Regularização de um problema inverso não-linear

Prof. André L. A. dos Reis

Rio de Janeiro 2023

Objetivos da aula

* Como regularizar um problema não-linear;

* O problema visto de um ponto de vista matemático;

* Regularização de Norma mínima e suavidade para problemas inversos não-lineares.

Comparação com o problema linear

Formulação matemática

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

$$\varphi(\mathbf{p}) = \| \mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p \|_2$$

Função de ajuste

$$\nabla \varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Quando falamos em minimizar uma função, significa que queremos tomar o gradiente desta função e igualarmos a zero.

Formulação matemática

Uma vez que esta função é minimizada...

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados

Matriz de sensibilidade: Mede a sensibilidade do i-ésimo dado em relação ao j-ésimo parâmetro.

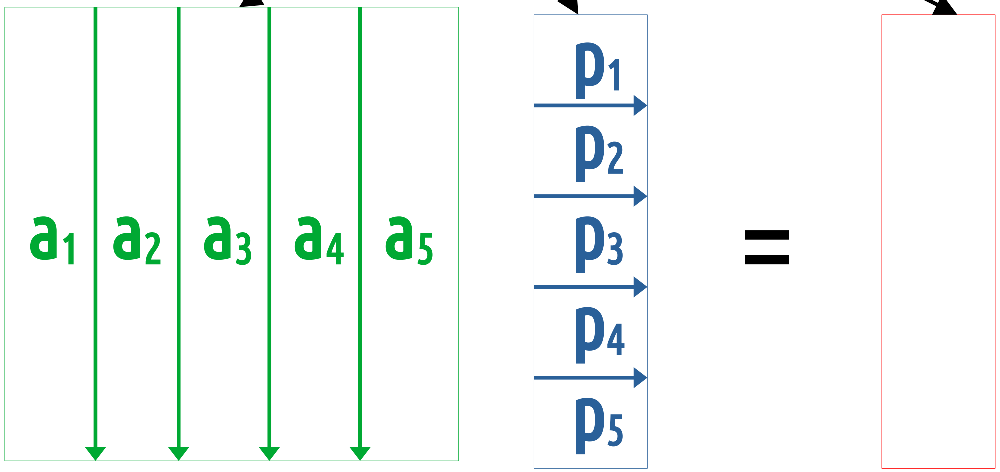
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} \longrightarrow g_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$$

Formulação matemática

Sistemas lineares (caso linear)

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

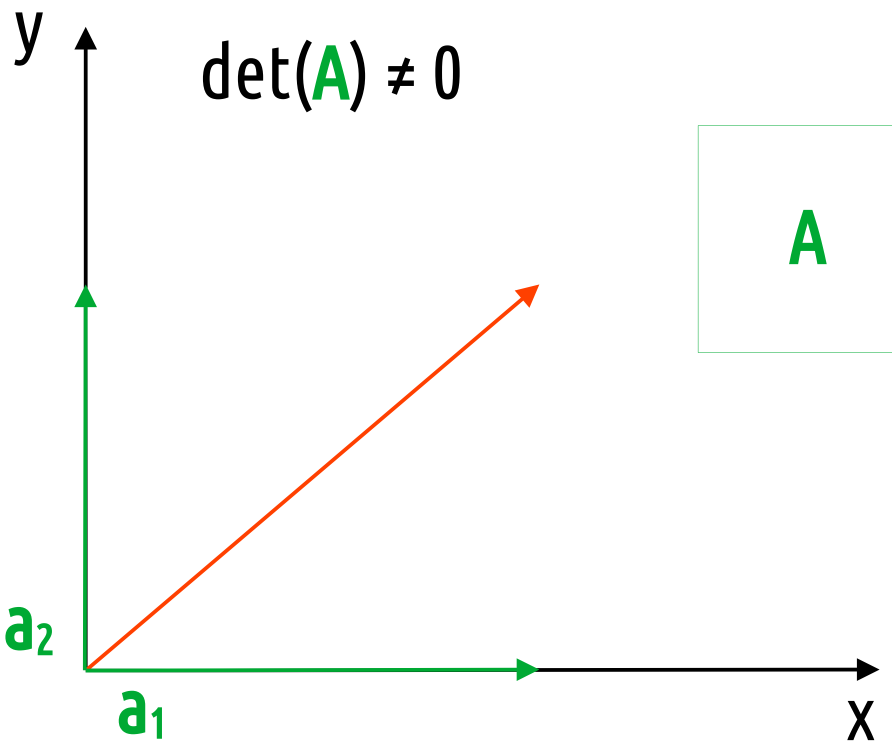
$$\mathbf{A}\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{t}$$



