V$, U e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, um homeomorfismo diferenciável. Suponha que $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, onde $x_0 \in U$. Mostre que $f^{-1} : V \longrightarrow U$ é diferenciável em $f(x_0)$ e vale $(f^{-1}(f(x_0)))' = (f'(x_0))^{-1}$.

Solução. Escrevamos $g = f^{-1}$ e $b = f(x_0)$. Como o único candidato possível para derivada de g no ponto b é $f'(x_0)^{-1}$, escrevamos $g(b + w) - g(b) = f'(x_0)^{-1}w + s(w)$ e procuremos mostrar que $\lim\limits_{w\to 0} \dfrac{s(w)}{|w|} = 0$. Ponhamos $v = g(b + w) - g(b)$. Então

$$f(x_0 + v) - f(x_0) = f[g(b) + g(b + w) - g(b)] - b = f(g(b + w)) - b = b + w - b = w.$$

Como f e g são contínuas, então $w \to 0 \ \Leftrightarrow\ v \to 0$. A diferenciabilidade de f em x_0 fornece $f(x_0 + v) = f(x_0) + f'(x_0)v + r(v)$, onde $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$. Daí, como

$$v = g(b + w) - g(b) \text{ e } w = f(x_0 + v) - f(x_0) = f'(x_0)v + r(v),$$

então

$$\begin{aligned} g(b + w) - g(b) = f'(x_0)^{-1}w + s(w) \quad &\Rightarrow \quad v = f'(x_0)^{-1}[f'(x_0)v + r(v)] + s(w) \\ &\Rightarrow \quad v = v + f'(x_0)^{-1}.r(v) + s(w), \end{aligned}$$

donde

$$s(w) = -f'(x_0)^{-1} \cdot r(v) \text{ e } \frac{s(w)}{|w|} = -f'(x_0)^{-1} \cdot \frac{r(v)}{|v|} \cdot \frac{|v|}{|w|}.$$

Quando $w \to 0$, vimos que $v \to 0$, logo $\lim\limits_{w\to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$.

Agora nos resta provar que $\dfrac{|v|}{|w|}$ é limitado.

Ora, $f'(x_0)$ isomorfismo, então vimos que existe $c > 0$, tal que $|f'(x_0)v| \geq c|v|,\ \forall\ v \in \mathbb{R}^n$.

Como $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|}=0$, então se tomarmos $\varepsilon=c/2$ temos que existirá $\delta>0$ tal que $0<|v|<\delta \Rightarrow |r(v)|<\varepsilon|v|$. Desse modo, $\forall\ 0<|v|<\delta$, temos

$$|f(x_0+v)-f(x_0)|=|f'(x_0)v+r(v)|=|v|\left|f'(x_0)\frac{v}{|v|}+\frac{r(v)}{|v|}\right|\geq|v|\left[\left|f'(x_0)\frac{v}{|v|}\right|-\left|\frac{r(v)}{|v|}\right|\right]\geq\frac{c}{2}|v|.$$

Portanto, $\forall\ 0<|v|<\delta$ temos $\dfrac{|v|}{|f(x_0+v)-f(x_0)}|\leq\dfrac{2}{c}$, o que implica que para v suficientemente próximo de zero $\dfrac{|v|}{|w|}=\dfrac{|v|}{|f(x_0+v)-f(x_0)}$ é limitado e da expressão $\dfrac{s(w)}{|w|}=-f'(x_0)^{-1}\cdot\dfrac{r(v)}{|v|}.\dfrac{|v|}{|w|}$, resulta que, quando $w\to 0$, $\dfrac{s(w)}{|w|}\to 0$, concluindo assim a prova.

Teorema 3 - 01/06

Seja c um valor regular da função $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$, de classe C^k no aberto $U\subset\mathbb{R}^{n+1}$, então $M=f^{-1}(c)$ é uma hiperfície de classe C^k, cujo espaço vetorial tangente T_pM é, em cada ponto $p\in M$, o complemento ortogonal de $\nabla f(p)$. **Demonstração.** O fato de que $f^{-1}(c)$ é uma hiperfície de classe C^k segue diretamente do Teorema da Função Implícita.

Seja agora v um vetor arbitrário de T_pM e $\lambda:(-\delta,\delta)\to f^{-1}(c)$ uma curva diferenciável com $\lambda(0)=p$ e $\lambda'(0)=v$, então $f(\lambda(t))=c \Rightarrow \nabla f(p)\lambda'(0)=0$, portanto todo vetor $v\in T_pM$ é ortogonal a $\nabla f(p)$, logo $T_pM\subset\nabla f(p)^{\perp}$. Sendo $dim\nabla f(p)^{\perp}=dimT_pM \Rightarrow T_pM=\nabla f(p)^{\perp}$.

