Regularização de um problema inverso linear

Prof. André L. A. dos Reis

Rio de Janeiro 2022

Objetivos da aula

* Os problemas mal postos

* O problema visto de uma perspectiva matemática

* Regularização de Tikhonov de Ordem Zero e de Ordem Um

* Exemplo:
    - A Camada equivalente

Os problemas mal postos

O que procuramos na inversão é um **conjunto de parâmetros** que minimize a distância entre o **vetor de dados observados** e o **vetor de dados preditos** pelo modelo.

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

$$\psi(\mathbf{p}) = \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p\|_2^2$$

Função de ajuste

$$\nabla\psi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Quando falamos em minimizar uma função, significa que queremos tomar o gradiente desta função e igualarmos a zero.

Uma vez que esta função é minimizada...

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\dagger = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NM} \end{bmatrix}$$

Matriz de sensibilidade: Mede a sensibilidade do i-ésimo dado em relação ao j-ésimo parâmetro

$$g_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$$

Devido a própria natureza do problema inverso, os dados geofísicos não são capazes para descrever os fenômenos que queremos estudar.

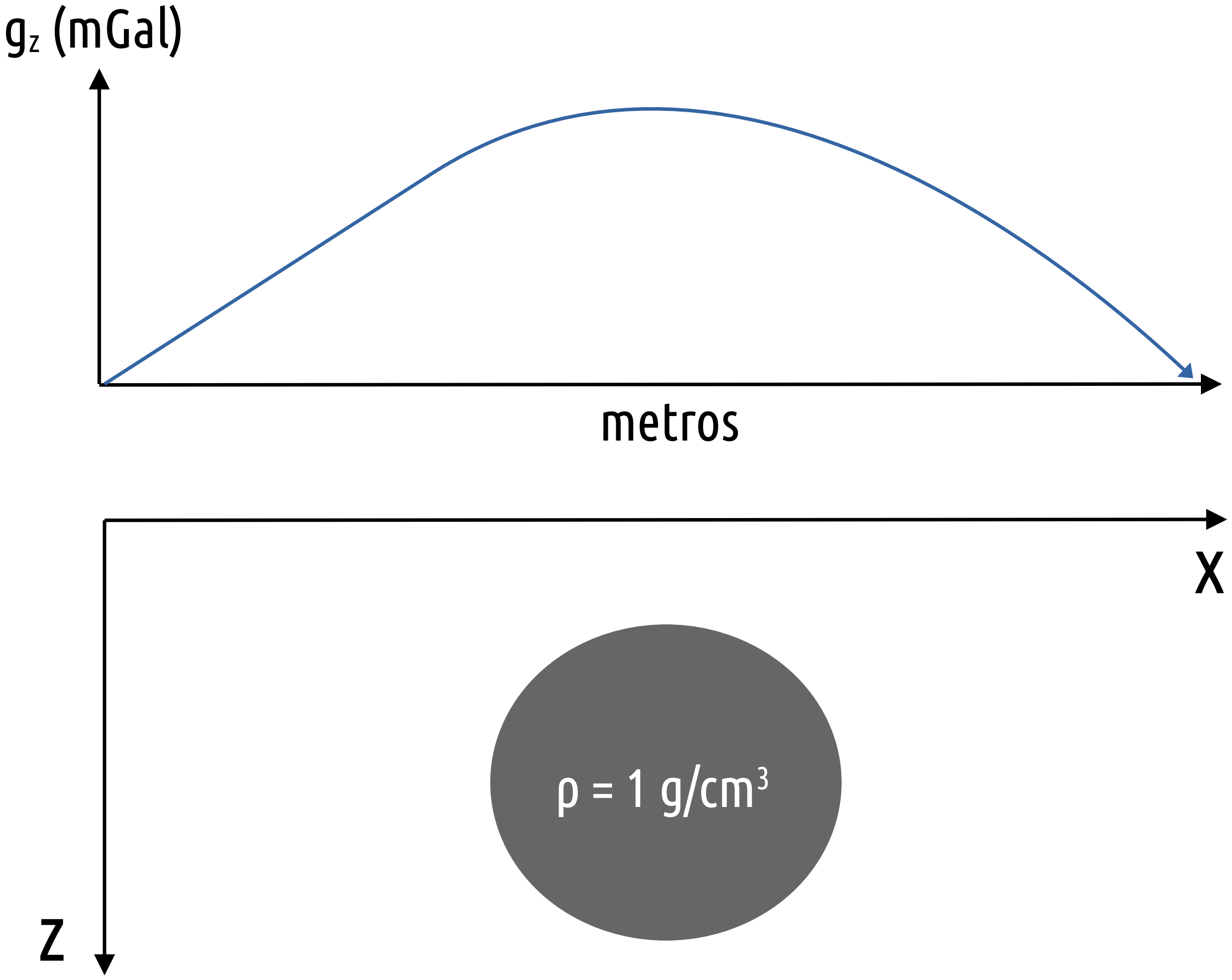
Devido a própria natureza do problema inverso, os dados geofísicos não são capazes para descrever os fenômenos que queremos estudar.

Por este motivo, dizemos que o problema é mal-posto. Ou seja, ele sofre com: falta de unicidade, instabilidade ou inexistência da solução.

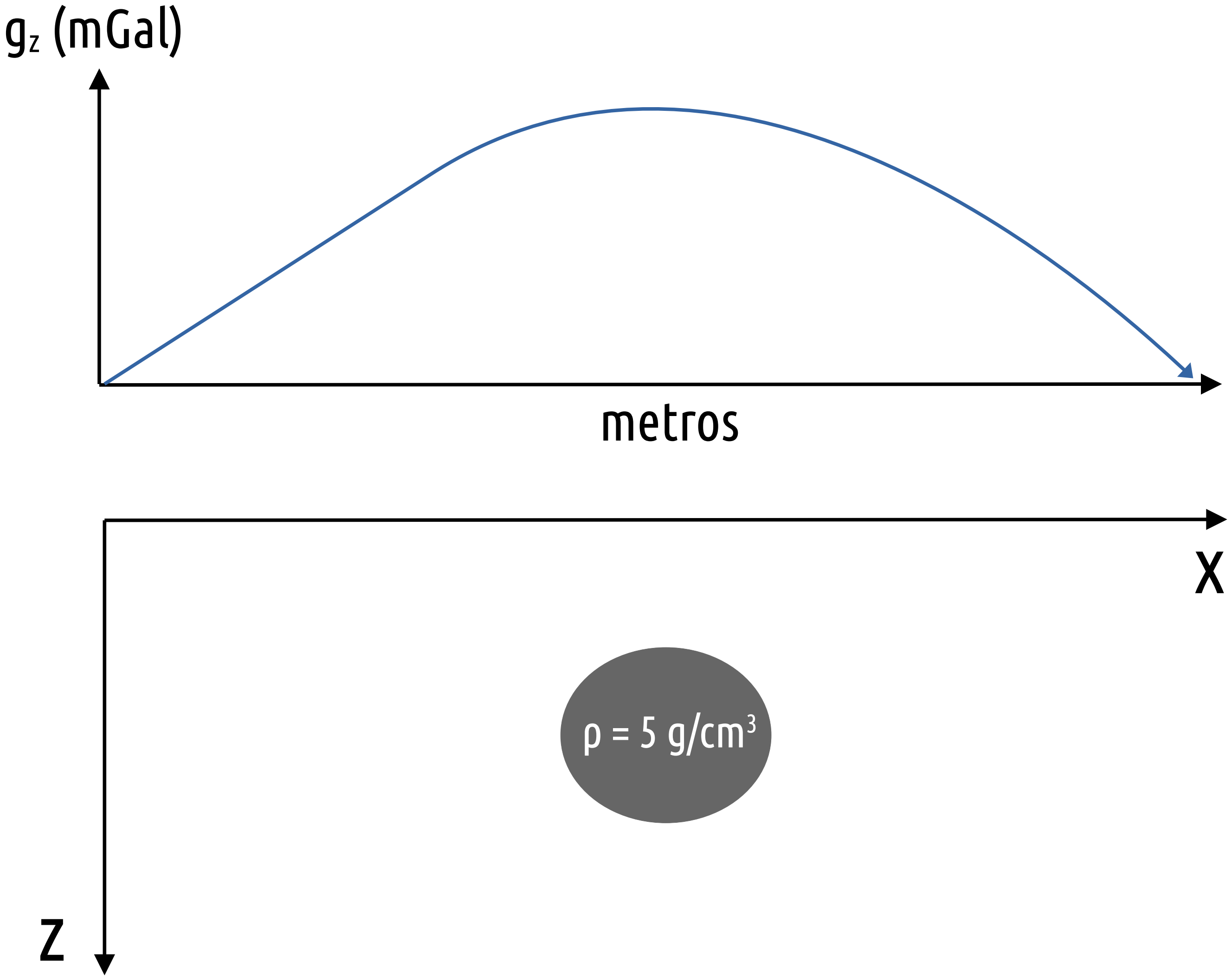
Falta de unicidade: a existência de diversos conjuntos de parâmetros que ajustam um mesmo conjunto de dados.

Falta de unicidade: a existência de diversos conjuntos de parâmetros que ajustam um mesmo conjunto de dados.

