Formulação matemática de um problema inverso linear

Prof. André L. A. dos Reis

Rio de Janeiro 2023

Objetivos da aula

* A formulação de um problema inverso linear

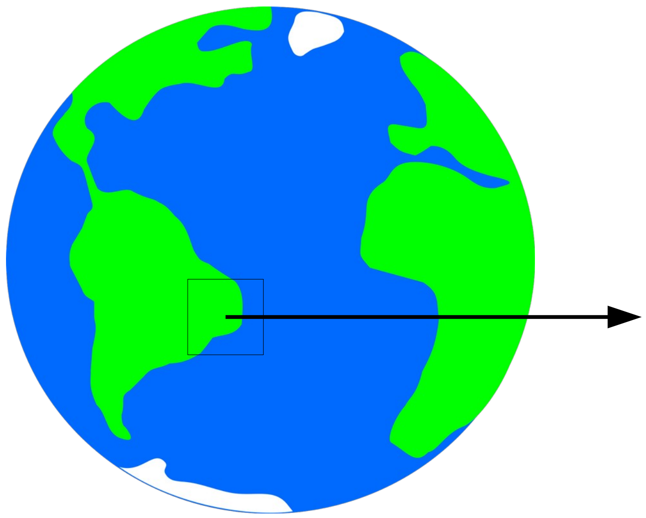
* Equação de mínimos quadrados

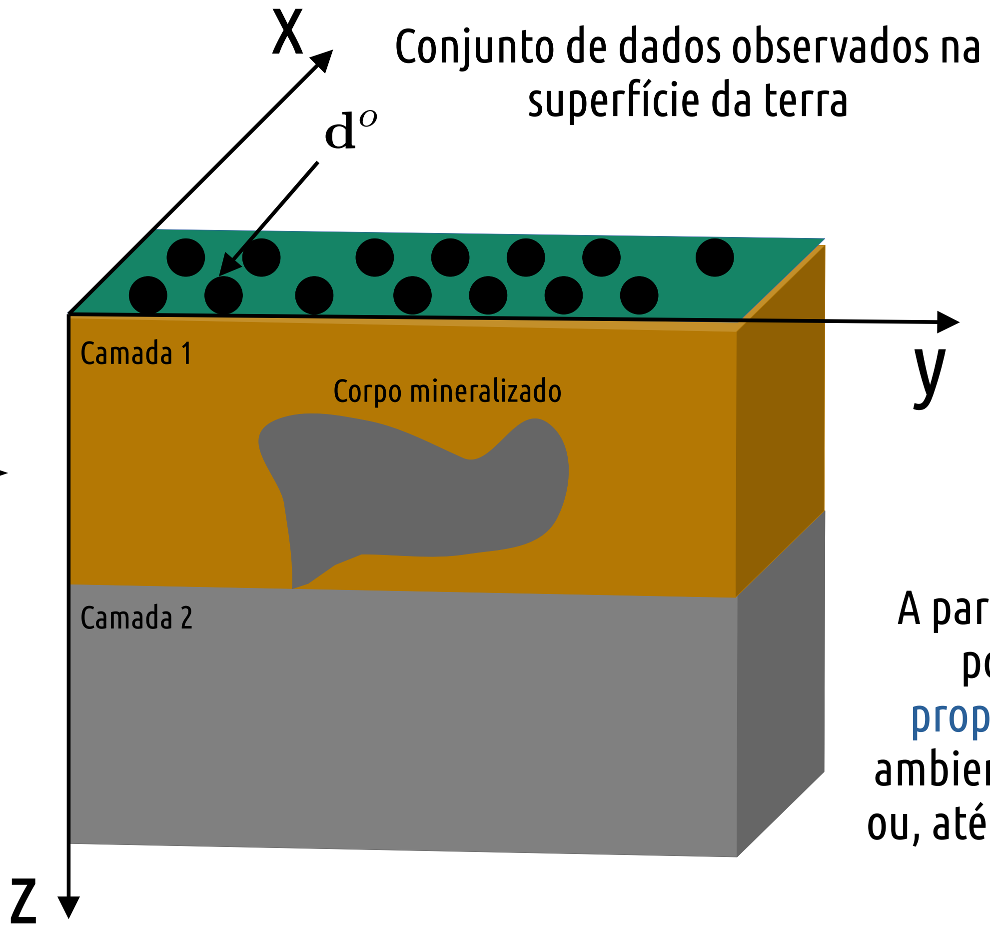
* Exemplos:
    - Movimento retilíneo uniforme
    - Movimento uniformemente acelerado
    - Estimativa da direção de magnetização de corpos esféricos

* Projeto:
    - Tomografia sísmica simplificada

Falando em termos matemáticos

Formulação matemática





Necessitamos **formular matematicamente** como descrever este **processo de estimarmos** quantidades que nos trarão informações dos ambientes em subsuperfície!

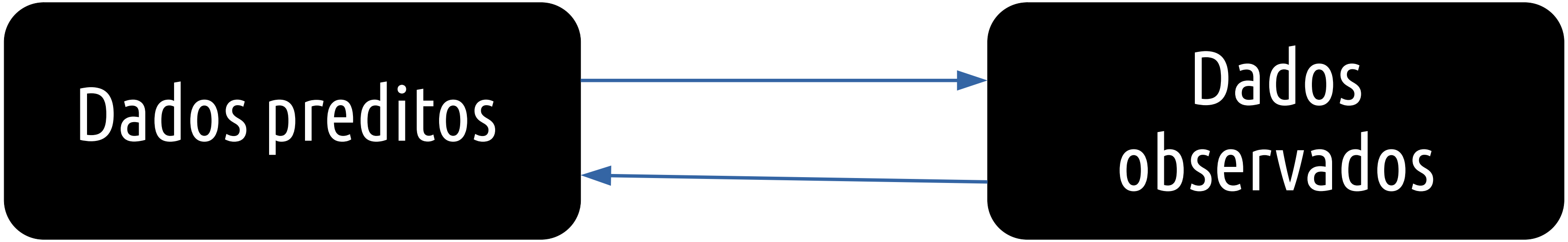
A partir destas medições podemos estimar **propriedades físicas** do ambiente em subsuperfície ou, até mesmo, a **geometria dos corpos**.

