Introdução à Teoria do Potencial

Prof. André Luis Albuquerque dos Reis

Rio de Janeiro 2021

Objetivo: Introduzir conceitos sobre Teoria do Potencial e as suas consequências do ponto de vista físico e matemático.

- A Lei da Gravitação;
- Introdução a Teoria do potencial;
- Identidades de Green;
- A integral de continuação para cima.

A Lei da Gravitação

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Uma das quatro interações fundamentais!

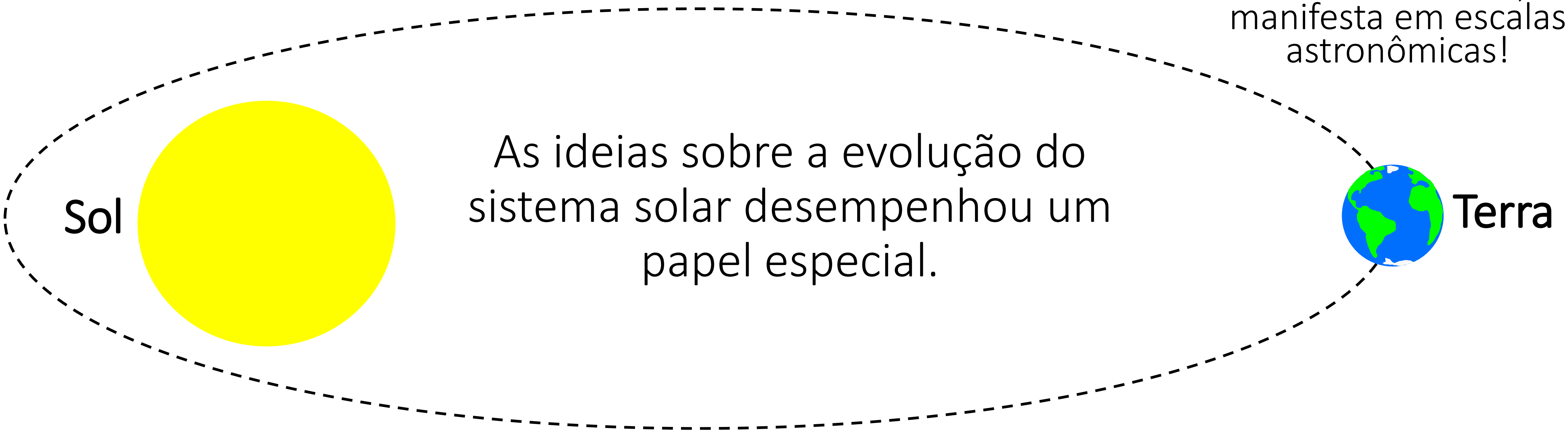
A mais fraca de todas, só se manifesta em escalas astronômicas!

(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Uma das quatro interações fundamentais!

A mais fraca de todas, só se manifesta em escalas astronômicas!



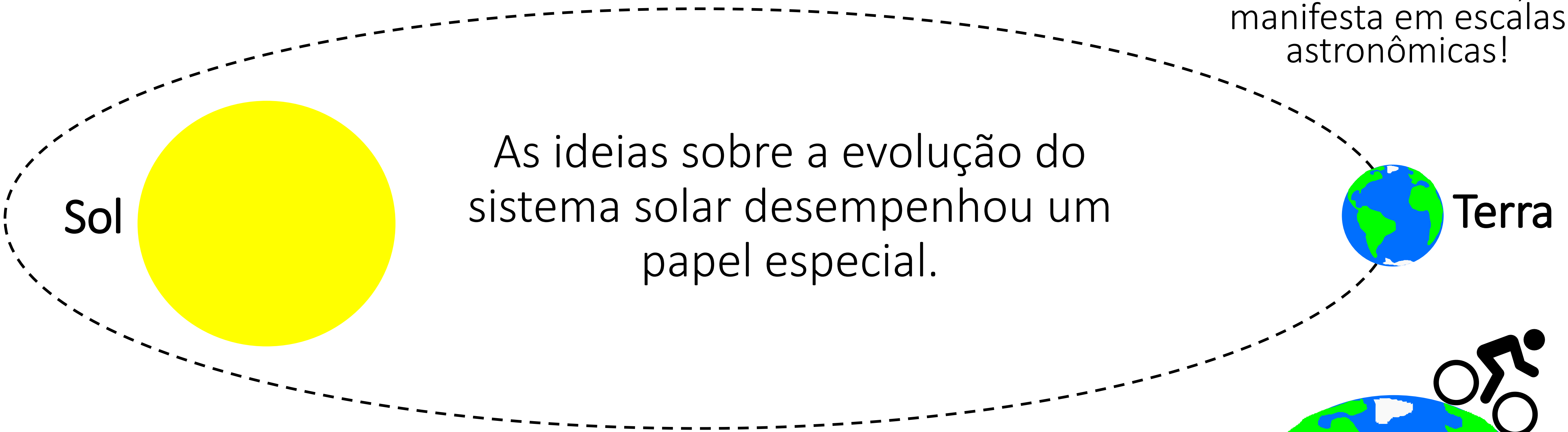
As ideias sobre a evolução do sistema solar desempenhou um papel especial.

(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Uma das quatro interações fundamentais!

A mais fraca de todas, só se manifesta em escalas astronômicas!



As ideias sobre a evolução do sistema solar desempenhou um papel especial.

... Que também se encontra na descrição do campo de gravidade e do formato da Terra!

....e governa, não só a mecânica celeste, como toda a mecânica sobre a superfície terrestre e em regiões próximas a ela.

(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois apectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

(Torge, 2001)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Formato da Terra: a superfície física e matemática

Dentro das geociências é a **Geodésia Física!**

Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois apectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

(Torge, 2001)

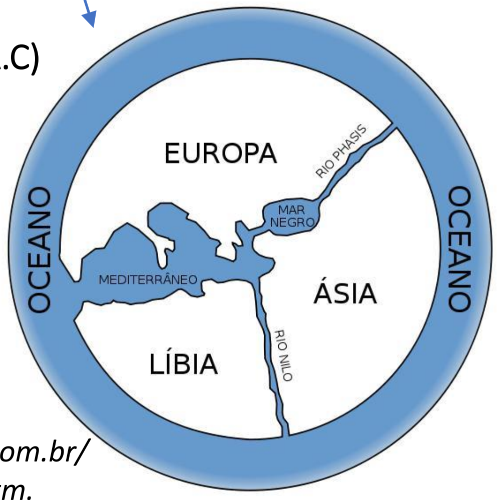
Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Dentro das geociências é a **Geodésia Física!**

Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois apectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

Formato da Terra: a superfície física e matemática

Tales de Mileto e Anaximandro (600 A.C)



https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/anaximandro.htm. Acesso em 28 de março de 2021.

(Torge, 2001)

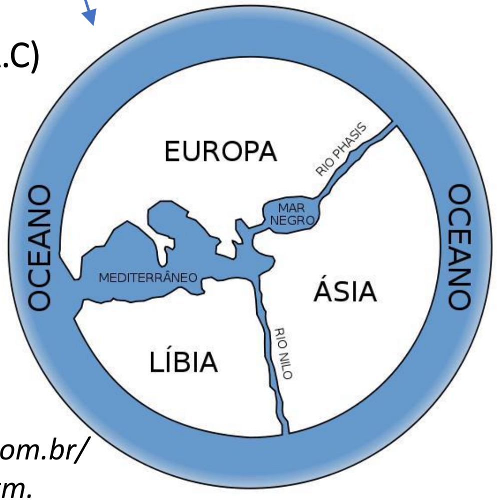
Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois apectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

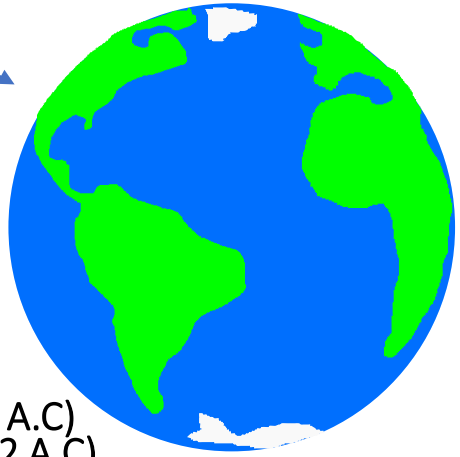
Dentro das geociências é a **Geodésia Física!**

Formato da Terra: a superfície física e matemática

Tales de Mileto
e Anaximandro (600 A.C)



https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/anaximandro.htm. Acesso em 28 de março de 2021.



Pitágoras (580-500 A.C)
Aristóteles (384-322 A.C)

Eratóstenes (276-295 A.C)
foi o primeiro a estimar o raio terrestre

(Torge, 2001)

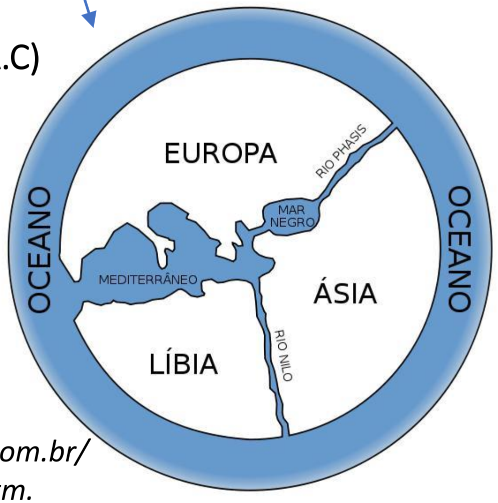
Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois apectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

Dentro das geociências é a **Geodésia Física!**

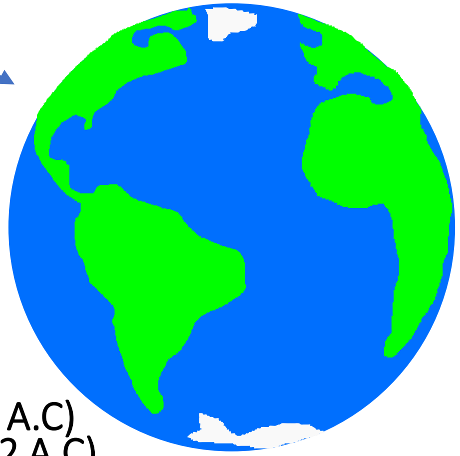
Formato da Terra: a superfície física e matemática

Tales de Mileto
e Anaximandro (600 A.C)

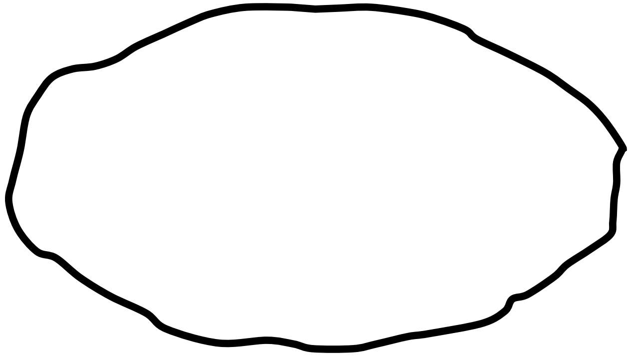


https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/anaximandro.htm. Acesso em 28 de março de 2021.

Pitágoras (580-500 A.C)
Aristóteles (384-322 A.C)



Eratóstenes (276-295 A.C) foi o primeiro a estimar o raio terrestre



No Século 17, com Isaac Newton (1643-1727), reconheceram que terra havia um achatamento nos polos

(Torge, 2001)

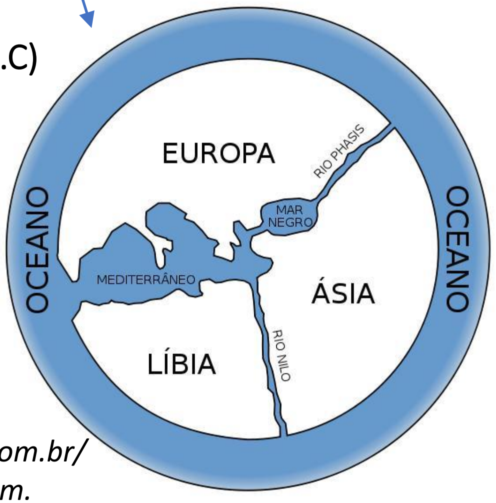
Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Dentro das geociências é a **Geodésia Física!**

Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois apectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

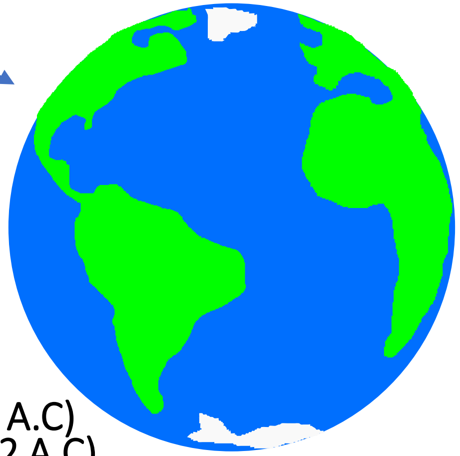
Formato da Terra: a superfície física e matemática

Tales de Mileto
e Anaximandro (600 A.C)



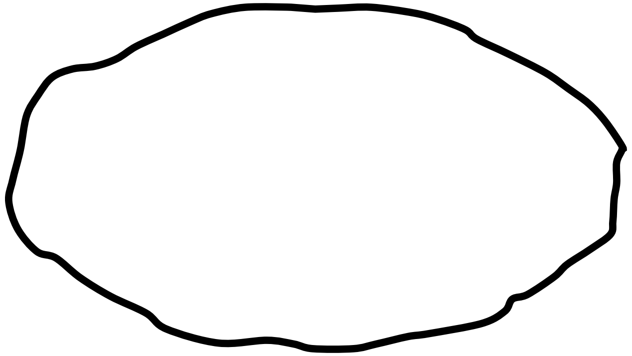
https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/anaximandro.htm. Acesso em 28 de março de 2021.