■

Exercício 1 - 01/06

T_pM é um subespaço vetorial de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Solução. Seja $\xi:U\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de classe C^k no aberto $U\subset\mathbb{R}^n$, cujo gráfico, formado pelos pontos $(x,\xi(x))\in\mathbb{R}^{n+1}$, $x\in U$, é a interseção $M\cap V$, onde $V\subset\mathbb{R}^{n+1}$ é um aberto que contém $p=(p_0,\xi(p_0))$, $p_0\in U$. Para todo caminho $\lambda:(-\delta,\delta)\longrightarrow M$, com $\lambda(0)=p$, tem-se $\lambda(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t),\xi(t))$, onde $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$. Portanto

$$\lambda'(0)=\left(\frac{dx_1}{dt},\ldots,\frac{dx_n}{dt},\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}\right),$$

as derivadas $\dfrac{dx_i}{dt}$ sendo calculadas no ponto $t=0$ e $\dfrac{\partial\xi}{\partial x_i}$ no ponto p_0. Isto mostra que todo $v=\lambda'(0)$ em T_pM é uma combinação linear dos vetores

$$v_1=\left(1,0,\ldots,0,\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right),\ldots,v_n=\left(0,\ldots,0,1,\frac{\partial\xi}{\partial x_n}\right).$$

Reciprocamente, toda combinação linear $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ é o vetor-velocidade $\lambda'(0)$ do caminho $\lambda : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ assim definido: tomamos $v_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e colocamos $\lambda(t) = \big(p_0 + tv_0, \xi(p_0 + tv_0)\big)$, sendo $\delta > 0$ escolhido de modo que o segmento de reta $(p_0 - \delta v_0, p_0 + \delta v_0)$ esteja contido em U.

3.2.7 Multiplicadores de Lagrange

Exercício 1 - 05/06 (Seminário)

Mostre que $x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left(\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$, $x_i > 0$.

Solução. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto dos pontos cujas coordenadas são positivas. Consideremos as funções $f, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas, para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, como $f(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$ e $\varphi(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Fixando $s > 0$, procuremos os pontos críticos de $f|_M$ onde $M = \varphi^{-1}(s)$. Observemos que $\nabla\varphi(x) = (1, 1, \ldots, 1)$ para qualquer $x \in U$, de modo que M é uma hiperfície. Por sua vez, temos que $\nabla f(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $\alpha_i = \prod_{j \neq i} x_j$. Assim, $x \in M$ é ponto crítico de $f|_M$ se, e somente se, para algum λ, tem-se $\prod_{j \neq i} x_j = \lambda$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dividindo a i-ésima dessas equaçoes pela k-ésima, obtemos $\frac{x_k}{x_i} = 1$. Assim, o único ponto crítico de $f|_M$ e aquele que tem suas coordenadas iguais, ou seja, é $p = (\frac{s}{n}, \frac{s}{n}, \ldots, \frac{s}{n})$. Afirmamos que $f(p) = \left(\frac{s}{n}\right)^n$ é o maior valor de $f|_M$. Com efeito, a fórmula de f define uma função contínua no compacto $\bar{M}$, onde possui um ponto de máximo, o qual nao pode estar em $\bar{M} - M$ pois $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$ se $x \in \bar{M} - M$. Logo esse máximo está em M, portanto é um ponto crítico, mas p é o único ponto crítico de $f|_M$. Daí:

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

Exercício 2 - 05/06 (Seminário)

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $S_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $a \notin S_1(0)$. Determine $p \in S_1(0)$ tal que p é o mais próximo de a.

Solução. Queremos minimizar a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - a|^2 = \langle x - a, x - a \rangle$, restrita à esfera $S_1(0) = \varphi^{-1}(0)$, onde $\varphi(x) = \langle x, x \rangle$. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos:

$$\begin{cases} \nabla f(x) = & \lambda \nabla\varphi(x) \\ \langle x, x \rangle = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - a) = & 2\lambda x \\ \langle x, x \rangle = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i - a_i = & \lambda x_i \\ \langle x, x \rangle = & 1 \end{cases}, i = 1 \ldots, n.$$

Resolvendo este sistema, temos que $x_i - a_i = \lambda x_i \Leftrightarrow x_i(-\lambda + 1) = a_i \Leftrightarrow x_i = \dfrac{a_i}{1-\lambda}$.
Da 2ª equação,

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle = 1 \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{(1-\lambda)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|1-\lambda|^2}|a|^2 = 1 \Leftrightarrow |1-\lambda|^2 = |a|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - \lambda = \pm |a| \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda = 1 \pm |a|.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$x - a = \lambda x \Rightarrow |x-a| = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda|.$$

Daí, $|x-a|^2$ será mínimo quando $|\lambda|$ for mínimo, isto é, quando $\lambda = 1 - |a|$.
Assim, $x_i = \dfrac{a_i}{1-\lambda} = \dfrac{a_i}{1-(1-|a|)} = \dfrac{a_i}{|a|}$ e portanto $x = \dfrac{a}{|a|}$ é o ponto da esfera $S_1(0)$ cuja distância ao ponto a é mínima.

