



Revisão Gravimetria

Prof. André Luis Albuquerque dos Reis

Rio de Janeiro 2021

Objetivo: Revisar os conceitos de Campo de gravidade, distúrbio de gravidade e anomalia gravimétrica já passados em sala de aula.

- A Lei da Gravitação;
- Introdução a Teoria do potencial;
- Campo de gravidade e seus elementos: geóide e elipsóide;
- Anomalia de gravidade e distúrbio de gravidade;

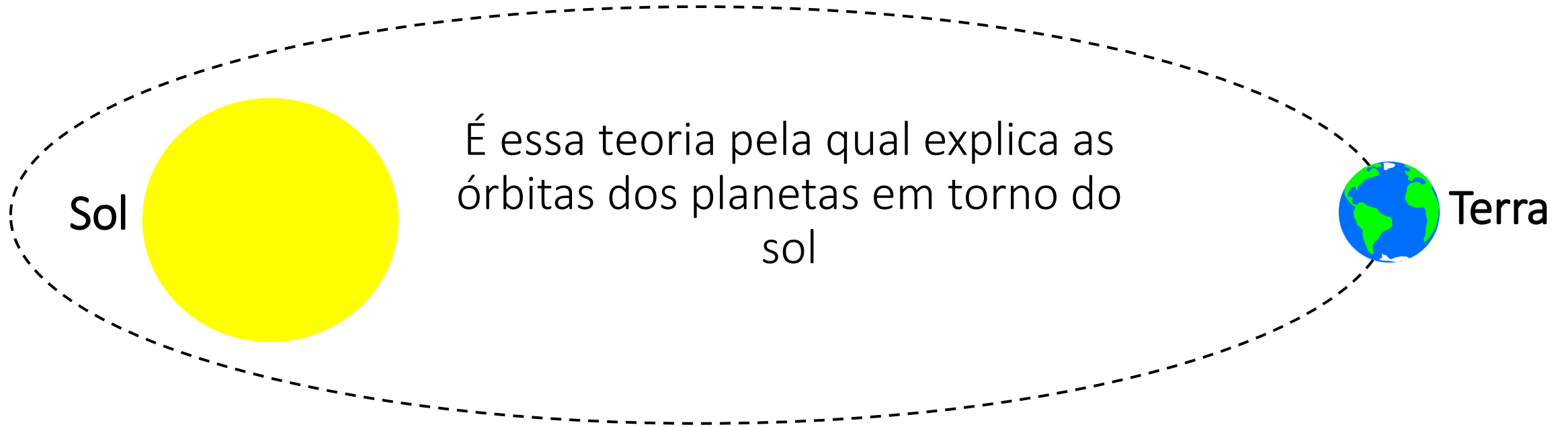
A Lei da Gravitação

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Uma das quatro interações fundamentais!

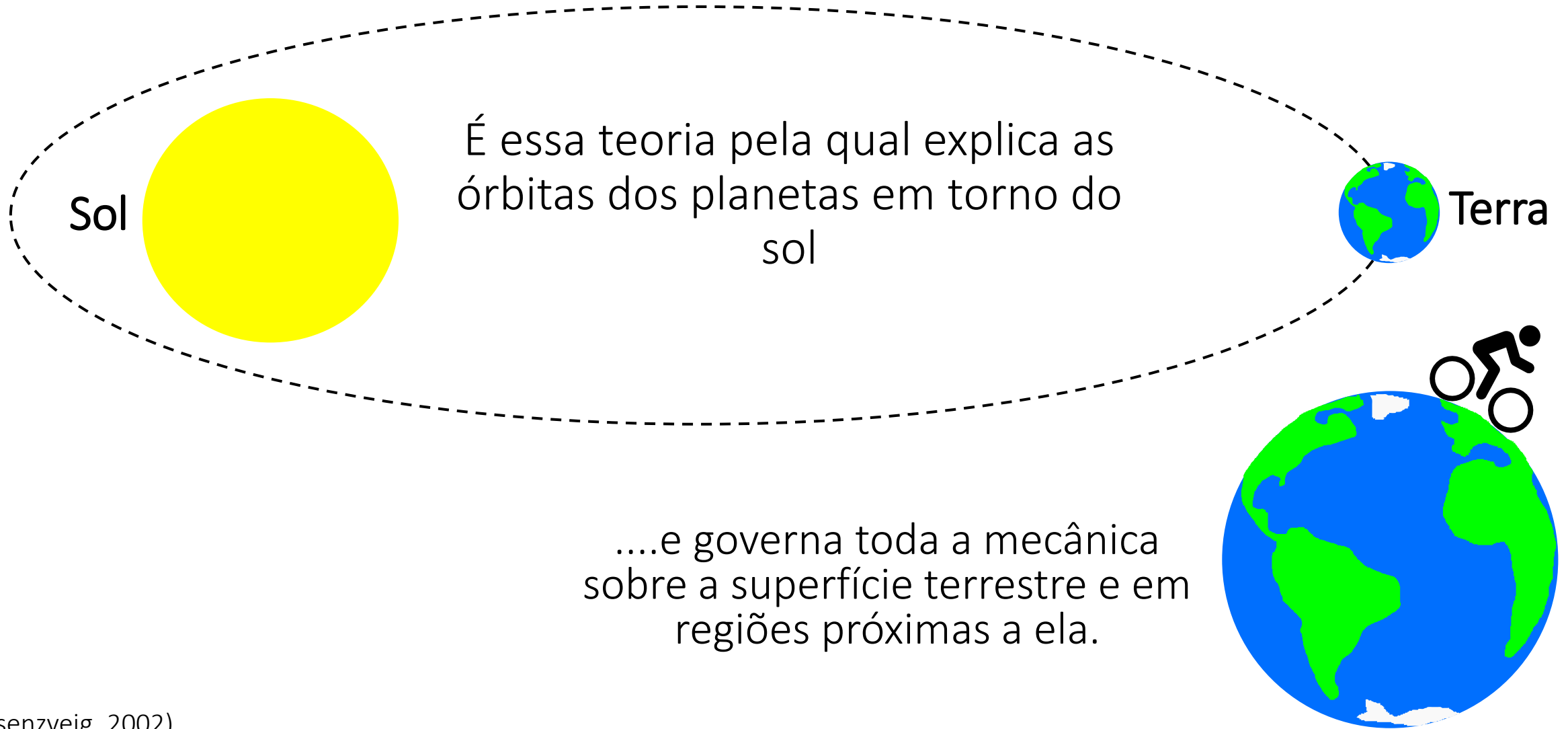
Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Uma das quatro interações fundamentais!



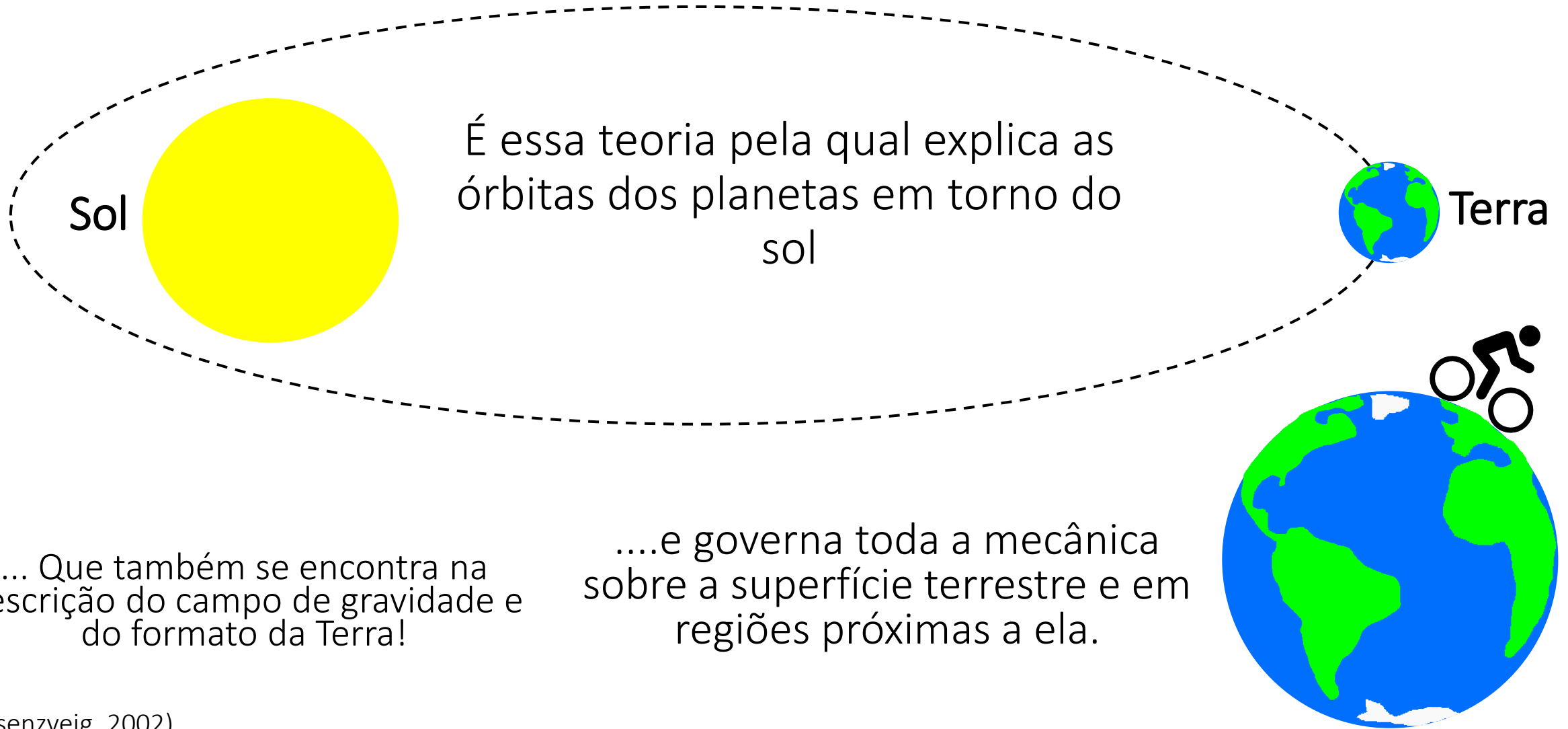
Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Uma das quatro interações fundamentais!



Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Uma das quatro interações fundamentais!

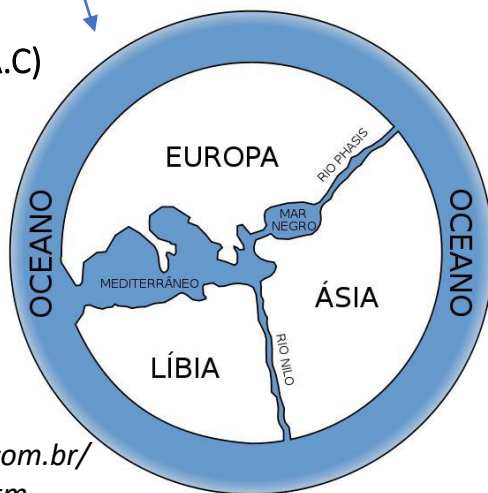


Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

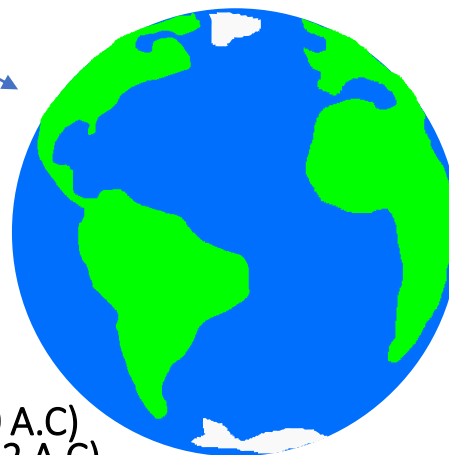
Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois aspectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

Formato da Terra: a superfície física e matemática

Tales de Mileto e Anaximandro (600 A.C)

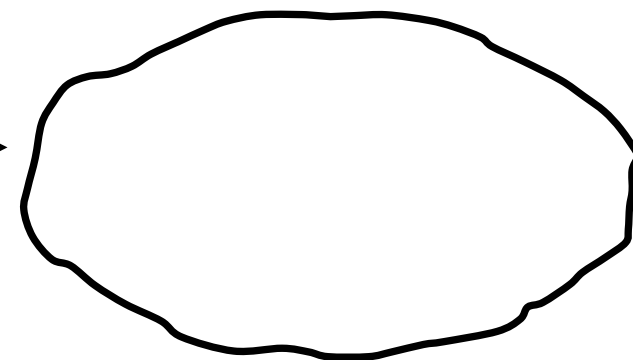


Pitágoras (580-500 A.C)
Aristóteles (384-322 A.C)



Eratóstenes (276-295 A.C)
foi o primeiro a estimar o raio terrestre

No século 19, já determinaram o modelo atual, que é o geoidal!



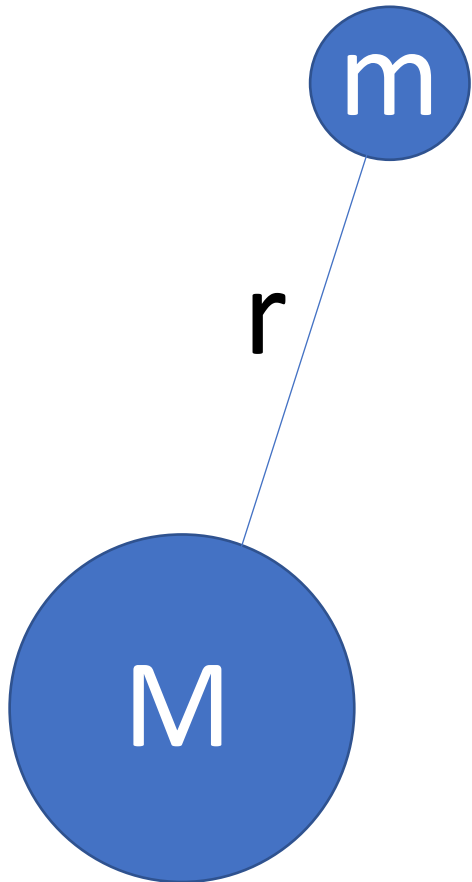
No Século 17, com Isaac Newton (1643-1727), reconheceram que a terra havia um achatamento nos polos

<https://brasilecola.uol.com.br/filosofia/anaximandro.htm>.
Acesso em 28 de março de 2021.

(Torge, 2001)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas



$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

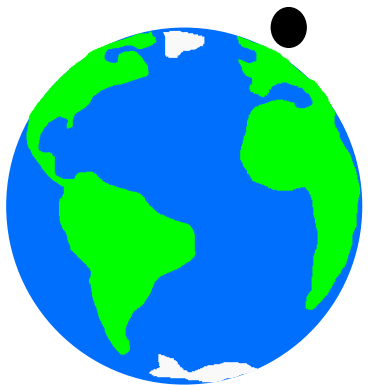
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

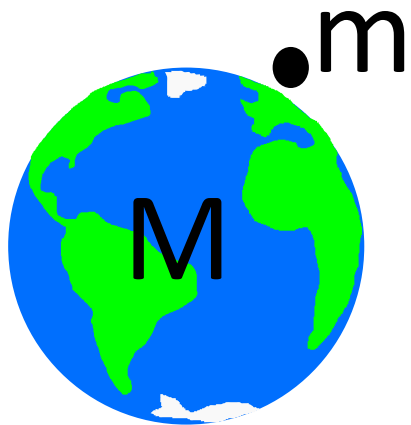
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

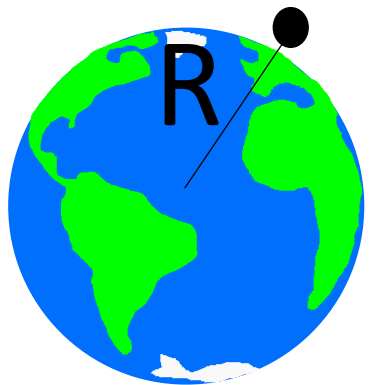
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

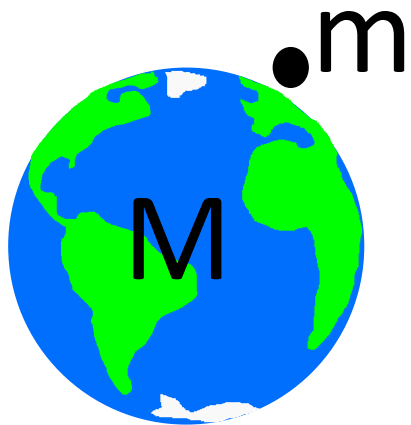
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$R \approx 6371 \text{ m}$$

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$m\mathbf{g} = G \frac{Mm}{R^2} \hat{\mathbf{r}}$$



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

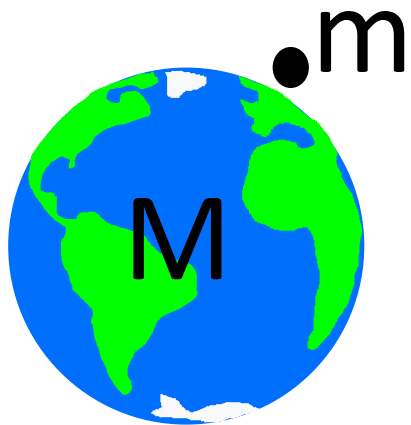
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$R \approx 6371 \text{ m}$$

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\cancel{m}\mathbf{g} = G \frac{\cancel{M}\cancel{m}}{R^2} \hat{\mathbf{r}}$$



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

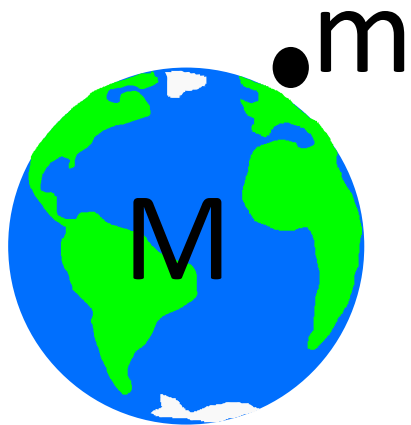
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$R \approx 6371 \text{ m}$$

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{g} = G \frac{M}{R^2} \hat{\mathbf{r}}$$



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

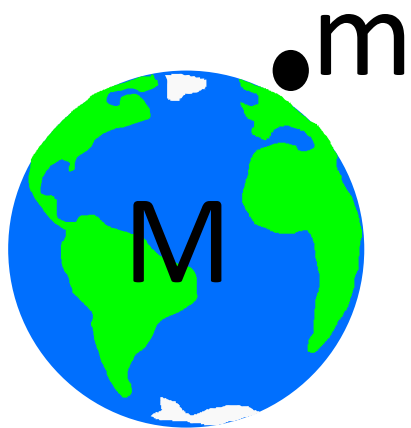
$$R \approx 6371 \text{ m}$$

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{g} = G \frac{M}{R^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \approx 9,8 \text{ m/s}^2$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$R \approx 6371 \text{ m}$$

()

Tem também como ponto de partida a **Teoria do potencial**

Tem também como ponto de partida a **Teoria do potencial**

É o estudo dos campos potenciais conservativos, nos quais são derivados de um potencial.

Tem também como ponto de partida a **Teoria do potencial**

É o estudo dos campos potenciais conservativos, nos quais são derivados de um potencial.

São caracterizados por uma equação diferencial chamada **equação de Laplace**, no estudo de **funções harmônicas**.

Tem também como ponto de partida a **Teoria do potencial**

É o estudo dos campos potenciais conservativos, nos quais são derivados de um potencial.

São caracterizados por uma equação diferencial chamada **equação de Laplace**, no estudo de **funções harmônicas**.

Descreve uma série de fenômenos da natureza, tais como a transferência de calor em meios homogêneos, o escoamento de fluidos em meios ideais, os campos eletrostáticos e magnetostáticos, dentre outros!

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z).$$


Este campo é gerado por este potencial $\phi(x, y, z)$.

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(x, y, z)$.

Uma **superfície equipotencial**  $\phi(x, y, z) = \text{constante}$

Superfície pela qual o potencial é
constante!

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(x, y, z)$.

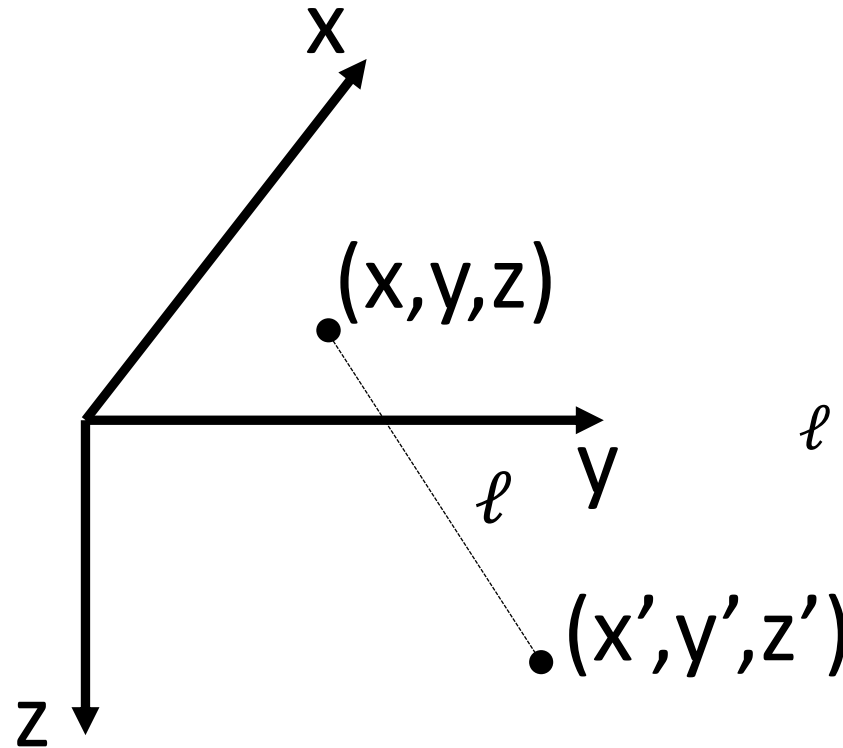
Este potencial será harmônico se ele satisfizer a
Equação de Laplace

$$\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Este campo será harmônico se

$$\nabla^2 \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi = 0.$$

Exemplo:



$$\phi(X, Y, Z, X', Y, Z') = \frac{1}{\ell}$$
$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Como caracterizar o campo
gravitacional da Terra?

Na Geofísica estamos interessados na componente gravitacional
que é relacionada com às variações de densidade no interior da
Terra

Na Geofísica estamos interessados na componente gravitacional que é relacionada com às variações de densidade no interior da Terra

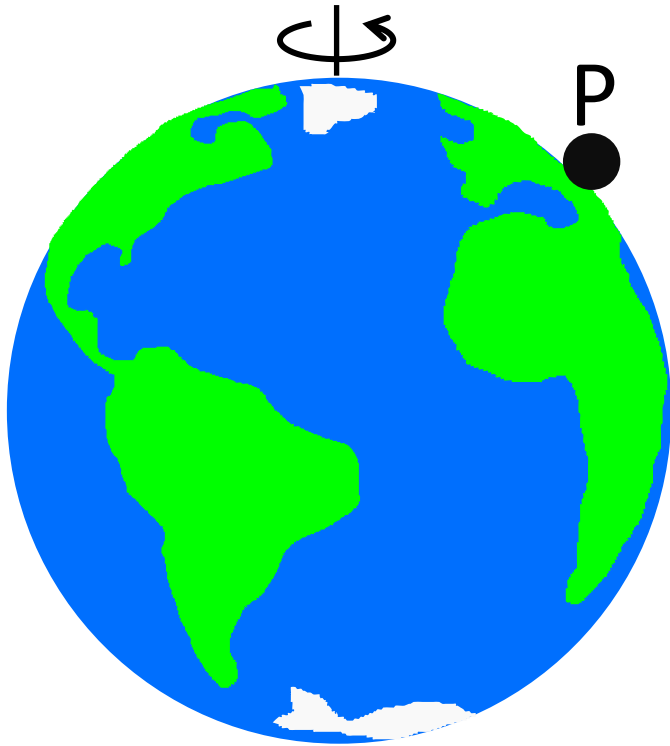
É necessário que a gente consiga retirar todas as componentes que não são de origem gravitacional, como as variações temporais do campo ocasionadas pela atração luni-solar; deriva instrumental e variações na pressão atmosférica

Na Geofísica estamos interessados na componente gravitacional que é relacionada com às variações de densidade no interior da Terra

É necessário que a gente consiga retirar todas as componentes que não são de origem gravitacional, como as variações temporais do campo ocasionadas pela atração luni-solar; deriva instrumental e variações na pressão atmosférica

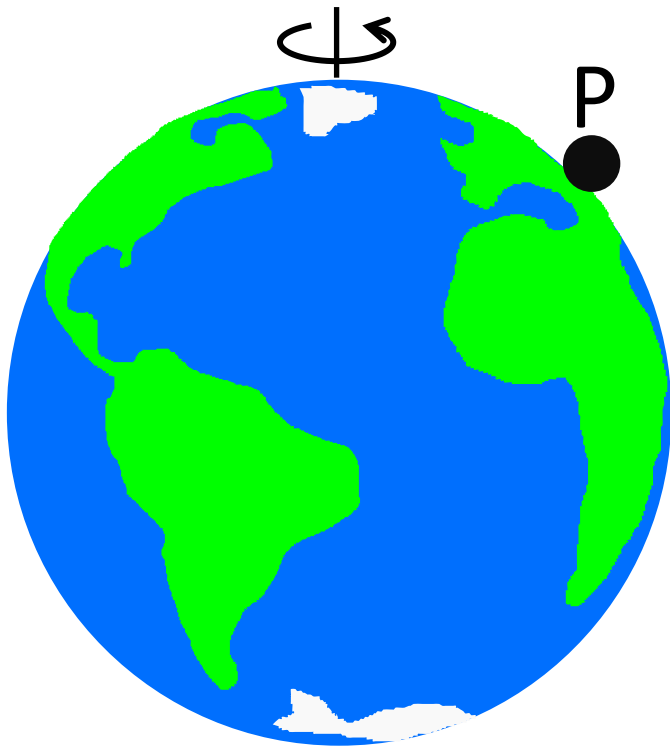
Para isso, teremos que descrever bem o campo gravitacional e as outras componentes!

Seja uma massa
unitária em repouso na
superfície terrestre

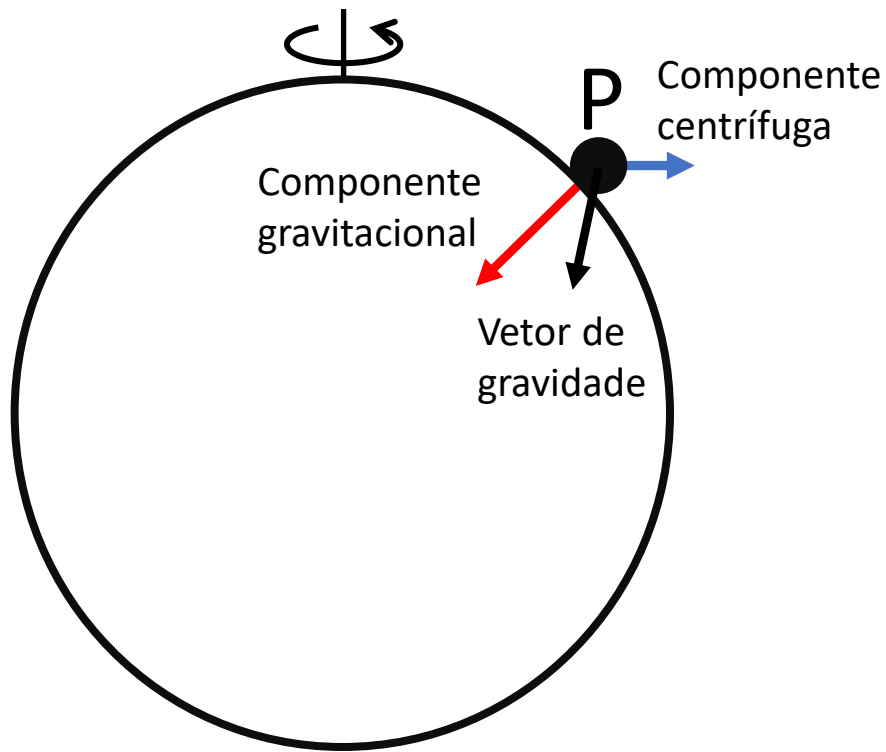


Seja uma massa
unitária em repouso na
superfície terrestre

Este corpo experimenta uma **força gravitacional** e uma **força centrífuga**. A resultante destas duas é o vetor gravidade.



Seja uma massa unitária em repouso na superfície terrestre



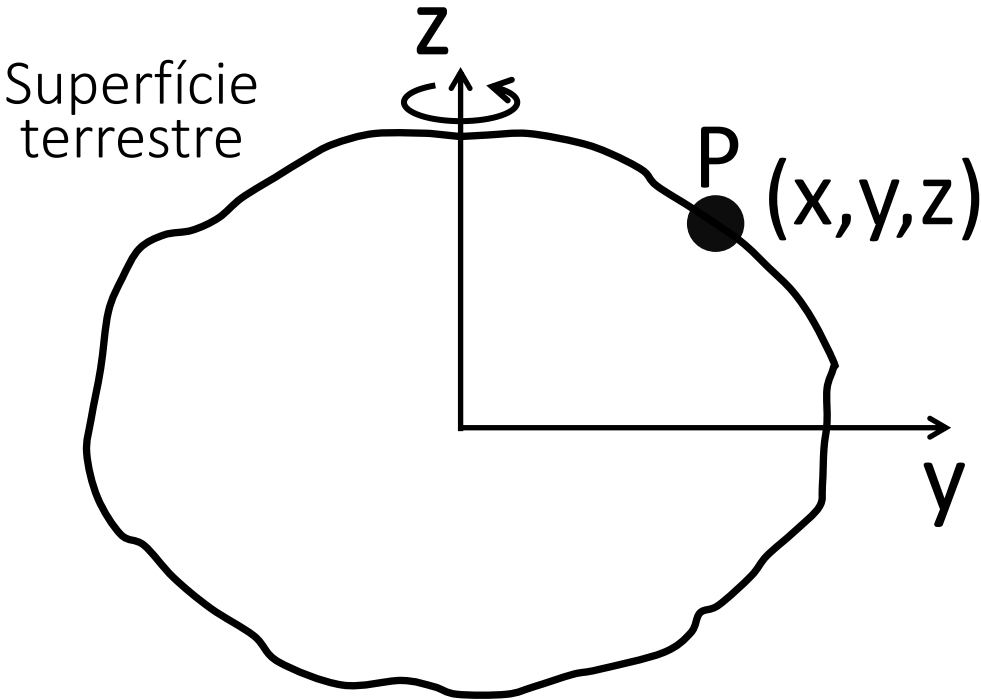
Este corpo experimenta uma **força gravitacional** e uma **força centrífuga**. A resultante destas duas é o vetor gravidade.

A soma destes vetores é o que chamamos de **vetor de gravidade**.

O módulo deste vetor é o que chamamos de **gravidade**!