Pitágoras (580-500 A.C)
Aristóteles (384-322 A.C)



Eratóstenes (276-295 A.C) foi o primeiro a estimar o raio terrestre

No século 19, já determinaram o modelo atual, que é o geoidal!



No Século 17, com Isaac Newton (1643-1727), reconheceram que terra havia um achatamento nos polos

(Torge, 2001)

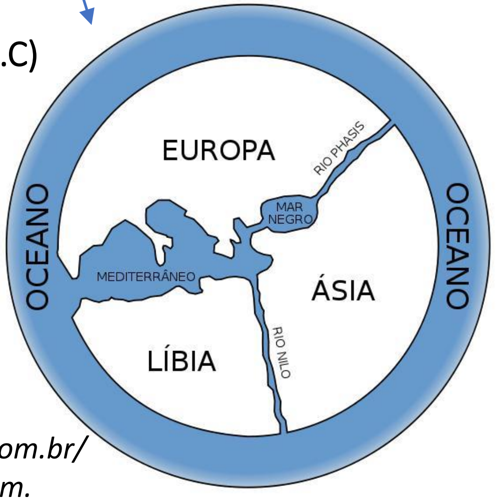
Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Dentro das geociências é a **Geodésia Física!**

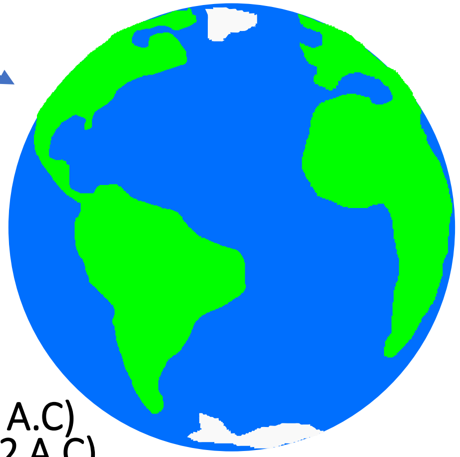
Dentro deste contexto, esta lei incorpora dois apectos: um geométrico (**formato da Terra**) e um físico (**campo de gravidade**)

Formato da Terra: a superfície física e matemática

Tales de Mileto
e Anaximandro (600 A.C)

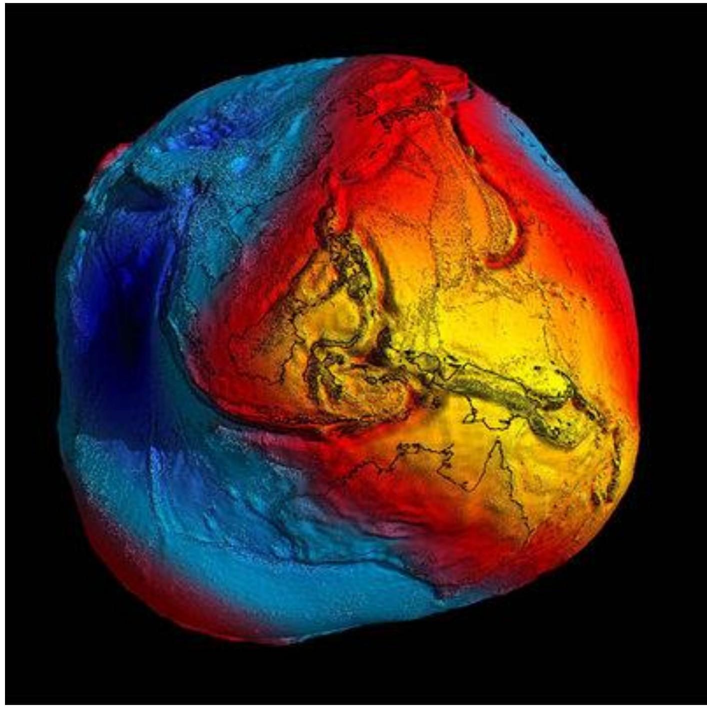


https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/anaximandro.htm. Acesso em 28 de março de 2021.



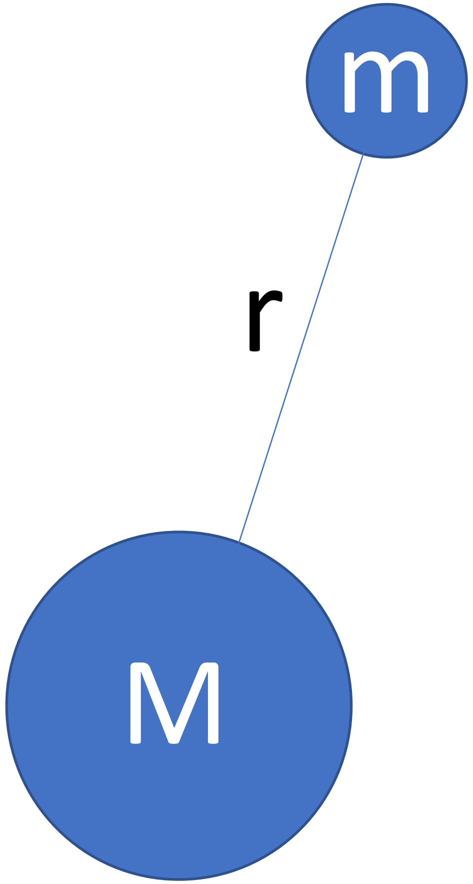
Pitágoras (580-500 A.C)
Aristóteles (384-322 A.C)

Eratóstenes (276-295 A.C)
foi o primeiro a estimar o
raio terrestre



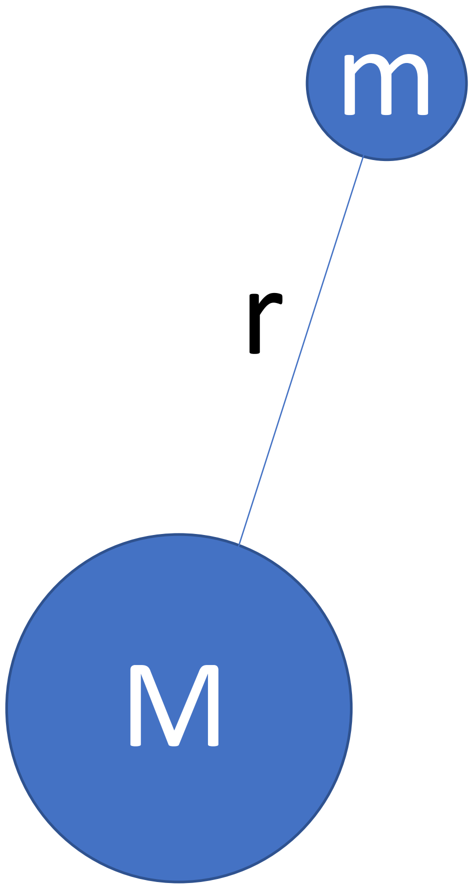
(Torge, 2001)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton



(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton



Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.\,10^{-11}\,m^3kg^{-1}\,s^{-2}$$

(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

A terra esférica e homogênea!

É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.10^{-11}\, m^3 kg^{-1}\, s^{-2}$$

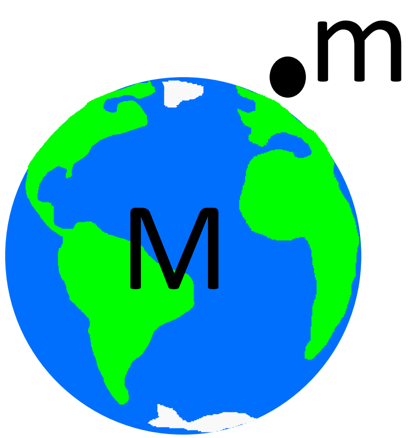
(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.10^{-11}\, m^3 kg^{-1}\, s^{-2}$$

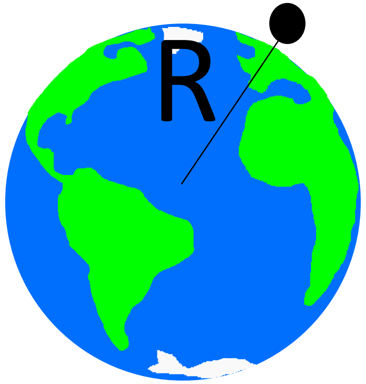
(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.10^{-11}\,m^3kg^{-1}\,s^{-2}$$

R ≈ 6371 km

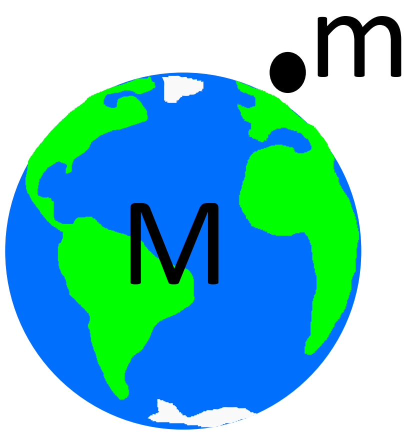
(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$m\mathbf{g} = G\frac{Mm}{R^2}\hat{\mathbf{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.\,10^{-11}\,m^3kg^{-1}\,s^{-2}$$

R ≈ 6371 km

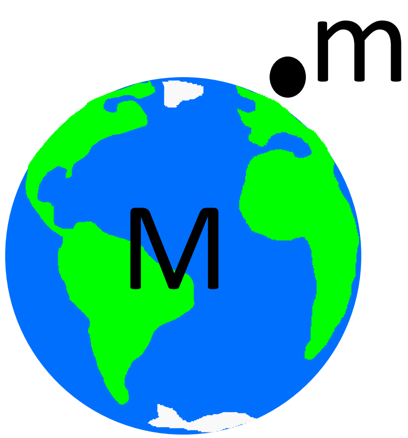
(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\cancel{m}\mathbf{g} = G\frac{M\cancel{m}}{R^2}\hat{\mathbf{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.\,10^{-11}\,m^3 kg^{-1}\,s^{-2}$$

R ≈ 6371 km

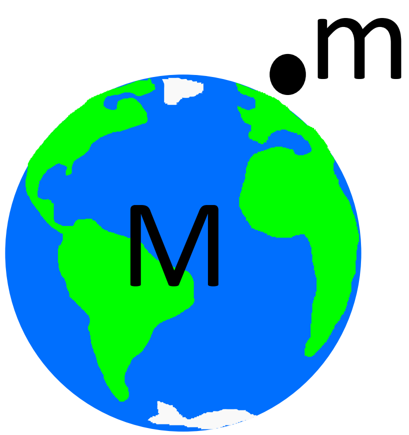
(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{g} = G\frac{M}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.10^{-11}\, m^3 kg^{-1}\, s^{-2}$$

R ≈ 6371 km

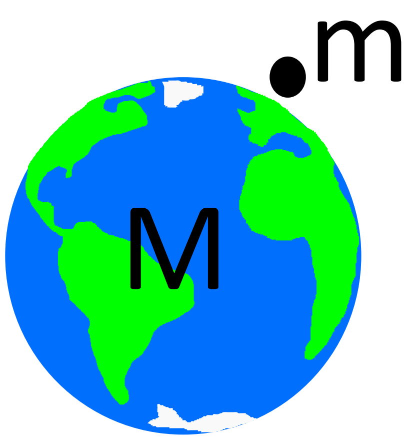
(Nussenzveig, 2002)

Tem como ponto de partida a Lei da Gravitação Universal, publicada no século XVII por Newton

Descreve a atração gravitacional entre duas massas

$$\mathbf{g} = G\frac{M}{R^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \approx 9{,}8\ m/s^2$$

A terra esférica e homogênea!



É denominada como constante gravitacional que em unidades do SI é dada por

$$G = 6{,}67.\,10^{-11}\,m^3 kg^{-1}\,s^{-2}$$

R ≈ 6371 km

(Nussenzveig, 2002)

Introdução da Teoria do Potencial

Serviu como ponto de partida para a Teoria do potencial

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Serviu como ponto de partida para a Teoria do potencial

É o estudo dos campos potenciais conservativos, nos quais são derivados de um potencial.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Serviu como ponto de partida para a Teoria do potencial

É o estudo dos campos potenciais conservativos, nos quais são derivados de um potencial.

Tais campos obedecem uma equação diferencial parcial chamada equação de Laplace, que serve para de funções harmônicas.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Serviu como ponto de partida para a Teoria do potencial

É o estudo dos campos potenciais conservativos, nos quais são derivados de um potencial.