Instabilidade: pequenas perturbações nos dados geram diferentes soluções (conjuntos de parâmetros) para o problema inverso.



g z (mGal)
metros
X
ρ = 1 g/cm3
Z



g_z (mGal)
metros
X
Z
$\rho = 5\ g/cm^3$

Sob uma perspectiva matemática...

Sistemas lineares (caso linear)

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^{\#} = \mathbf{G}^T\,\mathbf{d}^o$$

Sistemas lineares (caso linear)

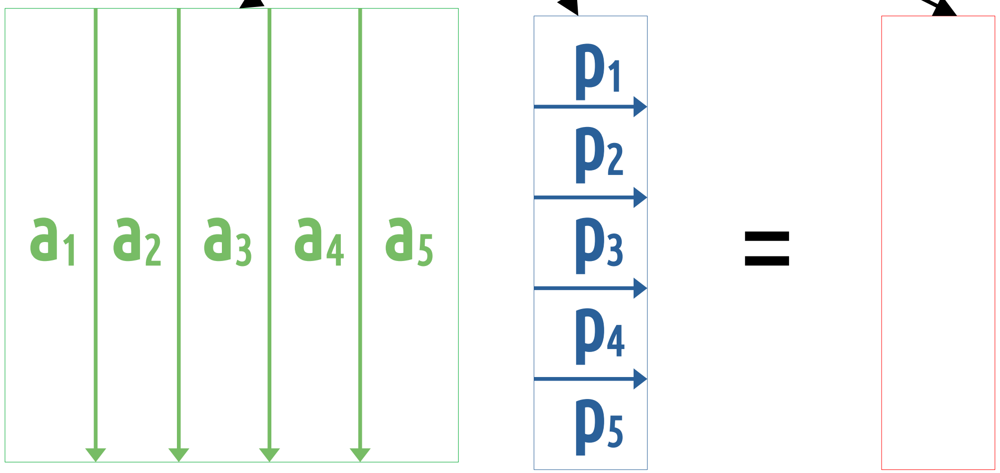
$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\,\mathbf{p}^{\#} = \mathbf{G}^T\,\mathbf{d}^o$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{t}$$

Sistemas lineares (caso linear)

$$(G^T G)\mathbf{p}^{\#} = G^T \mathbf{d}^o$$

$$A\mathbf{p} = \mathbf{t}$$



Sistemas lineares (caso linear)

$$(G^T G)p^{\#} = G^T d^o$$

$$Ap = t$$

O vetor em vermelho é combinação linear dos vetores em verde

$$\boxed{p_1}\, a_1 + \boxed{p_2}\, a_2 + \boxed{p_3}\, a_3 + \boxed{p_4}\, a_4 + \boxed{p_5}\, a_5 = \boxed{}$$

Sistemas lineares (caso linear)

$$(G^T G)p^{\#} = G^T d^o$$

$$Ap = t$$

O vetor em vermelho é combinação linear dos vetores em verde

A **dependência linear** entre os vetores em verde nos dá uma pista do **condicionamento deste sistema linear**

$$\boxed{p_1}\, a_1 + \boxed{p_2}\, a_2 + \boxed{p_3}\, a_3 + \boxed{p_4}\, a_4 + \boxed{p_5}\, a_5 = $$

Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

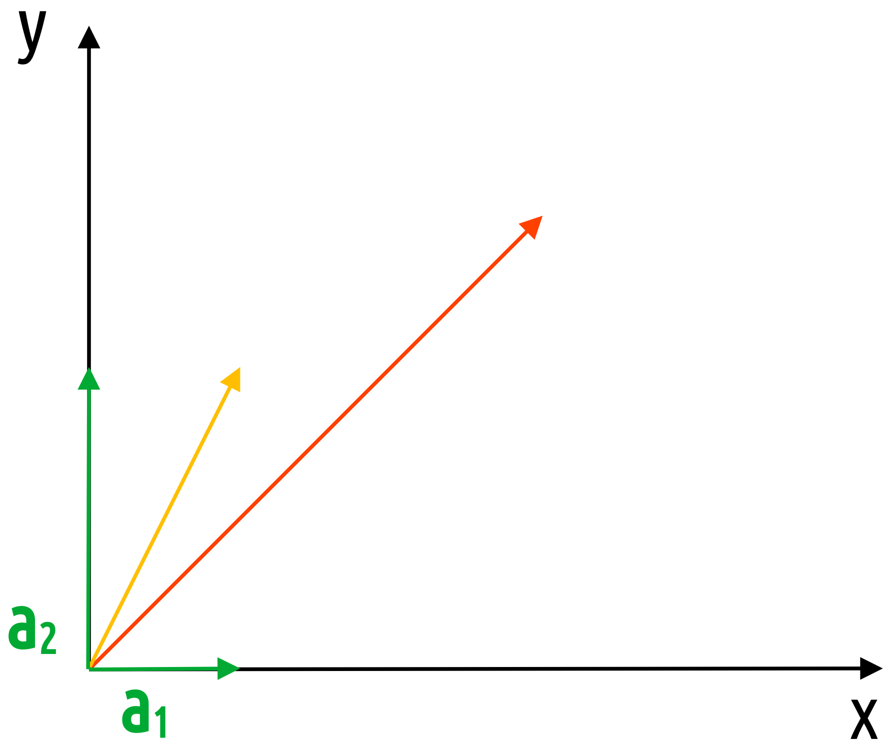
$$\boxed{p_1}\ \boxed{a_1} + \boxed{p_2}\ \boxed{a_2} = \boxed{}$$

Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

?

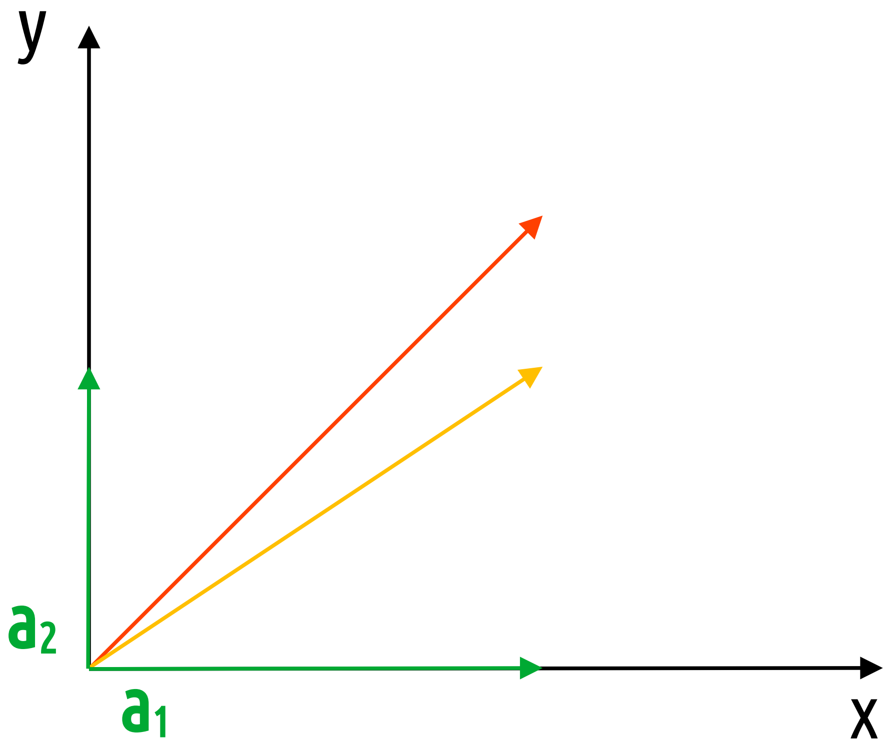
$$p_1 \, a_1 + p_2 \, a_2 =$$



Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

$$\boxed{p_1}\,\boxed{a_1} + \boxed{p_2}\,\boxed{a_2} = \boxed{}$$

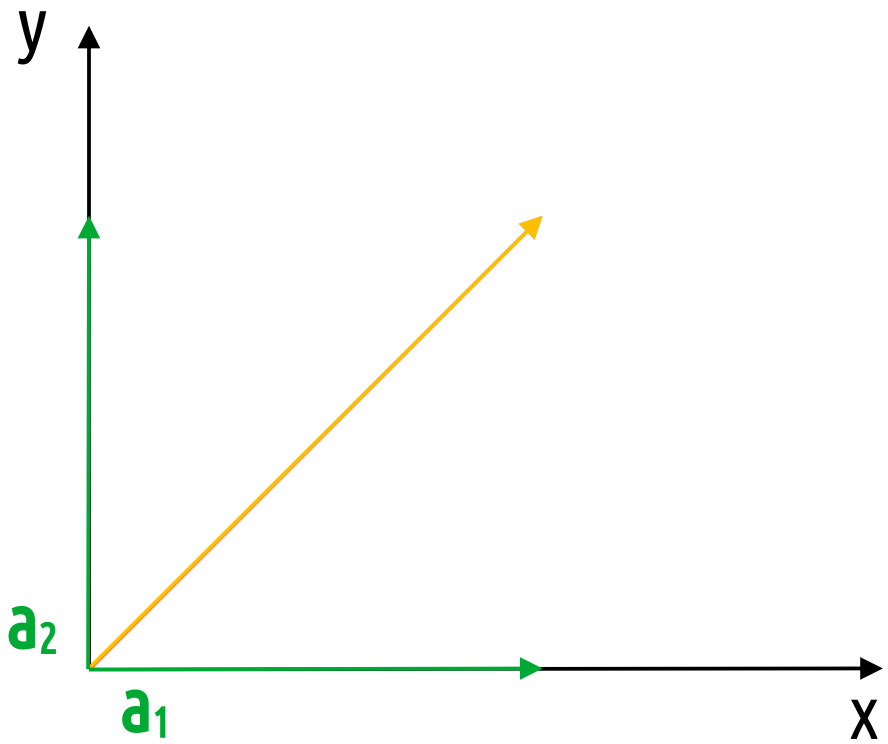


Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Existe somente uma única combinação de p_1 e p_2 que nos fazer reproduzir o vetor em vermelho

