UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EXATAS
CURSO DE MATEMÁTICA

ANDRÉ PEDROSO KOWACS

GRUPOS DE LIE

CURITIBA

2019

ANDRÉ PEDROSO KOWACS

GRUPOS DE LIE

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do do grau de Bacharel em Matemática no curso de Matemática, Setor de Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Professor Hudson do Nascimento Lima

CURITIBA

2019

TERMO DE APROVAÇÃO

ANDRÉ PEDROSO KOWACS

GRUPOS DE LIE

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do do grau de Bacharel em Matemática no curso de Matemática, Setor de Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Professor Hudson do Nascimento Lima
Orientador

Professor Diego Mano Otero
Departamento de Matemática - UFPR

Curitiba, 16 de Dezembro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e amigos pelo apoio companhia nessa fase. Também quero agradecer toda a equipe da ECAL que esteve comigo nesses últimos meses.

RESUMO

O trabalho reúne definições e resultados básicos da teoria de Grupos de Lie, entre eles o Teorema do Subgrupo Fechado e os 3 Teoremas de Lie. Mostra-se que é possível definir um funtor entre a categoria dos Grupos de Lie e a das Álgebras de Lie de dimensão finita, que, quando restrito a subcategoria de grupos simplesmente conexos, é fiel. Também se classificam os Grupos de Lie abelianos e conexos, e são estudadas algumas propriedades de Grupos e Álgebras compactas. Por fim, reúnem-se exemplos dos principais grupos de Lie.

Palavras-chaves: Grupos de Lie. Álgebras de Lie. Teoremas de Lie

ABSTRACT

The paper compiles basic results and definitions from the thoery of Lie Groups, among them the Closed Subgroup Theorem and the Lie's 3 Theorems. It is shown that its possible to define the a functor between the category of Lie Groups e the category of Lie Algebras of finite dimension and, when this functor is restricted to simply connected Groups, this is a faithful functor. The abelian connected subgroups are classified and some properities of compact Lie Groups and Algebras are also exibihited.

Key-words: Lie Groups. Lie Algebras. Lie Theorems.

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

EDO Equação Diferencial Ordinária

L.I. Linearmente Independentes

UFPR Universidade Federal do Paraná

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie do grupo G
E_g	Multiplicação à esquerda por g
D_g	Multiplicação à direita por g
$(df)_x$	Diferencial da função f no ponto x
$(df)_x^*$	Pullback pela função f no ponto x
$B(x,r)$	Bola aberta de centro x e raio r
$\lfloor x \rfloor$	Maior inteiro menor ou igual a x
$Aut(\mathfrak{g})$	Grupo dos automorfismos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$
$End(V)$	Espaço dos Endomorfismos do espaço vetorial V
$GL(V)$	Grupo dos automorfismos do espaço vetorial V
$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$	Álgebra de Lie do do grupo $GL(\mathfrak{g})$
$Der(\mathfrak{g})$	Álgebra das Derivações de $\mathfrak{g}$
$M_n(\mathbb{K})$	Espaço das Matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$
$GL(n,\mathbb{K})$	Grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis sobre o corpo $\mathbb{K}$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

2 PRINCIPAIS RESULTADOS SOBRE GRUPOS DE LIE 11

2.1 GRUPOS DE LIE, EXPONENCIAL E ADJUNTA 11

2.2 SUBGRUPOS, SUBÁLGEBRAS E RECOBRIMENTOS 18

2.3 TEOREMAS DE LIE 31

3 APLICAÇÕES E EXEMPLOS 35

3.1 CLASSIFICAÇÃO DOS GRUPOS DE LIE ABELIANOS 35

3.2 ÁLGEBRAS DE LIE COMPACTAS 37

3.2.1 Teorema de Weyl 37

3.2.2 Sobrejetividade da exponencial em Grupos Compactos 50

3.3 GRUPOS DE LIE CLÁSSICOS 58

Referências 63

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos grupos de Lie começou no fim do século 19 por Sophus Lie, com objetivo de usar grupos para estudar simetrias em equações diferenciais e problemas em geometria, motivado por Galois que usou grupos de simetria para estudo de equações polinomiais. Na época, as noções geométricas globais de variedade ou mesmo de espaço topológico não haviam sido ainda definidas, de modo que Lie estudou o que hoje são conhecidos como grupos de Lie locais. Recentemente, vários avanços vêm sendo feitos na teoria de Grupoides de Lie, dentre elas, uma generalização do conceito de Grupos de Lie para Grupoides. Entretanto Grupos de Lie continuam a representar um papel importante na geometria moderna, principalmente através da ação desses em outras variedades e na teoria de grupos de simetria na física moderna, como na física quântica e relativística.

Grupos de Lie são grupos nos quais define-se uma estrutura de variedade diferenciável (espaços topológicos localmente Euclidianos, Hausdorff e 2 enumerável, munido de um atlas maximal de cartas tais que as mudanças de coordenadas são suaves) na qual o produto é suave. Já Álgebras de Lie são espaços vetoriais munidos de um operador, dito *colchete de Lie*, que satisifaz certas condições, como antisimetria, bilinearidade e a *identidade de Jacobi*. Esses dois objetos estão intimamente interligados através de um funtor chamado de *funtor de Lie*, que associa a cada Grupo, uma Álgebra de Lie e a cada homomorfismo (local) de grupos de Lie um morfismo de álgebras de Lie. A pergunta natural é como as propriedades de um implicam na do outro. O presente trabalho tem como objetivo resolver esse questionamento, apresentando alguns resultados do ponto de vista do autor. A principal referência foi a obra de (MARTIN, 2016), na qual constam a maioria dos resultados.

Tendo em vista esse objetivo o trabalho foi dividido da forma a seguir:

O Capítulo 2 visa a demonstração dos três Teoremas de Lie. Na primeira seção, são estabelecidas as principais definições e resultados básicos da teoria de Grupos de Lie. Prova-se que todo campo invariante é completo, o que permite definir a aplicação exponencial da Álgebra de Lie de um Grupo neste. Além disso, mostra-se que esta aplicação é difeomorfismo numa vizinhança da identidade do Grupo. É apresentada também a existência de uma medida invariante por translações, chamada *medida de Haar*. Já na segunda seção deste capítulo, prova-se que todo subgrupo fechado de um Grupo de Lie é Subgrupo de Lie, e que para cada subálgebra da Álgebra de Lie de um Grupo, existe subgrupo conexo que a integra. Também é provado que o recobrimento universal de um Grupo de Lie é também Grupo de Lie. Ao fim do capítulo, prova-se os três Teoremas de Lie, que estabelecem que toda Álgebra de Lie de de dimensão finita é isomorfa à Álgebra de Lie de algum Grupo de Lie simplesmente conexo e, que homomorfismos (locais) entre Grupos de Lie simplesmente conexos estão em bijeção com homomorfismos entre suas Álgebras.

Ao longo deste capítulo, alguns resultados clássicos são necessários, como o Teorema de Frobenius, o Teorema da Função Implicita, o Teorema de Função Inversa, Teorema Espectral, Decomposição de Schûr e a existência e propriedades do recobrimento universal. Esses resultados podem ser encontrados em (LEE, 2000), (LEE, 2013), (LIMA, 2014).

O capítulo 3 capítulo almeja aplicar e a aprofundar alguns resultados do segundo capítulo. Na primeira seção, classificam-se os Grupos de Lie abelianos e conexos e na segunda prova-se o Teorema de Weyl, que diz que o Grupo de Lie simplesmente conexo que integra uma álgebra de Lie compacta é compacto e a sobrejetividade da exponencial para Grupos compactos. Ao fim, ainda apresentam-se alguns exemplos clássicos de Grupos de Lie e calculam-se suas Álgebras de Lie.

2 PRINCIPAIS RESULTADOS SOBRE GRUPOS DE LIE

Veremos que as categorias dos Grupos de Lie e a das Álgebras de Lie estão interligadas pelo funtor de Lie, nos três principais teoremas sobre Grupos de Lie.

2.1 GRUPOS DE LIE, EXPONENCIAL E ADJUNTA

Nesta seção, apresentam-se as principais definições que serão usadas ao longo do trabalho. Além disso, alguns resultados básicos para a elaboração destas são demonstrados.

Definição 2.1.1 (Grupo Topológico e Grupo de Lie)**.** Um *grupo topológico* é uma variedade topológica M munida de operações $p : M \times M \to M$ e $i : M \to M$ que são contínuas, considerando a topologia produto em $M \times M$, tal que o par (M, p) é grupo e $i(g) = g^{-1}, \forall g \in M$. Um *grupo topológico* (G, p, i) é dito *Grupo de Lie* se G for variedade diferenciável (C^∞) e a operação produto p for diferenciável (C^∞), considerando a estrutura de diferenciável de variedade produto em $G \times G$. Exceto quando explicitado, denotaremos o elemento neutro do grupo por 1.

Observação 2.1.1*.* Se (G, p, i) é Grupo de Lie, é usual denota-lo apenas por G e o produto $p(g, h) = gh$. Além disso vale mencionar que é possível trabalhar e obter resultados análogos definindo Grupos de Lie como variedades C^k, para $k \geq 2$.

Observação 2.1.2*.* Todo exemplo comum de grupo topológico é também grupo de Lie. Isso motivou o quinto problema de Hilbert, que de certa forma questiona se todo grupo topológico com certas propriedades também é de Lie. Devido o debate quanto a interpretação da pergunta, alguns afirmam que esta foi provada afirmativa por Andrew M. Gleason em 1953, mas para outros ainda é um problema aberto.

Definição 2.1.2 (Multiplicação à Direita e à Esquerda)**.** Se (G, p, i) é grupo de Lie, para cada $g \in G$, denote $E_g : G \to G$ e $D_g : G \to G$ as restrições $p|_{\{g\}\times G}$ e $p|_{G\times\{g\}}$. Claramente estas são diferenciáveis. Mais ainda: suas inversas são $E_{g^{-1}}$ e $D_{g^{-1}}$, respectivamente, logo são difeomorfismos.

Exemplo 2.1.1 (Grupo de Matrizes)**.** O exemplo clássico de grupo de Lie é o grupo de matrizes $GL(n, \mathbb{R})$, com a operação sendo o produto de matrizes.

Observação 2.1.3*.* Considerado um Grupo de Lie G, note que os difeomorfismos E_g e D_g levam componentes conexas em componentes conexas de G. Pelas propriedades de grupo, segue que todas essas são difeomorfas a componente conexa da identidade, denotada por G_0. Por ser subgrupo e subvariedade aberta, é fácil ver que é subvariedade mergulhada, de modo que é Grupo de Lie também.

Proposição 2.1.1. *Num grupo de Lie G, temos que o operador inversão i é diferenciável e:*

$$(di)_g = -(dE_{g^{-1}})_1 \circ (dD_{g^{-1}})_g.$$

Demonstração. Dado $(g, h) \in G \times G$, como

$$\partial_2 p_{(g,h)} = (dE_g)_h$$

e como E_g é difeomorfismo,$(dE_g)_h$ é sobrejetor. Logo, pelo Teorema da Função Implícita (LEE, 2013), para $c \in G$ fixo, a equação $p(g, h) = c$ tem única solução diferenciável local $h = \phi_c(g)$, isto é, $p(g, \phi_c(g)) = c$ (Note que esta sempre existe pois, para qualquer g, $p(g, g^{-1}c) = c$). Tomando $c = 1$, segue que $\phi_1 = i$. Assim, ainda do Teorema da Função Implícita, segue que i é diferenciável e sua derivada dada por:

$$\begin{aligned}(di)_g &= (-\partial_2 p)^{-1}_{(g,g^{-1})} \circ (\partial_1 p)_{(g,g^{-1})} \\ &= (-d(E_g)_{g^{-1}})^{-1}(dD_{g^{-1}})_g \\ &= -(dE_{g^{-1}})_1 \circ (dD_{g^{-1}})_g.\end{aligned}$$

□

Definição 2.1.3 (Invariantes)**.** Sejam G grupo de Lie, $X : G \to TG$ um campo de vetores, isto é, para cada $g \in G$, $X(g) \in T_gG$. Dizemos que o campo de vetores X é *invariante à esquerda* (resp. *direita*) se $(dE_g)X = X$ (resp. $(dD_g)X = X$), isto é, $(dE_g)_h(X(h)) = X(gh)$, $\forall g, h \in G$. (resp. $(dE_g)_h(X(h)) = X(hg))$, $\forall g, h \in G$. De mesmo modo, dizemos que uma forma $\omega \in \bigwedge^k TG$ é *invariante à esquerda* (resp. *direita*) se $(dE_g)^*\omega = \omega$, isto é, $(dE_{g^{-1}})^*\omega(h) = \omega(gh)$ (resp. $(dD_{g^{-1}})^*(\omega(h)) = \omega(hg)$).

Observação 2.1.4. Note que um tal campo (ou forma) está completamente determinado pelo seu valor no elemento neutro $1 \in G$, pois, dado $g \in G$, $X(g) = (dE_g)_1(X(1))$ ou então $\omega(g) = (dE_{g^{-1}})^*_g\omega(1)$. (O mesmo vale de modo análogo para campos à direita).

Definição 2.1.4 (Campo invariante)**.** Seja G grupo de Lie, $X \in T_1G$ vetor tangente. Definimos os *campos invariantes à esquerda e à direita gerados por* X como: $X^e(g) = (dE_g)_1(X)$, $X^d(g) = (dD_g)_1(X)$. É imediato da definição que esses são campos invariantes e que qualquer campo invariante em G é dessa forma. Além disso, fixamos a notação: X^e_t e X^d_t para os respectivos fluxos destes campos.

Definição 2.1.5 (Homomorfismos locais)**.** Sejam G e H grupos de Lie, $U \subset G$, $V \subset H$ vizinhanças das respectivas identidades. Uma aplicação diferenciável $\phi : U \to V \subset H$ é dito *homomorfismo local (de grupos de Lie)* se, $\forall g, h \in U$ tais que $gh \in U$, temos que $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$. Se, além disso, $\phi : U \to V$ for difeomorfismo, então ϕ é dito *isomorfismo local (de grupos de Lie)*. Quando $U = G$, omitimos o termo *local*.

Proposição 2.1.2. *Sejam G um grupo de Lie e X um campo invariante em G. Então X é completo, isto é, seu fluxo está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que X é invariante a esquerda e seja $X_t(g)$ o fluxo de X em $g \in G$. Fixado $g \in G$, seja (a, b) domínio da curva maximal dada por $\gamma(t) = X_t(g)$. Suponha, por absurdo, que esta não é completa, isto é, $a > -\infty$ ou $b < \infty$. Se $b < \infty$, tome $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \subset (a, b)$, e escolha $s \in (b - \epsilon, b) \subset (a, b)$. Defina a seguinte curva:

$$\theta(t) = \begin{cases} X_t(g), & t \in (a, b) \\ X_s(g)X_{t-s}(1), & t \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \end{cases}$$

Vejamos que θ está bem definida. De fato, como X é invariante à esquerda, seu fluxo também o é, isto é: $E_g \circ X_t(h) = X_t \circ E_g(h) = X_t(gh)$. Logo, para $t \in (a, b) \cap (s - \epsilon, s + \epsilon)$:

$$\begin{aligned} X_s(g)X_{t-s}(1) = E_{X_s(g)}(X_{t-s}(1)) &= X_{t-s}(E_{X_s(g)}(1)) \\ &= X_{t-s}(X_s(g)) = X_t(g). \end{aligned}$$

Logo as definições coincidem na interseção. Agora, é claro que θ é curva integral de X em (a, b). Já para $t_0 \in (s - \epsilon, s + \epsilon)$

$$\begin{aligned} \theta'(t_0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} E_{X_s(g)}(X_{t-s}(1)) \\ &= (dE_{X_s(g)})_{E_{X_s(g)}} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} X_{t-s}(1) \\ &= (dE_{X_s(g)})_{E_{X_s(g)}} X(X_{t_0-s}(1)) \\ &= X(X_s(g)X_{t-s}(1)) = X(\theta(t_0)). \end{aligned}$$

Logo θ é curva integral de X definida num intervalo $(a, s+\epsilon)$, onde $s+e > b$, contrariando a maximalidade de γ. Logo $b = \infty$. A demonstração de $a = -\infty$ é análoga.

□

Definição 2.1.6 (Álgebra de Lie de um Grupo de Lie)**.** Seja G grupo de Lie. À este associamos uma álgebra de Lie, $Lie(G)$, como a álgebra de Lie dada pelo espaço vetorial de campos invariantes à esquerda de G, com o colchete dado por pelo colchete de Lie de campos de vetores. Note que, como este espaço está em bijeção com T_1G, podemos definir $Lie(G) = T_1G$, com $[X, Y] = [X^e, Y^e](1)$. É também usual denotar $Lie(G) = \mathfrak{g}$. Alternativamente pode se usar os campos invariantes à direita e obter caracterização semelhante, tomando cuidado com o fato de $[X^e, Y^e](1) = -[X^d, Y^d](1)$ (MARTIN, 2016, Proposição 5.5).

Exemplo 2.1.2. Considere o grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ da matrizes $n \times n$ reais invertíveis. Como este é aberto de $M_n(\mathbb{R})$, temos que $T_1GL(n, \mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$. Dado $X \in M_n(\mathbb{R})$, o campo invariante à esquerda (e direita) gerado por X é da forma: $X^e(A) = AX$ (respectivamente $X^d(A) = XA$). Seus fluxos são dados por $X_t^e(A) = Ae^{tX}$ (respectivamente $X_t^d(A) = e^{tA}X$). Daí segue que $[X^e, Y^e](1) = XY - YX$ (respectivamente $[X^d, Y^d] = YX - XY$), onde e^{tX} é a matriz exponencial da matriz tX, dada pela forma usual

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Dado um homomorfismo local de grupos de Lie ϕ, é possível associar naturalmente um homomorfismo de álgebras de Lie, entre suas respectivas álgebras, $(d\phi)_1$. Assim é possível estabelecer um funtor Lie entre a categorias de Grupos de Lie com a categoria de álgebras de Lie.

Observação 2.1.5. Além disso, dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, como $G_0 \subset G$ é aberto, segue que $T_1G_0 \cong T_1G$ e logo $Lie(G_0) \cong Lie(G) = \mathfrak{g}$. Segue que, se $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie de algum grupo de Lie, então existe grupo de Lie conexo com tal álgebra.

Definição 2.1.7 (Mapa Exponencial)**.** Defina a aplicação $\exp : \mathfrak{g} \to G$ chamada *mapa exponencial* por $\exp(X) = X^e_{t=1}(1)$, que está bem definida pela Proposição 2.1.2. Uma vez que, para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{g}$, $(sX)_t^e = X_{st}^e$, segue que $(X^e)_t(1) = \exp(tX)$. Isto define um homomorfismo $\mathbb{R} \to G$ dado por $t \mapsto \exp(tX)$, uma vez que $\exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX) = \exp(sX)\exp(tX)$.(Vide demonstração da proposição abaixo). Também é comum denotar $\exp(X)$ por e^X.

Observação 2.1.6. Note que, por continuidade, a imagem do mapa exponencial está sempre contida na componente conexa da identidade de um grupo de Lie.

O mapa exponencial é ferramenta essencial da teoria de grupos de Lie, definindo uma relação entre um grupo de Lie e sua álgebra de Lie. Algumas propriedades importantes deste mapa são apresentadas na proposição a seguir, que serão usadas nas demonstrações ao longo de todo trabalho.