Seja uma massa
unitária em repouso na
superfície terrestre

Terra real

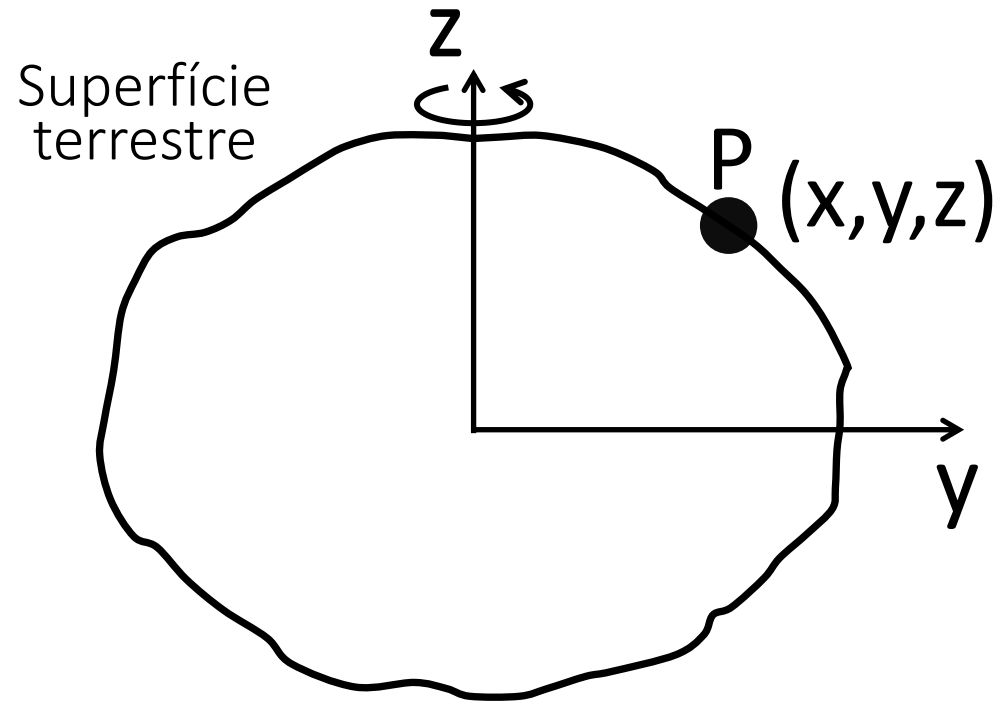


(Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2005)

Seja uma massa
unitária em repouso na
superfície terrestre

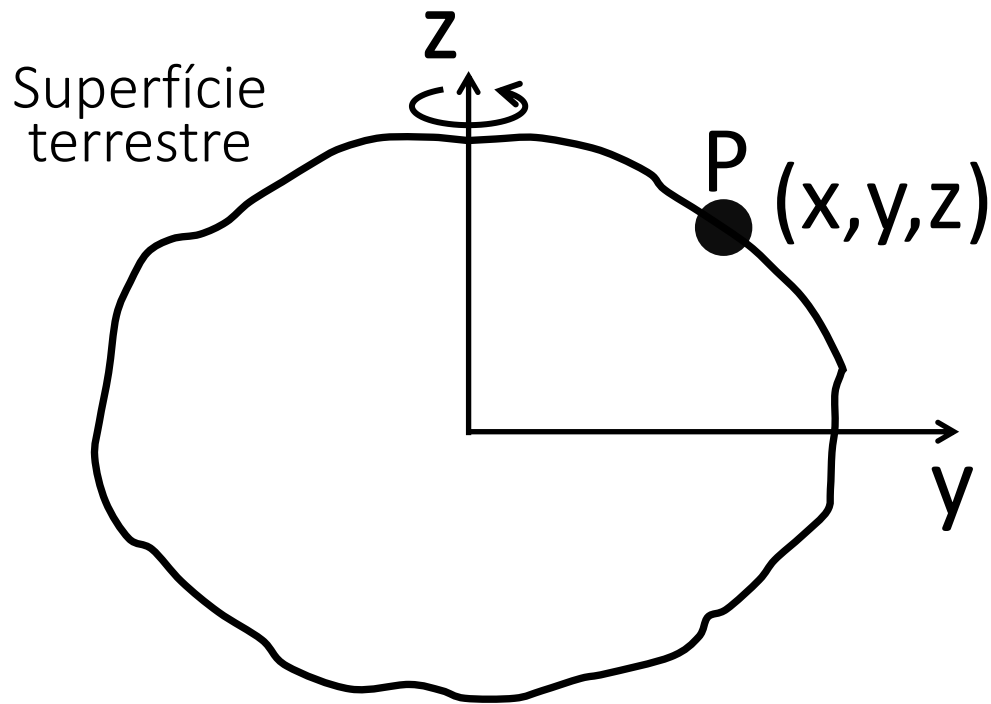
Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

Terra real



Seja uma massa
unitária em repouso na
superfície terrestre

Terra real

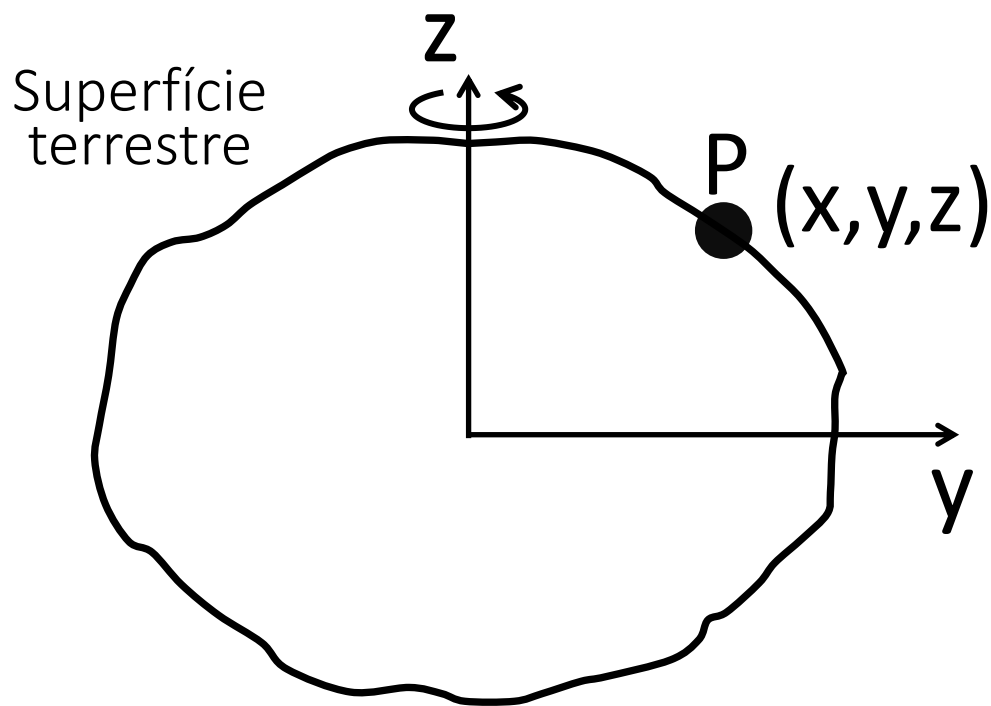


Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

O **potencial de gravidade** é a soma entre
duas funções escalares: o **potencial
gravitacional** e o **potencial centrífugo**

Seja uma massa
unitária em repouso na
superfície terrestre

Terra real



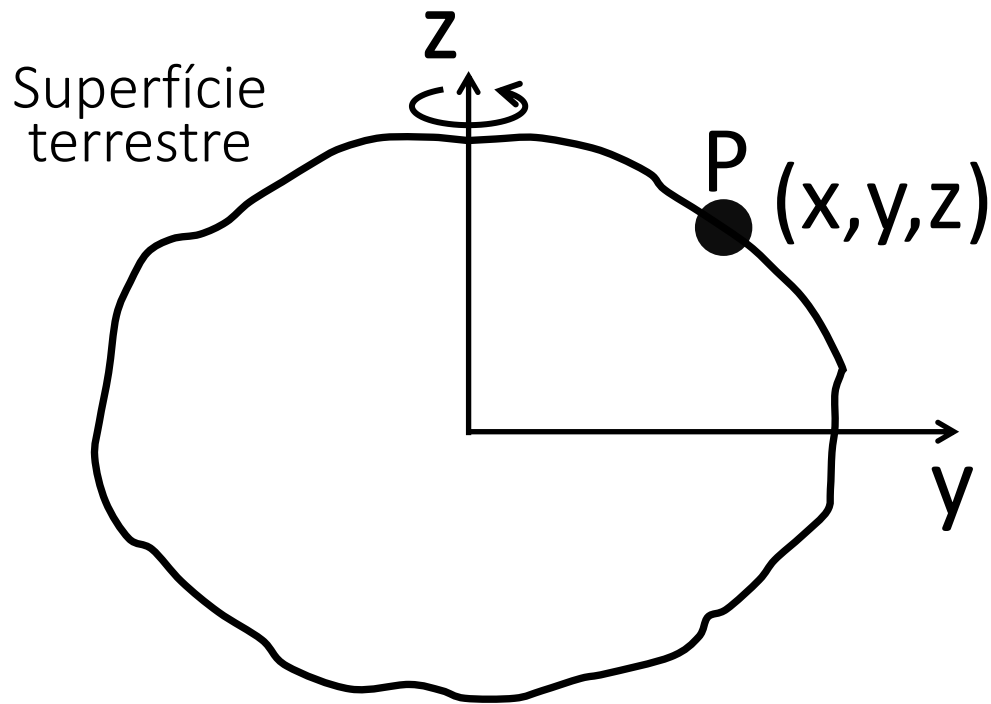
Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

O **potencial de gravidade** é a soma entre
duas funções escalares: o **potencial
gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$W_P = V_P + \Phi_P$$

Seja uma massa unitária em repouso na superfície terrestre

Terra real



Podemos começar descrevendo o potencial de gravidade!

O potencial de gravidade é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

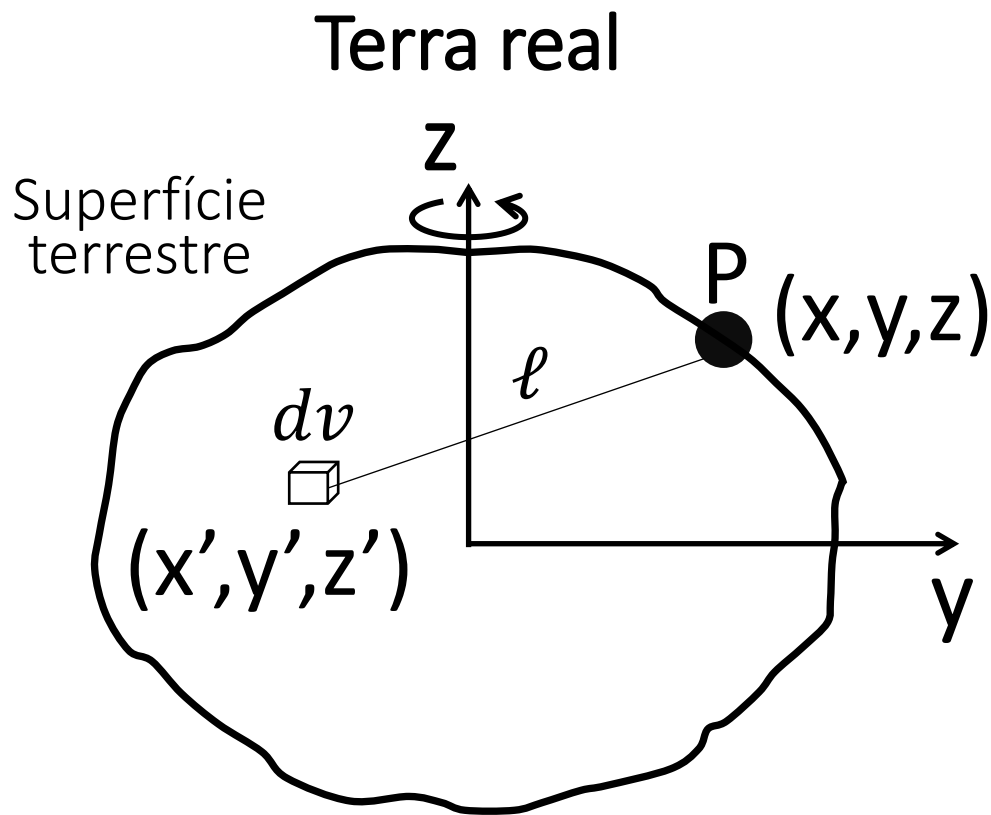
$$W_P = V_P + \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv$$

Seja uma massa unitária em repouso na superfície terrestre

Podemos começar descrevendo o potencial de gravidade!

O potencial de gravidade é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**



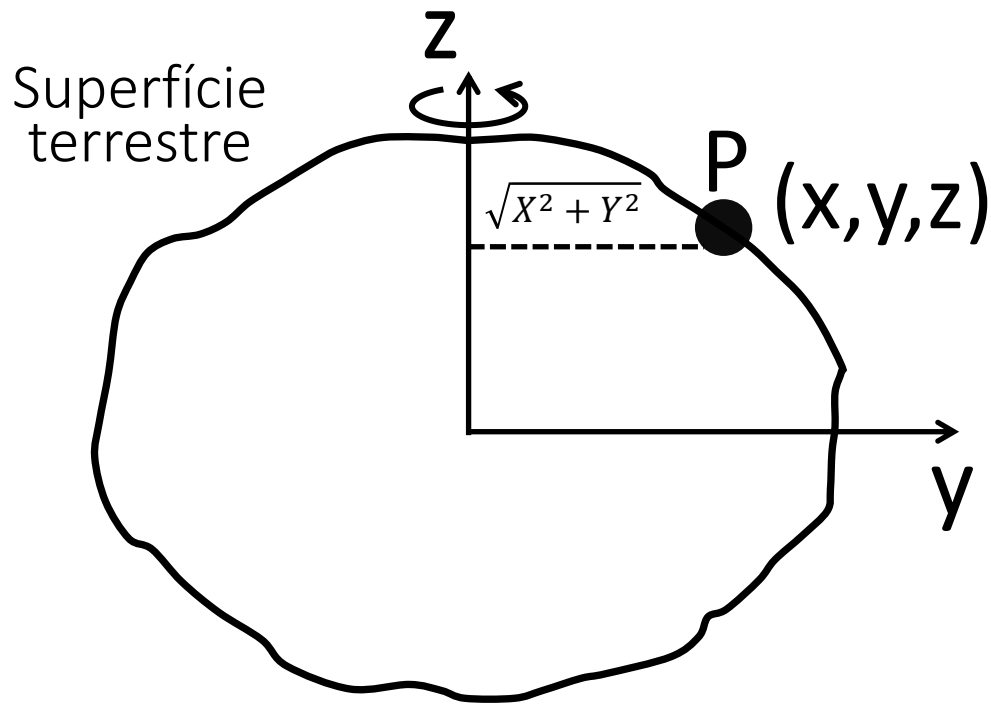
$$W_P = V_P + \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Seja uma massa unitária em repouso na superfície terrestre

Terra real



Podemos começar descrevendo o potencial de gravidade!

O potencial de gravidade é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

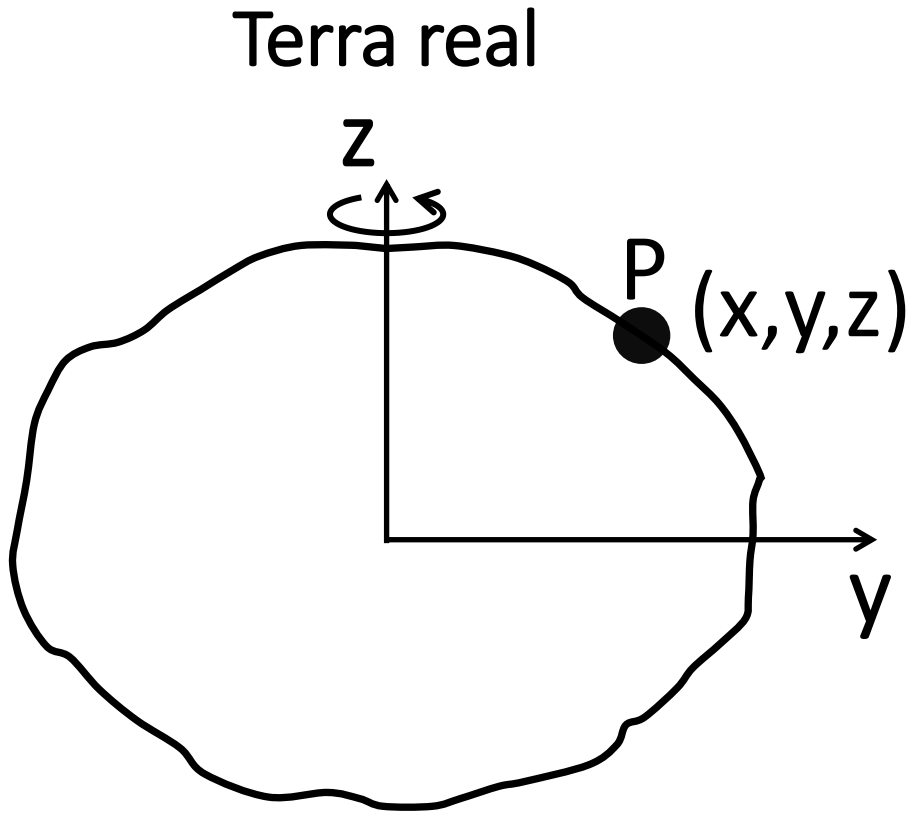
$$W_P = V_P + \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

O potencial de gravidade é a soma entre
duas funções escalares: o **potencial
gravitacional** e o **potencial centrífugo**

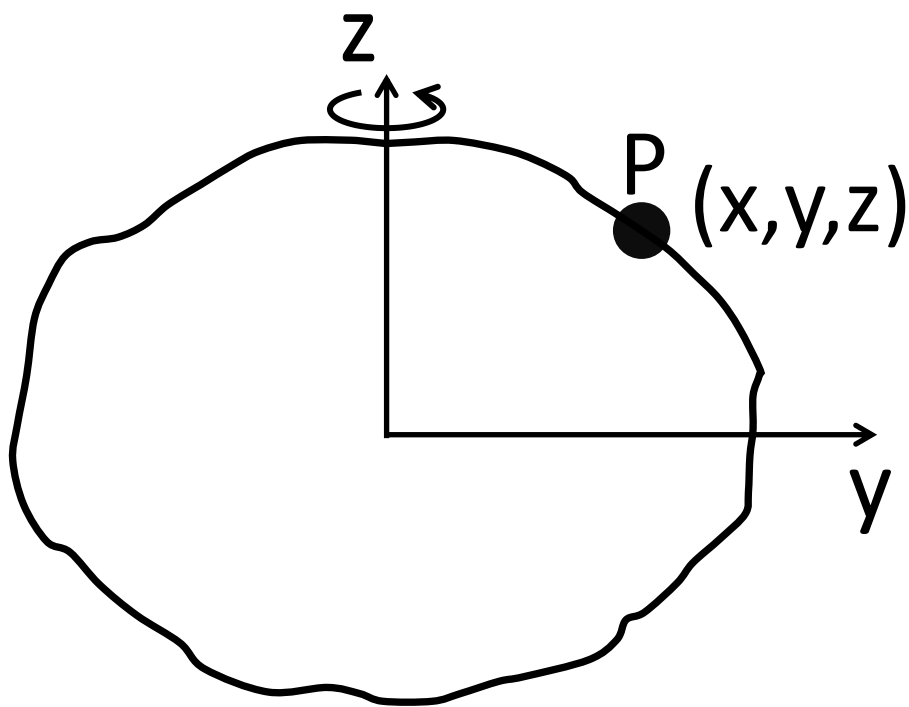


$$W_P = V_P + \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

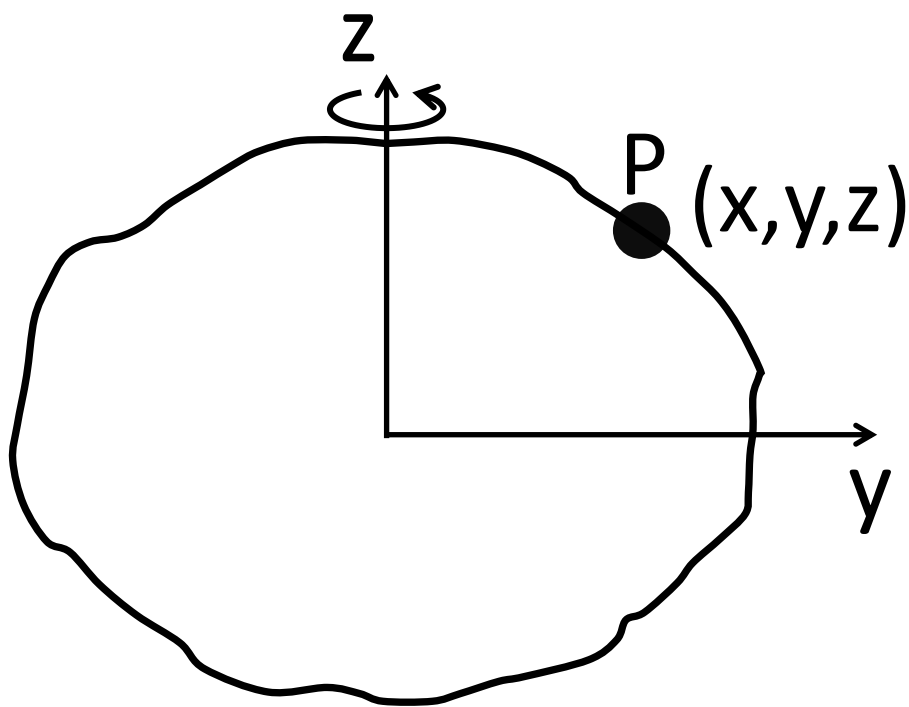
O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$W_P = V_P + \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

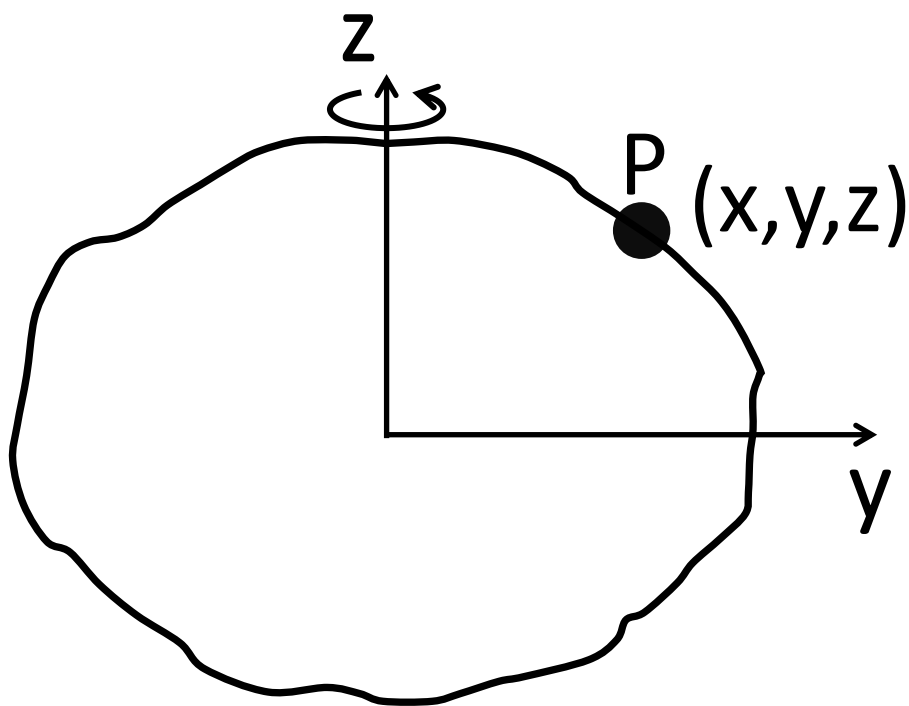
O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla^2 W_P = \nabla^2 V_P + \nabla^2 \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

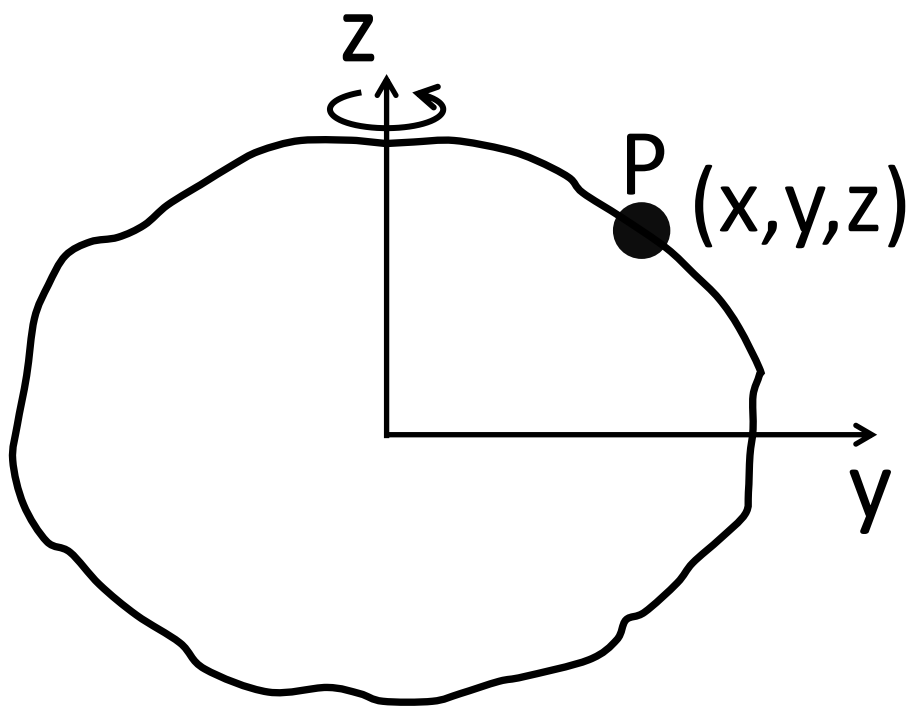
O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla^2 W_P = \nabla^2 V_P + \nabla^2 \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

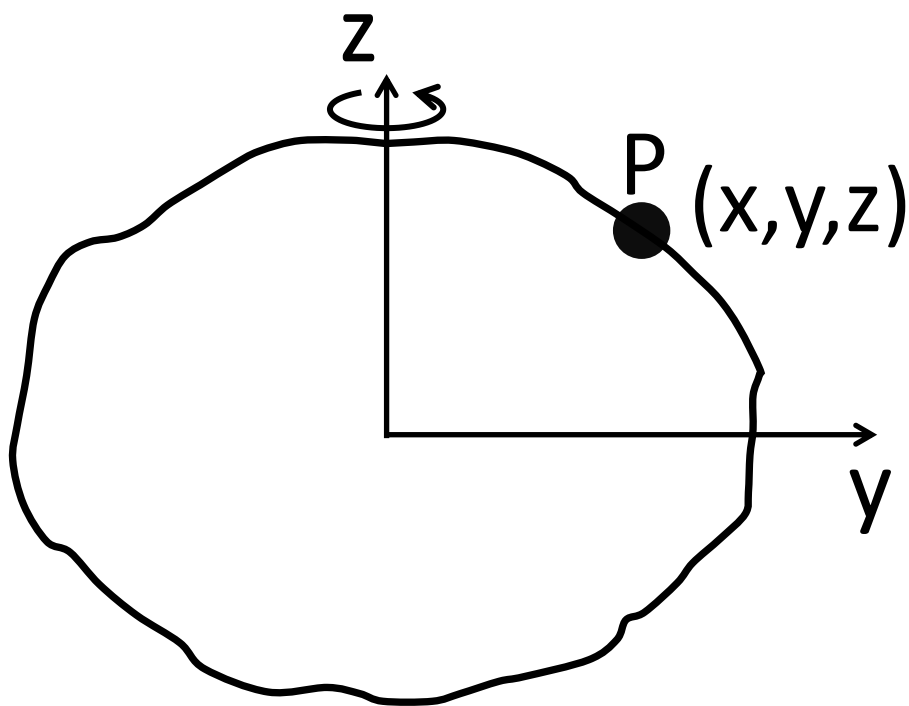
O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla^2 W_P = \overset{=0}{\cancel{\nabla^2 V_P}} + \nabla^2 \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

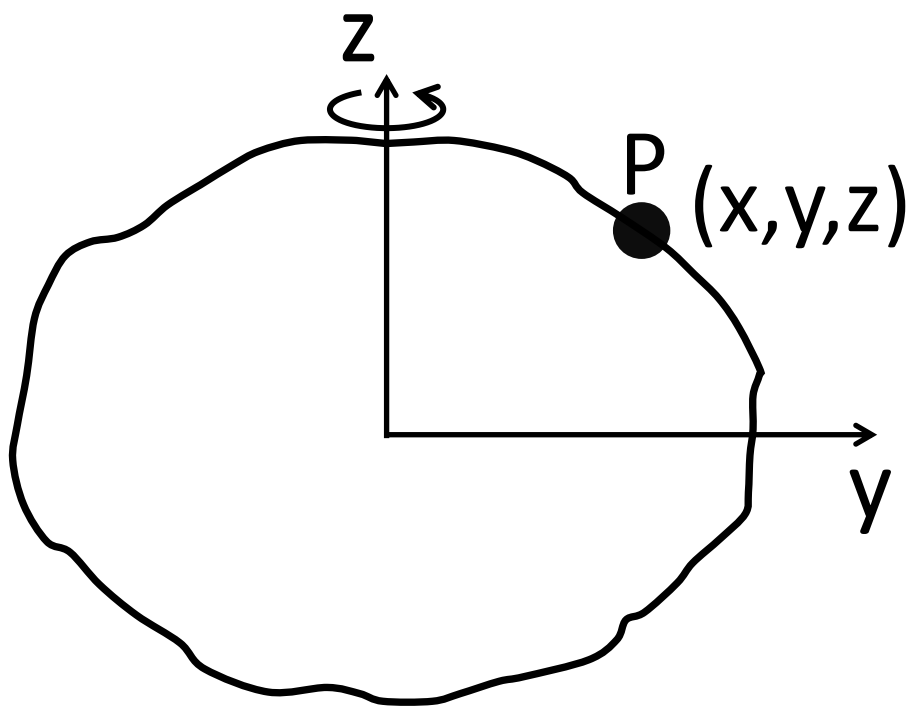
O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla^2 W_P = \nabla^2 V_P + \nabla^2 \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

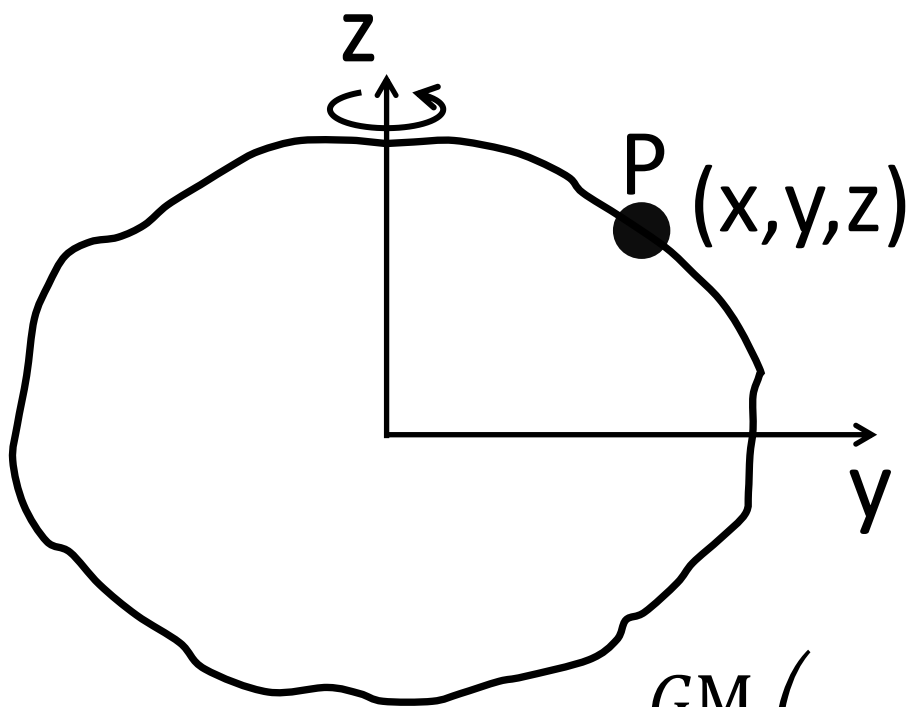
$$\nabla^2 W_P = \nabla^2 V_P + \nabla^2 \Phi_P$$

$$V_P = \kappa_g \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Podemos expandir a **componente gravitacional** em harmônicos esféricos!