Tais campos obedecem uma equação diferencial parcial chamada equação de Laplace, que serve para de funções harmônicas.

Descreve uma série de fenômenos da natureza, tais como a transferência de calor em meios homogêneos, o escoamentos de fluidos em meios ideais, os campos eletrostáticos e magnetostáticos, dentre outros!

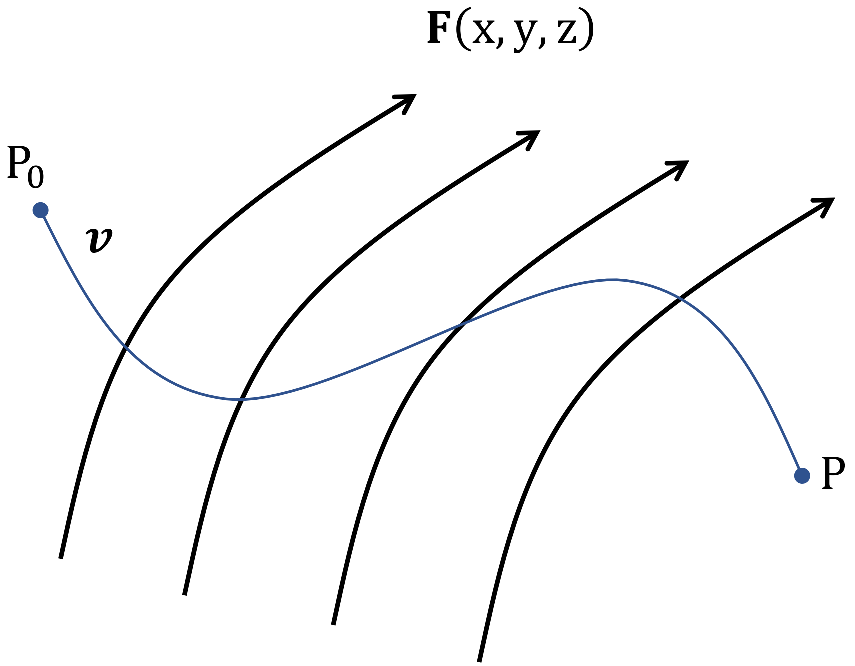
(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$



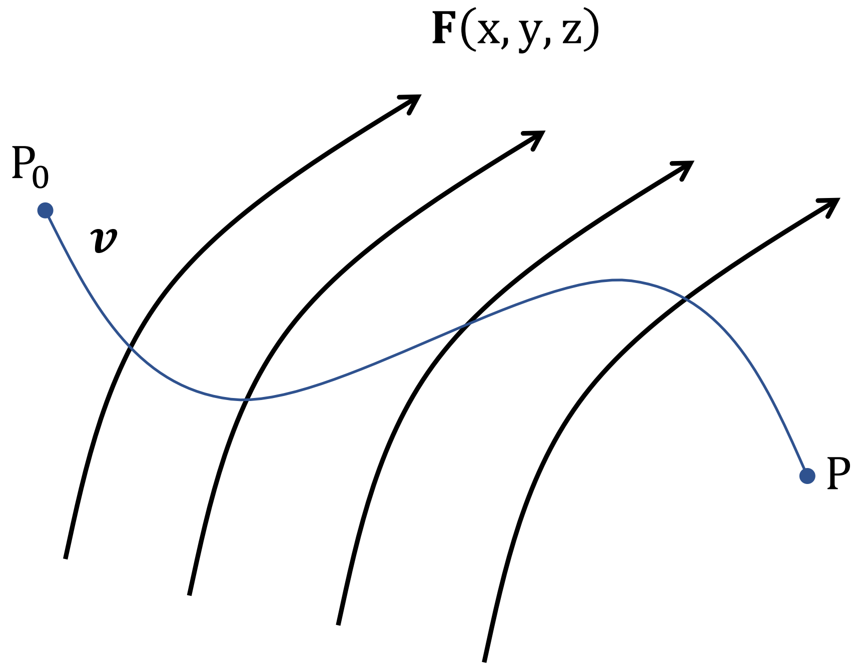
Pela 1ª Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = \mathbf{ma}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$



Pela 1ª Lei de Newton:

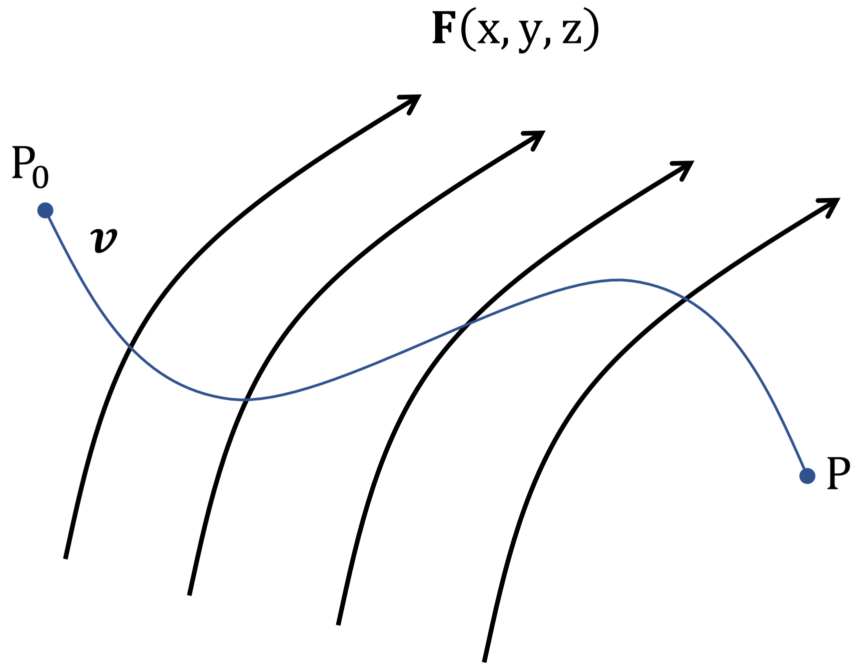
$$\mathbf{F} = \mathbf{ma}$$

$$\mathbf{F} = \mathrm{m}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$



Pela 1ª Lei de Newton:

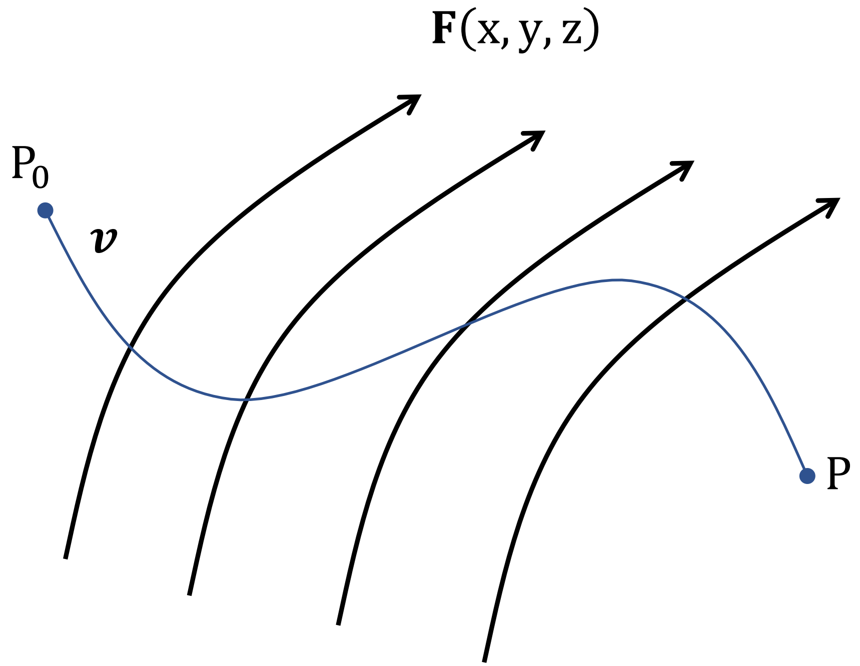
$$\mathbf{F} = \mathbf{ma}$$

$$\mathbf{F}\boldsymbol{v} = \mathrm{m}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$



Pela 1ª Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = \mathrm{m}\mathbf{a}$$

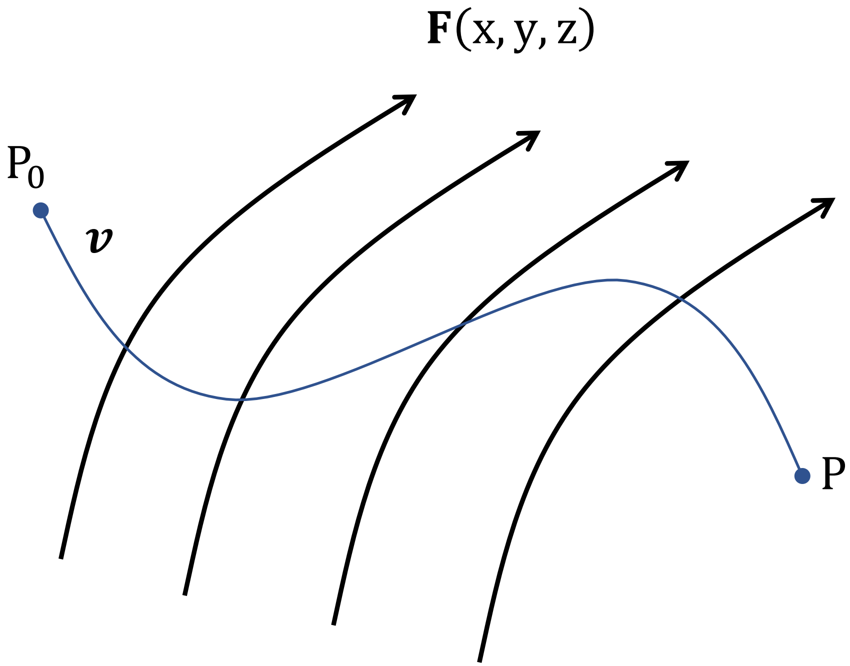
$$\mathbf{F}\boldsymbol{v} = \mathrm{m}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}$$

$$\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathbf{F}\boldsymbol{v}\boldsymbol{dt} = \int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} \mathrm{m}\boldsymbol{v}\boldsymbol{dv}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$



Pela 1ª Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = \mathbf{ma}$$

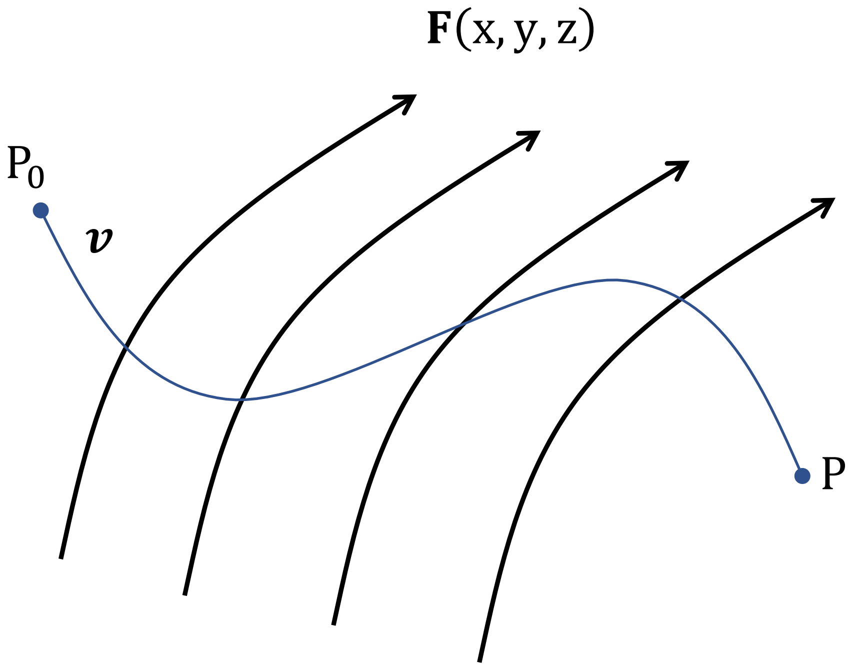
$$\mathbf{F}\boldsymbol{v} = \mathrm{m}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}$$

$$\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \mathbf{F}.\,\boldsymbol{ds} = \mathrm{m}\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}\boldsymbol{dv}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$



Pela 1ª Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = \mathrm{m}\mathbf{a}$$