Proposição 2.1.3 (Propriedades da Exponencial)**.** *Sejam G grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie e $\exp : \mathfrak{g} \to G$ a aplicação exponencial. Dado $X \in \mathfrak{g}$, valem:*

1. $X_t^e = D_{\exp(tX)}$ *e* $X_t^d = E_{\exp(tX)}$*, isto é:* $X_t^e(g) = ge^{tX}$ *e* $X_t^e(g) = e^{tX}g$*;*

2. $\exp 0 = 1$*;*

3. *Se* $n \in \mathbb{Z}$*, então* $\exp(X)^n = \exp(nX)$*. Em particular,* $(e^X)^{-1} = e^{-X}$*;*

4. $(d\exp)_0 =$ *Id;*

5. *Existem vizinhanças $U \subset \mathfrak{g}$ de 0 e $V \subset G$ de 1 tais que $\exp|_U : U \to V$ é difeomorfismo.*

Demonstração. Seja $X^e \in \mathfrak{g}$ campo invariante à esquerda e $g \in G$. Considere a curva $\alpha(t) = ge^{tX}$. Então $\alpha(0) = g$ e $\alpha'(s) = (dE_g)_{\exp(sX)} X^e(\exp(sX))$. Como X é invariante, temos que $\alpha'(s) = X^e(ge^{sx}) = X^e(\alpha(s))$, isto é, α é curva integral do fluxo de X^e com origem em g, o que prova a primeira identidade do item 1 e a segunda é provada de modo análogo. O item 2 é evidente. Note que pelo item 1, tomando $g = X^e_s$, obtemos

$$e^{tX}e^{sX} = X^e_t(1)X^e_s(1) = X^e_t(X^e_s(1)) = X^e_{t+s}(1) = e^{t+s}(X),$$

em particular, o item $3.$ é valido. Finalmente, note que, da definição de fluxo, obtemos

$$(d\exp)_0(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X^e_t(1) = X^e(1) = X.$$

□

O mapa exponencial nos permite relacionar um homomorfismo local com seu homomorfismo induzido, através da seguinte proposição:

Proposição 2.1.4. *Seja $\phi : G \to H$ homomorfismo local de grupos de Lie. Então, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{(d\phi)_1} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{g}$, defina: $\sigma(t) = \phi(\exp(tX))$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \sigma(t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\exp((t+s)X)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\exp(tX)\exp(sX)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\exp(tX))\phi(\exp(sX)) \\ &= (dD_{\phi(\exp(sX))})_1 (d\phi)_1(X) \end{aligned}$$

Segue que σ é curva integral do campo $((d\phi)_1(X))^e$, com $\sigma(0) = 1$. Mas então pela Proposição 2.1.3, e pela unicidade das curvas integrais, temos que esta deve coincidir com $\exp(t(d\phi)_1(X))$ e o resultado segue.

□

Exemplo 2.1.3. Seja $G = GL(n, \mathbb{R})$, $H = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Então $\phi = \det : G \to H$ é homomorfismo de grupos de Lie. Prova-se ainda que $(d\phi)_1 = \mathrm{tr}$, donde, $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}\, X}$.

Definição 2.1.8 (Representação Adjunta de um Grupo de Lie)**.** Seja G grupo de Lie. Dado $g \in G$, considere o mapa $C_g(x) = gxg^{-1}$. Como $C_g(1) = 1$, segue que $(dC_g)_1$ é mapa linear de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$. Defina, pois, a *representação adjunta* de G como o mapa:

$$\begin{aligned} Ad : G &\to GL(\mathfrak{g}) \\ g \mapsto Ad(g) &= (dC_g)_1 \\ &= (dE_g)_{g^{-1}} \circ (dD_{g^{-1}})_1 \\ &= (dD_{g^{-1}})_g \circ (dE_g)_1 \end{aligned}$$

Como $C_g \circ C_h = C_{gh}$, Ad é homomorfismo de G em $GL(\mathfrak{g})$ (uma representação).

Observação 2.1.7*.* Segue da Proposição 2.1.4 que

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(Ad(g)X)$$

para todo $g \in G$.

Definição 2.1.9 (Representação Adjunta de uma Álgebra de Lie)**.** Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Definimos sua representação adjunta por:

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\to Der(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto \text{ad}(X) \end{aligned}$$

Onde $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ e $Der(\mathfrak{g})$ é a Álgebra de Lie das derivações de $\mathfrak{g}$ (MARTIN, 2010). Note que ad é homomorfismo de álgebras de Lie, com o colchete em $Der(\mathfrak{g})$ dado pelo comutador. Em particular, é uma representação de $\mathfrak{g}$

Estas duas representações tem papel fundamental na teoria de Grupos e Álgebras de Lie. A seguinte proposição relaciona a adjunta de um grupo com a adjunta de sua álgebra associada.

Proposição 2.1.5 (Relação entre as Adjuntas)**.** *Seja G grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, para qualquer $X \in \mathfrak{g}$ vale:*

$$Ad(\exp X) = \exp(\textit{ad}(X)),$$

isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\textit{ad}} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{Ad} & G \end{array}$$

Demonstração. Basta mostrar que $(dAd)_1 = \text{ad}$. De fato, dado $Y \in \mathfrak{g}$ note que, para $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Ad(e^{tX})(Y) &= (dD_{e^{-tX}})_{e^{tX}}(dE_{e^{tX}})_1 Y \\ &= (dD_{e^{-tX}})_{e^{tX}} Y^e(e^{tX}) \end{aligned}$$

Usando que o fluxo de X^e é dado por $X^e_t = D_{e^{tX}}$, segue que:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad(e^{tX})(Y) &= (dAd)_1(X)(Y) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (dX^e_{-t})_{X^e_t(1)} Y(X^e_t(1)) \\ &= [X^e, Y^e](1) = [X, Y] = \text{ad}\,(X)(Y) \end{aligned}$$

Onde usamos de segunda para a terceira linha a definição de colchete de Lie. Daí que $(dAd)_1(X) = \text{ad}\,(X)$ e o resultado segue da Proposição $2.1.4$.

□

Uma interessante consequência de relação entre as adjuntas, é que estas permitem relacionar a comutatividade de G e $\mathfrak{g}$ como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.1.6. *Seja G grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então G é abeliano se e só se $\mathfrak{g}$ é abeliana, isto é, $[X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Suponha G abeliano. Então, dado $X \in \mathfrak{g}$, então

$$\exp(tX) = g\exp(tX)g^{-1} = \exp(tAd(g)X)$$

para todo $g \in G$ e $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(tAd(g)X) \implies Ad(g)X = X$. Segue que $Ad(g) = \text{Id}$, para todo $g \in G$. Em particular, $\text{Id} = Ad(\exp(tY)) = \exp(t\text{ad}\,(Y))$. Então

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \text{Id} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\text{ad}\,(Y)) = \text{ad}\,(Y),$$

e logo $[X, Y] = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
Reciprocamente, suponha $\mathfrak{g}$ abeliana. Assim,

$$Ad(\exp(tY)) = \exp(t\text{ad}\,(Y)) = \exp(0) = Id$$

se $Y \in \mathfrak{g}$. Daí que

$$e^Y e^X e^{-Y} = \exp(Ad(e^Y)X) = e^X,$$

isto é, $e^Y e^X = e^X e^Y$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Logo produtos de exponenciais comutam em G. Como G é conexo, todo elemento é produto de exponenciais (MARTIN, 2016, capítulo 5, pag. 108), donde segue.

□

Recorrendo à teoria de integração em variedades, é possível definir uma medida num grupo de Lie que é invariante por translações, isto é, $\mu(U) = \mu(gU), \forall g \in G$ e $U \subset G$ mensurável.

Definição 2.1.10 (Medida de Haar)**.** Seja G grupo de Lie, ν uma n-forma de volume não nula em $\mathfrak{g} = T_eG$. Então fica definida uma n-forma de volume à esquerda por:

$$\nu_g = (dE_{g^{-1}})^*\nu \in \wedge^n T_g^*G.$$

Essa forma define uma medida invariante à esquerda μ_ν em G dita *medida de Haar* de G, onde:

$$\mu_\nu(U) = \int_U \nu(x).$$

Note que, se $f : G \to \mathbb{R}$ é integrável, então:

$$\int_G f(x)d\mu_\nu(x) = \int_G f(x)\nu(x) = \int_G f(gx)\nu(x) = \int_G f(gx)d\mu_\nu(x)$$

para todo $g \in G$.

Exemplo 2.1.4. No grupo aditivo $\mathbb{R}$, tomando a forma de volume dx canônica, obtemos que a medida de Haar coincide com a medida de Lesbegue. Note que esta de fato satisfaz:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+h)dx$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.
Do mesmo modo, se considerarmos o grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$, tomando a forma de volume $\nu(x) = \frac{1}{|x|}dx$, temos que esta define medida de Haar em $\mathbb{R}^*$.

2.2 SUBGRUPOS, SUBÁLGEBRAS E RECOBRIMENTOS

Nesta seção, reunimos alguns resultados importantes sobre grupos de Lie e grupos topológicos, que serão usados nas demonstrações dos teoremas de Lie.

Dada uma variedade diferenciável M, sempre existe variedade diferenciável simplesmente conexa que recobre M. Esta é dita recobrimento universal de M, e a demonstração de sua existência pode ser encontrada em (LEE, 2000) e (LEE, 2013). No caso de um grupo de Lie, não só essa existe como também admite estrutura de grupo de Lie. Esse resultado é consequência da seguinte Proposição:

Proposição 2.2.1. *Seja G grupo de Lie conexo, $\pi : \tilde{G} \to G$ o recobrimento universal de G e escolha $\tilde{1} \in \pi^{-1}(1)$. Então existe único produto $\tilde{p} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ que torna $\tilde{G}$ em grupo de Lie, de tal forma que $\tilde{1}$ é elemento neutro e π é homomorfismo.*

Demonstração. Considere $q : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$ dada por: $q(x, y) = p(\pi(x), \pi(y))$. Como $\tilde{G} \times \tilde{G}$ é simplesmente conexo, existe único levantamento de q a $\tilde{p}$ diferenciável tal que $\tilde{p}(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{1} \in \pi^{-1}(q(\tilde{1}, \tilde{1}))$. Note que $(\tilde{G}, \tilde{p})$ satisfaz os 3 axiomas de grupo:

1. Como $p|_{\{\tilde{1}\}\times\tilde{G}}$ é levantamento de $q_{\{\tilde{1}\}\times\tilde{G}}$ e esta coincide com a projeção $\pi : \tilde{G} \to G$ e ,além disso, $\tilde{p}(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{1}$ por definição, segue que $\tilde{p}_{\{\tilde{1}\}\times\tilde{G}} =$ Id, pela unicidade do levantamento. Analogamente, mostra-se que $p|_{\tilde{G}\times\{\tilde{1}\}} =$ Id.

2. A inversão em $\tilde{G}$, $\tilde{i}$ é dada pelo único levantamento de $j : \tilde{G} \to G$, $j(x) = i(\pi(x))$ tal que $\tilde{i}(\tilde{1}) = \tilde{1}$. De fato, note que a aplicação: $x \mapsto \tilde{p}(x, \tilde{i}(x))$ é levantamento da aplicação constante $x \mapsto q(x, \tilde{i}(x)) = p(\pi(x), i(\pi(x)) = 1$. Como $x \mapsto \tilde{1}$ é também um levantamento que coincide em $\tilde{1}$, segue que $\tilde{p}(x, \tilde{i}(x)) = \tilde{1}$, $\forall x$. Analogamente, mostra-se que $\tilde{p}(\tilde{i}(x), x) = 1$, $\forall x \in \tilde{G}$.

3. A comutatividade segue do fato de que as aplicações $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ dadas por: $(x, y, z) \mapsto \tilde{p}(x, \tilde{p}(y, z))$ e $\tilde{p}(\tilde{p}(x, y), z)$ são, respectivamente, levantamentos das aplicações dadas por $q(x, p(\tilde{y, z}))$ e $q(\tilde{p}(x, y), z)$. Mas, pela definição:

$$\begin{aligned} q(x, \tilde{p}(y, z)) &= p(\pi(x), q(y, z)) \\ &= p(p(\pi(x), p(\pi(y), \pi(z))) \\ &= p(p(\pi(x), \pi(y)), \pi(z)) \\ &= q(\tilde{p}(x, y), z) \end{aligned}$$

   Logo, ambas são levantamentos da mesma função e coincidem em $(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1})$, portanto são idênticas.

Finalmente, por definição:

$$\pi(\tilde{p}(x, y)) = q(x, y) = p(\pi(x), \pi(y)),$$

logo, π é homomorfismo. Reciprocamente, pela fórmula acima segue que qualquer produto em $\tilde{G}$ deve ser levantamento de q, donde a unicidade do produto segue da unicidade dos levantamentos.

□

É fácil ver que se $H \subset G$ é grupo de Lie, sua álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ deve ser isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, pois temos a identificação natural $T_1H \subset T_1G$. Veremos que a recíproca também vale, isto é: dado uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, existe (único) subgrupo conexo de G com tal subálgebra. Antes de provar esse resultado, apresentamos os seguintes lemas:

Lema 2.2.1 (Subálgebras são invariantes pela ação adjunta)**.** *Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subálgebra de Lie, $X, Y \in \mathfrak{h}$. Então $Ad(e^Y)X \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração. De fato, note que, como ad $(Y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, sua exponencial é dada pela série usual

$$Ad(e^Y)X = \exp(\text{ad}\,(Y))X = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\text{ad}\,(Y)^k\right) X \in \mathfrak{h},$$

pois todo subespaço de dimensão finita é fechado e ad $(Y)X = [Y, X] \in \mathfrak{h}$.

□

Lema 2.2.2. *[Distribuição de uma subálgebra é invariante] Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subálgebra de Lie, $X, Y \in \mathfrak{h}$. Considere a distribuição em G dada por: $\Delta_{\mathfrak{h}}(g) = (dE_g)_1\mathfrak{h} \subset T_gG$. Se $Y \in \mathfrak{h}$ então, para todo $x \in G$, $(dD_{e^Y})_x(\Delta_{\mathfrak{h}}(x)) = \Delta_{\mathfrak{h}}(xe^{-Y})$.*

Demonstração. De fato, note que:

$$\begin{aligned}
(dD_g)_x(X^e(x)) &= (dD_g)_x \circ (dE_x)_1(X) = (d(D_g \circ E_x))_1(X) \\
&= (dE_x)_g \circ (dD_g)_1(X) \\
&= (dE_{xg})_1 \circ (dE_{g^{-1}})_g \circ (dD_g)_1(X) \\
&= (dE_{xg})_1(Ad(g^{-1})X) = (Ad(g^{-1})X)^e(xg)
\end{aligned}$$

Mas, se $g = e^{-Y}$ e $X \in \mathfrak{h}$, então $(Ad(e^{-Y})X) \in \mathfrak{h}$ e logo $(Ad(e^{-Y})X)(xe^Y) \in \Delta_{\mathfrak{h}}(xe^Y)$, donde segue que $(dD_{e^Y})_x(\Delta_{\mathfrak{h}}(x)) \subset \Delta_{\mathfrak{h}}(xe^Y)$. Mas como $(dD_{e^Y})_x$ é isomorfismo, a dimensão da imagem coincide com a do subespaço e logo vale a igualdade.

□

Lema 2.2.3. *Seja G grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Então a distribuição $\Delta_{\mathfrak{h}}(g) = (dE_g)_1\mathfrak{h}$ é integrável.*

Demonstração. Seja $\{X_1, ..., X_k\}$ base de $\mathfrak{h}$. Note que $\Delta_{\mathfrak{h}}(g) = span\{X_1^e(g), ..., X_k^e(g)\}$, de modo que $\Delta_{\mathfrak{h}}$ é gerada por campos de vetores suaves e logo é subfibrado suave. Mais ainda: como $[X_i^e, X_j^e](g) = (dE_g)_1[X_i, X_j]$ e $\mathfrak{h}$ é subálgebra, segue que $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ e logo $[X_i^e, X_j^e](g) \in \Delta_{\mathfrak{h}}(g)$, logo $\Delta_{\mathfrak{h}}$ é involutiva e portanto, pelo Teorema de Frobenius, completamente integrável.

□

Proposição 2.2.2. *Seja G grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subálgebra de Lie. Então existe único subgrupo conexo $H \subset G$ tal que $Lie(H) \cong \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Considere a distribuição $\Delta_{\mathfrak{h}}(g) = (dE_g)_1\mathfrak{h}$. Pela Proposição 2.2.3 esta é integrável. Seja $H \subset G$ a subvariedade integral conexa maximal que contém a identidade. Primeiramente, provemos que $H = \{e^{Y_1} \dots e^{Y_s} \mid s \in \mathbb{N},\, Y_i \in \mathfrak{h}\}$. A inclusão $\supset$

é óbvia. Para a recíproca, defina a seguinte relação de equivalência em H: ponha que $g \sim h$ se existem $Y_1, ..., Y_s$ tais que

$$g = he^{Y_1} \dots e^{Y_s}.$$

Afirmação: as classes de equivalência de $\sim$ são abertos de H.

Demonstração. De fato, dado $h \in H$ e $\{X_1, ..., X_k\}$ base de $\mathfrak{h}$, considere a aplicação:

$$\rho : \mathbb{R}^k \to G$$
$$(t_1, ..., t_k) \mapsto he^{t_1 X_1} \dots e^{t_k X_k}$$

Note que suas derivadas parciais são:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_i}(t_1, ..., t_k) = (dD_{e^{t_{i+1}X_{i+1}} \dots e^{t_n X_n}})_{z_i}(X_i^e(z_i))$$

onde $z_i = he^{t_1 X_1} \dots e^{t_{i-1} X_{i-1}}$. Pelo Lema 2.2.2, segue que essas estão em $\Delta_{\mathfrak{h}}(\rho(t))$ e logo Im$(d\rho)_t \subset \Delta_{\mathfrak{h}}(\rho(t)),\ \forall t \in \mathbb{R}^k$. Por outro lado,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_i}(t_1, ..., t_k) = X_i^e(h)$$

E, como $\{X_1, ... X_k\}$ é base de $\mathfrak{h}$, segue que $(d\rho)_0$ é injetora. Segue que $(d\rho)_t$ é injetora numa vizinhança de 0, U. Assim, a imagem $H' =$ Im$(\rho|_U)$ é subvariedade imersa de dimensão k. Mas, note que esta é integral a $\Delta_{\mathfrak{h}}$, pelas observações acima, e aberta. Uma vez que $h \in H'$ e H' está contida na classe de equivalência de h, por definição, segue que esta é aberta. ■

Como as classes de equivalência particionam H, segue que essas são abertas e fechadas e logo, por conexidade coincidem com H e a inclusão reversa vale. Assim, segue que H é subgrupo, e como é subvariedade integral, é subgrupo mergulhado e logo de Lie, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$, por definição. Como todo grupo conexo é gerado por exponenciais (MARTIN, 2016, capítulo 5, pag. 108) e a exponencial num subgrupo é restrição da exponencial no grupo, segue que qualquer subgrupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ coincide com H, que prova a unicidade.

□

Observação 2.2.1*.* Denotamos por $\langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ o único subgrupo conexo gerado por uma subálgebra $\mathfrak{h}$.

Em seguida, dado um grupo de Lie G e um subgrupo $H \subset G$, é de se questionar se H admite estrutura de Grupo de Lie de forma que seja subvariedade de G. O Teorema do Subgrupo Fechado mostra que basta H ser subgrupo fechado para que esse seja o caso.