Formulação matemática

Dados preditos: dados gerados por um conjunto de parâmetros que descrevem o nosso modelo, que nos traz a relação física e matemática do problema

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra



Vetor de parâmetros: conjunto de variáveis que descrevem o modelo

Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Formulação matemática

Dados preditos: dados gerados por um conjunto de parâmetros que descrevem o nosso modelo, que nos traz a relação física e matemática do problema

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra

$$\mathbf{d}^p = f(\mathbf{p})$$

Dados preditos

$$\mathbf{d}^o$$

Dados observados

Vetor de parâmetros: conjunto de variáveis que descrevem o modelo

Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Formulação matemática

Dados preditos: dados gerados por um conjunto de parâmetros que descrevem o nosso modelo, que nos traz a relação física e matemática do problema

Modelagem direta: sintoniza manualmente o conjunto de parâmetros e compara com os dados observados

Dados observados: medições realizadas na superfície da Terra

$$\mathbf{d}^p = f(\mathbf{p})$$

Dados preditos

$$\mathbf{d}^o$$

Dados observados

Vetor de parâmetros: conjunto de variáveis que descrevem o modelo

Problema inverso: estima automaticamente o conjunto de parâmetros a partir dos dados observados

Linear

Não-linear

O que procuramos na inversão é um **conjunto de parâmetros** que minimize a distância entre o **vetor de dados observados** e o **vetor de dados preditos** pelo modelo.

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

Formulação matemática

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

$$\varphi(\mathbf{p}) = \| \mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p \|_2 = [\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p]^T [\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p]$$

Função de ajuste

$$\nabla \varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Quando falamos em minimizar uma função, significa que queremos tomar o gradiente desta função e igualarmos a zero.

Formulação matemática

Uma vez que esta função é minimizada...

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados

Matriz de sensibilidade: Mede a sensibilidade do i-ésimo dado em relação ao j-ésimo parâmetro.

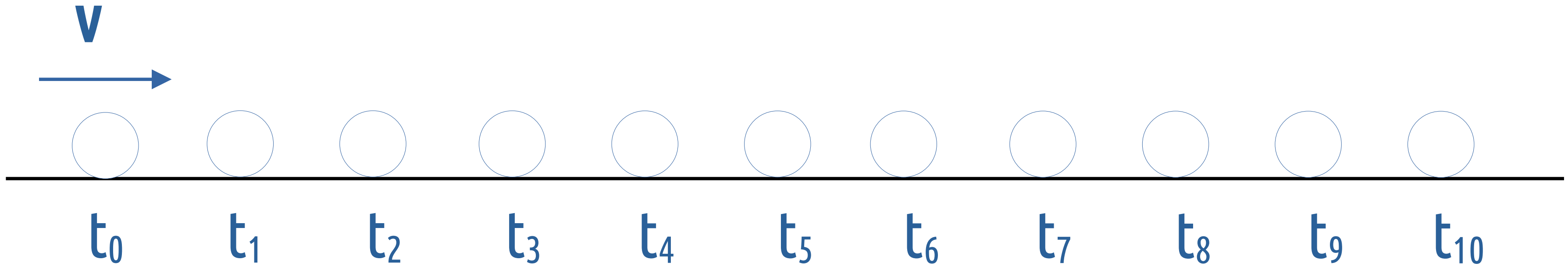
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} \longrightarrow g_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$$