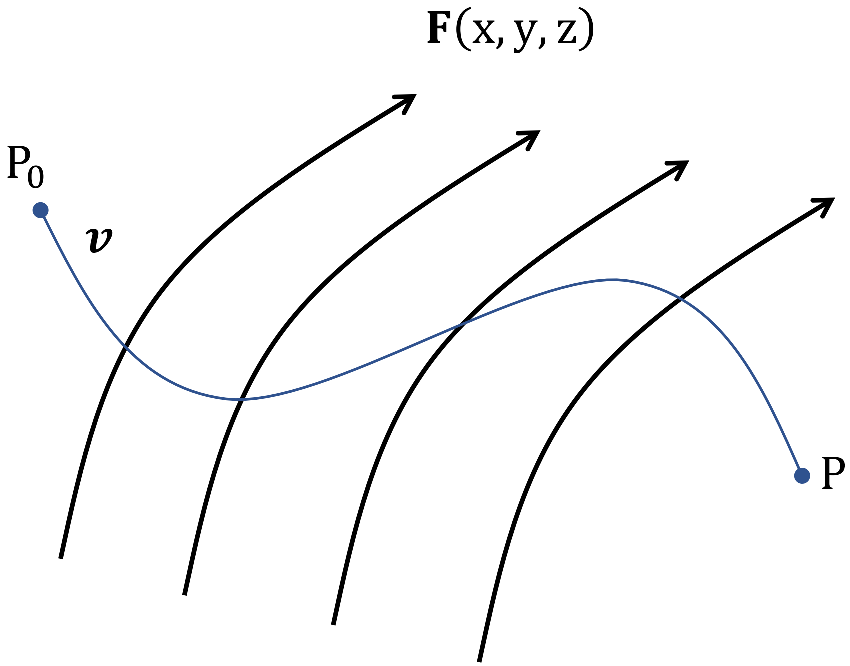
$$\mathbf{F}\boldsymbol{v} = \mathrm{m}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}$$

$$\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \mathbf{F}.\boldsymbol{ds} = \mathrm{m}\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}\boldsymbol{dv} = \frac{1}{2}\mathrm{m}v^2$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$



Pela 1ª Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = \mathbf{ma}$$

$$\mathbf{F}\boldsymbol{v} = \mathrm{m}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}$$

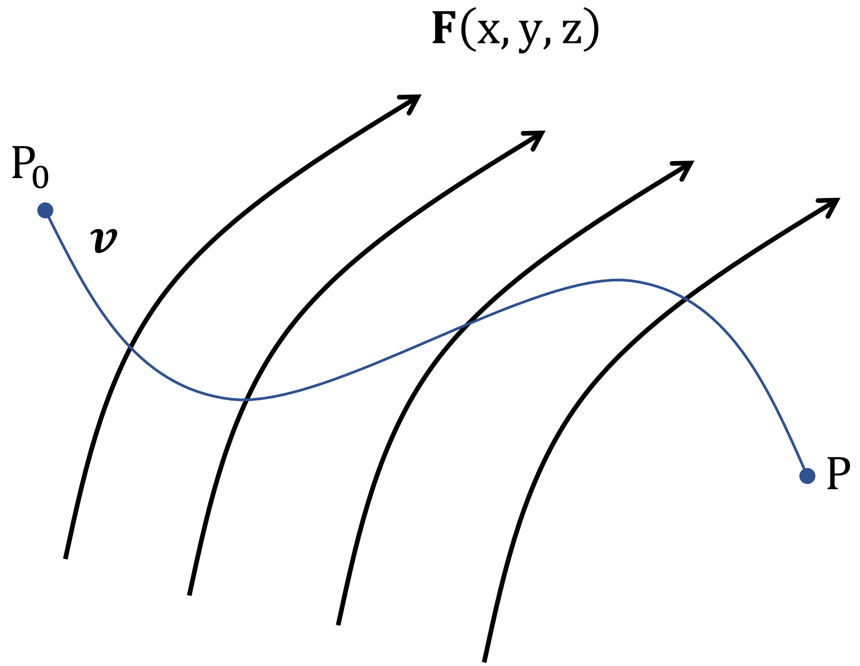
$$\int_{\mathrm{P_0}}^{\mathrm{P}} \mathbf{F}.\boldsymbol{ds} = \mathrm{m}\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\mathrm{m}v^2$$

Energia cinética

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$



Teorema do Trabalho e Energia:

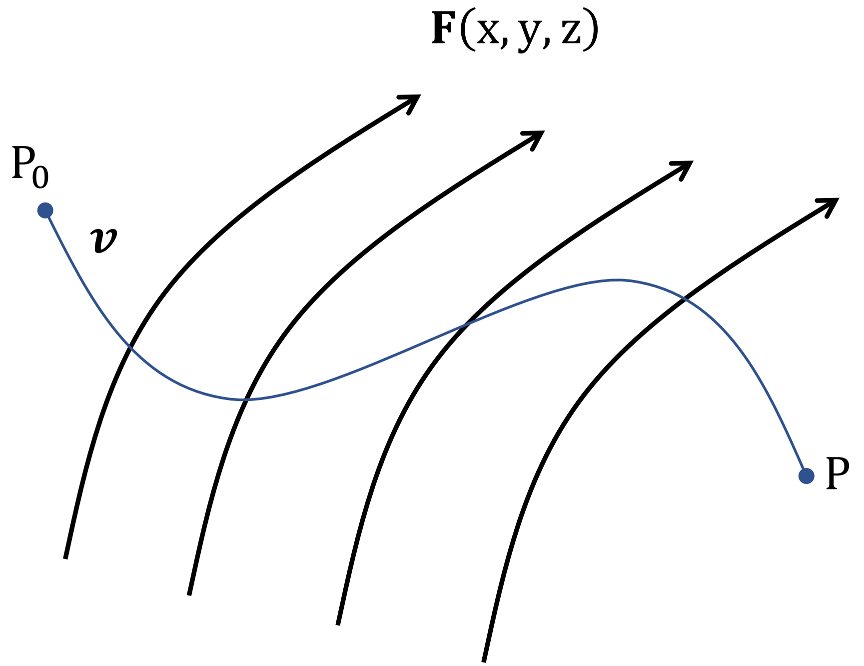
$$\mathrm{E} - \mathrm{E}_0 = \int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{F} . \boldsymbol{ds}$$

O trabalho realizado por uma força é igual a variação de energia.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$



Teorema do Trabalho e Energia:

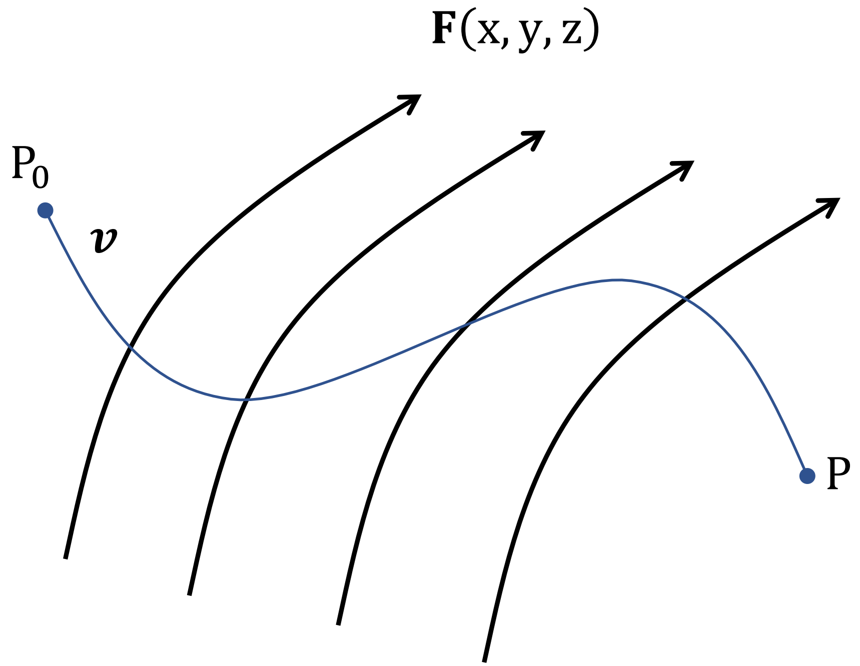
$$E - E_0 = \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{ds} = \phi(P, P_0)$$

De modo geral, o trabalho de uma força depende do caminho no qual ela é exercida

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$



Teorema do Trabalho e Energia:

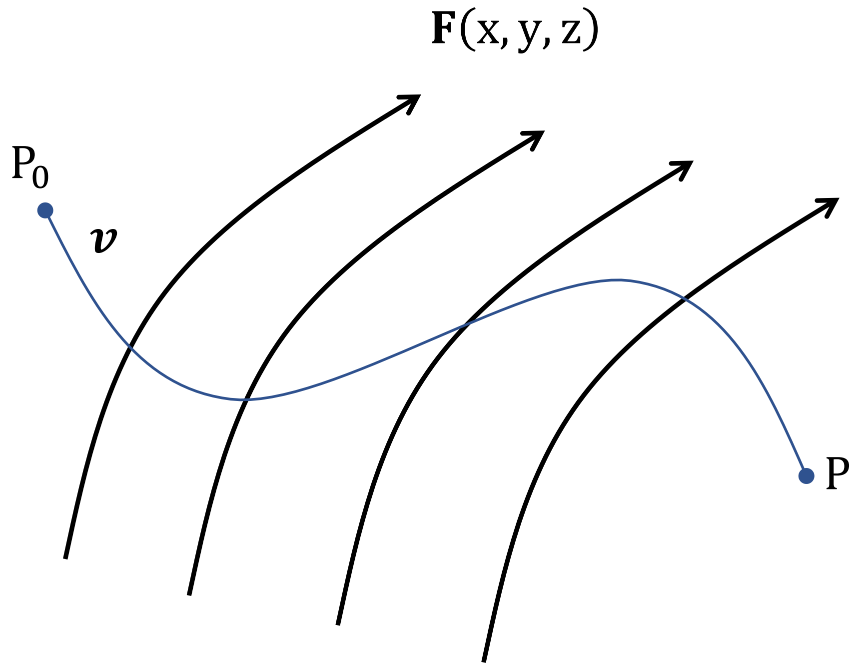
$$E - E_0 = \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{ds} = \phi(P, P_0)$$

Quando o trabalho **NÃO** depende do caminho pela qual a força é exercida, ela é dita **conservativa**

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$



Neste caso a força pode ser definida como:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y, z).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(x, y, z)$.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z).$$

Este ca

$$\nabla.(\nabla\phi) = \nabla^2\phi$$

Tomando o Laplaciano

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

$$\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

$$\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Este potencial será harmônico se ele satisfizer a
Equação de Laplace

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Este campo será harmônico se

$$\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

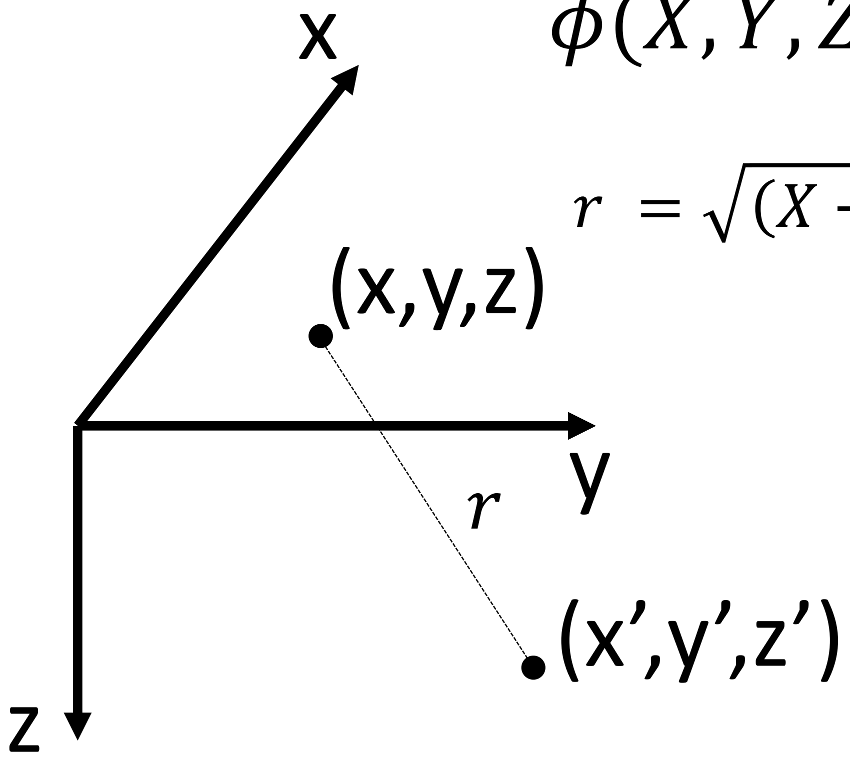
Este campo será harmônico se

$$\nabla^2 \phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Ex[1].:

$$\phi(X, Y, Z, X', Y, Z') = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