Exercício 3 - 05/06 (Seminário)

Dada $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \langle Ax, x\rangle$, onde $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é linear e auto - adjunta, isto é, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Mostre que $x_0 \in P_{c(f|_{S^{n-1}})} \Longleftrightarrow Ax_0 = \lambda x_0, \lambda = f(x_0)$.

Solução. $x_0 \in S^{n-1}$ é um ponto crítico de $f|_{S^{n-1}}$ se para todo caminho diferenciável $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S^{n-1}$, com $\lambda(0) = x_0$ tivermos $(f \circ \lambda)'(0) = 0$.

Isto significa que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0,\ \forall\, v \in T_{x_0}S^{n-1}$, ou seja, $x_0 \in S^{n-1}$ é um ponto crítico da restrição $f|_{S^{n-1}}$ se e somente se o vetor $\nabla f(x_0)$ é normal à S^{n-1} no ponto x_0.

Agora note que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é normal à S^{n-1} em x_0 se e somente se v é paralelo a x_0, portanto $x_0 \in P_c(f|_{S^{n-1}}) \Leftrightarrow \nabla f(x_0) = Kx_0$, onde

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_0) = \ & \big(Df(x_0)e_1, \ldots, Df(x_0)e_n\big) = (\langle Ae_1, x_0\rangle + \langle Ax_0, e_1\rangle, \ldots, \langle Ae_n, x_0\rangle + \langle Ax_0, e_n\rangle) \\
= \ & (\langle e_1, Ax_0\rangle + \langle Ax_0, e_1\rangle, \ldots, \langle e_n, Ax_0\rangle + \langle Ax_0, e_n\rangle) \\
= \ & (2\langle Ax_0, e_1\rangle, \ldots, 2\langle Ax_0, e_n\rangle).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
x_0 \in P_c(f|_{S^{n-1}}) \Leftrightarrow \ & 2(\langle Ax_0, e_1\rangle, \ldots, \langle Ax_0, e_n\rangle) = Kx_0 \\
\Leftrightarrow \ & \langle 2(\langle Ax_0, e_1\rangle, \ldots, \langle Ax_0, e_n\rangle), e_i\rangle = \langle Kx_0, e_i\rangle, \forall\, i = 1, \ldots, n \\
\Leftrightarrow \ & 2\langle Ax_0, e_i\rangle = \langle Kx_0, e_i\rangle, \forall\, i = 1, \ldots, n \\
\Leftrightarrow \ & \langle Ax_0 - Kx_0/2, e_i\rangle = 0, \forall\, i = 1, \ldots, n \\
\Leftrightarrow \ & Ax_0 = \tfrac{K}{2}x_0,
\end{aligned}$$

onde $\langle Ax_0, x_0 \rangle = \frac{K}{2} \langle x_0, x_0 \rangle$.

Como $x_0 \in S^{n-1}$, logo $\frac{K}{2} = \langle Ax_0, x_0 \rangle$.

Fazendo $\lambda = \frac{k}{2}$, temos que $x_0 \in P_c(f|_{S^{n-1}}) \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda x_0$, onde $\lambda = f(x_0)$.

Exercício 4 - 05/06 (Seminário)

Dada a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =< Ax, x >$ onde $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é auto-adjunta, isto é, $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$. Mostre que existe uma base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ tal que $Av_i = \lambda v_i$.

Solução. Seja a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, onde $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é auto-adjunta. Um ponto $u \in S^{n-1}$ é ponto crítico de $f|S^{n-1}$ se, e somente se, $Au = \lambda u$, onde $\lambda = f(u)$. Em particular, se λ_1 é o valor máximo de f no compacto S^{n-1}, alcançado no ponto $u_1 \in S^{n-1}$, temos que λ_1 é autovalor de A.

Considerando $E = \{x' \in \mathbb{R}^n; \langle x, u_1 \rangle = 0\}$ o complemento ortogonal de u_1 em $\mathbb{R}^n$. Se $x \in E \Rightarrow \langle Ax, u_1 \rangle = \langle x, Au_1 \rangle = \langle x, \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, u_1 \rangle = 0$. Logo, $x \in E \Rightarrow Ax \in E$. Dessa forma, obtemos uma transformação linear auto-adjunta $A : E \to E$. Como E é compacto, tomemos $f(u_2) = \lambda_2$ o valor máximo da forma quadrática f entre os vetores unitários pertencentes a E, isto é, perpendiculares a u_1.

