Formulação matemática de um problema inverso linear

Prof. André L. A. dos Reis

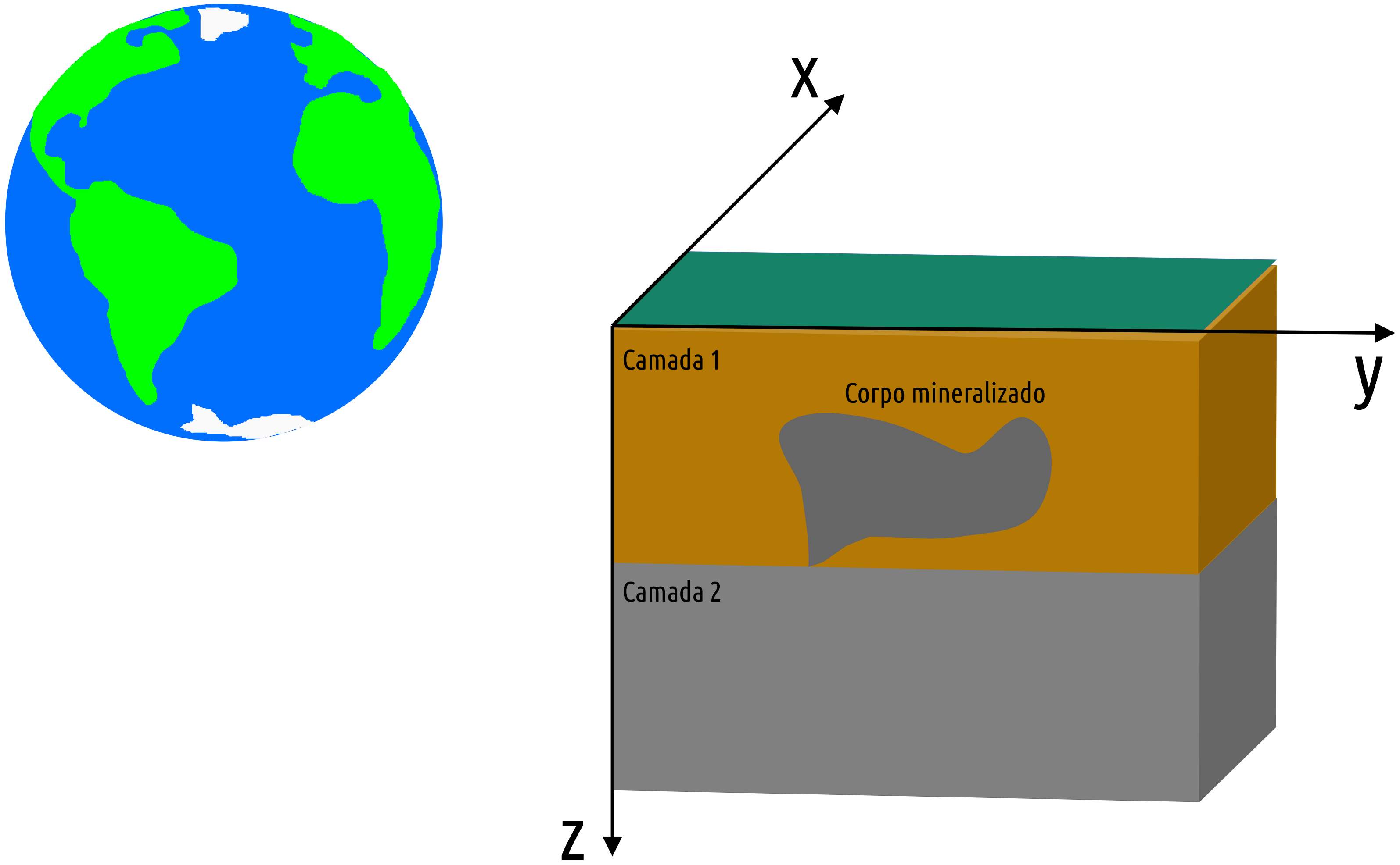
Rio de Janeiro 2022

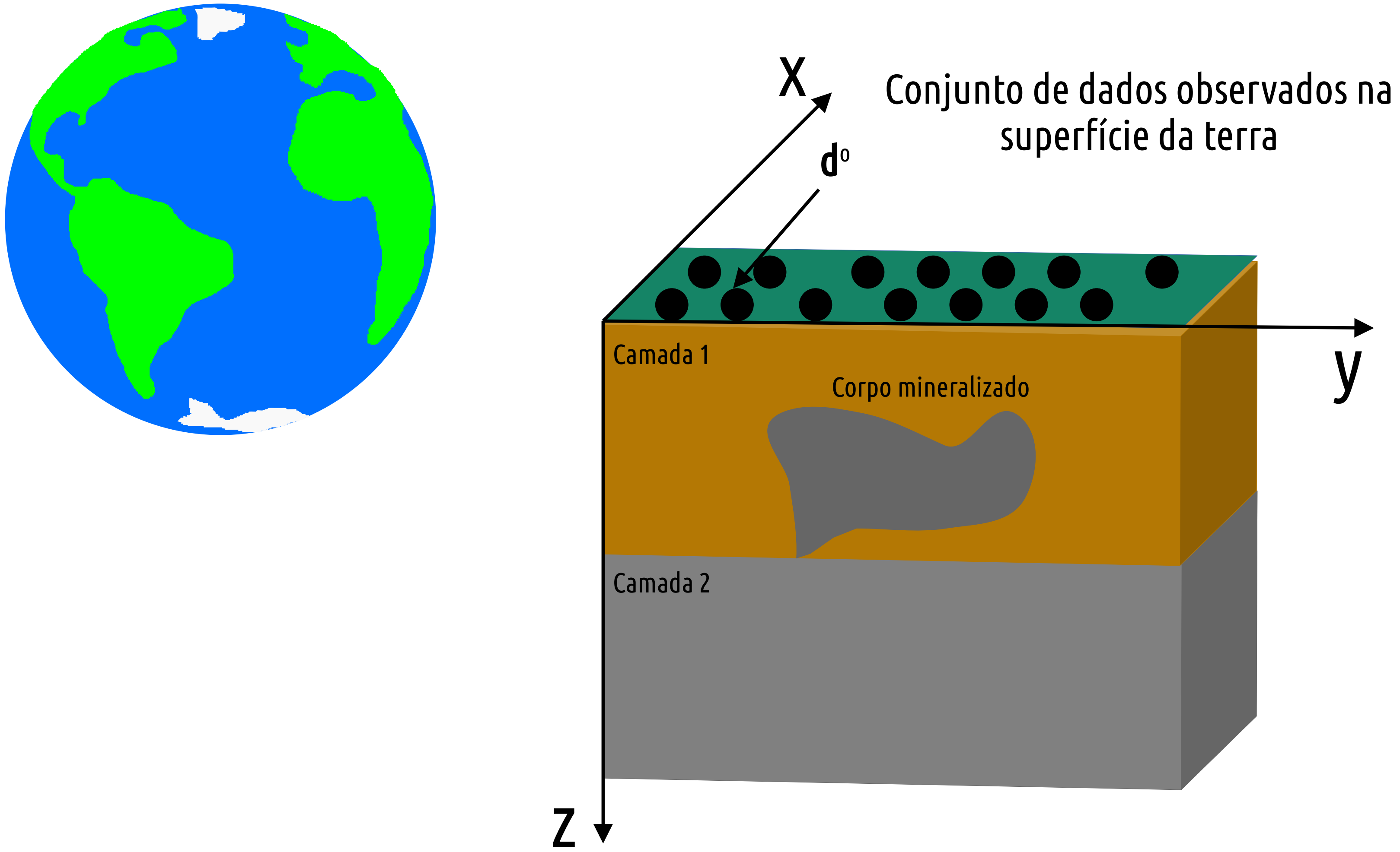
Objetivos da aula

* A formulação de um problema inverso linear

* Equação de mínimos quadrados

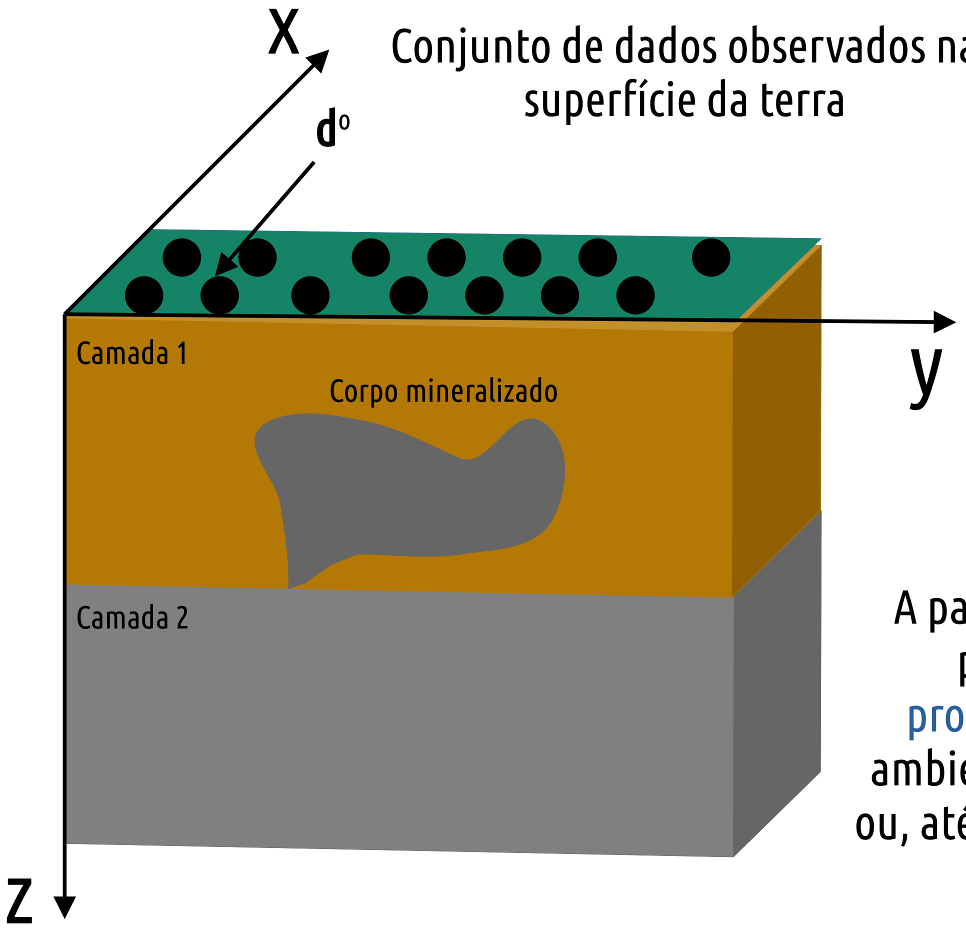
* Exemplos:
    - Movimento retilíneo uniforme
    - Movimento uniformemente acelerado
    - Estimativa da direção de magnetização de corpos esféricos


x
y
z
Camada 1
Corpo mineralizado
Camada 2



x
Conjunto de dados observados na superfície da terra
d⁰
y
Camada 1
Corpo mineralizado
Camada 2
z