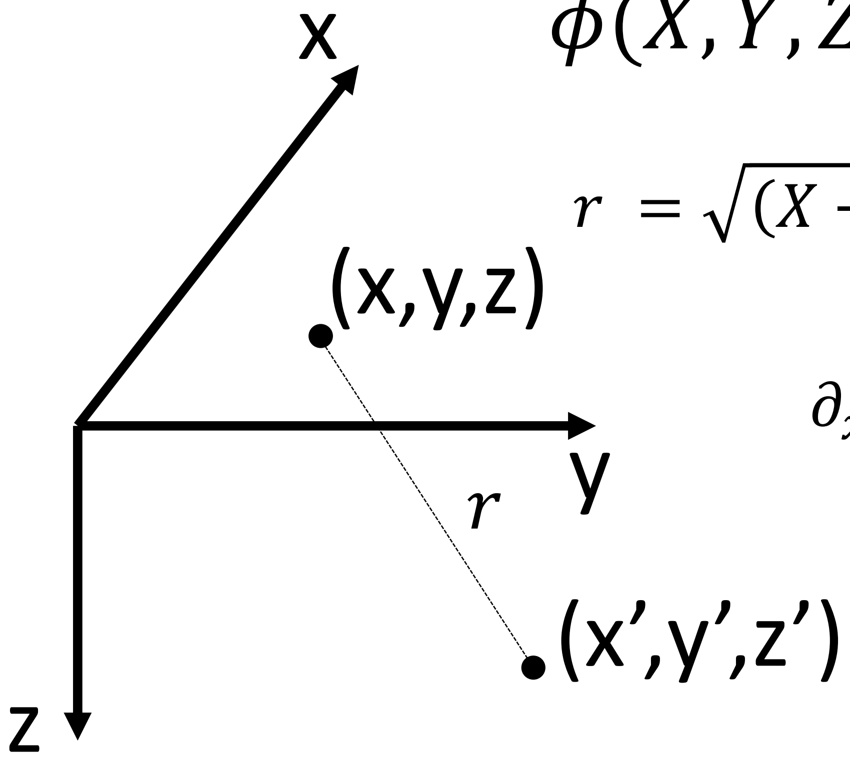


(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Este campo será harmônico se

$$\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Ex[1].:



$$\phi(X, Y, Z, X', Y, Z') = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

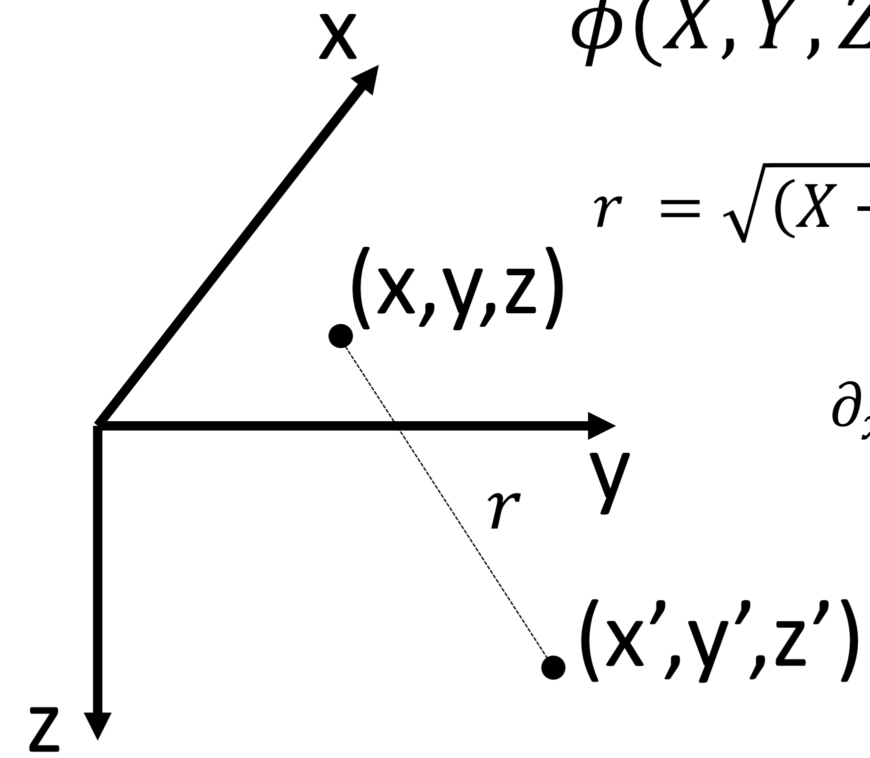
$$\partial_{xx}\phi = \frac{3(X - X')^2 - r^2}{r^5}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Este campo será harmônico se

$$\nabla^2 \phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Ex[1].:



$$\phi(X, Y, Z, X', Y, Z') = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

$$\partial_{xx}\phi = \frac{3(X - X')^2 - r^2}{r^5} \qquad \partial_{yy}\phi = \frac{3(Y - Y')^2 - r^2}{r^5}$$

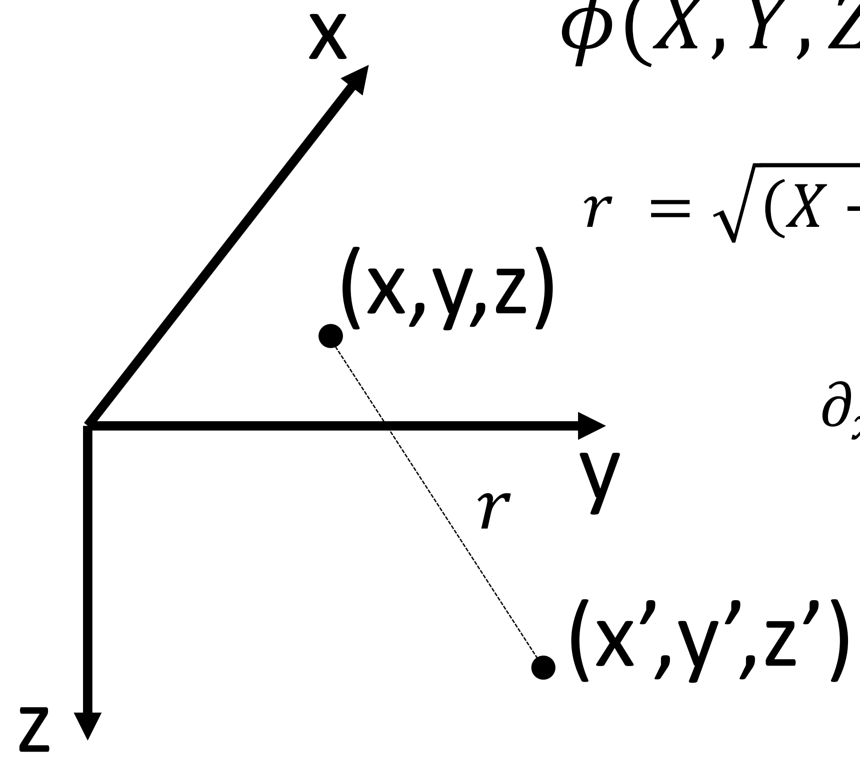
$$\partial_{zz}\phi = \frac{3(Z - Z')^2 - r^2}{r^5}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Este campo será harmônico se

$$\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Ex[1].:



$$\phi(X, Y, Z, X', Y, Z') = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

$$\partial_{xx}\phi = \frac{3(X - X')^2 - r^2}{r^5} \qquad \partial_{yy}\phi = \frac{3(Y - Y')^2 - r^2}{r^5}$$

$$\partial_{zz}\phi = \frac{3(Z - Z')^2 - r^2}{r^5}$$

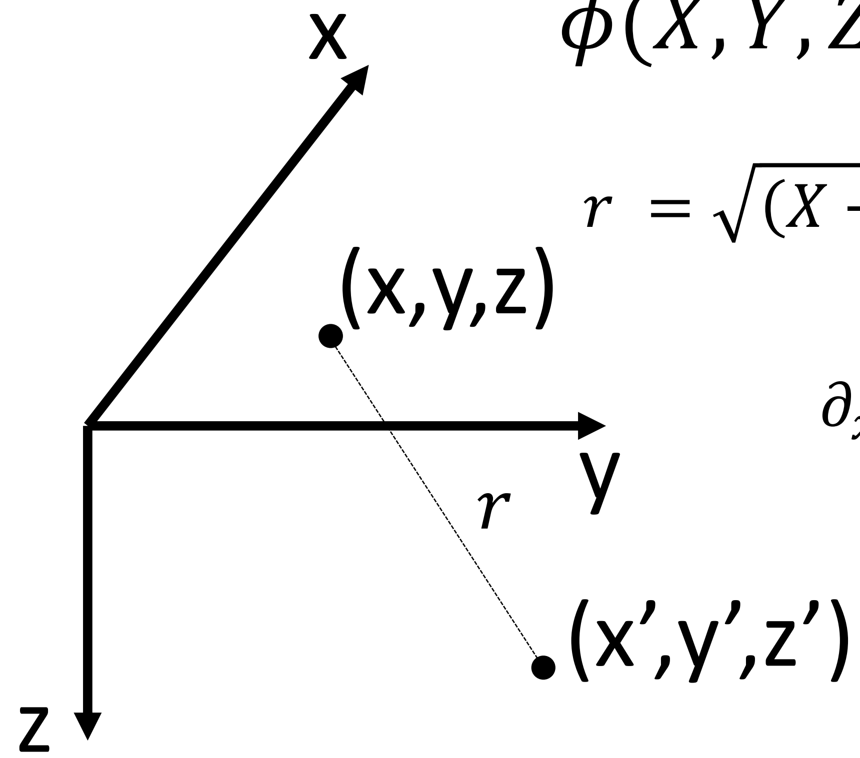
$$\frac{3(X - X')^2 - r^2}{r^5} + \frac{3(Y - Y')^2 - r^2}{r^5} + \frac{3(Z - Z')^2 - r^2}{r^5}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Este campo será harmônico se

$$\nabla^2 \phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Ex[1].:



$$\phi(X, Y, Z, X', Y, Z') = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}$$

$$\partial_{xx}\phi = \frac{3(X - X')^2 - r^2}{r^5} \qquad \partial_{yy}\phi = \frac{3(Y - Y')^2 - r^2}{r^5}$$

$$\partial_{zz}\phi = \frac{3(Z - Z')^2 - r^2}{r^5}$$

$$= 3r^2$$

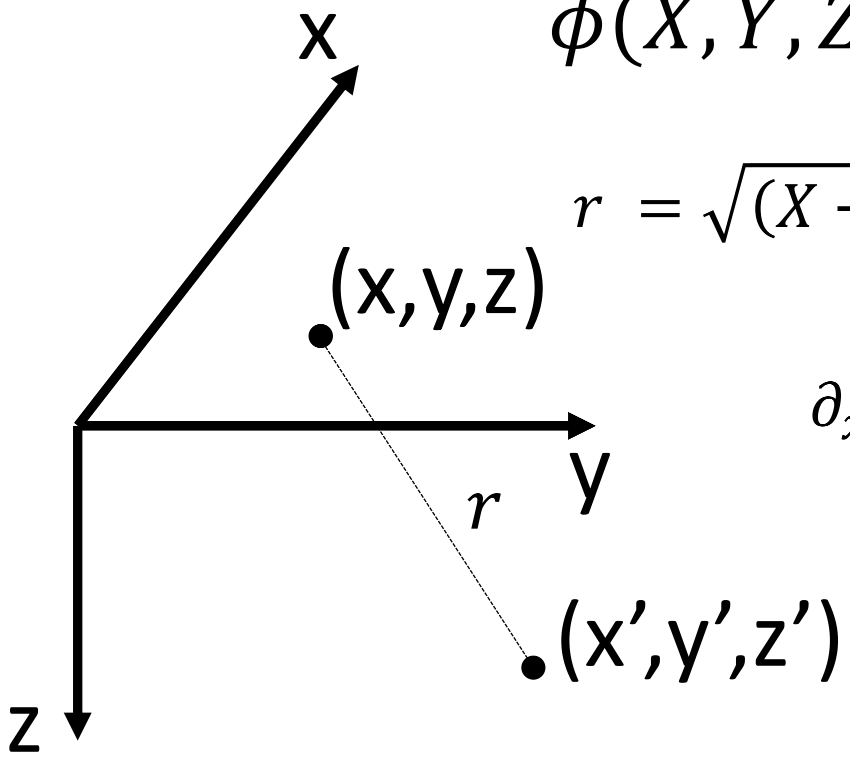
$$\frac{3(X-X')^2 - r^2}{r^5} + \frac{3(Y-Y')^2 - r^2}{r^5} + \frac{3(Z-Z')^2 - r^2}{r^5}$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Este campo será harmônico se

$$\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0.$$

Ex[1].:



$$\phi(X,Y,Z,X',Y,Z') = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2}$$

$$\partial_{xx}\phi = \frac{3(X-X')^2 - r^2}{r^5} \qquad \partial_{yy}\phi = \frac{3(Y-Y')^2 - r^2}{r^5}$$

$$\partial_{zz}\phi = \frac{3(Z-Z')^2 - r^2}{r^5}$$

$$\frac{3(X-X')^2 - r^2}{r^5} + \frac{3(Y-Y')^2 - r^2}{r^5} + \frac{3(Z-Z')^2 - r^2}{r^5}$$

$$= \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y, z).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(x, y, z)$.

Uma **superfície equipotencial** ⟹ $\phi(x, y, z) = \text{constante}$

Superfície pela qual o potencial é constante!

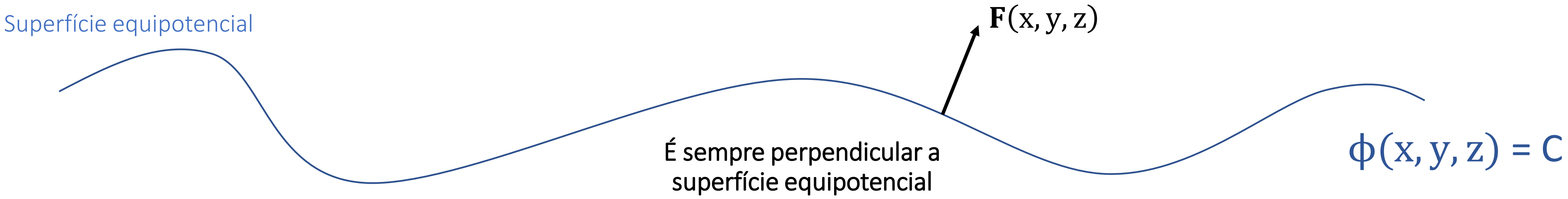
(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Um campo é um conjunto de funções do espaço ou do tempo que descrevem alguma propriedade física em cada ponto, seja ele vetorial ou escalar.