Prosseguindo dessa forma, obtemos $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ autovalores de A que formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

3.3 - Integração

3.3.1 Integral de um caminho; caminhos retificáveis

Teorema 1 - 12/06 (Seminário)

Sejam $f, f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ integráveis. Então $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

Demonstração. Temos que f, f' são integráveis $\Longleftrightarrow$ f_i, f_i' são integráveis $\forall\ i = 1, \ldots, n$. Como f_i, $f_i'[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais temos $\displaystyle\int_a^b f_i'(t)dt = f_i(b) - f_i(a)\ \forall\ i = 1, \ldots, n$. Logo

$$\int_a^b f'(t)dt = \left(\int_a^b f_1'(t)dt, \ldots, \int_a^b f_n'(t)dt\right) = \big(f_1(b) - f_1(a), \ldots, f_n(b) - f_n(a)\big) = f(b) - f(a).$$

■

Exercício 1 - 12/06 (Seminário)

(i) $f = (f_1, \ldots, f_n)$ é integrável $\Leftrightarrow f_j$ é integrável, $\forall\, j = 1, \ldots, n$. Neste caso

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int_a^b f_n(t)dt\right).$$

(ii) f é integrável $\Leftrightarrow$ o conjunto dos pontos de descontinuidades de f tem medida nula. Em particular, f contínua $\Rightarrow f$ integrável.

(iii) f integrável $\Rightarrow |f|$ é integrável e

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Solução.

(i) Seja D_f o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Temos que f é descontínua nos pontos onde cada f_i é descontínua. Assim,

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

Em que $D_i = \{x \in [a, b] \subset \mathbb{R} | f_i \text{ é descontínua em } x\}$.

Portanto, f é integrável $\Leftrightarrow D_f$ tem medida nula $\Leftrightarrow D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$ tem medida nula $\Leftrightarrow D_i$ tem medida nula $\forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow f_i$ é integrável $\forall i = 1, \ldots, n$.

(ii) Seja $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Temos que f é integrável $\Leftrightarrow$ cada f_i for integrável $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow D_i = \{x \in [a, b]; f_i \text{ é contínua}\}$ tem medida nula $\Leftrightarrow D_1 \cup \cdots \cup D_n$ tem medida nula $\Leftrightarrow D_f$ tem medida nula $\Leftrightarrow D_f = D_1 \cup \cdots \cup D_n$. Como f é contínua então med$(D_f) = 0$, logo f é integrável.

(iii) Se f é integrável, o conjunto D_f tem medida nula. Logo, $D_{|f|}$ tem medida nula e assim, $|f|$ é integrável.

Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$. Se f é integrável então

$$\lim_{|P|\to 0} \sum f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Em que $t_{i-1} < \xi_i < t_i$.

Como $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e utilizando a desigualdade triangular temos que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{|P|\to 0} \sum f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\right| = \lim_{|P|\to 0} \left|\sum f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\right| \leq$$

$$\lim_{|P|\to 0} \sum |f(\xi_i)| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b |f(x)| dx$$

Portanto,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

OBS: Temos que $D_{|f|} \subset D_f$, daí med$(D_{|f|}) = 0 \Rightarrow |f|$ é integrável.

Exercício 2 - 12/06

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ integráveis. Mostre que:

(i) $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$, $\forall\ \alpha, \beta\ \in \mathbb{R}$.

(ii) $\displaystyle\int_a^b (A \circ f)(t)dt = A\left(\int_a^b f(t)dt\right)$, onde $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é linear.

(iii) $c \in [a, b]$, então $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis e vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f.$$

Solução.

(i)

$$\begin{aligned}
\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt &= \lim_{|P|\to 0} \sum (\alpha f + \beta g, P^*) \\
&= \alpha \lim_{|P|\to 0} \sum (f, P^*) + \beta \lim_{|P|\to 0} \sum (g, P^*) \\
&= \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.
\end{aligned}$$

(ii) Seja $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear definida por

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} X^T,$$

onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Temos que $A \circ f(t) = \big(a_{11}f_1(t) + \cdots + a_{1n}f_n(t), \dots, a_{m1}f_1(t) + \cdots + a_{mn}f_n(t)\big)$. Como f é integrável, então f_i é integrável, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$\int_a^b (A \circ f)(t)dt = \lim_{|P|\to 0} \sum (A \circ f, P^*)$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum \big((a_{11}f_1(t) + \cdots + a_{1n}f_n(t), \ldots, a_{m1}f_1(t) + \cdots + a_{mn}f_n(t)); P^*\big)$$

$$= (a_{11}, \ldots, a_{m1}) \lim_{|P|\to 0} \sum_{j=1}^{k} f_1(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) + \cdots$$

$$+(a_{1n}, \ldots, a_{mn}) \lim_{|P|\to 0} \sum_{j=1}^{k} f_n(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$$

$$= (a_{11}, \ldots, a_{m1}) \int_a^b f_1(t)dt + \cdots + (a_{1n}, \ldots, a_{mn}) \int_a^b f_n(t)dt =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \\ (\int_a^b f_1(t)dt & \ldots & \int_a^b f_n(t)dt)^T \end{pmatrix}$$

$$= A(\int_a^b f(t)dt).$$

(iii) Como $Df|_{[a,c]}$ e $Df|_{[c,b]} \subseteq Df|_{[a,b]} \Rightarrow$ med$(Df|_{[a,c]})$ e med$(Df|_{[c,b]}) \leq$ med$(Df|_{[a,b]}) = 0$, portanto med$(Df|_{[a,c]}) =$ med$(Df|_{[c,b]}) = 0 \Rightarrow f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis.

