



AULA 4 - RAZÕES, PROPORÇÕES E REGRA DE TRÊS

Meta

Apresentar os conceitos de razão, proporção e regra de três.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. definir razões, porcentagens e proporções matematicamente;
2. representar matematicamente situações reais, por meio de razões, porcentagens e proporções;
3. identificar as variações das grandezas direta e inversamente proporcionais;
4. expressar a relação das variações direta e inversamente proporcionais, por meio de uma sentença algébrica (regra de três).

Introdução

Nesta aula, você vai aprender os conceitos e aplicações das razões e das proporções e vai ver também como esses conceitos se relacionam com as porcentagens. Tanto as razões como as proporções têm aplicação frequente em situações cotidianas, sendo as porcentagens um exemplo de aplicação usual em nosso cotidiano. A regra de três é apresentada como uma extensão do conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais, que também são fundamentais no nosso dia a dia, assim como em diversas aplicações matemáticas.

Grandezas e Medidas

Muitas das nossas atividades envolvem medidas. A Física, a Química e tantas outras áreas do conhecimento baseiam-se na medição. Todos temos certa noção do que seja medir. Um feirante não comercializa seus produtos sem uma balança, um médico mede a pressão arterial, um operário calcula o total de azulejos necessários para reformar um banheiro etc. Há diferentes coisas que podem ser medidas. Tudo o que pode ser medido é denominado grandeza. Medir é comparar uma quantidade de uma grandeza qualquer com outra quantidade da mesma grandeza, que se escolhe como unidade.



4.1 RAZÃO

Denomina-se razão de dois números A e B, $B \neq 0$, o quociente formado por eles nessa ordem, isto é, a razão de A para B é denotada por A/B .

Na razão, o número A é chamado antecedente e o B tem o nome de conseqüente. Razão é uma forma de se realizar a comparação de duas grandezas. Quando tratamos de grandezas de mesma natureza (comprimento, massa etc.), é necessário que as duas estejam na mesma unidade de medida.

Questões

1. No escritório de contabilidade, há 40 funcionários, sendo que 15 deles são homens.

Calcule:

- a) a razão entre o número de funcionário do sexo masculino e o total de funcionário;
- b) a razão entre o número de funcionário do sexo feminino e o total de funcionário;
- c) a razão entre o número de funcionário do sexo masculino e o total de funcionários do sexo feminino.

Total de funcionário: 40

Número de funcionário homens: 15

Número de funcionário mulheres: $40 - 15 = 25$

a) razão = $\frac{15}{3} = \frac{40}{8}$

b) razão = $\frac{25}{5} = \frac{40}{8}$

c) razão = $\frac{15}{3} = \frac{25}{5}$

2. O escritório recebeu uma demanda para analisar maiores bancos do Brasil por ativos totais Caixa, levando em consideração a lista divulgada pelo Banco Central - BC Em março de 2022,

Quadro 01

Posição	Nome	Ativos totais em R\$
1	Itaú-Unibanco	1.028 trilhão
2	Banco do Brasil	935,4 bilhões
3	Bradesco	894,467 bilhões
4	Econômica Federal	702,9 bilhões
5	Santander Brasil	448,601 bilhões

Determine a razão entre:

- a) os ativos totais do Banco Itaú-Unibanco e Caixa Econômica,
- b) os ativos totais do Banco Bradesco e Banco do Brasil.



a. razão = $\frac{1028}{702,9}$

Observe que, para calcularmos essa razão, transformamos a informação sobre o total de ativos do Banco Itaú-Unibanco para bilhões.

b. razão = $\frac{894,467}{935,4}$

Também é possível determinar a razão entre duas grandezas distintas.



4.2 PROPORÇÃO

Uma proporção é uma igualdade entre duas razões. Para entender melhor, considere que quatro números não nulos, A, B, C e D, formam, nessa ordem, uma proporção quando

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

A, B, C e D são denominadas termos de uma proporção. A e D são os extremos e B e C são os meios.

Questões

1. Uma pesquisa realizada pelo IBOPE foi realizada com a intenção de comparar o número de homens e de mulheres que trabalham em três empresas do setor de telefonia. Os resultados encontram-se a seguir:

Quadro 02

Empresa	Total homens	Total mulheres
A	150	450
B	110	165
C	42	126

Obtém-se para cada empresa as seguintes razões entre o número de homens e de mulheres empregados:

$$\text{Razão empresa A} = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Razão empresa B} = \frac{110}{165} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Razão empresa C} = \frac{42}{126} = \frac{1}{3}$$

Assim, pode-se concluir que a razão entre o número de homens e de mulheres na empresa A é igual a razão entre o número de homens e de mulheres na empresa C; ou que a proporção entre o número de homens e de mulheres na empresa A é igual a da empresa C.