Suponha que tenhamos um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y, z).$$

Este campo é gerado por este potencial $\phi(x, y, z)$.



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Algumas consequências...

Uma das consequências do estudo de funções harmônicas são três equações chamadas de **Identidades de Green**.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

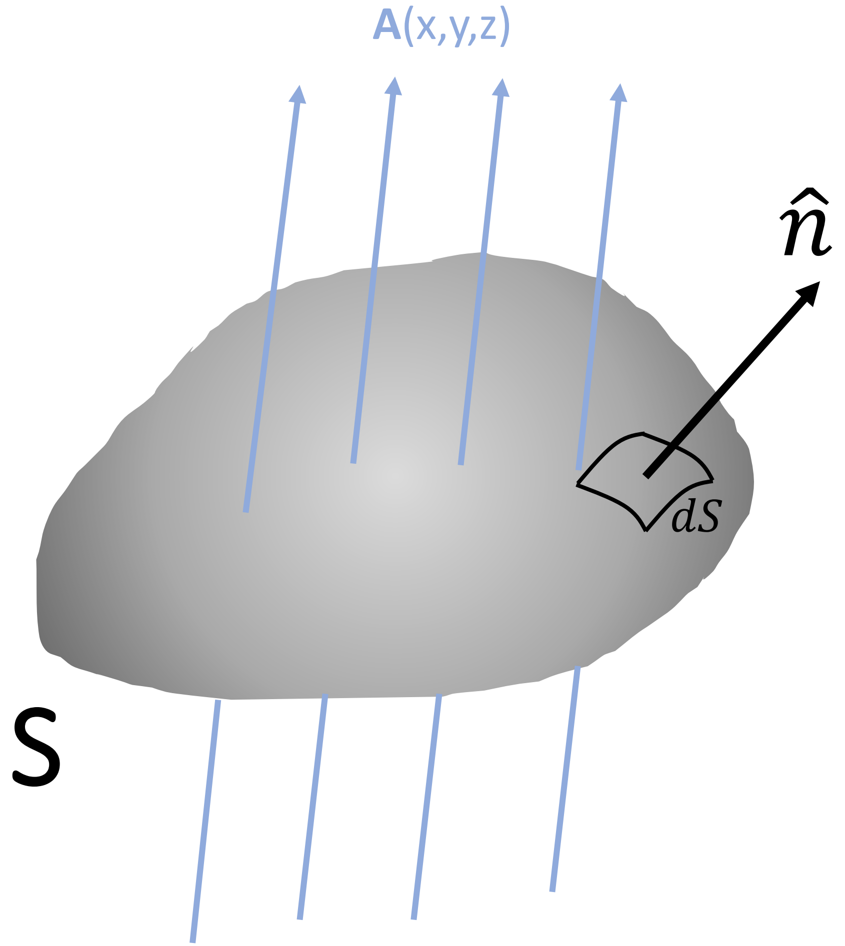
Teorema da divergência (Teorema de Gauss)

Seja **A**(x,y,z) um campo vetorial contínuo e diferenciável em todos os pontos do volume v limitado pela superfície **S**:

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Teorema da divergência (Teorema de Gauss)

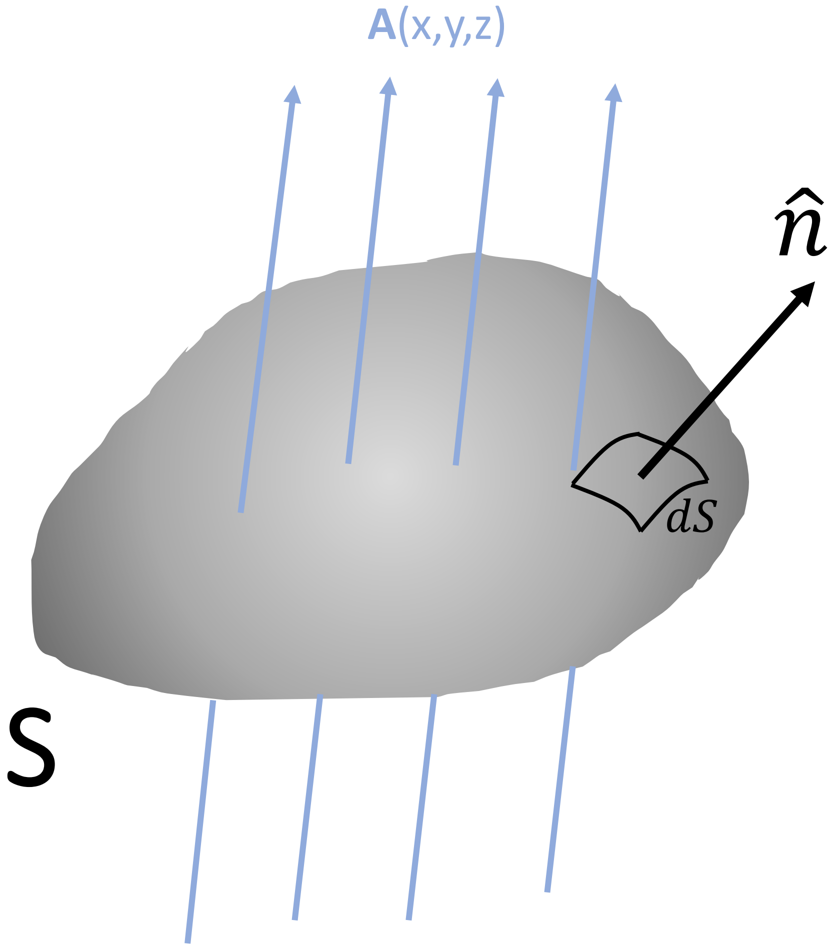
Seja **A**(x,y,z) um campo vetorial contínuo e diferenciável em todos os pontos do volume v limitado pela superfície **S**:



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Teorema da divergência (Teorema de Gauss)

Seja **A**(x,y,z) um campo vetorial contínuo e diferenciável em todos os pontos do volume v limitado pela superfície **S**:



$$\int_v \nabla.\mathbf{A}\,dv = \int_S \mathbf{A}.\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

O fluxo do campo que atravessa uma superfície fechada é igual a integral de volume do divergente deste campo.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

1ª Identidade de Green

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

1ª Identidade de Green

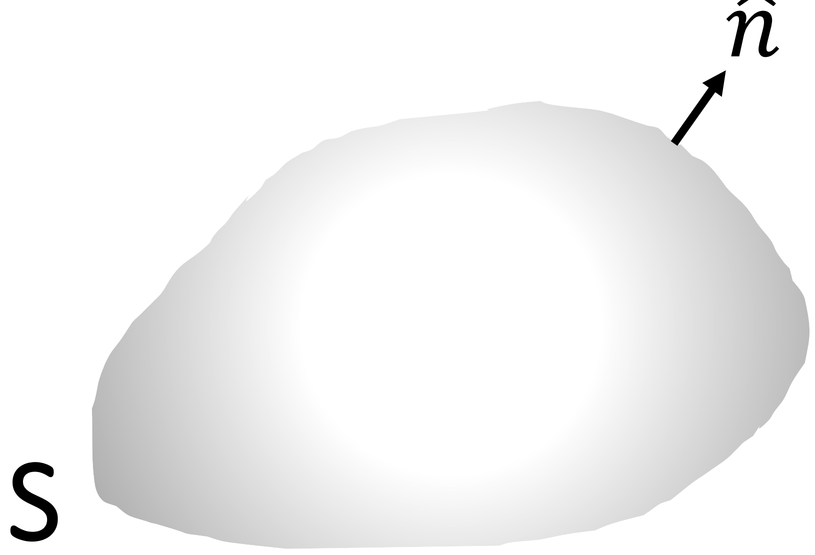
Sendo U e V duas funções contínuas com derivadas de primeira ordem em uma região fechada v, sendo S a superfície que limita esta região. E U uma função contínua com derivadas de segunda ordem em R. Podemos considerar um campo potencial igual a $\mathbf{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{U}$ e partindo do teorema da divergência.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

1ª Identidade de Green

Sendo **U** e **V** duas funções contínuas com derivadas de primeira ordem em uma região fechada v, sendo **S** a superfície que limita esta região. E **U** uma função contínua com derivadas de segunda ordem em **R**. Podemos considerar um campo potencial igual a $\mathbf{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{U}$ e partindo do teorema da divergência.

$$\int_{v} \nabla.\mathbf{A}\,dv = \int_{S} \mathbf{A}.\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

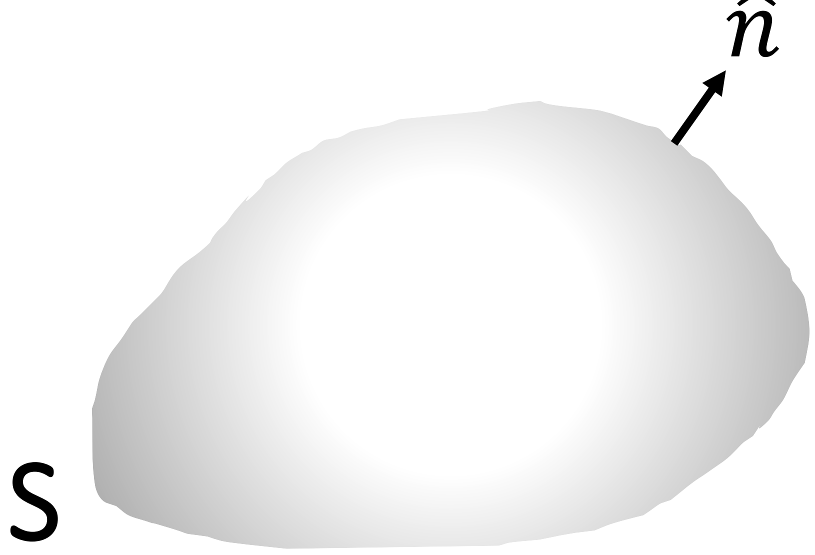


(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

1ª Identidade de Green

Sendo U e V duas funções contínuas com derivadas de primeira ordem em uma região fechada v, sendo S a superfície que limita esta região. E U uma função contínua com derivadas de segunda ordem em R. Podemos considerar um campo potencial igual a $\mathbf{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{U}$ e partindo do teorema da divergência.

$$\int_v \nabla.(\mathrm{V}\nabla\mathrm{U})dv = \int_S (\mathrm{V}\nabla\mathrm{U}).\,\hat{\mathbf{n}}\,dS$$



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

1ª Identidade de Green

Sendo **U** e **V** duas funções contínuas com derivadas de primeira ordem em uma região fechada v, sendo **S** a superfície que limita esta região. E **U** uma função contínua com derivadas de segunda ordem em **R**. Podemos considerar um campo potencial igual a $\mathbf{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{U}$ e partindo do teorema da divergência.

$$\int_v \overbrace{\nabla\cdot(\mathrm{V}\nabla\mathrm{U})}^{(\nabla\mathrm{V}\cdot\nabla\mathrm{U} + \mathrm{V}\,\nabla^2\mathrm{U})}\, dv = \int_S (\mathrm{V}\nabla\mathrm{U})\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

1ª Identidade de Green

Sendo **U** e **V** duas funções contínuas com derivadas de primeira ordem em uma região fechada v, sendo **S** a superfície que limita esta região. E **U** uma função contínua com derivadas de segunda ordem em **R**. Podemos considerar um campo potencial igual a $\mathbf{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{U}$ e partindo do teorema da divergência.

$$(\nabla \mathrm{V}.\nabla \mathrm{U} + \mathrm{V}\,\nabla^2 \mathrm{U}) \qquad \nabla \mathrm{U}.\hat{\mathbf{n}} \equiv \frac{\partial U}{\partial n}$$

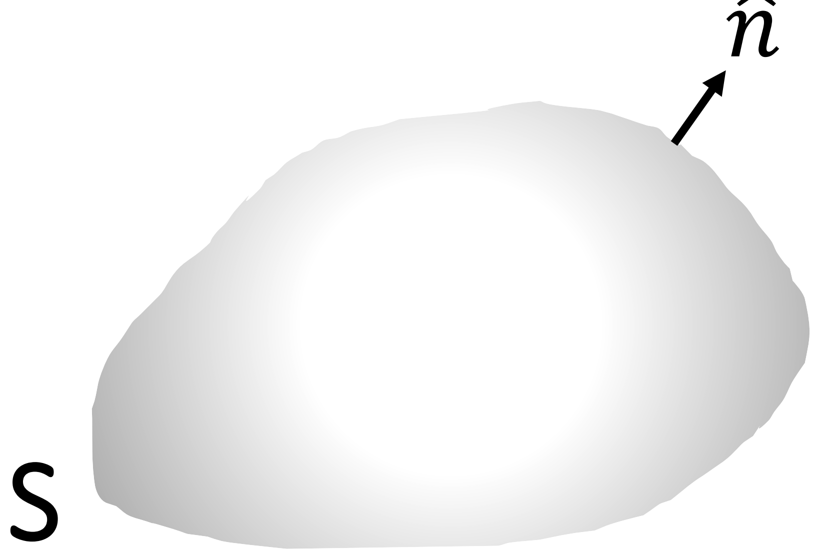
$$\int_v \nabla.(\mathrm{V}\nabla\mathrm{U})dv = \int_S (\mathrm{V}\nabla\mathrm{U}).\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