Exemplos

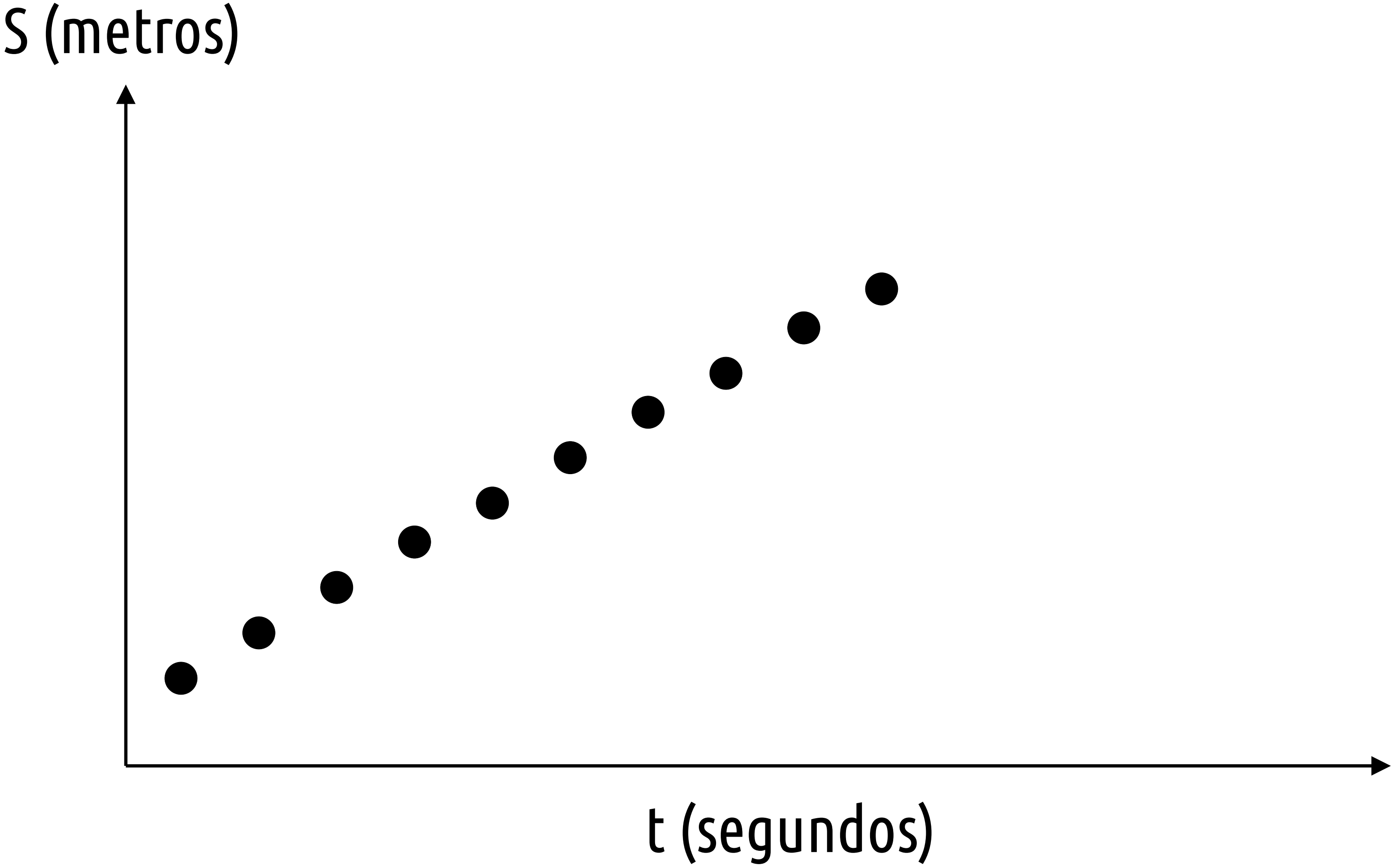
Movimento retilíneo uniforme

Movimento retilíneo uniforme

Neste caso, o mais simples possível, queremos resolver um problema linear que descreve o movimento de um corpo com velocidade constante.



Movimento retilíneo uniforme



Movimento retilíneo uniforme

Parametrização

Considere que o corpo se mova em velocidade constante em uma trajetória retilínea e que nenhuma força atue e o movimento pode ser descrito por meio da:

* Posição inicial S_0 do corpo

* A sua velocidade v

* O instante t que registramos sua posição

Movimento retilíneo uniforme

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + Vt$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade V?

Movimento retilíneo uniforme

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + Vt$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade V?

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$\begin{gathered} S_1 = S_0 + V t_1 \\ \vdots \\ S_n = S_0 + V t_n \end{gathered}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$\begin{gathered} S_1 = S_0 + Vt_1 \\ \vdots \\ S_n = S_0 + Vt_n \end{gathered}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

Vetor de dados preditos

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$\begin{gathered} S_1 = S_0 + V t_1 \\ \vdots \\ S_n = S_0 + V t_n \end{gathered}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

Vetor de parâmetros

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$\begin{gathered} S_1 = S_0 + Vt_1 \\ \vdots \\ S_n = S_0 + Vt_n \end{gathered}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

Matriz de sensibilidade

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1 = S_0 + Vt_1$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_0 + Vt_n$$

Derivada do dado predito em relação aos parâmetros

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1 = S_0 + Vt_1$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_0 + Vt_n$$

Derivada do dado predito em relação aos parâmetros

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

Para minimizar a distância entre os dados preditos e os dados observados teremos:

$$\varphi(\mathbf{p}) = \| \mathbf{S}^o - \mathbf{S}^p \|_2$$

Estimador de mínimos quadrados

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{S}^o$$

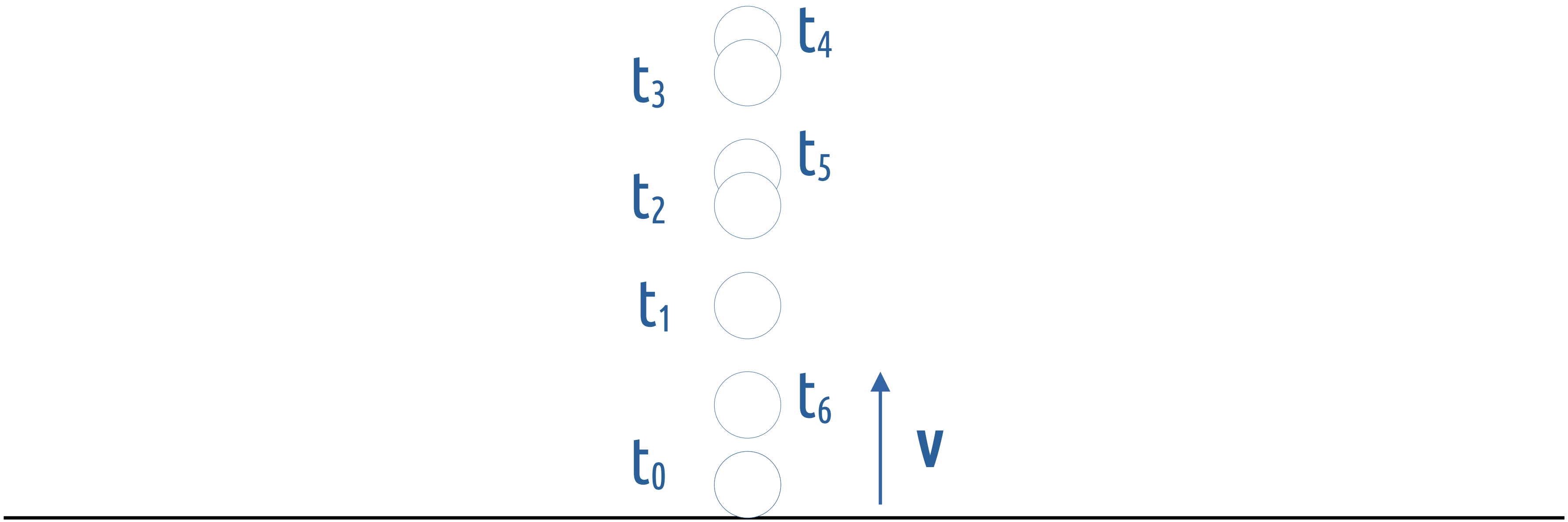
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

