Revisão matemática I:
Introdução à Álgebra Linear

Prof. André L. A. dos Reis

Rio de Janeiro 2023

Objetivos da aula

* Revisar o conceito de espaço vetorial

* Definir as operações com matrizes e vetores

* Entrar no contexto da solução de sistemas lineares

* Esclarecer as notações que serão utilizadas ao longo do curso

Introdução à Álgebra Linear

É o estudo dos **espaços vetoriais** e as **transformações** que acontecem entre eles.

Quando os **espaços vetoriais** são **finitos**, tais transformações são dadas por matrizes.

A noção de espaço vetorial é o terreno onde se desenvolve **toda a Álgebra Linear**.

Definição:

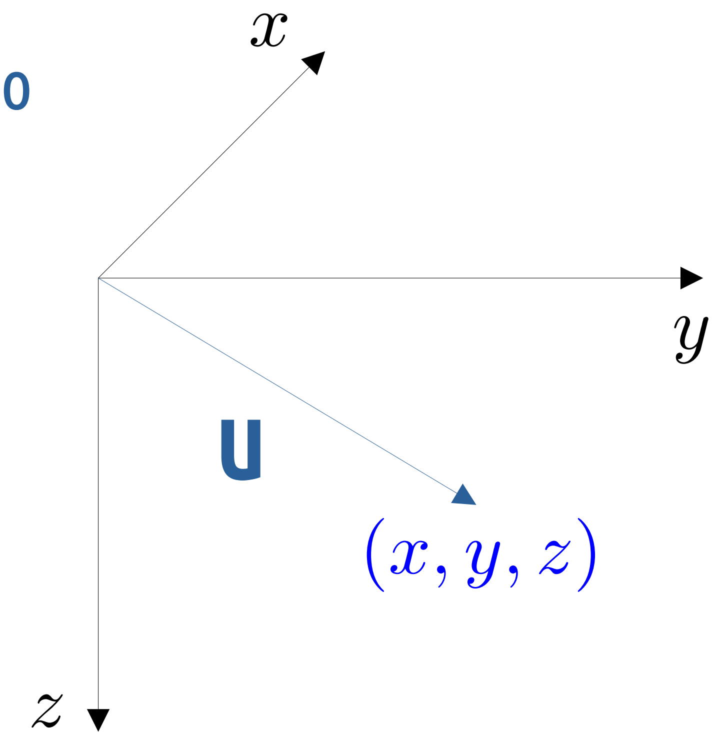
Um **espaço vetorial** E é um conjunto cujos elementos são chamados **vetores**, no qual estão definidos dois tipos de operações: **a adição**, que a cada operação se faz gerar um novo vetor, e a **multiplicação por um escalar** (número), que a cada número e a cada vetor faz corresponder um novo vetor.

O que é um vetor?

Um segmento orientado de reta que possui um módulo, direção e sentido

Exemplo: Em **R**³ é representado por um conjunto de três coordenadas (x,y,z).

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Axiomas de espaço vetorial:

Comutatividade: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

Associatividade: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

Vetor nulo: $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

Inverso aditivo: $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Distributividade: $(a+b)\mathbf{v}=a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$

Multiplicação por 1: $1.\mathbf{v}=\mathbf{v}$

Exercício.1:

Seja um espaço $\mathbf{R}^3$ que representa um espaço euclidiano trimensional. Prove que $\mathbf{R}^3$ é um espaço vetorial.

Dica : Tome dois representantes deste espaço, ou seja, dois vetores que estão contidos nele.

Veremos que a relação entre a **formulação de um problema inverso** e o **conceito de espaço vetorial** se cruzam no sentido de que devemos resolver **sistemas lineares**.

O que irá mediar as operações de transformação entre os espaços vetoriais serão os operadores matriciais.

O que é uma matriz?

Um arranjo de números (ou não) que estão dispostos em forma de tabela, ou seja, em colunas e linhas.

Notação: [ ], | |, ( )

Dimensão: diz-se (N X M),
N linhas e M colunas

Elementos: a_{ij}, i-ésima linha e j-ésima coluna.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

N

M

Operações com matrizes :

Comutatividade: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Associatividade: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

Matriz nula: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

Inverso aditivo: $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

Distributividade: $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$

Multiplicação por 1: $\mathbf{1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Soma matricial

Essa soma será igual a :

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

Soma elemento a elemento.

As matrizes devem ter a mesma dimensão

$$\underset{(N \times M)}{\mathbf{A}} + \underset{(N \times M)}{\mathbf{B}} = \underset{(N \times M)}{\mathbf{C}}$$

Exemplo :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Produto por escalar

Esse produto será igual a :

$$k(a_{ij}) = c_{ij}$$

Multiplica elemento a elemento.