Demonstraremos o teorema em 3 partes. Primeiramente, vamos exibir subálgebra de álgebra de Lie que será a álgebra de Lie do subgrupo. Para tanto precisamos de dois lemas:

Lema 2.2.4 (Exponencial da soma)**.** *Dados* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, vale:*

$$\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n.$$

Demonstração. Seja U vizinhança de 0 em $\mathfrak{g}$ e W vizinhança de 1 em G nas quais $\exp$ é difeomorfismo. Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ e considere a curva $\alpha(t) = e^{tX}e^{tY}$, com $\alpha(0) = 1$. Se t é suficientemente pequeno, então $\alpha(t) \in W$ e, logo, define curva $\beta(t) \subset U$ por $\exp\beta(t) = \alpha(t)$. Uma vez que:

$$(dp)_1(X,Y) = X+Y$$

E que $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tX) = X$, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tX) = X$, temos que:

$$\alpha'(0) = X+Y$$

Como $(d\exp)_1 = \mathrm{Id}$, segue que $\beta'(0) = \alpha'(0) = X+Y$. Segue, do Teorema de Taylor que

$$\beta(t) = t(X+Y) + o(t),$$

com $\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t} = 0$. Assim $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y)+o(t))$. Segue que, para $n \in \mathbb{N}$: $\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}(X+Y) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ Como $\frac{o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 0$ para $n\to\infty$, segue que $\left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n \to \exp(X+Y)$.

□

Lema 2.2.5 (Exponencial do colchete)**.** *Dados* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, vale:*

$$\exp(-[X,Y]) = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{Y}{n}}e^{\frac{-X}{n}}e^{\frac{-Y}{n}}\right)^{n^2}$$

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, seja U vizinhança de 0 em $\mathfrak{g}$ e W vizinhança de 1 em G nas quais $\exp$ é difeomorfismo. Considere a curva:

$$\alpha(t) = e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY},$$

que satisfaz $\alpha(0) = 1$. Se t é suficientemente pequeno, $\alpha(t)$ está em W e logo induz a curva $\beta(t)$, $\exp\beta(t) = \alpha(t)$. Denote por $\log : W \to U$ a inversa local da exponencial e seja $\hat{X} = (d\log)X$ o campo de vetores induzido em U por X. Então as imagens das trajetórias de $\hat{X}$ por $\exp$ são trajetórias do fluxo de X. Da mesma maneira, defina $\hat{Y}$. Uma vez que o fluxo do campo invariante à direita X^d é dado por $X^d_t(g) = \exp(tX)g$, a curva β é dada por

$$\beta(t) = \hat{X}_t \circ \hat{Y}_t \circ \hat{X}_{-t} \circ \hat{Y}_{-t}(1).$$

Segue das definições que

$$\beta'(0) = 0 \text{ e } \beta''(0) = -2[\hat{X}, \hat{Y}](0),$$

mas $[X, Y]_d = [\hat{X}, \hat{Y}](0)$. Logo, numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$, por Taylor,

$$\beta(t) = -t^2[X, Y] + o(t^2)$$

com $\lim_{t\to 0} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0$, isto é:

$$e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY} = \exp(-2t^2[X, Y] + o(t^2))$$

Tomando $t = 1/n$, e elevando ambos os lados por n^2, o resultado segue.

$\square$

Lema 2.2.6. *Se $H \subset G$ é subgrupo fechado de um grupo de Lie G, então*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \exp tX \in H, \, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

é subálgebra de Lie da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Demonstração. Inicialmente, note que $\mathfrak{h} \neq \emptyset$, pois $0 \in \mathfrak{h}$. Dados $X, Y \in \mathfrak{h}$, como $\{\exp tx : t \in \mathbb{R}\} = \{\exp tax : t \in \mathbb{R}\}$ se $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, segue que $aX \in \mathfrak{h}, \forall a \in \mathbb{R}$. Ainda, como H é subgrupo fechado (e pelo Lema 2.2.4),

$$\exp(t(X + Y)) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right)\right)^n.$$

O limite acima pertence a H para todo t e logo $X + Y \in \mathfrak{h}$. Finalmente, segue, novamente, do fato de H ser subgrupo fechado e da identidade (Lema 2.2.5):

$$\exp(-t[X, Y]) = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{t}{n}X}e^{\frac{t}{n}Y}e^{\frac{-t}{n}X}e^{\frac{t}{n}Y}\right)^{n^2}$$

o limite pertence a H, para todo t e logo $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

$\square$

Em seguida, provamos os seguinte lemas que fornecerão as cartas locais adaptadas para definir estrutura diferenciável no subgrupo.

Lema 2.2.7. *Seja G grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}, \mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ subespaços tais que $\mathfrak{h}$ é subálgebra e $\mathfrak{h} + \mathfrak{e} = \mathfrak{g}$. Então existem vizinhanças $U \subset \mathfrak{h}, V \subset \mathfrak{e}$ de 0 e $W \subset G$ de 1 tais que $e^U e^V = W$.*

Demonstração. Considere a aplicação dada por $\psi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{e} \to G$, $\psi(X, Y) = e^X e^Y$. Uma vez que $(d\exp)_0 = \text{Id}$, temos que $(d\psi)_0 = \text{Id} \times \text{Id}$. Como $\mathfrak{g}$ é soma dos subespaços, esta é isomorfismo e logo existem vizinhanças U, V de 0 e W de 1 nas quais ψ é difeomorfismo, em particular, $e^U e^V = W$.

$\square$

Lema 2.2.8. *Dado um subgrupo fechado $H \subset G$, seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ a subálgebra associada. Seja se $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{e}$. Então existem vizinhanças de 0, $U \subset \mathfrak{h}, V \subset \mathfrak{e}$, $W = e^V e^U \subset G$ tais que*

$$H \cap W = e^U.$$

Demonstração. Por definição, $\langle \exp \mathfrak{h} \rangle \subset H$, logo $e^U \subset H \cap W$. Além do mais:

$$H \cap W = e^U(H \cap e^V)$$

pois, para

$$X \in U,\, Y \in V,\, e^X e^Y \in H \iff e^Y = e^{-X} e^X e^Y \in H.$$

Logo, queremos achar vizinhança V tal que $H \cap e^V = \{1\}$. Suponha que não exista tal vizinhança. Então existe sequência de $\{Y_n\} \subset \mathfrak{e}$ com $\{Y_n \neq 0,\, \forall n\}$ tal que $y_n = e^{Y_n} \in H$ e $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} y_n = 1$. Tome vizinhanças compactas de 0, $V'' \subset V' \subset \mathfrak{e}$ tais que $V'' + V'' \subset V'$ (por exemplo, bolas centradas em 0 de raio $1/2\delta$ e δ, em relação a qualquer norma). Para todo n suficientemente grande, temos que $Y_n \in V''$. Mas, por compacidade, para cada tal n, existe $N(n) \geq 1$ tal que $N(n) \cdot Y_n \notin V''$. Seja $k_n \geq 2$ o menor inteiro positivo tal que $k_n Y_n \notin V''$. Então $(k_n - 1) \in V''$, donde:

$$k_n Y_n = (k_n - 1)Y_n + Y_n \in V'' + V'' \subset V'$$

Por compacidade, podemos supor que $k_n Y_n \to Y \in V'$. Como $k_n Y_n \notin V''$, segue que $Y \notin int(V'')$ e daí que $Y \neq 0$. Tomando exponenciais, segue que

$$e^{k_n Y_n} = (e^{Y_n})^{k_n} = y_n^{k_n} \in H,\, \forall n$$

e logo $y_n^{k_n} \to y = e^Y \neq 1$. Portanto, $y \in H$, já que H é fechado.
Afirmação:Isso implica que $e^{tY} \in H, \forall t \in \mathbb{R}$.
De fato, suponha que $t = p/q$ é racional, $p, q \in \mathbb{Z},\, q > 0$. Se a_n é quociente da divisão de pk_n por q, de modo que $pk_n = a_n q + b_n,\, 0 \leq b_n < q$, então:

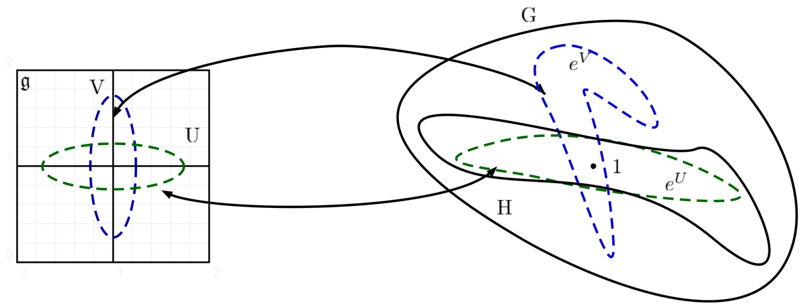
$$\frac{p}{q} k_n Y_n = t k_n Y_n = a_n Y_n + \frac{b_n}{q} Y_n$$

Fazendo $n \to \infty$, note que o lado esquerdo tende a tY, enquanto $\frac{b_n}{q} Y_n \to 0$, pois $\frac{b_n}{q} < 1,\, \forall n$. Segue que: $\lim a_n Y_n = tY$, daí:

$$e^{tY} = \lim_{n\to\infty} e^{a_n Y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{Y_n}\right)^{a_n} \in H$$

Logo $e^{tY} \in H$, se t é racional. Pelo fato de que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, que $\exp$ é contínua e que H é fechado, segue que $e^{tY} \in H, \forall t \in \mathbb{R}$. Entretanto isso contradiz a definição de $\mathfrak{h}$, já que Y está no subespaço complementar $\mathfrak{e}$ de $\mathfrak{h}$ e $Y \neq 0$.

□



Finalmente, estamos prontos para provar o teorema do subgrupo fechado.

Teorema 2.2.1. *Se $H \subset G$ é subgrupo fechado de um grupo de Lie G então H é subvariedade mergulhada, de modo que é Grupo de Lie. Sua álgebra de Lie é dada por*

$$\mathfrak{h} = \left\{ Y \in \mathfrak{g} : e^{tY} \in H, \, \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demonstração. Sejam $U \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $V \subset \mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ onde $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{e}$ e $H \cap W = e^U$ (que existe pelo lema anterior). Seja

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : V \times U &\to W \\ (X, Y) &\mapsto e^X e^Y. \end{aligned}$$

Então, para todo $h \in H$, o conjunto $Wh = e^V e^U h$ é vizinhança de h em G. Note que esta satisfaz

$$H \cap Wh = (Hh^{-1} \cap W)h = (H \cap W)h = e^U h.$$

Portanto, o difeomorfismo: $\psi \circ D_{h^{-1}} : Wh \to V \times U$ satisfaz: $\psi \circ D_{h^{-1}}(H \cap W_h) = U \times \{0\}$ e logo o par $(Wh, \psi \circ D_{h^{-1}})$ é carta local adaptada em torno de h. Como este foi arbitrário, segue que H é subvariedade mergulhada e portanto subgrupo de Lie. Finalmente, pelo lema anterior e pela definição, é claro que $\mathfrak{h}$ é sua álgebra de Lie.

□

Dado um subgrupo H de um grupo de Lie G, podemos considerar o conjunto das classes laterais G/H e se questionar quando este possui estrutura natural de variedade. A seguinte proposição afirma que basta o subgrupo ser fechado.

Proposição 2.2.3. *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ subgrupo fechado. Então, existe única estrutura diferenciável em G/H, compatível com a topologia quociente, tal que:*

1. $\dim G/H = \dim G - \dim H$*;*

2. *A projeção canônica é submersão;*

3. *Para cada $g \in G$, a aplicação induzida $g(xH) = (gx)H$ é difeomorfismo e*

4. *Se H é subgrupo normal, então G/H é grupo de Lie com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Denote por $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ as respectivas álgebras de Lie, e seja $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{h}$. Pelo Lema 2.2.8, existem V, U e W abertos com $0 \in V \subset \mathfrak{e}$, $0 \in U \subset \mathfrak{h}$ e $1 \in W \subset G$ tais que a aplicação $\psi^{-1} : V \times U \to W$ dada por:

$$\psi^{-1}(Y, X) = e^Y e^X$$

é difeomorfismo e o aberto $W = e^V e^U$ satisfaz: $W \cap H = e^U$, isto é, $H \cap e^V = \{1\}$. Tomando vizinhanças menores suficientemente pequenas W_1, U_1, V_1, $W_1 = e^{V_1} e^{U_1}$ podemos supor $W_1^2 \subset W$, $W_1^{-1} W_1 \subset W$, com $W_1 = e^{U_1} e^{V_1}$. Nesse caso, a restrição de ψ, ψ_1 continua difeomorfismo, assim que, defina:

$$\begin{aligned} \Psi : V \times H &\to G \\ (Y, h) &\mapsto e^Y h, \end{aligned}$$

que é função diferenciável por ser composta de funções diferenciáveis. Sua diferencial avaliada em (Y, h) e aplicada em $A \in \mathfrak{e}$ e em $B^d(h)$, $B \in \mathfrak{h}$ é dada por

$$\begin{aligned} (d\Psi)_{(Y,h)}(A, B^d(h)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi(Y + tA, e^{tB} h) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{Y+tA} e^{tB} h \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} D_h(e^{Y+tA} e^{tB}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} D_h(\psi^{-1}(Y + tA, tB)) \\ &= (dD_h)_{e^Y}((d\psi^{-1})_{(Y,0)}(A, B)). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(d\Psi)_{(Y,h)}(A, B^d(h)) = (d(D_h \circ \psi^{-1})_{(Y,0)}(A, B)) \tag{2.1}$$

Afirmação: Ψ é um difeomorfismo sobre sua imagem, que é um aberto de G.

Demonstração. Em primeiro lugar, note que Ψ é injetora. De fato, suponha que $e^{Y_1} h_1 = e^{Y_2} h_2$. Então $e^{-Y_2} e^{Y_1} = h_2 h_1^{-1}$. Note que o lado esquerdo da igualdade está contido em W, já que $W_1^{-1} W_1 \subset W$. Como o lado direito está em H, segue que $e^{-Y_2} e^{Y_1} \in W \cap H = e^U$, isto é, $e^{Y_1} = e^{Y_2} e^{X_1}$, para algum $X_1 \in U$. Segue que $\psi{-}1(Y_1, 0) = \psi{-}1(Y_2, X_1)$, portanto $X_1 = 0$ e Ψ é injetora e logo bijetora sobre sua imagem. Note que a equação 2.1 implica que $(d\Psi)_{(Y,h)}$ é isomorfismo, donde segue que Ψ é difeomorfismo local e sua imagem é aberta. Segue da bijetividade que Ψ é difeomorfismo.
Agora, dado $g \in G$, defina $\sigma_g : V \to G/H$ por:

$$\sigma_g(Y) = \pi(g e^Y) = g \circ \pi(e^Y)$$

isto é $\sigma_g = g \circ \pi \circ \Psi|_{V\times\{1\}}$, onde $g : G/H \to G/H$ é a translação $g(xH) = (gx)H$.

■

Afirmação: O conjunto das aplicações $\sigma_g,\ g \in G$ forma um atlas de uma estrutura diferenciável em G/H.

Demonstração. De fato, vejamos que cada $\sigma_g(V)$ é vizinhança de $gH \in G/H, \forall gH \in G/H$. Inicialmente, note que $\sigma_g = g \circ \sigma_1$. Além disso, $\sigma_g(V)$ é um aberto de G/H, pois, $\sigma_1(V) = \pi(e^V) = \pi(e^V H)$ que é aberto pois $e^V H$ é aberto e π é aberta. Daí que, $\sigma_g(V) = g(\sigma_1(V))$ também é aberto pois g é homemorfismo. Ainda: $\sigma_g : V \to \sigma_g(V)$ é bijetora. De fato, se $\sigma_g(Y_1) = \sigma_g(Y_2)$, então existem $h_1, h_2 \in H$ tais que $ge^{Y_1}h_1 = ge^{Y_2}h_2$. Mas então $e^{Y_1}h_1 = e^{Y_2}h_2 \iff \Psi(Y_1, h_2)\Psi(Y_2, h_2) \therefore Y_1 = Y_2$ pela injetividade de Ψ.
Também, σ_g é homeomorfismo: por construção, σ_g é contínua. Para ver que é aberta, tome $A \subset V$ aberto. Então $\sigma_g(A) = g(\pi(e^A)) = g(\pi(e^A H))$. Mas então, como $e^A H = \Psi(A \times H)$, este é aberto, logo $\sigma_g(A)$ também o é.
Isso conclui a demonstração de que G/H é localmente Euclidiano e portanto 2 enumerável. O fato de ser Hausdorff vem de H ser subgrupo fechado e portanto a ação de H em G ser própria, resultado topológico (BOURBAKI, 1995).
Por fim, para ver que σ_g formam um atlas, note que, para $g_1, g_2 \in G$, o mapa de transição $\sigma_{g_2}^{-1} \circ \sigma_{g_1}$ é dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_{g_2}^{-1} \circ \sigma_{g_1} &= p(\Psi^{-1}(g_2^{-1}g_1\Psi(Y,1))) \\ &= p(\Psi^{-1}(g_2^{-1}g_1e^Y)),\end{aligned}$$

onde $p : V \times H \to V$ é a primeira projeção. De fato, sejam $Y, Z \in V$ tais que $\sigma_{g_1}(Y) = \sigma_{g_2}(Z)$. Isso significa que $\exists h \in H$ tal que:

$$g_1\Psi(Y,1) = g_1e^Y = g_2e^Z h = g_2\Psi(Z,h),$$

de outra forma:

$$\Psi(Z,h) = g_2^{-1}g_1\Psi(Y,1) = g_2^{-1}g_1e^Y.$$

Como Ψ é bijetora, segue que $(Z,h) = \Psi^{-1}(g_2^{-1}g_1e^Y)$ donde

$$\sigma_2^{-1}\sigma_1(Y) = Z = p(\Psi^{-1}(g_2^{-1}g_1e^Y)).$$

Segue que as inversas de σ_g são cartas locais de um atlas diferenciável em G/H, com domínios $U_g = \sigma_g(V)$, pois:

$$\sigma_{g_2}^{-1} \circ \sigma_{g_1} = p \circ \Psi^{-1} \circ E_{g_2^{-1}g_1} \circ \exp$$

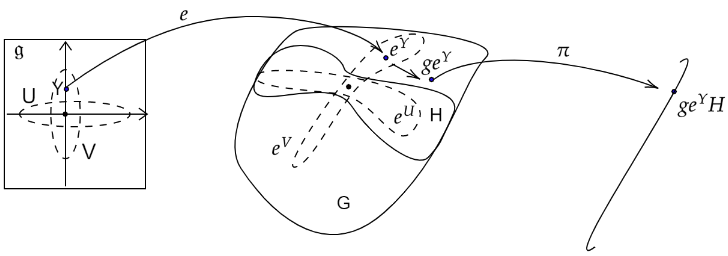
é composição de aplicações diferenciáveis.

