Regularização de um problema inverso linear

Prof. André L. A. dos Reis

Rio de Janeiro 2023

Objetivos da aula

* Os problemas mal postos

* O problema visto de uma perspectiva matemática

* Regularização de Tikhonov de Ordem Zero e de Ordem Um

* Exemplo:
    - A Camada equivalente

Os problemas malpostos

O que procuramos na inversão é um **conjunto de parâmetros** que minimize a distância entre o **vetor de dados observados** e o **vetor de dados preditos** pelo modelo.

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

Formulação matemática

Matematicamente, este é um processo de otimização no qual queremos **minimizar a norma euclidiana** de uma função que mede a distância entre **os dois vetores**!

$$\varphi(\mathbf{p}) = \| \mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p \|_2$$

Função de ajuste

$$\nabla \varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Quando falamos em minimizar uma função, significa que queremos tomar o gradiente desta função e igualarmos a zero.

Formulação matemática

Uma vez que esta função é minimizada...

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados

Matriz de sensibilidade: Mede a sensibilidade do i-ésimo dado em relação ao j-ésimo parâmetro.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} \longrightarrow g_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$$

Devido a própria natureza do **problema inverso**, os **dados geofísicos não são capazes** para descrever os fenômenos que queremos estudar.

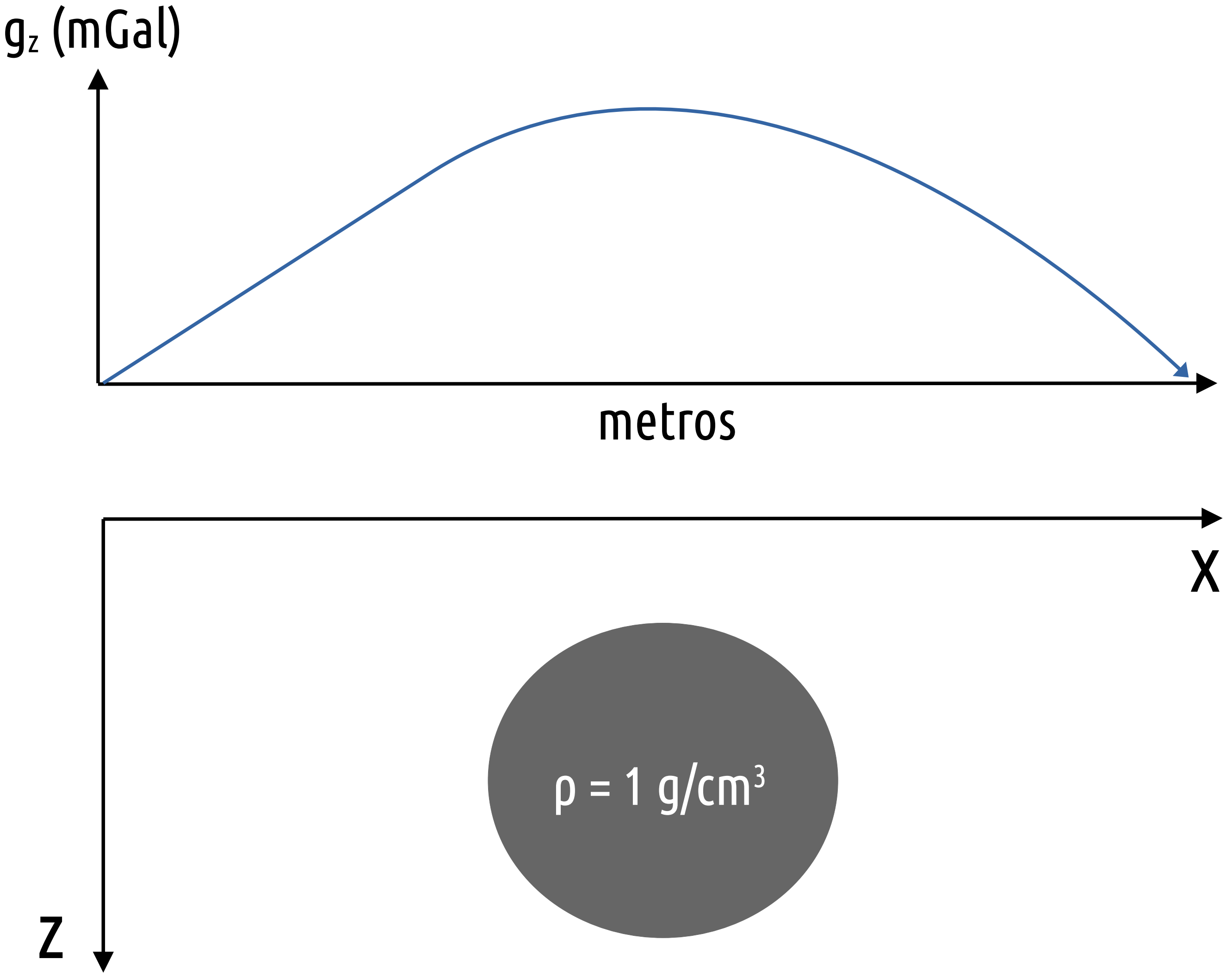
Por este motivo, dizemos que o **problema é malposto**. Ou seja, ele sofre com: **falta de unicidade**, **instabilidade** ou **inexistência da solução**.

Existência : quando o problema inverso não admite alguma solução exata para a descrição dos dados observados.

Unicidade : a existência de diversos conjuntos de parâmetros que ajustam um mesmo conjunto de dados.

Instabilidade : pequenas perturbações nos dados geram diferentes soluções (conjuntos de parâmetros) para o problema inverso.