Propriedade 1: em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Algebricamente, temos



$$\frac{3}{4} = \frac{60}{80}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$$

$$\text{Produto dos meios} = 4 \cdot 60 = 240$$

$$\text{Produto dos extremos} = 3 \cdot 80 = 240$$

$$\text{Produto dos meios} = 9 \cdot 20 = 180$$

$$\text{Produto dos extremos} = 4 \cdot 45 = 180$$

$$\text{Produto dos meios} = 8 \cdot 45 = 360$$

$$\text{Produto dos extremos} = 5 \cdot 72 = 360$$

2. Calcule o valor de x:

$$x = 7$$

$$50 = 10$$

Aplicando a propriedade 1, temos:

$$10 \cdot x = 7 \cdot 50$$

$$10x = 350$$

$$x = \frac{350}{10} = 35$$

3. Uma grande empresa do ramo de energia tem atualmente 28.000 funcionários. Se a relação entre o número de efetivos e de terceirizados é de 5 por 2, qual é o total de funcionários terceirizados?

Nesse exemplo, temos, a princípio, duas variáveis: o número de funcionários efetivos e o número de terceirizados, e sabe-se que estes totalizam 28000.

No de efetivos: x

No de terceirizados: 28000 – x

Além disso, o enunciado informa que a razão entre o número de efetivos e de terceirizados é de 5 por 2, isto é, $\frac{x}{28000 - x} = \frac{5}{2}$

Aplicando a propriedade 1, obtemos:

$$2 \cdot x = 5 \cdot (28000 - x)$$

$$2x = 140000 - 5x$$

$$2x + 5x = 140000$$

$$7x = 140000$$

$$x = \frac{140000}{7} = 20000$$

Devemos ter atenção neste momento. Foi perguntado o total de terceirizados que, na nossa representação, não corresponde a x, mas a 28.000 – x. Assim,

$$\text{Total de terceirizados: } 28.000 - 20.000 = 8.000$$



4.3 REGRA DE TRÊS

A regra de três pode ser compreendida como um processo prático para resolver problemas por meio de proporções, utilizando duas grandezas. Constitui uma ferramenta indispensável para todos, até mesmo para os que dizem não precisar ou gostar de matemática. Para falarmos de regra de três, é necessário estarmos familiarizados com o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais.

Grandezas proporcionais

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando, aumentando (diminuindo) uma delas, a outra grandeza aumenta (diminui) na mesma razão da primeira. Exemplo: Observe a tabela seguinte, que apresenta a variação de grandezas em diversos momentos.

Quadro 01

Nº produtos	2	4	12	30
Tempo fabricação (h)	6	12	36	90

Ao calcular a razão entre o número de produtos e o tempo necessário para fabricá-los, observa-se:

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{12}{36} = \frac{30}{90}$$

Essas razões são todas iguais a $\frac{1}{3}$. A razão $\frac{1}{3}$ informa que a cada unidade a mais, considerada no número de produtos, o tempo necessário triplica. Assim, essas grandezas são ditas diretamente proporcionais.

Duas grandezas são ditas indiretamente proporcionais quando, aumentando (diminuindo) uma delas, a outra grandeza varia na razão inversa da primeira. Explicando de maneira informal, são grandezas em que: quando uma dobra, a outra se reduz a metade; se uma triplica, a outra é reduzida a terça parte; e assim por diante.

Observe a tabela a seguir, que apresenta a variação de grandezas em diversos momentos.

Uma empresa que tem como atividade empresarial prestação de serviço educacional decidiu premiar os melhores alunos, distribuindo 24 livros diversos. Se apenas dois forem



considerados os melhores, cada um recebera 12 livros. Se 3 forem selecionados, cada um recebera 8. Se 4 forem selecionados, cada um recebera 6 livros. Observe a tabela:

Quadro 02

No de alunos	No de livros recebidos
2	12
3	8
4	6

Como definido, duas grandezas são inversamente proporcionais.

Quando dobramos uma delas, a outra se reduz a metade; triplicando uma delas, a outra se reduz a terça parte; e assim por diante. No nosso exemplo, podemos observar que, se dobrarmos o número de alunos premiados, o número de prêmio por aluno cai pela metade.

$$\begin{array}{l} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{12}{6} = \frac{2}{1} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{12}{6} = \frac{2}{1} \end{array}} \right\} \quad \frac{2}{4} \text{ e } \frac{12}{6} \text{ são inversas}$$

As situações a seguir ajudam a compreender esses conceitos:

Se você gasta 1 litro de gasolina para percorrer 14 km, quanto você gastara para percorrer 7 km? Nesse exemplo, a distância percorrida caiu pela metade, logo, você reduzira pela metade também o consumo de gasolina (grandezas diretamente proporcionais).