■

Assim: o item (1) segue do fato de: $\dim G/H = \dim \mathfrak{e} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim G - \dim H$. Já para o item (2), considere, para $g \in G$, as aplicações $\psi_g = E_g \circ \psi^{-1}$ e σ_g, que são inversas de cartas ao redor de g e gH, respectivamente. Assim, a projeção é dada em coordenadas locais, por

$$\sigma_g^{-1} \circ \pi \circ \psi_g(X, Y) = \sigma_g^{-1}(\pi(ge^Y e^X)).$$

Como $e^X \in H$, temos $\pi(ge^Y e^X) = \pi(ge^Y) = \sigma_g(Y)$. Daí, segue que $\sigma_g^{-1} \circ \pi \circ \psi_g(X, Y) = Y$ é a projeção na segunda coordenada e, portanto, π é submersão diferenciável.
Para o item (3), note que a aplicação induzida é aplicação parcial da ação a, para qual



vale o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\quad p \quad} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times G/H & \xrightarrow{\quad a \quad} & G/H \end{array}$$

Assim que $a \circ \mathrm{Id} \times \pi$ é diferenciável, donde a também o é, já que $\mathrm{Id} \times \pi$ é submersão, donde $xH \mapsto (gx)H$ é diferenciável, para todo $g \in G$. Como sua inversa é $xH \mapsto (g^{-1}x)H$ também diferenciável, segue que $xH \mapsto (gx)H$ é difeomorfismo.
Por fim, se H é subgrupo normal e fechado, então G/H é grupo, no qual o produto $\bar{p}$ é diferenciável pois o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\quad p \quad} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G/H \times G/H & \xrightarrow{\quad \bar{p} \quad} & G/H \end{array}$$

e $\pi \times \pi$ é submersão. Nesse caso, note que π é homomorfismo diferenciável e sua diferencial $(d\pi)_1$ homomorfismo de álgebras de Lie sobrejetor, com núcleo $\mathfrak{h}$, donde segue que a álgebra de Lie de G/H é isomofa a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Por fim, para ver a unicidade, suponha que existe outra estrutura diferencíavel com tais propriedades $(G/H)'$. Então, uma vez que a projeção é uma submersão e que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G/H \arrow[r, "\mathrm{Id}'"] & (G/H)' \end{tikzcd}$$

segue que a identidade é difeomorfismo e logo que as estruturas diferenciáveis coincidem.

□

Esse resultado implica no seguinte corolário, cuja demonstração pode ser consultada em (MARTIN, 2016).

Corolário 2.2.1. *Sejam G e H grupos de Lie conexos $\phi : G \to H$ homomorfismo diferenciável sobrejetor tal que $(d\phi)_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é isomorfismo. Então $G/\ker\phi \cong H$.*

Proposição 2.2.4. *Sejam G e H grupos de Lie e $\phi : G \to H$ homomorfismo sobrejetor tal que $(d\phi)_1$ é isomorfismo. Então ϕ é aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Note que pelo Corolário (2.2.1), temos que $H \overset{\psi}{\cong} G/\ker(\phi)$. Não é difícil demonstrar que $\ker\phi$ é subgrupo de Lie de G com Álgebra de Lie $\ker d(\phi)_1$. Como, neste caso, $\ker d(\phi)_1 = \{0\}$, segue que $\ker\phi$ é subgrupo discreto. Além do mais, $\ker(\phi)$ é subgrupo discreto. $Lie(\ker(\phi)) = \ker((d\phi)_1) = \{0\}$ e logo $\dim\ker(\phi) = 0$. Segue do lema a seguir 2.2.9 que a projeção $\pi : G \to G/\ker(\phi)$ é recobrimento topológico. Por ser homomorfismo contínuo, é diferenciável (MARTIN, 2016, Teorema 7.7). Concluí-se que $\phi = \pi \circ \psi$ é recobrimento diferenciável.

□

Lema 2.2.9. *Seja G grupo topológico localmente conexo e $\mathcal{T} \subset G$ subgrupo discreto. Então a projeção canônica $\pi : G \to G/\mathcal{T}$ é recobrimento topológico.*

Demonstração. Tome aberto U com $U \cap \mathcal{T} = \{1\}$ e seja V vizinhança de 1 conexa tal que $V^{-1} = V$ e $V^2 = U$ (note que tal vizinhança existe pela conexidade local de G, pelo fato de, se W é vizinhança conexa de 1, $V = W \cap W^{-1}$ ser vizinhança conexa de 1 e pelo produto ser contínuo em G, respectivamente). Agora, para $g \in G$, temos que $\pi(gV) \subset G/\mathcal{T}$ é vizinhança conexa de $x = g\mathcal{T}$, pois π é aberta. Além disso, vale que

$$\pi^{-1}(\pi(gV)) = \bigcup_{\lambda\in\mathcal{T}} gV\lambda.$$

Note que os aberto $gV\lambda$ são conexos e disjuntos, por continuidade. De fato, se $y \in gV\lambda_1 \cap gV\lambda_2$, então:

$$g^{-1}y = v_1\lambda_1 = v_2\lambda_2,\ v_1, v_2 \in V$$

Daí que $v_2^{-1}v_1 = \lambda_2\lambda_1^{-1} \in U \cap \mathcal{T} = \{1\}$ e portanto $v_1 = v_2, \lambda_1 = \lambda_2$. Segue que $\pi^{-1}(\pi(gV))$ é união de componentes conexas homeomorfas a $\pi(gV)$, já que $\pi|_{gV\lambda} : gV\lambda \to \pi(gV)$ é bijetiva, contínua e aberta.

$\square$

2.3 TEOREMAS DE LIE

Os três principais teoremas da teoria de grupos de Lie estabelecem a conexão entre os grupos de Lie e suas álgebras de Lie. Veremos que no caso de grupos simplesmente conexos, esta relação é bem intima, de modo que o funtor de Lie é, quando restrito a estes, uma equivalência de categorias.

Teorema 2.3.1 (1^o Teorema de Lie)**.** *Seja G grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então existe único grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Segue direto da Proposição 2.2.1, uma vez que basta tomar o recobrimento universal da componente da identidade G_0 para ser tal grupo. Note que a álgebra de Lie deste é isomorfa a $\mathfrak{g}$ pois $\pi : \tilde{G}_0 \to G_0$ é difeomorfismo local e homomorfismo e logo $(d\pi)_1 : Lie(\tilde{G}) \to \mathfrak{g}$ é isomorfismo.

□

Teorema 2.3.2. *Sejam G, H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ e $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe homomorfismo de grupos $\Phi : U \subset G \to H$ tal que $(d\Phi)_1 = \phi$.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{g}(\phi) \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ o gráfico de ϕ. É fácil ver que $\mathfrak{g}(\phi)$ é subálgebra de Lie da álgebra produto. Pela Proposição 2.2.2, existe $G(\phi) \subset G \times H$ o subgrupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}(\phi)$, isto é, $G(\phi) = \langle \exp \mathfrak{g}(\phi)) \rangle = \{e^{X_1} \dots e^{X_n} | X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}(\phi), n \in \mathbb{N}\}$. Ainda: seja $\rho : G(\theta) \to G$ a restrição da projeção na primeira componente. Note que então $(d\rho)_{(1,1)}$ é a restrição da projeção $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ ao gráfico $\mathfrak{g}(\theta)$. Mas como $\mathfrak{g}(\theta) \cong \mathfrak{g}$, segue que $(d\rho)_{(1,1)}$ é isomorfismo de álgebras de Lie. Pelo Teorema da Função inversa, segue que existem vizinhanças $V_1 \subset G(\theta)$ de $(1,1)$ e $U_1 \subset G$ de 1 tais que $\rho_v = \rho|_{V_1} : V_1 \to U_1$ é difeomorfismo. Denote por $\bar{\phi}$ a inversa de ρ_v. Por definição, $\rho(x,y) = x$, daí que $\bar{\Psi}(x) = (x, \Psi(x))$, onde $\Psi : U_1 \to H$ é diferenciável. Além disso, segue da definição que o gráfico de Ψ é V_1.
Agora tomo $V \subset V_1$ tal que $V^2 \subset V_1$ e defina $U = \rho(V)$.
Afirmação: $\Psi|_U : \to H$ é homomorfismo local.
De fato, sejam $g_1, g_2 \in U$ tais que $g_1 g_2 \in U$. Então $\bar{\Psi}(g_i) = (g_i, \Psi(g_i))$, $i = 1, 2$; e $\bar{\Psi}(g_1 g_2) = (g_1 g_2, \Psi(g_1 g_2))$ estão em V. Mas como $G(\theta)$ é subgrupo de $G \times H$, segue que:

$$(g_1, \Psi(g_1))(g_2, \Psi(g_2)) = (g_1 g_2, \Psi(g1)\Psi(g_2))$$

Como $(g_1 g_2, \Psi(g1)\Psi(g_2)) \in V_1$, ρ_V é injetora e $\rho(g_1 g_2, \Psi(g_1 g_2)) = g_1 g_2 = \rho(g_1 g_2, \Psi(g_1)\Psi(g_2))$, segue que $\Psi(g_1 g_2) = \Psi(g_1)\Psi(g_2)$ e logo Ψ é homomorfismo local.
Como $V_1 \subset G \times H$ é aberto, é subvariedade. Como este é o gráfico de Ψ, segue que Ψ é diferenciável. Ainda: como o gráfico de Ψ está contido em $G(\theta)$, segue que o gráfico de $(d\Psi)_1$ está contido em $\mathfrak{g}(\phi)$ e logo $(d\Psi)_1 = \phi$.

□

Teorema 2.3.3 (2^o Teorema de Lie)**.** *Sejam G, H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ tais que G é simplesmente conexo e $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe único homomorfismo de grupos $\Phi : G \to H$ tal que $(d\Phi)_1 = \phi$.*

Demonstração. Assim como no teorema anterior, seja $G(\phi) \subset G \times H$ subgrupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\phi)$. Como ρ é homomorfismo, $(d\rho)_{(1,1)}$ é isomorfismo, segue que ρ é difeomorfismo local e logo sua imagem é subgrupo aberto de G. Como este é conexo, segue que sua imagem coincide com G e logo ρ é sobrejetora. Segue da Proposição 2.2.4 que ρ é uma aplicação de recobrimento. Mas então, como G é simplesmente conexo, devemos ter que ρ é difeomorfismo, pela unicidade do recobrimento universal. Defina então $\Psi : G \to H$ por $\Psi = \pi_H \circ \Psi^{-1}$, onde π_H é a projeção em H. Então segue da definição que $\pi_H|_{G(\phi)} = \Psi \circ \rho$ e logo $(d\pi_H|_{G(\phi)})_{(1,1)} = (d\Psi)_1 \circ (d\rho)_{(1,1)} : \mathfrak{g}(\phi) \to \mathfrak{h}$ é a projeção em $\mathfrak{h}$. Logo, dado $X \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\begin{aligned}\phi(X) &= (d\pi_H|_{G(\phi)})_{(1,1)}(X, \phi(X))\\ &= (d\Psi)_1 \circ (d\rho)_{(1,1)}(X, \phi(X))\\ &= (d\Psi)_1(X)\end{aligned}$$

e logo $(d\Psi)_1 = \phi$.

□

Teorema 2.3.4 (3^o Teorema de Lie)**.** *Dada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que $\dim \mathfrak{g} < \infty$, então existe grupo de Lie G cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Ado (MARTIN, 2016), da teoria de álgebras de Lie, temos que existe representação fiel (injetora) $\rho(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$, onde $\dim V = n < \infty$, de tal forma que $\mathfrak{g}$ é isomorfa à subálgebra $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$. Portanto, se $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie real, então $V \cong \mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{g}$ é isomorfa a uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, do grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Daí que o subgrupo $G = \langle \exp \rho(\mathfrak{g}) \rangle$ é grupo de Lie conexo com álgebra de Lie isomorfa à $\mathfrak{g}$.

□

Observação 2.3.1*.* Em (DUISTERMAAT; KOLK, 2000) é dada outra demonstração deste Teorema, que não envolve tanto a teoria de Álgebras de Lie. A ideia da demonstração é a seguinte: Note que, dado um grupo de Lie conexo G, e um caminho fechado suave na origem γ, este define um caminho suave ρ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G por $\rho(t) = (dD_{\gamma(t)^{-1}})_{\gamma(t)}\gamma'(t)$. Recíprocamente, dado um caminho ρ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, este define um único caminho suave γ partindo da identidade em G, solução do problema de valor inicial:

$$\lambda'(t) = (dD_\lambda(t))_1\rho(t);$$
$$\lambda(0) = 1.$$

A ideia é considerar o conjunto de caminhos suaves em $\mathfrak{g}$, $P(\mathfrak{g})$, e definir, neste, um produto de caminhos que o torne Grupo de Lie (em geral, de dimensão infinita, cuja definição é similar a de um de dimensão finita). Em seguida, considerando o subgrupo $P(\mathfrak{g})_0$ que consiste de caminhos em $P(\mathfrak{g})$ para os quais existe um tipo específico de homotopia, mostra-se que este é normal e $P(\mathfrak{g})/P(\mathfrak{g})_0$ é grupo de Lie de dimensão finita, com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.

Observação 2.3.2. Segue dos 3 Teoremas de Lie que o funtor de Lie é uma equivalência de categorias entre a categoria dos Grupos de Lie simplesmente conexos e a categoria de Álgebras de Lie de dimensão finita.

Exemplo 2.3.1. Sejam $G = H = \mathbb{R}_+$ grupos de Lie, $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ morfismo entre suas álgebras de Lie dado pelo mapa linear $\phi(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Note que o mapa $\Psi : G \to H$ dado por $\Psi(x) = x^a$ é morfismo de grupos de Lie, que satisfaz:

$$(d\Psi)_1(x) = \Psi'(1)(x) = ax = \phi(x)$$

Como G é simplesmente conexo, segue que este é o único homomorfismo com tal propriedade, pelo Teorema 2.3.3.

Exemplo 2.3.2. Considere o mapa

$$\phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$
$$\begin{pmatrix} w+ix & -y+iz \\ y+iz & w-ix \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w^2+x^2-y^2-z^2 & 2xy-2zw & 2xz+2yw \\ 2xy+2zw & w^2-x^2+y^2-z^2 & 2yz-2xw \\ 2xz-2yw & 2yz+2xw & w^2-2x^2-y^2+z^2 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil mostrar que este mapa está bem definido e é homomorfismo de Grupos de Lie. Também é possível provar que é recobrimento de $SO(3)$ por $SU(2)$, que é simplesmente conexo e logo seu recobrimento universal. Para ver que $SU(2)$ é simplesmente conexo, note que a aplicação

$$\psi : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \to SU(2)$$
$$(w, z) \mapsto \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}$$

está bem definida e é difeomorfismo. Além disso, não é difícil demonstrar que $\mathbb{S}^3$ é simplesmente conexo. Agora vejamos que a diferencial de ϕ é isomorfismo. Note que esta leva base de $\mathfrak{su}(2)$ em na base de $\mathfrak{so}(3)$ da seguinte forma. Considere a base de $\mathfrak{su}(2)$

$$a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \; b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

e a base de $\mathfrak{so}(3)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned}
(d\phi)_1(a) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(e^{ta}) = A \\
(d\phi)_1(b) &= B \\
(d\phi)_1(c) &= C,
\end{aligned}$$

e é fácil verificar que preserva o colchete, donde, por linearidade, é isomorfimso de álgebras de Lie. Como é homomorfismo de grupos, tem posto constante e logo sua imagem é subgrupo aberto no conexo $SO(3)$, donde segue que é sobrejetor e, portanto, recobrimento.

3 APLICAÇÕES E EXEMPLOS

Este capítulo aborda algumas das diversas aplicações dos resultados do capítulo anterior sobre grupos de Lie, inclusive, na classificação destes.

3.1 CLASSIFICAÇÃO DOS GRUPOS DE LIE ABELIANOS

Já vimos que a abelianidade de um grupo de Lie implica que sua álgebra de Lie é abeliana e logo, isomorfa a $\mathbb{R}^n$. Veremos que isso restringe fortemente as possíveis estruturas de grupo, de modo que podemos classificar os grupos de Lie abelianos usando os três teoremas de Lie.

Proposição 3.1.1. *Os únicos grupos de Lie conexos de dimensão 1 são $\mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^1$ com suas estruturas canônicas de grupo.*

Demonstração. O grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ é o único grupo de Lie simplesmente conexo de dimensão 1, pois toda álgebra de Lie de dimensão 1 é isomorfa a $\mathbb{R}$. Não é difícil provar que todo subgrupo discreto de $\mathbb{R}$ é da forma $\lambda\mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, os únicos subgrupos discretos de $\mathbb{R}$ são $\{0\}$ ou isomorfos a $\mathbb{Z}$. Segue que os únicos grupos de Lie conexos de dimensão 1 são isomorfos a $\mathbb{R}/\{0\} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

□

Proposição 3.1.2. *Os grupos de Lie conexos abelianos de dimensão n são isomorfos a $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$, $k = 0, \ldots, n$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.6 um grupo conexo é abeliano se e só se sua álgebra de Lie é abeliana. Dessa forma, para determinar tais grupos, basta exibir um grupo simplesmente conexo abeliano e determinar seus subgrupos discretos, já que todas álgebras de Lie abelianas de dimensão n são isomorfas a $\mathbb{R}^n$. Tome como grupo simplesmente conexo e álgebra $\mathbb{R}^n$ o grupo aditivo $\mathbb{R}^n$. O resultado segue do fato que todo subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^k$, $k = 0, \ldots, n$.
De fato, vale o seguinte resultado: se $H \subset \mathbb{R}^n$ é subgrupo discreto, então existem $\{v_1, \ldots, v_k\}$ conjunto linearmente independente tal que

$$H = \{n_1 v_1 + \ldots + n_k v_k\}.$$

Isto é, os elementos de H são da forma $(n_1, \ldots, n_k, 0, \ldots, 0)$ na base $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, com $n_i \in \mathbb{Z}$.
Provemos por indução sobre n. Para $n = 1$, o resultado segue da proposição anterior.

Suponha, pois, que o resultado vale para $n-1$. Como H é fechado, segue que existe $v_1 \in H$ tal que

$$||v_1|| = \inf\{||v|| \in \mathbb{R} \,|\, v \in H, v \neq 0\}.$$

Seja $\langle v_1 \rangle$ o subespaço gerado por v_1. Então $\langle v_1 \rangle \cap H = \mathbb{Z}v_1$. Além disso pondo $U = B(0, ||v_1||/3)$ temos que $U \cap H = \{0\}$. Seja $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\langle v_1 \rangle$ a projeção canônica.
Afirmação: $p(H)$ é discreto.

Demonstração. De fato, note que, $p(U) \cap p(H) = \{0\}$. Além disso, $x \in p^{-1}(p(U)) \iff x = av_1 + u,\ a \in \mathbb{R},\ u \in U$. Assim, suponha que $av_1 + u = x \in H$. Se $n = \lfloor a \rfloor$, então $(a-n)v_1 + u$ e $(a-(n+1))v_1 + u$ estão em H. Daí que $\exists b,\ |b| < 1/2$ tal que $bv_1 + u \in H$. De fato, note que

$$(a-n)v_1 + u + (a-(n+1))v_1 + u' = 2((a-n-1/2)v_1 + u \in H \implies$$
$$\implies (a-n-1/2)v_1 + u \in H.$$

Mas como $0 \leq a-n < 1 \implies a-n-1/2 < 1/2$. Assim, se $a-n=0$, temos que $u \in H$ e basta tomar $b=0$. Se $a-n \neq 0$, tomamos $b = a-n-1/2$.
Portanto $bv_1 + u \in B(0, ||v_1||)$, pois $||bv_1|| < 1/2||v_1||$ e $||u|| < 1/3||v_1||$. Mas pela escolha de v_1 isso implica que $bv_1 + u = 0 \implies u = -bv_1 \in \langle v_1 \rangle$, donde segue que

$$p^{-1}(p(U)) \cap H \subset H \cap \langle v_1 \rangle \implies p(U) \cap p(H) \subset p(H \cap \langle v_1 \rangle) = \{0\}.$$

Logo $p(H)$ é discreto em $\mathbb{R}^n/\langle v_1 \rangle$, pois se $h + \langle v_1 \rangle \in p(H)$, então

$$(p(U) + (h + \langle v_1 \rangle)) \cap p(H) = \{h + \langle v_1 \rangle\}$$

e $(p(U) + (h + \langle v_1 \rangle))$ é aberto.