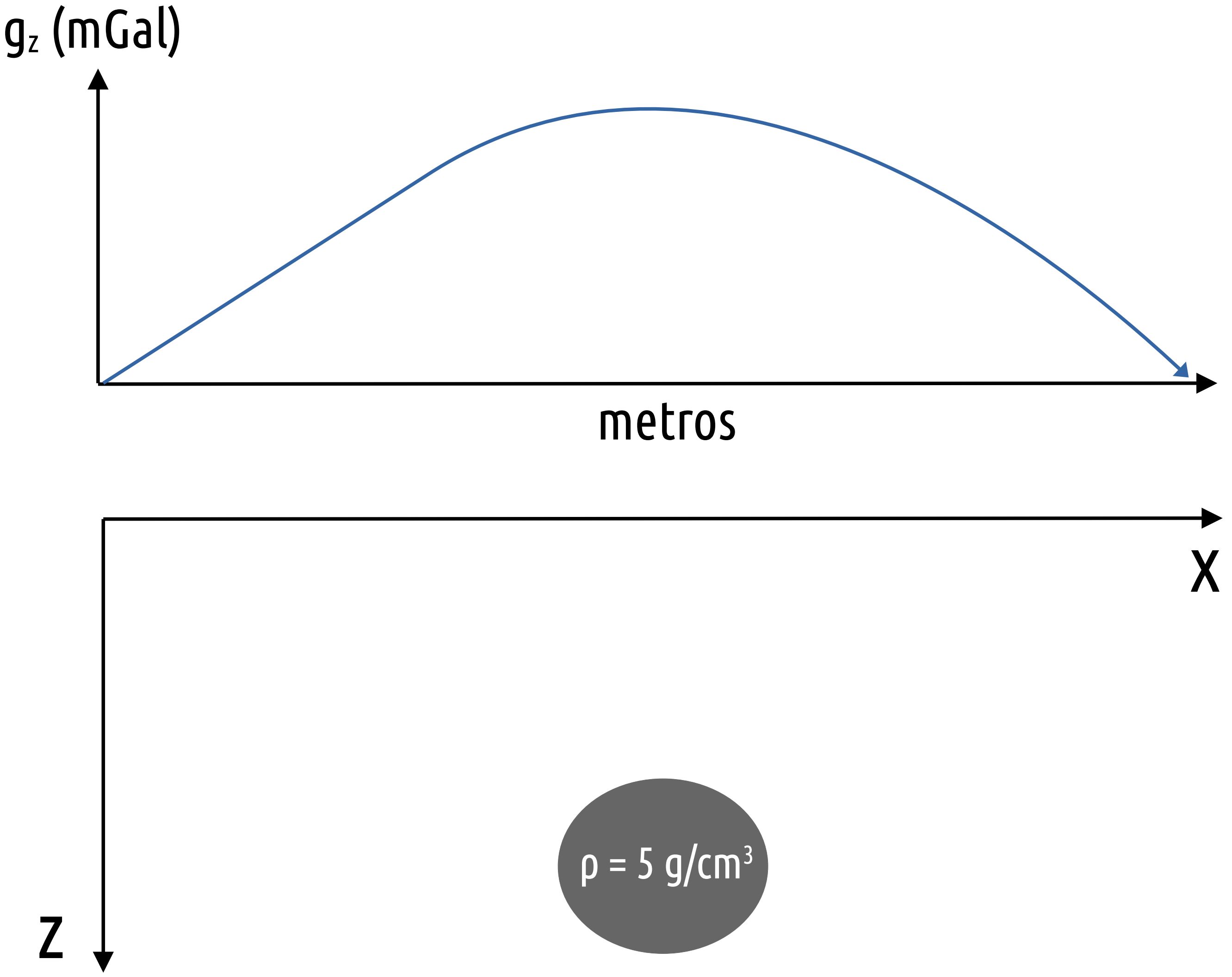
Problema malposto



Combinações de **diferentes geometrias e/ou distribuições de densidade** ajustam um **mesmo conjunto de dados**

Problema malposto

Combinações de **diferentes geometrias e/ou distribuições de densidade** ajustam um **mesmo conjunto de dados**



O problema de um ponto de vista matemático

Sistemas lineares (caso linear)

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Sistemas lineares (caso linear)

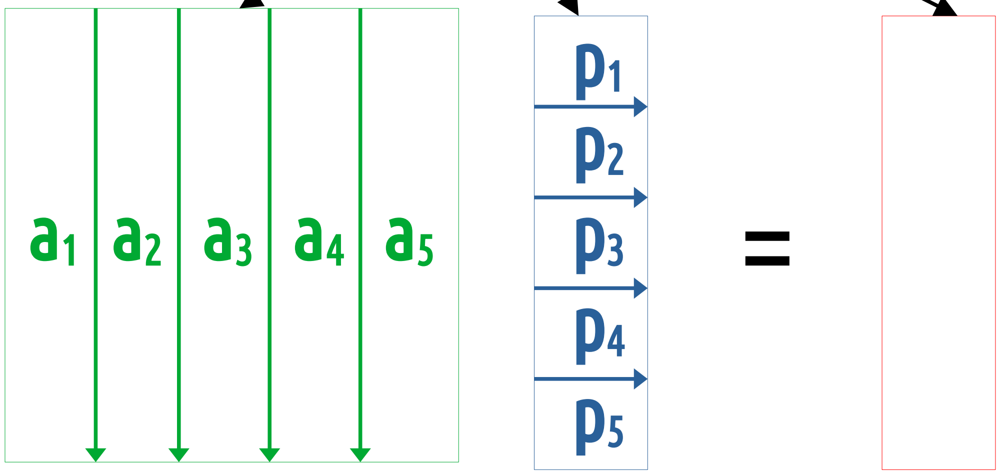
$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{t}$$

Sistemas lineares (caso linear)

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{t}$$



Sistemas lineares (caso linear)

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{t}$$

O vetor em vermelho é combinação linear dos vetores em verde

$$\boxed{p_1}\,\boxed{a_1} + \boxed{p_2}\,\boxed{a_2} + \boxed{p_3}\,\boxed{a_3} + \boxed{p_4}\,\boxed{a_4} + \boxed{p_5}\,\boxed{a_5} = \boxed{}$$

Sistemas lineares (caso linear)

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

O vetor em vermelho é combinação linear dos **vetores em verde**

$$\mathbf{A}\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{t}$$

A **dependência linear** entre os **vetores em verde** nos dá uma pista do **condicionamento deste sistema linear**

$$\boxed{p_1}\ \boxed{a_1} + \boxed{p_2}\ \boxed{a_2} + \boxed{p_3}\ \boxed{a_3} + \boxed{p_4}\ \boxed{a_4} + \boxed{p_5}\ \boxed{a_5} = \boxed{}$$

Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

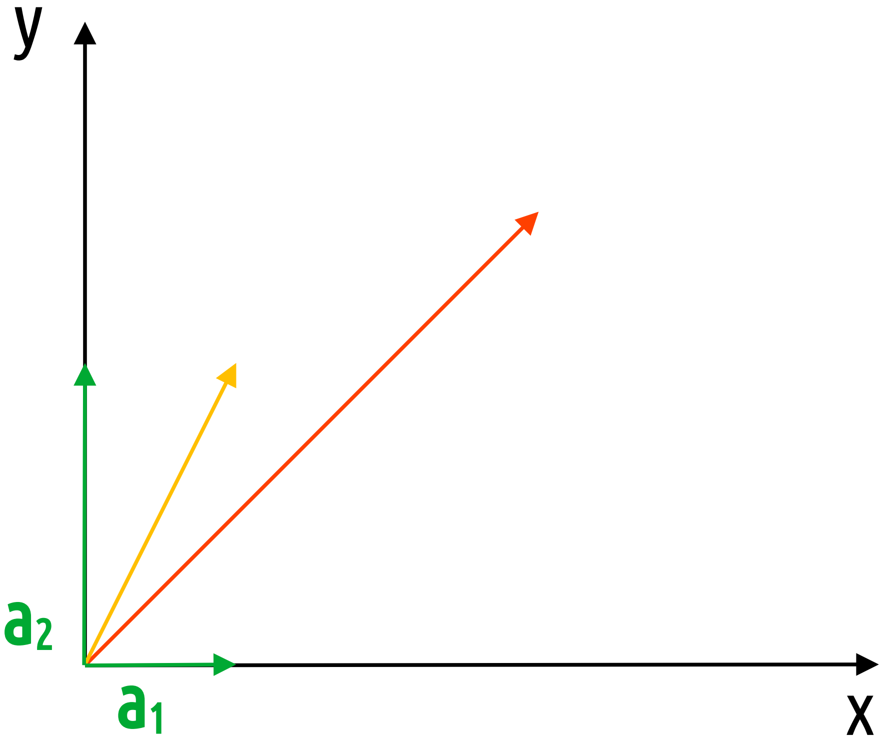
$$\boxed{p_1}\ \boxed{a_1} + \boxed{p_2}\ \boxed{a_2} = \boxed{}$$

Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

?