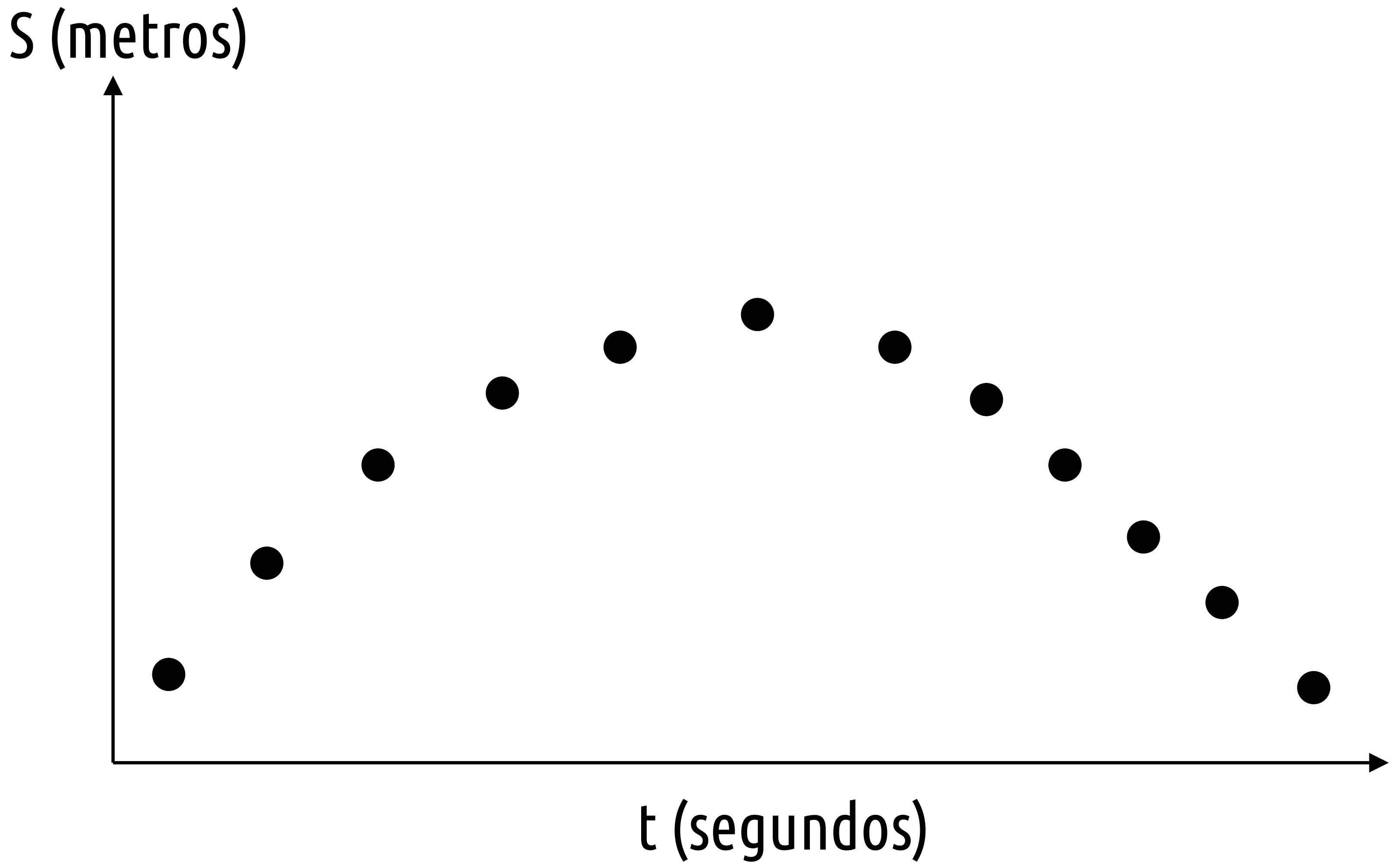
Movimento uniformemente acelerado

Movimento acelerado

Neste caso, queremos resolver um problema linear que descreve o movimento de um corpo com variação de velocidade.



Movimento acelerado



Movimento acelerado

Parametrização

Considere que o corpo se mova na vertical em uma trajetória retilínea e que a única força que atua sobre ele é a força peso. Neste sentido, conseguimos descrever seu movimento através de:

* Posição inicial S_0 do corpo

* A sua velocidade inicial V_0

* O instante t que registramos sua posição

* A aceleração da gravidade g

Movimento acelerado

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade inicial V_0 e a aceleração da gravidade g?

Movimento acelerado

Parametrização

Portanto, nessas condições a relação entre a posição do corpo e o instante em que ele é registrado é dado por:

$$S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Como descobrir a posição inicial S_0 do corpo e a sua velocidade inicial V_0 e a aceleração da gravidade g?