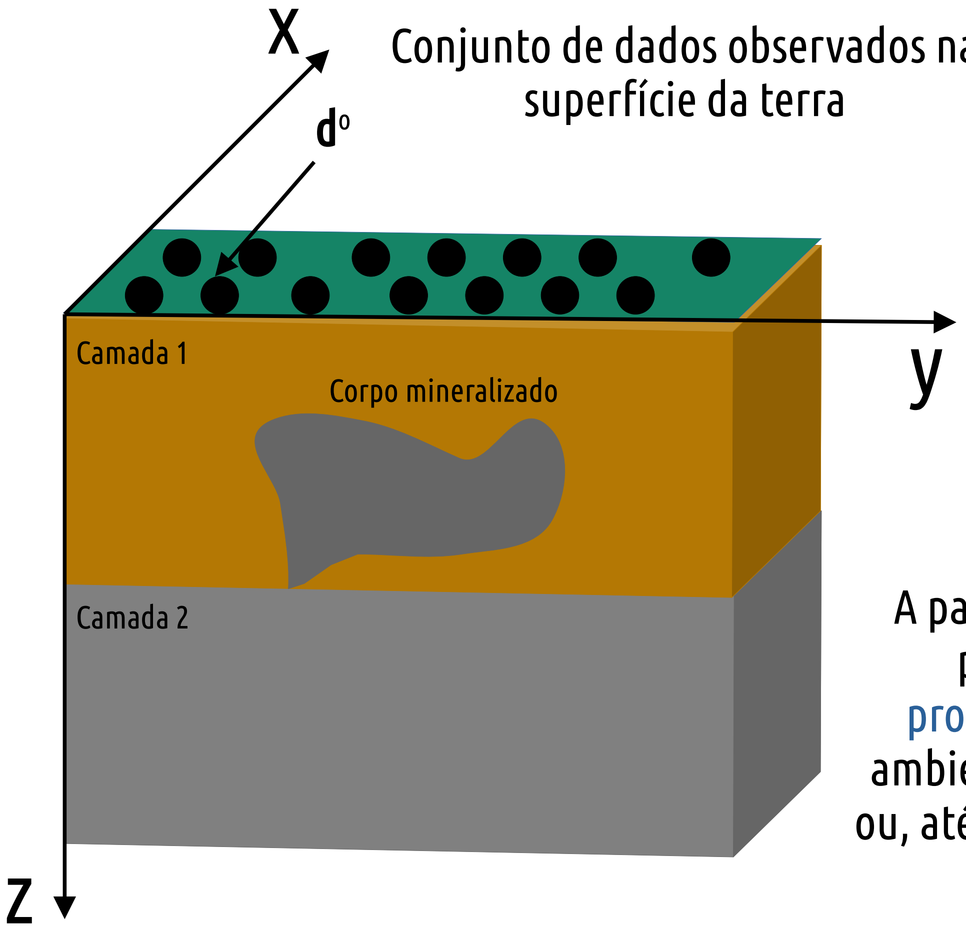
Conjunto de dados observados na superfície da terra



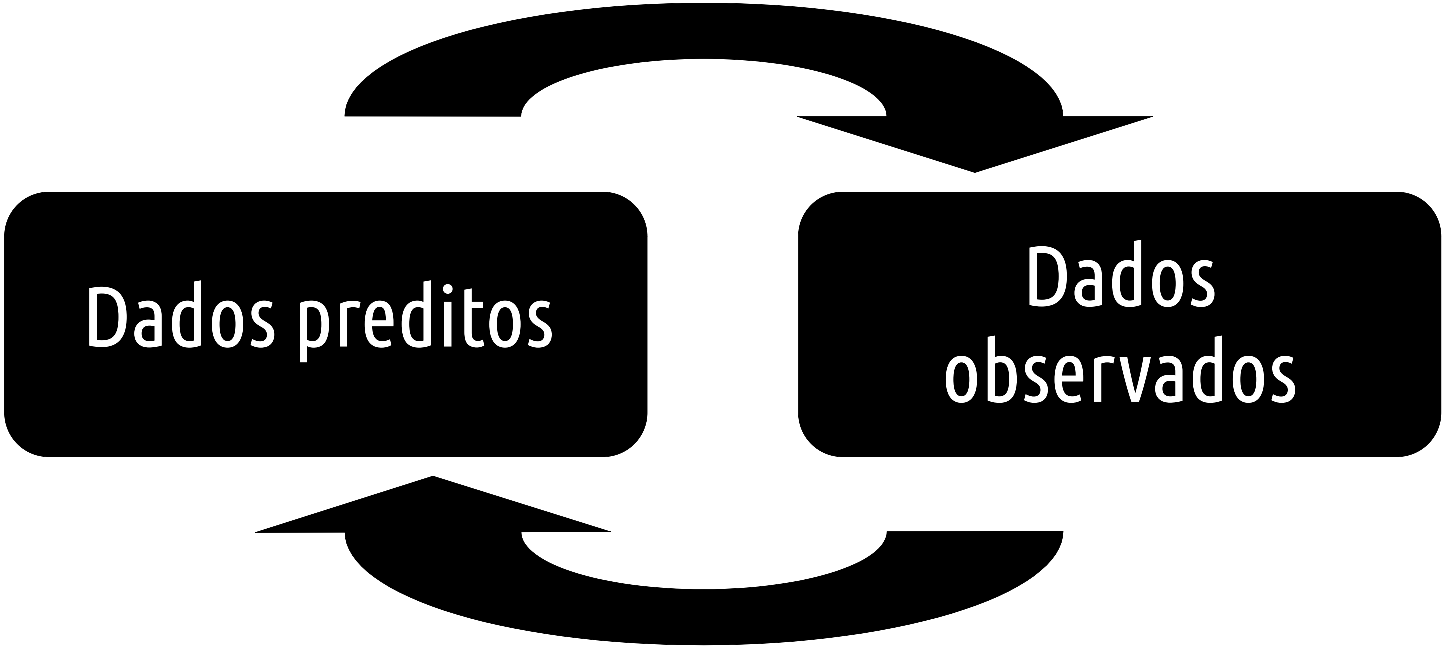
A partir destas medições podemos estimar propriedades físicas do ambiente em subsuperfície ou, até mesmo, a geometrias do corpos.

Necessitamos **formular matematicamente** como descrever este **processo de estimarmos** quantidades que nos trarão informações dos ambientes em subsuperfície!

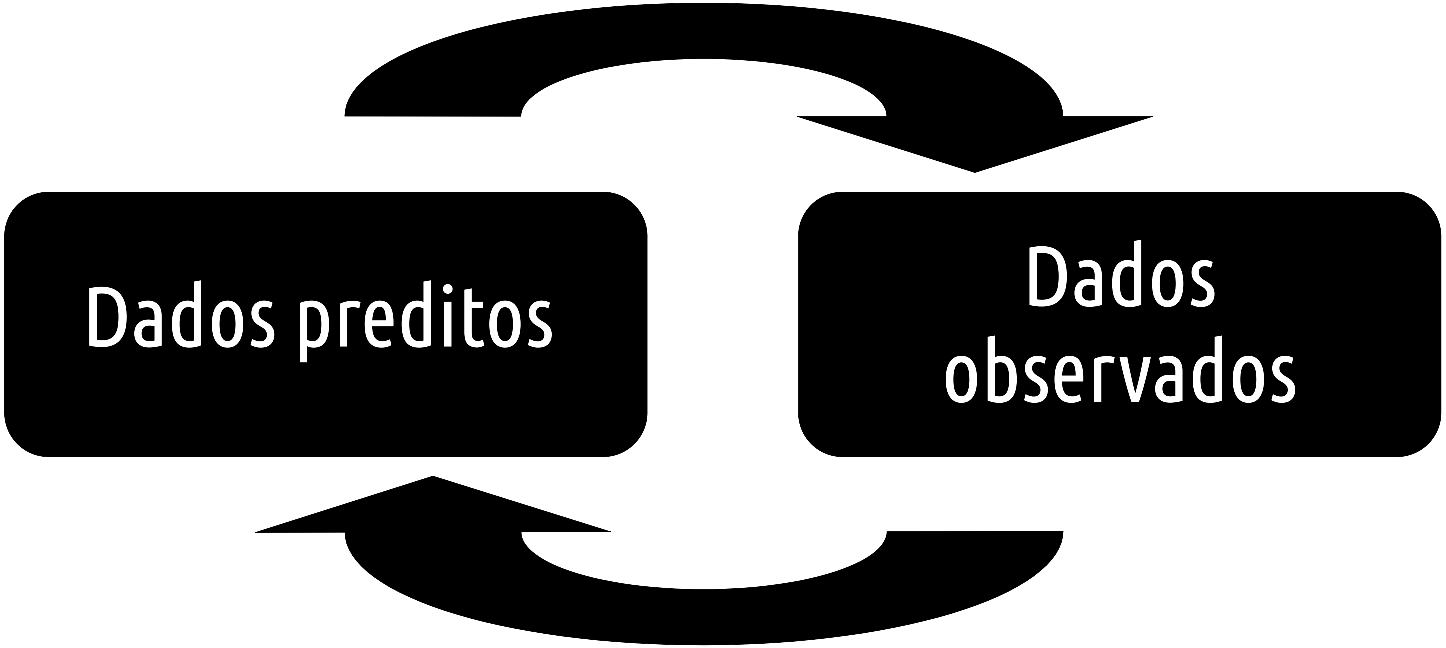
Conjunto de dados observados na superfície da terra