$$p_1 \, a_1 + p_2 \, a_2 =$$



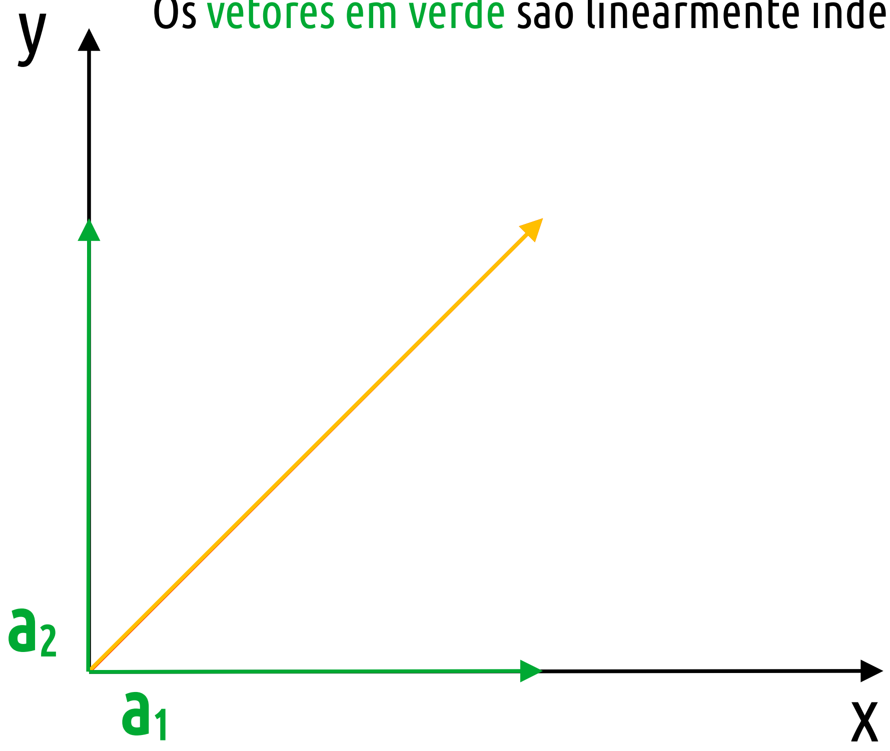
Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Existe somente uma única combinação de p_1 e p_2 que nos fazer reproduzir o vetor em vermelho

$$p_1 \; a_1 + p_2 \; a_2 =$$

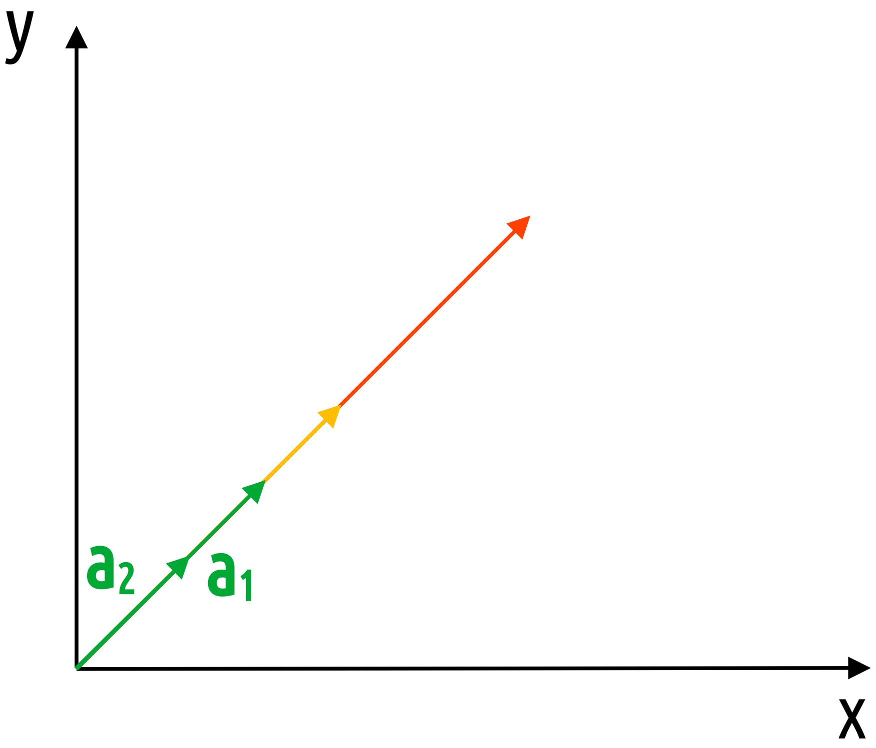
Os vetores em verde são linearmente independentes!



Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

$$p_1 \; a_1 + p_2 \; a_2 =$$

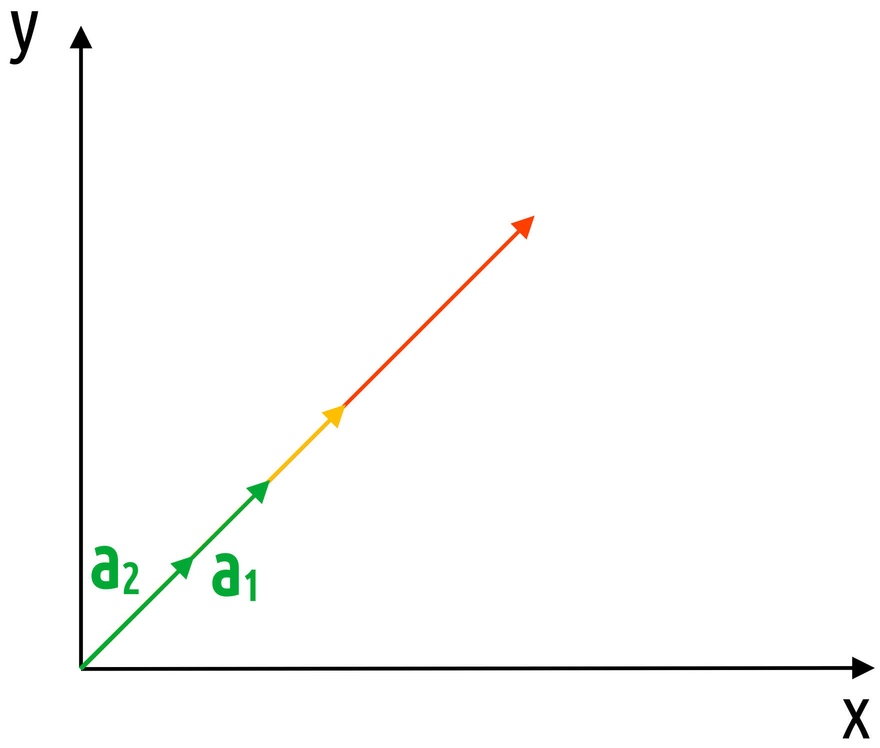


Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Perceba que nessa situação existem diversas combinações de p_1 e p_2 que reproduzem o vetor em vermelho.

$$p_1 \, a_1 + p_2 \, a_2 = $$



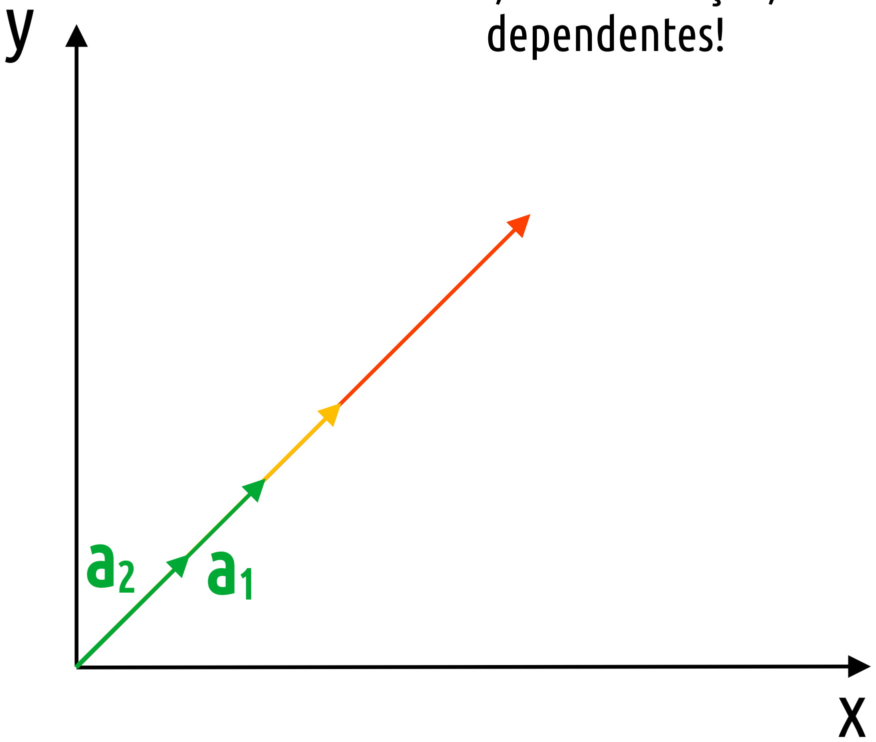
Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Os vetores em verde, nesta situação, são linearmente dependentes!