Para a segunda parte basta notarmos que da Análise Real temos que cada função coordenada satisfaz

$$\int_a^b f_i = \int_a^c f_i + \int_c^d f_i.$$

A prova disto se baseia no fato de que o supremo (ínfimo) das somas inferiores (superiores) de f relativamente as partições de $[a, b]$ que contém c é igual ao supremo (ínfimo) das somas inferiores (superiores) de f relativamente as partições de $[a, b]$.

Exercício 3 - 12/06 (Seminário)

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, f integrável. Mostre que $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(s)ds$. (Primitiva de f) é diferenciavel onde f é contínua e vale $F' = f$.

Solução. Considere o Teorema fundamental do Cálculo: se $f, f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ integráveis. Então

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f^{'}(t)dt.$$

Se $x_0, x_0 + h \in [a, b]$ então $F(x_0 + h) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ e $h.f(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, portanto

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f no ponto x_0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in [a, b], |t - x_0| < \delta$ implica $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Então $0 < |h| < \delta, x_0 + h \in [a, b]$ implicam

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt\right| < \frac{1}{|h|}|h|\varepsilon = \varepsilon.$$

Isto mostra que $F^{'}(x_0) = f(x_0),\ \forall\, x_0 \in [a, b]$.

Portanto, $F' = f$.

Exercício 4 - 12/06 (Seminário)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Mostre que f é retificável e $l(f) = \displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt$.

Solução. Primeiramente daremos a definição de caminho uniformemente diferenciável.

Definição : Um caminho $f : I \to \mathbb{R}^n$ diz-se *uniformemente diferenciável* quando, para todo $t \in I$, existir um vetor $f'(t)$ com a seguinte propriedade: Dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $0 < |h| < \delta$ e $t + h \Rightarrow |f(t + h) - f(t) - f'(t)h| < \varepsilon|h|,\ \forall\ t \in I$.

Teorema: Todo caminho $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 no intervalo compacto $[a, b]$, é uniformemente diferenciável.

Prova: Como toda função contínua num compacto é uniformemente contínua, então $f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua, e daí dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|h| < \delta$ e $t + h \in [a, b] \Rightarrow |f'(t + h) - f'(t)| < \varepsilon$, seja qual for o $t \in [a, b]$.
Observando que para $t \in [a, b]$ fixo, vale $\displaystyle\int_t^{t+h} f'(t)ds = f'(t)h$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que para todo h satisfazendo $0 < |h| < \delta$ e $t + h \in [a, b]$, tem-se

$$|f(t + h) - f(t) - f'(t)h| = \left|\int_t^{t+h} [f'(s) - f'(t)]ds\right| \leq \varepsilon|h|,\ \ \forall\, t \in [a, b],$$

o que mostra o teorema.

Provemos agora o resultado que nos interessa:

Queremos provar que $\displaystyle\lim_{|P|\to 0} l(P) = \int_a^b |f'(t)|dt$.Tomemos então $\varepsilon > 0$. Pela definição de integral, se pontilharmos a partição $P = \{t_0, t_1, ..., t_k\}$ tomando sempre $x_i = t_{i-1} \in [t_i, t_{i-1}]$, veremos que existe $\delta_1 > 0$ tal que $|P| < \delta_1$ implica $\left| \int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^{k} |f'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon/2$. Além disso, pela diferenciabilidade uniforme de f, existe δ_2 tal que $|P| < \delta_2$ implica

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = [f'(t_{i-1}) + \rho_i](t_i - t_{i-1}), \text{ com } |\rho_i| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Logo,

$$|P| < \delta_2 \Rightarrow |l(P) - \sum |f'(t_{i-1})| \, |(t_i - t_{i-1})| < \varepsilon/2.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Então $|P| < \delta \Rightarrow |l(P) - \int_a^b |f'(t)|dt| < \varepsilon$, o que conclui o exercício.

Exercício 5 - 12/06 (Seminário)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1, f'(t) \neq 0, t \in [a, b]$ (f é dito ser um caminho regular). Mostre que existe uma reparametrização de f, digamos $f \circ \varphi$, tal que $l(f \circ \varphi|_{[0,s]}) = s$ (é a reparametrização de composição de arco).

Solução. Considere um caminho f, com $l(f) = L$ e definamos a função $\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, L]$ pondo, para todo $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = \int_a^t |f'(u)|du = l(f|_{[a,t]})$$

comprimento do caminho $f|_{[a,t]}$, restrição de f ao intervalo $[a, t]$.
A função $\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, L]$, assim definida, é de classe C^1 pois é a composição de funções de classe C^1 com $\varphi'(t) = |f'(t)| > 0,\ \forall t \in [a, b]$ e $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = L$. Logo, φ é uma bijeção de $[a, b]$ sobre $[0, L]$, pois $c \neq d$, $c > d \Rightarrow \varphi(c) > \varphi(d) \Rightarrow \varphi(c) \neq \varphi(d)$, então φ é injetiva e sobrejetiva.
A inversa $\varphi^{-1} : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ é também de classe C^1, pois:

1. Note que $\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, L]$ é uma bijeção e $[a, b]$ é compacto, então φ é homeomorfismo, assim $\varphi^{-1} : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ é contínua.