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$W_P = V_P + \Phi_P$$

Potencial em termo de **harmônicos esféricos**!

$$V_P = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n [C_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + S_{nm} Q_{nm}(\theta, \lambda)] \right)$$

Raio equatorial

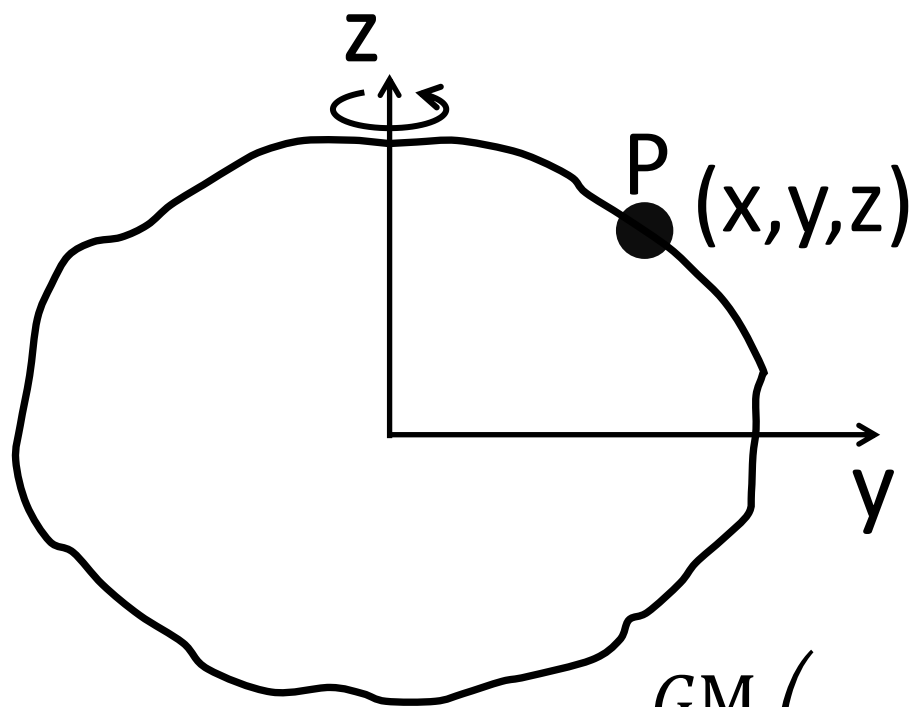
Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes

Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$W_P = V_P + \Phi_P$$

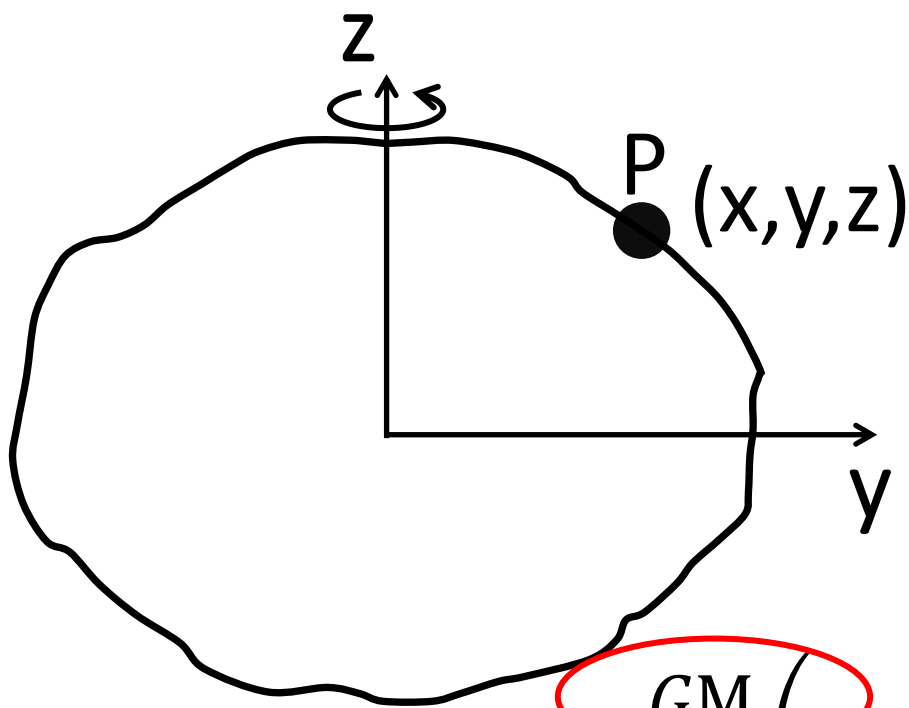
Potencial em termo de **harmônicos esféricos**!



$$V_P = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n [C_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + S_{nm} Q_{nm}(\theta, \lambda)] \right)$$

n e m são o grau e a ordem, respectivamente

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

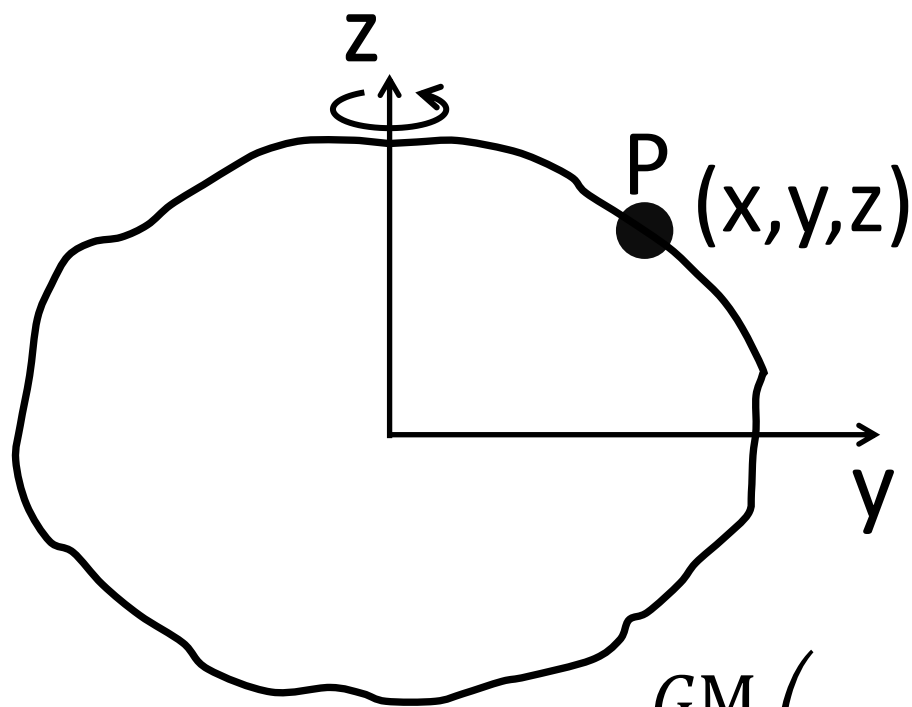
$$W_P = V_P + \Phi_P$$

Potencial em termo de **harmônicos esféricos**!

$$V_P = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n [C_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + S_{nm} Q_{nm}(\theta, \lambda)] \right)$$

Constante gravitacional e a massa da Terra

Se tomarmos o Laplaciano do **potencial de gravidade** em regiões livres de fontes



Podemos começar descrevendo o **potencial de gravidade**!

O **potencial de gravidade** é a soma entre duas funções escalares: o **potencial gravitacional** e o **potencial centrífugo**

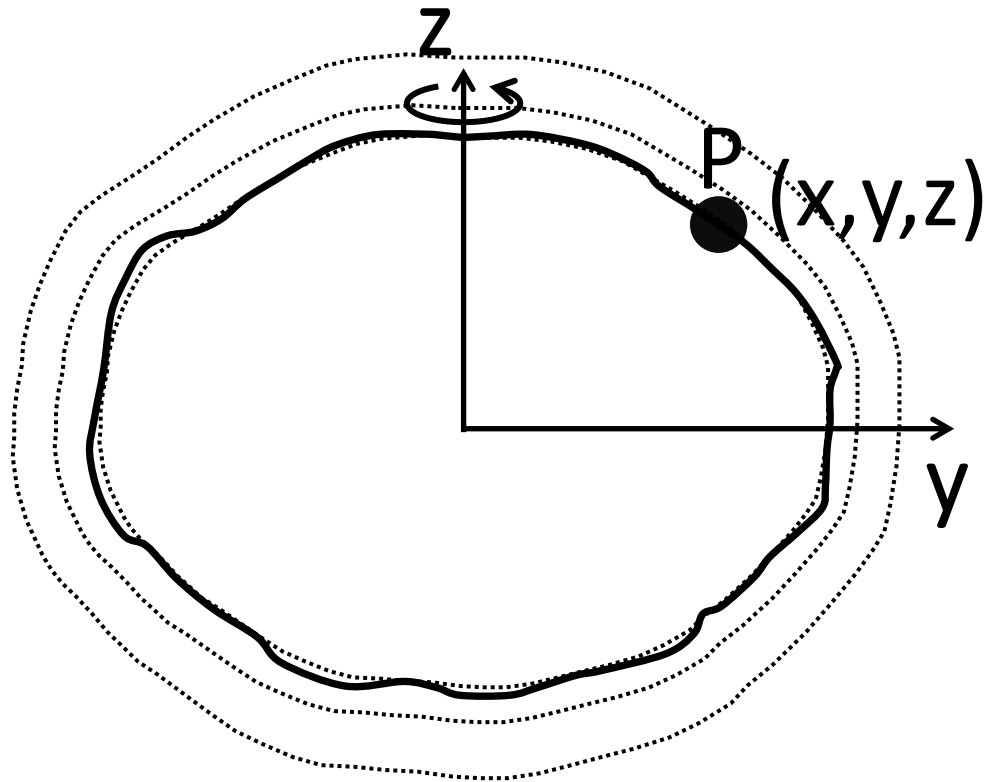
$$W_P = V_P + \Phi_P$$

Potencial em termo de **harmônicos esféricos**!

$$V_P = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n [C_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + S_{nm} Q_{nm}(\theta, \lambda)] \right)$$

Ângulo azimutal e colatitude

Existem superfícies
pelas quais o potencial
é constante

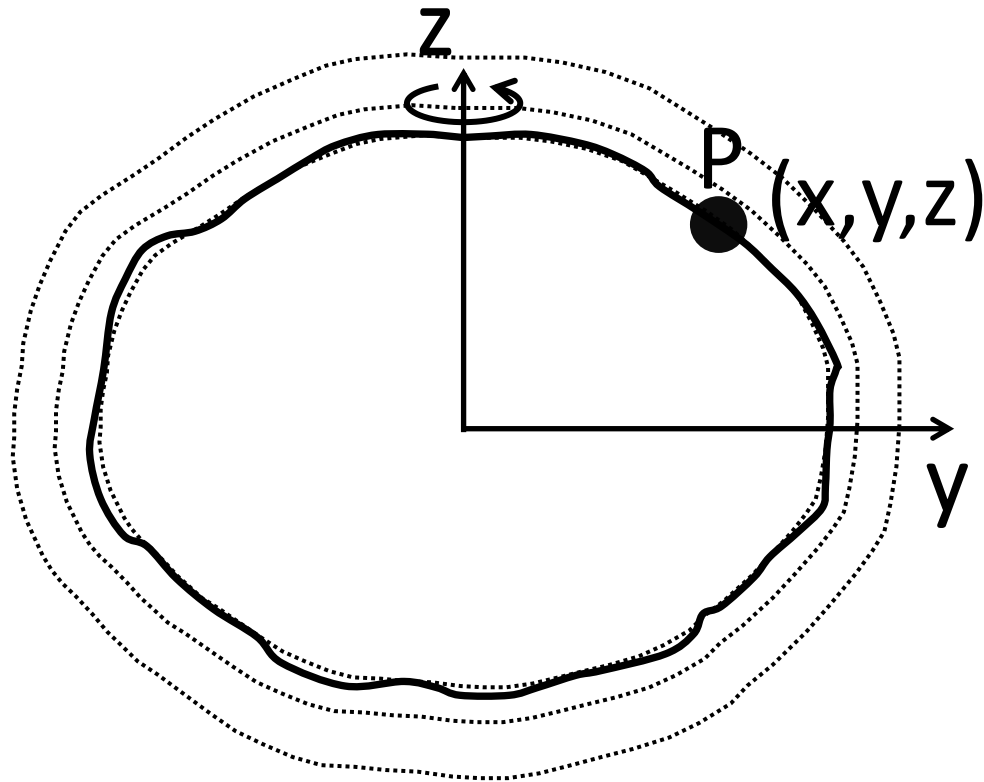


Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

O **potencial de gravidade** é a soma entre
duas funções escalares: o **potencial
gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla W_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

Existem superfícies
pelas quais o potencial
é constante



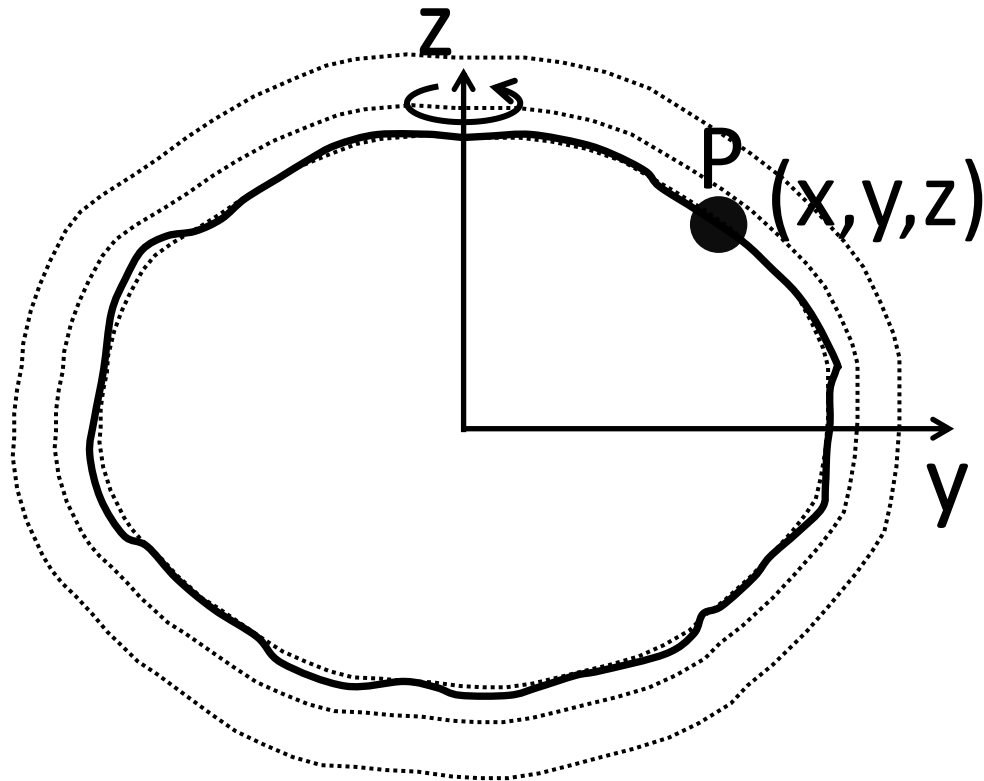
Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

O **potencial de gravidade** é a soma entre
duas funções escalares: o **potencial
gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla W_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

Estas equipotenciais são
chamadas de **geopes**

Existem superfícies
pelas quais o potencial
é constante



Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

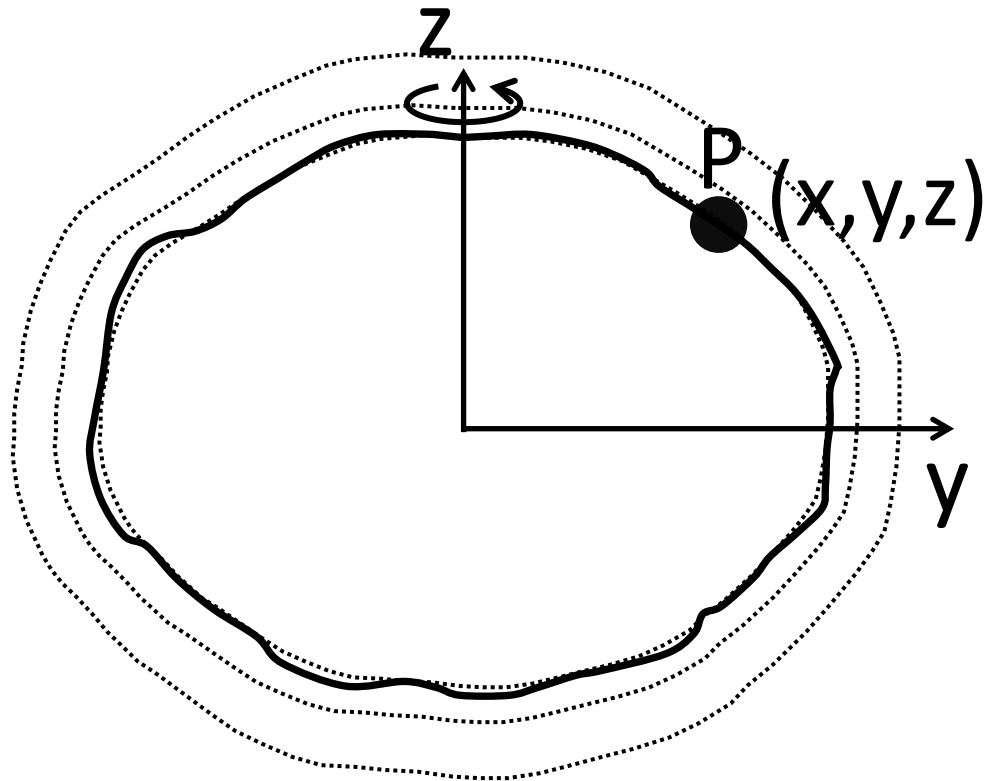
O **potencial de gravidade** é a soma entre
duas funções escalares: o **potencial
gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla W_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

Estas equipotenciais são
chamadas de **geopes**

A geope que coincide com o nível médio
dos mares não perturbados é chamada de
geóide

Existem superfícies
pelas quais o potencial
é constante



Podemos começar descrevendo o
potencial de gravidade!

O **potencial de gravidade** é a soma entre
duas funções escalares: o **potencial
gravitacional** e o **potencial centrífugo**

$$\nabla W_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

O vetor gravidade

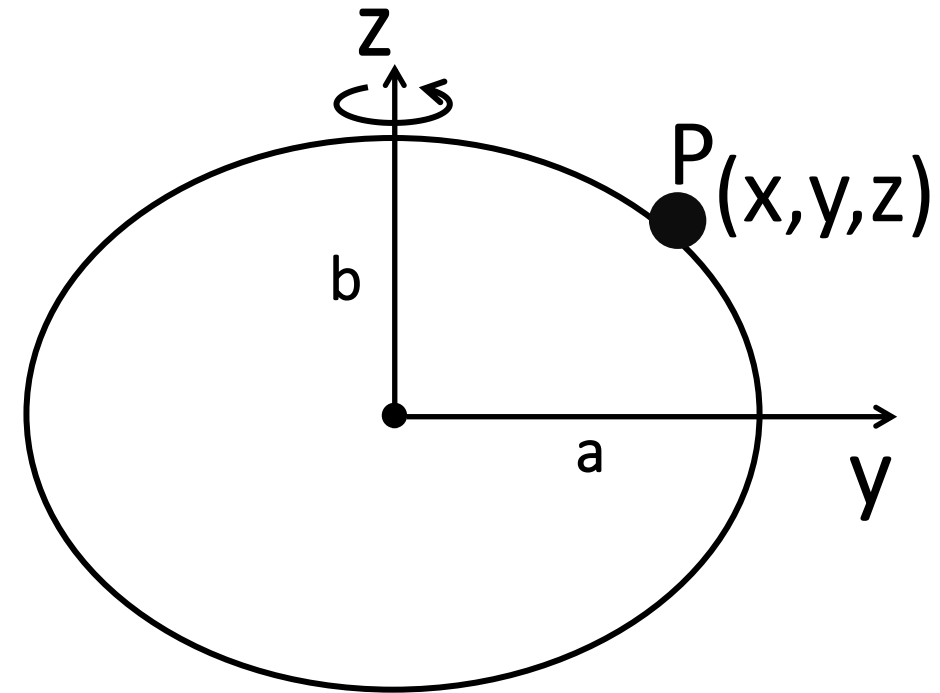
$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

O módulo deste vetor é o que
chamamos de gravidade!

Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

Terra Normal



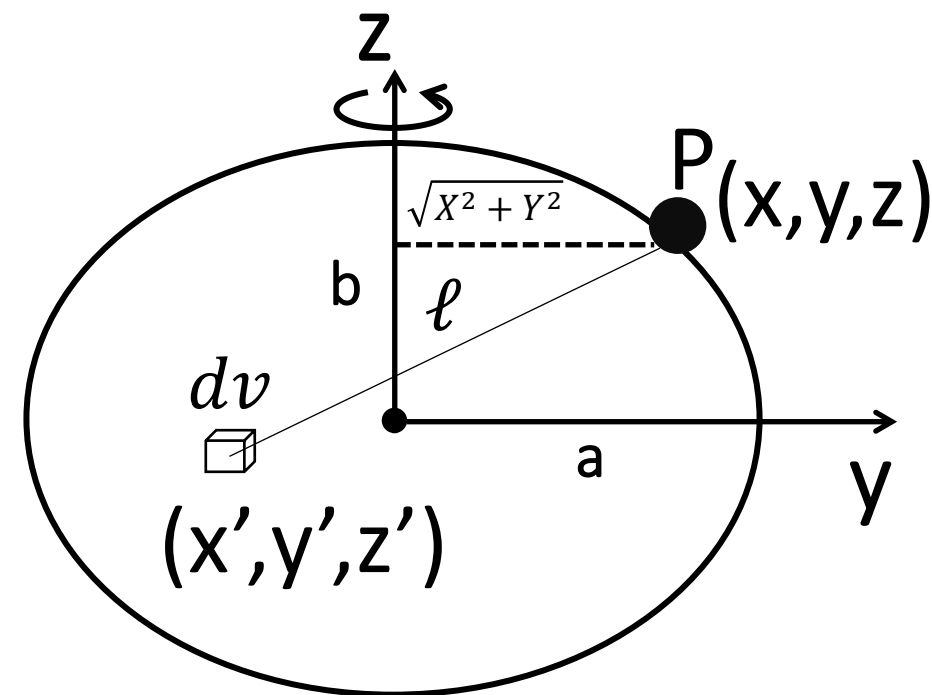
Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\tilde{W}_P = U_P + \Phi_P$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv$$

Terra Normal



Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

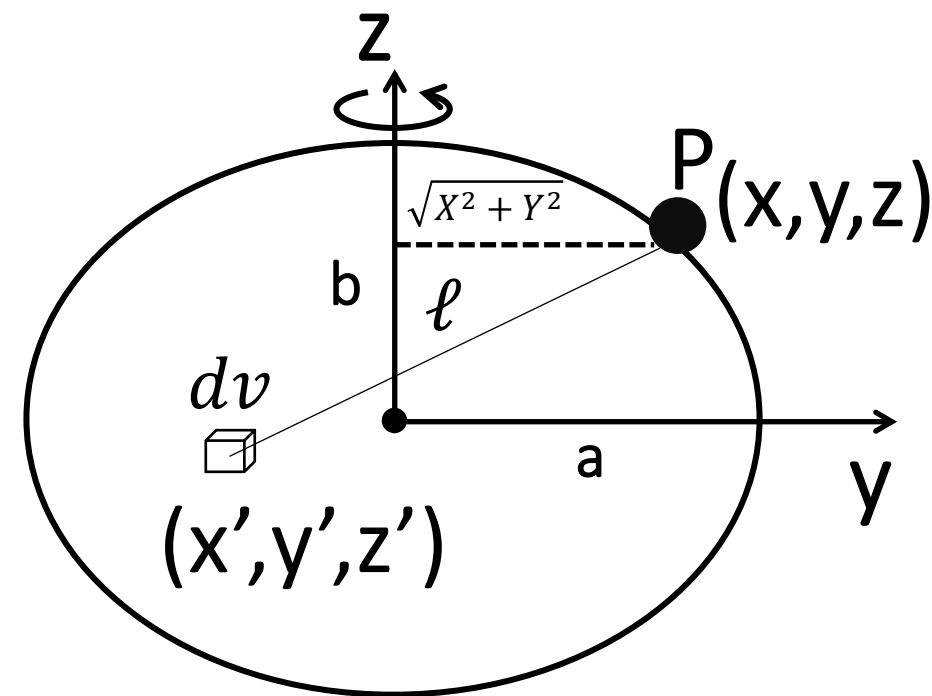
- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\tilde{W}_P = U_P + \Phi_P$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Terra Normal



Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

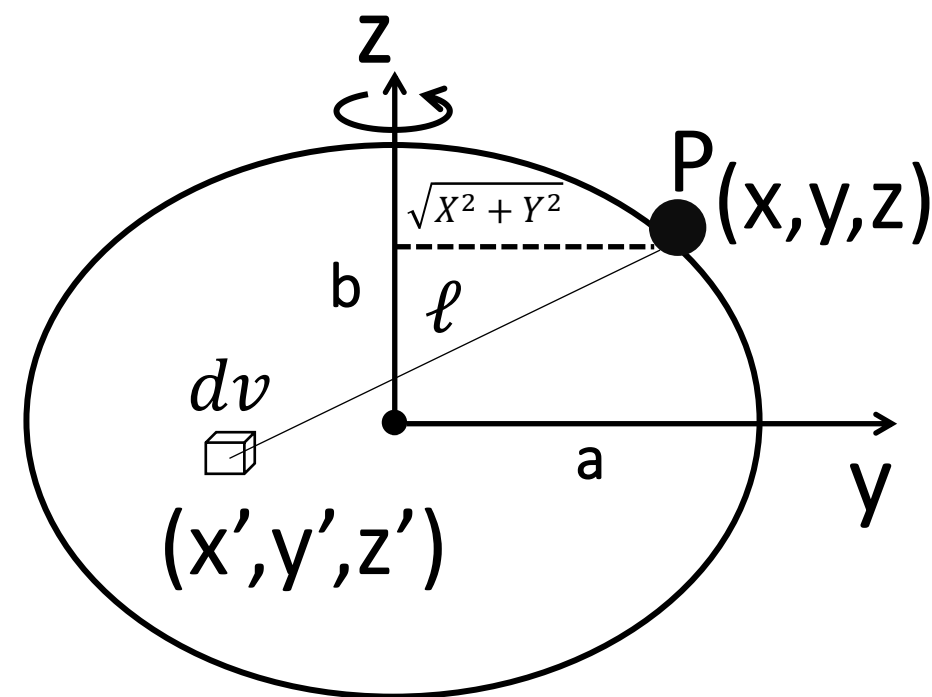
- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\widetilde{\nabla W}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Terra Normal



Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

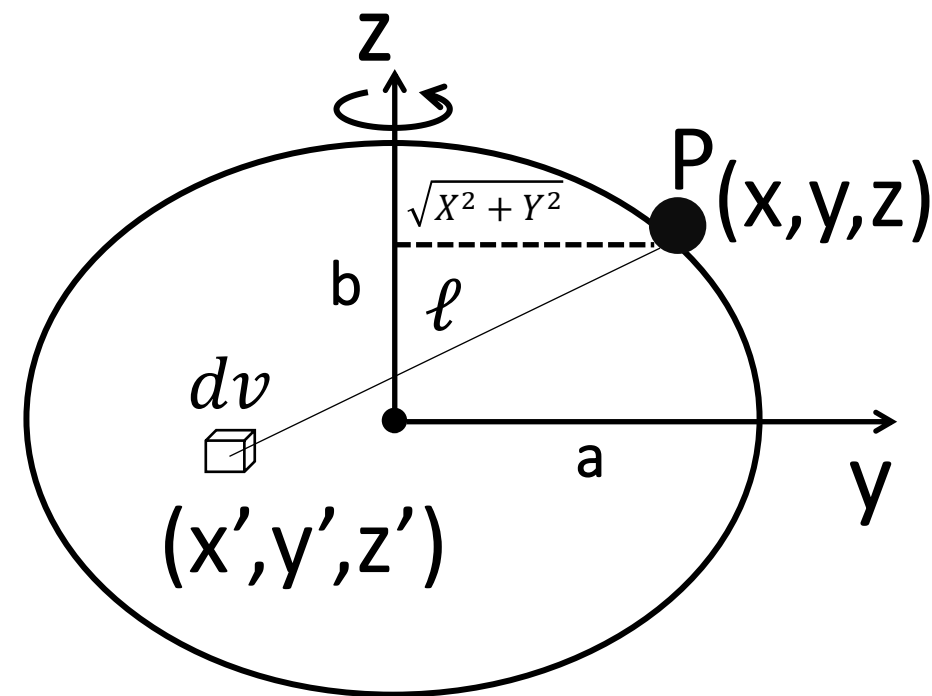
- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\mathbf{Y}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P \quad \text{Vetor gravidade normal}$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Terra Normal



Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

O gravidade normal, que é o módulo do vetor gravidade normal, pode ser calculado pela fórmula Somigliana de 1929 (calculado sobre a superfície do elipsoide)

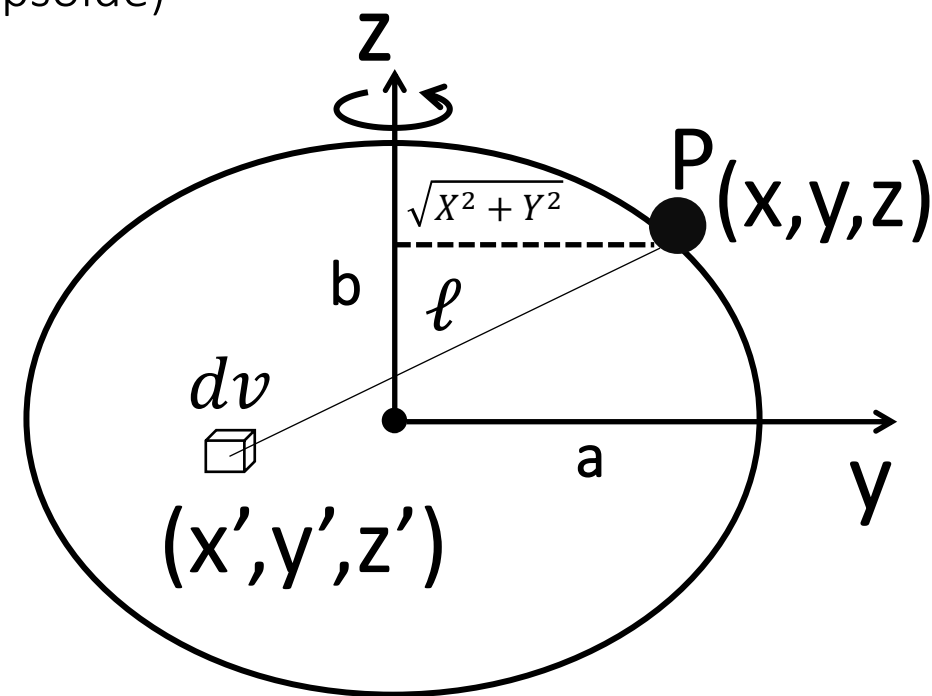
Terra Normal

- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\mathbf{Y}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P \quad \text{Vetor gravidade normal}$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$



Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

O gravidade normal, que é o módulo do vetor gravidade normal, pode ser calculado pela fórmula Somigliana de 1929 (calculado sobre a superfície do elipsoide)

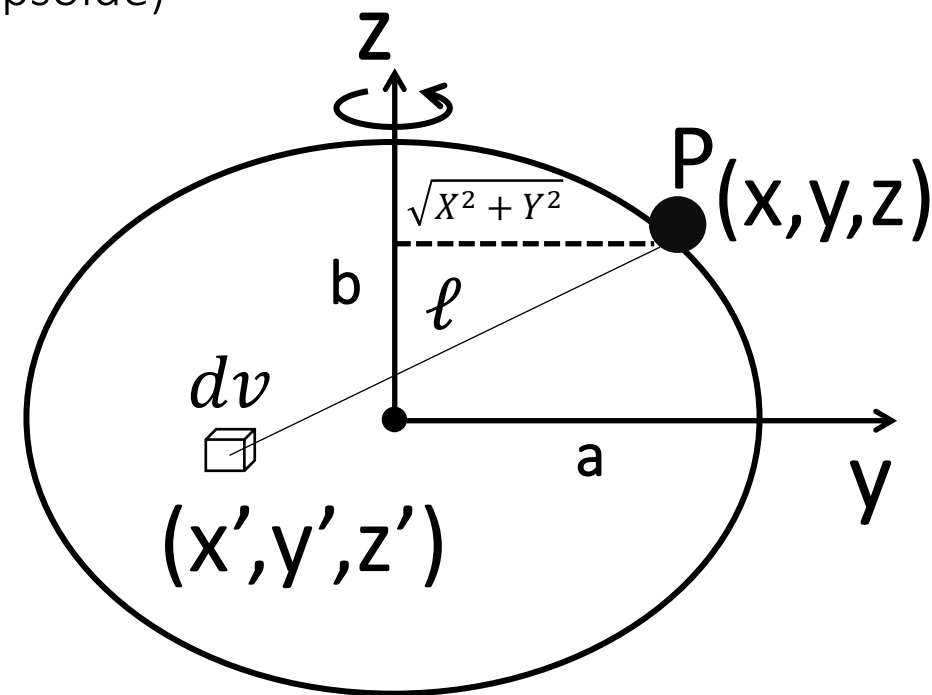
Terra Normal

- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\mathbf{\gamma}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P \quad \text{Vetor gravidade normal}$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$



$$\gamma = \frac{a \gamma_a \cos^2 \varphi + b \gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Somigliana de 1929

Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

O gravidade normal, que é o módulo do vetor gravidade normal, pode ser calculado pela fórmula Somigliana de 1929 (calculado sobre a superfície do elipsoide)

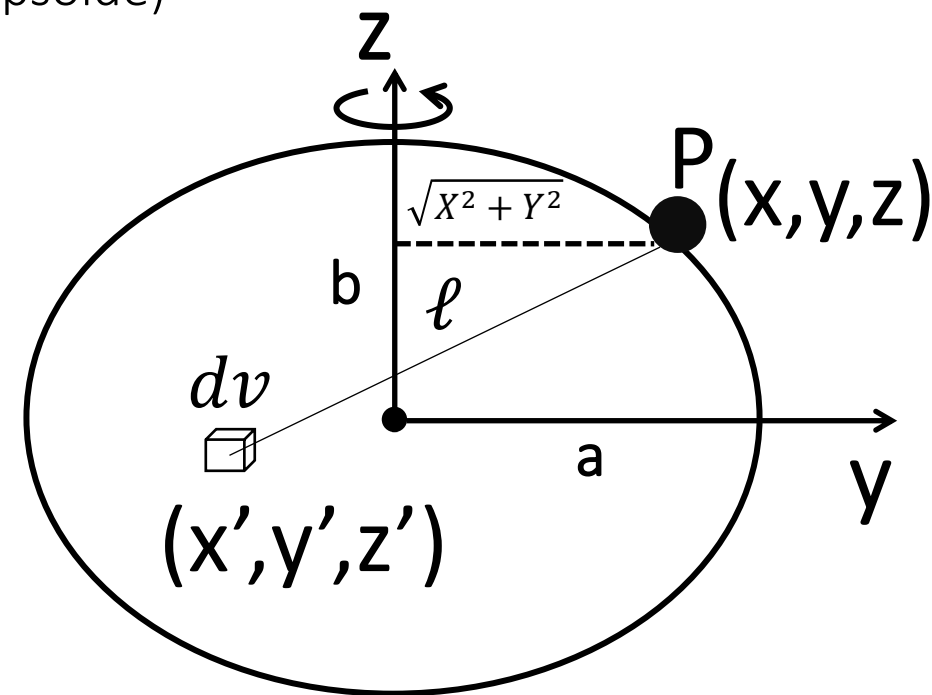
Terra Normal

- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\mathbf{Y}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P \quad \text{Vetor gravidade normal}$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$



Contudo, existe uma solução analítica para o cálculo da gravidade normal acima ou abaixo da superfície do elipsoide!