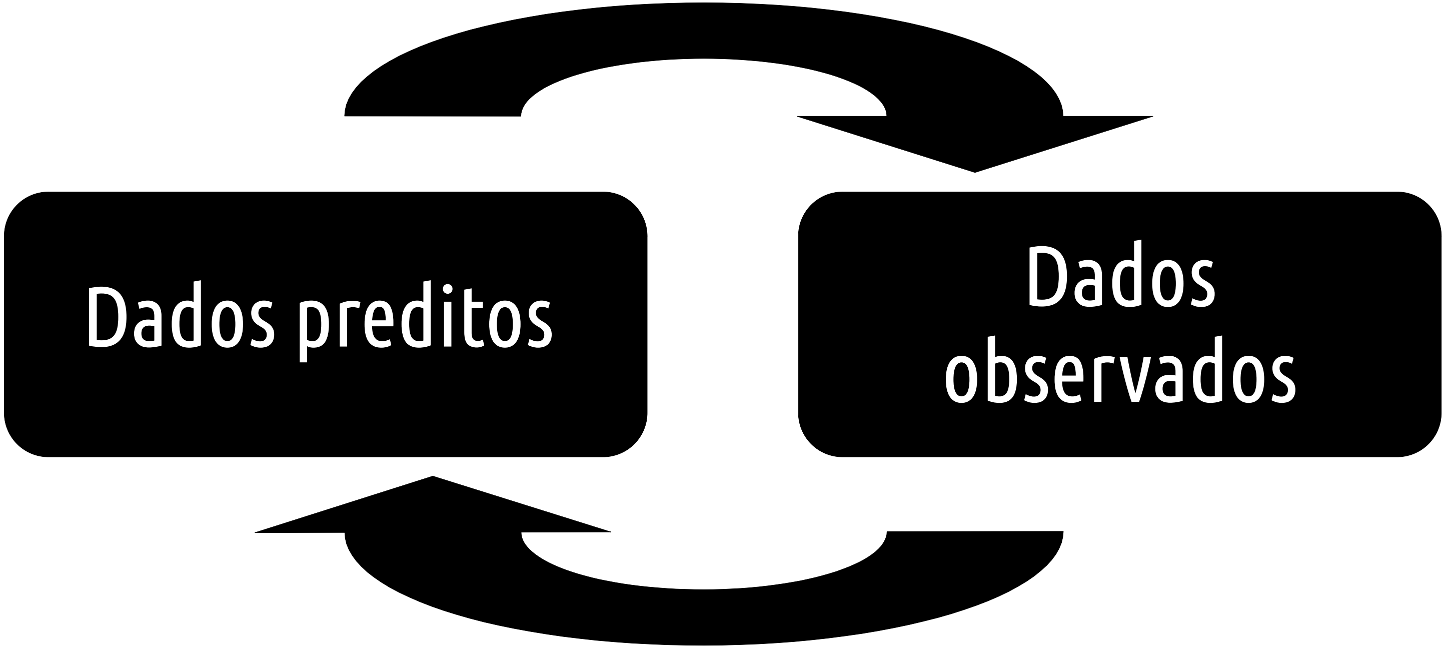
A partir destas medições podemos estimar **propriedades físicas** do ambiente em subsuperfície ou, até mesmo, a **geometrias do corpos**.


Dados preditos
Dados observados

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados



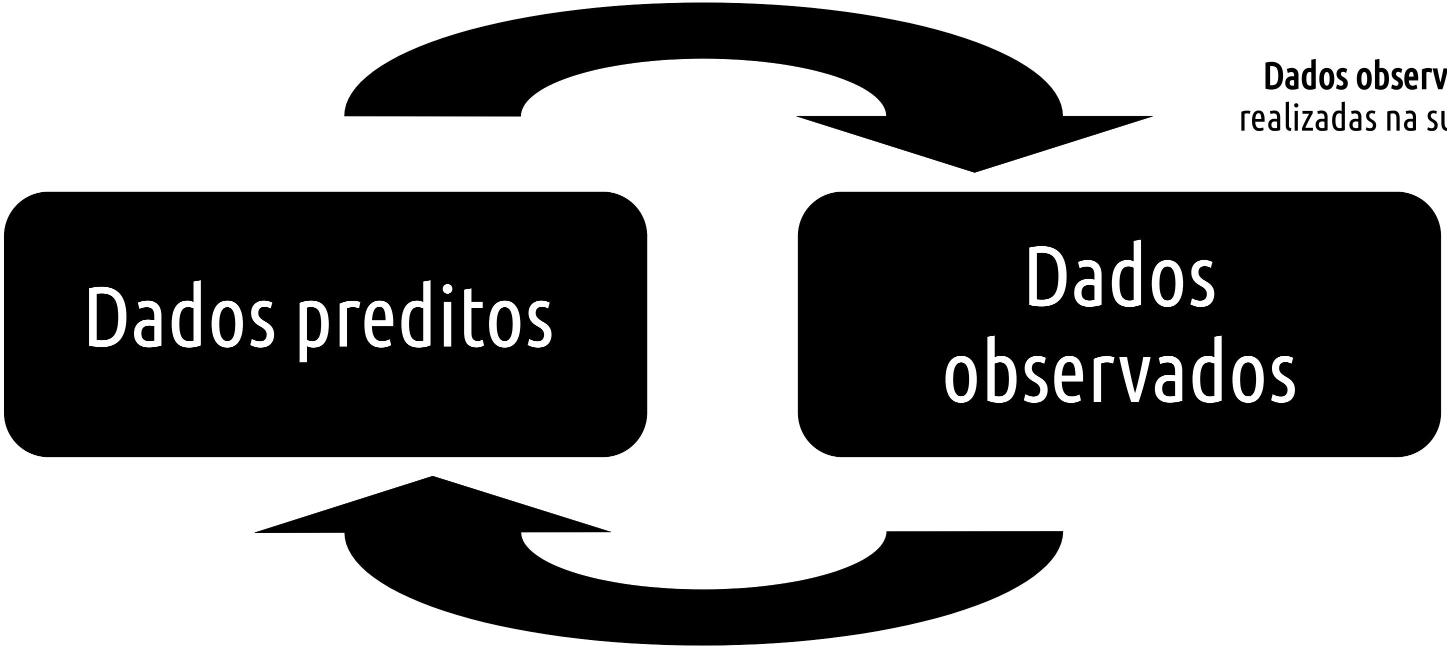
Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados



Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra

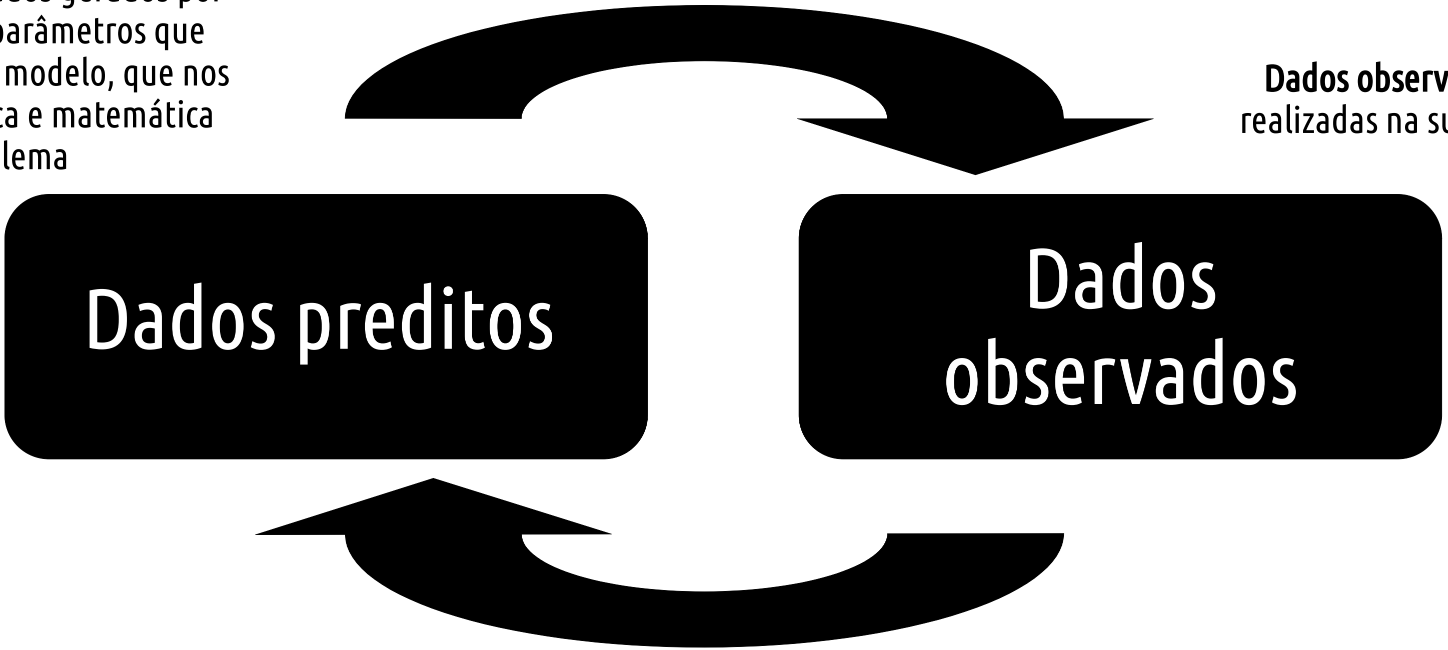


Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados preditos: dados gerados por um conjunto de parâmetros que descrevem o nosso modelo, que nos traz a relação física e matemática do problema