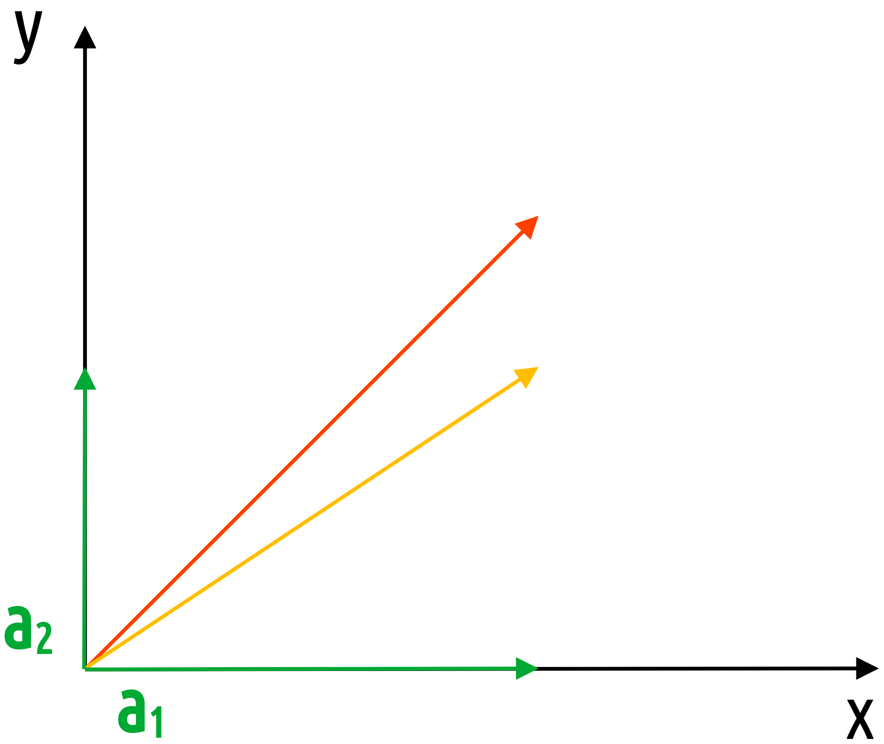
$$p_1 a_1 + p_2 a_2 =$$



Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

$$\boxed{p_1}\,\boxed{a_1} + \boxed{p_2}\,\boxed{a_2} =$$

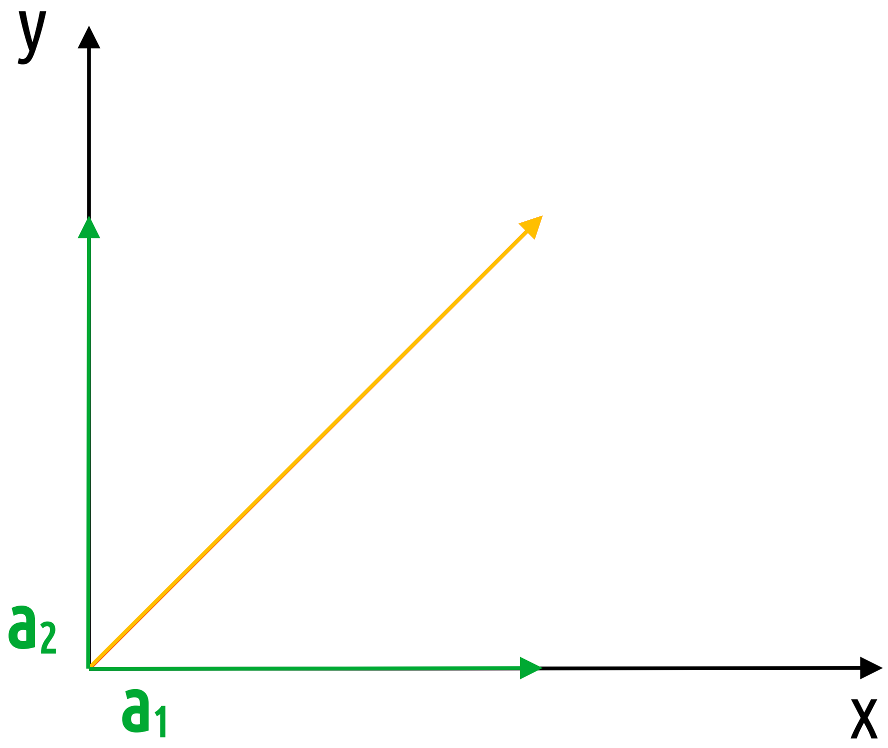


Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Existe somente uma única combinação de p_1 e p_2 que nos fazer reproduzir o vetor em vermelho

$$\boxed{p_1}\ \boxed{a_1} + \boxed{p_2}\ \boxed{a_2} = \boxed{}$$



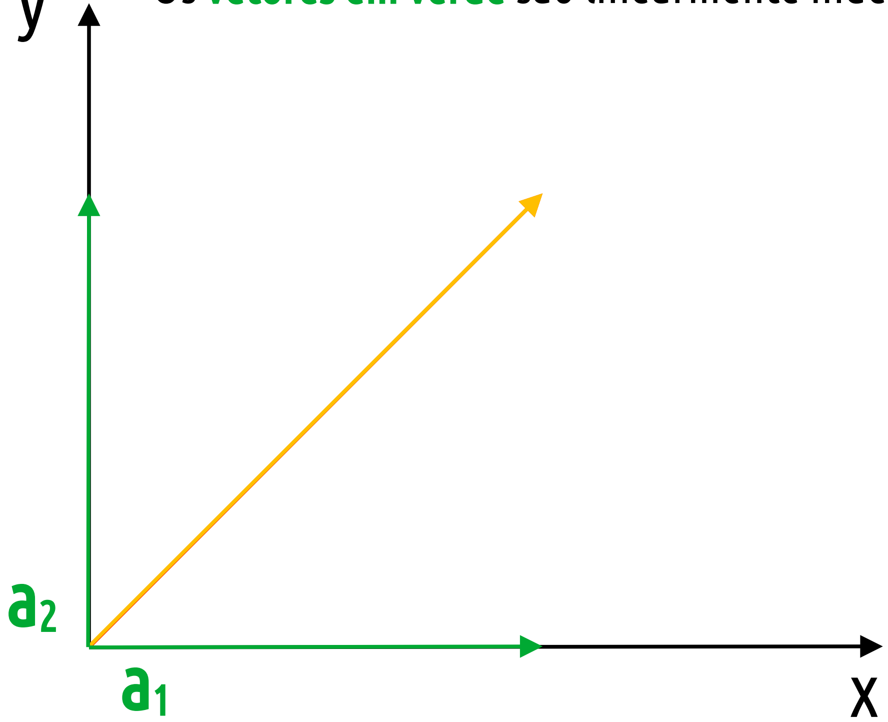
Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Existe somente uma única combinação de p_1 e p_2 que nos fazer reproduzir o vetor em vermelho