Li and Gotze (2001)

World Geodetic System de 1984
(WGS 84)

Sistema de Referência Geocêntrico
das Américas (SIRGAS 2000)

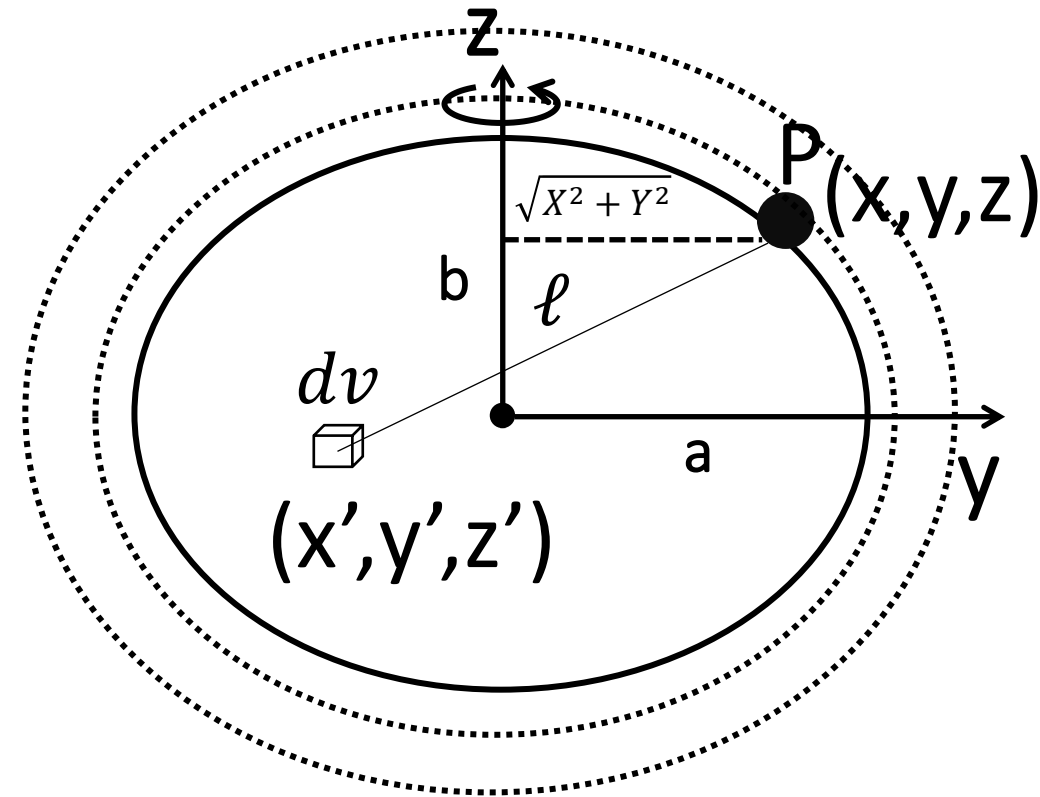
Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\mathbf{Y}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P \quad \text{Vetor gravidade normal}$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$



Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

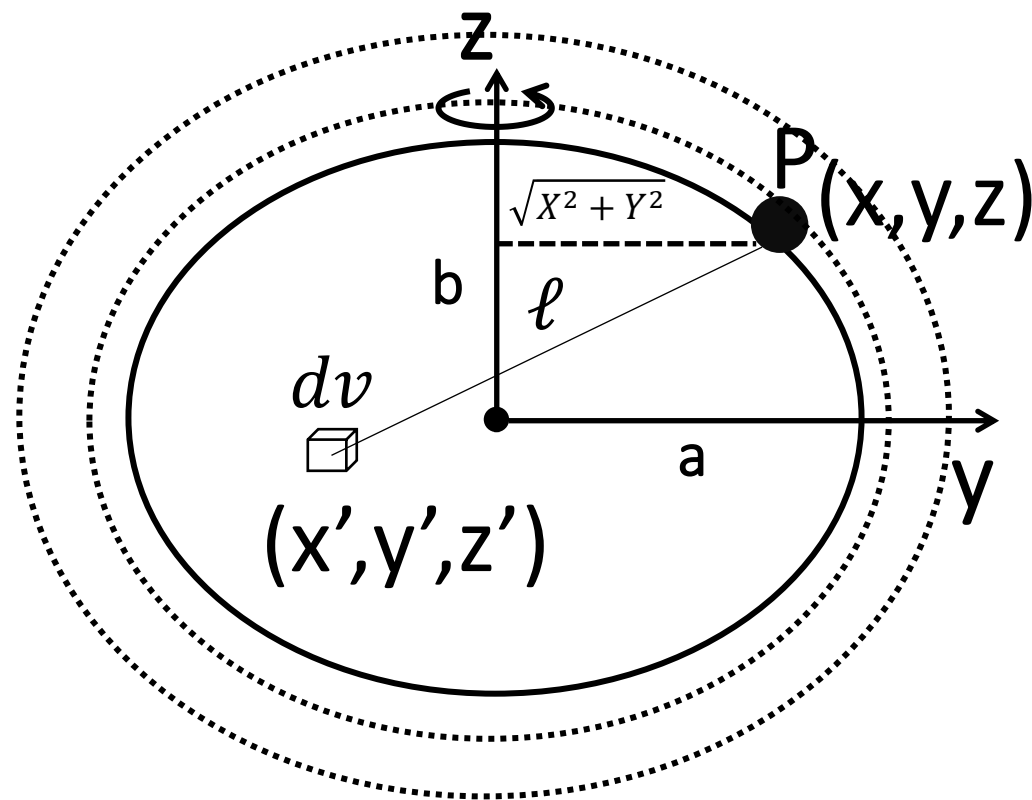
- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\mathbf{Y}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P \quad \text{Vetor gravidade normal}$$

$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Analogamente a Terra real, a terra normal possui equipotenciais



Podemos aproximar a terra por um elipsoide de revolução que possui:

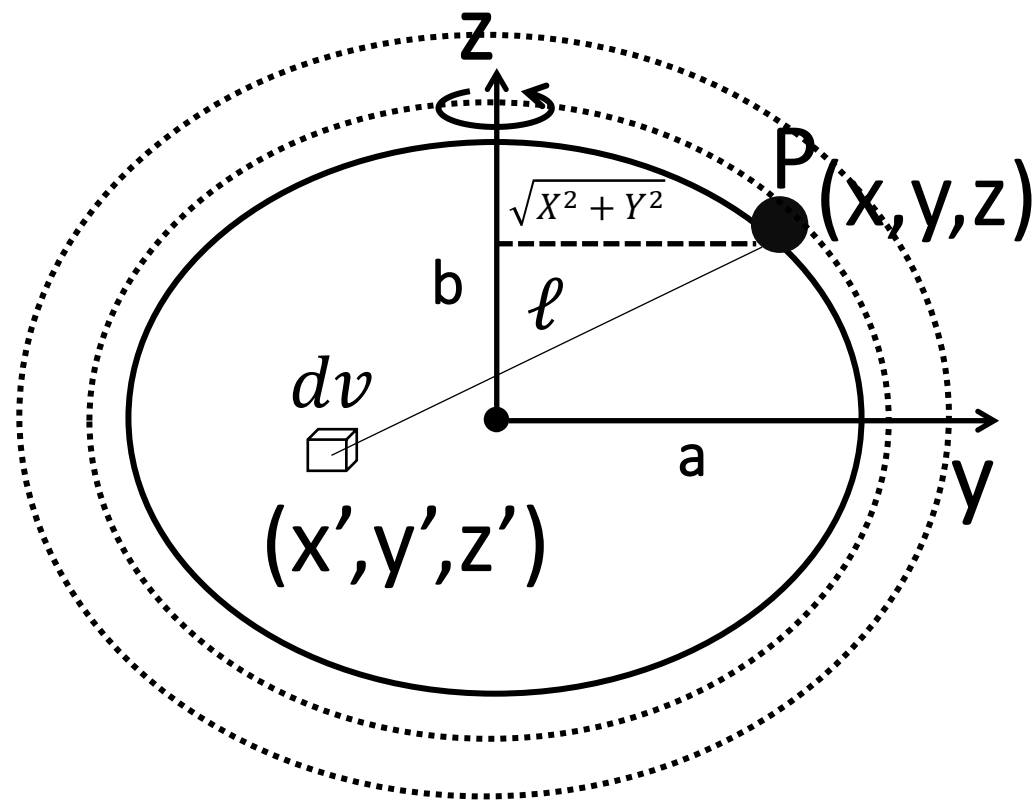
- Origem no centro de massa da terra;
- O semieixo menor b coincide com o eixo de rotação da terra;
- A mesma massa da terra;
- Mesma velocidade de rotação.

$$\mathbf{Y}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P \quad \text{Vetor gravidade normal}$$

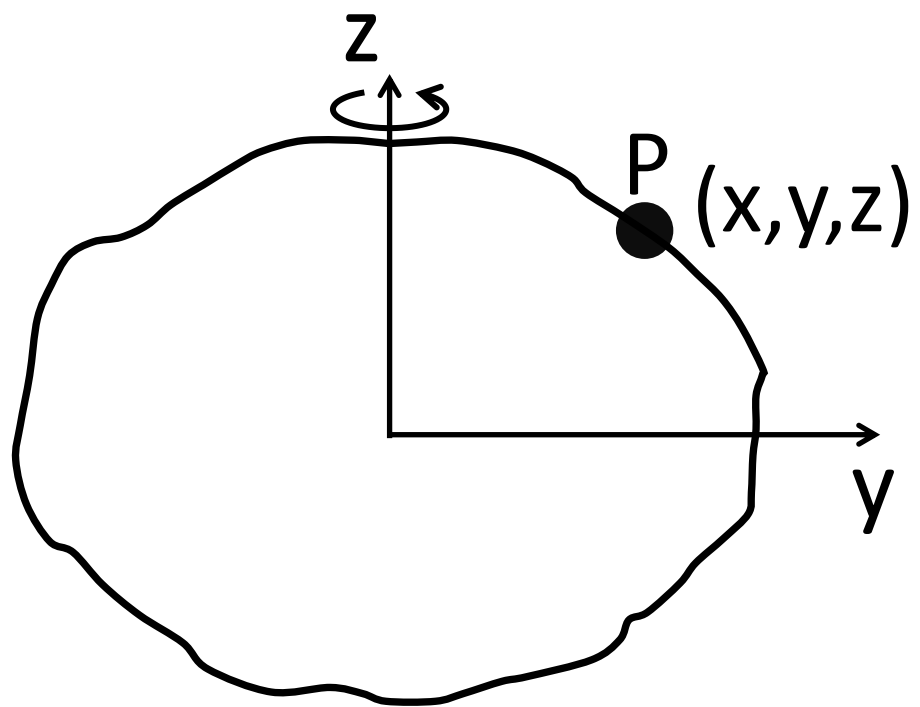
$$U_P = \kappa_g \iiint \frac{\tilde{\rho}}{\ell} dv \quad \Phi_P = \frac{10^5}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$\ell = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

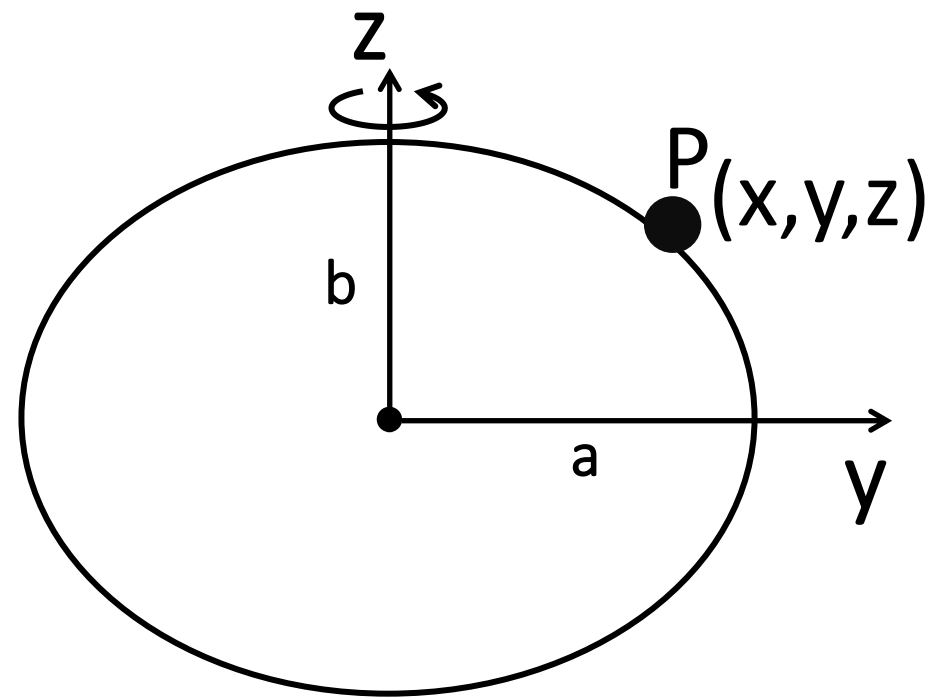
Analogamente a Terra real, a terra normal possui equipotenciais



As equipotenciais são chamadas **esferopes**



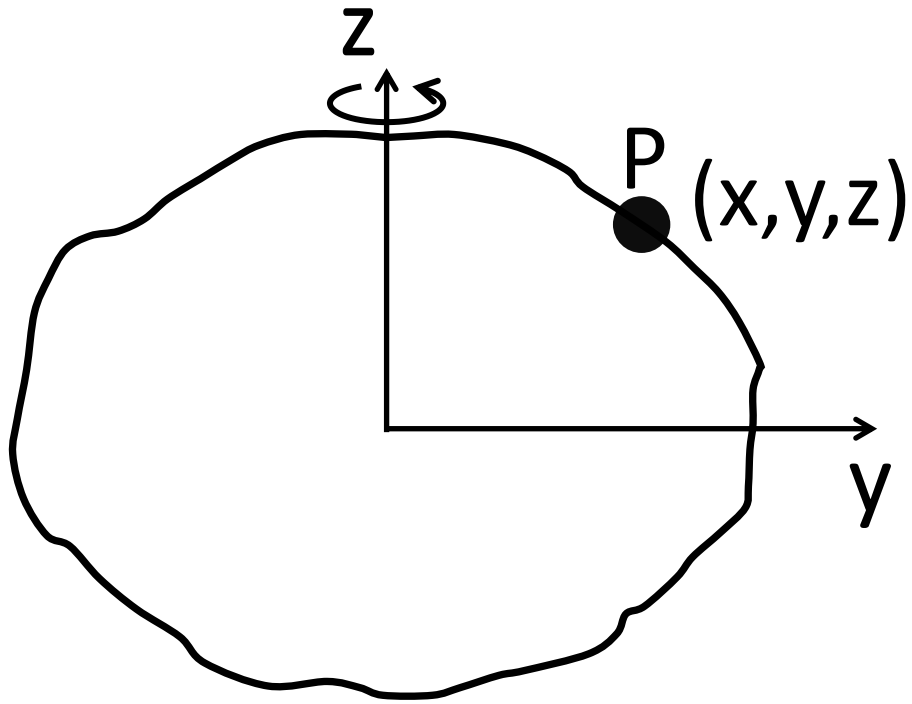
Terra real



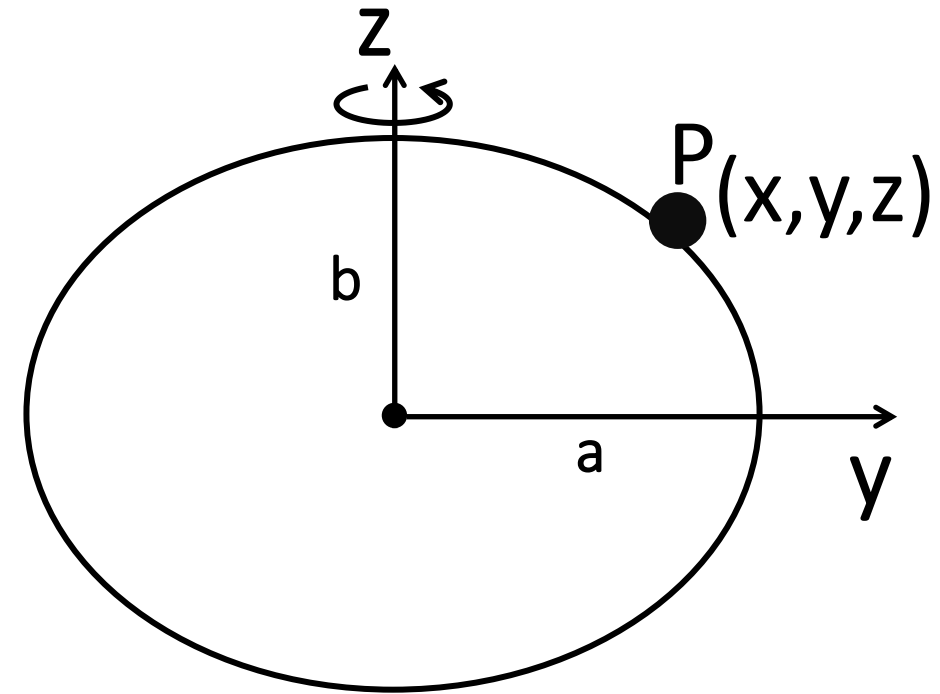
Terra Normal

Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$



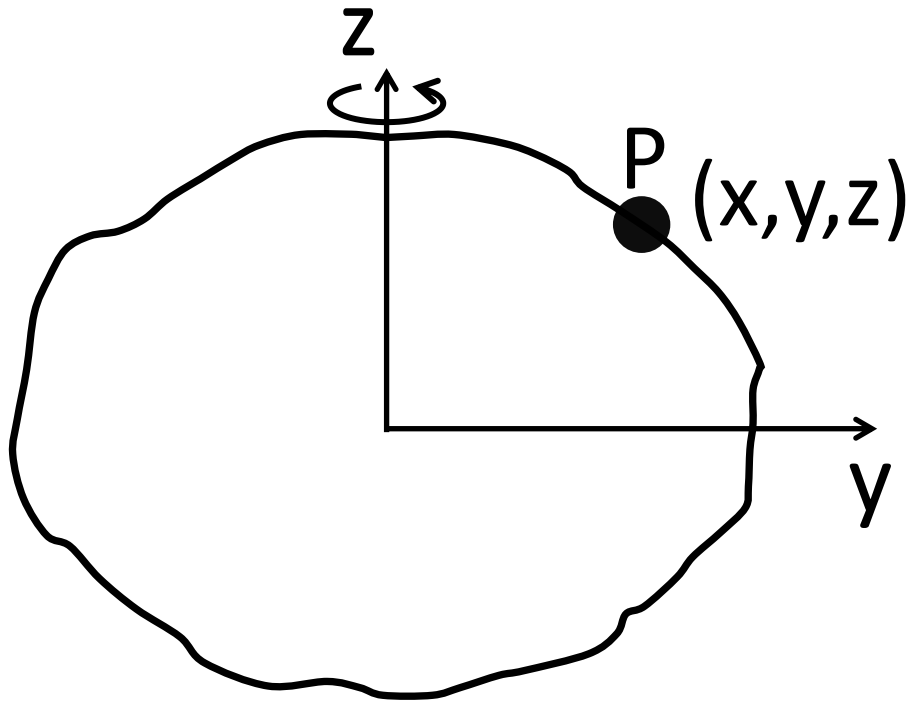
Terra real



Terra Normal

Vetor
gravidade

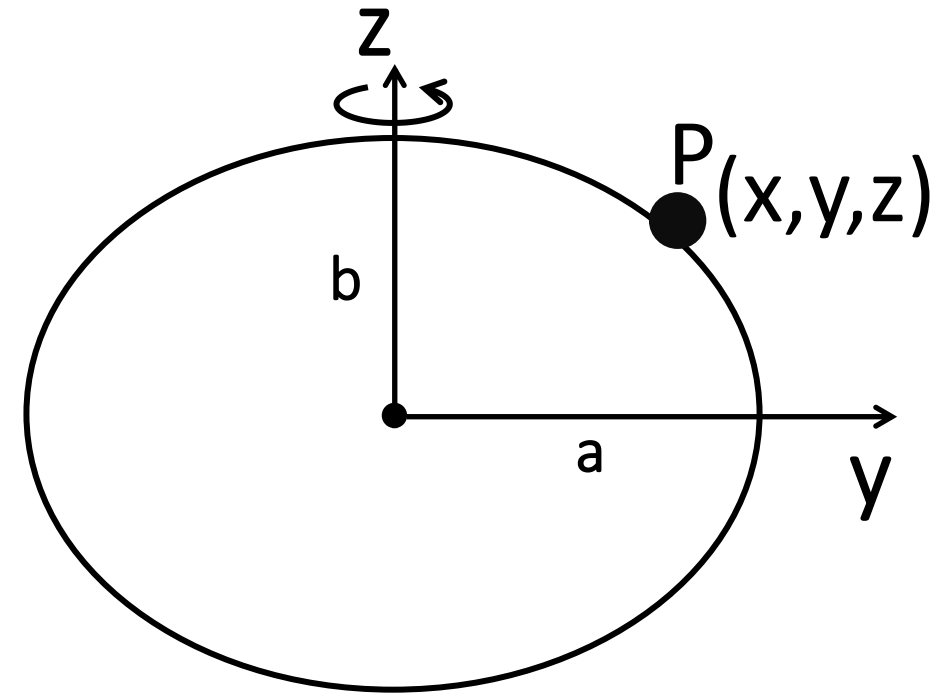
$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$



Terra real

Vetor gravidade
normal

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P$$

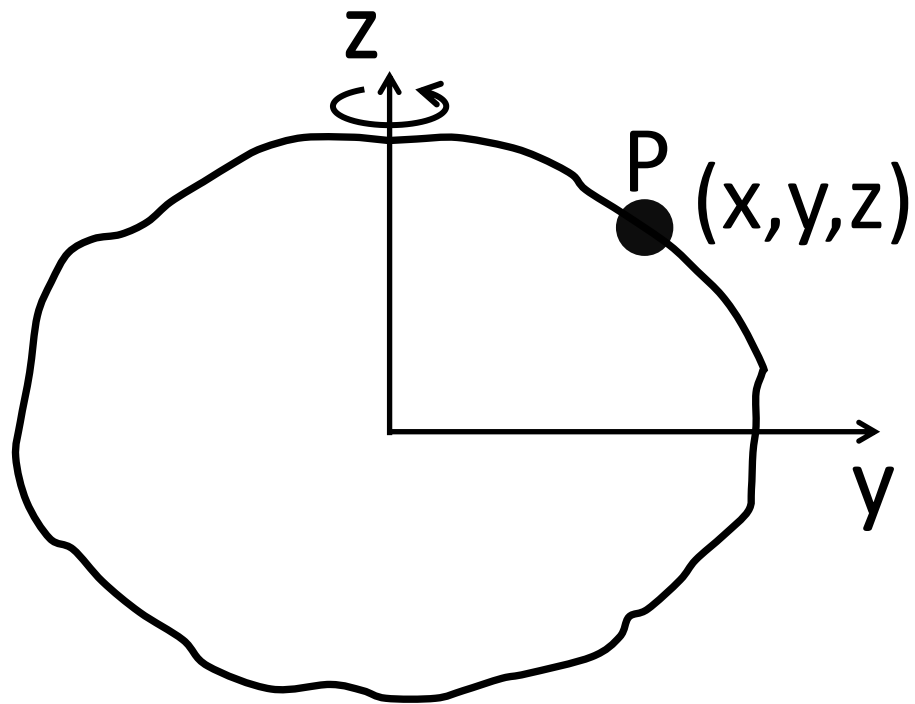


Terra Normal

Vetor gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

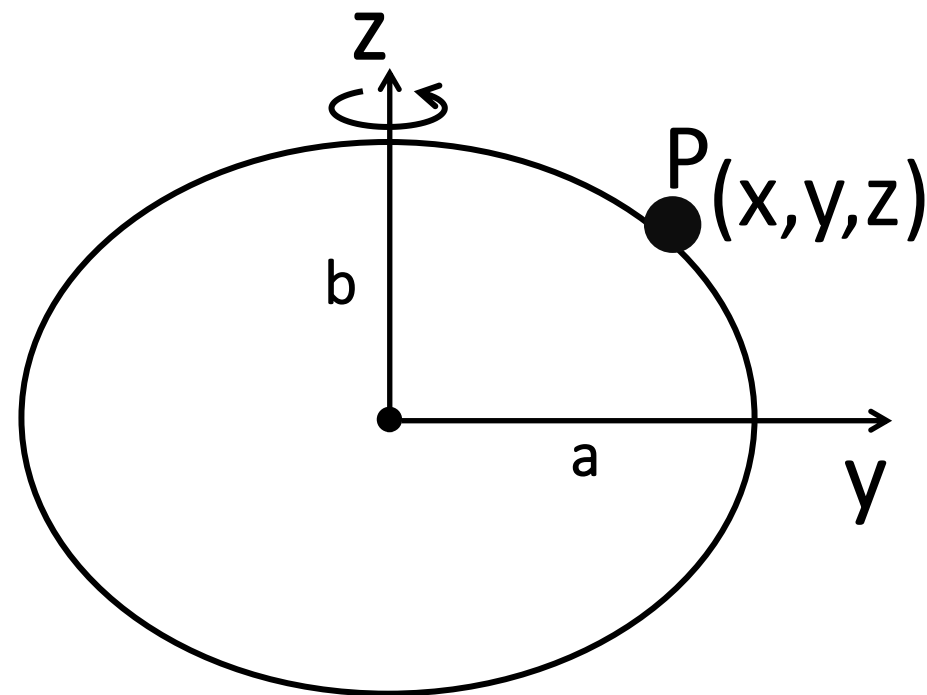
A velocidade de rotação é a mesma!



Terra real

Vetor gravidade normal

$$\mathbf{\gamma}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P$$



Terra Normal

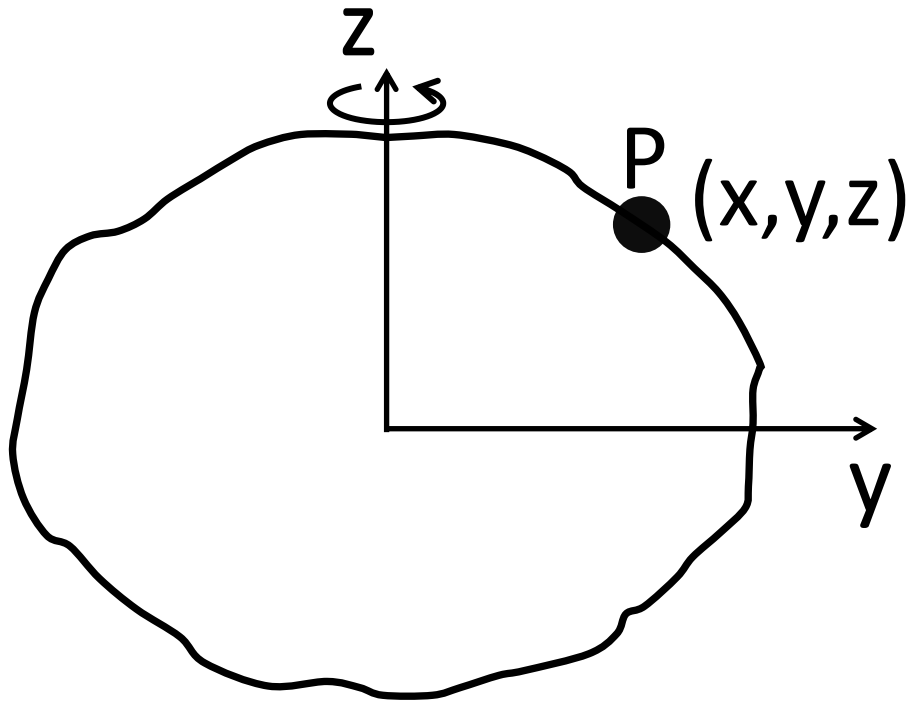
Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$

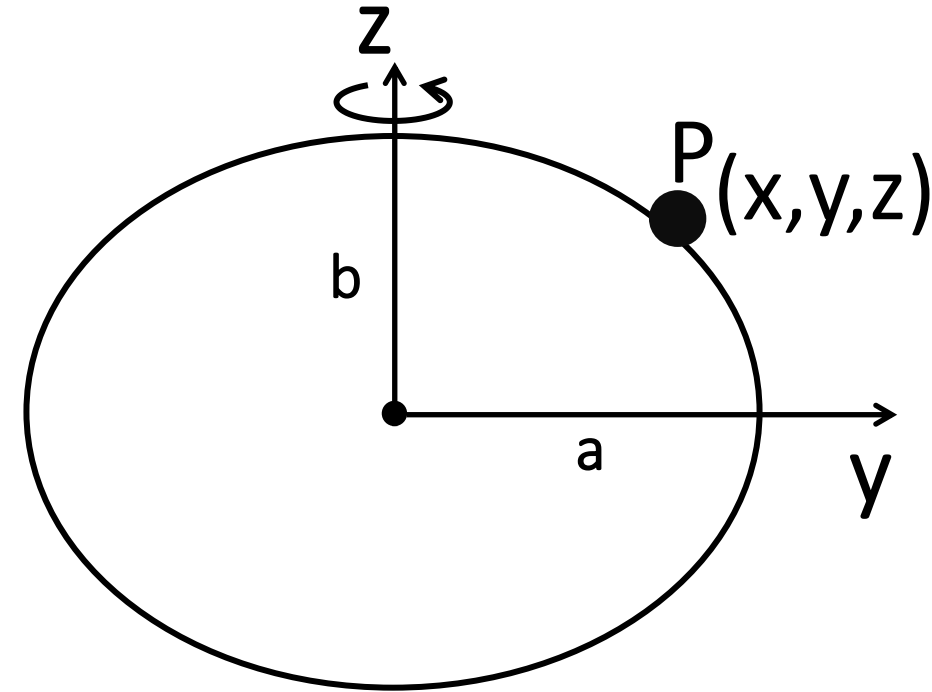
Caso a gravidade e a gravidade
normal sejam calculadas no
mesmo ponto P!