As matrizes também devem ter a mesma dimensão

$$k\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

(N X M) (N X M)

Exemplo :

$$2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Produto matricial

Esse produto será igual a :

$$a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

Multiplica a linha de uma matriz pela coluna de outra.

O número de colunas de uma deve ser igual ao número de linhas da outra

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

(N X L) (L X M) (N X M)

Exemplo :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tipos especiais de matriz

1. Matriz nula

$$\forall\, i, j \ : a_{ij} = 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de matriz

1. Matriz nula

$$\forall\, i, j \;: a_{ij} = 0$$

2. Matriz identidade

$$\forall\, i, j : \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de matriz

1. Matriz nula

$$\forall\, i, j \ : a_{ij} = 0$$

2. Matriz identidade

$$\forall\, i, j : \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$$

3. Matriz Triangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Somente os elementos acima (ou abaixo) da diagonal principal são diferentes de zero.

Tipos especiais de matriz

4. Matriz quadrada

Número de linhas igual ao número de colunas (N=M)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(N X N)

Diz-se: Matriz quadrada de ordem N (ou M).

Diagonal principal são os elementos a_{ii} de uma matriz quadrada

O **traço** de uma matriz é o somatório de todos os elementos da diagonal principal.

Denota-se por: tr(A)

Propriedade: tr(**AB**) = tr(**BA**)

Tipos especiais de matriz

5. Matriz Transposta

Posição dos elementos da linhas trocam com os elementos da coluna.

Denota-se por: A^T por transposta da matriz **A**

Os elementos a_{ij} serão iguais a a_{ji}

Dimensão: M x N

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(M X N)

Propriedades :

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(A^T)^T = A$

$D^T = D$

$(AB)^T = B^T A^T$

Tipos especiais de matriz

6. Matriz Simétrica (e antissimétrica)

Os elementos estão dispostos simetricamente em relação a diagonal principal.

Denota-se por: $A^T = A$

Os elementos a_{ij} serão iguais a a_{ji}

Dimensão: N x N

Ortogonalidade

$A^T A = A A^T = I$

Exemplo :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 3 & 7 \\ 10 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de matriz

6. Matriz Simétrica (e antissimétrica)

Os elementos estão dispostos simetricamente em relação a diagonal principal **com sinal trocado**.

Denota-se por: A^T = -A

Os elementos a_{ij} serão iguais a $-a_{ji}$

Dimensão: N x N

Ortogonalidade

$A^T A = A A^T = I$

Exemplo :

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 5 & 0 & -7 \\ 10 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de matriz

7. Matriz Inversa

A matriz inversa de **A** será uma matriz **A**$^{-1}$, tal que:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ortogonalidade

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$$

Tipos especiais de matriz

7. Matriz Inversa

A matriz inversa de **A** será uma matriz **A**$^{-1}$, tal que:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ortogonalidade

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$$

“Se a matriz A é invertível, ou seja, possui inversa, ela é dita **NÃO singular**”.

Tipos especiais de matriz

7. Matriz Inversa

A matriz inversa de **A** será uma matriz **A**$^{-1}$, tal que:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ortogonalidade

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$$

"Se a matriz A é invertível, ou seja, possui inversa, ela é dita **NÃO singular**".

Caso contrário, ela é uma **matriz singular**.

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

$\det(\mathbf{A}) = 0$

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

$\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$

$\det(\mathbf{A}) = 0$

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

det(**A**) = det(**A**^{T})

det(**A**) = 0

Se possui coluna ou linha iguais a zero

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

det(**A**) = det(**A**^{T})

det(**A**) = 0

Se possui coluna ou linha iguais a zero

Se possui coluna ou linha iguais

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

det(**A**) = det(**A**^{T})

det(**A**) = 0

- Se possui coluna ou linha iguais a zero
- Se possui coluna ou linha iguais
- Se possui uma linha ou coluna que é combinação linear de alguma outra.

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

det(**A**) = det($\mathbf{A}^T$)

det(**A**) = 0

det(k**A**) = k^N det(**A**)

det(**A B**) = det(**A**) det(**B**)

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

det(**A**) = det(**A**^{T})

det(**A**) = 0

det(k**A**) = k^N det(**A**)

det(**A B**) = det(**A**) det(**B**)

Através do determinante podemos a**nalisar o condicionamento de um sistema linear**.

Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

Denota-se por: det(**A**) como determinante da matriz **A.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

det(**A**) = det(**A**^{T})

det(**A**) = 0

det(k**A**) = k^N det(**A**)

det(**A B**) = det(**A**) det(**B**)

Através do determinante podemos a**nalisar o condicionamento de um sistema linear**.

Se uma matriz é não singular o seu determinante será diferente de zero.