2. $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$, então pelo teorema da diferenciabilidade do homeomorfismo inverso segue que $\varphi^{-1} : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ é diferenciável, asim $\varphi^{-1} : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ é de classe C^1. Logo, para todo $s = \varphi(t) \in [0, L]$, temos que

$$(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{|f'(t)|}$$

Consideremos a reparametrização $g = f \circ \varphi^{-1} : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ do caminho f. Para todo $s = \varphi(t) \in [0, L]$ temos

$$g'(s) = (f \circ \varphi^{-1})'(s) = f'(\varphi^{-1}(s)).(\varphi^{-1})'(s) = f'(t).\frac{1}{|f'(t)|} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

Portanto, $|g'(s)| = 1$. Então, para todo $s \in [0, L]$, o comprimento do caminho restrito $g|_{[0,s]}$ é igual a

$$l(g|_{[0,s]}) = \int_0^s |g'(v)|dv = \int_0^s 1dv = s.$$

Nota: $g = f \circ \varphi^{-1}$ é a reparametrização de f por comprimento de arco.

3.3.2 Integrais múltiplas

Exercício 1 - 14/06 (Seminário)

(i) $\text{med}(Y) = 0$ e $X \subset Y \Rightarrow \text{med}(X) = 0$.

(ii) $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots$, $\text{med}(X_k) = 0 \Rightarrow \text{med}(X) = 0$.

(iii) $X = \{X_1, X_2, \cdots\} \Rightarrow \text{med}(X) = 0$ (em particular, $\text{med}(\mathbb{Q}) = 0$).

Solução.

(i) Dado $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura $Y \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ de blocos abertos tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol } (B_k) < \varepsilon$. Mas $X \subset Y \Rightarrow X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Assim obtemos para cada $\varepsilon > 0$ uma cobertura de X por meio de blocos $B_k \subset \mathbb{R}^n$ abertos tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol } (B_k) < \varepsilon$, ou seja, $\text{med}(X) = 0$.

(ii) Sejam $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com $\text{med}(X_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. A fim de provar que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ tem medida nula, seja dado $\varepsilon > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos obter uma sequência de blocos $B_{k1}, B_{k2}, \ldots, B_{ki}, \ldots$ tais que $X_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{ki}$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol } B_{ki} < \varepsilon/2^k$. Então X está contido na reunião (enumerável) de todos os B_{ki}. Dado qualquer subconjunto finito $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $(k, i) \in F \Rightarrow k \leq j$ e $i \leq j$. Logo

$$\sum_{(k,i)\in F} \text{vol } B_{ki} \leq \sum_{k=1}^{j} \left[\sum_{i=1}^{j} \text{vol } B_{ki} \right] < \sum_{k=1}^{j} \varepsilon/2^k < \varepsilon.$$

Portanto, seja qual for a maneira de enumerar os B_{ki} numa sequência, teremos $\sum_{k,i} \text{vol } B_{ki} \leq \varepsilon$. Assim, $\text{med}(X) = 0$.

(iii) Todo conjunto enumerável é reunião dos seus pontos, cada um dos quais tem medida nula, logo tem medida nula pelo resultado do item (ii).

Exercício 2 - 14/06 (Seminário)

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que:

(i) Se $C(X) = 0$, então med$(X) = 0$.

(ii) Se X é compacto e med$(X) = 0$, então $C(X) = 0$.

Solução.

(i) Como $C(X) = 0 \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existem $B_1, B_2, \ldots, B_k$ blocos fechados tais que $X \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \text{vol}(B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Considere para todo $i > k$,

$$B_j = \left[0, \frac{\varepsilon}{2^{\frac{j+1-k}{n}}}\right] \times \left[0, \frac{\varepsilon}{2^{\frac{j+1-k}{n}}}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{\varepsilon}{2^{\frac{j+1-k}{n}}}\right].$$

Temos então que $X \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(B_i) < \varepsilon$, portanto med$(X) = 0$.

(ii) med$(X) = 0 \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existem $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ blocos abertos tais que $X \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(B_j) < \varepsilon$. Agora, sendo X compacto, implica que existe uma quantidade finita de índices $\{j_1, \ldots, j_k\}$ tais que $X \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} B_{ji}$, além disso $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \text{vol}(B_{ji}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(B_i) < \varepsilon$, portanto $C(X) = 0$.