■

Uma vez que, $\mathbb{R}^n/\langle v_1 \rangle \cong \mathbb{R}^{n-1}$, pela hipótese de indução existem $w_2, \ldots, w_k$ vetores L.I. tais que

$$p(H) = \mathbb{Z}w_2 + \ldots + \mathbb{Z}w_k.$$

Tome $v_i \in p^{-1}(w_i),\ i = 2, \ldots, k$. Note que, como p é homomorfismo, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é L.I.. Além disso, por construção, todo elemento $x \in H$ se escreve como

$$x = a_1v_1 + n_2v_2 \ldots + n_kv_k,$$

com $n_i \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mas daí, como $n_2v_2 + \ldots + n_kv_k \in H$, isso implica que $av_1 \in H$ e logo $a \in \mathbb{Z}$.

□

Corolário 3.1.1. *Os grupos de Lie conexos abelianos compactos de dimensão n são isomorfos a $\mathbb{T}^n$, o toro n-dimensional.*

3.2 ÁLGEBRAS DE LIE COMPACTAS

3.2.1 Teorema de Weyl

Segue da teoria de grupos compactos (MARTIN, 2016) que se G é um grupo de Lie compacto, então existe produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{g}$ em relação ao qual $Ad(g)$ é isometria (automorfismo), ou seja,

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \ \forall g \in G, \ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Tomando $g = \exp(tZ), \ t \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle Ad(\exp(tZ))X, Ad(\exp(tZ))Y \rangle \\ &= \langle \exp(t\text{ad}\,(Z))X, \exp(t\text{ad}\,(Z))Y \rangle, \ X, Y, Z \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \exp(t\text{ad}\,(Z))X, \exp(t\text{ad}\,(Z))Y \rangle \\ &= \langle ad(Z)X, Y \rangle + \langle X, ad(Z)Y \rangle. \end{aligned}$$

Logo ad (Z) é antissimétrica em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Isso garante que em um grupo compacto, ad (X), para $X \in \mathfrak{g}$ tem sua complexificação diagonálizavel. Esses fatos motivam a definição.

Definição 3.2.1 (Álgebra de Lie Compacta)**.** Uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é dita *compacta* se existe em $\mathfrak{g}$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em relação ao qual a adjunta é antissimétrica, ou seja,

$$\langle ad(Z)X, Y \rangle = -\langle X, ad(Z)Y \rangle, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Observação 3.2.1. Segue então que a álgebras de Lie de grupos compactos são compactas.

Observação 3.2.2. No restante do capítulo, fixemos $\langle , \rangle$ para denotar o produto interno na respectiva Álgebra de Lie em relação ao qual a adjunta é antissimétrica.

Exemplo 3.2.1. Uma vez que $SO(3, \mathbb{R})$ é compacto, sua álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ é compacta. Uma base para tal álgebra é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o colchete é dado pelo comutador, uma conta simples mostra que $[A, B] = -C, \ [B, C] = -A, \ [A, C] = B$, ou seja,

$$Lie(SO(3)) := \mathfrak{so}(3) = span\{A, B, C, : [A, B] = -C, \ [B, C] = -A, \ [A, C] = B\}.$$

Além disso, em relação a esta base, as adjuntas são dadas, por:

$$\text{ad}\,(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{ad}\,(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad}\,(C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em vista do Terceiro Teorema de Lie, surge a pergunta: dada um álgebra de Lie compacta, o grupo de Lie simplesmente conexo com tal álgebra é compacto? O Teorema de Weyl afirma que sim, e será discutido nessa seção. Antes, porém, apresentamos alguns resultados necessários para a demonstração deste.

Definição 3.2.2 (Ideal)**.** Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que uma subálgebra $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se $[X, I] \in \mathfrak{i}$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall I \in \mathfrak{i}$.

Definição 3.2.3 (Álgebras de Lie Simples e Semissimples)**.** Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita *simples* se $\dim \mathfrak{g} > 1$ e seus únicos ideais são os triviais $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é *semissimples* se podemos escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, onde cada $\mathfrak{g}_i$ é ideal *simples*.

Lema 3.2.1. *Se $\mathfrak{g}$ é álgebra semissimples, então seu centro é nulo, isto é, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.*

Demonstração. De fato, se $\mathfrak{g}$ é simples, então $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ou $\mathfrak{g}$, pois é ideal. Mas no segundo caso, isso implica $\mathfrak{g}$ abeliana, e, como $\dim \mathfrak{g} > 1$, qualquer subespaço seria ideal não trivial, logo $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Agora, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$, note que as componentes comutam entre si, pois são ideais e sua interseção é $\{0\}$. Assim, dado $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, escreva $Z = Z_1 + ... + Z_n$, com $Z_i \in \mathfrak{g}_i$. Então dado $X \in \mathfrak{g}_j$, temos que

$$0 = [X, Z] = [X, Z_j],$$

portanto $Z_j \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_j) = \{0\}$, pois $\mathfrak{g}_j$ é simples, e logo $Z_j = 0, \forall j$, donde segue que $Z = 0$, isto é, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

□

Lema 3.2.2. *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semissimples. Então $\mathfrak{g} \cong [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \mathfrak{g}'$. Onde $\mathfrak{g}'$ é o ideal de $\mathfrak{g}$ cujos elementos são combinações lineares de elementos que podem ser escritos como colchete de dois elementos de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. De fato, se $\mathfrak{g}$ é simples, então, como $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ é ideal e $g' \neq \{0\}$ pois $\mathfrak{g}$ não é abeliana, segue que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Agora, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$ é semissimples, então, pelo argumento acima,

$$\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$$

e, como $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \{0\}$, se $i \neq j$ segue que

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] &= \sum [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \\ &= [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] + \ldots + [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n] = \mathfrak{g}_1 + \ldots + \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.2.2. Considere novamente a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Em vista do exemplo anterior é direto que $[\mathfrak{so}(3), \mathfrak{so}(3)] = \mathfrak{so}(3)$. Além disso, não é difícil mostrar que $\mathfrak{so}(3)$ é simples.

Lema 3.2.3. *Seja V espaço vetorial munido de um produto interno e $\rho : \mathfrak{g} \in End(V)$ uma representação tal que todo $\rho(g)$ é antissimétrica. Então existem subespaços irredutíveis e invariantes com respeito a ρ, $V_1, \ldots, V_n$, tais que*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

isto é, tais subespaços são irredutíveis e invariantes por $\rho(g), \forall g \in G$.

A demonstração do lema é equivalente à afirmação de que toda representação real unitária é completamente reduzível, cuja demonstração pode ser encontrada em (HALL, 2000, Proposição 4.34).

Proposição 3.2.1. *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie compacta. Então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp},$$

onde $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ é ideal semissimples.

Demonstração. Por definição, para qualquer $X \in \mathfrak{g}$, ad (X) é antissimétrica em relação ao produto interno de $\mathfrak{g}$. Logo, pelo lema 3.2.3 existem subespaços invariantes irredutíveis por ad , $\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_m, \mathfrak{u}_1, \ldots,\ \mathfrak{u}_n$ tais que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{i}_m \oplus u_1 \oplus \ldots \oplus u_n$$

e $\dim \mathfrak{i}_j = 1$, $\dim u_j > 1$. Segue da invariância por ad (X), para todo X, que cada um desses subespaços é ideal de $\mathfrak{g}$, e que estes comutam entre si pois têm a interseção nula. Além disso, cada u_j é simples, pois se $\mathfrak{o} \subset u_j$ é ideal de u_j, então o também é ideal de $\mathfrak{g}$, já que este comuta com as outras componentes de $\mathfrak{g}$, contrariando a irredutibilidade de u_j. Desta forma, ponha $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{i}_m$ e $\mathfrak{u} = u_1 \oplus \ldots \oplus u_n$. Então $\mathfrak{u}$ é semissimples, por definição, e $\mathfrak{i}$ é abeliano, pois $\dim \mathfrak{i}_j = 1, \forall j$ e estes comutam entre si. Como $\mathfrak{i}$ comuta com $\mathfrak{u}$, segue que $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Como $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{u} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \{0\}$, pois $\mathfrak{u}$ é semissimples, logo $\mathfrak{i} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Resta verificar que $\mathfrak{u} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$. Como as dimensões dos subespaços coincidem, basta verificar a inclusão. Uma vez que $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' = [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ por ser semissimples, basta verificar que, $[m\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$. De fato, se $X, \in \mathfrak{u}$, $Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, temos que

$$\langle [X,Y], Z\rangle = \langle Y, [X,Z]\rangle = \langle Y, 0\rangle = 0.$$

Logo o resultado segue.

□

Corolário 3.2.1. *Uma álgebra de Lie compacta é semissimples se e só se* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Definição 3.2.4 (Forma de Killing)**.** Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos a *forma bilinear simétrica de Cartan-Killing*, $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, por

$$\mathcal{K}(X,Y) = tr(\text{ad}\,(X)\text{ad}\,(Y)).$$

Lema 3.2.4. *Seja* $\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie compacta. Então sua forma de Cartan-Killing é negativa semidefinida e* $\mathcal{K}$ *é definida se e só se* $\mathfrak{g}$ *é semissimples.*

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{g}$, uma vez que ad$\,(X)$ é antissimétrica em relação a $\langle , \rangle$, segue que seus autovalores são todos puramente imaginários. Assim, sejam $ia_1, \ldots, ia_n$, com $a_j \in \mathbb{R}$ os autovalores de ad$\,(X)$. Então

$$\mathcal{K}(X,X) = tr(\text{ad}\,(X)^2) = -(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \leq 0.$$

Além disso, $\mathcal{K}(X,X) = 0$ se e só se todos seus autovalores são nulos. Como ad$\,(X)$ é antissimétrica em relação a $\langle , \rangle$, é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$) e logo isso ocorre se e só se ad$\,(X) = 0$, ou seja, $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

□

Corolário 3.2.2. *Se* $\mathfrak{g}$ *é álgebra de Lie compacta semissimples, então* $-\mathcal{K}$ *é produto interno em relação ao qual ad*(X) *é antissimétrica,* $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. De fato, como, pelo lema anterior, é fácil ver que $-\mathcal{K}$ é produto interno. Ainda, se $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\text{ad}\,(Z)X, Y) &= tr(\text{ad}\,(\text{ad}\,(Z)X)\text{ad}\,(Y)) \\
&= tr([\text{ad}\,(Z), \text{ad}\,(X)]\text{ad}\,(Y)) \\
&= tr((\text{ad}\,(Z)\text{ad}\,(X) - \text{ad}\,(X)\text{ad}\,(Z))\text{ad}\,(Y)) \\
&= tr(\text{ad}\,(X)(\text{ad}\,(Y)\text{ad}\,(Z) - \text{ad}\,(Z)\text{ad}\,(Y)) \\
&= -tr(\text{ad}\,(X)[\text{ad}\,(Z), \text{ad}\,(Y)]) \\
&= -\mathcal{K}(X, \text{ad}\,(Z)Y).
\end{aligned}$$

Logo ad é antissimétrica em relação a forma de Cartan-Killing.

□

Exemplo 3.2.3. Considerando $\mathfrak{so}(3)$ novamente, temos que

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{K}(A, A) &= -\operatorname{tr}(\text{ad}\,(A)^2) = 2 \\
-\mathcal{K}(B, B) &= 2 \\
-\mathcal{K}(C, C) &= 2 \\
-\mathcal{K}(A, B) &= 0 \\
-\mathcal{K}(B, C) &= 0 \\
-\mathcal{K}(C, A) &= 0
\end{aligned}
$$

Assim $\{A, B, C\}$ é base ortogonal em relação a forma de Killing.

A ideia é, considerar o grupo de automorfismos de uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ compacta. Veremos que este é grupo de Lie compacto, logo sua componente da identidade é grupo de Lie compacto e conexo. No caso em que a álgebra é também semissimples, a álgebra de Lie deste grupo coincide com $\mathfrak{g}$, de modo que obtemos explicitamente um grupo compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposição 3.2.2. *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie. Então $Lie(\text{Aut}(\mathfrak{g})) = Der(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. De fato, suponha $D \in Lie(\text{Aut}(\mathfrak{g}))$. Então $\exp(tD) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Logo, se $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\exp(tD)([X, Y]) = [\exp(tD)(X), \exp(tD)(Y)].$$

Derivando ambos os lados em $t = 0$, temos que

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)].$$

Logo $D \in Der(\mathfrak{g})$ e $Lie(\text{Aut}(\mathfrak{g})) \subset Der(\mathfrak{g})$. Agora, fixe $D \in Der(\mathfrak{g})$ e sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ dadas por:

$$\alpha(t) = (\exp(tD))([X, Y]) \qquad \beta(t) = [(\exp(tD)(X), (\exp(tD)(Y)])$$

Então $\alpha(0) = \beta(0) = [X, Y]$ e $\alpha'(t) = D(\alpha(t))$, pela definição da exponencial. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\beta'(t) &= [D(\exp(tD)(X)), \exp(tD)(Y)] + [\exp(tD)(X), D(\exp(tD)(Y))] \\
&= D([\exp(tD)(X), \exp(tD)(Y)]) \\
&= D(\beta(t))
\end{aligned}
$$

Pela unicidade da solução de EDO's, segue que $\alpha = \beta$, donde $\exp(tD) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}),\ \forall t$ e logo $Der(\mathfrak{g}) = Lie(\text{Aut}(\mathfrak{g}))$. $\square$

Proposição 3.2.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra semissimples compacta. Então o grupo Aut$(\mathfrak{g})$ é compacto.*

Demonstração. Primeiro, veja que Aut$(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ é fechado, pois para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$, ponha

$$S(X,Y) = \{\phi \in GL(\mathfrak{g}) : [\phi X, \phi Y] = \phi[X,Y]\} \subset GL(\mathfrak{g}).$$

Então não é difícil mostrar cada $S(X,Y)$ é fechado e logo Aut$(\mathfrak{g}) = \bigcap_{X,Y\in\mathfrak{g}} S(X,Y)$ também. Além disso, considere $S \subset GL(\mathfrak{g})$ o subgrupo de isometrias de $-\mathcal{K}$. Temos que este é compacto. De fato, é fácil ver que é fechado. Além disso, considerando a norma induzida pelo produto interno $-\mathcal{K}$, este é limitado (contido na bola de raio 1) e logo compacto. Finalmente, note que Aut$(\mathfrak{g}) \subset S$, pois se $\phi \in$ Aut$(\mathfrak{g})$, por definição ad$(\phi X) = \phi$ad$(X)\phi^{-1}$ e logo ϕ é isometria, pois

$$\begin{aligned} -\mathcal{K}(\phi X, \phi Y) &= -tr(\text{ad}\,(\phi X)\text{ad}\,(\phi Y)) \\ &= -tr(\phi\text{ad}\,(X) \circ \text{ad}\,(Y)\phi^{-1}) \\ &= -(tr(\phi) + tr(\text{ad}\,(X)\text{ad}\,(Y)) - tr(\phi)) \\ &= -tr(\text{ad}\,(X)\text{ad}\,(Y)) = -\mathcal{K}(X,Y). \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.5. *Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então $\mathfrak{g} \cong Der(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Mostremos que ad $: \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ é isomorfismo de álgebras de Lie. De fato, primeiro note que, para cada $X \in \mathfrak{g}$, ad$(X) \in Der(\mathfrak{g})$, pois
ad$(\lambda X)(Y, \lambda Z) =$ ad$(X)(Y) + \lambda$ad$(X)(Z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. E

$$\begin{aligned} \text{ad}\,(X)[Y,Z] = [X,[Y,Z]] &= [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] \\ &= [\text{ad}\,(X)Y, Z] + [Y, \text{ad}\,(X)Z] \end{aligned}$$

Além disso, ad preserva o colchete, pois

$$\begin{aligned} \text{ad}\,([X,Y])(Z) &= [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ &= \text{ad}\,(X)\text{ad}\,(Y)(Z) - \text{ad}\,(Y)\text{ad}\,(X)(Z) = [\text{ad}\,(X), \text{ad}\,(Y)](Z) \end{aligned}$$

Em seguida, note que $I =$ ad$(\mathfrak{g}) \subset Der(\mathfrak{g})$ é ideal, pois, se $D \in Der(\mathfrak{g})$, ad$(X) \in$ ad$(\mathfrak{g})$, $Y \in \mathfrak{g}$, então

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}\,(X)](Y) &= D(\text{ad}\,(X)(Y)) - ad(X)(D(Y)) \\ &= D([X,Y]) - [X, D(Y)] \\ &= [D(X), Y] = \text{ad}\,(D(X))(Y) \end{aligned}$$

Isto é, $[D, \text{ad}\,(X)] = \text{ad}\,(D(X)) \in \text{ad}\,(\mathfrak{g}) \;\therefore\; \text{ad}\,(\mathfrak{g})$ é um ideal. Como $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, temos que ad é injetiva e logo $\mathfrak{g} \cong I$, donde segue que I é semissimples. Assim, se $\mathcal{K}$ é a forma de Killing em $Der(\mathfrak{g})$, temos que $\mathcal{K}|_I$ é não degenerada, e logo, $Der(\mathfrak{g}) = I \oplus I^{\perp}$ (resultado da álgebra linear). Agora, supondo $D \in I^{\perp}$, então, se $X \in \mathfrak{g}$, como I e $I^{\perp}$ são ideais $[D, \text{ad}\,(X)] = \text{ad}\,(D(X)) \in I \cap I^{\perp} = \{0\}$ e logo $D(X) = 0$, por injetividade. Segue que $I^{\perp} = \{0\}$ e logo $\text{ad}\,(\mathfrak{g}) = I = Der(\mathfrak{g})$.

□

Corolário 3.2.3. *Se $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie compacta semissimples, então Aut$(\mathfrak{g})_0$, a componente da identidade de Aut$(\mathfrak{g})$ é grupo compacto conexo com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. De fato, pela Proposição 3.2.2 temos que $Lie(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0) \cong \mathfrak{g}$. Como este é fechado num compacto Hausdorff, segue que também é compacto.

□

Proposição 3.2.4. *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semissimples. Então, para todo grupo simplesmente conexo G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, temos que*

$$G/Z(G) \cong \textit{Aut}(\mathfrak{g})_0.$$

Além disso, $Z(\textit{Aut}(\mathfrak{g})_0) = \{1\}$ e Aut$(\mathfrak{g})_0$ compacto $\iff$ $\mathfrak{g}$ é compacta.