Perceba que nessa situação existem diversas combinações de p_1 e p_2 que reproduzem o vetor em vermelho.

$$p_1 \, \boxed{a_1} + p_2 \, \boxed{a_2} = \boxed{}$$



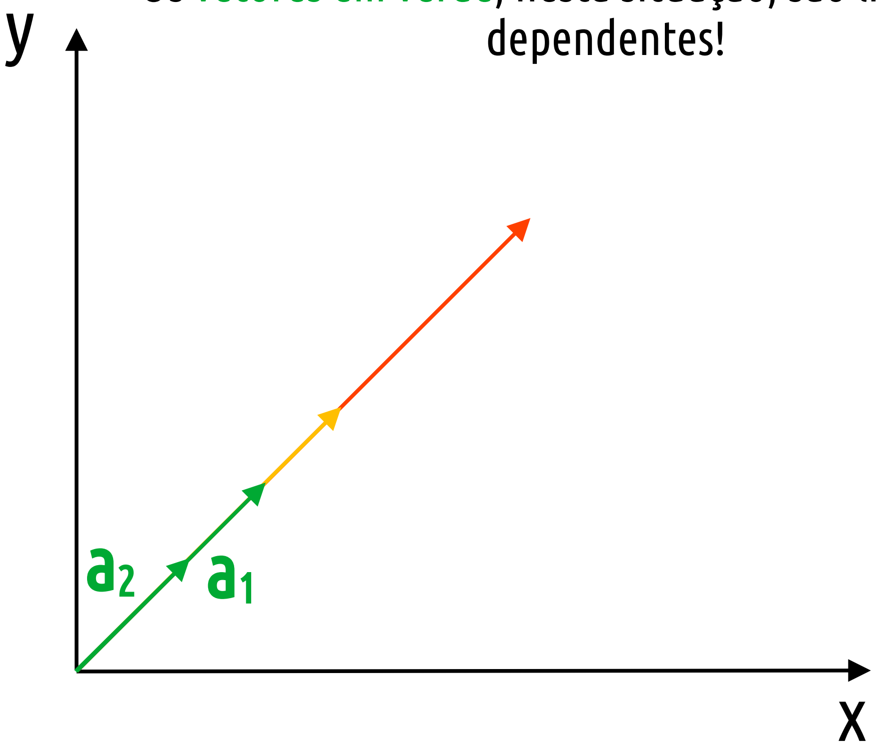
Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Perceba que nessa situação existem diversas combinações de p_1 e p_2 que reproduzem o vetor em vermelho.

$$p_1 \, a_1 + p_2 \, a_2 =$$

Os vetores em verde, nesta situação, são linearmente dependentes!

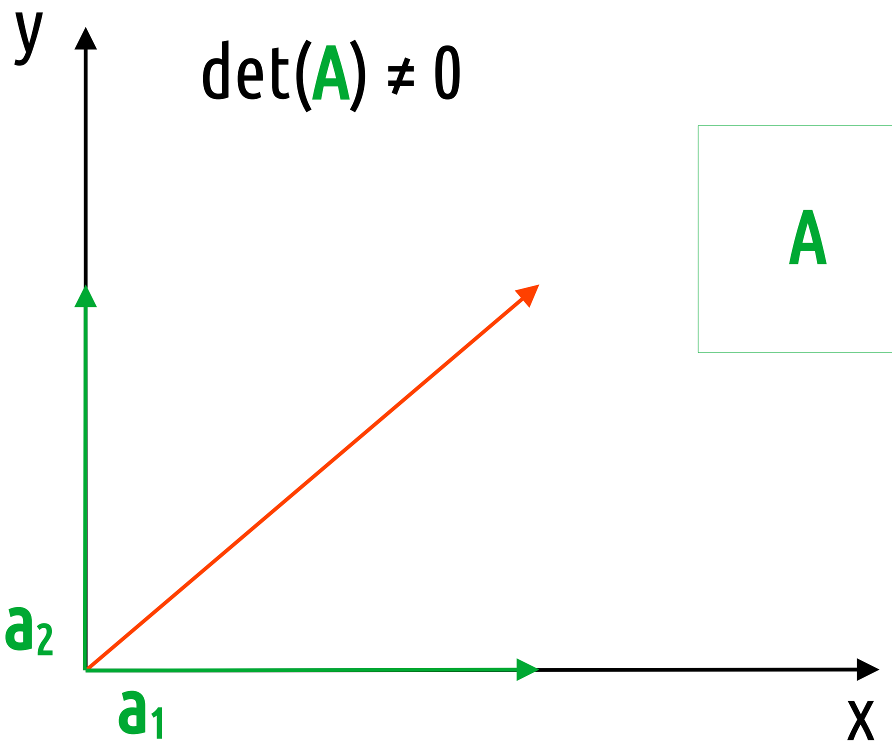


Neste caso diz-se que o sistema linear é mal-condicionado

Sistemas lineares (caso linear)

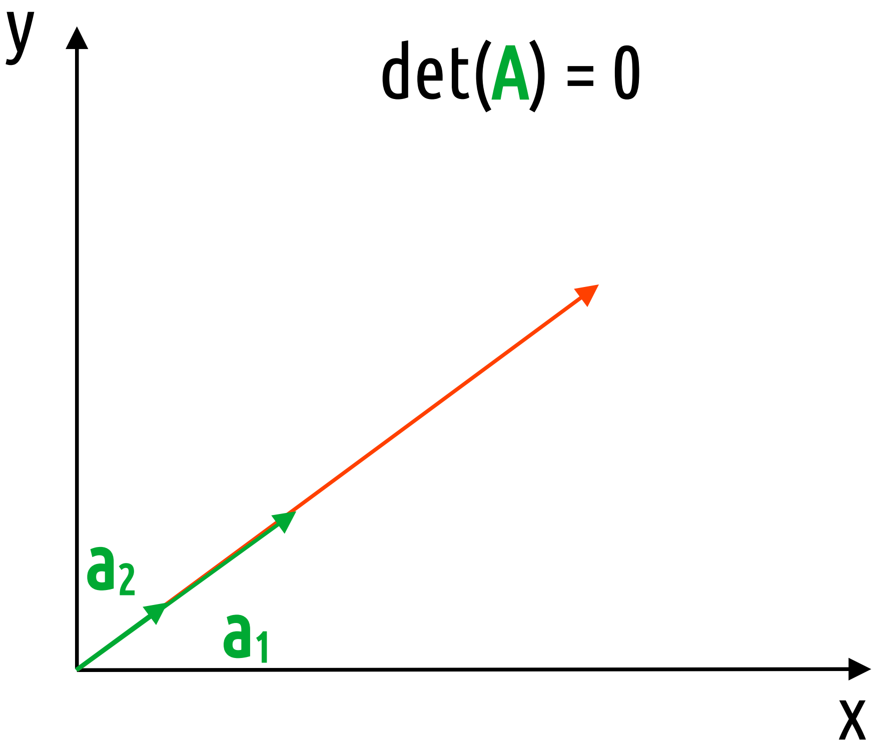
Exemplo em 2D

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$



$$\mathbf{A}\,\mathbf{p} = \mathbf{t}$$

$\det(\mathbf{A}) = 0$



Neste caso diz-se que o sistema linear é mal-condicionado

Regularização de Tikhonov (Ordem Zero e Ordem Um)

A regularização tem como objetivo tornar bem condicionadas as matrizes envolvidas nas soluções dos problemas lineares e não lineares

Matematicamente, o que queremos é minimizar uma função tal como:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

O primeiro termo é a função de ajuste e o segundo termo é a função regularizadora. O parâmetro de regularização é dado por μ.