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

$$S_1 = S_0 + V_0 t_1 + 0,5 g t_1^2$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_0 + V_0 t_n + 0,5 g t_n^2$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & 0,5t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & 0,5t_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V_0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Problema direto

Sendo assim, para diferentes posições em diferentes instantes teremos:

Para minimizar a distância entre os dados preditos e os dados observados teremos:

$$\varphi(\mathbf{p}) = \| \mathbf{S}^o - \mathbf{S}^p \|_2$$

Estimador de mínimos quadrados

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{S}^o$$

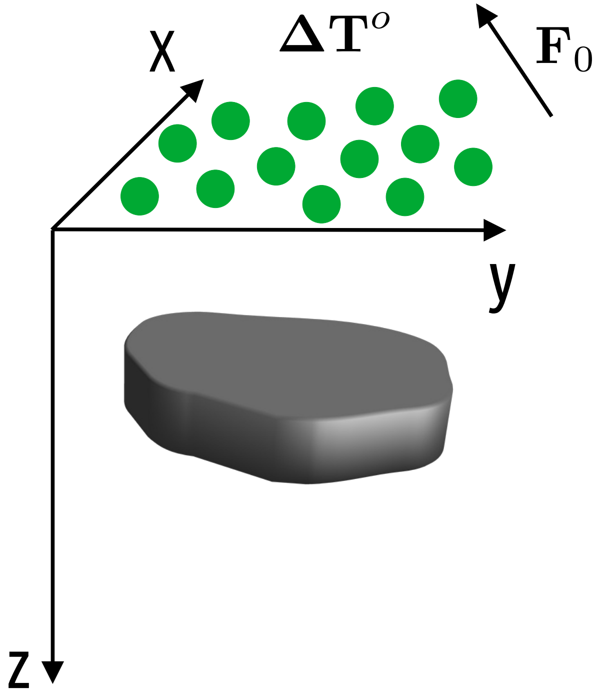
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & 0,5t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & 0,5t_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ V_0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

Estimativa da direção de magnetização de corpos aproximadamente esféricos

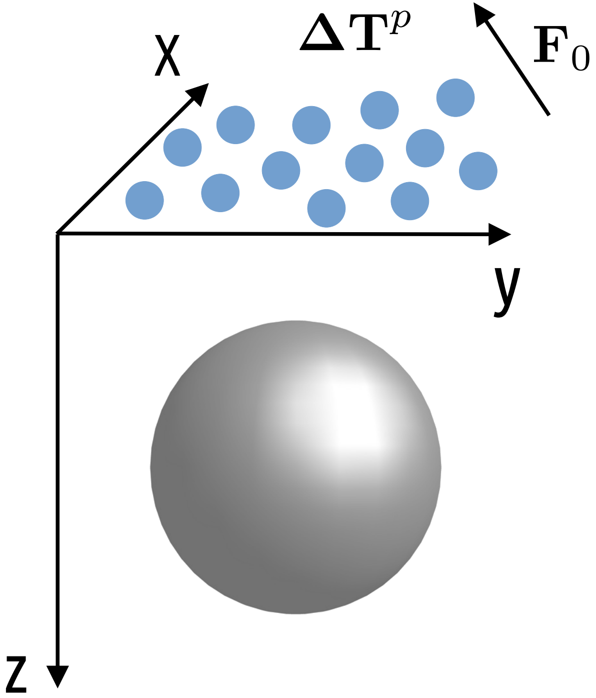
Estimativa magnetização

Fonte magnética 3D



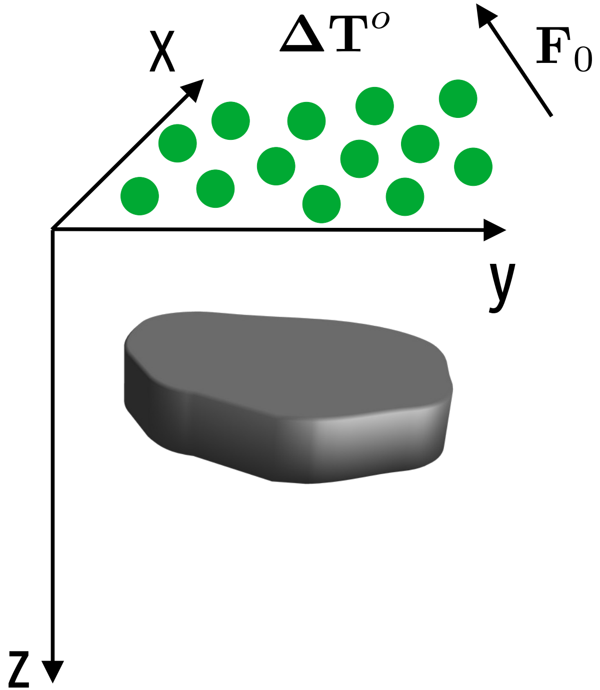
Recuperar o efeito de uma fonte 3D assumindo que ela é esférica

Modelo esférico



Estimativa magnetização

Fonte magnética 3D

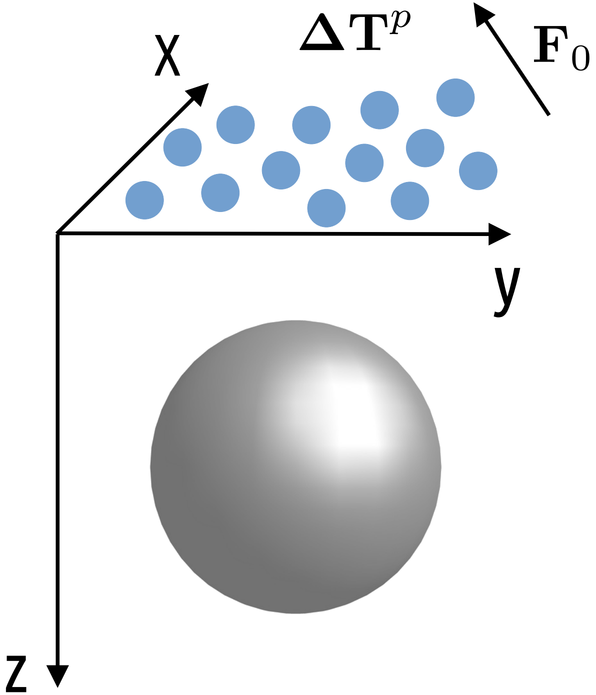


Recuperar o efeito de uma fonte 3D assumindo que ela é esférica

$$\mathbf{\Delta T}^o = \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \vdots \\ \Delta T_n \end{bmatrix}$$