Vetor gravidade
normal

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$



Terra real



Terra Normal

Vetor
gravidade

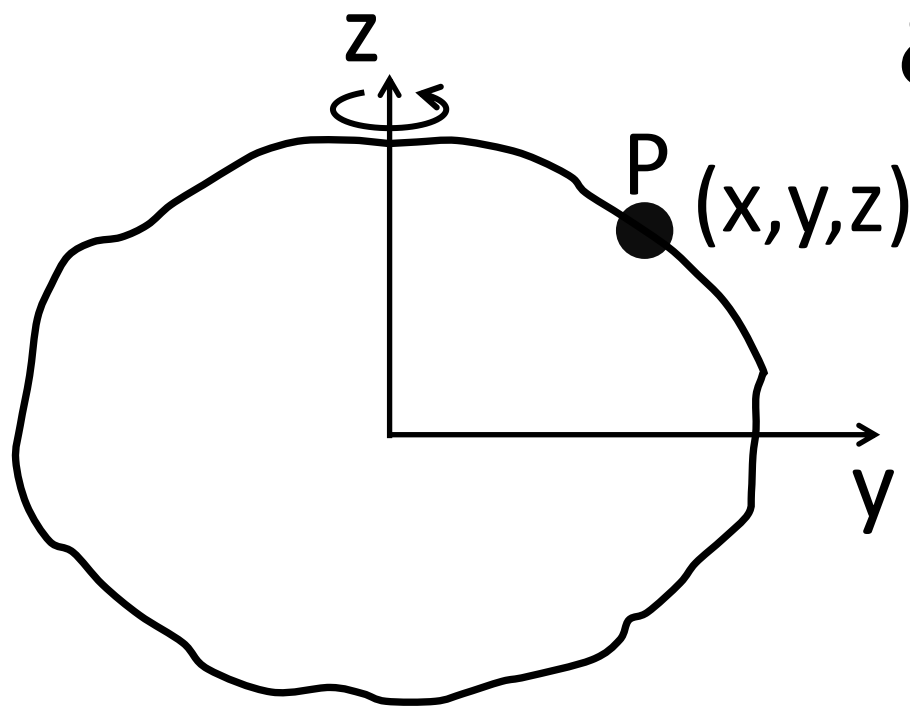
$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$

Vetor distúrbio
de gravidade

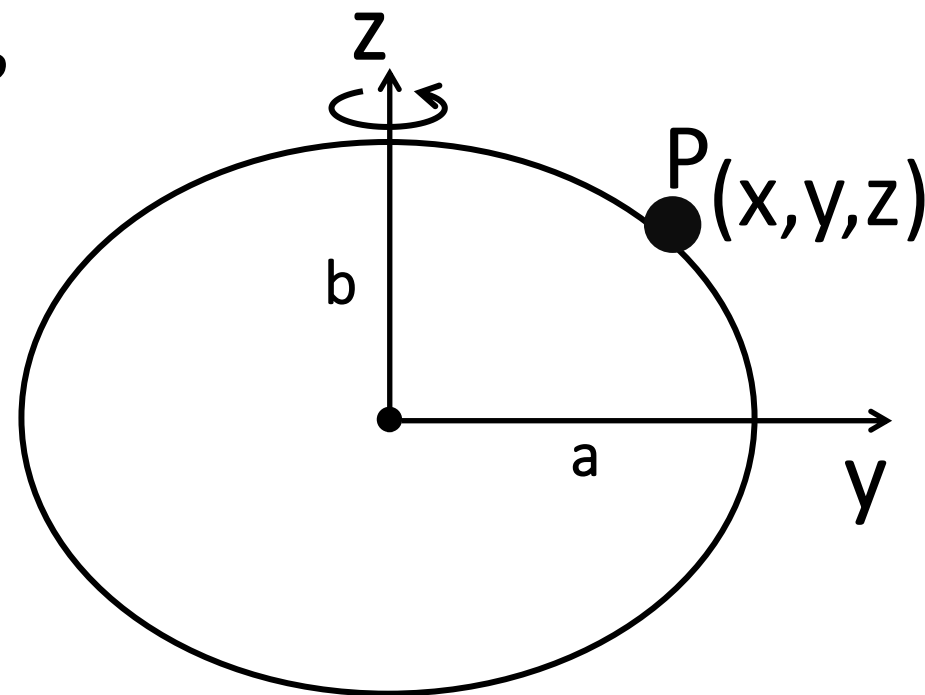
$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Vetor gravidade
normal

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$



Terra real



Terra Normal

Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$

Vetor distúrbio
de gravidade

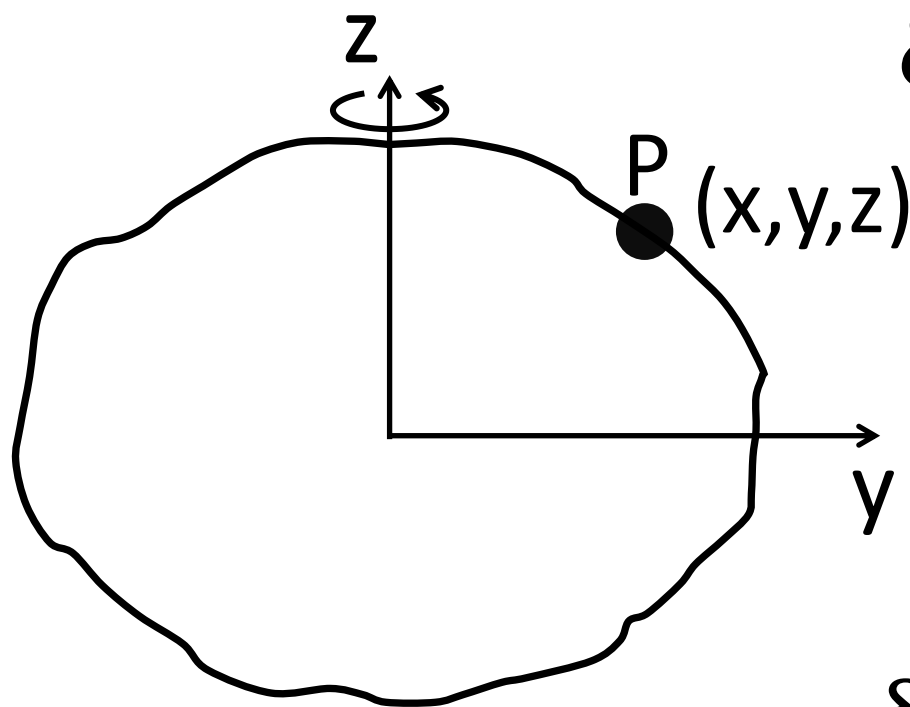
$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Distúrbio de
gravidade

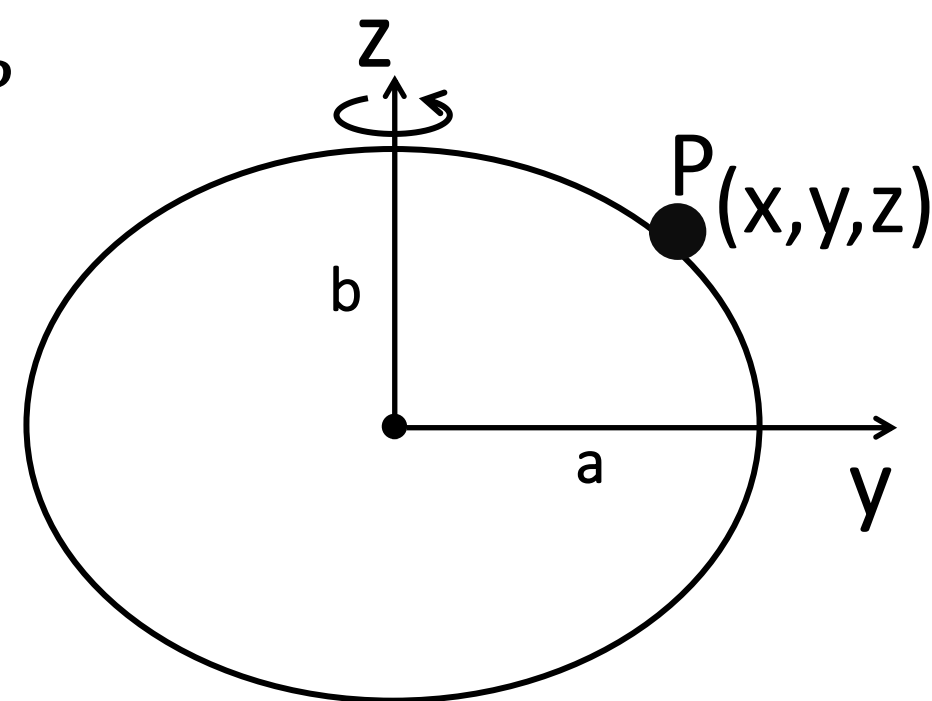
$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Vetor gravidade
normal

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$



Terra real



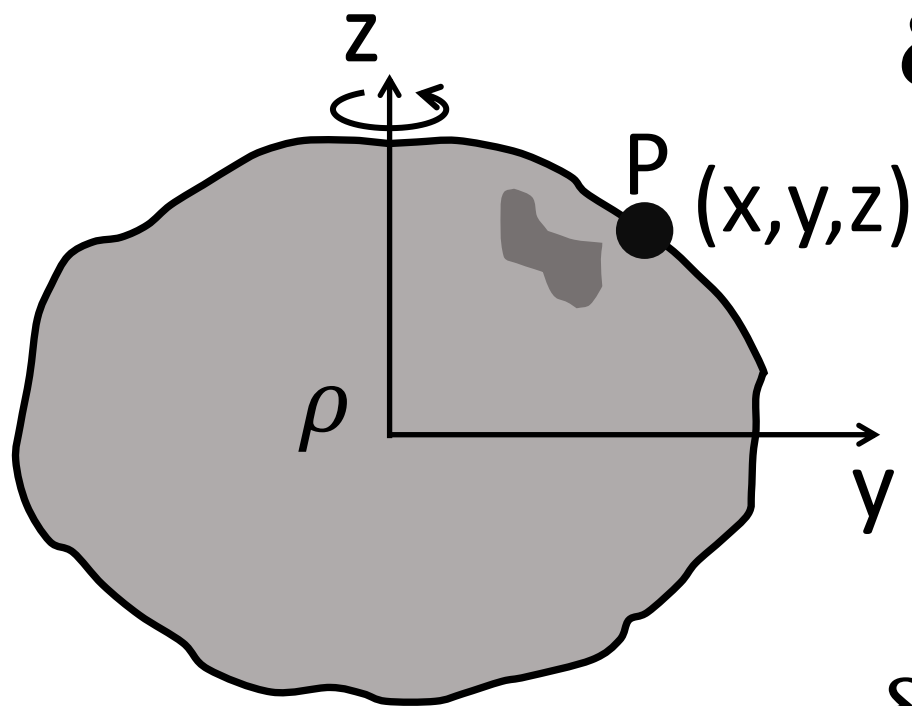
Terra Normal

Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$

Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$



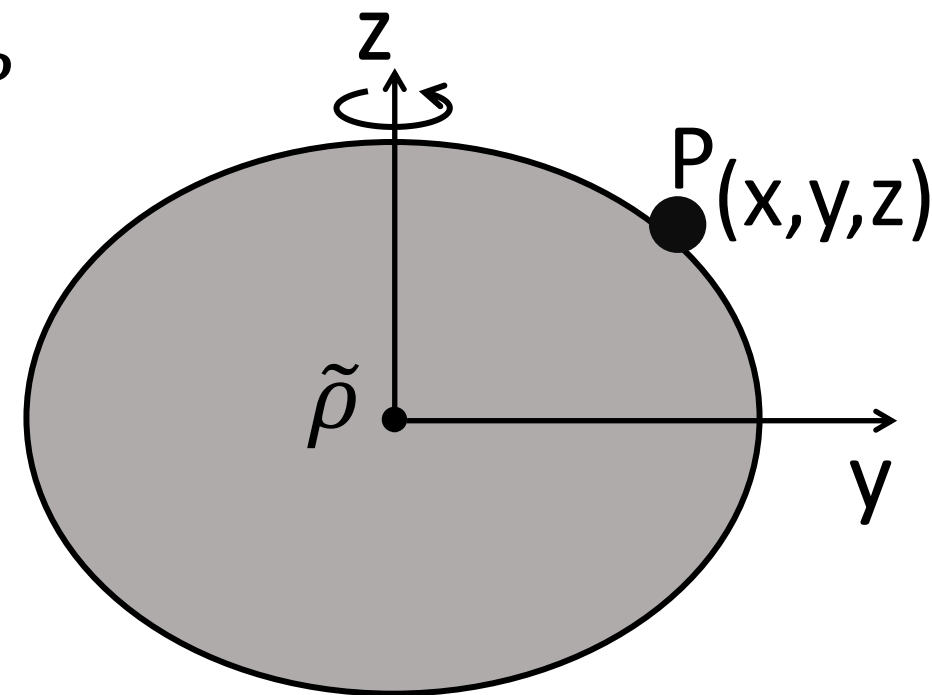
Terra real

Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Vetor gravidade
normal

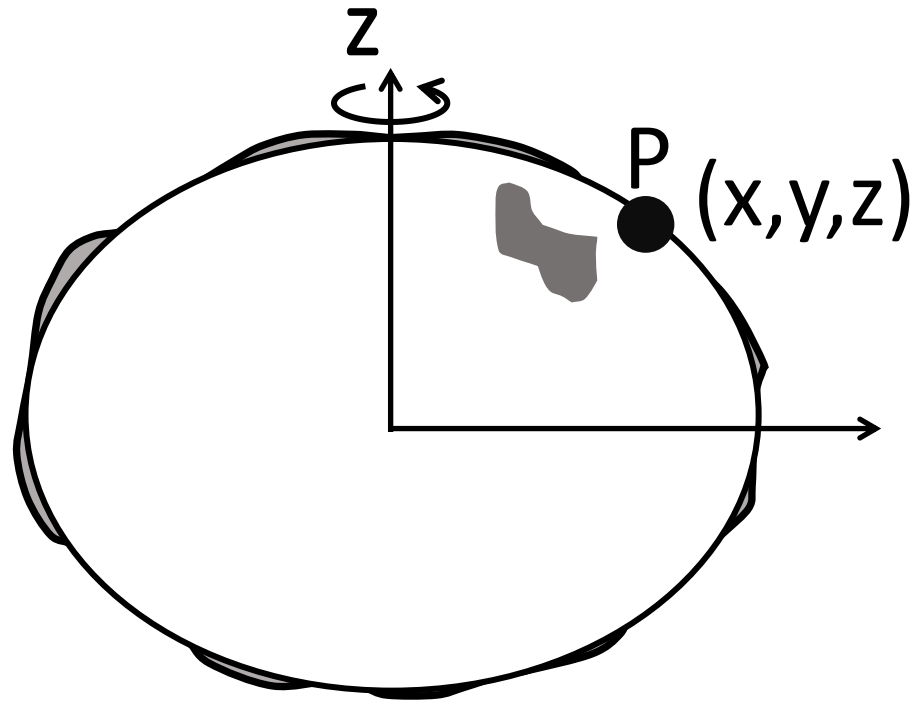
$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$



Terra Normal

Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

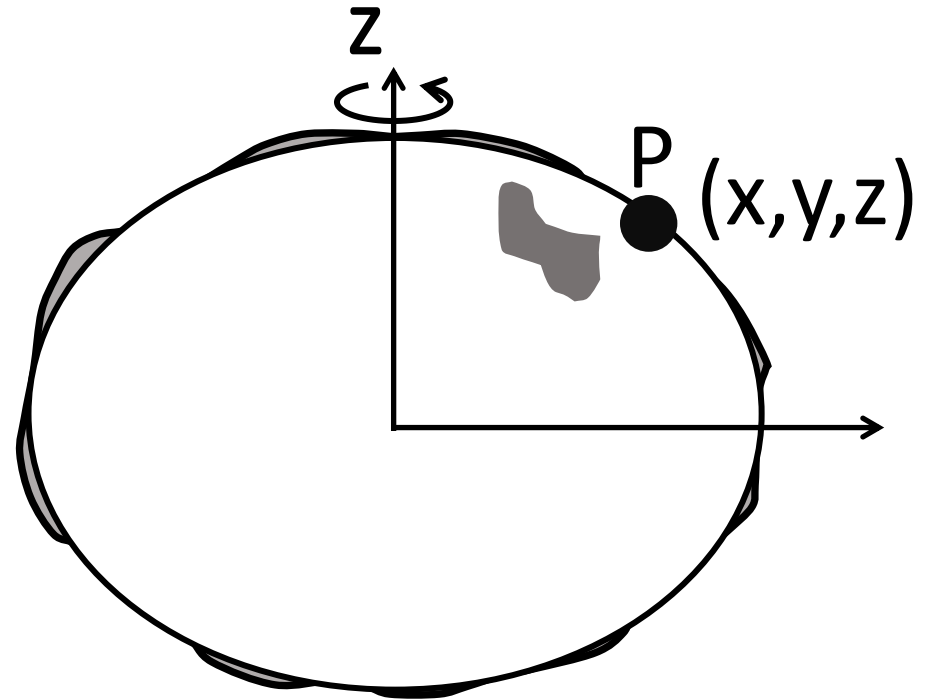


Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \gamma_P$$

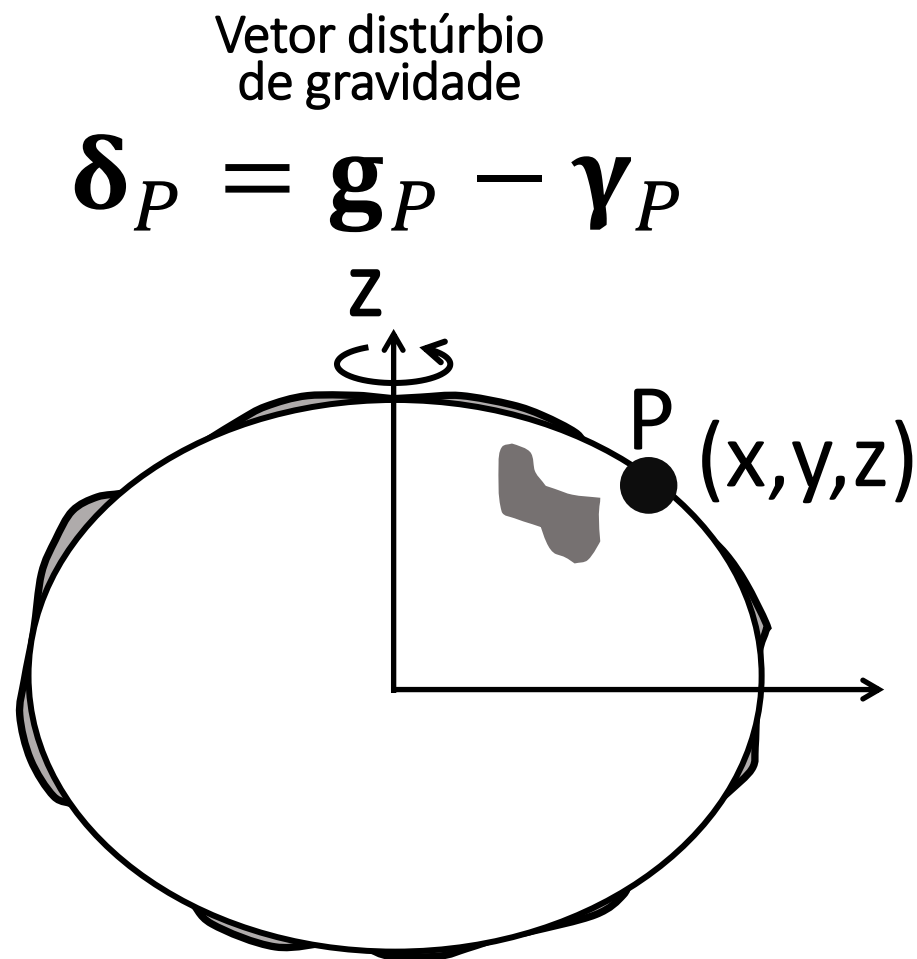


Somente o efeitos das
massas anômalas (ou
fontes gravimétricas)

Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \gamma_P$$

É comum encontrarmos
na literatura o conceito de
anomalia de gravidade

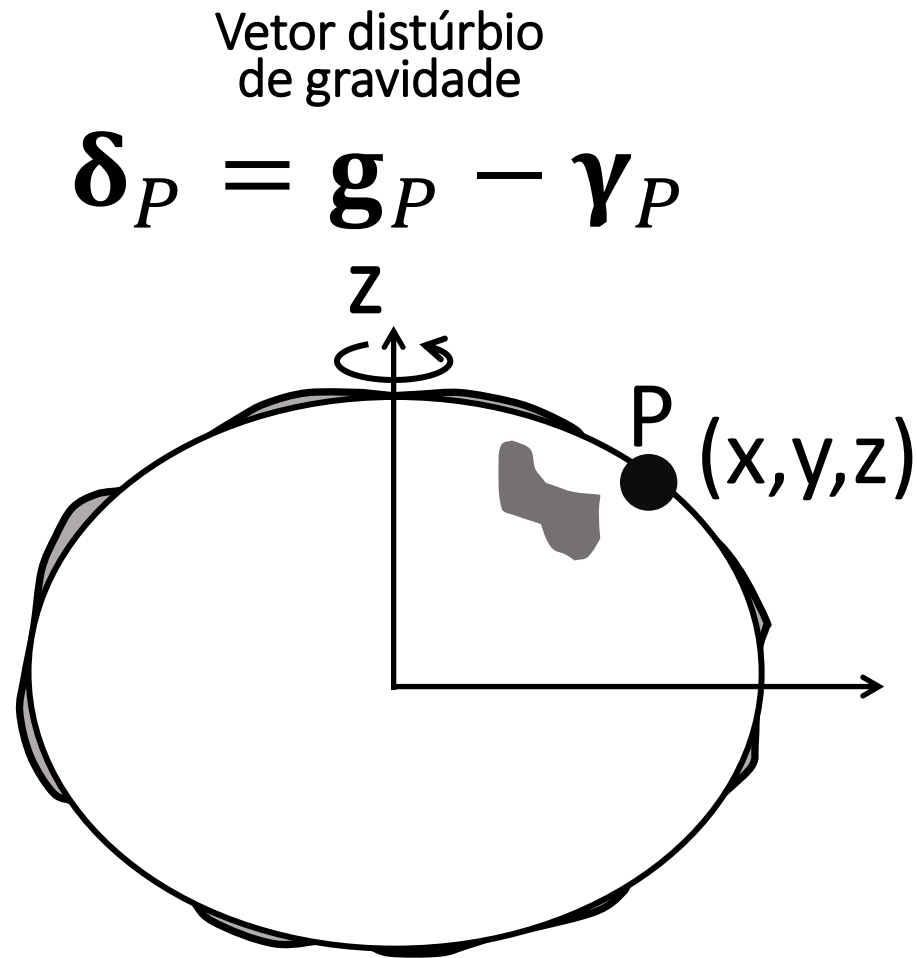


Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \gamma_P$$

É comum encontrarmos
na literatura o conceito de
anomalia de gravidade

Anomalia de gravidade e
distúrbio de gravidade são
coisas distintas!

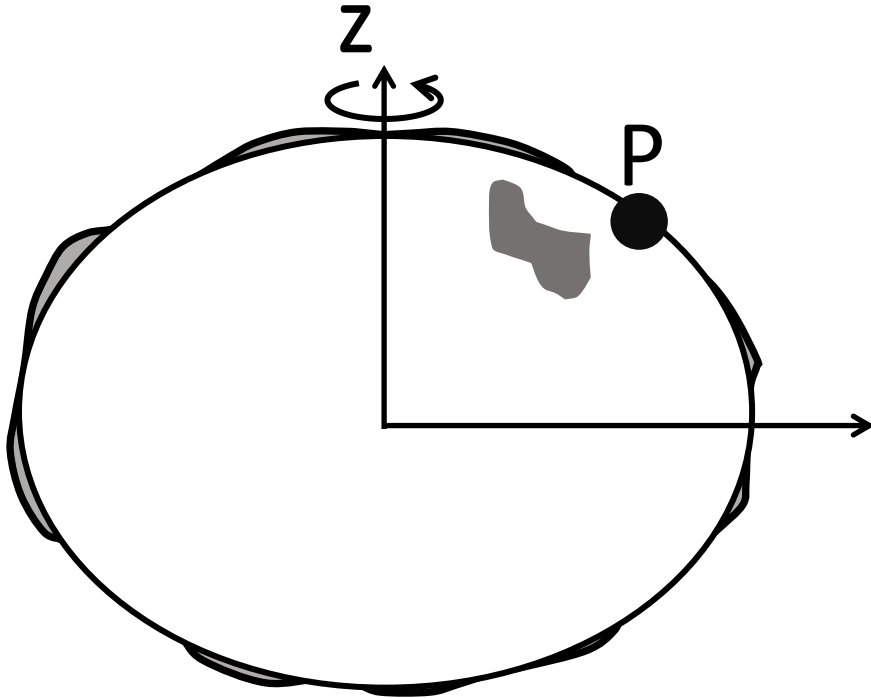


Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \gamma_P$$

Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$



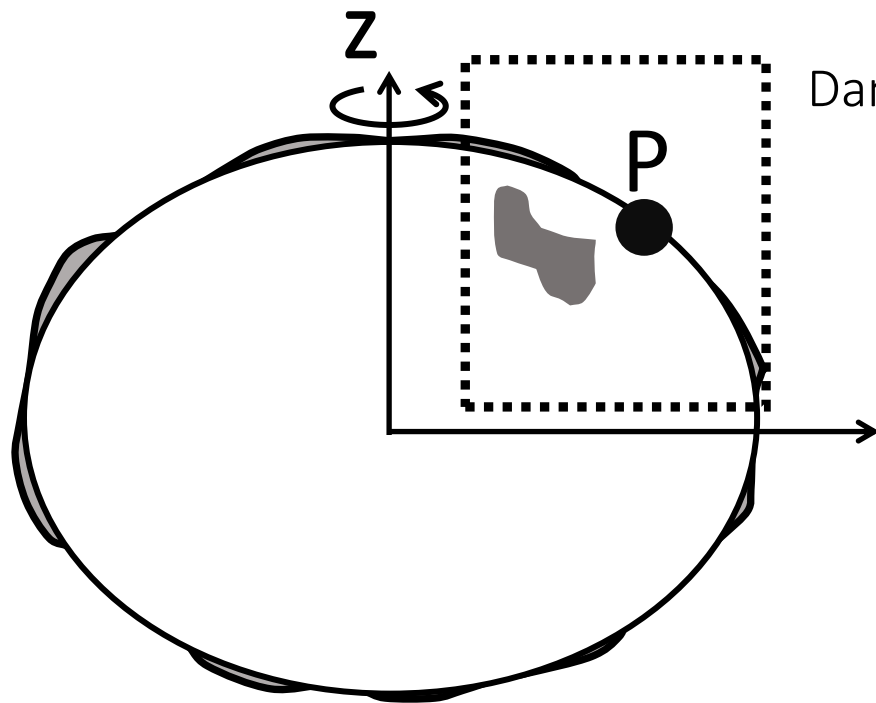
Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?

Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$



Dando um zoom!

Distúrbio de
gravidade

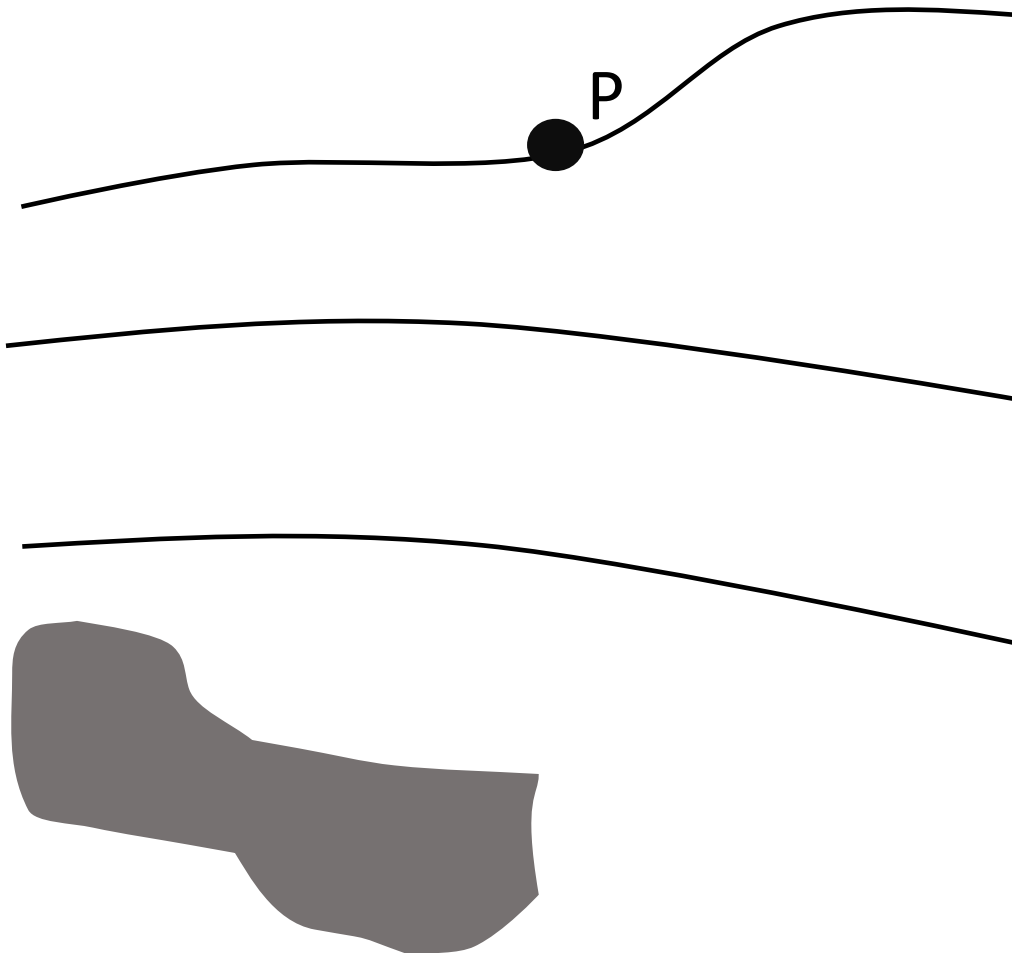
$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?

Superfície Terrestre

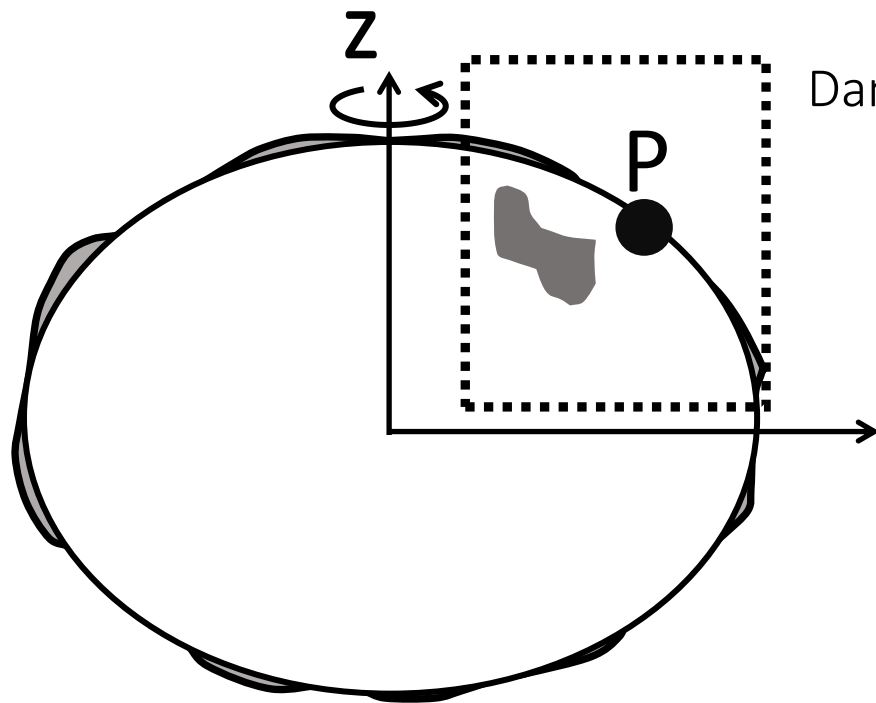
Geóide

Elipsóide



Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

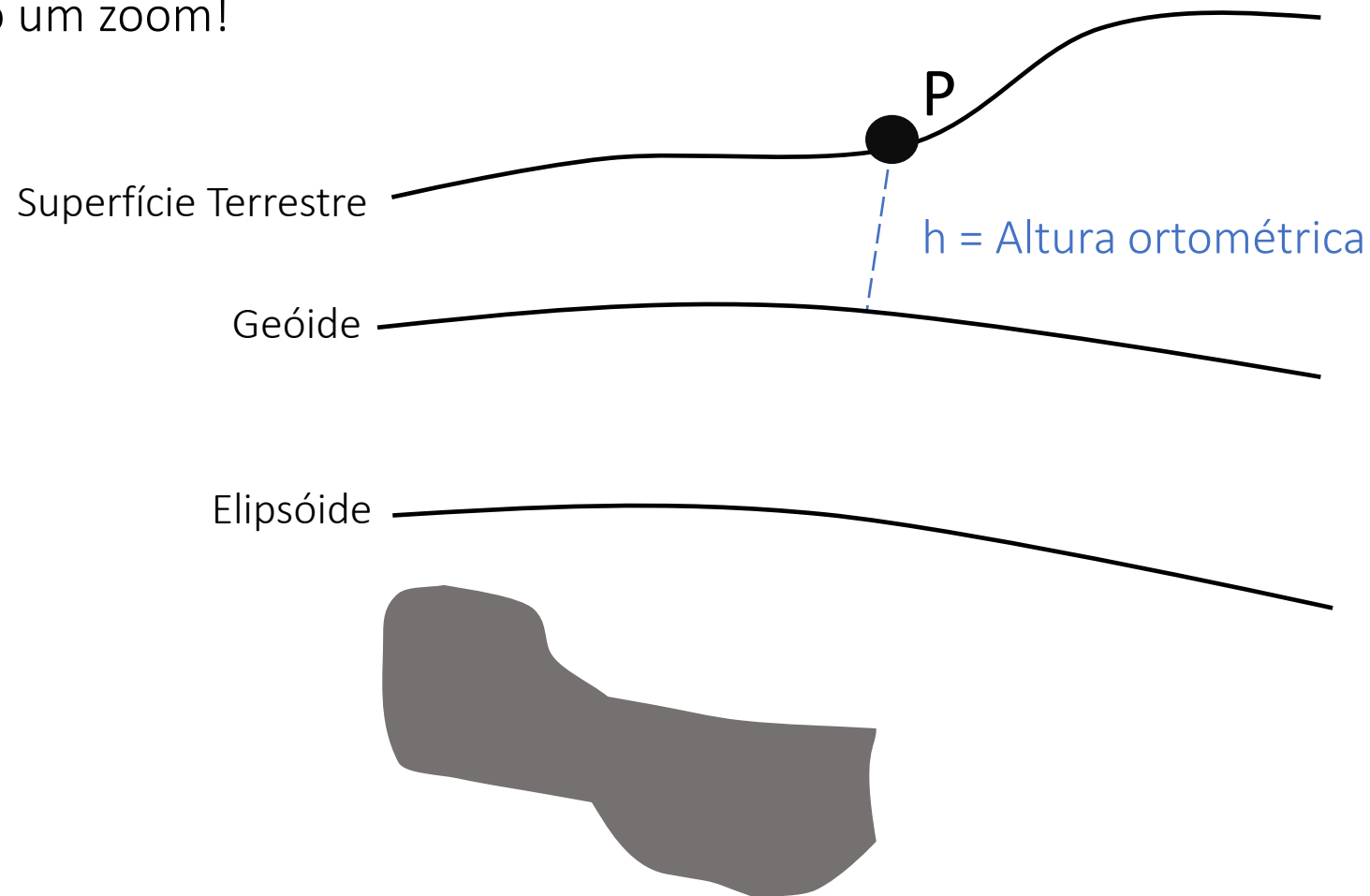


Dando um zoom!