Regularização de Tikhonov de Ordem Zero (ou Norma Mínima)

$$\Phi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{p}$$

Função regularizadora

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{I})\mathbf{p}^{\#} = \mathbf{G}^T\,\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado
(Norma mínima)

Regularização de Tikhonov de Ordem Um (ou Suavidade)

$$\Phi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{p}$$

Função regularizadora

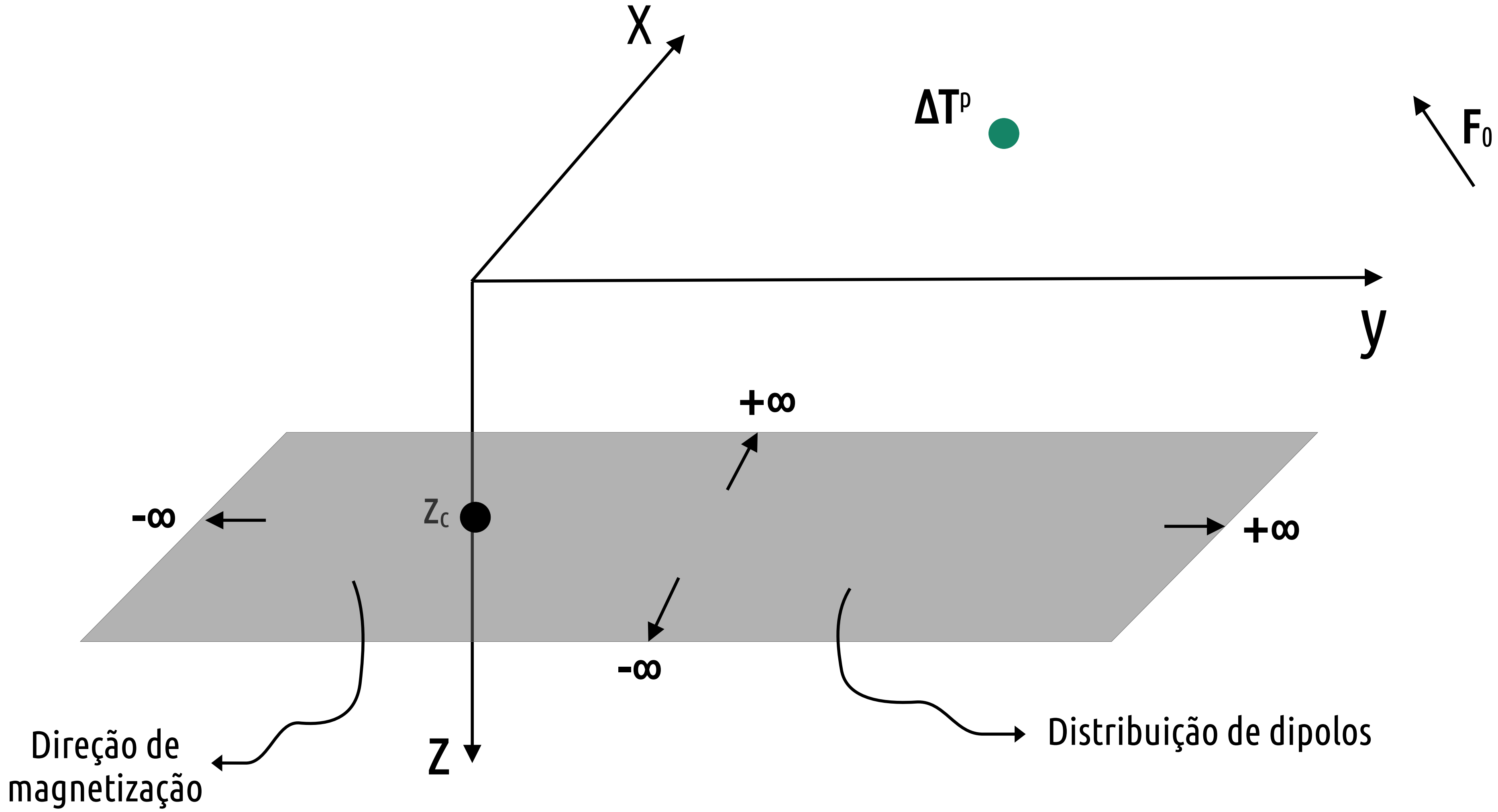
$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{R}^T\mathbf{R})\mathbf{p}^{\#} = \mathbf{G}^T\,\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado
(Suavidade)

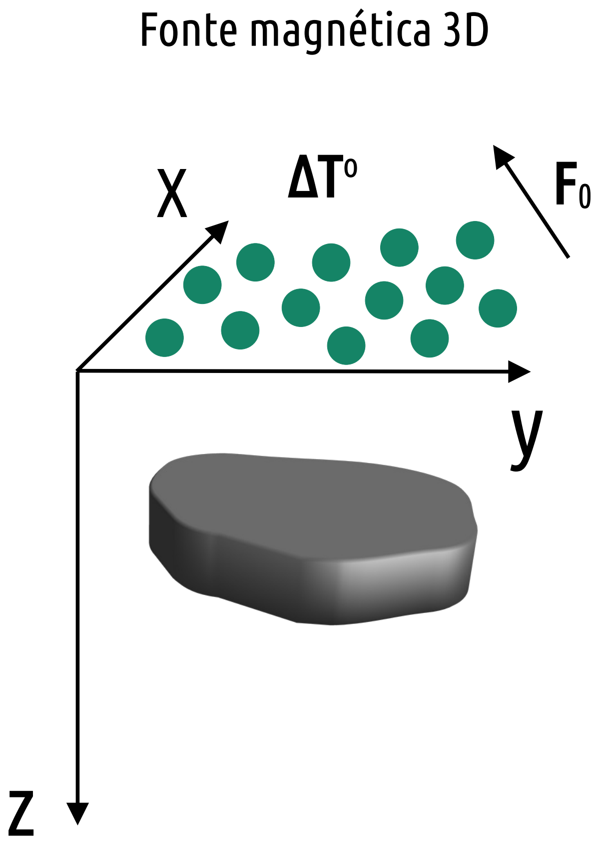
Exemplo

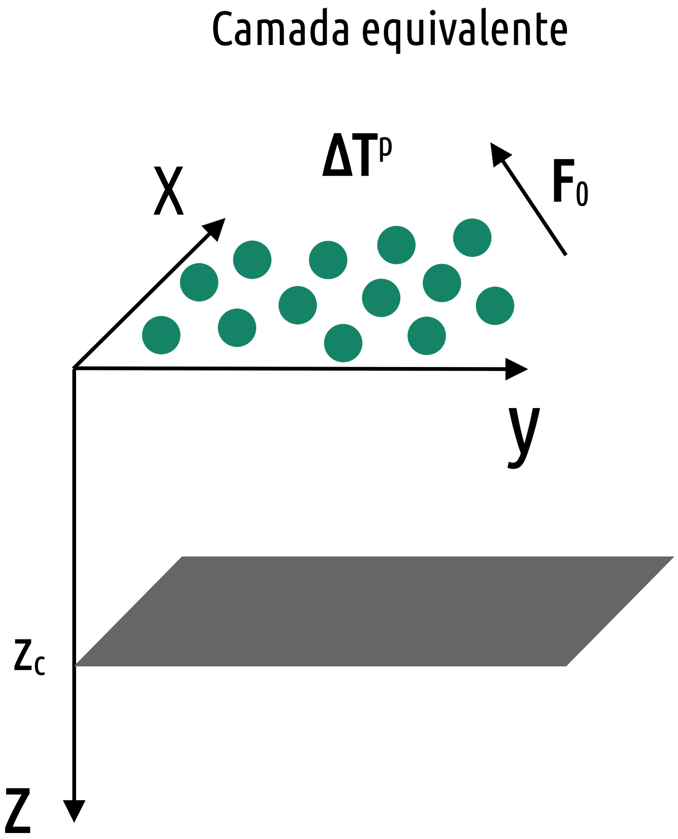
A Camada equivalente

De acordo com a Teoria do Potencial, conseguimos recuperar o efeito gerado por uma distribuição de propriedade física 3D com uma distribuição 2D