$$\boxed{p_1}\ \boxed{a_1} + \boxed{p_2}\ \boxed{a_2} = \boxed{}$$

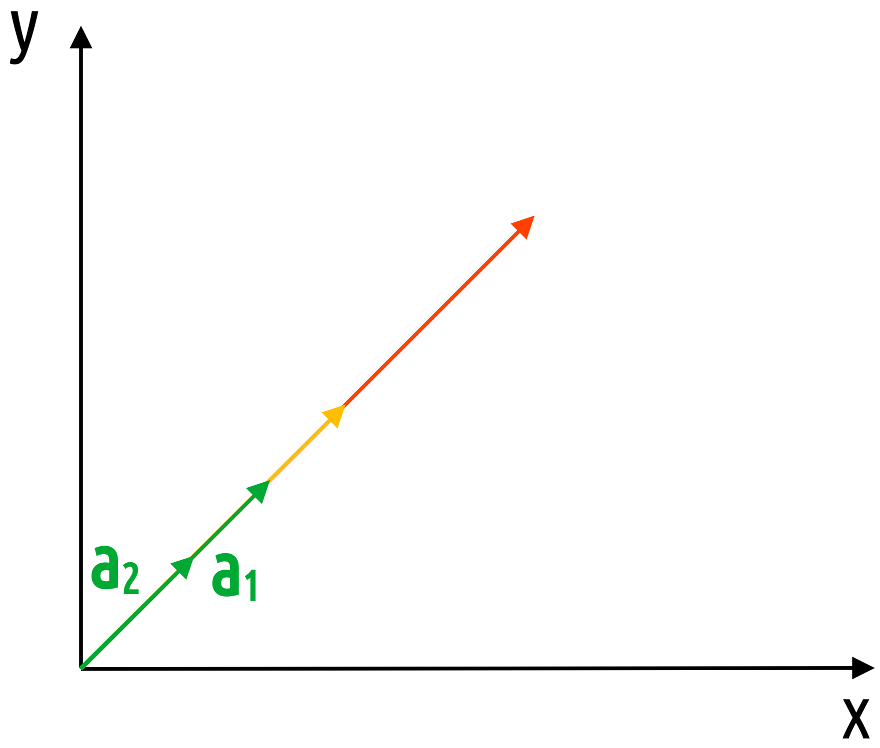
Os **vetores em verde** são linearmente independentes!



Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

$$p_1 \, a_1 + p_2 \, a_2 =$$

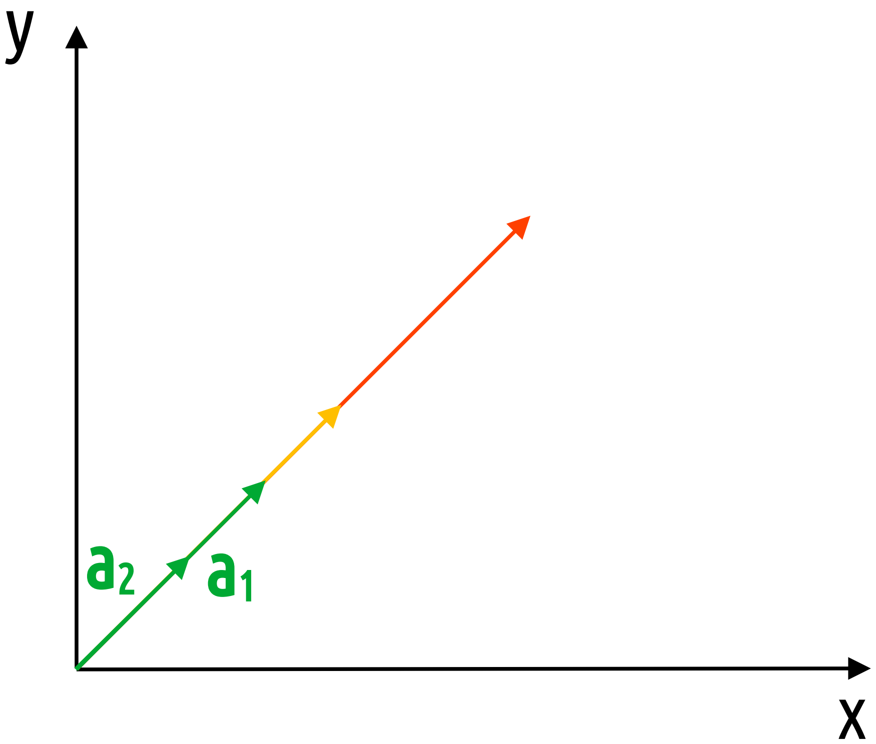


Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Perceba que nessa situação existem diversas combinações de p_1 e p_2 que reproduzem o vetor em vermelho.

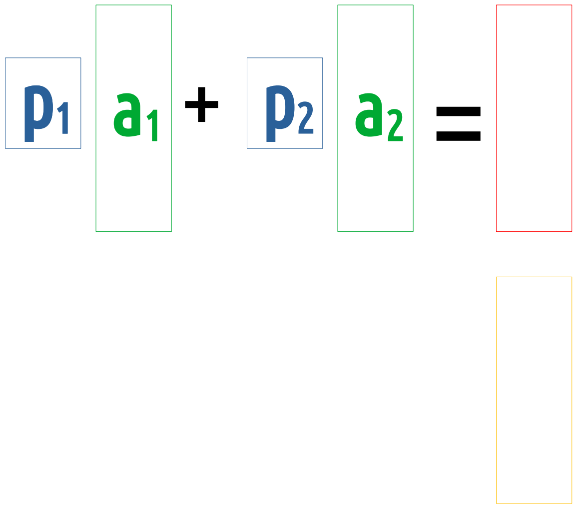
$$p_1 \, a_1 + p_2 \, a_2 =$$



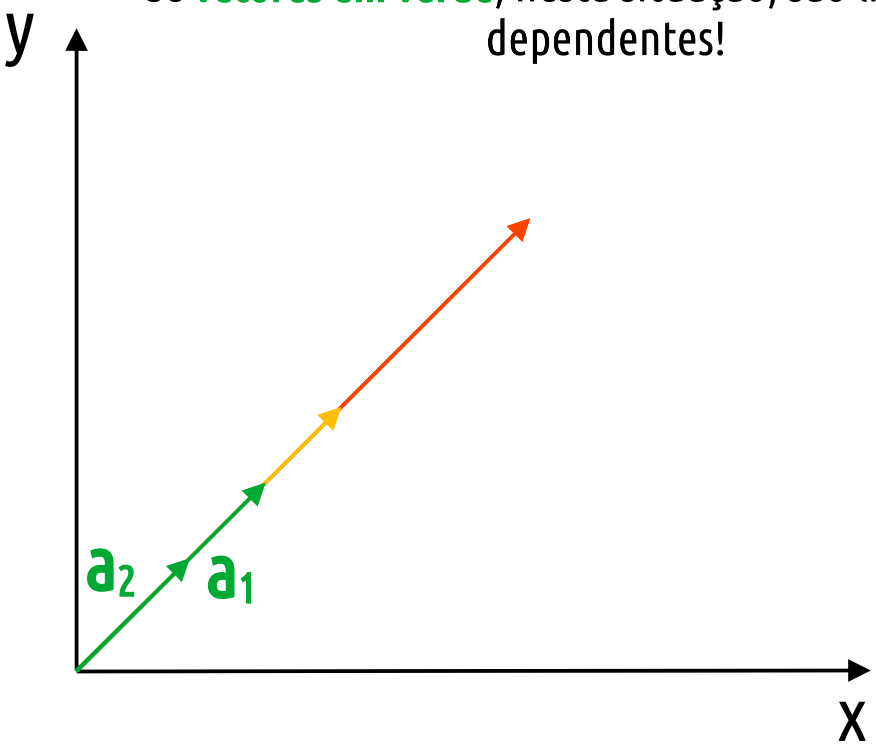
Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Perceba que nessa situação existem diversas combinações de p_1 e p_2 que reproduzem o vetor em vermelho.