Distúrbio de
gravidade

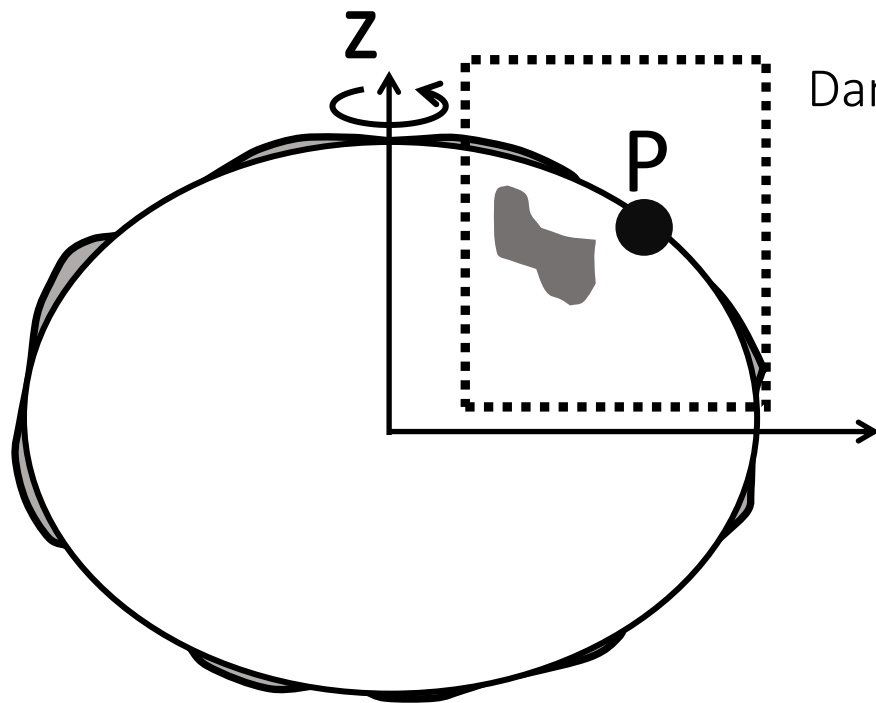
$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?



Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

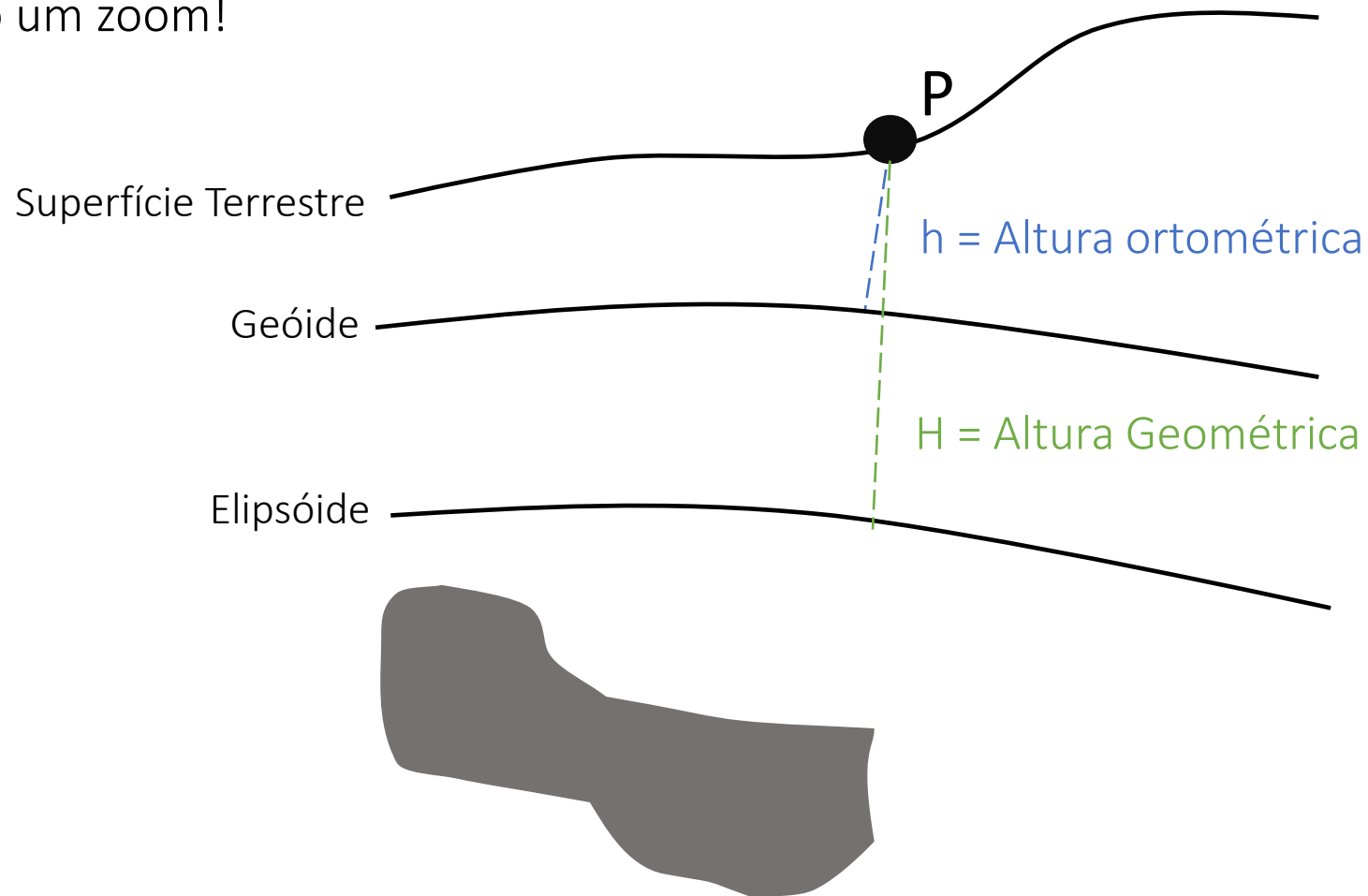


Dando um zoom!

Distúrbio de
gravidade

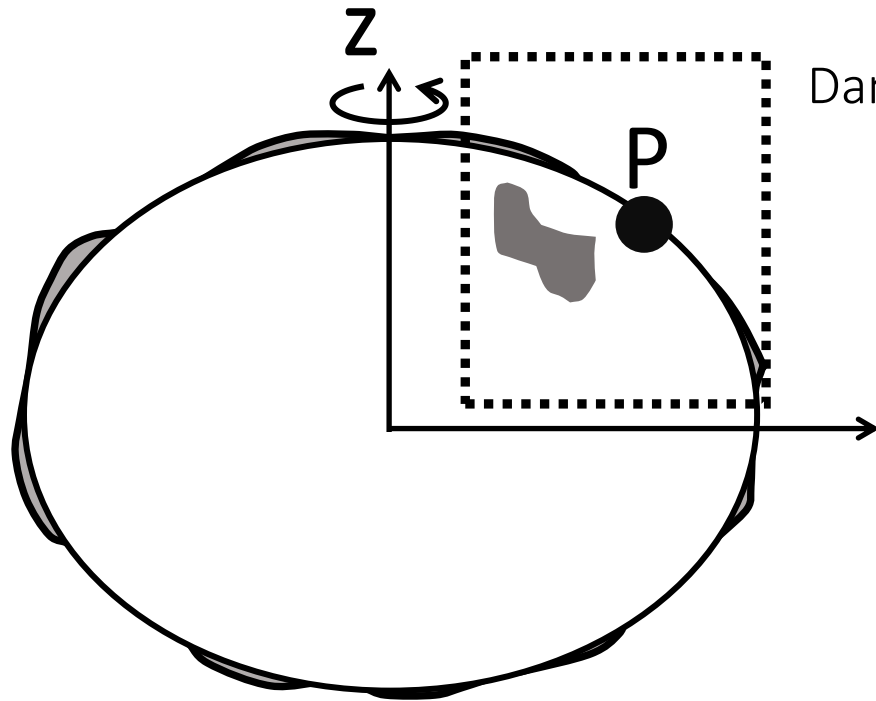
$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?



Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

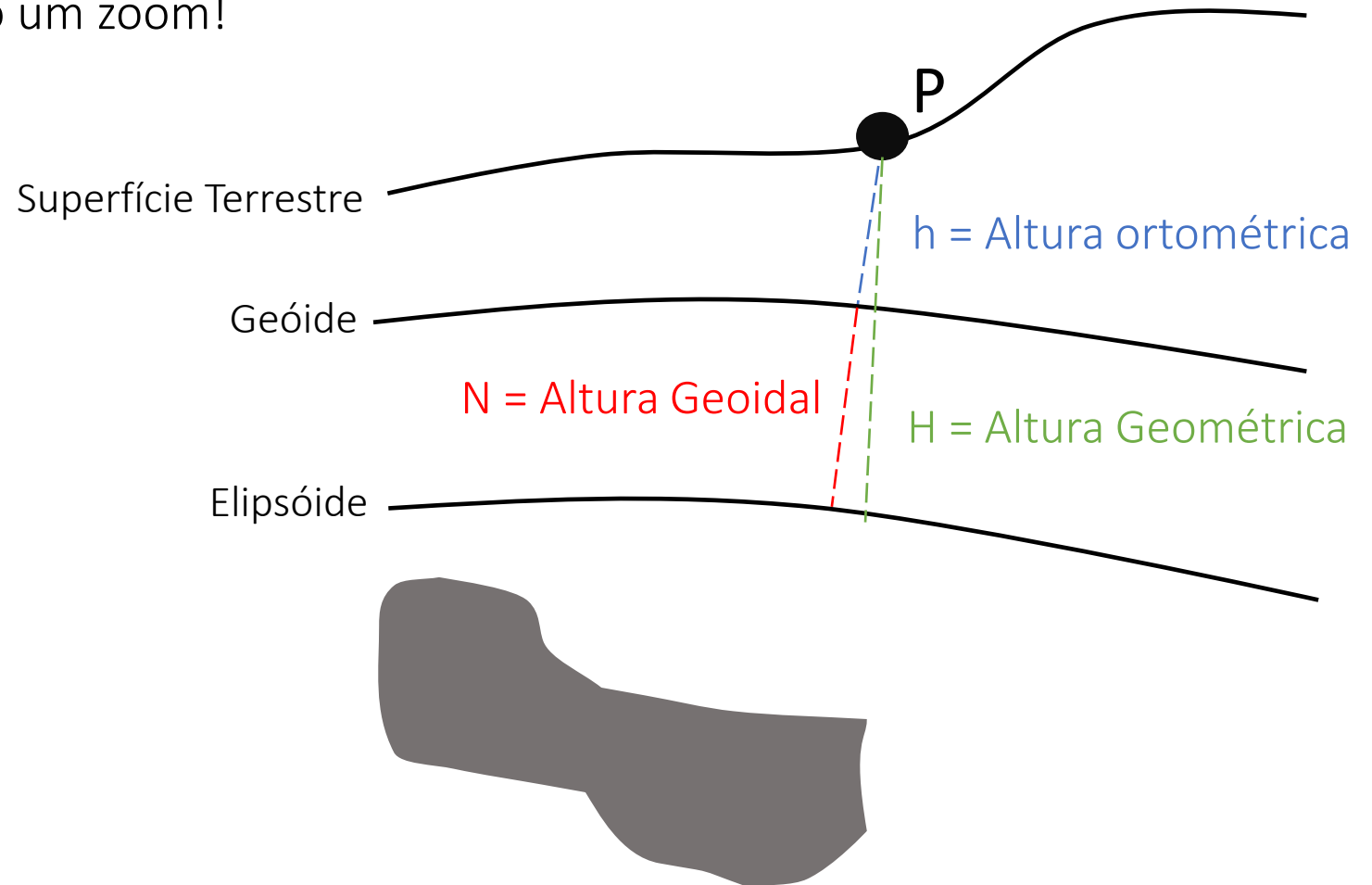


Dando um zoom!

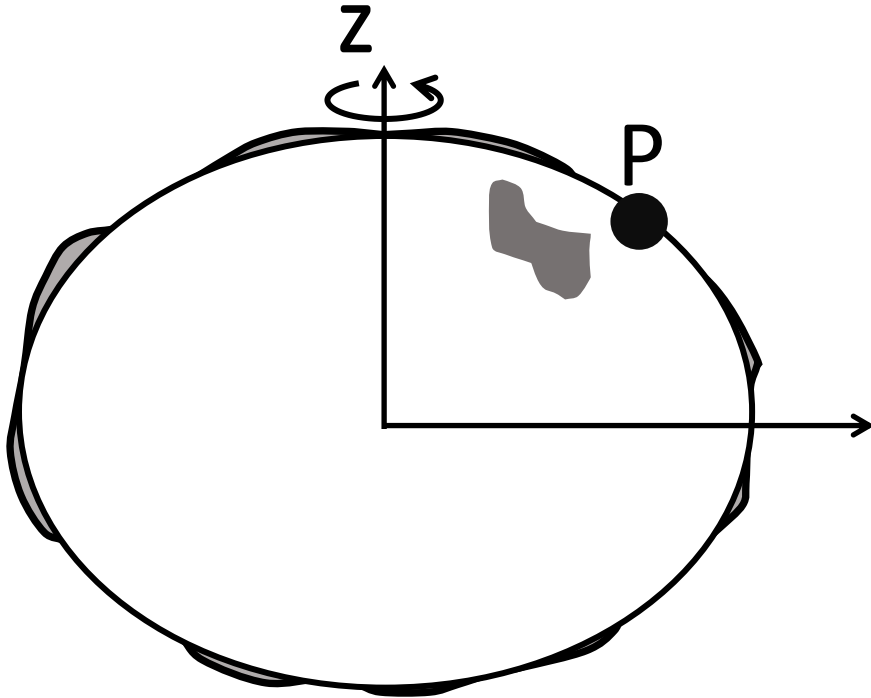
Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?

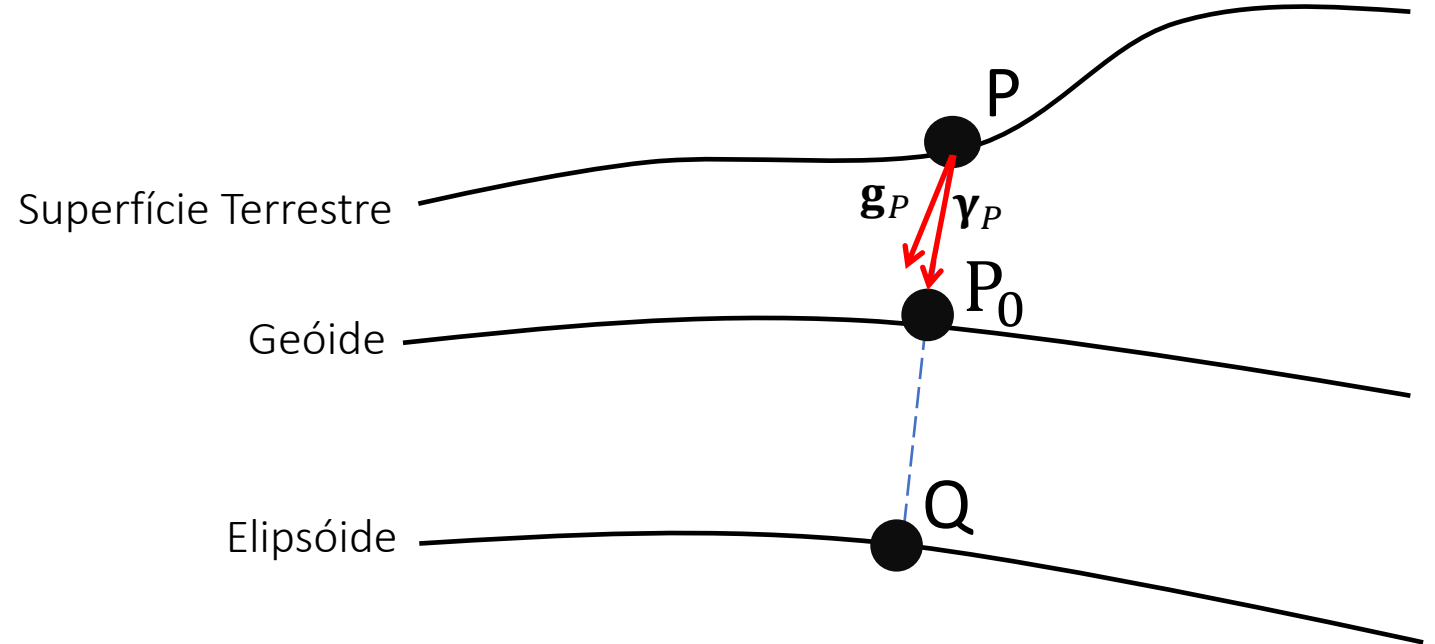


Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?



Distúrbio de
gravidade

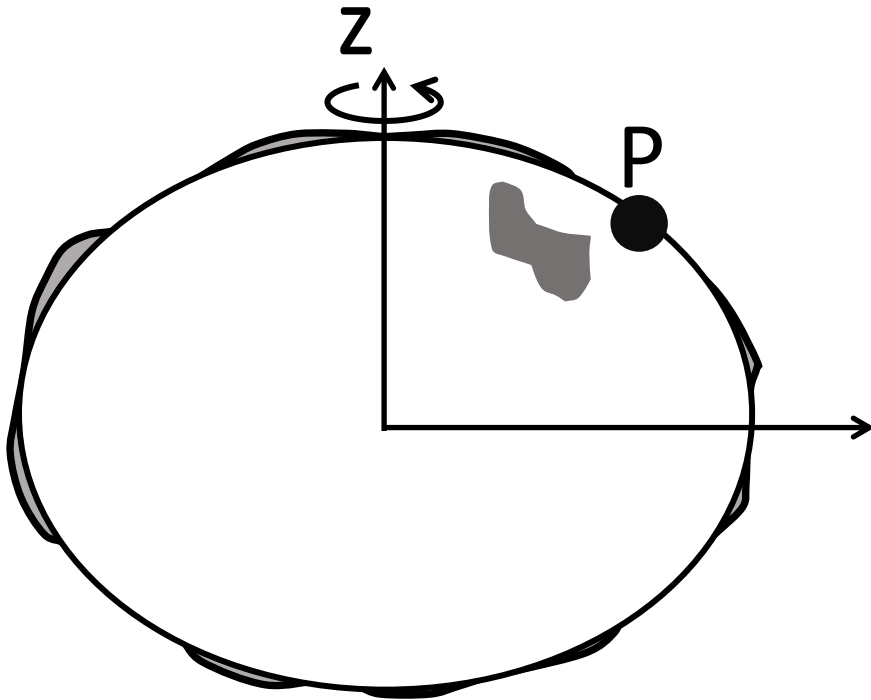
$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$



Vetor distúrbio
de gravidade

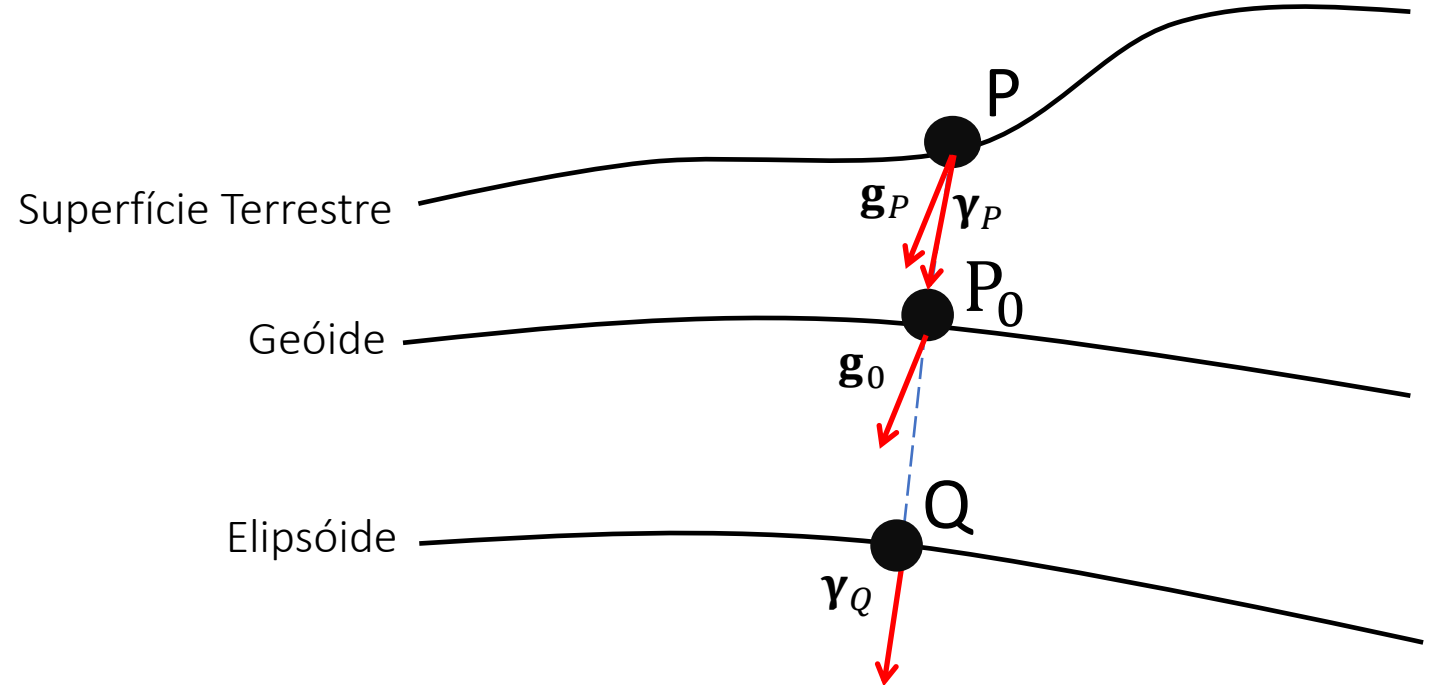
$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?



Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$



Vetor distúrbio
de gravidade

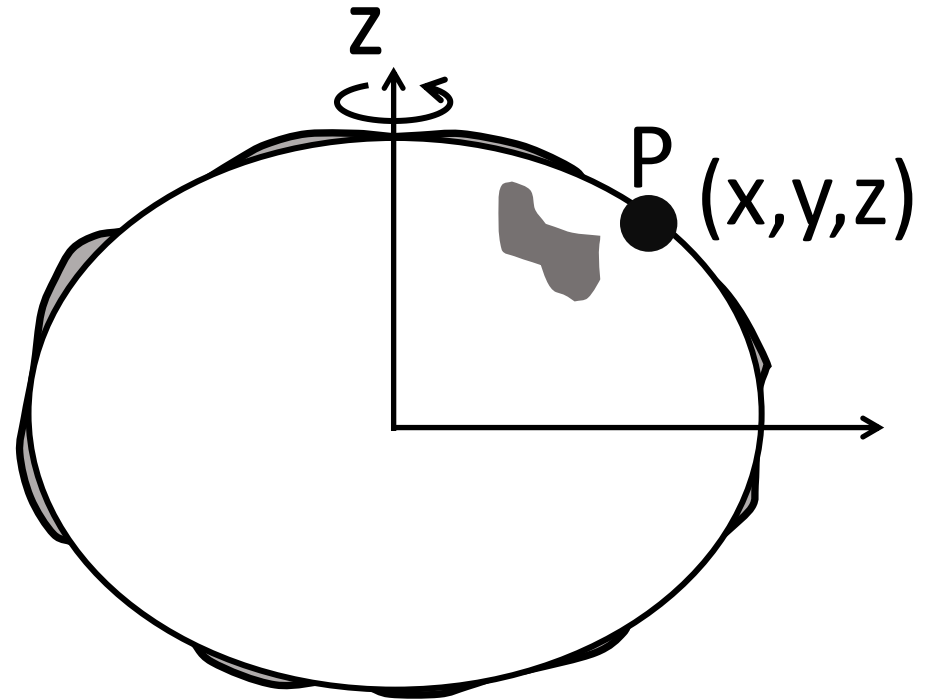
$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Vetor Anomalia
de gravidade

$$\Delta g_P = g_0 - \gamma_Q$$

Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$



Somente o efeitos das
massas anômalas (ou
fontes gravimétricas)

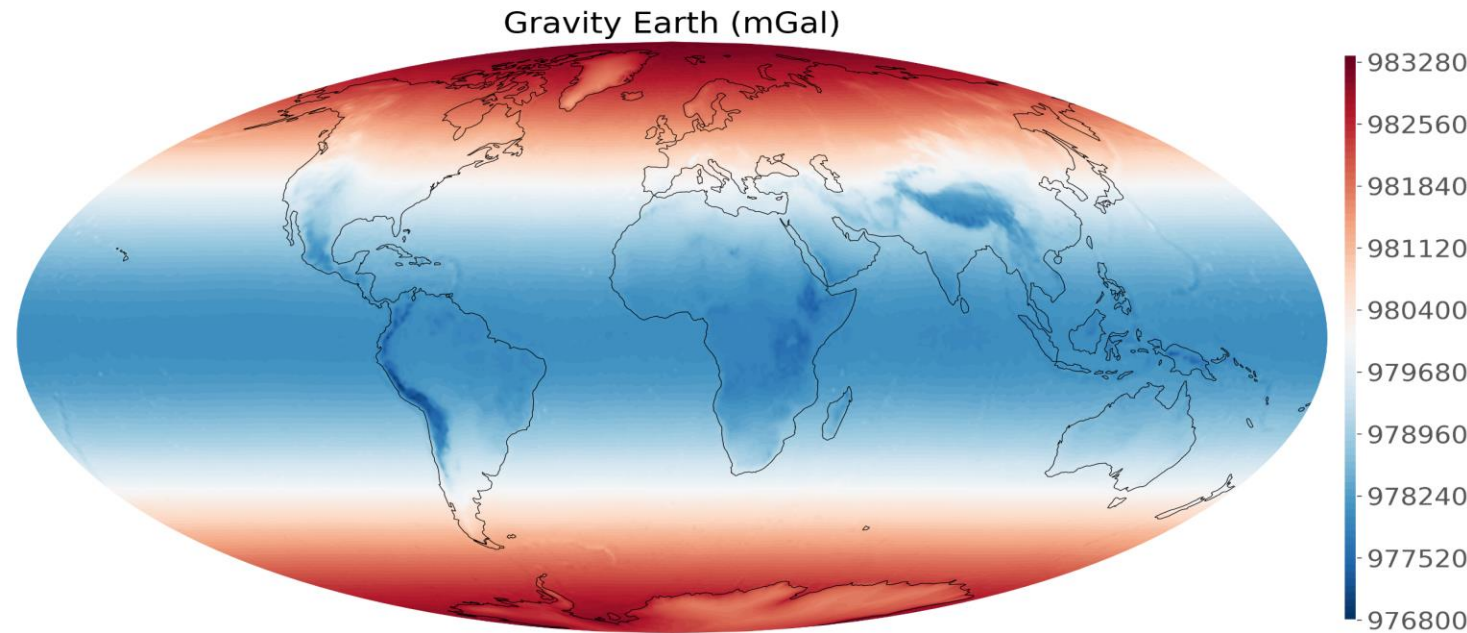
Como acontece na
prática?

Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Terra real

Módulo do Vetor gravidade

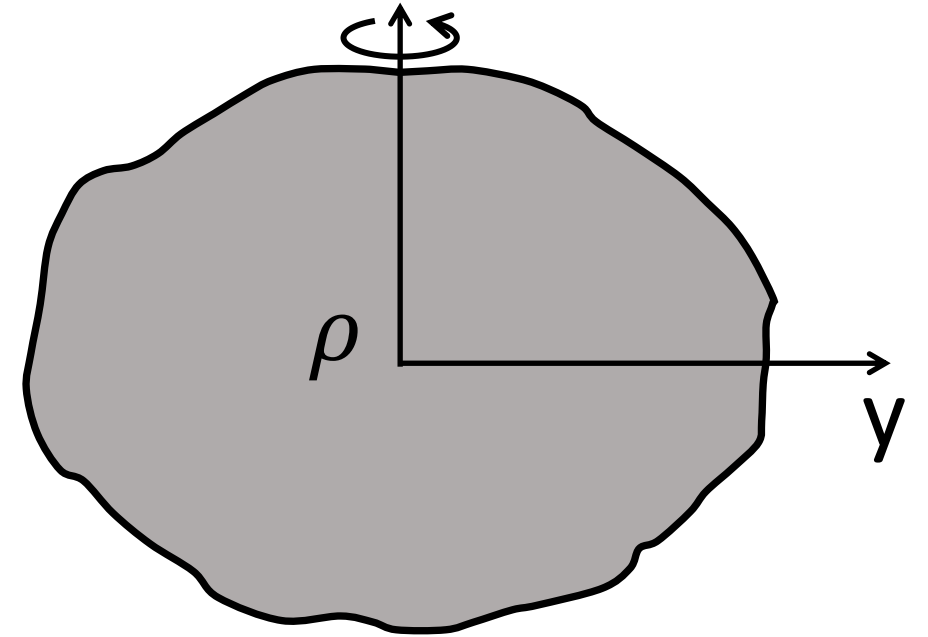


<http://icgem.gfz-potsdam.de/home>

International Center for Global Earth Model (ICGEM)

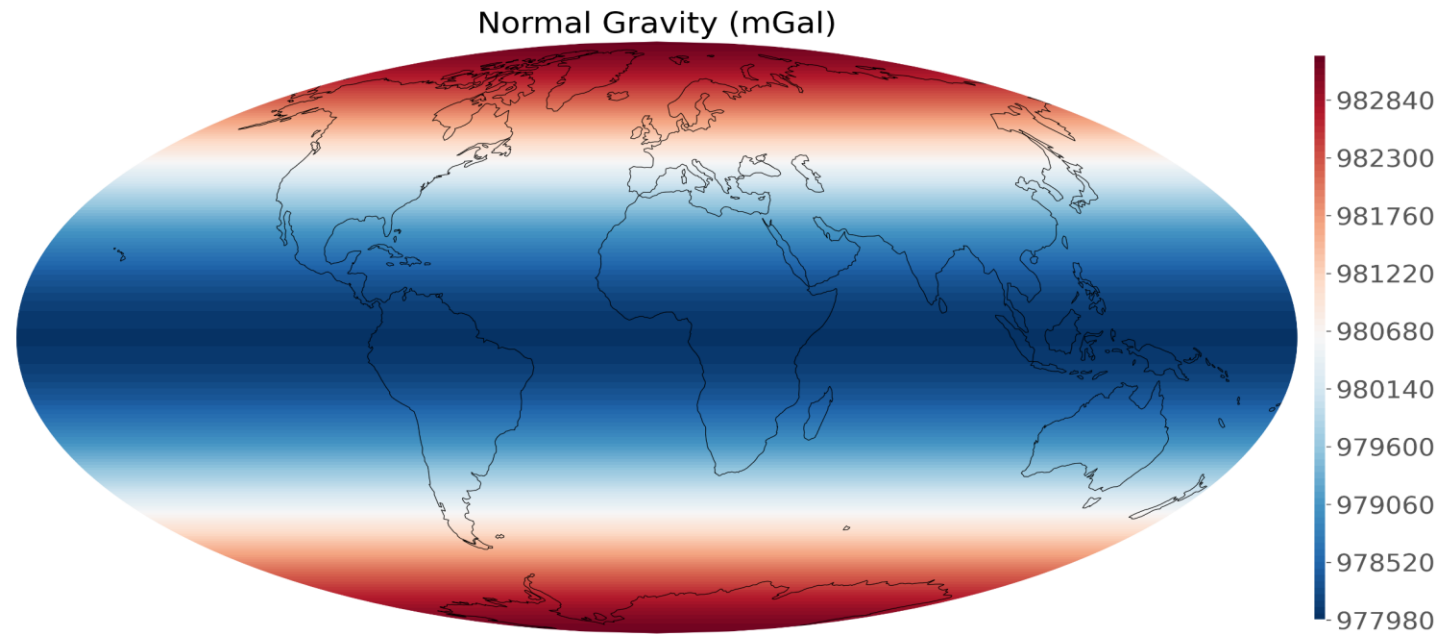
(Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2005; Li and Gotze, 2001)

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$



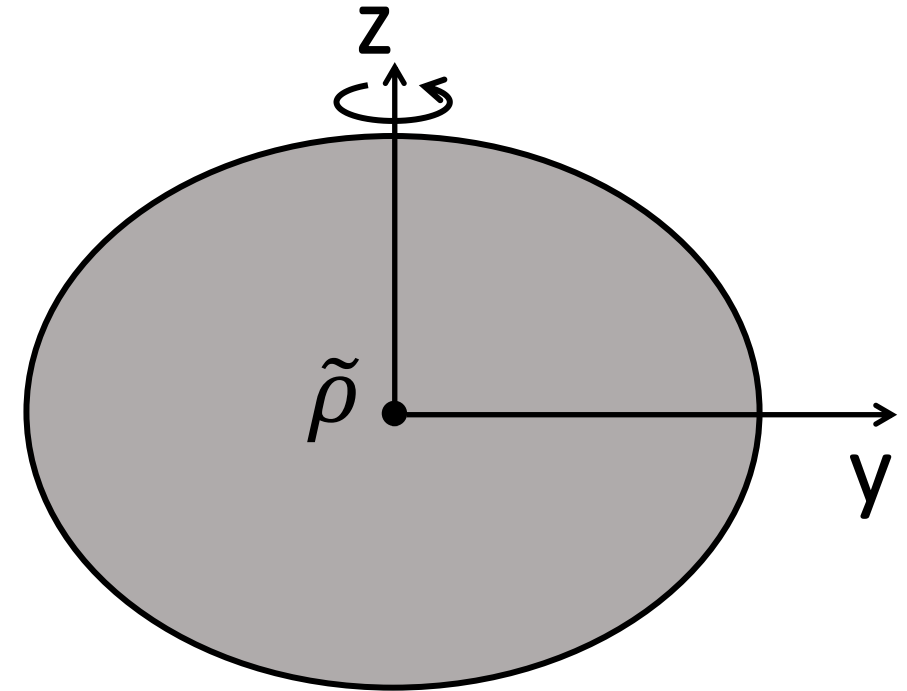
Terra Normal

Módulo Vetor
gravidade normal
(sobre o elipsoide)



Li and Gotze (2001)

$$\gamma_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P$$

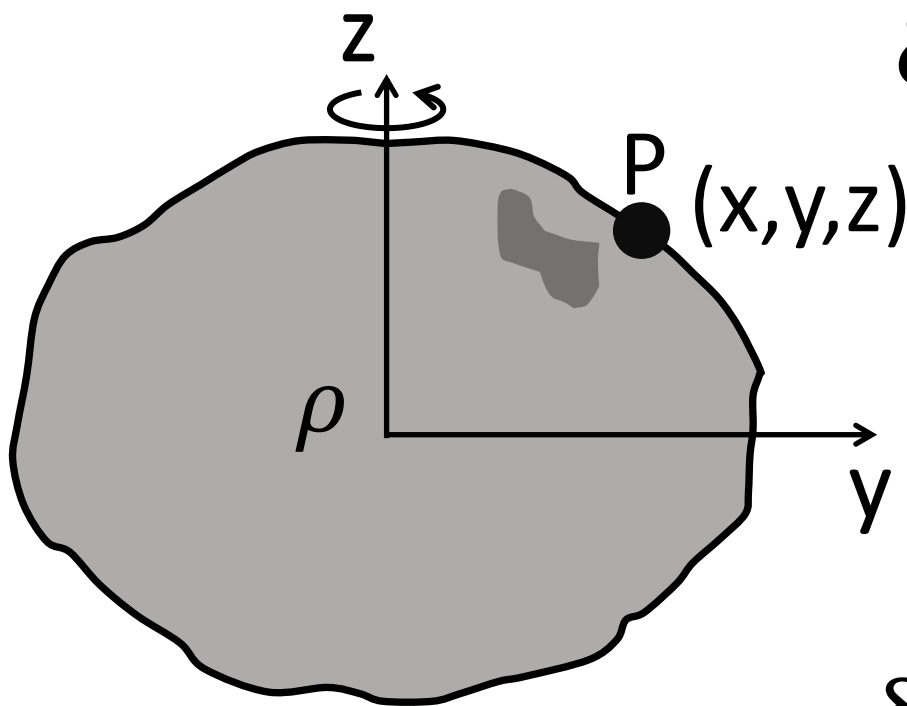


Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$



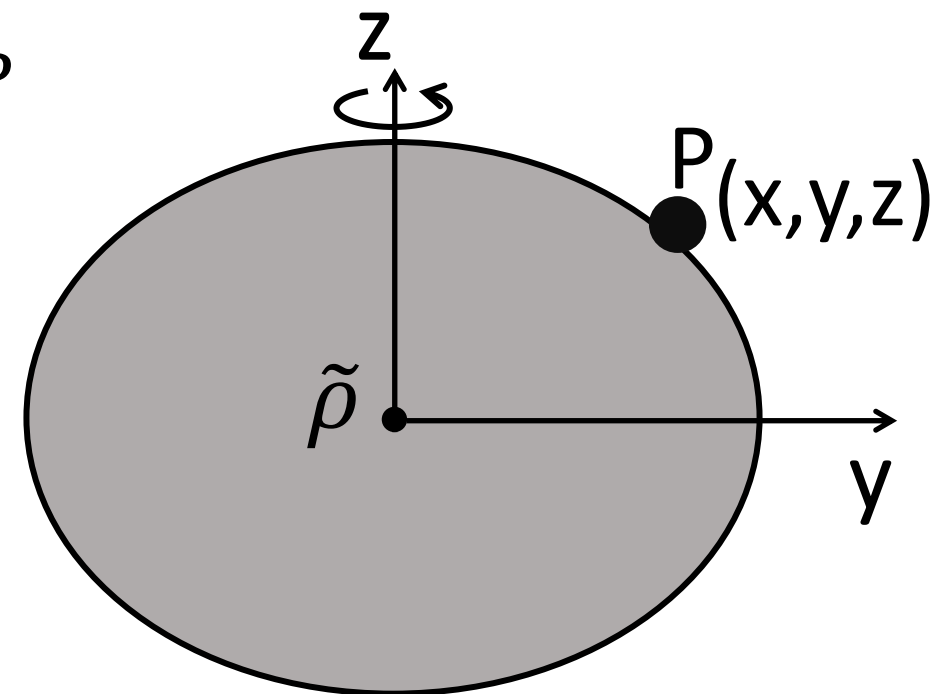
Terra real

Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Vetor gravidade
normal

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P$$



Terra Normal

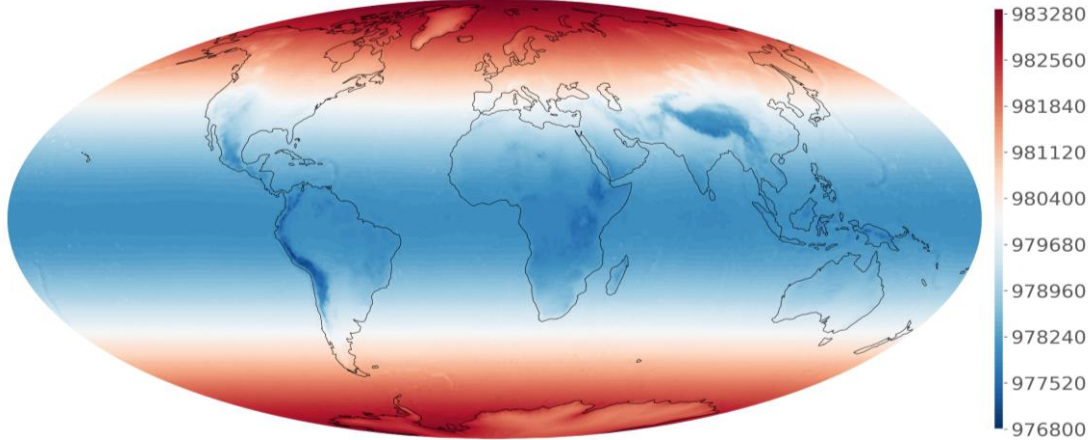
Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \nabla \Phi_P$$

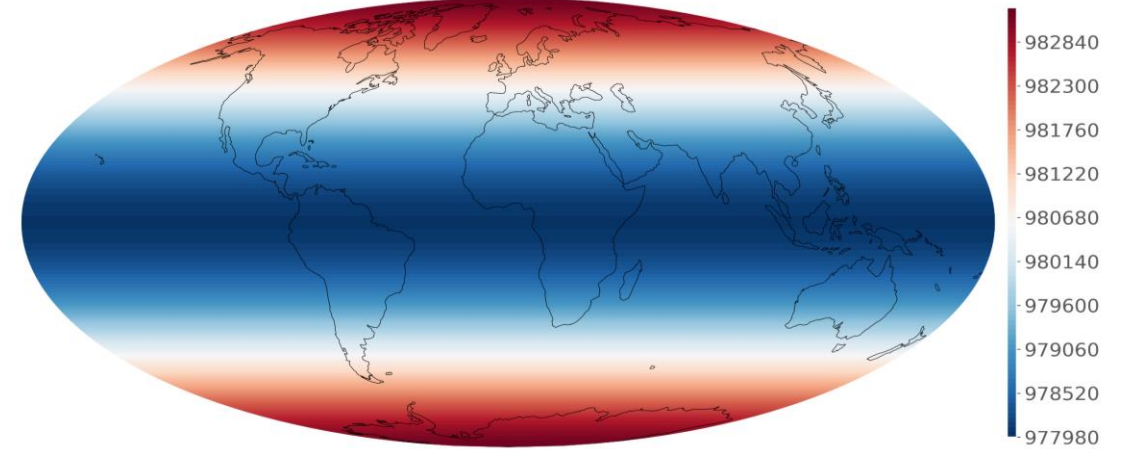
Vetor gravidade
normal

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \nabla \Phi_P$$

Gravity Earth (mGal)



Normal Gravity (mGal)



Vetor distúrbio
de gravidade

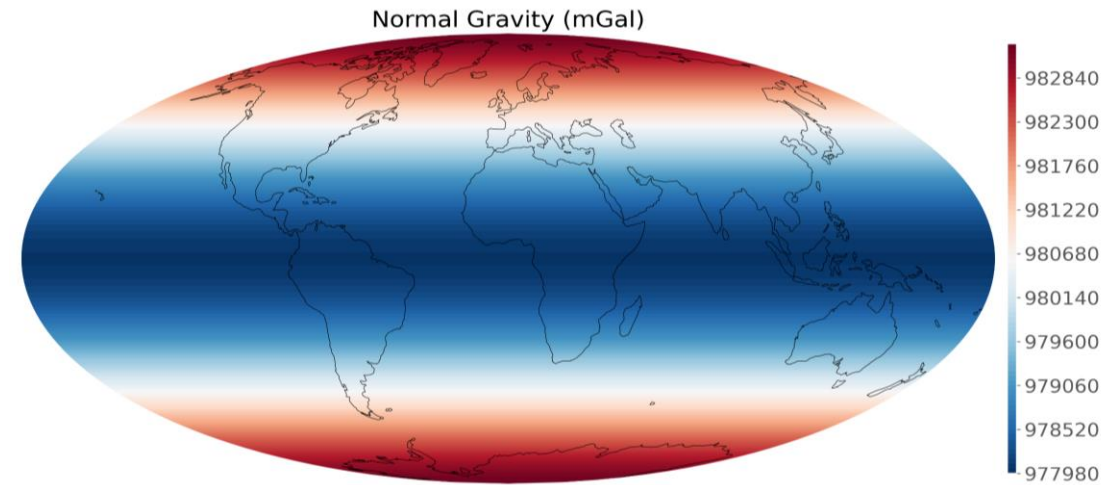
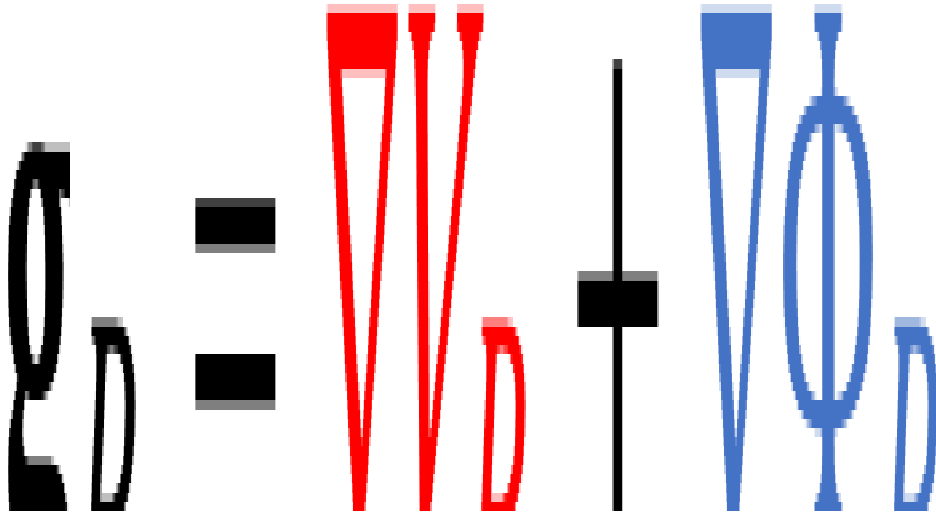
$$\boldsymbol{\delta}_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$

Vetor gravidade
normal

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$



Vetor distúrbio
de gravidade

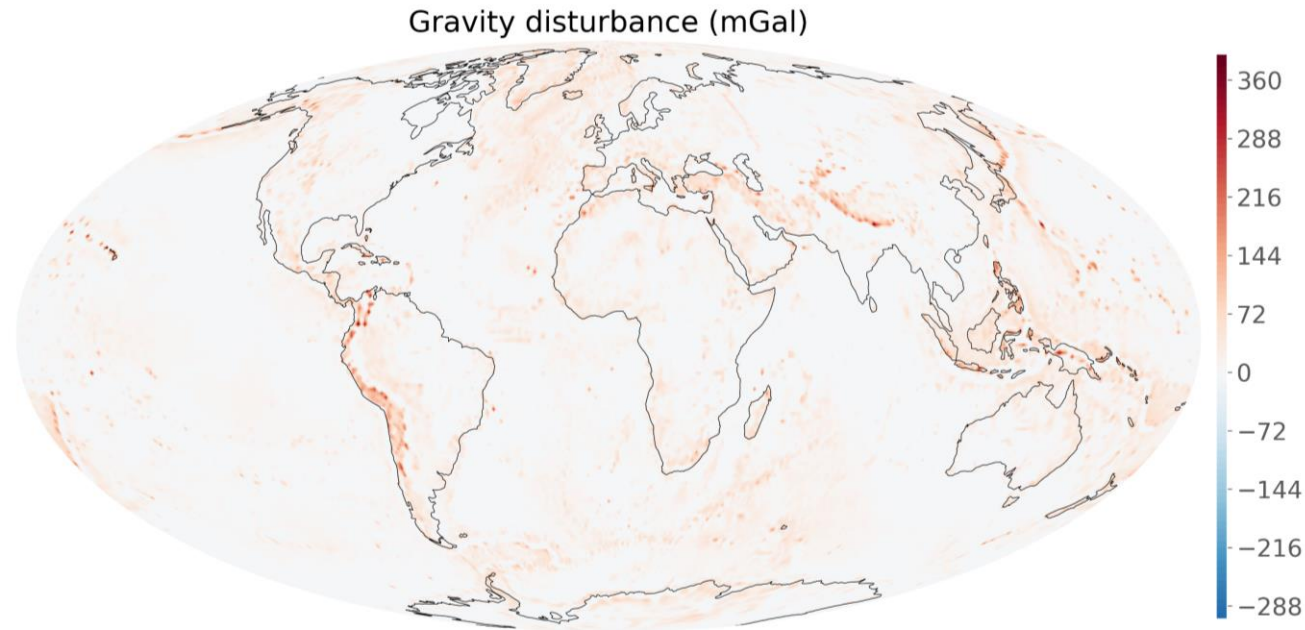
$$\boldsymbol{\delta}_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

Vetor
gravidade

$$\mathbf{g}_P = \nabla V_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$

Vetor gravidade
normal

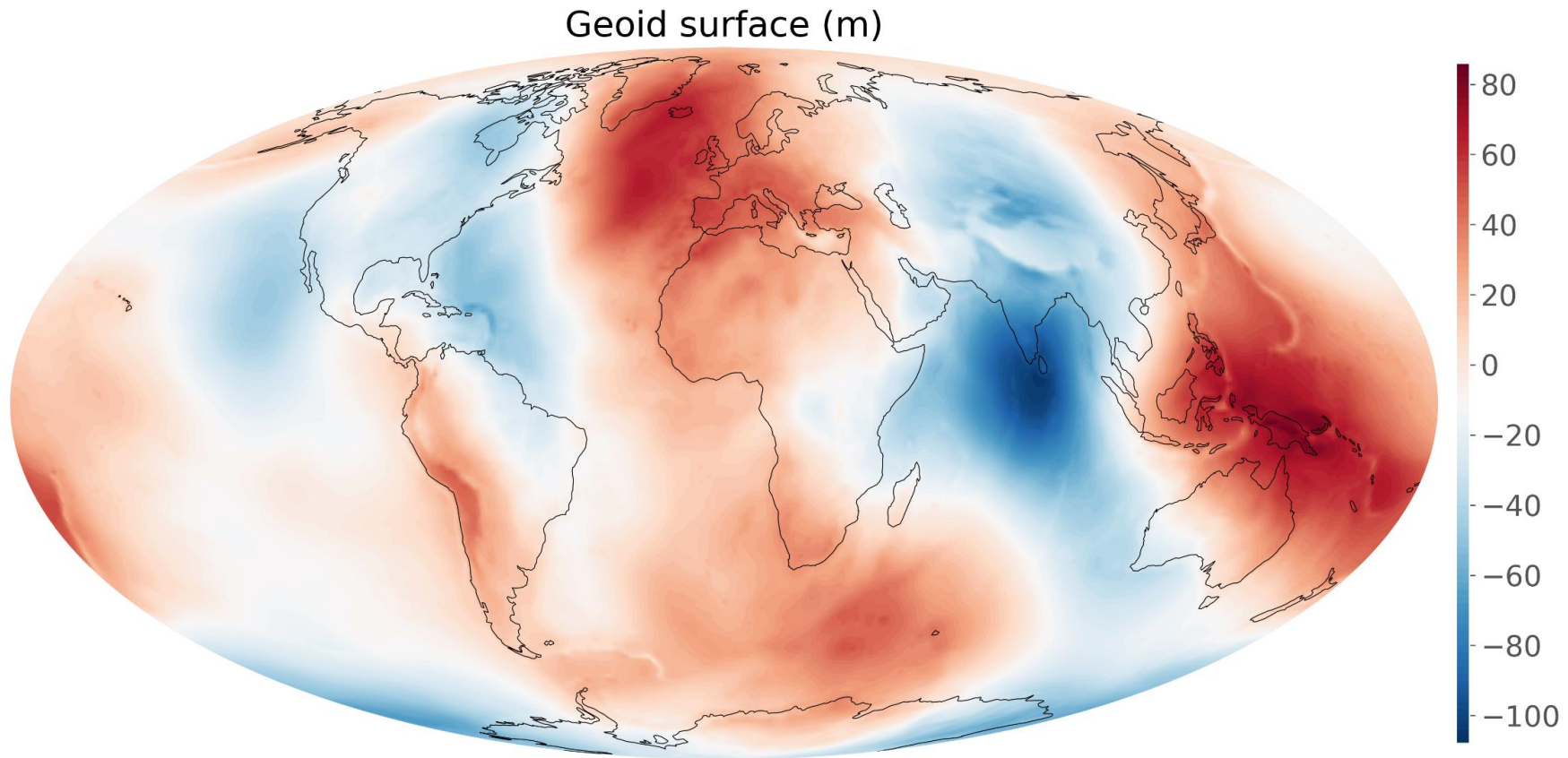
$$\boldsymbol{\gamma}_P = \nabla U_P + \cancel{\nabla \Phi_P}$$



Vetor distúrbio
de gravidade

$$\boldsymbol{\delta}_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

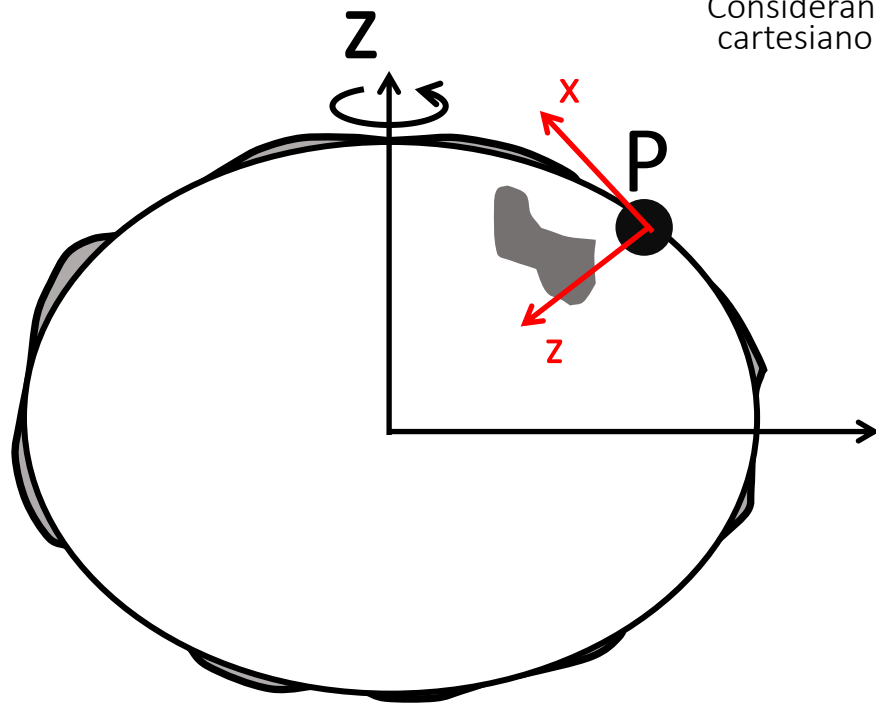
Superfície Geoidal



Vetor distúrbio
de gravidade

$$\delta_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P$$

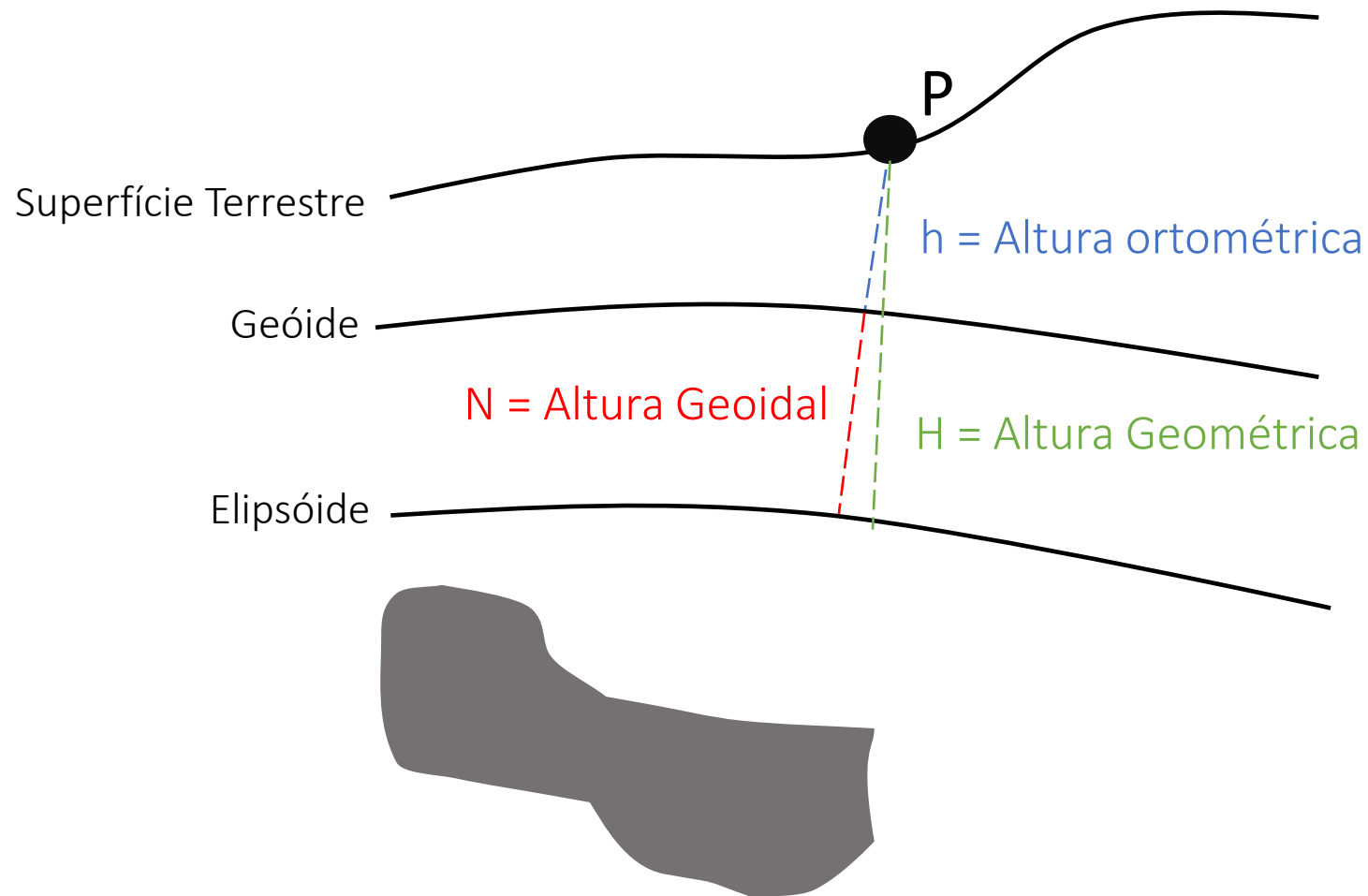
Considerando um sistema
cartesiano topocêntrico.



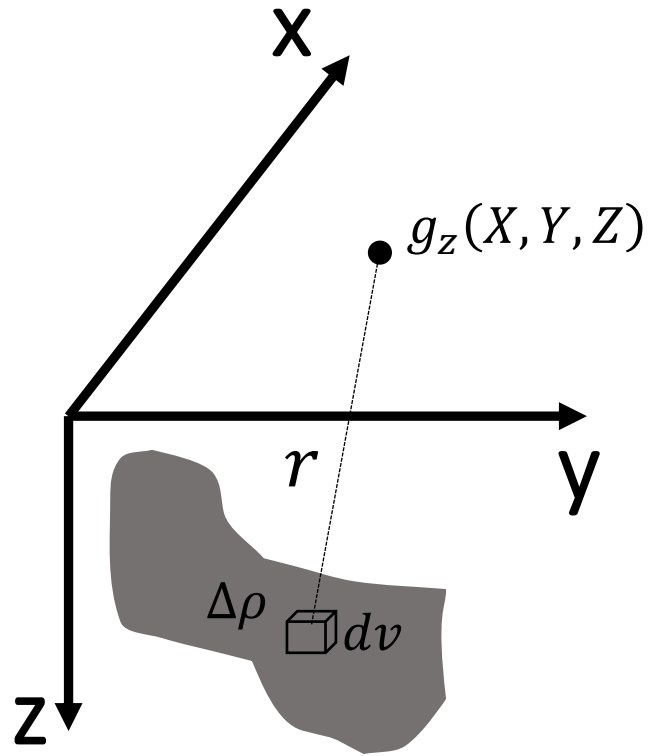
Distúrbio de
gravidade

$$\delta_P = g_P - \gamma_P$$

Por que devemos utilizar o
distúrbio ao invés da anomalia de
gravidade?