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra

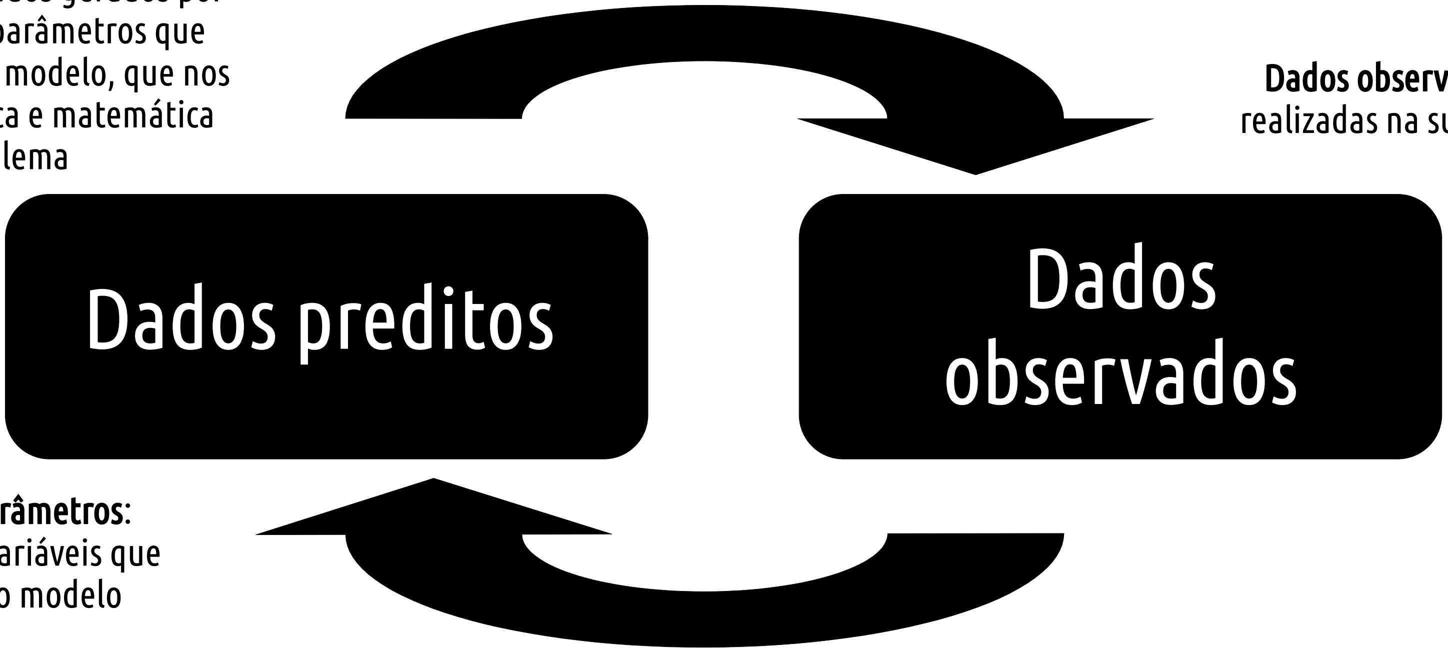


Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados preditos: dados gerados por um conjunto de parâmetros que descrevem o nosso modelo, que nos traz a relação física e matemática do problema

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra



Vetor de parâmetros: conjunto de variáveis que descrevem o modelo

Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados preditos: dados gerados por um conjunto de parâmetros que descrevem o nosso modelo, que nos traz a relação física e matemática do problema

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra

$d^p = f(p)$

Dados preditos

d^o

Dados observados

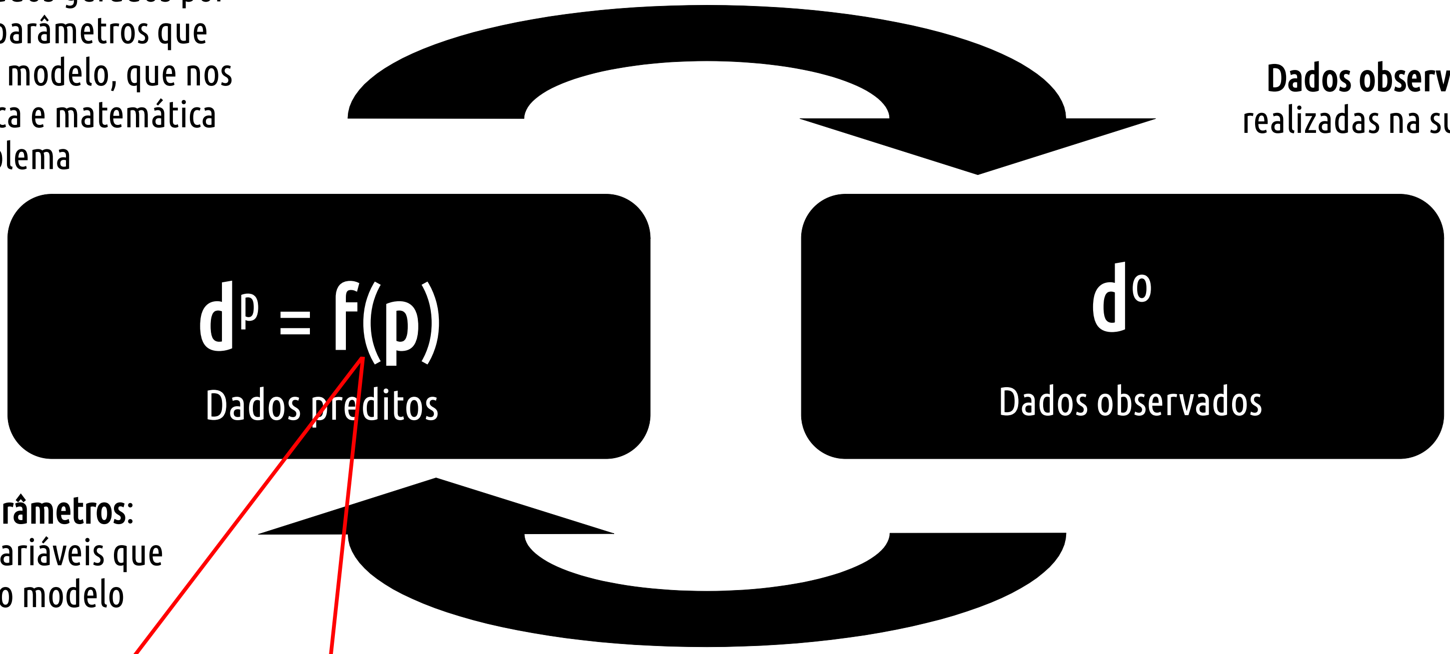
Vetor de parâmetros: conjunto de variáveis que descrevem o modelo

Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados preditos: dados gerados por um conjunto de parâmetros que descrevem o nosso modelo, que nos traz a relação física e matemática do problema

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra



Vetor de parâmetros: conjunto de variáveis que descrevem o modelo

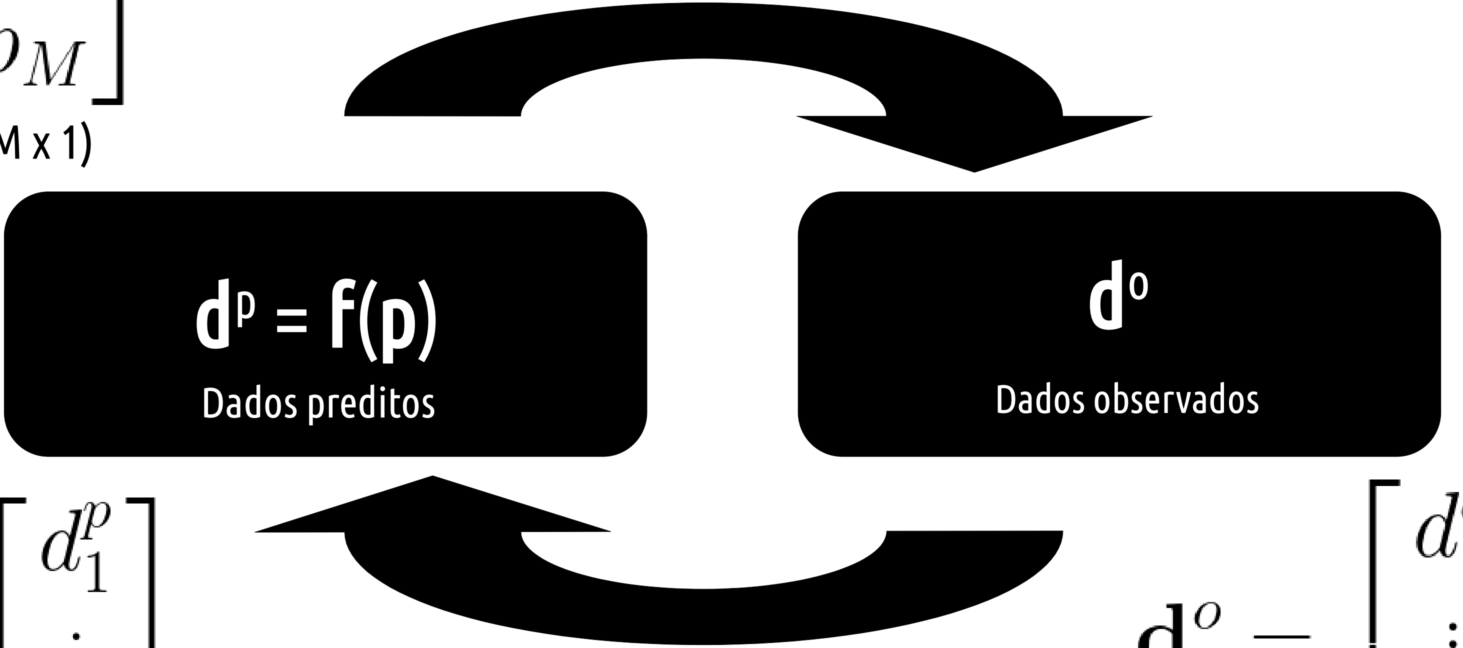
Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Linear

Não-linear

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

(M x 1)



$$\mathbf{d}^p = \begin{bmatrix} d_1^p \\ \vdots \\ d_N^p \end{bmatrix}$$

(N x 1)

$$\mathbf{d}^o = \begin{bmatrix} d_1^o \\ \vdots \\ d_N^o \end{bmatrix}$$

(N x 1)

O que procuramos na inversão é um **conjunto de parâmetros** que minimize a distância entre o **vetor de dados observados** e o **vetor de dados preditos** pelo modelo.

O que procuramos na inversão é um **conjunto de parâmetros** que minimize a distância entre o **vetor de dados observados** e o **vetor de dados preditos** pelo modelo.