1ª Identidade de Green

Sendo **U** e **V** duas funções contínuas com derivadas de primeira ordem em uma região fechada v, sendo **S** a superfície que limita esta região. E **U** uma função contínua com derivadas de segunda ordem em **R**. Podemos considerar um campo potencial igual a $\mathbf{A} = \mathbf{V}\nabla\mathbf{U}$ e partindo do teorema da divergência.

$$\int_v (\nabla V . \nabla U + V\ \nabla^2 U) dv = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS$$



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

2ª Identidade de Green

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

2ª Identidade de Green

Sendo U e V diferenciáveis até segunda ordem na região fechada v e sendo S a superfície que limita esta região. Considerando também o campo potencial $\mathbf{A} = \mathrm{U}\nabla\mathrm{V}$ e partindo do teorema da divergência

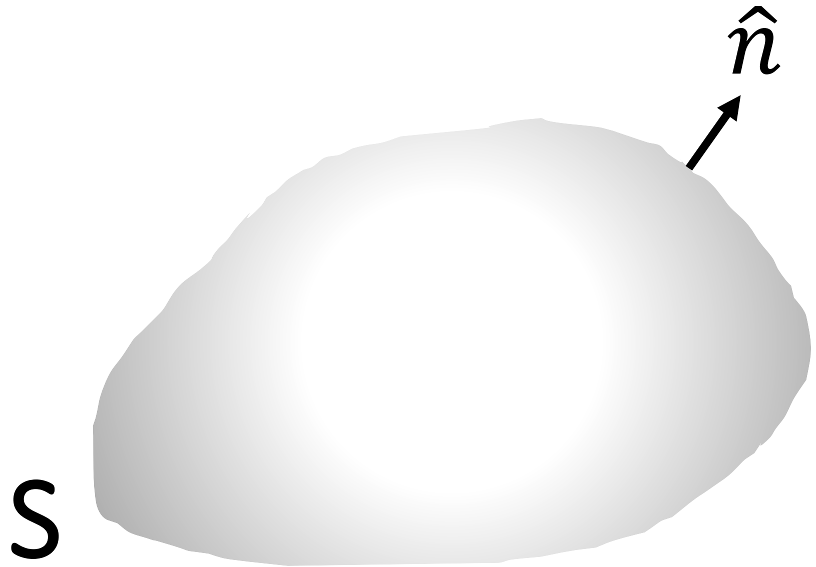
(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

2ª Identidade de Green

Sendo U e V diferenciáveis até segunda ordem na região fechada v e sendo **S** a superfície que limita esta região. Considerando também o campo potencial $\mathbf{A} = \mathrm{U}\nabla\mathrm{V}$ e partindo do teorema da divergência

Para $\mathbf{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{U}$:

$$\int_v (\nabla V . \nabla U + V\, \nabla^2 U) dv = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS$$



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

2ª Identidade de Green

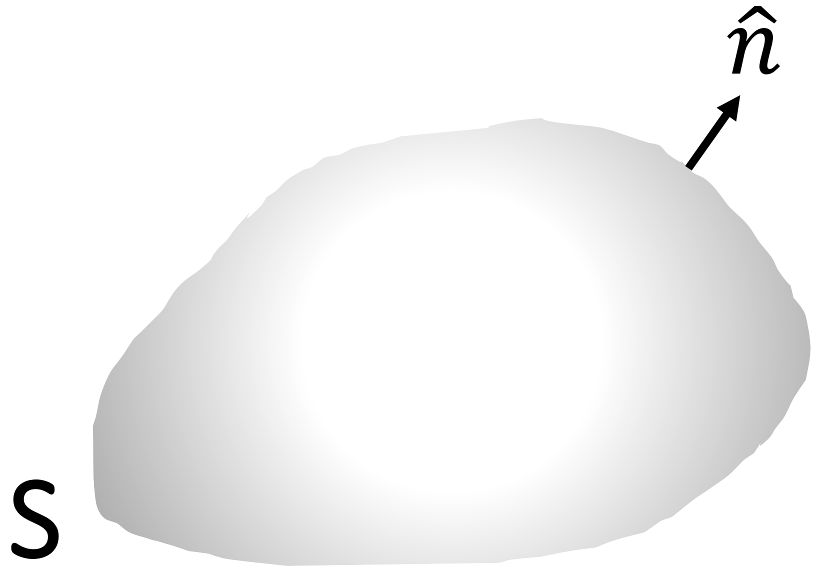
Sendo U e V diferenciáveis até segunda ordem na região fechada v e sendo **S** a superfície que limita esta região. Considerando também o campo potencial $\mathbf{A} = \mathrm{U}\nabla\mathrm{V}$ e partindo do teorema da divergência

Para $\mathbf{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{U}$:

$$\int_v (\nabla V . \nabla U + V\, \nabla^2 U)\, dv = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

Para $\mathbf{A} = \mathrm{U}\nabla\mathrm{V}$:

$$\int_v (\nabla U . \nabla V + U \nabla^2 V)\, dv = \int_S U \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

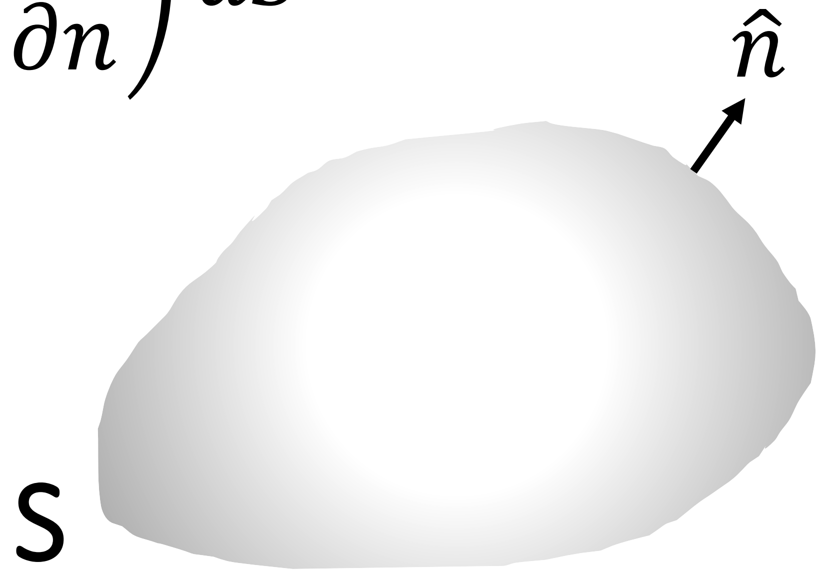


(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

2ª Identidade de Green

Sendo U e V diferenciáveis até segunda ordem na região fechada v e sendo $\mathbf{S}$ a superfície que limita esta região. Considerando também o campo potencial $\mathbf{A} = \mathrm{U}\nabla\mathrm{V}$ e partindo do teorema da divergência

$$\int_v (U\nabla^2 V - V\,\nabla^2 U)dv = \int_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS$$



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

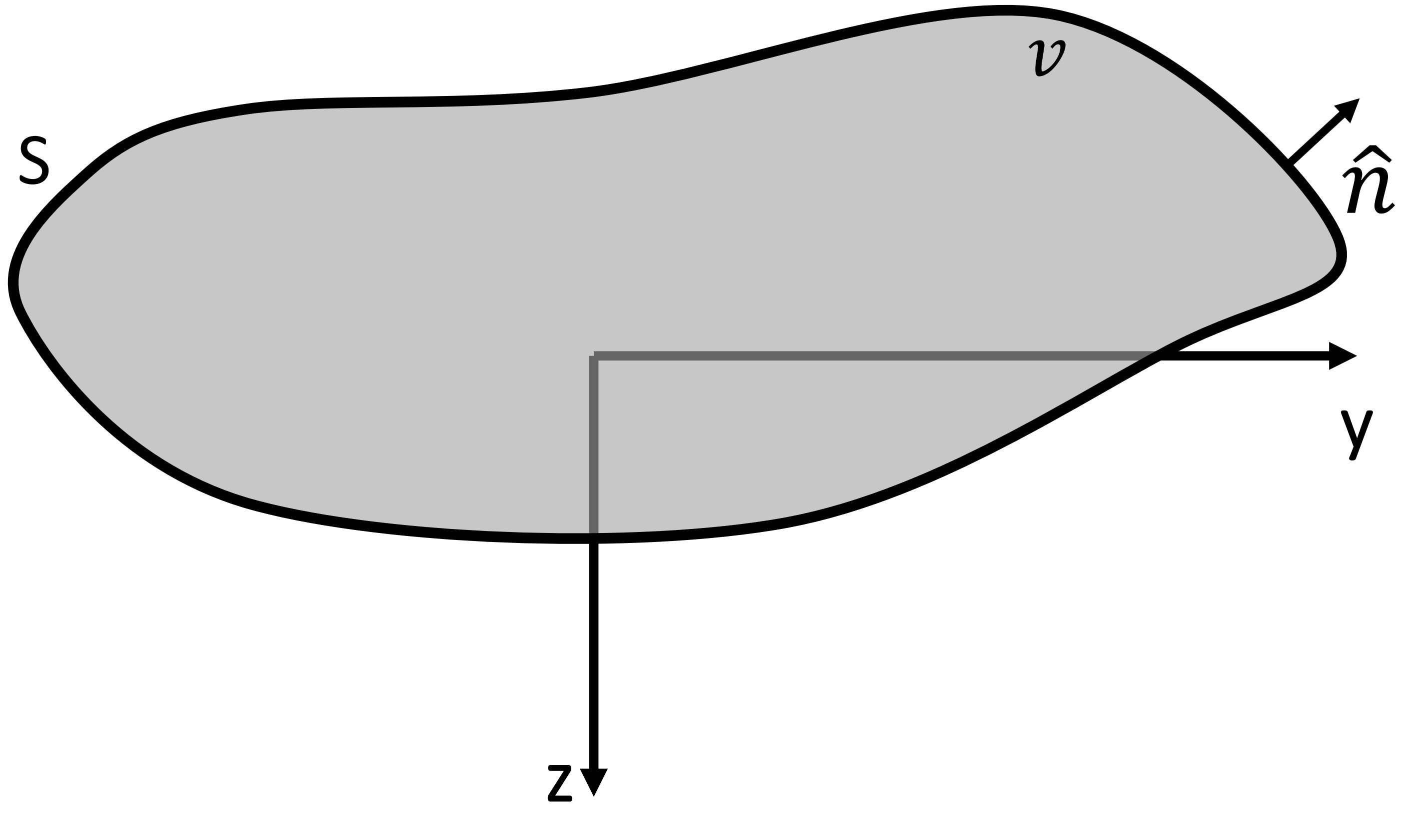
3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície S. Considere também uma função U(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região R, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

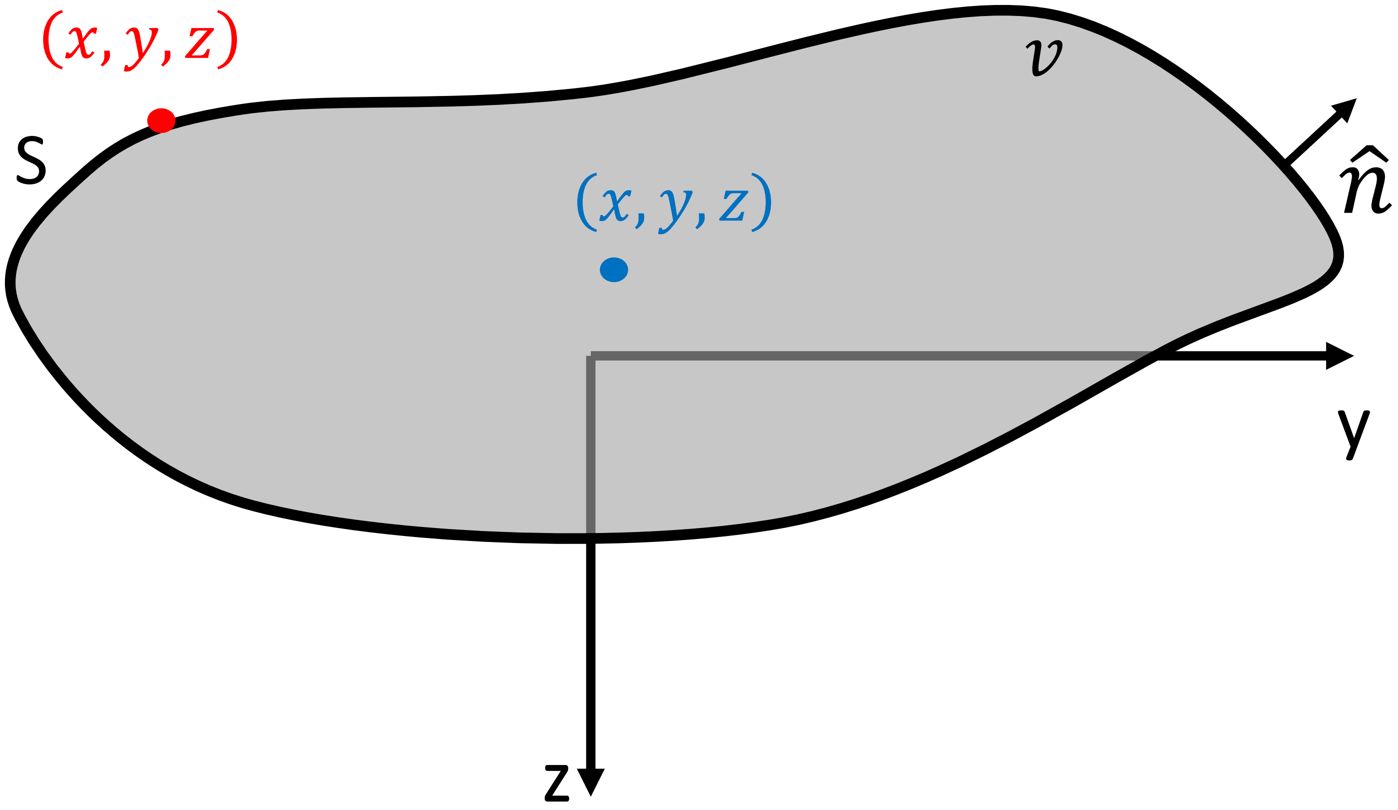
Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície S. Considere também uma função U(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região R, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