Vetor de dados observados

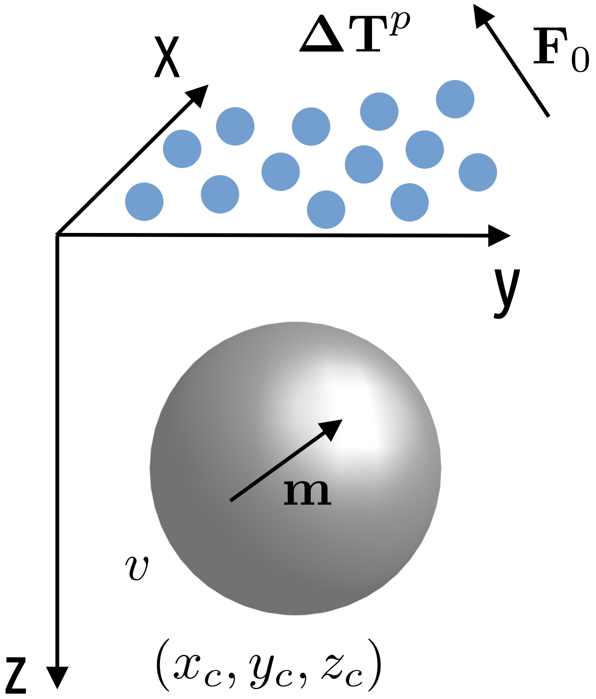
Modelo esférico



Estimativa magnetização

A **anomalia de campo total predita** no i-ésimo ponto de observação gerada por uma **fonte esférica com volume v** é dada por:

Modelo esférico



Coordenadas do centro

$$\Delta T_i^p = \gamma_m v \hat{\mathbf{F}}_0^T \mathbf{M}_i \mathbf{m}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \cos D_0 \\ \cos I_0 \sin D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix}$$

Campo principal

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\frac{1}{l} & \partial_{xy}\frac{1}{l} & \partial_{xz}\frac{1}{l} \\ \partial_{yx}\frac{1}{l} & \partial_{yy}\frac{1}{l} & \partial_{yz}\frac{1}{l} \\ \partial_{zx}\frac{1}{l} & \partial_{zy}\frac{1}{l} & \partial_{zz}\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

Hessiana

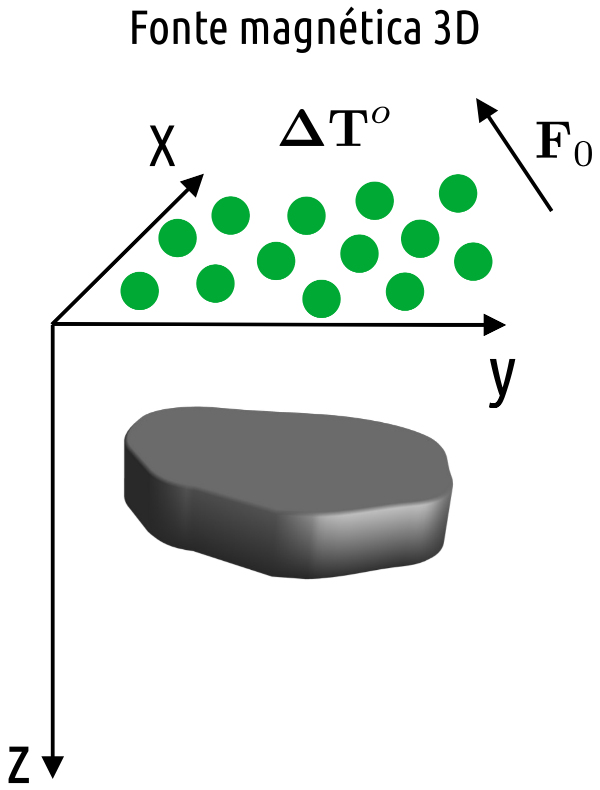
$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Magnetização
(vetor de parâmetros)

$$l = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2}$$

Distância entre o i-ésimo ponto e o centro da esfera

Estimativa magnetização

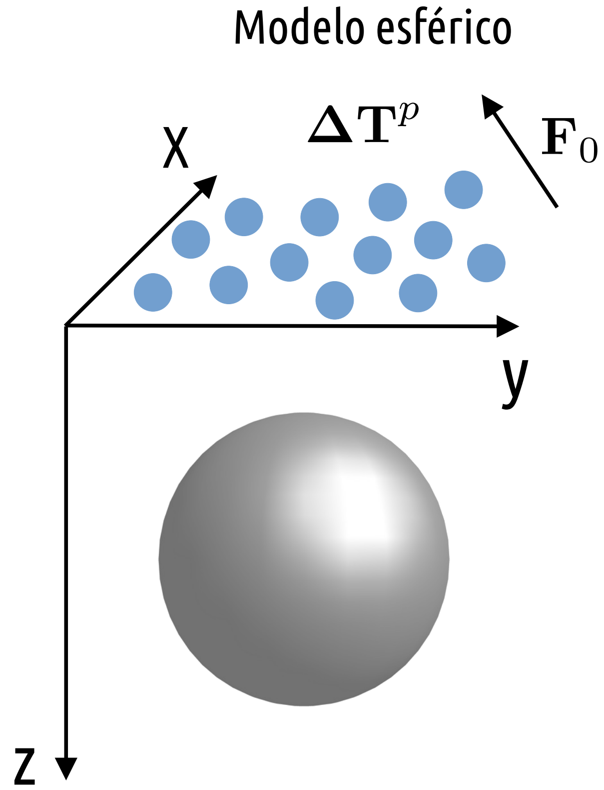


Queremos estimar uma **direção de magnetização** que minimize a distância entre os dados observados e os dados preditos gerados pela esfera!