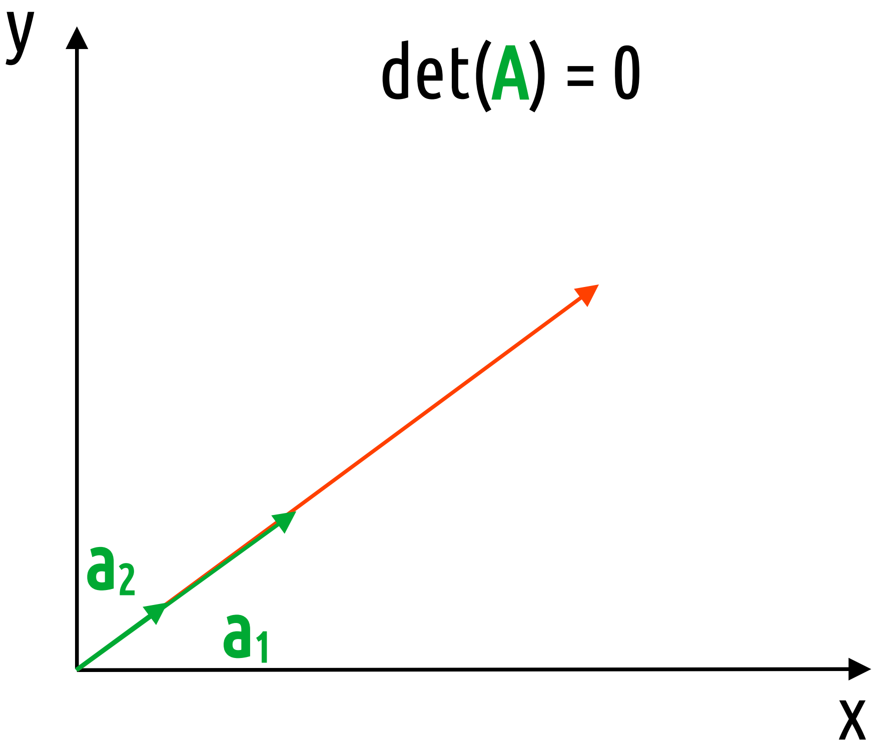
Formulação matemática

Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D



$$\mathbf{A}\,\mathbf{p} = \mathbf{t}$$



Neste caso diz-se que o sistema linear é mal condicionado

Formulação matemática

Matematicamente, o que queremos é minimizar uma função tal como:

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

O primeiro termo é a **função de ajuste** e o segundo termo é a **função regularizadora**. O **parâmetro de regularização** é dado por μ.

Regularização de Tikhonov de Ordem Zero (ou Norma Mínima)

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{p}$$

Função regularizadora

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{I})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado
(Norma mínima)

Regularização de Tikhonov de Ordem Um (ou Suavidade)

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{p}$$

Função regularizadora

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{R}^T\mathbf{R})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado (Suavidade)

Regularização não-linear

Regularização Tik-0

Problema não-linear

$$\mathbf{d}^p \neq \mathbf{G}\mathbf{p}$$

$$[\mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T\mathbf{G}(\mathbf{p}^k)]\mathbf{\Delta p}^k = \mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T[\mathbf{d}^\mathbf{o} - \mathbf{f}(\mathbf{p}^k)]$$

Método de Gauss-Newton

Regularização de Tikhonov de Ordem Zero (ou Norma Mínima)

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{p}$$

Função regularizadora

$$[\mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T\mathbf{G}(\mathbf{p}^k) + \mu\mathbf{I}]\mathbf{\Delta p}^k = \mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T[\mathbf{d}^\mathbf{o} - \mathbf{f}(\mathbf{p}^k)] - \mu\mathbf{p}^k$$

Método de Gauss-Newton Regularizado

Regularização Tik-1

Problema não-linear

$$\mathbf{d}^p \neq \mathbf{G}\mathbf{p}$$

$$[\mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T\mathbf{G}(\mathbf{p}^k)]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}^k = \mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T[\mathbf{d}^{\mathbf{o}} - \mathbf{f}(\mathbf{p}^k)]$$

Método de Gauss-Newton

Regularização de Tikhonov de Ordem Um (ou Suavidade)

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{p}$$

Função regularizadora

$$[\mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T\mathbf{G}(\mathbf{p}^k) + \mu\mathbf{R}^T\mathbf{R}]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}^k = \mathbf{G}(\mathbf{p}^k)^T[\mathbf{d}^{\mathbf{o}} - \mathbf{f}(\mathbf{p}^k)] - \mu\mathbf{R}^T R\mathbf{p}^k$$

Método de Gauss-Newton Regularizado

Até breve!