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

$$\psi(\mathbf{p}) = \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p\|_2^2$$

Função de ajuste

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

$$\psi(\mathbf{p}) = \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p\|_2^2$$

Função de ajuste

$$\nabla\psi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Quando falamos em minimizar uma função, significa que queremos tomar o gradiente desta função e igualarmos a zero.

Uma vez que esta função é minimizada...

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^{\dagger} = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados

Uma vez que esta função é minimizada...

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\dagger = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NM} \end{bmatrix}$$

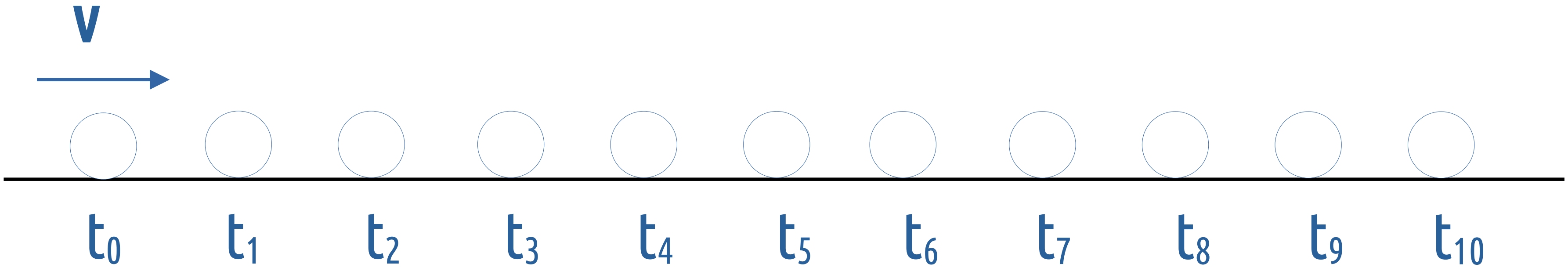
Matriz de sensibilidade: Mede a sensibilidade do i-ésimo dado em relação ao j-ésimo parâmetro

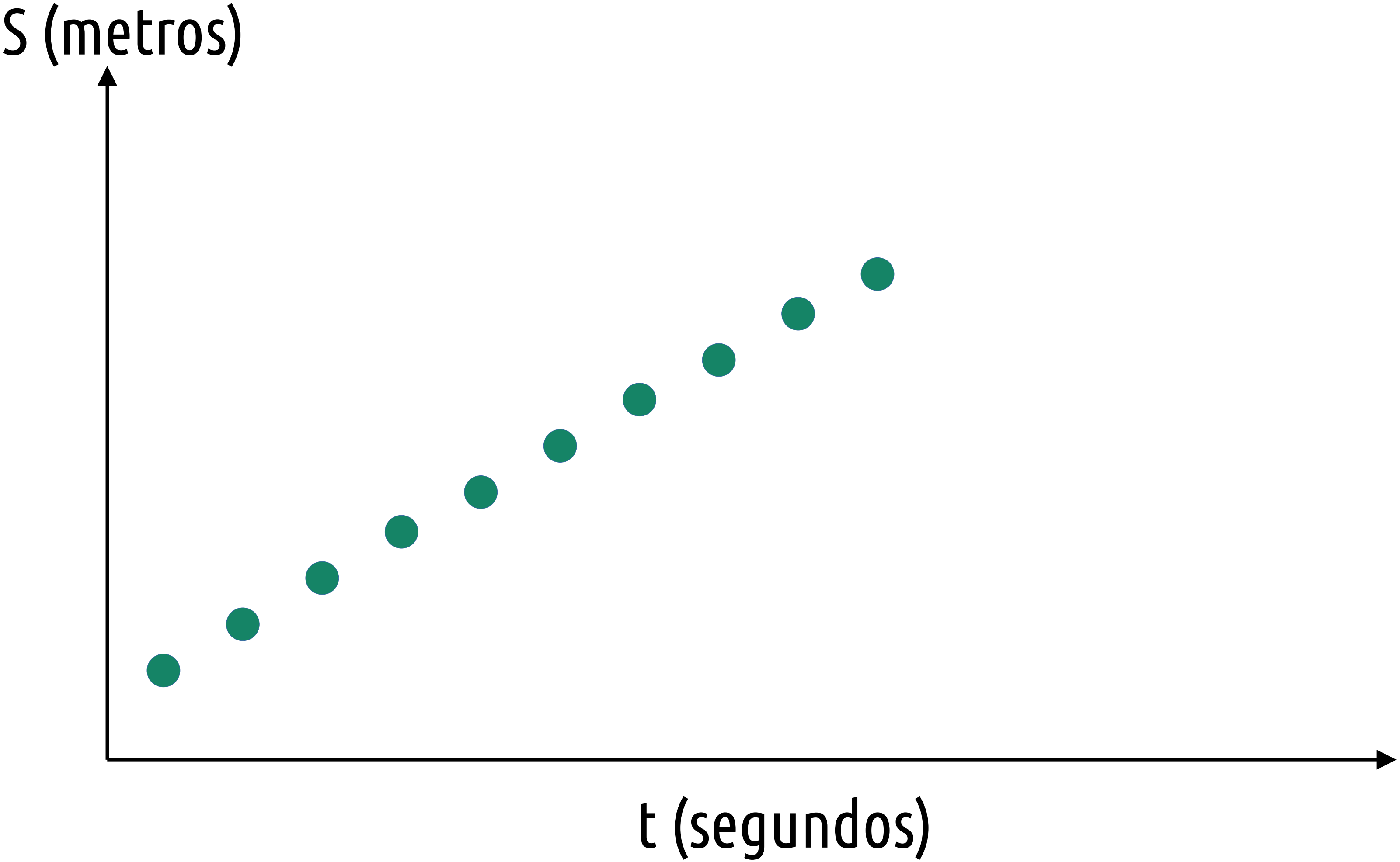
$$g_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$$

Exemplos

Movimento retilíneo uniforme

Neste caso, o mais simples possível, queremos resolver um problema linear que descreve o movimento de um corpo com velocidade constante.




S (metros)
t (segundos)

Parametrização

Considere que o corpo se mova em velocidade constante em uma trajetória retilínea e que nenhuma força atue e o movimento pode ser descrito por meio da:

* Posição inicial S_0 do corpo

* A sua velocidade v

* O instante t que registramos sua posição

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + Vt$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade V?

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + Vt$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade V?

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1(t) = S_0 + Vt_1$$
$$S_2(t) = S_0 + Vt_2$$
$$\vdots$$
$$S_N(t) = S_0 + Vt_N$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S(p) = Gp}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$S_1(t) = S_0 + Vt_1$

$S_2(t) = S_0 + Vt_2$

$\vdots$

$S_N(t) = S_0 + Vt_N$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

S(p) = Gp

Vetor de dados preditos

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1(t) = S_0 + Vt_1$$

$$S_2(t) = S_0 + Vt_2$$

$$\vdots$$

$$S_N(t) = S_0 + Vt_N$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

Vetor de parâmetros

S(p) = Gp

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1(t) = S_0 + Vt_1$$

$$S_2(t) = S_0 + Vt_2$$

$$\vdots$$

$$S_N(t) = S_0 + Vt_N$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

S(p) = Gp

Matriz de sensibilidade

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1(t) = S_0 + Vt_1$$

$$S_2(t) = S_0 + Vt_2$$

$$\vdots$$

$$S_N(t) = S_0 + Vt_N$$

Derivada do dado predito em relação aos parâmetros

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

S(p) = Gp

Matriz de sensibilidade

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

Derivada do dado predito em relação aos parâmetros

$S_1(t) = S_0 + Vt_1$

$S_2(t) = S_0 + Vt_2$

$\vdots$

$S_N(t) = S_0 + Vt_N$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

S(p) = Gp

Matriz de sensibilidade

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

Para minimizar a distância entre os dados preditos e os dados observados teremos:

$$\psi(\mathbf{p}) = ||\mathbf{S}^o - \mathbf{S}(\mathbf{p})||^2$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

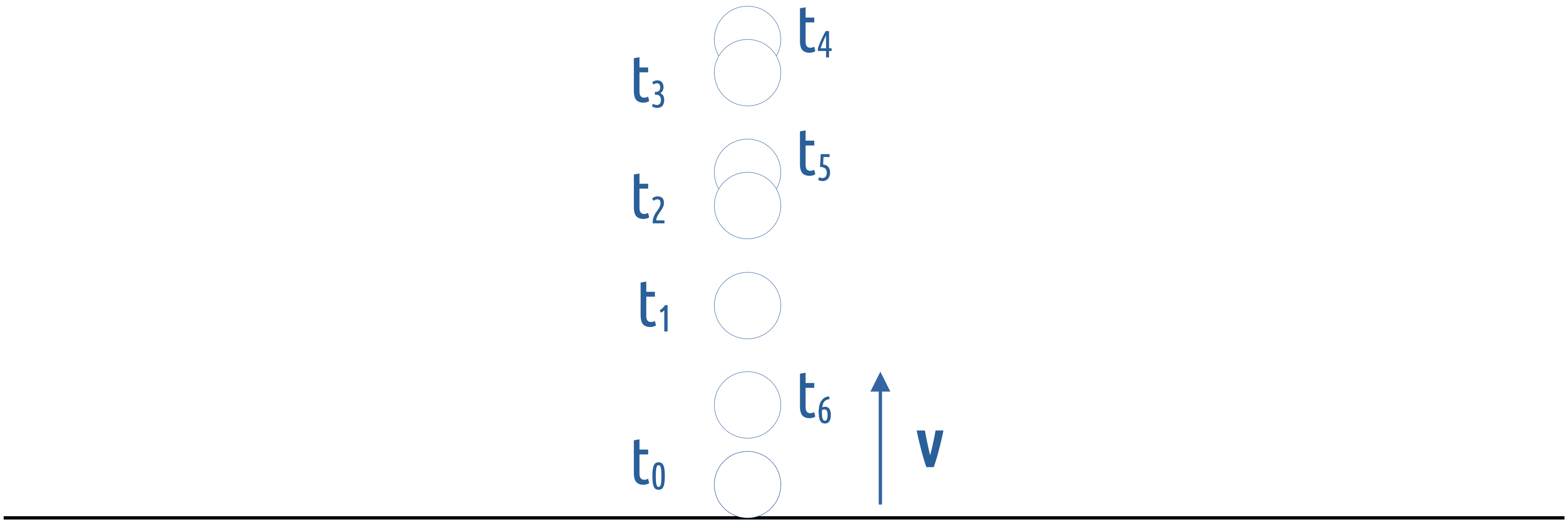
$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^{\#} = \mathbf{G}^T \mathbf{S}^o$$