Sistema de equações lineares

É um conjunto de N equações com M número de variáveis.

$$
\begin{cases}
a_{11}p_1 & + \cdots + & a_{1m}p_m & = y_1 \\
a_{21}p_1 & + \cdots + & a_{2m}p_m & = y_2 \\
 & \vdots & & \\
a_{n1}p_1 & + \cdots + & a_{nm}p_m & = y_n
\end{cases}
$$

Sistema de equações lineares

É um conjunto de N equações com M número de variáveis.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}$$

N x 1 N x M M x 1

Sistema de equações lineares

É um conjunto de N equações com M número de variáveis.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\text{N x 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{\text{N x M}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}}_{\text{M x 1}}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{p}$$

Podemos reescrever como um produto entre uma matriz e um vetor!

Sistema de equações lineares

É um conjunto de N equações com M número de variáveis.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}$$

N x 1 N x M M x 1

1. Tem uma única solução
2. Não tem solução
3. Infinitas soluções

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{p}$$

Podemos reescrever como um produto entre uma matriz e um vetor!

Exercício.2:

Seja o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = 14 \\ x & + & 2y & + & 2z & = 11 \\ x & + & 3y & + & 4z & = 19 \end{cases}$$

Resolva e encontre o valor de x, y e z.

Combinação linear

Podemos escrever um vetor como uma combinação linear de um conjunto de outros vetores.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 & + \cdots + & a_{1m}p_m & = y_1 \\ a_{21}p_1 & + \cdots + & a_{2m}p_m & = y_2 \\ & \vdots & & \\ a_{n1}p_1 & + \cdots + & a_{nm}p_m & = y_n \end{cases}$$

Manipulando esta equação um pouco mais....

Combinação linear

Podemos escrever esta equação da seguinte forma:

$$p_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + p_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

O vetor **y** é dado como a combinação linear de outros M vetores a_M!

Combinação linear

Podemos escrever esta equação da seguinte forma:

$$p_1\mathbf{a}_1 \quad + \quad p_2\mathbf{a}_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad p_m\mathbf{a}_m \quad = \quad \mathbf{y}$$

O vetor **y** é dado como a combinação linear de outros M vetores a_M!

Dependência linear

Dizemos que o conjunto de vetores $\mathbf{a}_M$ são **linearmente independentes (LI)**, se e somente se,

$$p_1\mathbf{a}_1 \quad + \quad p_2\mathbf{a}_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad p_m\mathbf{a}_m \quad = \quad \mathbf{0}$$

Para todo p_j, j=1,...,M, sejam iguais a zero.

Dependência linear

Dizemos que o conjunto de vetores $\mathbf{a}_M$ são **linearmente independentes (LI)**, se e somente se,

$$p_1\mathbf{a}_1 \quad + \quad p_2\mathbf{a}_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad p_m\mathbf{a}_m \quad = \quad \mathbf{0}$$

Para todo p_j, j=1,…,M, sejam iguais a zero.

Se houver somente um p_j diferente de zero, os vetores serão **linearmente dependentes (LD)**.

Dependência linear

Dizemos que o conjunto de vetores $\mathbf{a}_M$ são **linearmente independentes (LI)**, se e somente se,

$$p_1\mathbf{a}_1 \quad + \quad p_2\mathbf{a}_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad p_m\mathbf{a}_m \quad = \quad \mathbf{0}$$

Para todo p_j, j=1,…,M, sejam iguais a zero.

Se houver somente um p_j diferente de zero, os vetores serão **linearmente dependentes (LD)**.

Se for **LI**, dizemos que o sistema **tem uma solução trivial**, ou seja, **uma única solução**.

Dependência linear

Dizemos que o conjunto de vetores $\mathbf{a}_M$ são **linearmente independentes (LI)**, se e somente se,

$$p_1\mathbf{a}_1 \quad + \quad p_2\mathbf{a}_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad p_m\mathbf{a}_m \quad = \quad \mathbf{0}$$

Para todo p_j, j=1,...,M, sejam iguais a zero.

Se houver somente um p_j diferente de zero, os vetores serão **linearmente dependentes (LD)**.

Se for **LI**, dizemos que o sistema **tem uma solução trivial**, ou seja, **uma única solução**.

Se for **LD**, dizemos que o sistema **NÃO tem uma solução trivial**, ou seja, **tem infinitas soluções**.

Dependência linear versus Sistema linear

Como já vimos, um vetor y pode ser escrito como uma combinação linear de outros vetor aM. Uma maneira de saber quais as colunas (ou linhas) são LI é analisar o **posto (*rank*)** da matriz do sistema linear.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}$$

Através dessa medida podemos analisar **a existência** e **a unicidade** da solução do sistema linear.

Até breve!