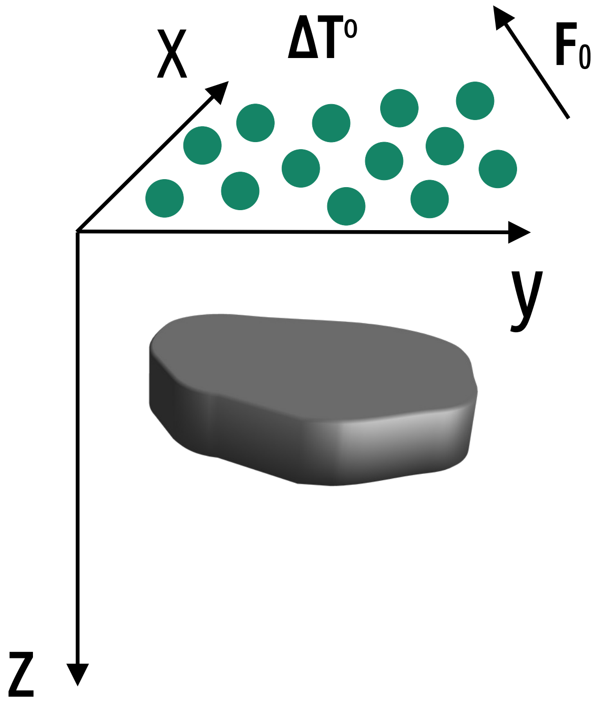


X
ΔTp
F0
y
+∞
-∞
Zc
+∞
-∞
Z
Direção de
magnetização
Distribuição de dipolos


Fonte magnética 3D
X
ΔTº
F0
y
Z


Camada equivalente
X
ΔTp
F0
y
Zc
Z

Fonte magnética 3D

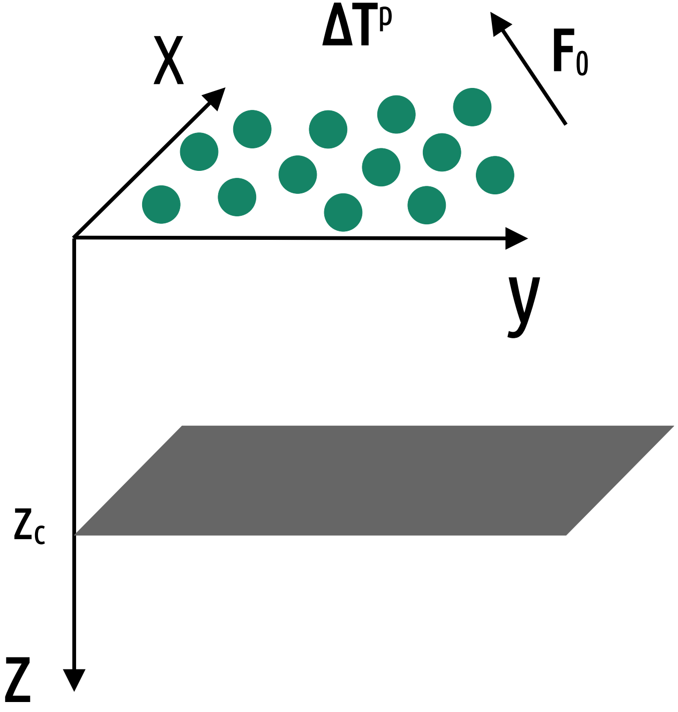


Recuperar o efeito de uma fonte
3D assumindo uma distribuição
2D de propriedade física

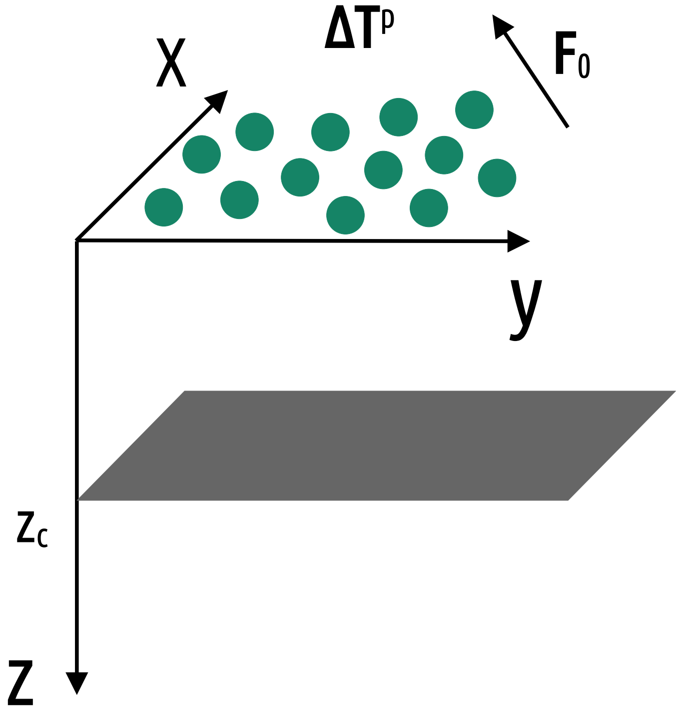
$$\mathbf{\Delta T}^{o} = \begin{bmatrix} \Delta T^{1} \\ \vdots \\ \Delta T^{N} \end{bmatrix}$$

Vetor de dados observados

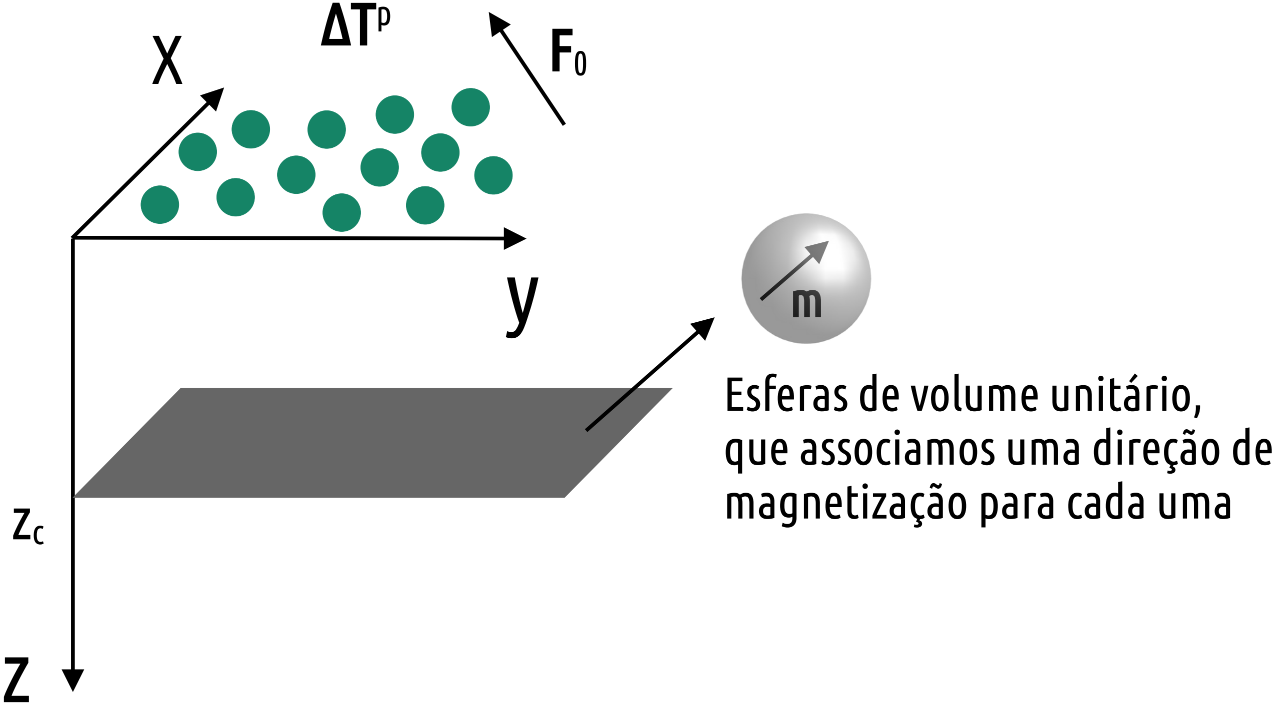
Camada equivalente



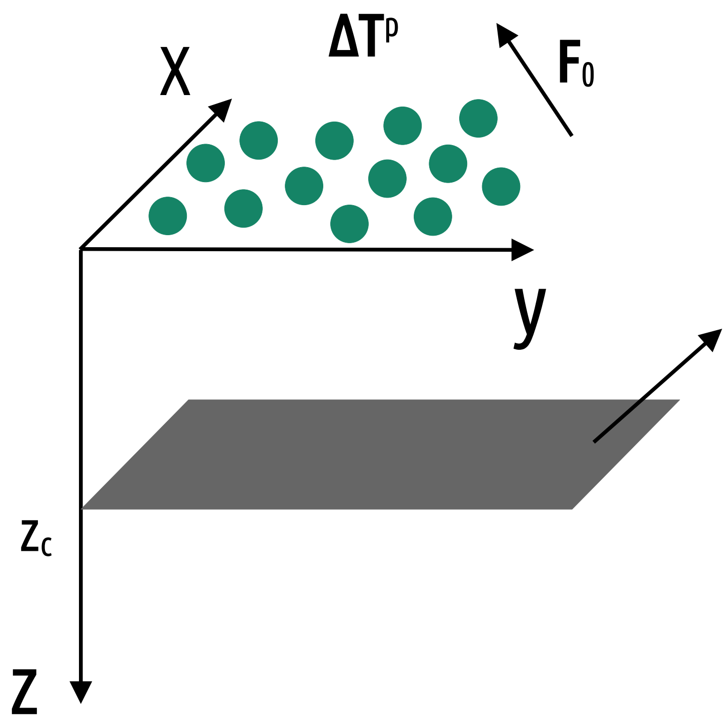
Camada equivalente



Camada equivalente

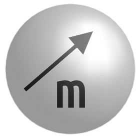


Camada equivalente



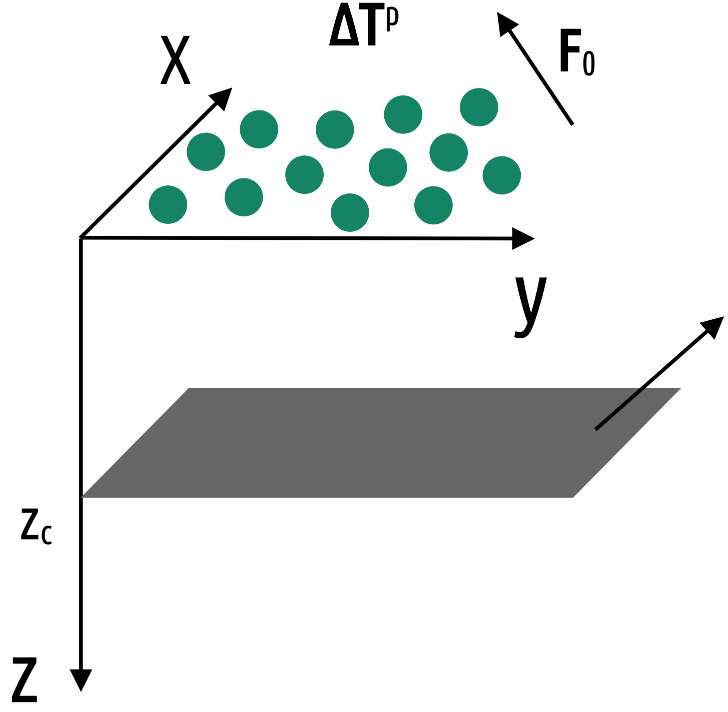
A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^p = C_m \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_{ij} \hat{\mathbf{m}} p_j$$