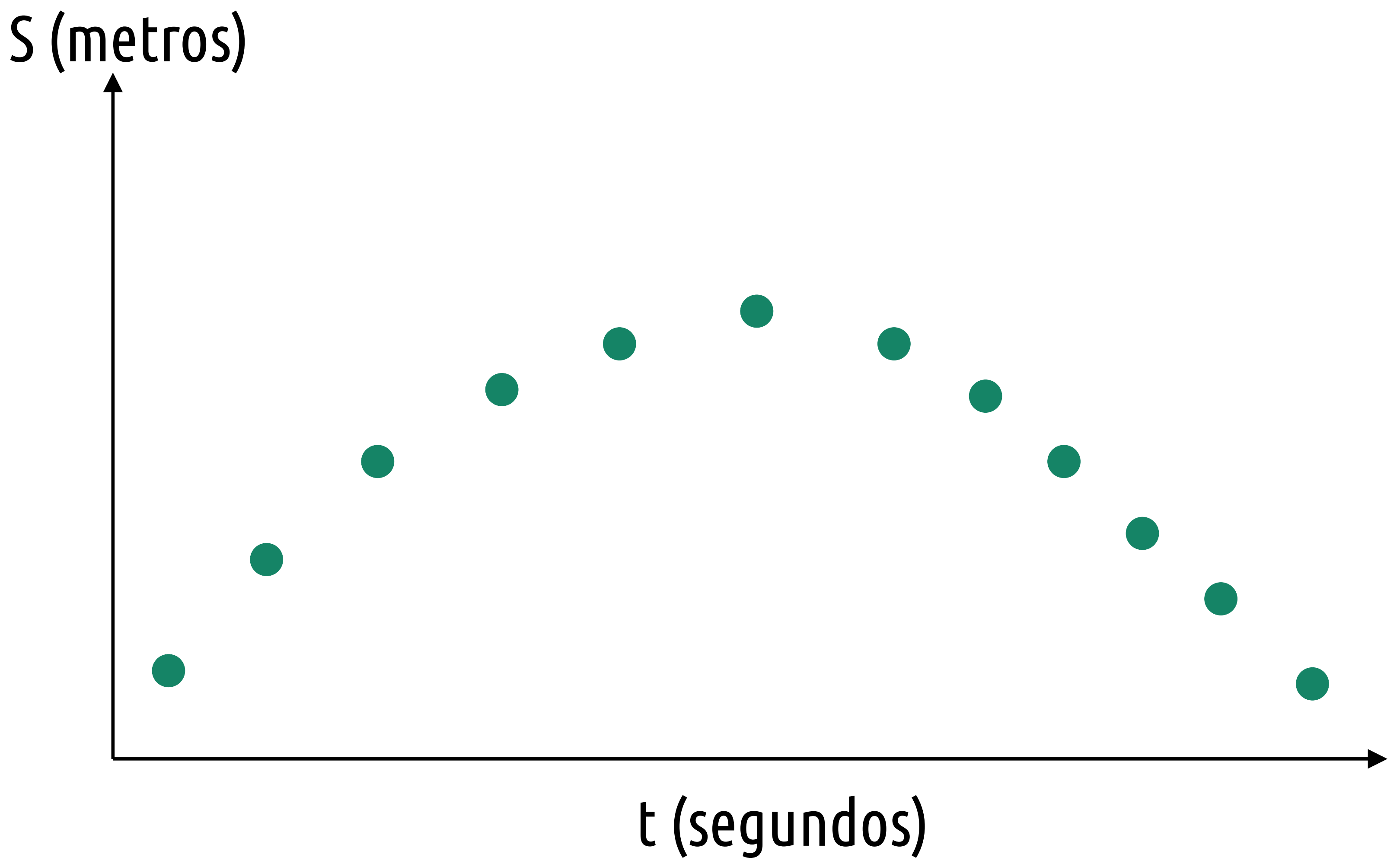
Estimador de mínimos quadrados

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Movimento uniformemente acelerado

Neste caso, queremos resolver um problema linear que descreve o movimento de um corpo com variação de velocidade.




S (metros)
t (segundos)

Parametrização

Considere que o corpo se mova na vertical em uma trajetória retilínea e que a única força que atua sobre ele é a força peso. Neste sentido, conseguimos descrever seu movimento através de:

* Posição inicial S_0 do corpo

* A sua velocidade inicial V_0

* O instante t que registramos sua posição

* A aceleração da gravidade g

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + V_0\, t + 0{,}5gt^2$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade inicial V_0 e a aceleração da gravidade g?

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + V_0\, t + 0{,}5gt^2$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade inicial V_0 e a aceleração da gravidade g?

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1(t) = S_0 + V_0\, t_1 + 0{,}5 g t_1^2$$

$$S_2(t) = S_0 + V_0\, t_2 + 0{,}5 g t_2^2$$

$$\vdots$$

$$S_N(t) = S_0 + V_0\, t_N + 0{,}5 g t_N^2$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & 0,5t_1^2 \\ 1 & t_2 & 0,5t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N & 0,5t_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V_0 \\ g \end{bmatrix}$$

Vetor de dados preditos

S(p) = Gp

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1(t) = S_0 + V_0\, t_1 + 0{,}5gt_1^2$$

$$S_2(t) = S_0 + V_0\, t_2 + 0{,}5gt_2^2$$

$$\vdots$$

$$S_N(t) = S_0 + V_0\, t_N + 0{,}5gt_N^2$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & 0,5t_1^2 \\ 1 & t_2 & 0,5t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N & 0,5t_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V_0 \\ g \end{bmatrix}$$

S(p) = Gp

Vetor de parâmetros

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1(t) = S_0 + V_0\, t_1 + 0{,}5gt_1^2$$

$$S_2(t) = S_0 + V_0\, t_2 + 0{,}5gt_2^2$$

$$\vdots$$

$$S_N(t) = S_0 + V_0\, t_N + 0{,}5gt_N^2$$

Derivada do dado predito em relação aos parâmetros

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & 0,5t_1^2 \\ 1 & t_2 & 0,5t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N & 0,5t_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V_0 \\ g \end{bmatrix}$$

$S(p) = Gp$

Matriz de sensibilidade

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

Para minimizar a distância entre os dados preditos e os dados observados teremos:

$$\psi(p) = ||S^o - S(p)||^2$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & 0,5t_1^2 \\ 1 & t_2 & 0,5t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N & 0,5t_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V_0 \\ g \end{bmatrix}$$

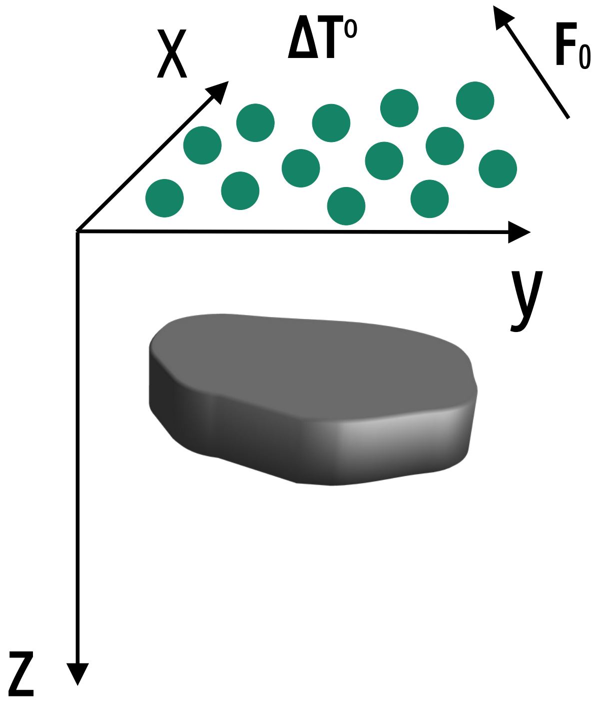
$$(G^T G)p^{\#} = G^T S^o$$

Estimador de mínimos quadrados

$$S(p) = Gp$$

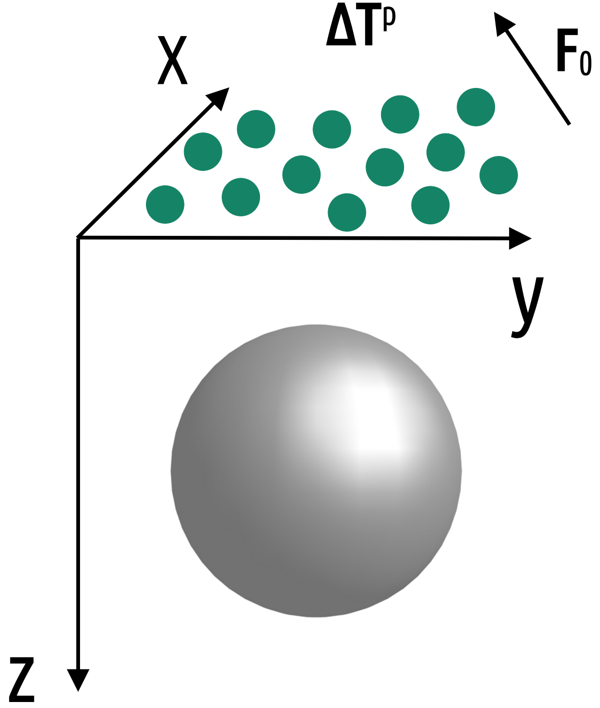
Estimativa da direção de magnetização de corpos aproximadamente esféricos

