Solucionário de Introdução à Álgebra

Andre Kowacs

7 de dezembro de 2018

Capítulo 3

3.2

Ex.1)
De fato, sejam $x, y, \in \cap_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Então $x, y \in B_i\, \forall i$. Logo, $x + y, x \cdot y \in B_i \forall i$. Logo, $x + y, x \cdot y \in \cap_{i\in\mathbb{N}} B_i$. $\square$

Ex.2)
De fato, sejam $x, y \in \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ então $x \in B_j$, $y \in B_k$, $j, k \in \mathbb{N}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $k \geq j$. Então $B_j \subset B_k \implies x \in B_k$. Logo $x + y, x \cdot y \in B_k \implies x + y, x \cdot y \in \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$

Ex.3)
De fato,

$$\bar{1} +_{\mathbb{Z}_3} \bar{2} = \bar{3} \notin \mathbb{Z}_3$$

Ex.4)
De fato, sejam $x, y \in B$. Então:

$$(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a = a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$$

$$x \cdot y \cdot a = x \cdot a \cdot y = a \cdot x \cdot y$$

Logo $x + y, x \cdot y \in B$.

Ex.5) Análogo ao anterior

Ex.6)
De fato, $x, y \in B \implies (x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a = 0 + 0 = 0$ e $x \cdot y \cdot a = x \cdot 0 = 0$, logo $x + y, x \cdot y \in B$.

Ex.7)
Análogo ao Ex.1

Ex.8)
Análogo ao Ex.2

Ex.9) Do Ex.7 temos que P é subcorpo. Por definição, se P' também é subcorpo, segue que $P \subset P'$, logo é o menor (no sentido de inclusão).

Ex.10)
$A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$, $B = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, $X = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, $E = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

Ex.11)

a)De fato, suponha $pa = 0$ para algum $0 \neq a \in D$. Então:

$$(pa) \cdot x = 0, \forall x \in D \iff (px) \cdot a = 0, \forall x \in D$$

Como $a \neq 0$ e D domínio de integridade, segue que $px = 0\,, \forall x \in D$.
b)De fato, suponha característica de $D \neq 0$, isto é, $\exists p > 0$, $px = 0$, $\forall x \in D$. Suponha que $k|p$. Então $p = km$, para algum $m \in \mathbb{N}$., logo:

$$(km)x = 0 \forall x \in D$$

$$k(mx) = 0, \forall x \in D(*)$$

Mas $k, m|p \implies k, m \leq p$. Suponha $k > 1$. Então $m < p$. Mas daí $mx = y \in D$ e $(*)$ implica que

$$ky = 0$$

Assim ou $y = 0$, $\forall x \in D$, da onde $mx = 0 \, \forall x \in D$, contradição com p ser o menor inteiro com tal propriedade, ou então $k = p$, nesse caso $m = 1$ e p primo.

Ex.12)
De fato, dados $a, b \in A$:
$a \oplus -1 = a + (-1) + 1 = a$, $\therefore -1 = 0_{\oplus}$
$a \oplus -a - 1 = a + (-a)(-1) + 1 = 0$ logo $-_{\oplus} a = -a - 1$
Comutatividade segue da comutatividade de $+$.
Distributividade:

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \odot c &= (a + b + 1) \odot c \\
&= (a + b + 1)c + a + b + 1 + c \\
&= ac + bc + c + a + b + 1 + c \\
&= ac + a + c + bc + b + c \\
&= a \odot c \oplus b \odot c
\end{aligned}$$

3.3

Ex.1)
De fato, sejam I, J ideais, $x, y \in I \cap J$, $a \in A$. Então $x - y \in I, J$, $ax, ay \in I, J$, logo $x - y, ax, ay \in I \cap J$, logo é ideal.

Ex.2)
Análogo para subanel e subcorpo.

Capítulo 4

4.1

Ex.2)
De fato, provemos por indução no grau de p. Se $\partial p(x) = 0$, então basta tomar $g(x) = 0$, $r(x) = p(x)$. Suponha que vale para $\partial p(x) = n$. Seja $p(x)$ tal que $\partial p(x) = n + 1$. E seja:

$$q(x) = b_0 + ... + b_{m-1}x^{m-1} + 1x^m.$$

Se $n < m$, tome $g(x) = 0$, $r(x) = p(x)$.
Se $n \geq m$, seja:

$$p_1(x) = p(x) - a_n x^{n-m} q(x).$$

Então $\partial p_1(x) < \partial p(x) = n + 1$, logo pela hipótese de indução $\exists g_1(x), r_1(x)$ com $r1(x) < \partial q(x)$:

$$p_1(x) = g_1(x)q(x) + h(x)$$

E então:

$$p(x) = (a_n x^{n-m} + g_1(x))q(x) + r_1(x)$$

$\square$

Ex.3)
Segue logo da demonstração da proposição 4.1, observando que $f(x) \in L[x]$.

Ex.4)
De fato, tome $f(x) = x^2 + 1$.

Ex.5)TVI

Ex.6)Análogo a proposição 4.1 aplicada n vezes

Ex.9)
De fato, suponha que existam $p(x)$, $q(x) \neq 0 \in D[x]$, $p(x)q(x) = 0$, seja:

$$p(x) = a_0 + ... + a_n x^n,\ q(x) = b_0 + ... + b_m x^m.$$

Mas $p(x), q(x) \neq 0 \implies a_n, b_m \neq 0$. Então $p(x)q(x) = c_0 + ... + c_{n+m}x^{n+m}$ onde $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$, contradição. Logo $D[x]$ é domínio de integridade

Ex.10)
De fato, é claro que 1 é unidade de $A[x]$ e comutatividade é clara, vem da comutatividade de A.

Ex.12)
De fato, sejam $a, b \in K[\alpha]$, $a = a_0 + ... + a_n\alpha^n$, $b = b_0 + ... + b_m\alpha^m$.Assim:

$$a \cdot b = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + ... + (a_nb_m)\alpha^{n+m}$$

$$a \cdot b = c_0 + ... + c_{n+m}\alpha^{n+m}$$