Exercício 3 - 14/06

Seja $f : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \text{ e } y \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, y = \dfrac{p}{q} \text{ irredutível} \end{cases}.$$

Mostre que f é integrável e $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x, y)dxdy = 0$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, escolha um número inteiro positivo n tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja P qualquer partição de $A = [0,1]^2$ tal que cada ponto $(x, y) \in A$ com $y = \dfrac{p}{q}$, mdc$(p,q) = 1,\ n > q > 0$ pertença a um retângulo de P de altura (em a direção de y) ao mas $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(n+2)(n-1)}$. Já que há no máximo $\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ pares (x, y), logo P existe e o volume total de todos os retângulos contendo pontos deste tipo é no máximo $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Como $f \leqslant 1$, a soma superior $S(f, P)$ é no máximo $\dfrac{\varepsilon}{2}$.Para os retângulos restantes S o valor de $M_s(f) = \sup\{f(x) : x \in S\} \leqslant \dfrac{1}{n}$ e o volume total é menor que 1, logo $S(f,P) \leqslant \dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Daí $0 \leqslant s(f,P) \leqslant S(f,P) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto, como $\varepsilon > 0$ é arbitrario, das últimas desigualdades temos que f é integrável e $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = 0$.

Exercício 1 - 15/06 (Seminário)

Sejam $g, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, f, g limitadas, A - bloco fechado. Suponha que f, g são integráveis e $g = f$ exceto em um subconjunto de medida nula. Mostre que

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx.$$

Solução. Defina $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$.

Temos $x \in D_h \Rightarrow$ ou f é descontínua em x ou g é descontínua em $x \Rightarrow x \in D_f \cup D_g \Rightarrow D_h \subset D_f \cup D_g \Rightarrow 0 \leq \text{med}(D_h) \leq \text{med}(D_f \cup D_g) = \text{med}(D_f) + \text{med}(D_g) = 0$, visto que f e g são integráveis. Dessa maneira, h é integrável. Logo, $|h|$ é integrável (composição de funções integráveis). Então dado $\varepsilon > 0\ \exists\, P_\varepsilon$ partição de A tal que $S(|h|, P_\varepsilon) - s(|h|, P_\varepsilon) < \varepsilon \quad (*)$.

Seja $B \in P_\varepsilon$. Como med$(B) \geq 0$, $\exists\, x_0 \in B$ tal que $h(x_0) = 0$. Daí, segue que $m_B(|h|) = 0$. Logo, $s(|h|, P_\varepsilon) = \displaystyle\sum_{B \in P_\varepsilon} m_B(|h|) \cdot \text{vol}(B) = 0$. De $(*)$ segue que $S(|h|, P_\varepsilon) < \varepsilon$. Assim,

$$\overline{\int_A} |h(x)|dx = \inf\{S(|h|, P); P \text{ é partição de} A\} \leq S(|h|, P_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\int_A} |h(x)|dx < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário e $|h|$ é integrável, obtemos que $0 = \displaystyle\overline{\int_A} |h(x)|dx = \int_A |h(x)|dx$.

Logo,

$$0 \leq \left|\int_A h(x)dx\right| \leq \int_A |h(x)|dx = 0 \Rightarrow \left|\int_A h(x)dx\right| = 0 \Rightarrow \int_A h(x)dx = 0.$$

Dessa maneira,

$$0 = \int_A h(x)dx = \int_A \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_A f(x)dx - \int_A g(x)dx \Rightarrow \int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx.$$

Exercício 2 - 15/06 (Seminário)

Sejam $g, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas, A bloco fechado. Suponha que f é integrável e $f = g$ exceto numa quantidade finita de pontos. Mostre que g é integrável e $\displaystyle\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx$.

Solução. Defina $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $h(x) = |f(x) - g(x)|$.

Seja $X = \{x_1, ..., x_n\}$ o conjunto dos pontos que satisfazem $h(x) \neq 0$. Temos que h é descontínua apenas em X, como med$X = 0$ resulta que h é integrável e além disso $\displaystyle\int_A h(x)dx = 0 \quad \Rightarrow f - g$ é integrável e $\displaystyle\int_A (f(x) - g(x))dx = 0$. Como $g(x) = -[f(x) - g(x)] + f(x)$, então g é integrável e $\displaystyle\int_A g(x)dx = -\int_A [f(x) - g(x)]dx + \int_A f(x)dx = \int_A f(x)dx$.

Exercício 3 - 15/06 (Seminário)

Seja $f : A \longrightarrow [0, \infty)$ integrável e $\displaystyle\int_A f(x)dx = 0$. Mostre que med$(\{x \in A; f(x) \neq 0\}) = 0$.

Solução. $E := \{x \in A; f(x) \neq 0\}$.

Afirmação: $E \subset D_f$.

Suponha por contradição que E não esteja contido em D_f. Então existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin D_f$.