Fonte magnética 3D



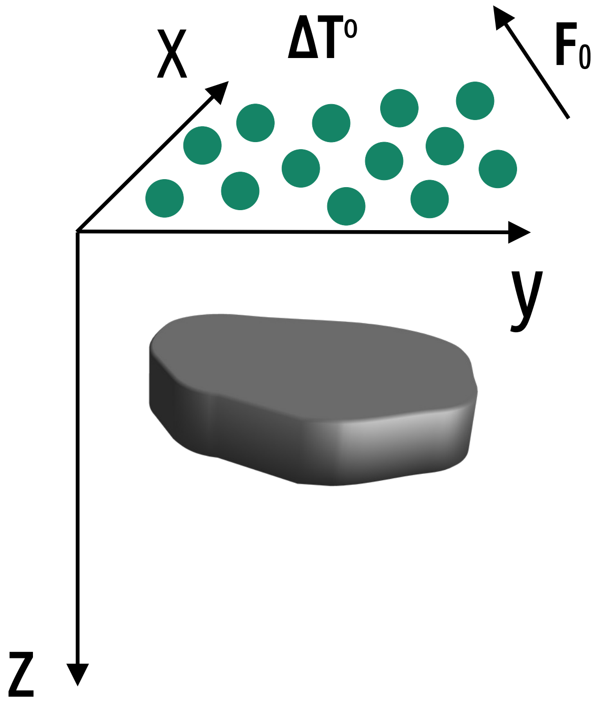
Recuperar o efeito de uma fonte 3D assumindo que ela é esférica

Modelo esférico



Oliveira Jr (2015)

Fonte magnética 3D

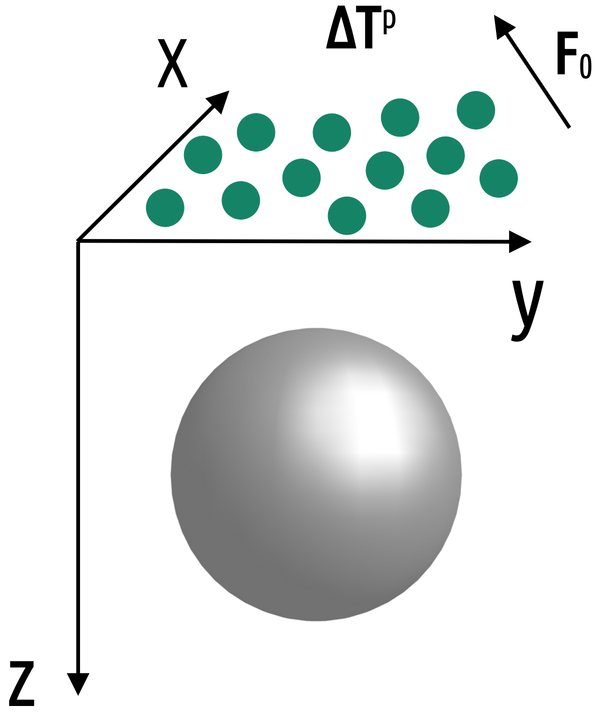


Recuperar o efeito de uma fonte 3D assumindo que ela é esférica

$$\mathbf{\Delta T}^{o} = \begin{bmatrix} \Delta T^{1} \\ \vdots \\ \Delta T^{N} \end{bmatrix}$$

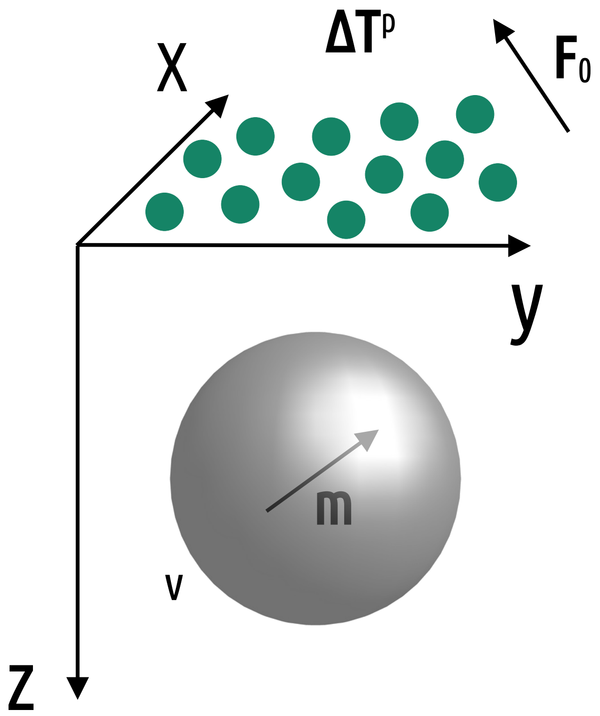
Vetor de dados observados

Modelo esférico



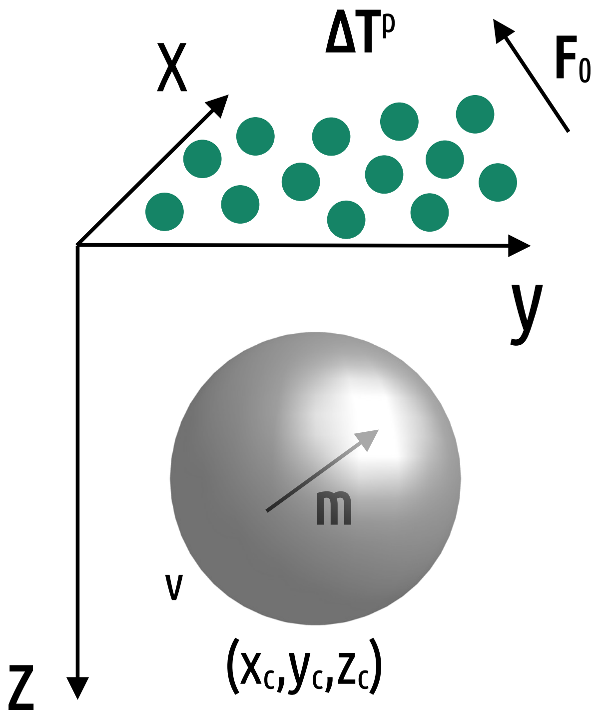
Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



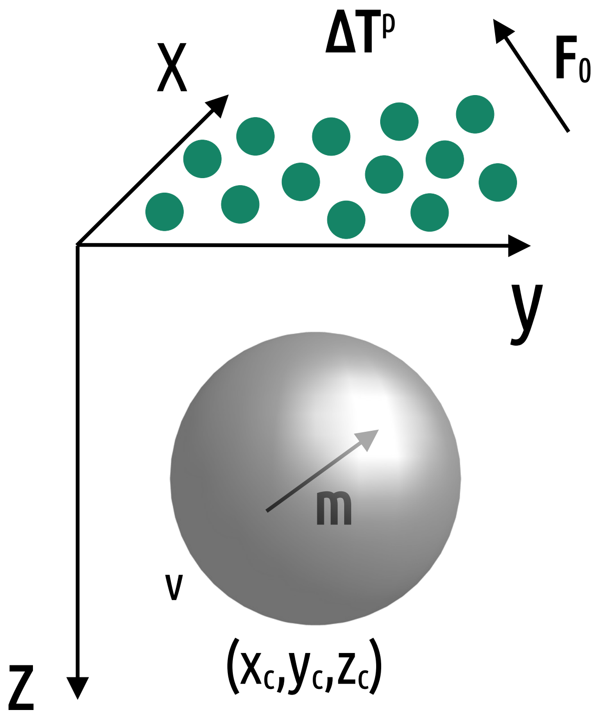
Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



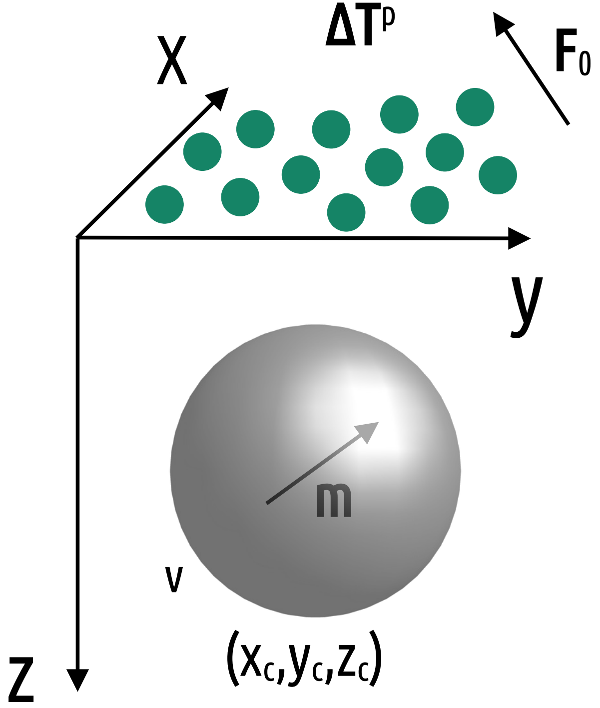
Coordenadas do centro

A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^P = C_m \nu \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_i \mathbf{m}$$

Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



Coordenadas do centro

A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

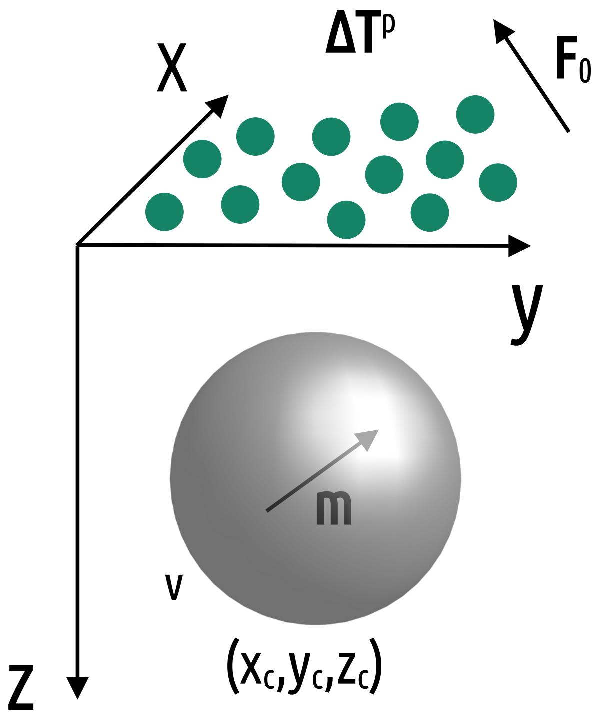
$$\Delta T_i^P = C_m \nu \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_i \mathbf{m}$$