Os **vetores em verde**, nesta situação, são linearmente dependentes!



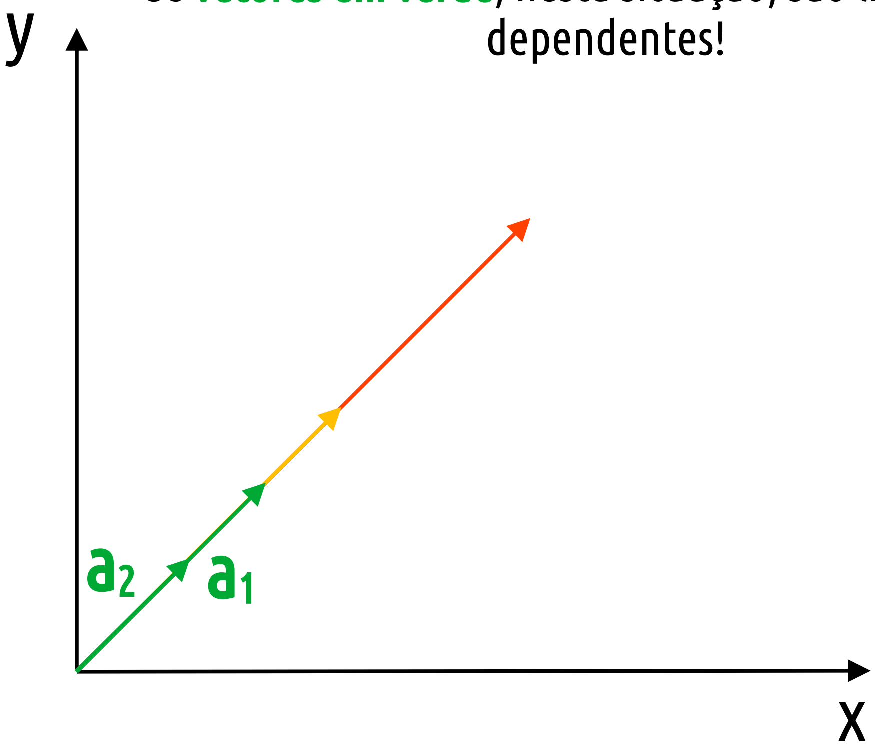
Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D

Perceba que nessa situação existem diversas combinações de p_1 e p_2 que reproduzem o vetor em vermelho.

$$p_1 \, a_1 + p_2 \, a_2 = $$

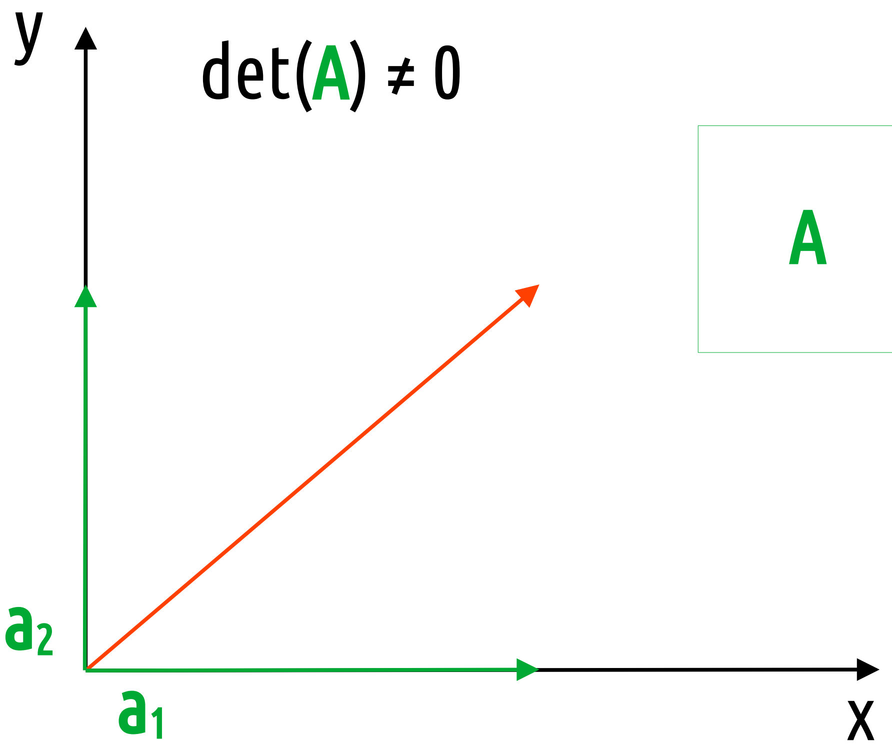
Os **vetores em verde**, nesta situação, são linearmente dependentes!



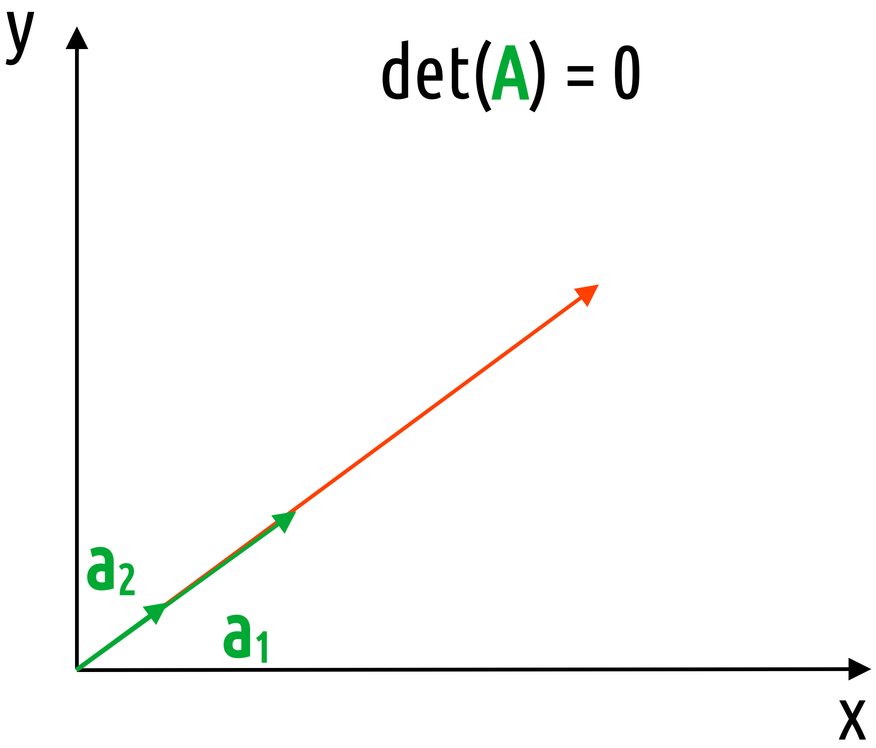
Neste caso diz-se que o sistema linear é mal condicionado

Sistemas lineares (caso linear)

Exemplo em 2D



$$A \, p = t$$



Neste caso diz-se que o sistema linear é mal condicionado

Regularização de Tikhonov
(Ordem Zero e Ordem Um)

A regularização tem como objetivo tornar bem condicionadas as matrizes envolvidas nas soluções de problemas lineares e não lineares

Matematicamente, o que queremos é minimizar uma função tal como:

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

O primeiro termo é a **função de ajuste** e o segundo termo é a **função regularizadora**. O **parâmetro de regularização** é dado por μ.