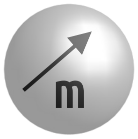
Esferas de volume unitário,
que associamos uma direção de
magnetização para cada uma

Camada equivalente



A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^p = C_m \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_{ij} \hat{\mathbf{m}} p_j$$



Esferas de volume unitário, que associamos uma direção de magnetização para cada uma

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_{xx}(1/r_{ij}) & \partial_{xy}(1/r_{ij}) & \partial_{xz}(1/r_{ij}) \\ \partial_{yx}(1/r_{ij}) & \partial_{yy}(1/r_{ij}) & \partial_{yz}(1/r_{ij}) \\ \partial_{zx}(1/r_{ij}) & \partial_{zy}(1/r_{ij}) & \partial_{zz}(1/r_{ij}) \end{bmatrix}$$

Hessiana

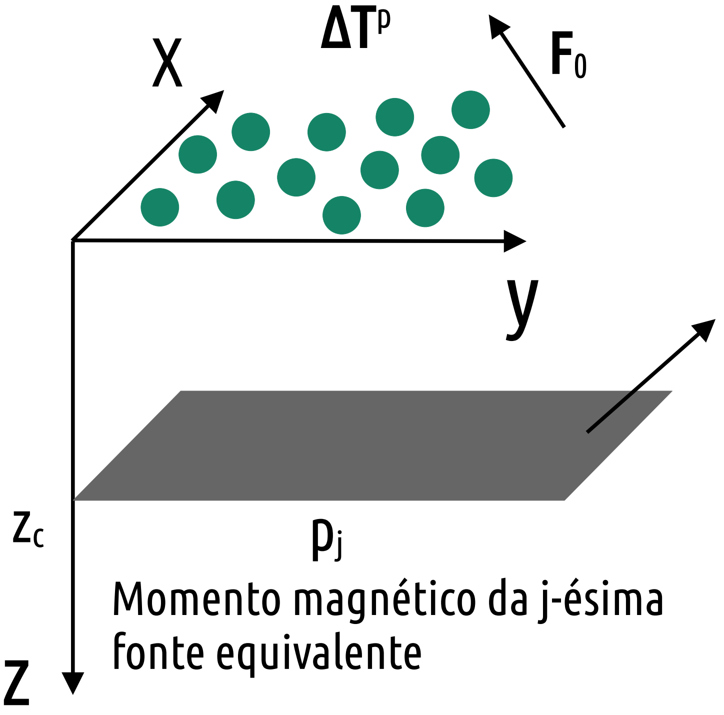
$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \sin D_0 \\ \cos I_0 \cos D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix}$$

Campo principal

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2}$$

Distância entre o i-ésimo ponto e o centro da esfera

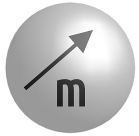
Camada equivalente



Momento magnético da j-ésima fonte equivalente

A anomalia de campo total predita no i-ésimo ponto de observação gerada por uma fonte esférica com volume v é dada por:

$$\Delta T_i^p = C_m \mathbf{F}_0^T \mathbf{M}_{ij} \hat{\mathbf{m}} p_j$$



Esferas de volume unitário, que associamos uma direção de magnetização para cada uma

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_{xx}(1/r_{ij}) & \partial_{xy}(1/r_{ij}) & \partial_{xz}(1/r_{ij}) \\ \partial_{yx}(1/r_{ij}) & \partial_{yy}(1/r_{ij}) & \partial_{yz}(1/r_{ij}) \\ \partial_{zx}(1/r_{ij}) & \partial_{zy}(1/r_{ij}) & \partial_{zz}(1/r_{ij}) \end{bmatrix}$$

Hessiana

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2}$$

Distância entre o i-ésimo ponto e o centro da esfera

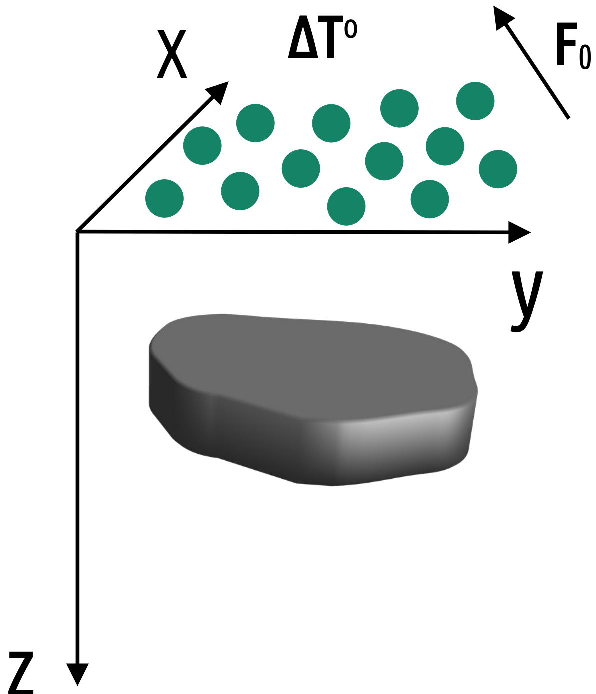
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}$$

Vetor de parâmetros

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \sin D_0 \\ \cos I_0 \cos D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix}$$

Campo principal

Fonte magnética 3D

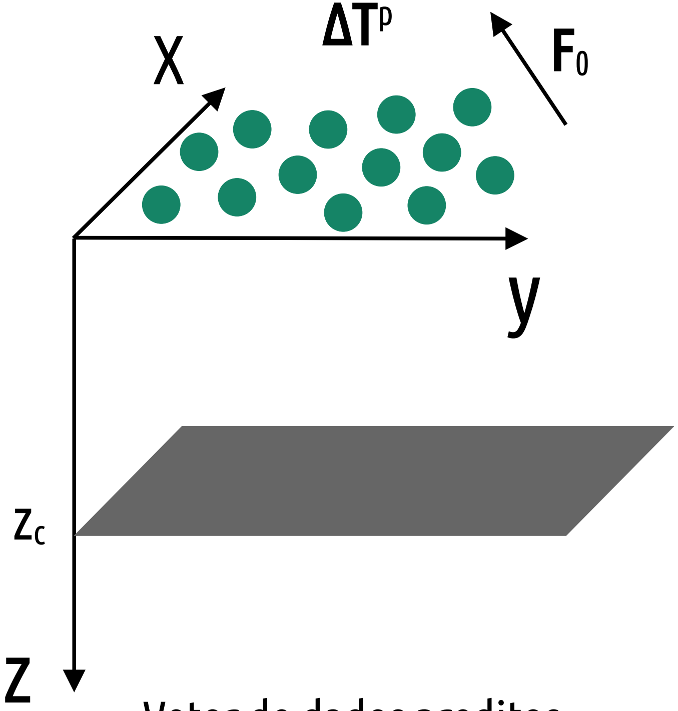


Vetor de dados observados

ΔT^{o}

Queremos estimar uma distribuição de momentos que minimize a distância entre os dados observados e os dados preditos gerados pela esfera!