$$\varphi(\mathbf{p}) = \| \mathbf{\Delta T}^o - \mathbf{\Delta T}^p \|_2$$

Estimador de mínimos quadrados

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{m}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{\Delta T}^o$$



Recuperamos a direção de magnetização de um prisma utilizando uma esfera? Como?

Para fazer...

Tomografia sísmica simplificada

Tomografia sísmica simples

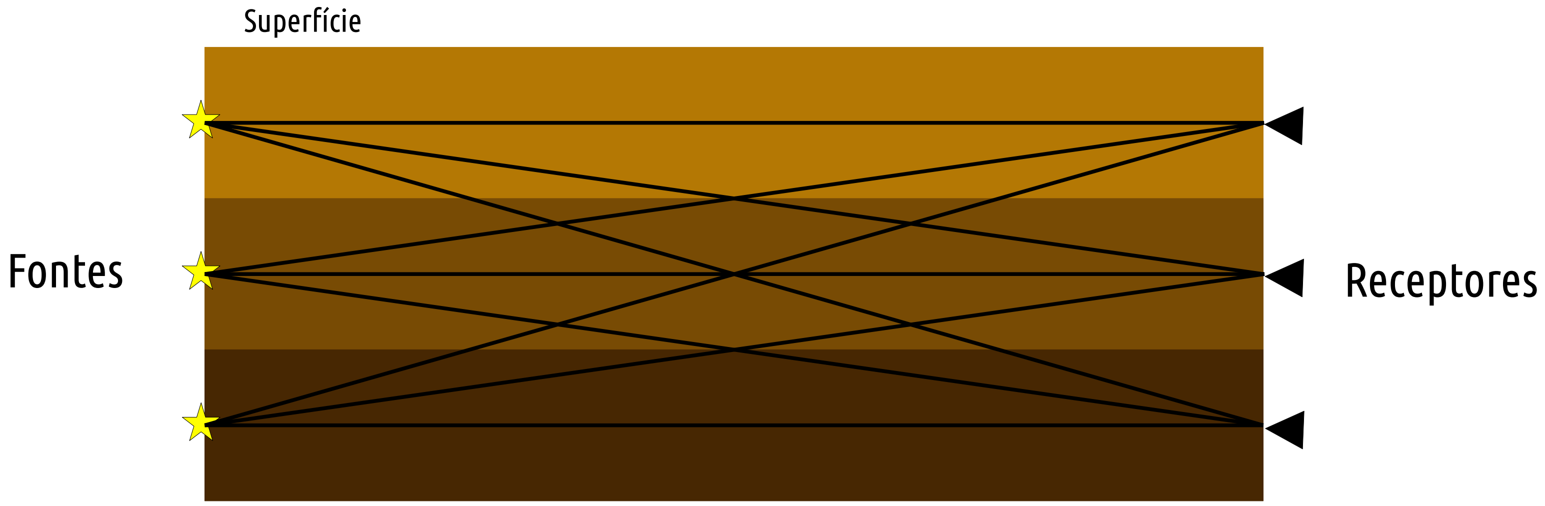
Neste caso, o mais simplificado, queremos estimar a distribuição de vagarosidades a partir dos tempos de trânsito das ondas no interior da terra.

Tomografia sísmica simples

Neste caso, o mais simplificado, queremos estimar a distribuição de vagarosidades a partir dos tempos de trânsito das ondas no interior da terra.

Tomografia sísmica simples

Neste caso, o mais simplificado, queremos estimar a distribuição de vagarosidades a partir dos tempos de trânsito das ondas no interior da terra.



Tomografia sísmica simples

Parametrização

Considere que os raios não sofram refração, ou seja, os raios percorrem linhas retas e que as vagarosidades são constantes em cada uma das camada. Podemos descrever esta situação através de:

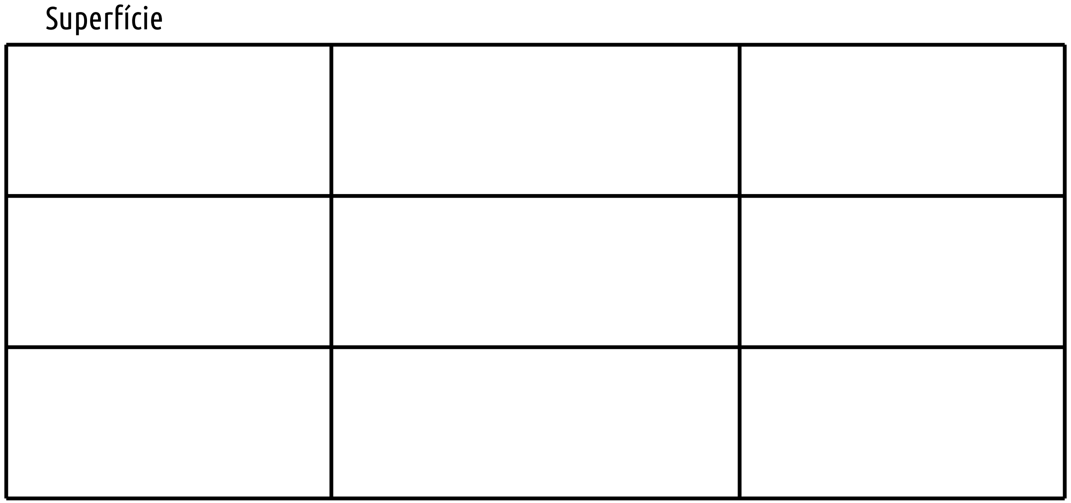
* As posições das fontes e dos receptores;

* A distância d entre as fontes e os receptores;

* O tempo t que leva uma onda para sair da fontes e chegar até o receptor.