Regularização de Tikhonov de Ordem Zero (ou Norma Mínima)

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{p}$$

Função regularizadora

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{I})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado
(Norma mínima)

Regularização de Tikhonov de Ordem Um (ou Suavidade)

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função Objetivo

$$\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{p}$$

Função regularizadora

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{R}^T\mathbf{R})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{d}^o$$

Estimador de mínimos quadrados regularizado
(Suavidade)

Exemplo

A Camada equivalente

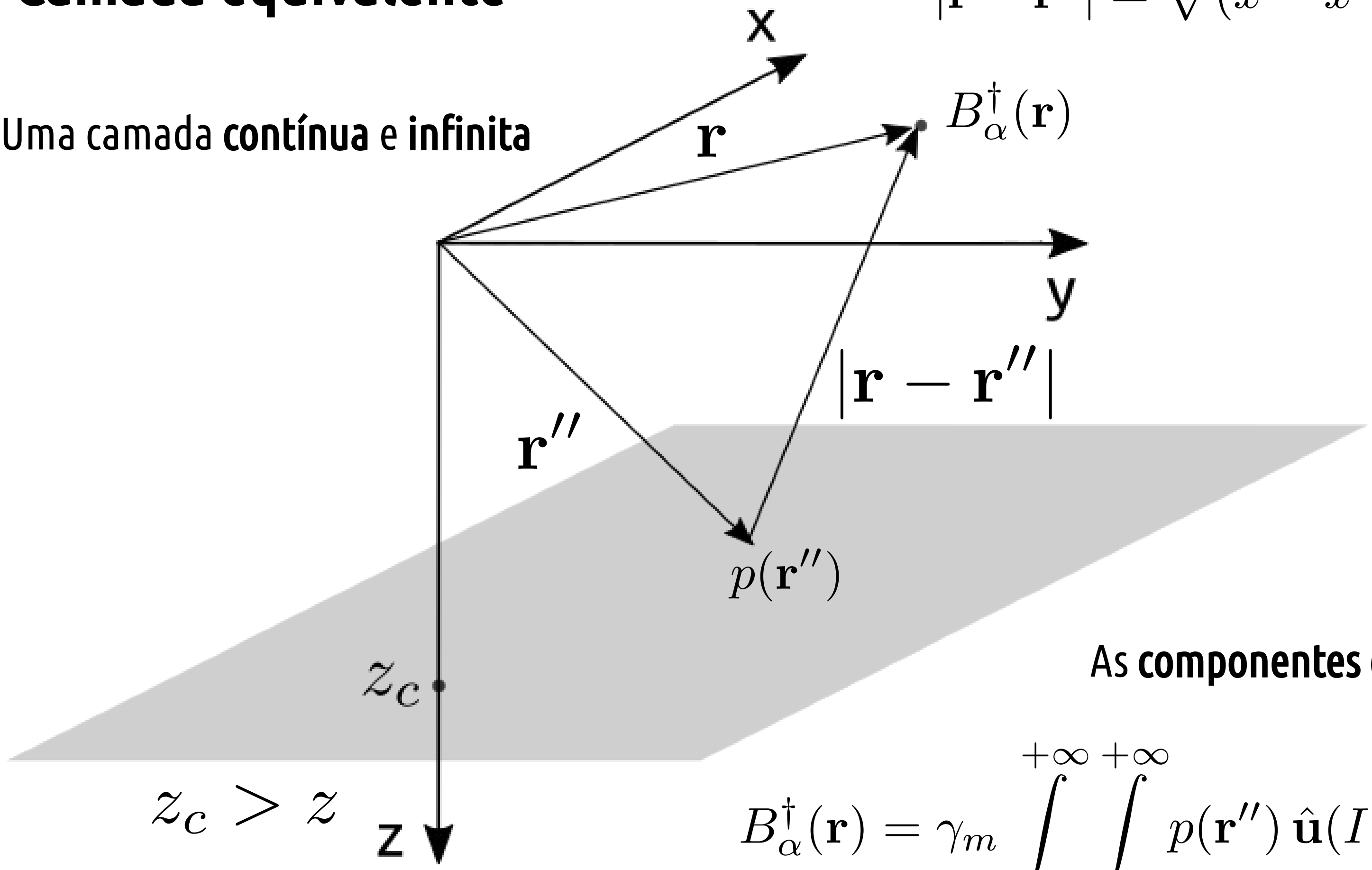
De acordo com a Teoria do Potencial é possível **recuperar o efeito gerado por uma distribuição tridimensional de propriedade física por uma distribuição bidimensional.**

Em geral, esta técnica serve para **processamentos de dados potenciais** (dados de gravidade ou magnéticos), como também, mais recentemente, **interpretação dos corpos em subsuperfície**.

Camada equivalente

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}''| = \sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z_c)^2}$$

Uma camada **contínua** e **infinita**



$z_c > z$

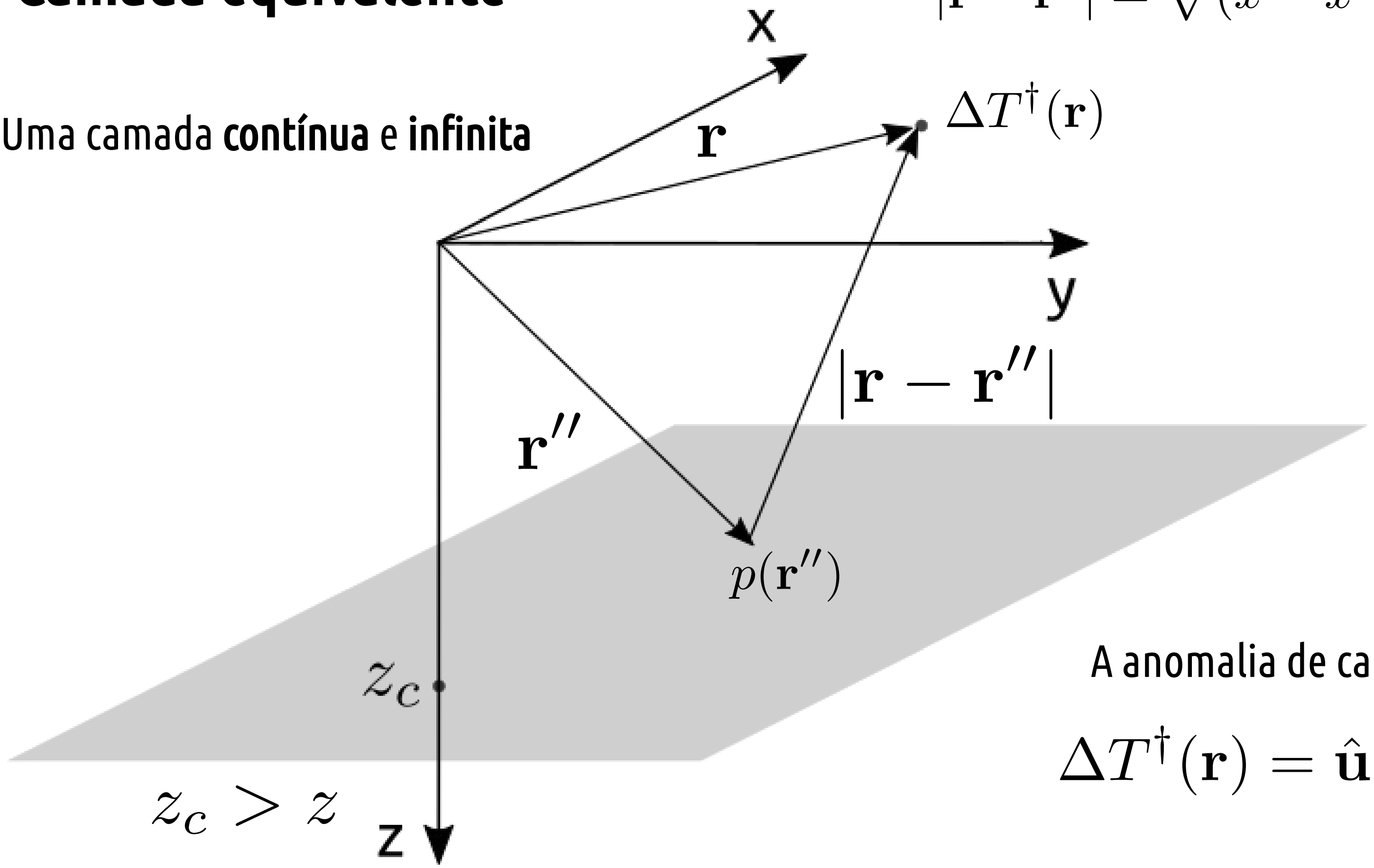
As **componentes do campo** são dadas por:

