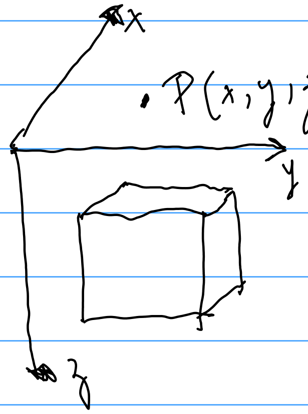
Efeito gravitacional gerado por um prisma retangular

Farei aqui a demonstração do efeito gerado por um prisma, tanto as componentes dos campos e os potenciais gerados

Considere um prisma retangular posicionado segundo um sistema de coordenadas topocentrico, no qual o eixo x está apontado para o norte, o eixo y para leste e o eixo z orientado positivamente para baixo. Considere também que este prisma possui densidade constante. O potencial gravitacional gerado por este prisma em um ponto P = (x,y,z) é dado por:



$$U_p = G\rho \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{r}\, dx'\,dy'\,dz'$$

$$r = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}$$

Uma solução analítica para esta integral é dada por Nagy (2000):

$i = 1,2 \qquad j = 1,2 \qquad k = 1,2$

$$r_{ijk} = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i}$$

$X_1 = x'_1 - x \qquad Y_1 = y'_1 - y \qquad Z_1 = z'_1 - z$

$X_2 = x'_2 - x \qquad Y_2 = y'_2 - y \qquad Z_2 = z'_2 - z$

$$f(X_i, Y_j, Z_k) = X_i Y_j \ln(Z_k + r_{ijk}) + Y_j Z_k \ln(X_i + r_{ijk}) + X_i Z_k \ln(Y_j + r_{ijk}) - \frac{X_i^2}{2} tg^{-1}\left(\frac{X_i Z_k}{Y_j r_{ijk}}\right) - \frac{Y_j^2}{2} tg^{-1}\left(\frac{Y_j Z_k}{X_i r_{ijk}}\right) - \frac{Z_k^2}{2} tg^{-1}\left(\frac{X_i Y_j}{Z_k r_{ijk}}\right)$$

$$U_p = G\rho\, f(X_i, Y_j, Z_k) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z_1}^{z_2}$$

$$U_p = G\rho \left[f(x_2, y_j, z_k) - f(x_1, y_j, z_k) \right] \Big|_{y_1'}^{y_2'} \Big|_{z_1'}^{z_2'}$$

$$U_p = G\rho \left[f(x_2, y_2, z_k) - f(x_2, y_1, z_k) - f(x_1, y_2, z_k) + f(x_1, y_1, z_k) \right] \Big|_{z_1}^{z_2}$$

$$\begin{aligned} U_p = G\rho \Big[& f(x_2, y_2, z_2) - f(x_2, y_2, z_1) \\ & - f(x_2, y_1, z_2) + f(x_2, y_1, z_1) \\ & - f(x_1, y_2, z_2) + f(x_1, y_2, z_1) \\ & + f(x_1, y_1, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) \Big] \end{aligned}$$

$$U_p = G\rho \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} -1^{(i+j+k)} f(x_i, y_j, z_k)$$

BCOD

Nagy, D., Papp, G., and Benedek, J. (2000). The gravitational potential and its derivatives for the prism: Journal of Geodesy, 74, 552–560, doi: 10.1007/s001900000116.

É possível implementar o potencial gravitacional gerado pelo prisma e as componentes do campo. Uma outra questão é calcular a versão para este algoritmo utilizando o campo magnético e as suas componentes.