Seis pedreiros levam 1 dia para construir um muro. Se diminuirmos o número de pedreiros para 2, o muro ficara pronto em três dias, ou seja, quanto maior o número de pedreiros utilizados na construção do muro, menor o tempo gasto para sua construção (grandezas inversamente proporcionais). Uma grandeza foi reduzida a sua terça parte, enquanto a outra foi triplicada.

Uma indústria fornece refeições a seus 100 funcionários. Um levantamento de dados mostrou que o custo de alimentação desses funcionários, durante 10 dias, e de R\$ 3.000,00.



Qual o custo total de alimentação para esses 100 durante o período de um mês (considere o mês com 22 dias)?

Inicialmente devemos observar que há duas grandezas envolvidas nesse problema: o total de dias e o custo total, em reais, das refeições.

Observe que o número de funcionários não sofre alteração, segundo o enunciado, isto é, esta constante, não caracterizando uma das grandezas que estão em análise. O que você pode notar em relação às grandezas em análise?

Elas são diretamente proporcionais, pois, à medida que o número de dias aumenta, o custo total também irá aumentar, na mesma proporção.

Os dados podem ser apresentados a seguir no quadro:

Quadro 01

No de dias	10	22
Custo total (R\$)	3.000	X

Logo, temos:

$$\frac{10}{3000} = \frac{22}{x}$$

Então, pela propriedade fundamental das proporções:

$$\begin{aligned} 10x &= 22 \cdot 3000 \\ 10x &= 66.000 \\ x &= \frac{66.000}{10} \end{aligned}$$

Logo, o custo total mensal será de R\$ 6.600,00.

Esse método de se resolver problemas denomina-se regra de três.

Origem do nome regra de três

A regra de três, ao que tudo indica, surgiu na Índia. Contudo, foram os árabes, na Idade Média, que divulgaram essa classe de problemas. Leonardo da Pisa, no século XIII, também



contribuiu com o seu trabalho “Liber Abacis” para torná-la conhecida pelo nome: regra dos três números conhecidos ou, como ficou popularmente conhecida, regra de três.

Questão:

Paulo trabalhou 30 horas extras e recebeu 1.500 reais. Quantas horas extras teria de trabalhar para receber 2.000 reais?

Esse problema envolve duas grandezas: o valor, em reais, recebido pelas horas adicionais, e o tempo trabalhado em regime de hora extra.

Essas grandezas são diretamente proporcionais: aumentando o tempo trabalhado, aumenta-se o valor recebido.

Montando a regra de três, temos:

$$\begin{array}{ccc} 1.500 & \frac{\quad}{\quad} & 30 \\ 2000 & \frac{\quad}{\quad} & x \end{array} \quad \frac{1500}{2.000} = \frac{30}{x}$$

Para resolver, basta multiplicar de forma cruzada (propriedade 1):

$$1.500 \cdot x = 6.000$$

$$x = \frac{6000}{1500} = \frac{30}{x}$$

$$x = 40$$

Portanto, Paulo teria de trabalhar 40 horas extras para receber 2.000 reais.

Questão 3:

Com a proximidade das férias escolares de verão, Monica resolveu comprar uma pequena piscina portátil plástica com capacidade para 600 l. Uma mangueira enche a piscina em 40 minutos, com uma vazão de 15 l/min. Se a torneira diminuir a vazão para 5 l/min., quantos minutos serão necessários para encher a piscina?

Mais uma vez, inicialmente devemos observar que há duas grandezas envolvidas nesse problema: o tempo total necessário para encher a piscina (em minutos) e a vazão da torneira (em l/min.).

Note que, a medida que a vazão diminuir, o tempo irá aumentar na mesma proporção. Logo, essas grandezas são inversamente proporcionais. De forma análoga ao exemplo anterior, vamos montar a tabela.



Quadro 01

Tempo (min.)	Vazão (l/min.)
40	15
x	5

Para resolver esse exemplo, devemos inverter uma das razões da proporção.

Assim:

$$\frac{40}{x} = \frac{5}{15}$$

Depois disso, aplicaremos a propriedade fundamental das proporções:

$$5 \cdot x = 40 \cdot 15$$

$$x = 120$$

Logo, o tempo total será de 120 minutos ou duas horas.