Demonstração. Se G é grupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então $Ad : G \to \text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ é difeomorfismo local, pois $(dAd)_1 = \text{ad} : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ é isomorfismo e Ad é homomorfismo de grupos de Lie. Logo, $\Im(Ad)$ é subgrupo aberto no conexo $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ e logo Ad é sobrejetora. Segue que $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0 \cong G/\ker(Ad) = G/Z(G)$, pois $\ker(Ad) = Z(G_0) = Z(G)$. Agora, seja $\tilde{G}$ grupo simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $p : \tilde{G} \to \tilde{G}/Z(\tilde{G}) \cong \text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ a projeção . Então o subgrupo $p^{-1}(Z(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0))$ é discreto e normal, já que p é isomorfismo e

$$\begin{aligned} Lie(Z(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0)) &= \mathfrak{z}(Lie(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0))) = \mathfrak{z}(Der(\mathfrak{g})) \\ &= \mathfrak{z}(g) = \{0\}. \end{aligned}$$

Logo $p^{-1}(Z(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0)) \subset Z(\tilde{G})$ e logo $Z(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0) = \{1\}$.

□

Lema 3.2.6. *Seja G grupo de Lie, $H \subset G$ fechado tal que G/H é compacto. Então existe compacto de interior não vazio $C \subset G$ tal que $1 \in int(C)$ e $p(int(C)) = G/H$, com $C^{-1} = C$.*

Demonstração. Seja V vizinhança simétrica da identidade de fecho compacto. Então, para cada $x = gH \in G/H$ o conjunto

$$Vx = \{hx : h \in V\} = p(\{hg \,:\, h \in V\} = p(Vg)$$

é vizinhança de x, pois a projeção p é aberta. Segue que a coleção $\{Vx : x \in G/H\}$ é cobertura aberta de G/H e, como este é compacto, existem $x_1 = g_1H, \ldots, x_n = g_nH$ tais que $G/H = Vx_1 \cup \ldots \cup Vx_n$. Ponha, pois,

$$C' = \overline{V} \cup g_1\overline{V} \cup \ldots \cup g_n\overline{V}.$$

Então, por construção, $1 \in V \subset int(C')$ e, se $gH \in G/H$, então $gH \in Vx_i = p(Vg_i)$, para algum i, donde $\exists g \in (Vg_i)$, $p(g) = gH$. Como $Vg_i \subset C'$, segue que $gH \in p(C')$, donde $p(C') = G/H$. Finalmente, pondo

$$C = C' \cup (\overline{V^{-1}}g_1^{-1} \cup \ldots \cup \overline{V^{-1}}g_n^{-1}),$$

temos que C é união finita de compactos, logo compacto, que ainda valem $1 \in int(C)$, $p(C) = G/H$ e que $C^{-1} = C$.

□

Lema 3.2.7. *Suponha que L é grupo de Lie conexo e $\Gamma \subset L$ é subgrupo discreto e central, tal que L/Γ é compacto. Seja $\theta : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ homomorfismo no grupo multiplicativo dos reais. Então existe função contínua $f : L \to \mathbb{R}_+$ tal que*

- $f(\gamma) = \theta(\gamma),\ \gamma \in \Gamma$
- $f(x) > 0,\ \forall x \in L$ *e* $f(1) = 1$
- $f(x\gamma) = f(x)\theta(\gamma),\ \forall x \in L,\ \gamma \in \Gamma$

Demonstração. Seja $p : L \to L/\Gamma$ a projeção canônica e $C \subset L$ compacto tal que $p(C) = L/\Gamma$ como no lema 3.2.7. Tome uma função contínua com suporte compacto $g : L \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1$ se $x \in C$ e $g(y) \geq 0, \forall y \in L$ (Pois L é normal). Defina a função $f_0 : L \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f_0(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} g(x\gamma)\theta(\gamma^{-1}).$$

Vejamos que esta função está bem definida e é contínua. De fato, denote por K o suporte compacto de g, $x_0 \in L$ e tome vizinhança compacta $U \subset L$ de x. Então, para $x \in U$ e $\gamma \in \Gamma$, temos que $g(x\gamma) \neq 0 \implies x\gamma \in\ K \implies \gamma \in x^{-1}K$. Portanto, para todo $x \in U$, a soma na fórmula de f_0 ocorre apenas sobre elementos em $\Gamma_U = U^{-1}K \cap \Gamma$. Mas como $U^{-1}K$ é compacto e Γ discreto, esse conjunto é finito e logo a soma está bem definida. Dessa forma, $f_0|_U$ é soma finita de funções contínuas e, portanto, contínua, donde segue que f_0 também o é. Além disso, a função f_0 é estritamente positiva, pois dado $x \in L$, como $p(C) = G/\Gamma$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $x\gamma \in C$ e logo $g(x\gamma) = 1$. Defina, pois,

$$\begin{aligned} f :& L \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto& \frac{f_0(x)}{f_0(1)} \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} f(x\gamma_0) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} g(x\gamma_0\gamma)\theta(\gamma^{-1}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} g(x\gamma_0\gamma)\theta(\gamma^{-1}\gamma_0)\theta(\gamma_0) \\ &= \left(\sum_{\hat{\gamma} \in \Gamma} g(x\hat{\gamma})\theta(\hat{\gamma}^{-1}) \right) \theta(\gamma_0) = f(x)\theta(\gamma_0) \end{aligned}$$

Por fim, $f(\gamma) = f(1\gamma) = f(1)\theta(\gamma) = \theta(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

$\square$

Teorema 3.2.1. *Suponha que L é grupo de Lie conexo e $\Gamma \subset L$ é subgrupo discreto e central, tal que L/Γ é compacto. Seja $\theta : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ homomorfismo no grupo multiplicativo dos reais. Então existe homomorfismo diferenciável $\phi : L \to \mathbb{R}_+$ extensão de θ.*

Demonstração. Considere a função $f : L \to \mathbb{R}_+$ como no lema anterior. Defina

$$\begin{aligned} F :& L \times L \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto \log(f(xy)) - \log(f(x)) - \log(f(y)). \end{aligned}$$

Então, $\forall \gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} F(x\gamma, y\gamma) &= \log(f(xy\gamma^2)) - \log(f(x\gamma)) - \log(f(y\gamma)) \\ &= \log(f(xy)\theta(\gamma)^2) - \log(f(x)\theta(\gamma)) - \log(f(y)\theta(\gamma)) \\ &= \log(f(xy)) + 2\log(\theta(\gamma)) - \log(f(x)) - \log(\theta(\gamma)) - \log(f(y)) - \log(\theta(\gamma)) \\ &= \log(f(x, y)) - \log(f(x)) - \log(f(y)) \\ &= F(x, y), \end{aligned}$$

pois $\Gamma \subset Z(L)$. Isso implica que existe função contínua $F_0 : (L/\Gamma) \times (L/\Gamma) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F_0(x, y) = F(p(x), p(y))$$

induzida no quociente. Ainda, note que

$$\begin{aligned}F(xy,u)-F(y,u) &= (\log(f(xyu))-\log(f(xy))-\log(f(u)))-\\&-(\log(f(yu))-\log(f(y))-\log(f(u)))\\&=(\log(f(xyu))-\log(f(x))-\log(f(yu))-\\&-(\log(xy)-\log(f(x))-\log(f(y))\\&=F(x,yu)-F(x,y).\end{aligned}$$

Donde

$$F_0(xy,u)-F_0(y,u)=F_0(x,yu)-F_0(x,y). \tag{3.1}$$

Além disso,

$$F(1,y)=F(y,1)=\log(f(y))-\log(f(y))-\log(f(1))=0. \tag{3.2}$$

Afirmação: Existe uma função contínua $a : L/\Gamma \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_0(x,y)=a(xy)-a(x)-a(y) \text{ e } a(1)=0.$$

Demonstração. De fato, seja μ a medida de Haar de L/Γ normalizada por $\mu(L/\Gamma)=1$ e defina $a : L/\Gamma \to \mathbb{R}$ por

$$a(x)=-\int_{L/\Gamma} F_0(x,u)\mu(du).$$

Note que b está bem definida, pois F_0 é contínua e L/Γ é compacto. Então

$$a(xy)-a(x)-a(y)=-\int_{L/\Gamma} F_0(xy,u)-F_0(x,u)-F_0(y,u),$$

que pela equação 3.1 é igual a:

$$a(xy)-a(x)-a(y)=-\int_{L/\Gamma} F_0(x,yu)-F_0(x,y)-F_0(x,u)\mu(du).$$

Como a medida de Haar é invariante por translação à esquerda, as integrais do primeiro e último termo se cancelam. Logo

$$\begin{aligned}a(xy)-a(x)-a(y) &= F_0(x,y)\int_{L/\Gamma}\mu(du)\\&=F_0(x,y)\end{aligned}$$

Finalmente, por causa da equação 3.2, note que

$$a(1)=\int_{L/\Gamma} F_0(1,u)\mu(du)=0,$$

como queríamos. ■

Defina

$$\begin{aligned} h : L &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \exp(a(p(x)). \end{aligned}$$

Então, note que:

$$\begin{aligned} h(xy)h^{-1}(x)h^{-1}(y) &= \exp(a(p(xy)) \exp(-a(p(x)) \exp(-a(p(y)) \\ &= \exp(a(p(xy)) - a(p(x)) - a(p(y)) \\ &= \exp(F_0(p(x), p(y))) = \exp(F(x, y)) \\ &= \exp(\log(f(xy)) - \log(f(x)) - \log(f(y))) \\ &= f(xy)f(x)^{-1}f(y)^{-1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{f(xy)}{h(xy)} = \frac{f(x)}{h(x)} \frac{f(y)}{h(y)}.$$

Portanto, definindo $\phi : L \to \mathbb{R}_+$ por:

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{h(x)},$$

pelas observações acima segue que ϕ é homomorfismo, que estende θ, pois:

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) &= \frac{f(\gamma)}{h(\gamma)} = \frac{f(\gamma)}{\exp(a(1))} \\ &= \frac{f(\gamma)}{\exp(0)} = f(\gamma) = \theta(\gamma). \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.8. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples compacta e $\tilde{G}$ o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja Aut$(\mathfrak{g})_0 = \tilde{G}/\Gamma$ tal que $\Gamma \cong \pi_1($Aut$(\mathfrak{g})_0)$ o primeiro grupo fundamental de Aut$(\mathfrak{g})_0$. Então Γ é finitamente gerado.*

Demonstração. Note, primeiramente, que a existência de G e Γ são garantidas pelo Terceiro teorema de Lie, pela Proposição 2.2.1 e pela teoria de espaços de recobrimento.

Portanto, seja C compacto tal que $\tilde{G} = int(C)\Gamma$, $C^{-1} = C$ e $1 \in int(C)$, como no Lema 3.2.7. Note que C^2 é compacto, e $\{int(C)\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é cobertura aberta de C^2 (pois é de $\tilde{G}$, logo, existem $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tais que

$$C^2 \subset int(C)\gamma_1 \cup \cdots \cup int(C)\gamma_n.$$

Defina $\Gamma_1 = \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$.

Afirmação: $\Gamma = (C^2 \cap \Gamma)\Gamma_1$.

Demonstração. De fato, seja $p_1 : \tilde{G} \to \tilde{G}/\Gamma_1$ a projeção. Então, como $int(C)^2 \subset int(C^2)$ e p_1 é aberta, segue que $p_1(C^2)$ tem interior não vazio. Além do mais, $p_1(C^2)$ é subgrupo, pois, se $g, h \in C^2$, então existem $c_1, c_2 \in int(C)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_1$ tais que

$$g = c_1\gamma_1 \text{ e } h = c_2h_2.$$

Como $\Gamma_1 \subset \Gamma$ é central,

$$gh^{-1}c_1\gamma_1\gamma_2^{-1}c_2^{-1} = c_1c_2^{-1}\gamma_1\gamma_2^{-1}$$

e logo

$$p_1(g)p_1(h)^{-1} = p_1(gh^{-1}) = p_1(c_1c_2) \in p_1(C^2).$$

Em particular, $p_1(C^2)$ é subgrupo aberto do grupo conexo $\tilde{G}/\Gamma_1$, de modo que $p_1(C^2) = \tilde{G}/\Gamma_1$. Isto implica que, $\forall g \in \tilde{G}$, $\exists \gamma \in \Gamma_1$ tal que $g\gamma \in C^2$. Em particular, se $g \in \Gamma$, $g\gamma \in C^2 \cap \Gamma$, de modo que

$$\Gamma \subset (C^2 \cap \Gamma)\Gamma_1 \implies \Gamma = (C^2 \cap \Gamma)\Gamma_1.$$

■

Finalmente, como C^2 é compacto e Γ discreto, $C^2 \cap \Gamma$ é finito e como Γ_1 é finitamente gerado, segue que $\Gamma = (C^2 \cap \Gamma)\Gamma_1$ é finitamente gerado.

□

Exemplo 3.2.4. Uma vez que o compacto $SO(2) \cong \mathbb{S}^1$, é temos que $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$, portanto, finitamente gerado.

Lema 3.2.9. *Seja G grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples. Então o único homomorfismo diferenciável $\phi : G \to \mathbb{R}_+$ é o trivial, isto é, $\phi(g) = 1$, $\forall g \in G$.*

Demonstração. Considere o homomorfismo induzido $(d\phi)_1 : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$. Note que, dado $X \in \mathfrak{g}$, $\exists Y, Z \in \mathfrak{g}$, tais que $X = [Y, Z]$, pois $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, uma vez que $\mathfrak{g}$ é semissimples. Como $\mathbb{R}$ é abeliano, segue que

$$(d\phi)_1(X) = (d\phi)_1([Y, Z]) = [(d\phi)_1(Y), (d\phi)_1(Z)] = 0,$$

logo, $(d\phi)_1 \equiv 0$. Mas então pelo Segundo Teorema de Lie, devemos ter que ϕ é o homomorfismo trivial, já que ambos tem mesmo homomorfismo induzido nulo.

□

Finalmente, apresentamos um último lema da teoria de espaços de recobrimento para completar a demonstração.

Lema 3.2.10. *Seja $\tilde{G}$ recobrimento universal de um espaço topológico M tal que M é compacto, conexo e Haussdorff. Então $\pi_1(M)$ é finito $\iff$ $\tilde{G}$ é compacto.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Como $\{x\} \in M$ é fechado, $p^{-1}(x) \subset \tilde{G}$ é também fechado e logo compacto. Além disso, pela definição de recobrimento, é discreto, logo, finito. Mas como $|p^{-1}(x)| = |\pi_1(M,x)|$, segue que $\pi_1(M)$ é finito.
($\Longrightarrow$) Tome cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $\tilde{G}$. Em seguida, seja, para cada $x \in M$, V_x vizinhança de x tal que $p^{-1}(V_x)$ é união disjunta de n abertos homeomorfos a V_x. Defina, para cada $U \in \mathcal{U}$,

$$W_x^U = p(U \cap p^{-1}(V_x)),\ x \in M.$$

Como $\mathcal{U}$ é cobertura aberta de $\tilde{G}$, segue que $\{W_x^U\} := \mathcal{W}$ é cobertura aberta de M tal que $p^{-1}(W_x^U)$ é união disjunta de abertos homeomorfos a W_x^U e, para todo $W \in \mathcal{W}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $p^{-1}(W) \subset U$. Assim, se $\{W_1, \ldots, W_n\}$ é subcobertura finita, então, $\{p^{-1}(W_1), \ldots, p^{-1}(W_n)\}$ é cobertura aberta de $\tilde{G}$. Tomando $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $p^{-1}(W_i) \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$, segue que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ é subcobertura finita de $\mathcal{U}$ e, logo, $\tilde{G}$ é compacto.

□

Teorema 3.2.2. *Teorema de Weyl*
Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples compacta e $\tilde{G}$ o grupo simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então $\tilde{G}$ é compacto.

Demonstração. Seja $\Gamma \cong \pi_1(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0)$ o subgrupo discreto central tal que $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0 \cong \tilde{G}/\Gamma$, cuja existência é garantida pela unicidade do recobrimento universal e da teoria de recobrimento. Pelo Lema 3.2.10, basta mostrar que Γ é finito, já que $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ é compacto. Pelo Lema 3.2.8, Γ é finitamente gerado e, portanto,

$$\Gamma \overset{\phi}{\cong} \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}.$$

Pelo teorema da classificação de grupos abelianos finitamente gerados. Suponha, por absurdo, que $k \geq 1$. Então, defina:

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma &\to \mathbb{R}_+ \\ \gamma &\mapsto \exp(p_1(\phi(\gamma))) \end{aligned}$$

onde $p_1 : \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n} \to \mathbb{Z}$ é a projeção na primeira coordenada. Segue que θ é homomorfismo não trivial. Pelo Teorema 3.2.1 existe homomorfismo $\phi : \tilde{G} \to \mathbb{R}_+$ que estende θ, mas como ϕ é também não trivial, isso é uma contradição com o Lema 3.2.9. Segue que devemos ter $\Gamma \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ e logo finito.

□

3.2.2 Sobrejetividade da exponencial em Grupos Compactos

Sabemos que a imagem da exponencial está contida na componente conexa da identidade de um grupo de Lie. É de se questionar quando então, esse mapa é sobrejetor num grupo conexo. Apresentamos aqui uma condição suficiente para a sobrejetividade da exponencial, que é do grupo ser compacto. Antes, é preciso a introdução e elaboração de alguns conceitos sobre álgebras de Lie.

Definição 3.2.5 (Subálgebras de Cartan)**.** Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dita *subálgebra de Cartan* se $\mathfrak{h}$ é nilpotente e $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \implies X \in \mathfrak{h}$. No caso em que $\mathfrak{g}$ é semissimples, é possível mostrar que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é de Cartan se e só se $\mathfrak{g}$ é abeliana, as adjuntas ad(H), $H \in \mathfrak{h}$ são diagonalizáveis e $\mathfrak{h}$ é maximal com essas propriedades.

Proposição 3.2.5. *Seja* $\mathfrak{u}$ *álgebra de Lie compacta. Então*

1. $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ *é subálgebra de Cartan se e só se* $\mathfrak{t}$ *é abeliana e maximal.*
2. *A álgebra* $\mathfrak{u}$ *é união de suas subálgebras de Cartan.*

Demonstração. 1)Seja $X \in \mathfrak{t}$ qualquer. Para ver que $\mathfrak{t}$ é abeliana, basta mostrar que $\mathfrak{t} \subset \ker$ ad(X). Note que, por ser subálgebra, ad$(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}$. Mas por definição de subálgebra niltpotente, segue que ad$(X)|_{\mathfrak{t}}$ é transformação linear nilpotente. Mas como ad(X) é também antissimétrica pela compacidade de $\mathfrak{g}$, segue que ad$(X)|_{\mathfrak{t}} = 0$, isto é, $\mathfrak{t} \subset \ker$ ad(X). Agora, se $\mathfrak{t}'$ é subálgebra abeliana com $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$, então, se $X \in \mathfrak{t}'$,

$$[X, \mathfrak{t}] = \{0\} \subset \mathfrak{t} \implies X \in \mathfrak{t}$$

e logo $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$, logo esta é maximal.
Reciprocamente, basta mostrar que dado $X \in \mathfrak{g}$, então $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \implies X \in \mathfrak{h}$, pois ad é trivialmente nilpotente. De fato, se $X \notin \mathfrak{t}$, então, existe $Y \in \mathfrak{t}$ tal que $[X, Y] \neq 0$, pois caso contrário, $span\{X, \mathfrak{t}\}$ seria subálgebra abeliana que conteria $\mathfrak{t}$ propriamente, contrariando a hipótese. Assim, suponha por absurdo que $\exists X \notin \mathfrak{t}$ tal que $[X, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t}$ e tome $Y \in \mathfrak{t}$ com $[X, Y] = 0$. Então $[Y, [X, Y]] = 0$, pois $[X, Y], Y \in \mathfrak{t}$ que é abeliana. Assim $X \in \ker$ ad$(Y)^2$. Como ad(Y) é antissimétrica, $\ker$ ad$(Y)^2 = \ker$ ad(Y) e $[X, Y] = 0$, contradição com a escolha de X e Y, donde a tese segue.
2)Dado $X \in \mathfrak{u}$, mostremos que existe $\mathfrak{t}$ subálgebra de Cartan tal que $X \in \mathfrak{t}$. De fato, pelo item (1), basta tomar uma subálgebra abeliana maximal contendo X. Note que esta sempre existe, pois basta tomar a subálgebra

$$\mathfrak{t} = \bigcup_{\substack{X \in \mathfrak{h} \\ \mathfrak{h} \text{ é subálgebra} \\ \text{abeliana}}} \mathfrak{h}$$

E que $\mathfrak{t} \neq \emptyset$, pois $span\{X\} \subset \mathfrak{t}$.