$$B_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) = \gamma_m \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{r}'')\, \hat{\mathbf{u}}(I, D) \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{\nabla} \frac{1}{\| \mathbf{r} - \mathbf{r}'' \|_2}\, dS''$$

Camada equivalente

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}''| = \sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z_c)^2}$$

Uma camada **contínua** e **infinita**

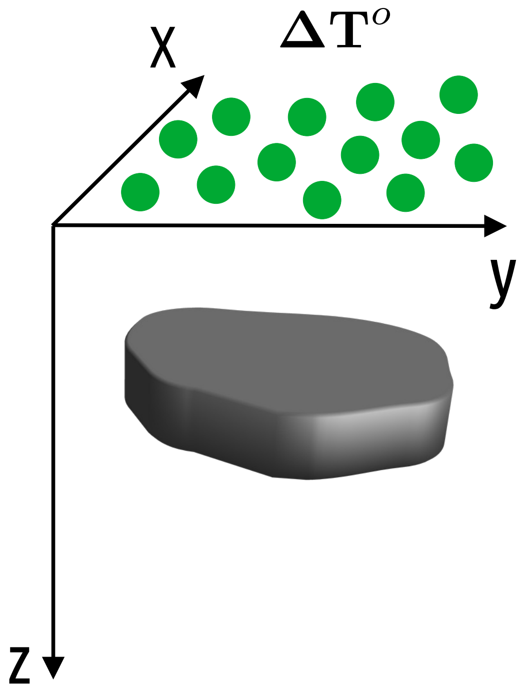


A anomalia de campo total é dada por:

$$\Delta T^\dagger(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0) \cdot \mathbf{B}^\dagger(\mathbf{r})$$

O problema geofísico

Fonte magnética 3D

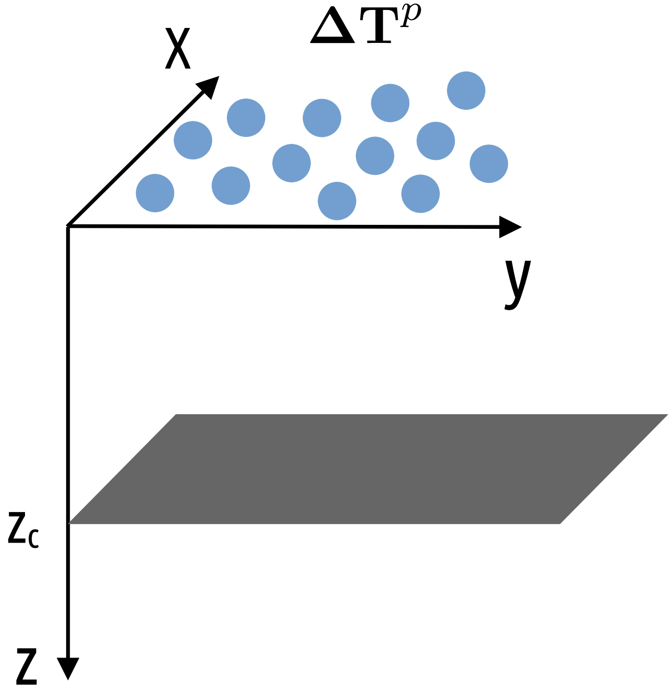


Recuperar o efeito de uma fonte 3D por uma **camada plana** abaixo da superfície de observação

$$\mathbf{\Delta T}^o = \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \vdots \\ \Delta T_n \end{bmatrix}$$

Vetor de dados observados

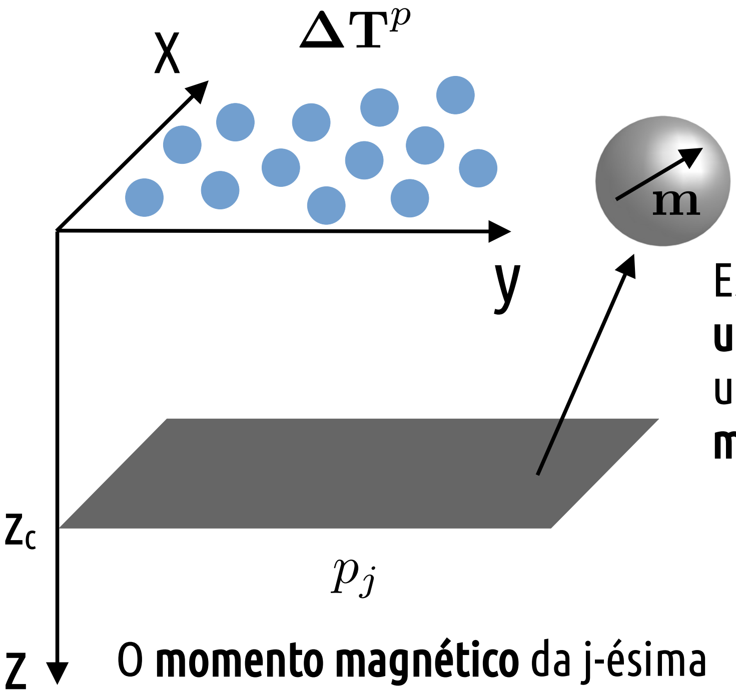
Camada equivalente



Modelagem direta

A **anomalia de campo total predita** no i-ésimo ponto de observação gerada por uma **fonte equivalente** é dada por:

Camada equivalente



$$\Delta T_i^p = \gamma_m \hat{\mathbf{F}}_0^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{m} p_j$$

