

# Tópicos de matemática I: Noções básicas de Álgebra Linear

Prof. André L. A. dos Reis

#### Objetivos da aula

- \* Realizar a revisão dos conceitos de espaço vetorial
- \* Definir as operações com matrizes e vetores
- \* Entrar no contexto da solução de sistemas lineares
- \* Esclarecer as notações que serão utilizadas ao longo do curso

# Introdução à Álgebra Linear

É o estudo dos espaços vetoriais e as transformações que acontecem entre eles.

Quando os espaços vetoriais são finitos, tais transformações são dadas por matrizes.

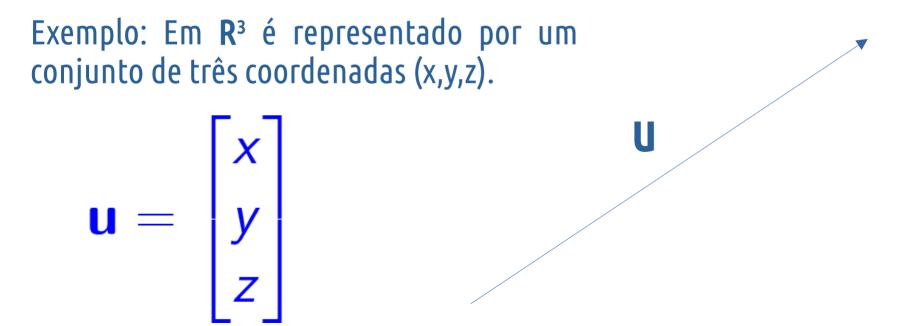
A noção de espaço vetorial é o terreno onde se desenvolve toda a Álgebra Linear.

#### Definição:

Um espaço vetorial E é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidos dois tipos de operações: a adição, que a cada operação se faz gerar um novo vetor, e a multiplicação por um escalar (número), que a cada número e a cada vetor faz corresponder um novo vetor.

### O que é um vetor?

Um segmento orientado de reta que possui um módulo, direção e sentido



# Axiomas de espaço vetorial:

Comutatividade:  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ 

Associatividade: (u + v) + w = u + (v + w)

Vetor nulo:  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ 

Inverso aditivo:  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ 

Distributividade:  $(a + b) \mathbf{v} = a \mathbf{v} + b \mathbf{v}$  ou  $a (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \mathbf{u} + a \mathbf{v}$ 

Multiplicação por 1: 1.v = v

### Exemplo.1:

Seja um espaço  $\mathbf{R}^n$  que representa um espaço euclidiano n-dimensional. Tomando dois representantes deste espaço dados por:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$$

e

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n).$$

Prove que  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial.

Veremos que a relação entre a formulação de um problema inverso e o conceito de espaço vetorial se cruzam no sentido de que devemos resolver sistemas lineares.

O que irá mediar as operações de transformação entre os espaços vetoriais serão os operadores matriciais.

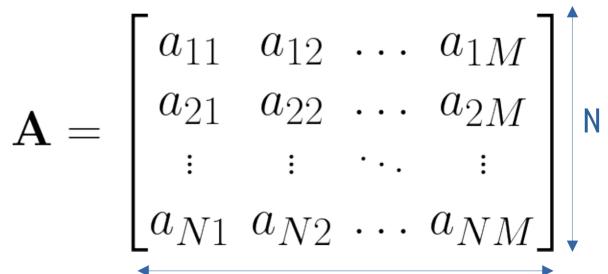
### O que é uma matriz?

Um arranjo de números (ou não) que estão dispostos em forma de tabela, ou seja, em colunas e linhas.

```
Notação: [ ], | |, ( )
```

**Dimensão**: diz-se (N X M), N linhas e M colunas

**Elementos**: a<sub>ij</sub>, i-ésima linha e j-ésima coluna.



M

# Operações de matrizes:

Comutatividade: A + B = B + A

Associatividade: (A + B) + C = A + (B + C)

Matriz nula: A + 0 = A

Inverso aditivo: A + (-A) = 0

Distributividade: (a + b) A = aA + bA ou

 $a\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=a\,\mathbf{A}+a\,\mathbf{B}$ 

Multiplicação por 1: 1.A = A

#### Soma matricial:

Se eu quero resolver A + B = C, essa soma será:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NM} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{N} \times \mathbf{M})$$

$$(\mathbf{N} \times \mathbf{M})$$

Soma elemento a elemento. Repare que as matrizes devem ter a mesma dimensão!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1M} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NM} \end{bmatrix}$$
(N X M)