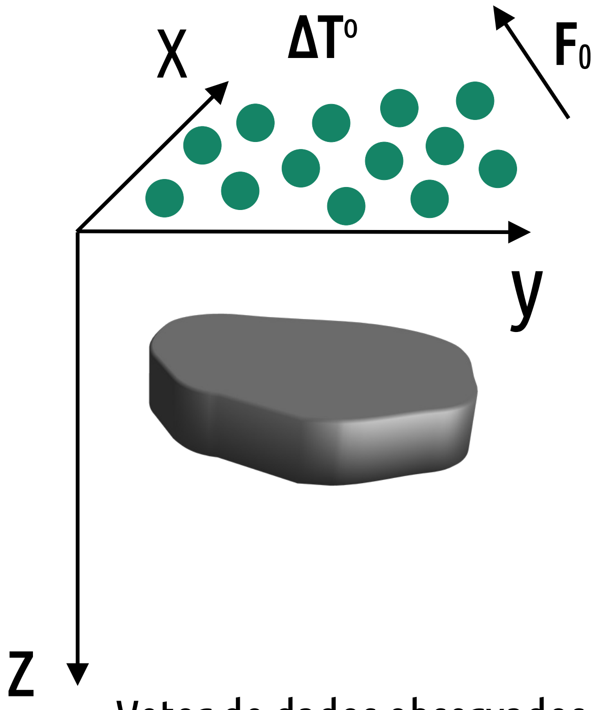
Camada equivalente



Vetor de dados preditos

ΔT^{p}

Fonte magnética 3D



Vetor de dados observados

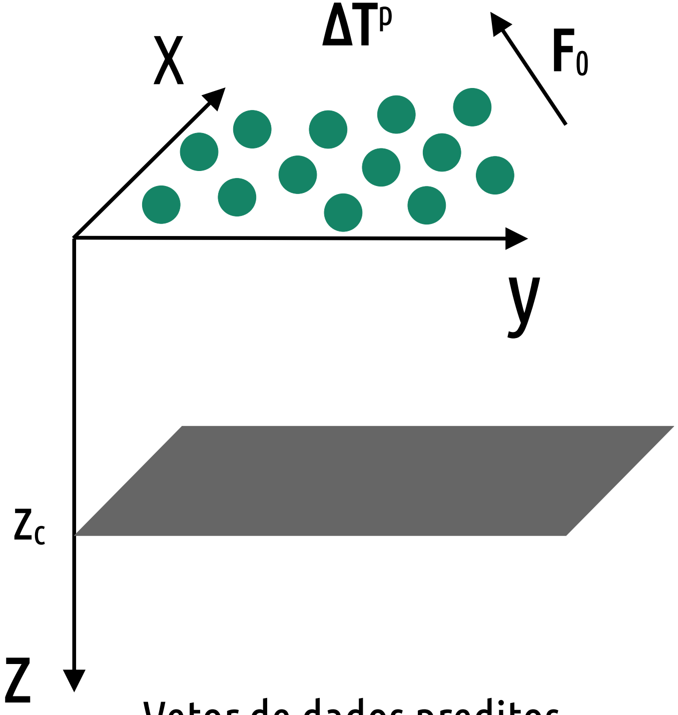
ΔT^{o}

Queremos estimar uma distribuição de momentos que minimize a distância entre os dados observados e os dados preditos gerados pela esfera!

$$\Phi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função objetivo

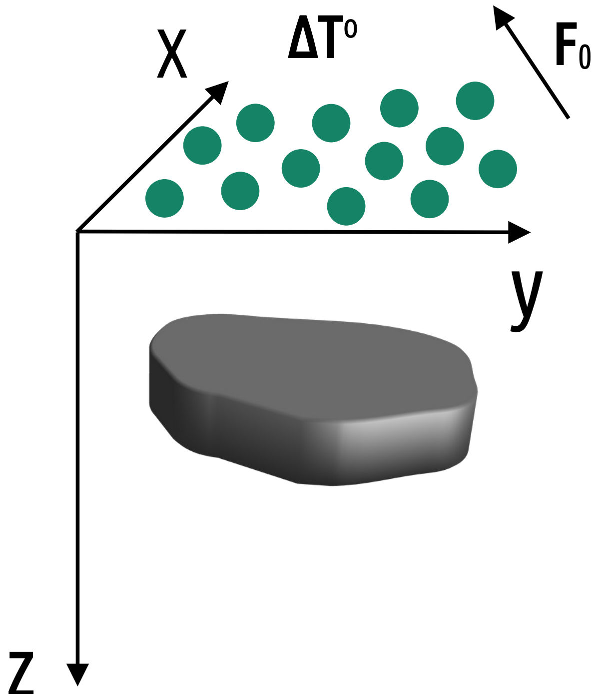
Camada equivalente



Vetor de dados preditos

ΔT^{p}

Fonte magnética 3D



Vetor de dados observados

ΔT^{o}

Queremos estimar uma distribuição de momentos que minimize a distância entre os dados observados e os dados preditos gerados pela esfera!

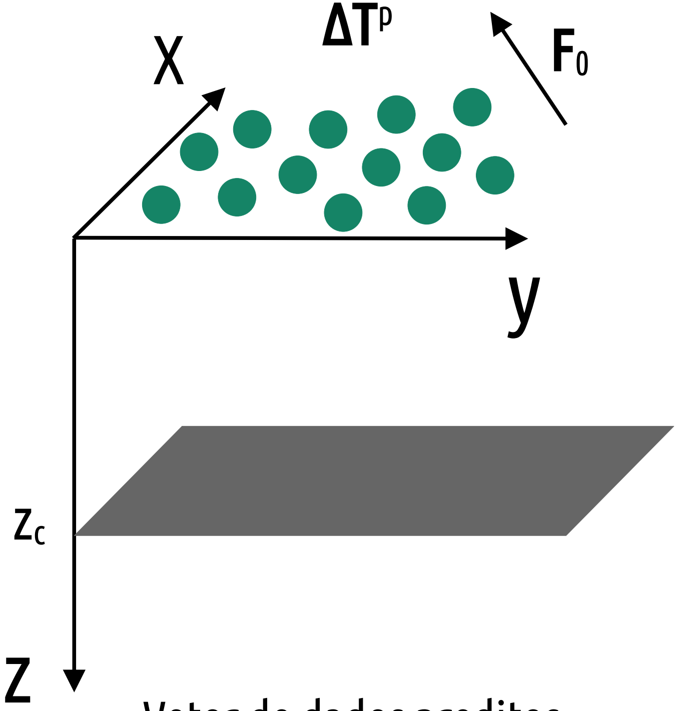
$$\Phi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função objetivo

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{I})\mathbf{p}^{\#} = \mathbf{G}^T \, \Delta\mathbf{T}^{o}$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado (Norma mínima)

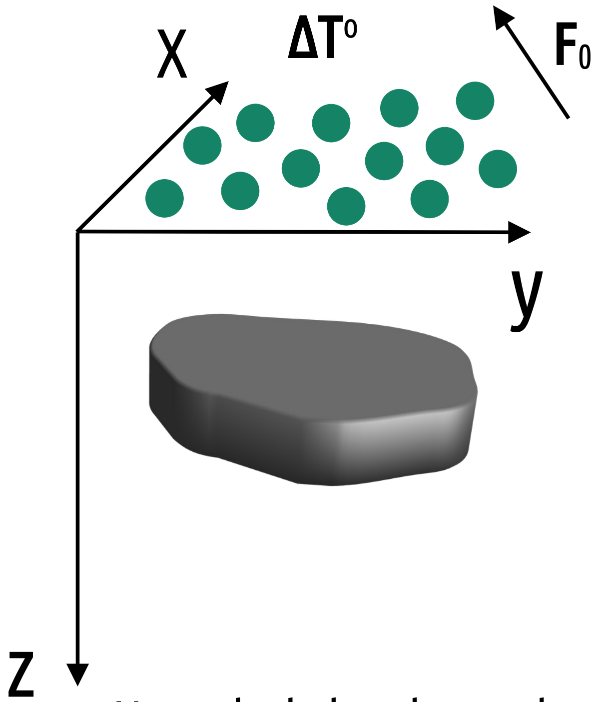
Camada equivalente



Vetor de dados preditos

ΔT^{p}

Fonte magnética 3D



Vetor de dados observados

ΔT^o

Queremos estimar uma distribuição de momentos que minimize a distância entre os dados observados e os dados preditos gerados pela esfera!

$$\Phi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função objetivo

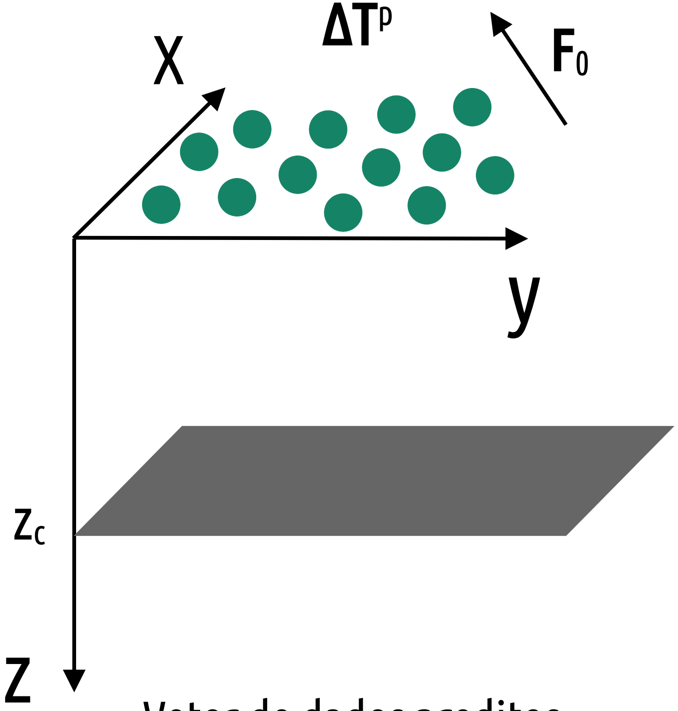
$$(G^T G + \mu I)\mathbf{p}^{\#} = G^T \Delta T^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado (Norma mínima)

$$(G^T G + \mu R^T R)\mathbf{p}^{\#} = G^T \Delta T^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado (Suavidade)

Camada equivalente



Vetor de dados preditos

ΔT^p

Objetivos da aula

* Os problemas mal postos

* O problema visto de uma perspectiva matemática

* Regularização de Tikhonov de Ordem Zero e de Ordem Um

* Exemplo:
  - A Camada equivalente

Até breve!