Esferas de **volume unitário,** que associamos uma **mesma direção de magnetização**

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_{xx} \frac{1}{l_{ij}} & \partial_{xy} \frac{1}{l_{ij}} & \partial_{xz} \frac{1}{l_{ij}} \\ \partial_{yx} \frac{1}{l_{ij}} & \partial_{yy} \frac{1}{l_{ij}} & \partial_{yz} \frac{1}{l_{ij}} \\ \partial_{zx} \frac{1}{l_{ij}} & \partial_{zy} \frac{1}{l_{ij}} & \partial_{zz} \frac{1}{l_{ij}} \end{bmatrix}$$

Hessiana

$$l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2}$$

O **momento magnético** da j-ésima fonte equivalente

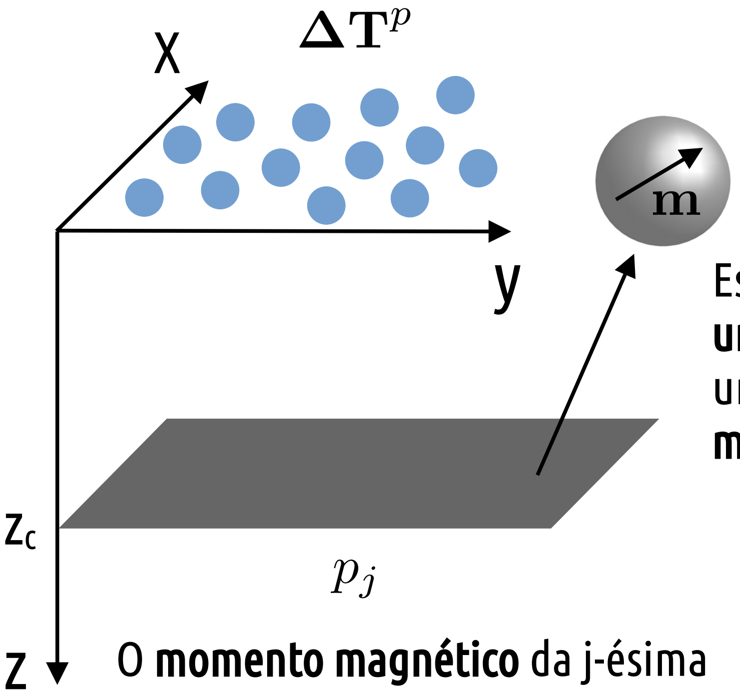
Distância entre o i-ésimo ponto e a j-ésima fonte equivalente

Modelagem direta

A **anomalia de campo total predita** no i-ésimo ponto de observação gerada por uma **fonte equivalente** é dada por:

$$\Delta T_i^p = \gamma_m \hat{\mathbf{F}}_0^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{m} p_j$$

Camada equivalente



Esferas de **volume unitário,** que associamos uma **mesma direção de magnetização**

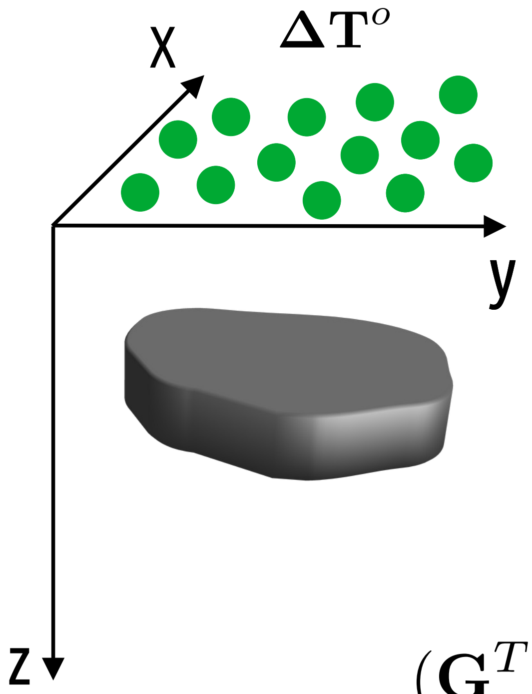
O **momento magnético** da j-ésima fonte equivalente

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}$$

O vetor de parâmetros

A inversão dos dados

Fonte magnética 3D



Queremos estimar uma **distribuição de momentos** que minimize a distância entre os dados observados e os dados preditos gerados pela camada!

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) + \mu\theta(\mathbf{p})$$

Função objetivo

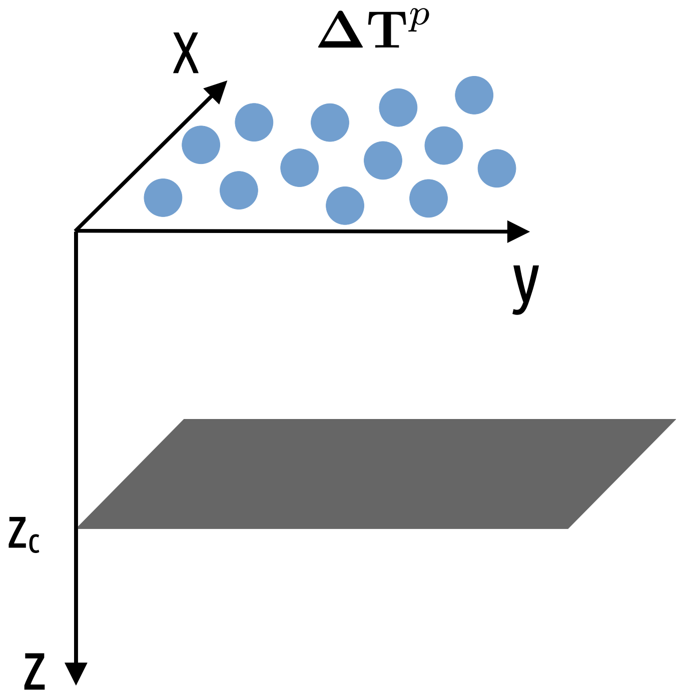
$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{I})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{\Delta T}^o$$

Estimador de mínimos quadrados (Norma mínima)

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{R}^T\mathbf{R})\mathbf{p}^\sharp = \mathbf{G}^T\mathbf{\Delta T}^o$$

Estimador de mínimos quadrados (Suavidade)

Camada equivalente



Referências Bibliográficas

Aster, R. C., Thurber C. H. & Borchers, B., 2018, Parameter estimation and inverse problems. Third Edition. Academic Press

Blakely, R. J., 1996, Potential theory in gravity and magnetic applications: Cambridge University Press.

Dampney, C. N. G., 1969, The equivalent source technique: Geophysics, 34, 39–53, doi: 10.1190/1.1439996.

Leão, J. W. D., and J. B. C. Silva, 1989, Discrete linear transformations of potential field data: Geophysics, 54, 497–507, doi: 10.1190/1.1442676.

Oliveira, V. C., Jr., V. C. F. Barbosa, and L. Uieda, 2013, Polynomial equivalent layer: Geophysics, 78, no. 1, G1–G13, doi: 10.1190/geo2012-0196.1.

Reis, A. L. A. Reis, Oliveira Jr, V. C. , and Barbosa, V. C. F., (2020). Generalized positivity constraint on magnetic equivalent layers. Geophysics, 85(6), 1-45.

Até breve!