$\square$

Exemplo 3.2.5. Considere a álgebra compacta $\mathfrak{so}(3)$, com base $\{A, B, C\}$ como no Exemplo 3.2.1. Não é difícil ver que suas subálgebras abelianas maximais são $\mathfrak{t}_1 = span\{A\}$, $\mathfrak{t}_2 = span\{B\}$, $\mathfrak{t}_3 = span\{C\}$. Segue que estas são suas subálgebras de Cartan e além disso $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_3$.

Lema 3.2.11. *Seja $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ subálgebra de Cartan de uma álgebra compacta. Então, existe $X_0 \in \mathfrak{t}$ tal que*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(X_0) = \ker \textit{ad}\,(X_0).$$

Demonstração. De fato, note que as adjuntas ad $(X), X \in \mathfrak{t}$ comutam entre si, pois se $X, Y \in \mathfrak{t}$, então

$$\text{ad}\,(X)\text{ad}\,(Y) - \text{ad}\,(Y)\text{ad}\,(X) = [\text{ad}\,(X), \text{ad}\,(Y)] = \text{ad}\,([X, Y]) = \text{ad}\,(0) = 0$$

Além disso, são antissimétricas, de modo que são simultaneamente diagonálizaveis na complexificada $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ e seus autovalores são puramente imaginários. Isto é, para cada $X \in \mathfrak{t}$, podemos associar um subespaço $\mathfrak{g}_\alpha$ invariante por ad (X), tal que ad (X) age como multiplicação por $i\lambda = i\alpha(X)$, onde este é um autovalor de X. Assim, existe um conjunto finito ($\dim \mathfrak{u}$) de funcionais lineares $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ e subespaços $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ tais que

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}} : \forall X \in \mathfrak{t},\ \text{ad}\,(X)Y = i\alpha(X)(Y)\}$$

e $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \sum \mathfrak{g}_\alpha$. Como ad $(X)(Y) = 0$ para $X, Y \in \mathfrak{t}$, 0 é autovalor das adjuntas, logo o funcional nulo pertence a R. Como $\mathfrak{t}$ é abeliana, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$. De fato, temos igualdade, já que se $Y \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$, então $[Y, \mathfrak{t}] = \{0\} \implies [Y, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t} \implies Y \in \mathfrak{t}$, já que é de Cartan. Como R é finito, deve existir $X_0 \in \mathfrak{t}$ tal que $\alpha(X_0) \neq 0$ para todo $\alpha \in R, \alpha \neq 0$. Então tal X_0 satisfaz a proposição, pois $\ker$ ad $(X_0) = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}$.

□

Proposição 3.2.6. *Seja $\mathfrak{u}$ álgebra de Lie compacta e $X \in \mathfrak{u}$ tal que $\dim \ker \textit{ad}\,(X)$ é mínima (X é dito elemento regular). Então*

$$\mathfrak{z}(X) = \ker \textit{ad}\,(X)$$

é a única subálgebra de Cartan que contém X. Além disso, se uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ contém um elemento regular X, então $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(X)$.

Demonstração. De fato, por pela Proposição 3.2.5, item 2, temos que existe subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ que contém X. Como $\mathfrak{t}$ é abeliana, temos $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{z}(X)$. Mas, pelo lema anterior, $\exists X_0 \in \mathfrak{t}$ tal que $\mathfrak{z}(X_0) = \mathfrak{t} \subset \mathfrak{z}(X)$. Mas como X é regular, $\dim \mathfrak{z}(X) \leq \dim \mathfrak{z}(X_0)$, donde segue que $\mathfrak{z}(X) = \mathfrak{z}(X_0) = \mathfrak{t}$. Como $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(X)$, segue a unicidade.

□

Lema 3.2.12. *Seja* $\mathfrak{u}$ *álgebra compacta e* $\mathfrak{t}$ *subálgebra de Cartan. Suponha que* $\mathfrak{t}$ *contém um elemento regular* H *Então,* $\forall X \in \mathfrak{u}$, $\exists g \in Aut(\mathfrak{u})_0$ *tal que* $g(X) \in \mathfrak{t}$.

Demonstração. Considere a função:

$$\begin{aligned} f : Aut(\mathfrak{u}) &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \langle gX, H \rangle \end{aligned}$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto interno de $\mathfrak{u}$. Então é fácil ver que essa função é diferenciável na métrica induzida pelo produto interno e, como $Aut(\mathfrak{u})_0$ é compacto, assume mínimo em algum $g_0 \in Aut(\mathfrak{u})_0$. Portanto, $\forall Y \in \mathfrak{u}$, a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle e^{t\text{ad}\,(Y)} g_0(X), H \rangle \end{aligned}$$

assume mínimo em $t = 0$. Como $\exp(t\text{ad}\,(Y))$ é isometria em relação a $\langle , \rangle$ (por definição), segue que

$$\begin{aligned} g(t) &= \langle e^{t\text{ad}\,(Y)} g_0(X), e^{-t\text{ad}\,(Y)} e^{t\text{ad}\,(Y)(H)} \rangle \\ &= \langle g_0 X, e^{-t\text{ad}\,(Y)} H \rangle. \end{aligned}$$

Logo, como $t = 0$ é mínimo,

$$\begin{aligned} 0 = g'(0) &= \langle g_0(X), [Y, H] \rangle \\ &= \langle g_0(X), [Y, H] \rangle \\ &= \langle [H, g_0(X)], Y \rangle \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a antissimetria de ad (H) em relação ao produto interno. Como Y foi arbitrário, segue que

$$[H, g_0(X)] = 0,$$

isto é, $g_0(X) \in \mathfrak{z}(H) = \mathfrak{t}$.

□

Proposição 3.2.7. *Sejam* $\mathfrak{u}$ *uma álgebra de Lie compacta e* $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ *uma subálgebra de Cartan. Então*

1. $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(X_0) = \ker \textit{ad}\,(X_0)$ *para algum elemento regular* $X_0 \in \mathfrak{t}$.
2. *Se* $\mathfrak{t}_1$ *é uma subálgebra de Cartan, então* $\exists g_0 \in Aut(\mathfrak{u})_0$ *tal que* $\mathfrak{t}_1 = g_0(\mathfrak{t})$.
3. $\mathfrak{u} = \bigcup_{g \in Aut(\mathfrak{u})_0} g(\mathfrak{t})$.

Demonstração. 1)Tome elemento regular $X \in \mathfrak{u}$. Pela proposição $3.2.6$, temos que $\mathfrak{z}(X) = \ker \text{ad}\,(X)$ é uma subálgebra de Cartan que contém X. Escolha também $X_0 \in \mathfrak{t}$ tal que $\ker \text{ad}\,(X_0) = \mathfrak{t}$, que existe pelo lema 3.2.11. Pelo lema 3.2.12, $\exists g \in Aut(\mathfrak{u})_0$ tal que $g(X_0) \in \mathfrak{z}(X)$. Portanto, como $\mathfrak{z}(X)$ é subálgebra abeliana, $\mathfrak{z}(X) \subset \ker \text{ad}\,(g(X_0)$. No entanto, como $\text{ad}\,(g(X_0)) = g \circ \text{ad}\,(X_0) \circ g^{-1}$, pois g é automorfismo, segue que

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{t}) &= g(\ker \text{ad}\,(X_0)) \\ &= \ker \text{ad}\,(g(X_0)), \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} Y \in g(\ker \text{ad}\,(X_0)) &\iff y = g(Z),\ Z \in \ker \text{ad}\,(X_0) \\ &\iff g^{-1}(Y) = Z,\ Z \in \ker \text{ad}\,(X_0) \\ &\iff \text{ad}\,(X_0)(g^{-1}(Y)) = 0 \\ &\iff [X_0, g^{-1}(Y)] = 0 \\ &\iff [g(X_0), Y] = 0 \\ &\iff Y \in \ker \text{ad}\,(g(X_0) \end{aligned}$$

e daí que $\mathfrak{z}(X) \subset g(\mathfrak{t})$. Mas, tanto $g(X)$ como $g(\mathfrak{t})$ são subálgebras de Cartan, logo $\mathfrak{z}(X) = g(\mathfrak{t})$. Logo

$$\dim \ker \text{ad}\,(X_0) = \dim \mathfrak{t} = \dim g(\mathfrak{t}) = \dim \ker \text{ad}\,(X).$$

Como X é regular, segue que X_0 também é regular. Isso implica no item (1), pois X_0 e $\mathfrak{t}$ foram arbitrários. Para (2), seja $\mathfrak{t}_1 = \ker \text{ad}\,(X_1)$ e $g \in Aut(\mathfrak{u})_0$ tal que $g(X_1) \in \mathfrak{t}$. Então

$$g(\mathfrak{t}_1) = g(\ker \text{ad}\,(X_1)) = \ker \text{ad}\,(g(X_1)) \subset \mathfrak{t}$$

e como $g(\mathfrak{t}_1)$ também é subálgebra de Cartan, segue que a inclusão é de fato igualdade e vale o item (2). Para o item (3), basta notar que todo elemento de $\mathfrak{u}$ pertence a uma subálgebra de Cartan, e todas essas são da forma $g(\mathfrak{t})$ pelo item (2).

□

Em seguida, veremos que os grupos compactos possuem subestruturas correspondentes às subálgebras de Cartan, os toros maximais, cujo nome vem do fato de serem subgrupos compactos e conexos e logo isomorfos a um toro. A ideia da demonstração da sobrejetividade da exponencial segue de mostrar que todo elemento dem um grupo compacto e conexo está contido num toro maximal, que estes são conjugados e que a imagem da exponencial é sobrejetora num toro maximal.

Definição 3.2.6 (Toro Maximal)**.** Seja U um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{u}$. Um *toro maximal* em U é uma subgrupo abeliano compacto e conexo, que é maximal em relação a essas propriedades.

Observação 3.2.3. Como vimos na seção anterior, todo grupo de Lie abeliano compacto e conexo é isomorfo a um toro, que justifica essa definição.

Proposição 3.2.8. *Se $T \subset U$ é toro maximal, então sua álgebra de Lie $\mathfrak{t}$ é subálgebra de Cartan da álgebra de Lie $\mathfrak{u}$ de U. Reciprocamente, se $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ é subálgebra de Cartan, então $\langle \exp \mathfrak{t} \rangle = \exp \mathfrak{t}$ é toro maximal.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.5, basta mostrar que $\mathfrak{t}$ é abeliana maximal. Como T é abeliano, segue que $\mathfrak{t}$ é abeliana. Agora, suponha $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{s}$, com $\mathfrak{s}$ subálgebra abeliana. Então $\langle \exp \mathfrak{s} \rangle$ é grupo abeliano, conexo, assim como seu fecho $\overline{T}$, que também é compacto e, pelo teorema de classificação, um toro. Como $T \subset \overline{T}$, pela maximalidade de T, $T = \overline{T}$ e logo $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ e portanto $\mathfrak{t}$ é maximal.
Por outro lado, se $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ é subálgebra de Cartan, então $\mathfrak{t}$ é abeliana, daí que $\langle \exp \mathfrak{t} \rangle$ é abeliano e conexo, bem como seu fecho. Defina $\mathfrak{s} = Lie(\overline{\langle \exp \mathfrak{t} \rangle})$. Então $\mathfrak{s}$ é subálgebra abeliana que contém $\mathfrak{t}$. Pela maximalidade de $\mathfrak{t}$, segue que $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ e logo $\overline{\langle \exp \mathfrak{t} \rangle} = \langle \exp \mathfrak{t} \rangle$ pois ambos são conexos. Segue que $\langle \exp \mathfrak{t} \rangle$ é um toro (pois é fechado num compacto Haussdorff e logo compacto), que é maximal, pois se $\langle \exp \mathfrak{t} \rangle \subset \overline{T}$ é um toro e $\mathfrak{h} = Lie(\overline{T})$, isso implicaria $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ e $\langle \exp \mathfrak{t} \rangle = \overline{T}$ por conexidade.
Por fim como $\mathfrak{t}$ é abeliana, então $\langle \exp \mathfrak{t} \rangle = \exp \mathfrak{t}$, pois dado $g = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_n} \in \langle \exp \mathfrak{t} \rangle$, como $[X, Y] = 0, \forall X, Y$, então $g = e^{X_1} \cdots e^{X_n} = e^{X_1 + \cdots + X_n} \in \exp \mathfrak{t}$.

□

Exemplo 3.2.6. Considere $U = SO(3)$. Note que os subgrupos

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$e \qquad T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0t & -\sin & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

são toros maximais de U. Ainda, uma simples conta mostra que suas subálgebras de Lie são dadas, respectivamente, pelas subálgebras de Cartan $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ do Exemplo 3.2.5.

Corolário 3.2.4. *Seja U grupo de Lie compacto com álgebra de Lie compacta $\mathfrak{u}$. Então $\langle \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \rangle = \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, está contido em todo toro maximal T de U.*

Demonstração. De fato, seja T toro maximal, $T = \exp \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h} = \ker(\text{ad}\,(X_0))$ subálgebra de Cartan de $\mathfrak{u}$, onde $X_0 \in \mathfrak{u}$ existe pela Proposição 3.2.7. Então $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \ker(\text{ad}\,(X_0)) = \mathfrak{h}$. Assim, se $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, então $\exp X \in \exp \mathfrak{h}$.

□

Proposição 3.2.9. *Seja U grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{u}$. Então $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ é compacto e conexo, logo, um toro.*

Demonstração. Primeiramente, pelo mesmo argumento anterior, $\langle \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \rangle = \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ pois tal subálgebra é abeliana. Seja $Z = \overline{\exp \mathfrak{z}(\mathfrak{u})}$. Então este é subgrupo abeliano, compacto, conexo contido no centro de U. Segue que sua álgebra de Lie $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, donde segue a igualdade pois a inclusão inversa vem da definição, e assim $\exp \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = Z$.

□

Proposição 3.2.10. *Seja $T \subset U$ toro maximal e $u \in U$. Então uTu^{-1} também é toro maximal.*

Demonstração. De fato, é claro que uTu^{-1} é subgrupo conexo abeliano. Além disso, se $\overline{T} \supset uTu^{-1}$ é toro maximal, então $u^{-1}\overline{T}u \supset T$ é subgrupo conexo abeliano e logo, pela maximalidade de T, $u^{-1}\overline{T}u = T \implies \overline{T} = uTu^{-1}$.

□

Proposição 3.2.11. *Sejam $T_1 = \exp \mathfrak{t}_1$, $T_2 = \exp \mathfrak{t}_2$ toros maximais de $\mathfrak{u} = Lie(U)$. Então existe $u \in U$ tal que $T_2 = uT_1u^{-1}$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.7, existe $g \in Aut(\mathfrak{u})_0$ tal que $\mathfrak{t}_2 = g(\mathfrak{t}_1)$. Como ad $: \mathfrak{u} \to Der(\mathfrak{u})$ é isomorfismo, segue que $Ad : U \to Aut(\mathfrak{u}_0)$ é sobrejetora, logo existe $u \in U$ tal que $Ad(u) = g$. Daí que $\mathfrak{t}_2 = Ad(u)(\mathfrak{t}_1)$ e, logo, se $t \in T$, $t = e^X$, então $utu^{-1} = \exp(Ad(u)(X)) \in \mathfrak{t}_1$. A inclusão recíproca segue analogamente.

□

Lema 3.2.13. *Seja U grupo de Lie compacto, com álgebra de Lie $\mathfrak{u}$. Dado $u \in U$, seja $\mathfrak{z}(u) = \{X \in \mathfrak{u} : Ad(u)X = X\}$. Seja $\mathfrak{e}$ o complementar ortogonal de $\mathfrak{z}(u)$ em $\mathfrak{u}$ em relação ao produto interno invariante. Então $Ad(u)\mathfrak{e} = \mathfrak{e}$ e a aplicação $(Ad(\mathfrak{u} - \text{Id}))|_{\mathfrak{e}} : \mathfrak{e} \to \mathfrak{e}$ é inversível*

Demonstração. Dado $V \in \mathfrak{e}$, temos que $\forall X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, vale

$$\begin{aligned} 0 = \langle X, V \rangle &= \langle Ad(u)X, Ad(u)V \rangle \\ &= \langle X, Ad(u)V \rangle. \end{aligned}$$

Logo $Ad(u)V \in \mathfrak{e}$ e $Ad(u)\mathfrak{e} \subset \mathfrak{e}$. Ainda: como, se $V \in Ad(u)\mathfrak{e} \implies V = Ad(u)W$ e $\forall X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, $\langle W, X \rangle = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle V, X \rangle = \langle Ad(u)W, X \rangle &= \langle Ad(u)W, Ad(u)X \rangle \\ &= \langle W, X \rangle = 0. \end{aligned}$$

Segue que $(Ad(u) - \mathrm{Id})|_{\mathfrak{e}}$ é injetiva e logobijetiva e invertível, pois, para $X \in \mathfrak{e}$, como $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ é o autoespaço associado ao autovalor 1 de $Ad(u)$, então 1 não é autovalor de X e

$$(Ad(u) - \mathrm{Id})X = Ad(u)X - X = 0 \implies X = 0,$$

isto é, $\ker(Ad(u) - \mathrm{Id})|_{\mathfrak{e}} = 0$.