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \sin D_0 \\ \cos I_0 \cos D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix}$$

Campo principal

Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



Coordenadas do centro

A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^P = C_m \nu \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_i \mathbf{m}$$

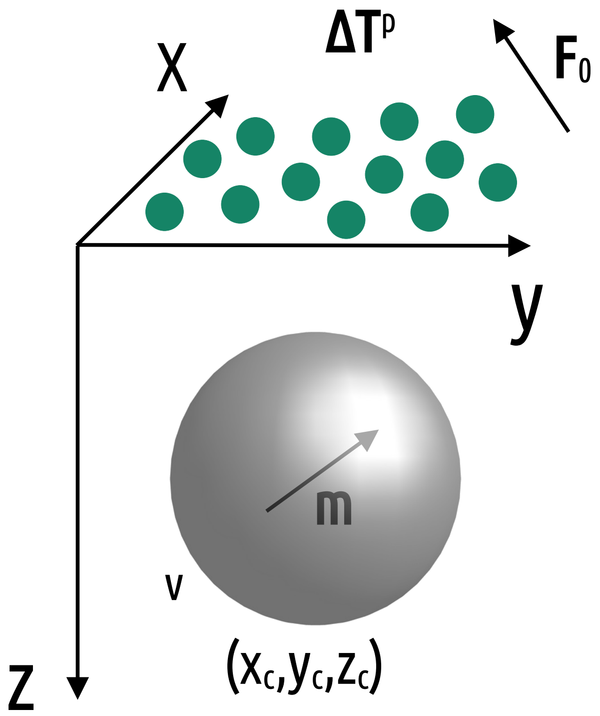
$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \sin D_0 \\ \cos I_0 \cos D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\frac{1}{r} & \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{xz}\frac{1}{r} \\ \partial_{yx}\frac{1}{r} & \partial_{yy}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} \\ \partial_{zx}\frac{1}{r} & \partial_{zy}\frac{1}{r} & \partial_{zz}\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Campo principal

Hessiana

Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



Coordenadas do centro

A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^P = C_m \nu \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_i \mathbf{m}$$

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \sin D_0 \\ \cos I_0 \cos D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\frac{1}{r} & \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{xz}\frac{1}{r} \\ \partial_{yx}\frac{1}{r} & \partial_{yy}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} \\ \partial_{zx}\frac{1}{r} & \partial_{zy}\frac{1}{r} & \partial_{zz}\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Campo principal

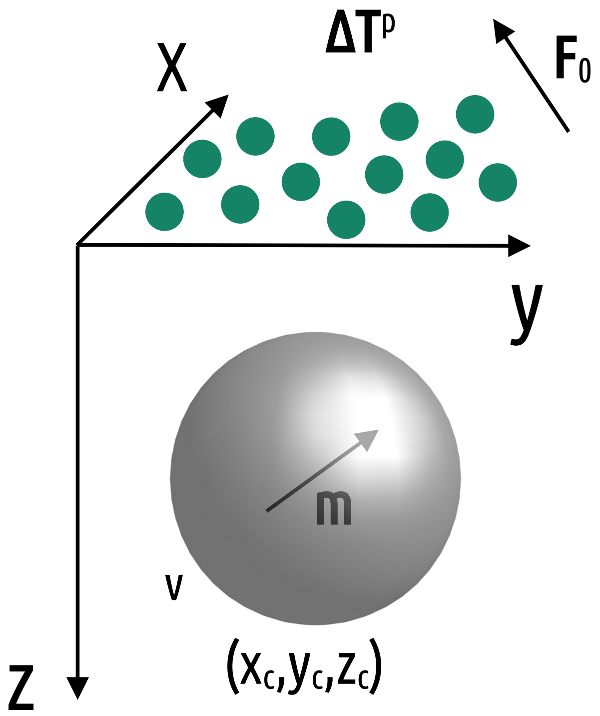
Hessiana

$$r = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2}$$

Distância entre o i-ésimo ponto e o centro da esfera

Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



Coordenadas do centro

A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^P = C_m \nu \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_i \mathbf{m}$$

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \sin D_0 \\ \cos I_0 \cos D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix}$$

Campo principal

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\frac{1}{r} & \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{xz}\frac{1}{r} \\ \partial_{yx}\frac{1}{r} & \partial_{yy}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} \\ \partial_{zx}\frac{1}{r} & \partial_{zy}\frac{1}{r} & \partial_{zz}\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Hessiana

$$r = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2}$$

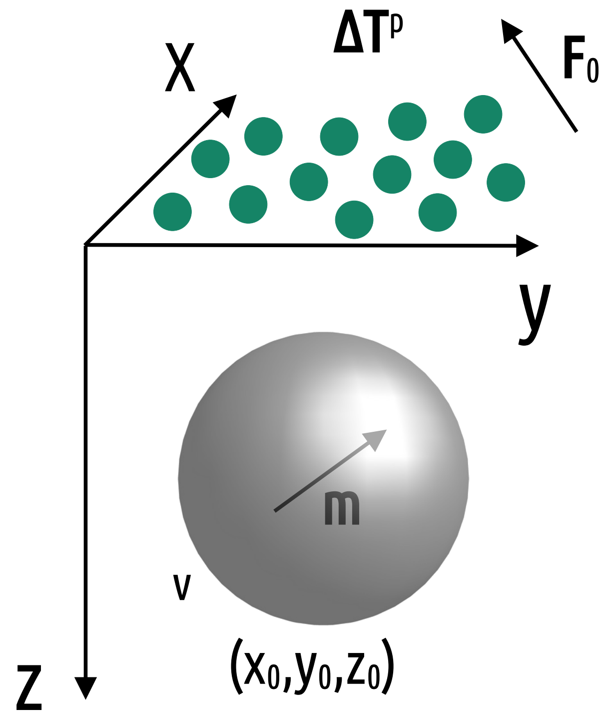
Distância entre o i-ésimo ponto e o centro da esfera

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Direção de magnetização (vetor de parâmetros)

Oliveira Jr (2015)

Modelo esférico



Coordenadas do centro

A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^P = C_m \nu \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_i \mathbf{m}$$

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \sin D_0 \\ \cos I_0 \cos D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix}$$

Campo principal

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\frac{1}{r} & \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{xz}\frac{1}{r} \\ \partial_{yx}\frac{1}{r} & \partial_{yy}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} \\ \partial_{zx}\frac{1}{r} & \partial_{zy}\frac{1}{r} & \partial_{zz}\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Hessiana

$$r = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2}$$

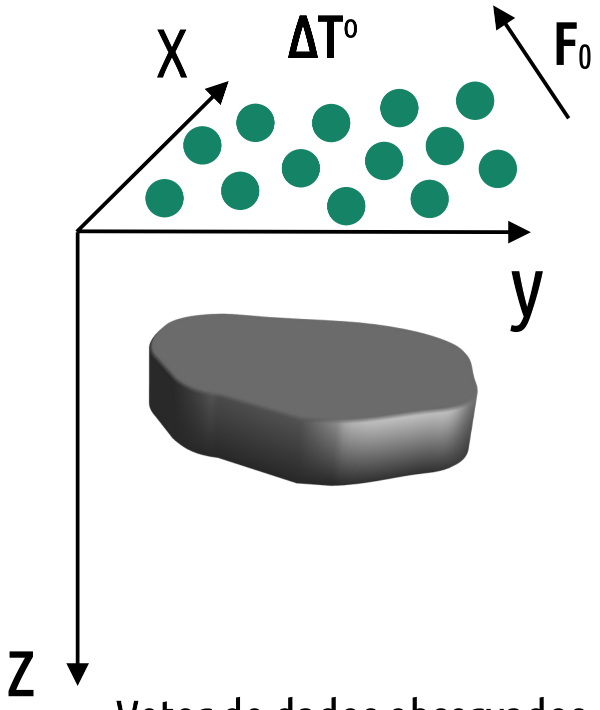
Distância entre o i-ésimo ponto e o centro da esfera

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Direção de magnetização (vetor de parâmetros)

Oliveira Jr (2015)

Fonte magnética 3D



Vetor de dados observados

ΔT^o

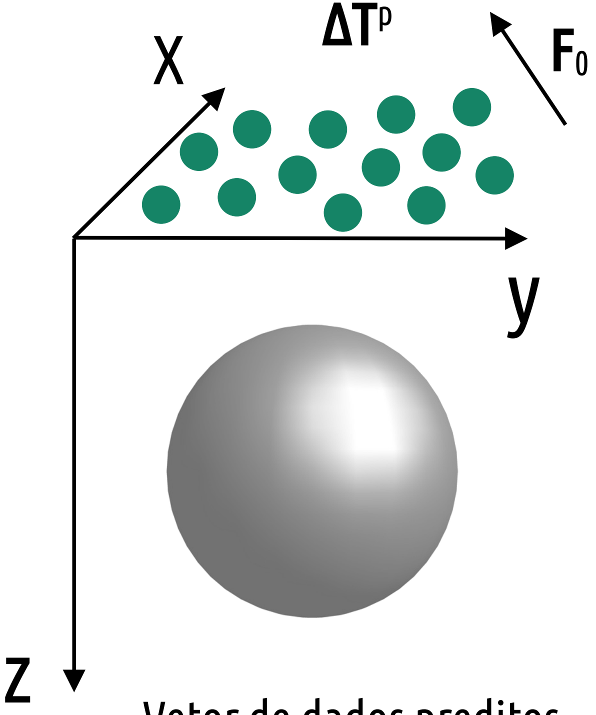
Queremos estimar uma **direção de magnetização** que minimize a distância entre os dados observados e os dados preditos gerados pela esfera!

$$\psi(m) = ||\Delta T^o - \Delta T^p(m)||^2$$

$$(G^T G)m^{\#} = G^T \Delta T^o$$

Estimador de mínimos quadrados

Modelo esférico



Vetor de dados preditos

ΔT^p

Oliveira Jr (2015)

Recuperamos a direção de magnetização de um prisma utilizando uma esfera? Como?

Objetivos da aula

* A formulação de um problema inverso linear

* Equação de mínimos quadrados

* Exemplos:
    - Movimento retilíneo uniforme
    - Movimento uniformemente acelerado
    - Estimativa da direção de magnetização de corpos esféricos

Até breve!