O distúrbio de gravidade é a componente vertical do campo gravitacional gerado pela fonte gravimétrica



$$g_z(X, Y, Z) = - \frac{\partial U(X, Y, Z)}{\partial Z}$$

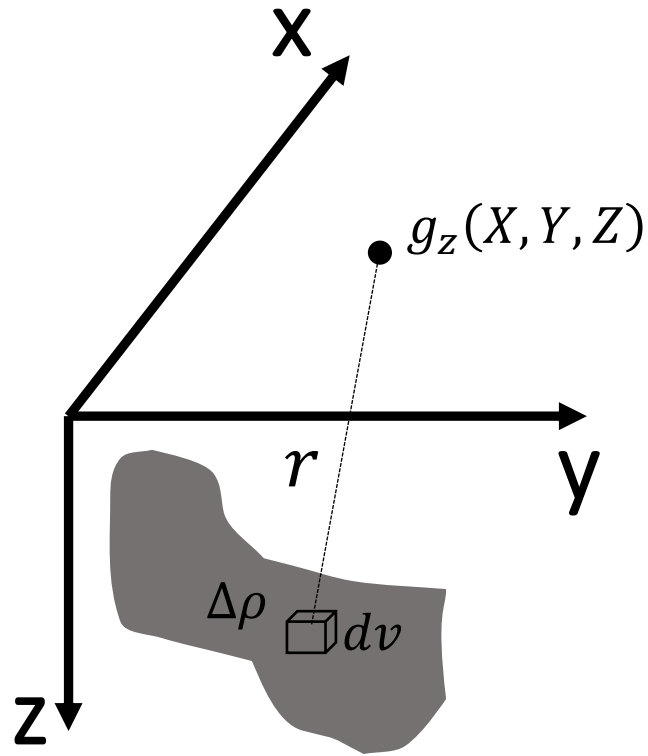
$$U(X, Y, Z) = k_g \int_v \frac{\Delta \rho}{[(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2]^{\frac{1}{2}}} dv$$

$$g_z(X, Y, Z) = k_g \int_v \frac{\Delta \rho (Z' - Z)}{[(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} dv$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

O distúrbio de gravidade é a componente vertical do campo gravitacional gerado pela fonte gravimétrica

Esta equação serve de base para as modelagens para as fontes gravimétricas!



$$g_z(X, Y, Z) = - \frac{\partial U(X, Y, Z)}{\partial Z}$$

$$U(X, Y, Z) = k_g \int_v \frac{\Delta\rho}{[(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2]^{\frac{1}{2}}} dv$$

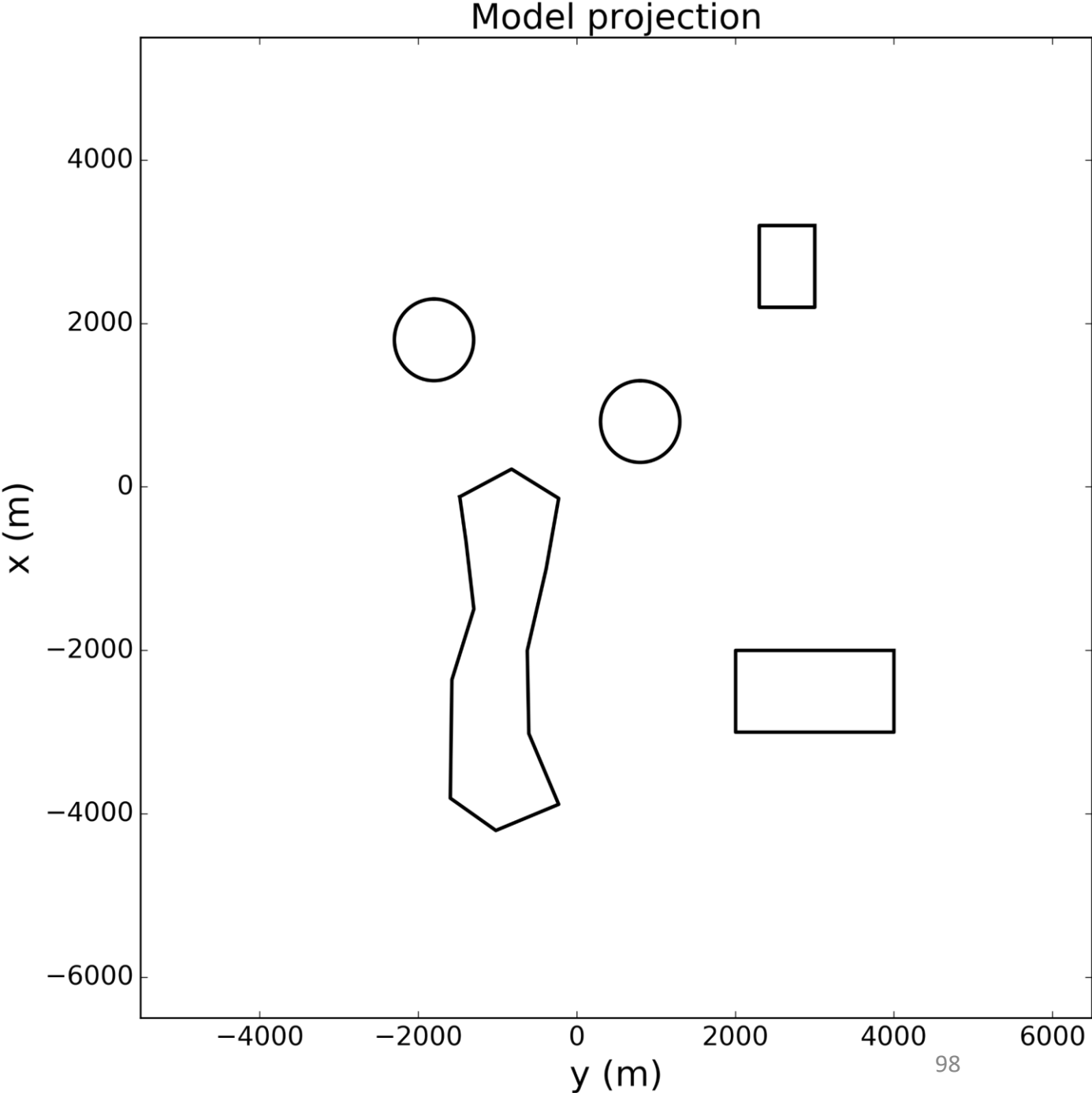
$$g_z(X, Y, Z) = k_g \int_v \frac{\Delta\rho(Z' - Z)}{[(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} dv$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

Exemplos com geometrias simples

Para esta simulação

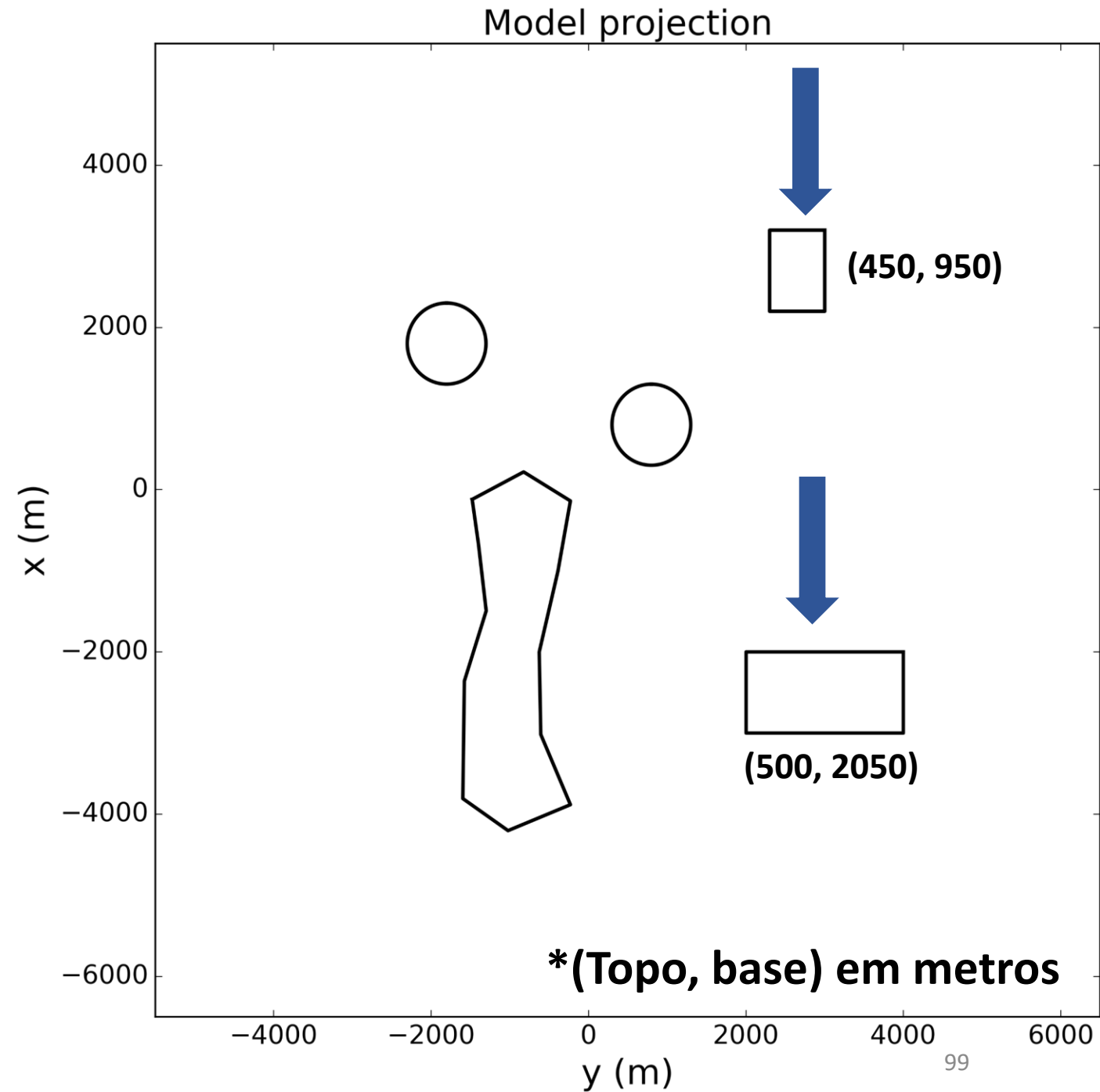
Composto por 5 fontes:



Para esta simulação

Composto por 5 fontes:

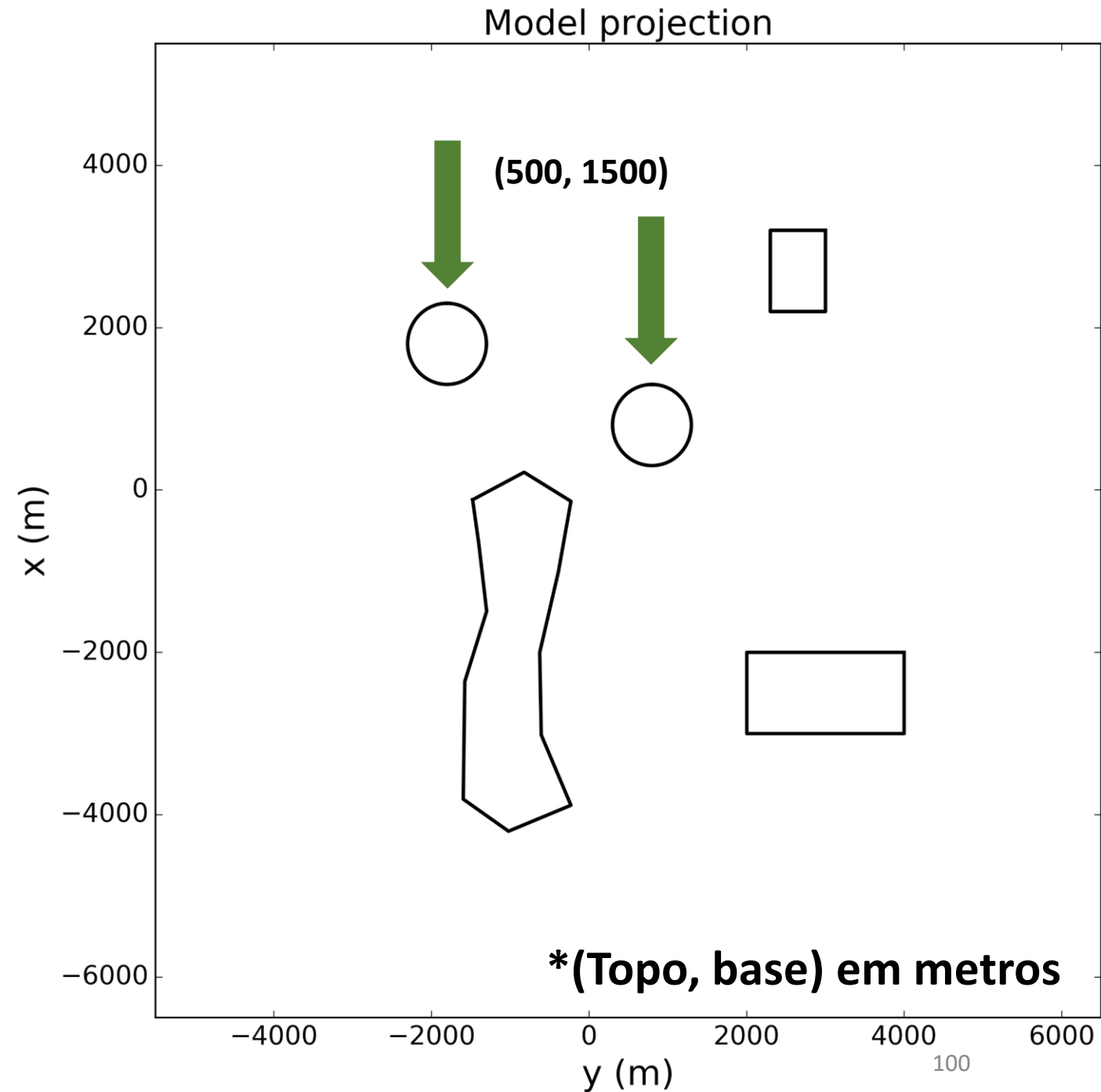
- **Dois prismas retangulares**



Para esta simulação

Composto por 5 fontes:

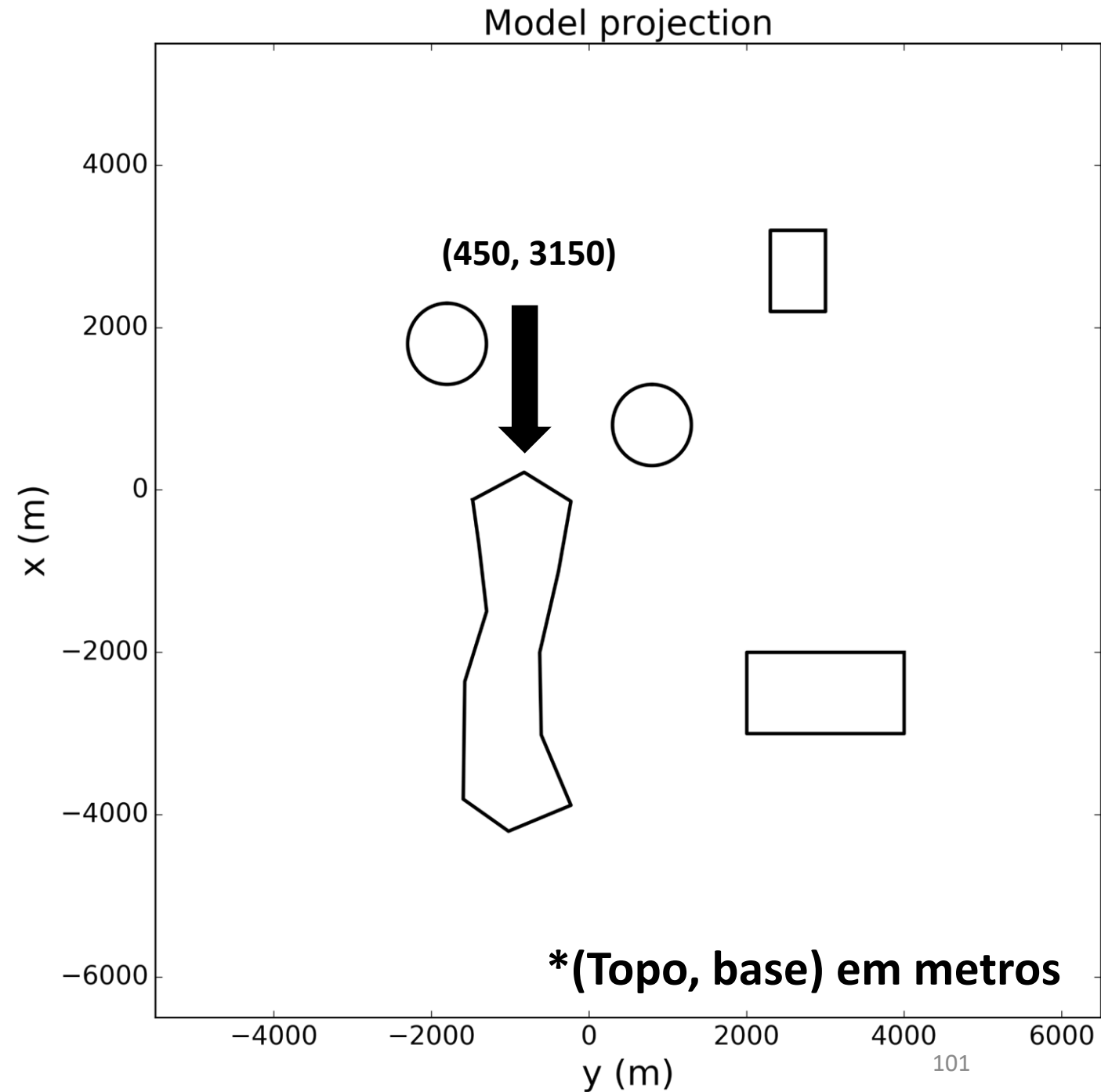
- Dois prismas retangulares
- Duas esferas



Para esta simulação

Composto por 5 fontes:

- Dois prismas retangulares
- Duas esferas
- Um prisma poligonal

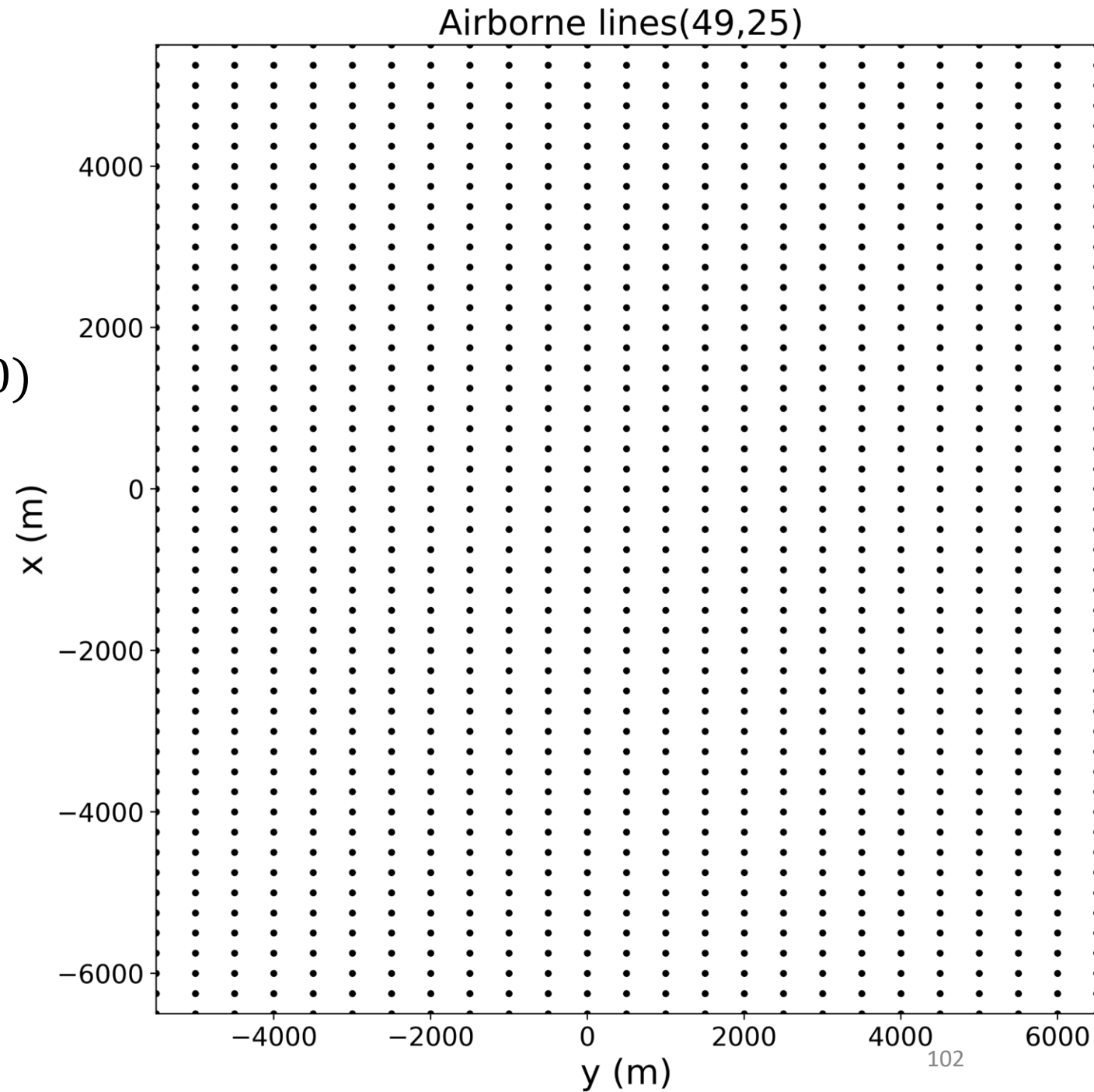


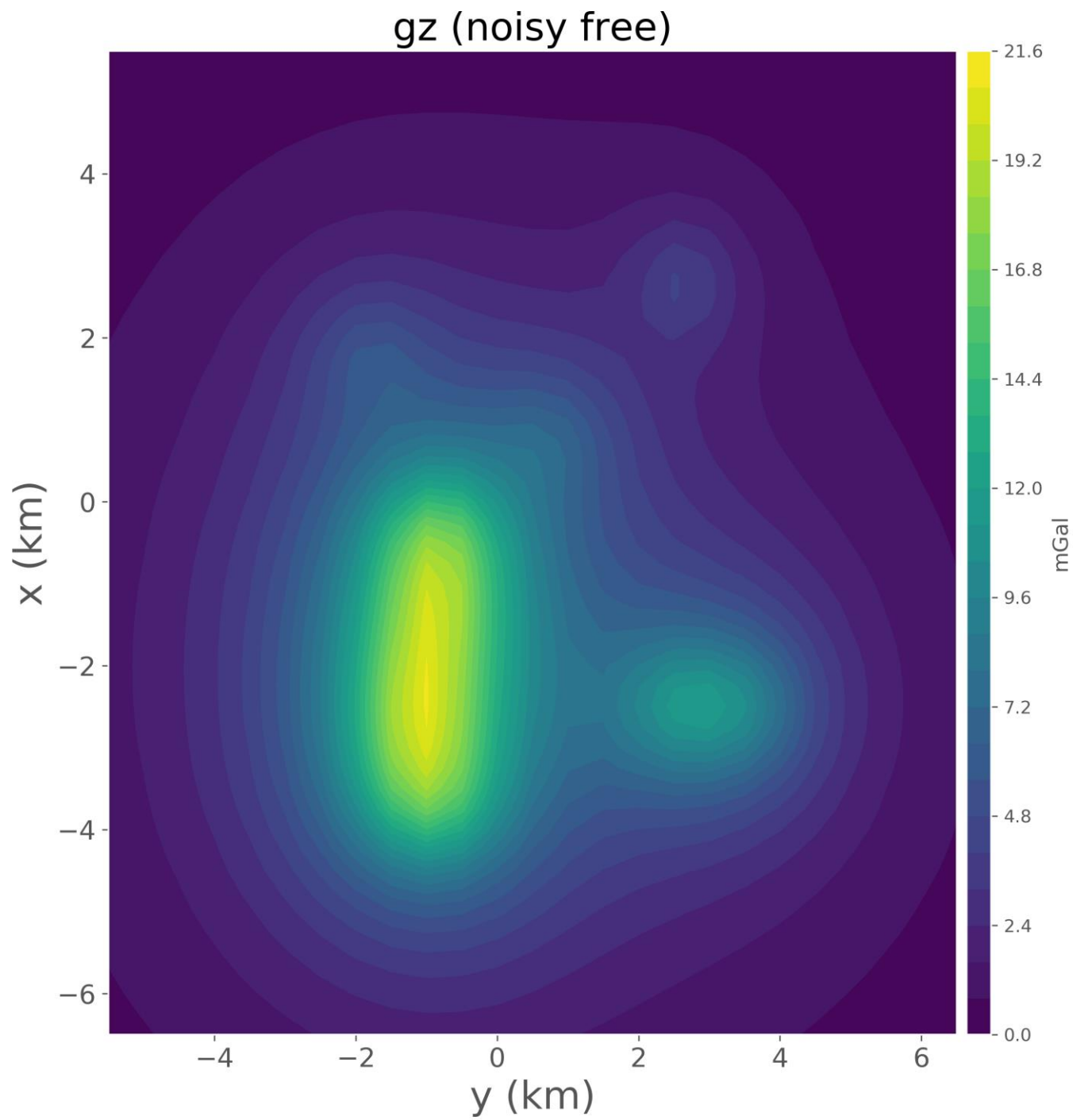
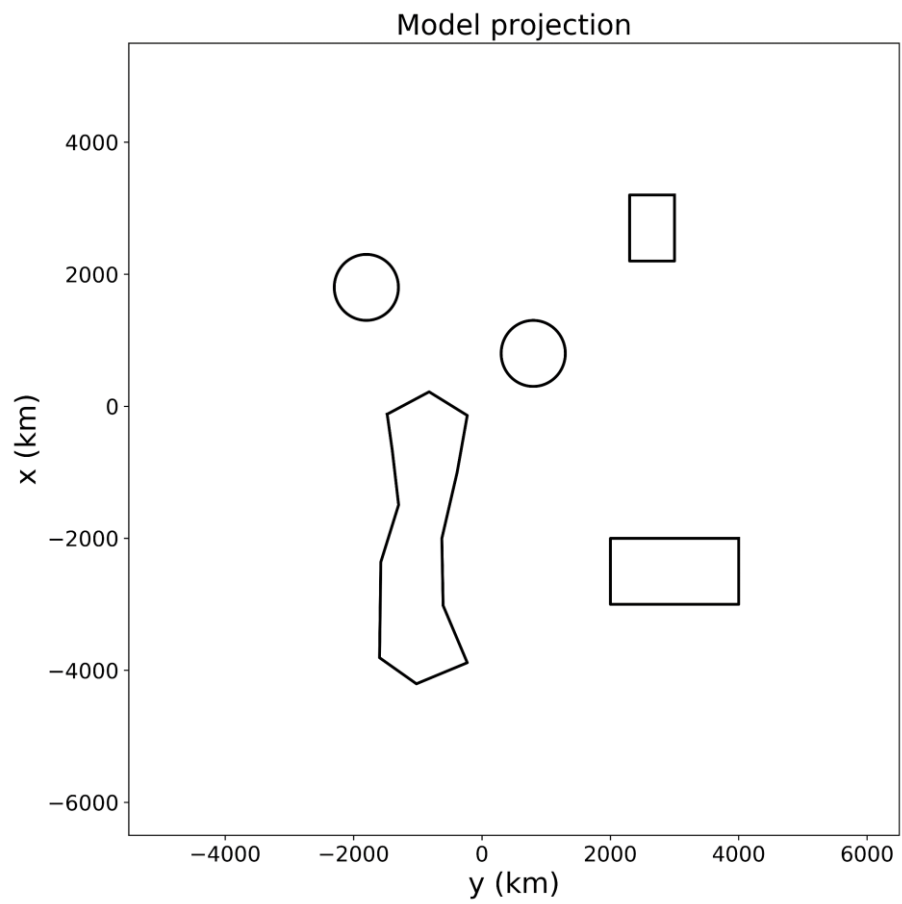
Para esta simulação

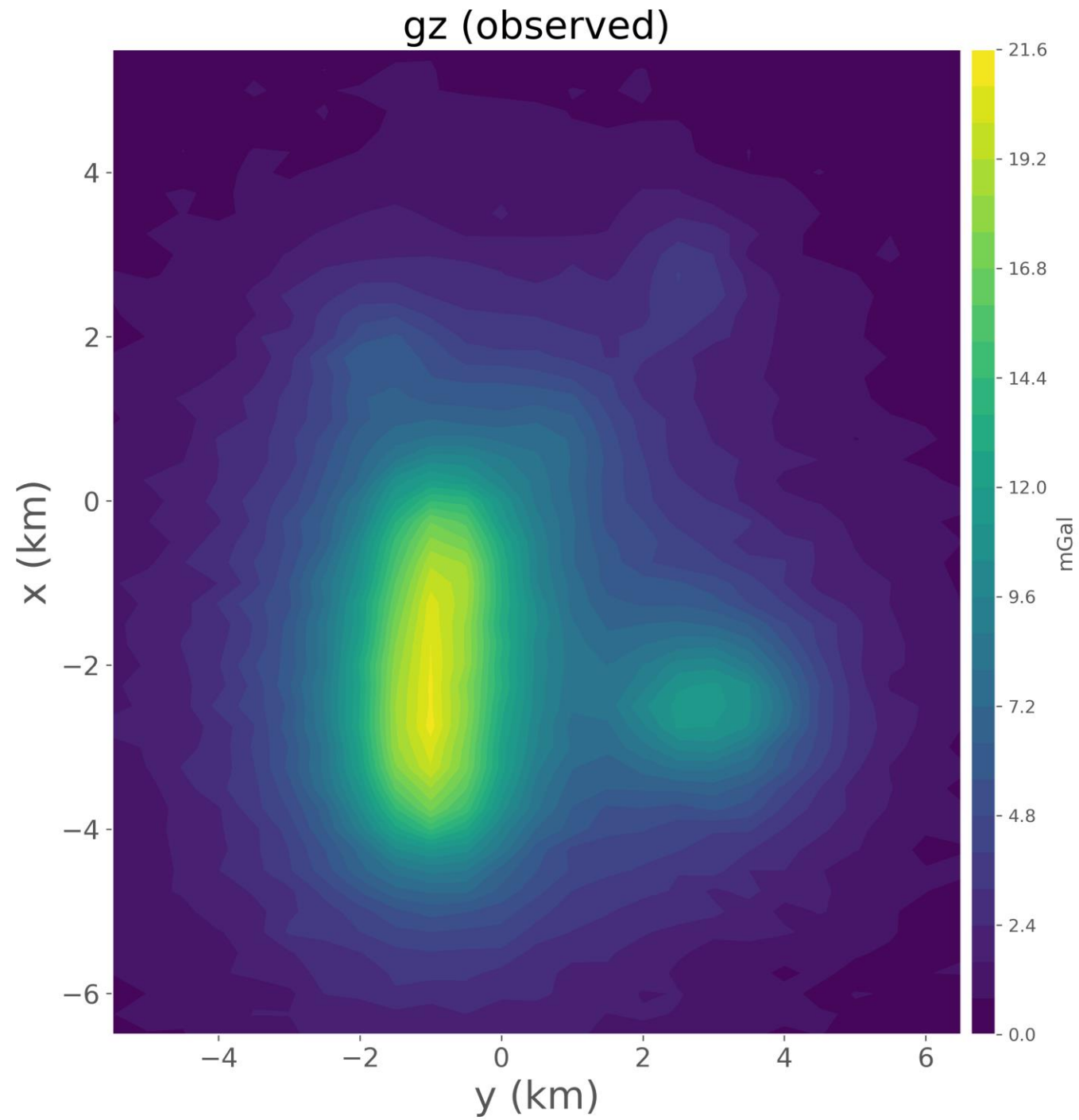
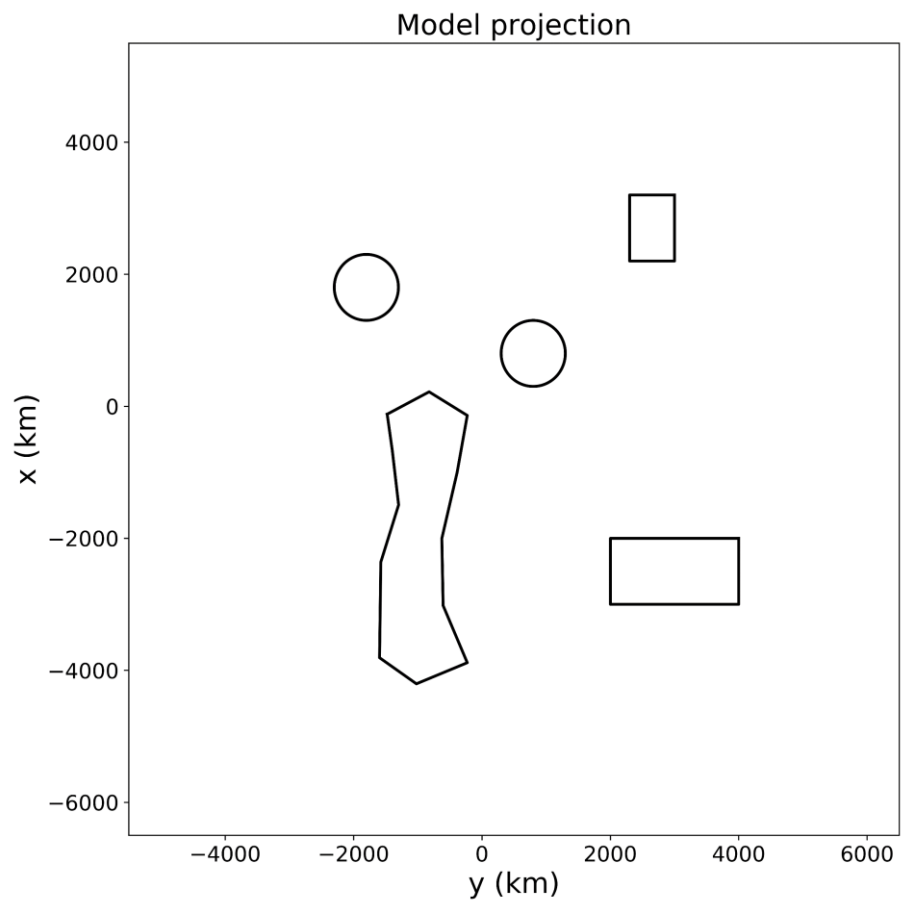
Altura de voo $h = 100$ m

Grid $(N_x, N_y) = (49, 25)$

Espaçamento do grid $(dx, dy) = (250, 500)$







Referências

- Blakely, R. J., 1996, Potential theory in gravity and magnetic applications: Cambridge University Press.
- Hofmann-Wellenhof, B. e H. Moritz, 2005, Physical Geodesy. Springer.
- Li, X., e H. J. Götze, 2001, Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics: Geophysics, 66, 1660-1668. DOI: 10.1190/1.1487109.
- Kellogg, O. D., 1929, Foundations of potential theory: Frederick Ungar Publishing Company.
- Macmillan, W. D., 1958, Theory of the Potential: Dover Publications Inc.

Até a próxima aula!