□

Teorema 3.2.3. *Seja U um grupo de Lie compacto. Então $\exp : \mathfrak{u} \to U$ é sobrejetora.*

Demonstração. Se a álgebra de Lie de U não é semissimples, como $\mathfrak{u}$ é compacta, $\mathfrak{u} = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) + \mathfrak{t}$, com $\mathfrak{t}$ semissimples, pela Proposição 3.2.9, $Z = \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ é fechado, donde o quociente U/Z é compacto e semissimples, uma vez que sua álgebra de Lie é isomorfa a $\mathfrak{u}/\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cong \mathfrak{t}$. Assim basta provar no caso em que $\mathfrak{u}$ é semissimples, pois assumindo tal resultado, segue, caso geral, que $\exp : \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \to U/Z$ é sobrejetora, assim se $\pi : U \to U/Z$ é a projeção, para cada $g \in U$, existe $Y \in \mathfrak{u}/\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ tal que $\pi(g) = e^Y$. Como $(d\pi)_1|_{\mathfrak{t}}\mathfrak{u} \to \mathfrak{u}/\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ é isomrofismo, segue que $\exists X \in \mathfrak{t}$ tal que $(d\pi)_1(X) = Y$. Daí que $\pi(e^X) = e^{(d\pi)_1(X)} = e^Y = \pi(g)$. Segue então que $g = e^x z$, com $z = e^W \in Z$, $W \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Como $[X, W] = 0$, pois os ideais correspondentes tem interseção trivial, segue que $g = e^x e^W = e^{X+W}$, donde segue que a exponencial é sobrejetora também em U.
Considere, pois, que U é semissimples. A demonstração segue por indução na dimensão de U. Como a álgebra de Lie semissimples com dimensão mínima é $\mathfrak{su}(2)$, com dimensão 3, começamos a demonstração por esta. É possível demonstrar que a exponencial é sobrejetora para todo grupo de Lie com tal álgebra, pois isso ocorre em $U = SU(2)$(Proposição 3.3.4), que é simplesmente conexo pois $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ através do difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{S}^3 \to SU(2) \\ (\alpha, \beta) &\to \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Suponha, logo, que vale para $\dim U = n$, $n \geq 3$. Seja $\dim U = n + 1$. Então, pela hipótese de indução, em qualquer subgrupo próprio de U a exponencial é sobrejetora. Demonstremos o teorema pela seguinte afirmação: nas hipóteses, se $T = \exp \mathfrak{t} \subset U$ um toro maximal. Então

$$U = \bigcup_{g \in U} gTg^{-1}.$$

Note que daí a sobrejetividade segue, pois dado $u \in U$, sejam $g \in U, t \in T$ tais que $u = gtg^{-1}$. Como $t \in T = \exp Lie(T)$, $t = e^X$, $X \in Lie(T)$, segue que $u = e^{Ad(g)X}$. Note que vale a recíproca: se $\exp$ é sobre, então $U = \bigcup_{g \in U} gTg^{-1}$. De fato, seja $T = \exp \mathfrak{t} \subset U$ toro maximal, $u = e^X \in U$. Então, pela Proposição 3.2.5 existe $\mathfrak{t}_1$ subálgebra de Cartan tal que $X \in \mathfrak{t}_1$. Daí que $u \in \exp \mathfrak{t}_1 = T_1$, que é um toro maximal. Pela Proposição 3.2.11,

existe $g \in U$, $gTg^{-1} = T_1$, logo $\exists t \in T$, $gtg^{-1} = u$.
Assim, para qualquer subgrupo próprio de U, vale que este é união de seus toros maximais.Para $A, K \subset U$, fixe a notação:

$$A^K = \bigcup_{g \in K} gAg^{-1},\ A^\times = A \backslash Z(U)$$

onde $Z(U)$ é o centro de U. Note que então $(A^U)^\times = (A^\times)^U$.
Para provar a afirmação, devemos provar que $U = T^U$. Note que $U^\times$ é aberto, conexo e denso, pois $\dim U \geq 3$ e $Z(U)$ é finito é discreto (pois $(Lie(Z(U)) = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \{0\}$, já que $\mathfrak{u}$ é compacta semissimples) num compacto. Além do mais, como T^U é compacto. De fato, pois considere $f : U \times U \to U,\ f(u, w) = uwu^{-1}$. Então f é contínua, e logo $T^U = f(U \times T)$ é compacto. Então, é suficiente provar que $U^\times = (T^U)^\times = (T^\times)^U \subset T^U$. Pois daí: $U = \overline{U^\times} \subset \overline{T^U} = T^U$. Note que o conjunto $(T^\times)^U$ é fechado em $U^\times$, pois

$$(T^\times)^U = (T^U) \cap U^\times$$

e T^U é compacto. Para ver que é aberto, basta mostrar que para $u \in T^\times$, existe vizinhança $u \in U \subset (T^\times)^U$, pois daí se $gug^{-1} \in (T^\times)^U$, então $gug^{-1} \in gUg^{-1} \subset (T^\times)^U$. Assim, sejam $u \in T^\times$ e $Z(u)$ seu centralizador, que é subgrupo fechado (logo compacto) próprio (pois $u \notin Z(U)$. Repare que a componente da identidade $Z(u)_0 = K$ contém T, e este é um toro maximal de K. Em particular, $u \in K$. Como $\dim K < \dim U$, pela hipótese de indução, $K = T^K$ e, portanto $K \subset T^U$.
Defina $\psi = f|_{U \times K} : U \times K \to U$.
Afirmação: sua diferencial em $(1, u)$ é dada por:

$$(d\psi)_{(1,u)}(X, Y) = (X + Y - Ad(u)X)^d(u).$$

Demonstração. De fato, aplicando a Proposição 2.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
(d\psi)_{(1,u)}(X, Y) &= (d\psi)_{(1,u)}(X, 0) + (d\psi)_{(1,u)}(0, Y) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{tX}ue^{-tX} + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} 1 \cdot e^{tY} \cdot 1 = X^d(u) - X^e(u) + Y^d(u) \\
&= (dD_u)_1(X) + (di)_{u^{-1}}X^d(u^{-1}) + Y^d(u) \\
&= (dD_u)_1(X - (dE_u)_{u^{-1}}(dD_{u^{-1}})_1(X)) + Y^d(u) \\
&= (dD_u)_1(X - Ad(u)X) + Y^d(u) = (X - Ad(u)X + Y)^d(u)
\end{aligned}$$

■

Note que $(d\psi)_{(1,u)}$ é sobrejetora, pois os vetores $(d\psi)_{(1,u)}(0, Y) = Y(u)$ cobrem $T_uK \subset T_uU$, enquanto $(d\psi)_{(1,u)}(X, 0) = ((\mathrm{Id} - Ad(u))X)(u)$ cobrem seu complementar pelo Lema 3.2.13. Segue que existem abertos $A \subset U$, $B \subset K$, com $(1, u) \in A \times B$ tais que $u = \psi(1, u)$ está no interior de $\psi(A \times B)$. Como $u \notin Z(U)$, pode se tomar $B \subset U^\times$ de tal forma que

$$\psi(A \times B) \subset (K^\times)^U \subset (T^\times)^U$$

e logo $u \in int(T^\times)^U$.

$\square$

3.3 GRUPOS DE LIE CLÁSSICOS

Os exemplos naturais de grupos de Lie são grupos de matrizes. Pela identificação de $M_n(\mathbb{R})$ com $\mathbb{R}^{n^2}$, é imediato verificar que $GL(n, \mathbb{R})$ com operação de grupo sendo multiplicação de matrizes é grupo de Lie, pois é aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$, e a multiplicação é C^∞. É imediato também que seu espaço tangente na origem é isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$, logo sua álgebra de Lie é isomorfa a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{R})$ com a operação de soma e o colchete dado pelo comutador. Segue da Proposição 2.2.1 que todo subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{R})$ é grupo de Lie, e sua álgebra de Lie é subálgebra da álgebra de matrizes. Além disso, como existe isomorfismo linear (real) $\varphi : GL(n, \mathbb{C}) \to \varphi(GL(n, \mathbb{C})) \subset GL(2n, \mathbb{R})$, podemos identificar estes com suas imagens e logo tratá-los como grupos de Lie. Note que, apesar dos elementos das subálgebras de Lie destes usualmente serem representadas por matrizes com entradas complexas, essas são subálgebras reais, assim que sua multiplicação por escalar está definida sobre os reais. Em seguida listamos alguns exemplos.
É fácil verificar as Álgebras de Lie nos dois primeiros casos, e o terceiro segue imediato

Grupo de Lie	Álgebra de Lie	$\dim$	Compacto?	Conexo?
$(\mathbb{R}^*, \cdot)$	$\mathbb{R}$	1	Não	Não
$(\mathbb{R}_+, \cdot)$	$\mathbb{R}$	1	Não	Sim
$(\mathbb{S}^1, \cdot)$	$\mathbb{R}$	1	Sim	Sim
$(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$	$\mathfrak{gl}(n) = M_n(\mathbb{R})$	n^2	Não	Não
$(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$	$\mathfrak{sl}(n) = \{\mathrm{tr}\, X = 0\}$	$n^2 - 1$	Não	Sim
$(O(n, \mathbb{R}), \cdot)$	$\mathfrak{so}(n) = \{X^T = -X\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	Não	Não
$(SO(n, \mathbb{R}), \cdot)$	$\mathfrak{so}(n) = \{X^T = -X\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	Sim	Sim
$(U(n), \cdot)$	$\mathfrak{u}(n) = \{X^* = -X\}$	n^2	Sim	Não
$(SU(n), \cdot)$	$\mathfrak{su}(n) = \{\mathrm{tr}\, X = 0 \wedge X^* = -X\}$	$n^2 - 1$	Sim	Sim

do fato de $\mathbb{R}$ ser recobrimento universal de $\mathbb{S}^1$. Note que $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ é aberto, pois coincide com $\det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, logo seu espaço tangente coincide com o espaço vetorial todo. Como todos os outros subgrupos são fechado em $SL(n, \mathbb{R})$, segue que são grupos de Lie. Para verificar sua Álgebras de Lie, basta determinar qual subálgebra de $M_n(\mathbb{R})$ é levada nestes pela aplicação exponencial, seguindo o Teorema do Subgrupo Fechado (Teorema 2.2.1).

Proposição 3.3.1. $\mathfrak{sl}(n) = \{\operatorname{tr} X = 0\}$ *e* $\dim \mathfrak{sl}(n) = n^2 - 1$

Demonstração. De fato, temos que

$$e^{tX} \in SL(n, \mathbb{R}) \iff \det(e^{tX}) = e^{t \operatorname{tr} X} = 1, \forall t \iff \operatorname{tr} X = 0$$

É claro que o conjunto com a soma é subespaço vetorial real. Para ver que é fechado pelo colchete, note que se $X, Y \in \mathfrak{sl}(n)$:

$$\operatorname{tr}([X, Y]) = \operatorname{tr}(XY - YX) = \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(YX) = 0$$

Finalmente, note que uma base para tal subálgebra é:

$$\{e_{i,j} : i \neq j = 1, 2, \dots, n\} \cup \{e_{1,1} - e_{i,i} : i = 2, \dots, n\}$$

Onde $e_{i,j}$ é a matriz com 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais entradas. Logo sua dimensão é $n^2 - 1$.

□

Proposição 3.3.2. $\mathfrak{so}(n) = \{X^T = -X\}$

Demonstração. De fato, temos que

$$e^{tX} \in O(n, \mathbb{R}) \iff e^{tX}(e^{tX})^T = \mathrm{Id}, \forall t \iff e^{-tX} = (e^{tX})^T = e^{tX^T}, \forall t \iff X^T = -X$$

É claro que o conjunto com a soma é subespaço vetorial real. Ainda, se $X, Y, \in \mathfrak{so}(n)$, como

$$[X, Y]^T = (XY - YX)^T = Y^T X^T - X^T Y^T = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y]$$

é fechado pelo colchete e logo subálgebra de Lie.
Ainda, como $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap \det^{-1}((0, +\infty))$, $SO(n)$ é aberto em $O(n)$ e logo seus espaços tangentes coincidem.
Finalmente, note que uma base para tal subálgebra é dada por

$$\{e_{i,j} - e_{j,i} : j > i\}$$

Note que tal base contém $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ elementos, donde segue que esta é a dimensão da subálgebra.

□

Proposição 3.3.3. $\mathfrak{u}(n) = \{X^* = -X\}$ *e* $\mathfrak{su}(n) = \{\operatorname{tr} X = 0 \wedge X^* = -X\}$

Demonstração. De fato, inicialmente note que $U(n)$ e $SU(n)$ são subgrupos fechados de $GL(n, \mathbb{C})$ e portanto grupos de Lie reais sob a identificação canônica de $GL(n, \mathbb{C})$ como subgrupo de $GL(2n, \mathbb{R})$. Como a exponencial comuta com esse isomorfismo, podemos calcular a álgebra de Lie destes como subálgebras reais da álgebra de matrizes complexas $M_n(\mathbb{C})$. Isto é: apesar de as matrizes da álgebra terem entradas complexas, a multiplicação por escalar é feita apenas no corpo dos reais. Assim, temos que

$$e^{tX} \in U(n) \iff e^{tX}(e^{tX})^*T = \mathrm{Id}, \forall t \iff e^{-tX} = (e^{tX})^* = e^{tX^*}, \forall t \iff X^* = -X.$$

Ainda,

$$e^{tX} \in SU(n) \iff X \in U(n), \det(e^{tX}) = e^{t \operatorname{tr} X} = 1, \forall t \iff \operatorname{tr} X = 0, X \in U(n).$$

Note que os tais conjuntos munidos da soma são espaços vetoriais reais, pois se $X, Y \in U(n)$:

$$(X+Y)^* = X^* + Y^* = -X - Y = -(X+Y)$$

e se $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda X)^* = \bar{\lambda} X^* = \lambda(-X) = -\lambda X$$

E análogo para $SU(n)$.
Finalmente, note que uma base para $U(n)$ é dada por:

$$\{e_{j,k} - ek, j, k > j\} \cup \{ie_{j,j} : j = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{ie_{j,k} : k > j\}$$

Essa base contém $2(1 + 2 + \ldots + n - 1) + (n) = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$ elementos, logo $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$. Para $\mathfrak{su}(n)$, podemos tomar a mesma base, apenas trocando o segundo conjunto por: $\{ie_{1,1} - ie_{j,j} : j = 2, \ldots, n\}$, onde $e_{i,j}$ é a matriz com 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais entradas, logo esta Álgebra de Lie tem dimensão $n^2 - 1$.

□

A compacidade e conexidade dos grupos citados acima é resultado fácilmente verificado através da álgebra linear, então não demonstraremos aqui. Um importante resultado que foi usado no Teorema 3.2.3 é a sobrejeção da exponencial para $SU(2)$.

Proposição 3.3.4. *Os mapas exponenciais:*

$$\exp : \mathfrak{u}(n) \to U(n), \exp \mathfrak{su}(n) \to SU(n)$$

são sobrejetores.

Demonstração. Suponha $A \in U(n)$. Então, pelo Teorema Espectral/Decomposição de Schur (LIMA, 2014), existem matrizes $U \in U(n)$ e $D \in GL(n, \mathbb{C})$ diagonal tais que

$$A = UDU^*$$

Como A é unitária, as entradas de D, que correspondem a seus autovalores, tem valor absoluto igual a 1, donde D é pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & & \mathbf{0} \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix}$$

Pondo

$$E = \begin{bmatrix} i\theta_1 & & & \mathbf{0} \\ & i\theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & i\theta_n \end{bmatrix}.$$

Temos que $UEU^* \in \mathfrak{u}(n)$ e que $e^E = D$, donde

$$e^{UEU^*} = Ue^E U^* = UDU^* = A.$$

Agora, se $A = UDU^* \in SU(n)$, com $D = e^E$, temos que

$$1 = \det(D) = \det(e^{UEU^*}) = e^{\operatorname{tr}(UEU^*)} = e^{\operatorname{tr} E}.$$

Logo $i(\theta_1 + \ldots + \theta_n) = 0$ e $UEU^* \in \mathfrak{su}(n)$.

$\square$

Proposição 3.3.5 (Forma de Killing para álgebras de matrizes)**.** *Para* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$*, sua forma de Killing é dada por*

$$\mathcal{K}(A, B) = 2n \operatorname{tr}(AB) - 2 \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$$

Demonstração. Primeiramente, note que se V é espaço vetorial de dimensão n e $A \in End(V, V)$, então $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (Ae_i)_i$, onde $\{e_i\}$ é base ortonormal de V. Logo, se $A, B \in \mathfrak{gl}(n)$, considerando a base $\{e_{i,j}\}$, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\text{ad}\,(A)\text{ad}\,(B)) &= \operatorname{tr}(\text{ad}\,(B)\text{ad}\,(A)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\text{ad}\,(B)\text{ad}\,(A) e_{i,j})_{i,j} \end{aligned}$$

Ainda, se $A = (a_{i,j})$ em relação a esta base,

$$\begin{aligned} \text{ad}\,(A) e_{i0,j0} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i0} e_{i,j0} - \sum_{j=1}^{n} a_{j0,j} e_{i0,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i0} e_{k,j0} - a_{j0,k} e_{i0,k}. \end{aligned}$$

De modo que, para $(i0, j0) = (i, j)$ vale que

$$\begin{aligned}
\text{ad}\,(B)\text{ad}\,(A)e_{i,j} &= \text{ad}\,(B)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}e_{k,j} - a_{j,k}e_{i,k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\text{ad}\,(B)e_{k,j} - a_{j,k}\text{ad}\,(B)e_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k,i}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{l,k}e_{l,j} - b_{j,l}e_{k,l}\right) - a_{j,k}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{l,i}e_{l,k} - b_{k,l}e_{i,l}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,i}b_{l,k}e_{l,j} - a_{k,i}b_{j,l}e_{k,l} - a_{j,k}b_{l,i}e_{l,k} + a_{j,k}b_{k,l}e_{i,l}.
\end{aligned}$$

Note que então

$$\begin{aligned}
(\text{ad}\,(B)\text{ad}\,(A)e_{i,j})_{i,j} &= \sum_{k=1} n(a_{k,i}b_{i,k}) + \sum_{k=1} n(a_{j,k}b_{k,j}) - a_{i,i}b_{j,j} - a_{j,j}b_{i,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_{k,i}b_{i,k} + a_{j,k}b_{k,j}) - a_{i,i}b_{j,j} - a_{j,j}b_{i,i}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\text{ad}\,(B)\text{ad}\,(A)) &= \sum_{i,j}(\text{ad}\,(B)\text{ad}\,(A)e_{i,j})_{i,j} \\
&= \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} a_{k,i}b_{i,k} + \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} a_{j,k}b_{k,j} \\
&- \sum_{i}\sum_{j} a_{i,i}b_{j,j} - \sum_{i}\sum_{j} aj, jb_{i,i} \\
&= n\sum_{i}\sum_{j} a_{k,i}b_{i,k} + n\sum_{i}\sum_{j} a_{j,k}b_{k,j} - 2\,\text{tr}(A)\,\text{tr}(B) \\
&= 2n\,\text{tr}(AB) - 2\,\text{tr}(A)\,\text{tr}(B)
\end{aligned}$$

$\square$

REFERÊNCIAS

ARMSTRONG, John. **All Derivations of Semisimple Lie Algebras are Inner**. [S.l.], 2000. Disponível em: <https://unapologetic.wordpress.com/2012/09/11/all-derivations-of-semisimple-lie-algebras-are-inner/>.

BOURBAKI, N. **General Topology**. First. Verlag Heidelberg Berlin London, 1995. Citado 1 vez na página 27.

DUISTERMAAT, Johannes Jisse; KOLK, Joban A.C. **Lie Groups**. Berlin Heidelberg New York, 2000. Citado 1 vez na página 32.

GALLIER, Jean; QUAINTANCE, Jocelyn. **Diferential Geometry and Lie Groups A Computational Perspective**. Philadelphia, 2019.

HALL, Brian C. **Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction**. New York, 2000. Citado 1 vez na página 39.

LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Second. New York Heidelberg Dordrecht London, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 10, 12, 18.

_______. **Introduction to Topological Manifolds**. New York, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 10, 18.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. First. Rio de Janeiro, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 10, 60.

MARTIN, Luiz San. **Álgebras de Lie**. Segunda. Campinas,Brasil, 2010. Citado 1 vez na página 16.

_______. **Grupos de Lie**. Campinas,Brasil, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 9, 13, 17, 21, 29, 32, 37.

ROSSMANN, Wulf. **Lie Groups: An Introduction Through Linear Groups**. New York, 2002.

TU, Loring W. **An Introduction to Manifolds**. Second. New York Dordrecht Heidelberg London, 2000.