Tomografia sísmica simples

Parametrização



Podemos discretizar esta região por 9 células!

Tomografia sísmica simples

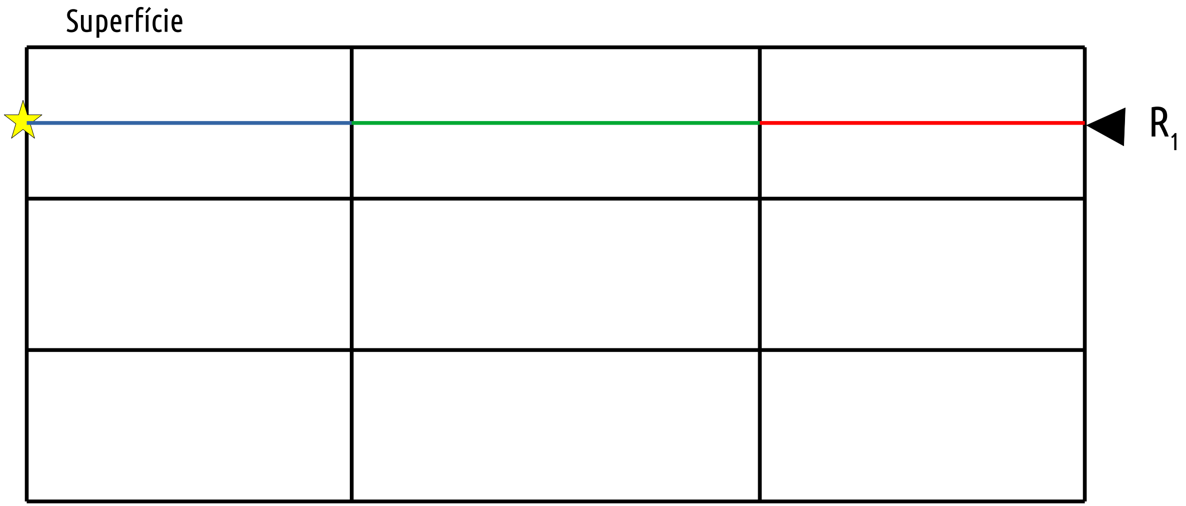
Parametrização

$$s = \frac{1}{v}$$

Vagarosidade

$$t = d.s$$

Tempo de trânsito



$$t_1 = d_{11}s_1 + d_{12}s_2 + d_{13}s_3$$

Tomografia sísmica simples

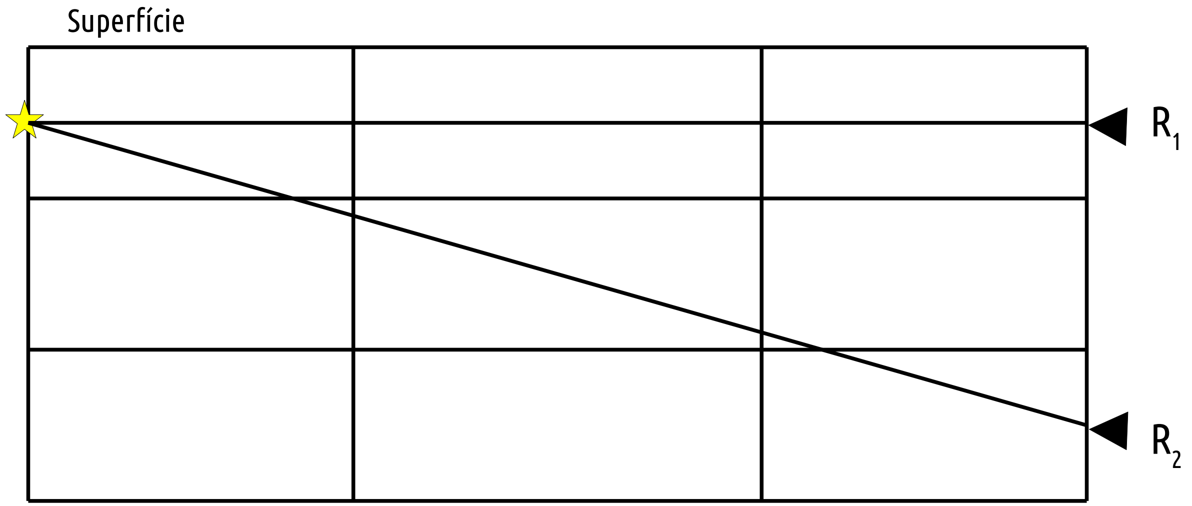
Parametrização

$$s = \frac{1}{v}$$

Vagarosidade

$$t = d.s$$

Tempo de trânsito



Como resolver este problema?

Referências Bibliográficas

Aster, R. C., Thurber C. H. & Borchers, B., 2018, Parameter estimation and inverse problems. Third Edition. Academic Press

Oliveira, V. C., Jr., D. P. Sales, V. C. F. Barbosa, and L. Uieda, 2015, Estimation of the total magnetization direction of approximately sphericalbodies: Nonlinear Processes in Geophysics, 22, 215–232, doi: 10.5194/npg-22-215-2015

Parker, R. L., Understanding inverse theory. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 5, 35-64, 1977.

Até breve!