$x_0 \in E \Rightarrow f(x_0) > 0$;

$x_0 \notin D_f \Rightarrow f$ é contínua em $x_0 \Rightarrow \exists$ uma bola $B(x_0, \delta)$ tal que $f(x) > 0 \; \forall \; x \in \overline{B(x_0, \delta)} \Rightarrow$ $f(x) \geq c, \; \forall \; x \in \overline{B(x_0, \delta)}$,onde $c > 0$ é o valor mínimo de f.

Daí segue que

$$c \cdot \text{vol}(B[a, b]) = \int_{B[x_0,\delta]} cdx \leq \int_{B[x_0,\delta]} f(x)dx \leq \int_A f(x)dx = 0$$

Então temos que med$(E) <$ med$(D_f) = 0$.

Exercício 1 - 21/06

Seja $f : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - contínua. Mostre que

$$\int_a^b \left[\int_a^y f(x, y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_x^b f(x, y)dy\right] dx.$$

Solução. Considere

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq y \text{ e } a \leq y \leq b\}$$

e

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y \leq b \text{ e } a \leq x \leq b\}$$

Pelo teorema de Fubini,

$$\int_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_a^y f(x,y)dx\right] dy$$

$$\int_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_x^b f(x,y)dy\right] dx$$

mas

$$\int_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

logo

$$\int_a^b \left[\int_a^y f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_x^b f(x,y)dy\right] dx.$$

Exercício 2 - 22/06 (Seminário)

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação lipschitziana no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$.

Se med$X = 0$ então med$f(X) = 0$.

Solução. Seja $c > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \leqslant c|x-y|\ \forall x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, Existe uma cobertura $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ onde cada C_k é um cubo cuja aresta mede a_k, com $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol} C_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^n < \frac{\varepsilon}{c^n}$.
Se $x, y \in C_k \cap X$ então $|x - y| \leqslant a_k$, logo $|f(x) - f(y)| \leqslant c.a_k$. Isto significa que, para todo $i = 1, \cdots, n$, as $i-$ésimas coordenadas de $f(x)$ e $f(y)$ pertençem a um intervalo J_i de comprimento $c \cdot a_k$, portanto $f(C_k \cap X)$ está contido no cubo $\prod_{i=1}^{n} J_i = C'_k$, de aresta $c \cdot a_k$, logo $\operatorname{vol} C'_k = c^n \cdot (a_k)^n$.
Segue-se que

$$f(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(C_k \cap X) \subset C'_1 \cup \cdots \cup C'_k \cup \cdots,$$

onde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol} C'_k = c^n \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^n < c^n \frac{\varepsilon}{c^n} = \varepsilon.$$

Logo med$f(X) = 0$.

Exercício 3 - 22/06 (Seminário)

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é aberto e f é de classe C^1. Se $X \subset U$ é tal que med$(X) = 0$ então med$\big(f(X)\big) = 0$.

Solução. Para cada $x \in X$, seja V_x uma bola de centro x, com $\overline{V_x} \subset U$ e $k_x = \sup\{|f'(y)|; y \in \overline{V_x}\}$. Pela desigualdade do valor médio, tem-se que $|f(y)-f(z)| \leq k_x|y-z|$ para quaisquer $y, z \in V_x$, isto é, f é localmente lipschitziana e, portanto, leva conjunto de medida nula em conjunto de medida nula.

Exercício 4 - 22/06 (Seminário)

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, onde U é aberto e f é de classe C^1. Se $n < m$, então med$(f(U)) = 0$. Em particular, hiperfícies de classe C^1 tem medida nula.

Solução. Considerando $\mathbb{R}^n$ como o subconjunto dos pontos de $\mathbb{R}^m$ cujas últimas $m - n$ coordenadas são nulas, veremos que todo bloco n-dimensional $B \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ tem volume m-dimensional nulo, pois podemos cobrir B com um único bloco m-dimensional $D = B \times [0, \eta]^{m-n}$ cujo volume m-dimensional pode ser tomado tão pequeno quanto se deseje. Daí resulta que $\mathbb{R}^n$, visto como um um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, tem medida m-dimensional nula, pois é reunião enumerável de blocos n-dimensionais. Em particular, o conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula. Isto posto, a partir da aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definamos $F : U \times \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ pondo $F(x, y) = f(x)$. O conjunto $U \times 0 \subset U \times \mathbb{R}^{m-n}$ tem medida m-dimensional nula, logo med$F(U \times 0) = 0$, pois F é de classe C^1 e toda função de classe C^1 é localmente lipschitziana. Mas $F(U \times 0) = f(U)$, o que prova o resultado.

Seja M uma superfície n-dimensional de classe C^1, para todo $x \in M$ existe um aberto U_x em $\mathbb{R}^m$ tal que $V_x = U_x \cap M$ é uma vizinhança parametrizada de x logo é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^m$. A cobertura aberta $M \subset \bigcup_{x \in M}$ admite, por Lindelöf, uma subcobertura enumerável $M \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, logo $M = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \cap M)$ é reunião enumerável de conjuntos $V_x = U_x \cap M$, de medida nula. Assim, med$(M) = 0$.