### Produto por escalar:

Se eu quero resolver k (A + B) = k A + k B, esse resultado será:

$$k([a_{ij}] + [b_{ij}]) = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = c_{ij}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NM} \end{bmatrix}$$

$$(N \times M)$$

$$(N \times M)$$

Soma elemento a elemento. Repare que as matrizes devem ter a mesma dimensão!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1M} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NM} \end{bmatrix}$$
(N X M)

#### Produto matricial:

Se eu quero resolver AB = C, essa resultado será:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NM} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \text{ linha de uma deverá ter o} \quad (\mathbf{N} \mathbf{X} \mathbf{L}) \qquad \qquad (\mathbf{L} \mathbf{X} \mathbf{M})$$

$$a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2M}$$
 $\vdots \ \vdots \ \cdots \ \vdots$ 
 $a_{N1} \ a_{N2} \ \dots \ a_{NM}$ 

mesmo valor da coluna da outra!

$$AB = BA$$

Esta operação não é satisfeita!

Perda da comutatividade!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1M} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NM} \end{bmatrix}$$

#### 1. Matriz nula

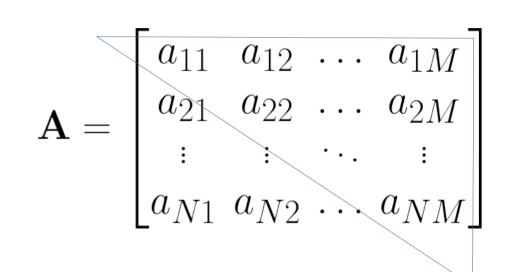
```
[a_{ij}] = 0, para todo ij.
```

### 2. Matriz identidade

 $[a_{ii}] = 1$ , para todo i.

### 3. Matriz Triangular

Somente os elementos acima (ou abaixo) da diagonal principal são diferentes de zero.



# 4. Matriz quadrada

(ou M).

Número de linhas igual ao número de colunas (N=M)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix}$  (ou M).

Diagonal principal são os elementos a<sub>ii</sub> de uma matriz quadrada

O traço de uma matriz é o somatório de todos os elementos da diagonal principal.

Propriedade: tr(AB) = tr(BA) Denota-se por: tr(A)

# 5. Matriz Transposta

Posição dos elementos da linhas trocam com os elementos da coluna.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix}$$

**Denota-se por: A**<sup>T</sup> por transposta da matriz **A** 

Os elementos a<sub>ij</sub> serão iguais a a<sub>ji</sub>

Dimensão: M x N

Propriedades 
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

 $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$ 

 $\mathbf{D}^{\mathsf{T}} = \mathbf{D}$ 

 $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$ 

# 6. Matriz Simétrica (e antissimétrica)

Os elementos estão dispostos simetricamente em relação a diagonal  $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix}$ 

#### Denota-se por: $A^T = A$

Os elementos a<sub>ii</sub> serão iguais a a<sub>ii</sub>

Ortogonalidade

 $A^TA = AA^T = I$ 

Dimensão: N x N

# 6. Matriz Simétrica (e antissimétrica)

Os elementos estão dispostos simetricamente em relação a diagonal  $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix}$ 

#### Denota-se por: $A^T = -A$

Os elementos a<sub>ii</sub> serão iguais a -a<sub>ii</sub>

Ortogonalidade

 $A^TA = AA^T = I$ 

Dimensão: N x N

#### 7. Matriz Inversa

A matriz inversa de A será uma matriz  $\mathbf{A}^{\text{-1}}$ , tal que:  $\mathbf{A}^{\text{-1}} \mathbf{A} = \mathbf{I}.$   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix}$ 

$$A^{-1}A = I$$

Ortogonalidade

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

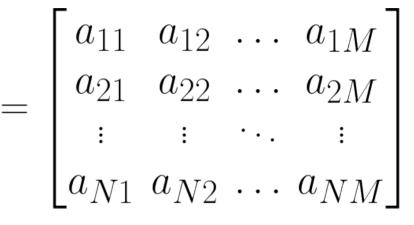
"Se a matriz A é invertível, ou seja, possui inversa, ela é dita **NÃO singular**".

Caso contrário, ela é uma **matriz singular**.

### Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

**Denota-se por:** det(A) como determinante da matriz A.



**Propriedades:** 

$$det(A) = det(A^{T})$$

$$det(A) = 0$$

Se possui coluna ou linha iguais a zero

Se possui coluna ou linha iguais

Se possui uma linha ou coluna que é combinação linear de alguma outra.

# Determinante e suas propriedades

É uma função de número real associada a uma variável matricial, que nada mais é que associar um número a uma matriz.

**Denota-se por:** det(A) como determinante da matriz A.

 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix}$ **Propriedades:** Através do determinante podemos  $\rightarrow$  det(A<sup>-1</sup>) = 1/det(A)  $det(A) = det(A^T)$ analisar o condicionamento de um sistema linear. det(A) = 0

det(A B) = det(A) det(B)

 $det(kA) = k^{N} det(A)$ 

Se uma matriz é não singular o seu determinante será diferente de zero.

### Sistema de equações lineares

É um conjunto de N equações com M número de variáveis.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + ... + a_{1M}p_M = y_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{2M}p_M = y_2 \\ \vdots \\ a_{N1}p_1 + a_{N2}p_2 + ... + a_{NM}p_M = y_N \end{cases}$$

### Sistema de equações lineares

É um conjunto de N equações com M número de variáveis.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

- 1. Tem uma única solução
- 2. Não tem solução
- 3. Infinitas soluções

### Exemplo:

Seja o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ x + 3y + 4z = 19 \end{cases}$$

Resolva e encontre o valor de x, y e z.

### Combinação linear

Podemos escrever um vetor como uma combinação linear de um conjunto de outros vetores.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + ... + a_{1M}p_M = y_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{2M}p_M = y_2 \\ \vdots \\ a_{N1}p_1 + a_{N2}p_2 + ... + a_{NM}p_M = y_N \end{cases}$$

Manipulando esta equação um pouco mais....

### Combinação linear

Podemos escrever esta equação da seguinte forma:

$$p_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{N1} \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{N2} \end{bmatrix} + \dots + p_M \begin{bmatrix} a_{1M} \\ a_{2M} \\ \vdots \\ a_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

O vetor  $\mathbf{y}$  é dado como a combinação linear de outros  $\mathbf{M}$  vetores  $\mathbf{a}_{\mathsf{M}}$ !

# Combinação linear

Podemos escrever esta equação da seguinte forma:

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + ... + p_M \mathbf{a}_M = \mathbf{y}$$

O vetor  $\mathbf{y}$  é dado como a combinação linear de outros  $\mathbf{M}$  vetores  $\mathbf{a}_{\mathsf{M}}$ !

# Dependência linear

Dizemos que o conjunto de vetores  $\mathbf{a}_{M}$  são **linearmente independentes (LI)**, se e somente se,

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + ... + p_M \mathbf{a}_M = \mathbf{0}$$

Para todo  $p_j$ , j=1,...,M, sejam iguais a zero.

# Dependência linear

Dizemos que o conjunto de vetores  $\mathbf{a}_{M}$  são **linearmente independentes (LI)**, se e somente se,

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + ... + p_M \mathbf{a}_M = \mathbf{0}$$

Para todo  $p_i$ , j=1,...,M, sejam iguais a zero.

Se houver somente um  $p_j$  diferente de zero, os vetores serão **linearmente dependentes (LD)**.

# Dependência linear

Dizemos que o conjunto de vetores  $\mathbf{a}_{M}$  são **linearmente independentes (LI)**, se e somente se,

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + ... + p_M \mathbf{a}_M = \mathbf{0}$$

Se for **LI**, dizemos que o sistema **tem uma solução trivial**, ou seja, **uma única solução**.

Se for **LD**, dizemos que o sistema **NÃO tem uma solução trivial**, ou seja, **tem infinitas soluções**.

### Dependência linear versus Sistema linear

Como já vimos, um vetor y pode ser escrito como uma combinação linear de outros vetor aM. Uma maneira de saber quais as colunas (ou linhas) são LI é analisar o **posto** (*rank*) da matriz do sistema linear.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

Através dessa medida podemos analisar **a existência** e **a unicidade** da solução do sistema linear.

#### Objetivos da aula

- \* Realizar a revisão dos conceitos de espaço vetorial
- \* Definir as operações com matrizes e vetores
- \* Entrar no contexto da solução de sistemas lineares
- \* Esclarecer as notações que serão utilizadas ao longo do curso



Até breve!