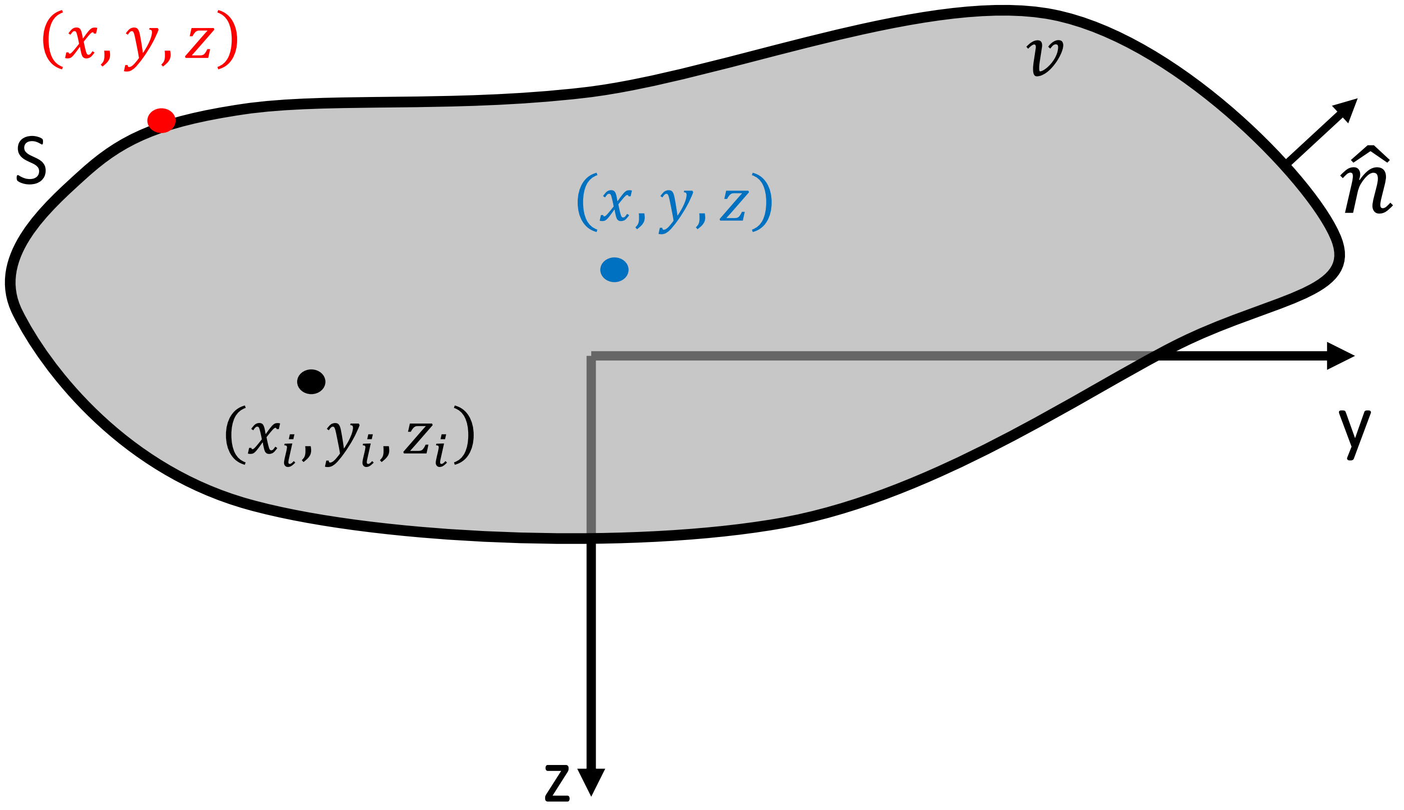
Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.

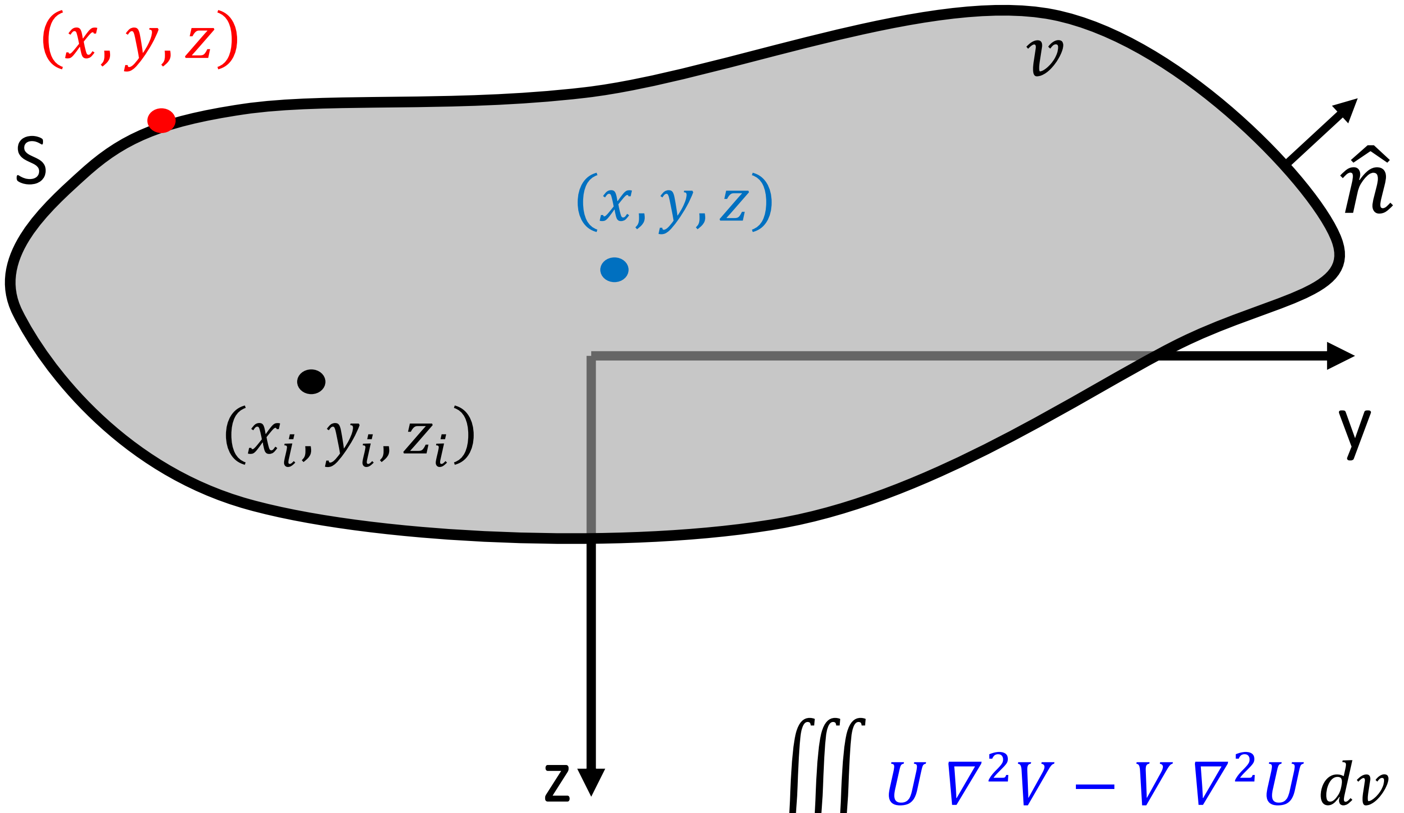


Considere um ponto (x_i, y_i, z_i) dentro do volume v

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



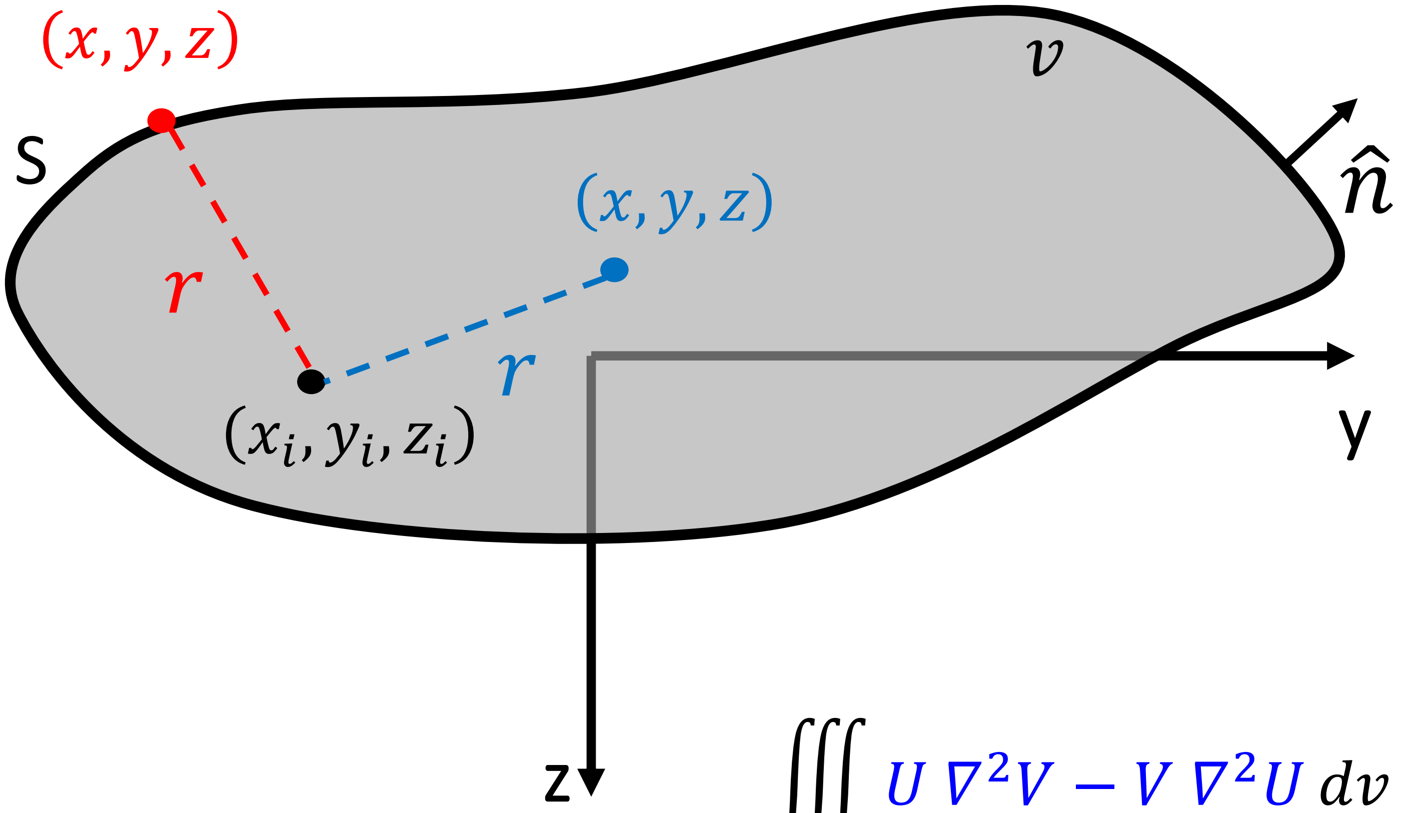
Considere um ponto (x_i, y_i, z_i) dentro do volume v

$$\iiint_v U\, \nabla^2 V - V\, \nabla^2 U\, dv = \iint_S U\, \nabla V^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - V\, \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.

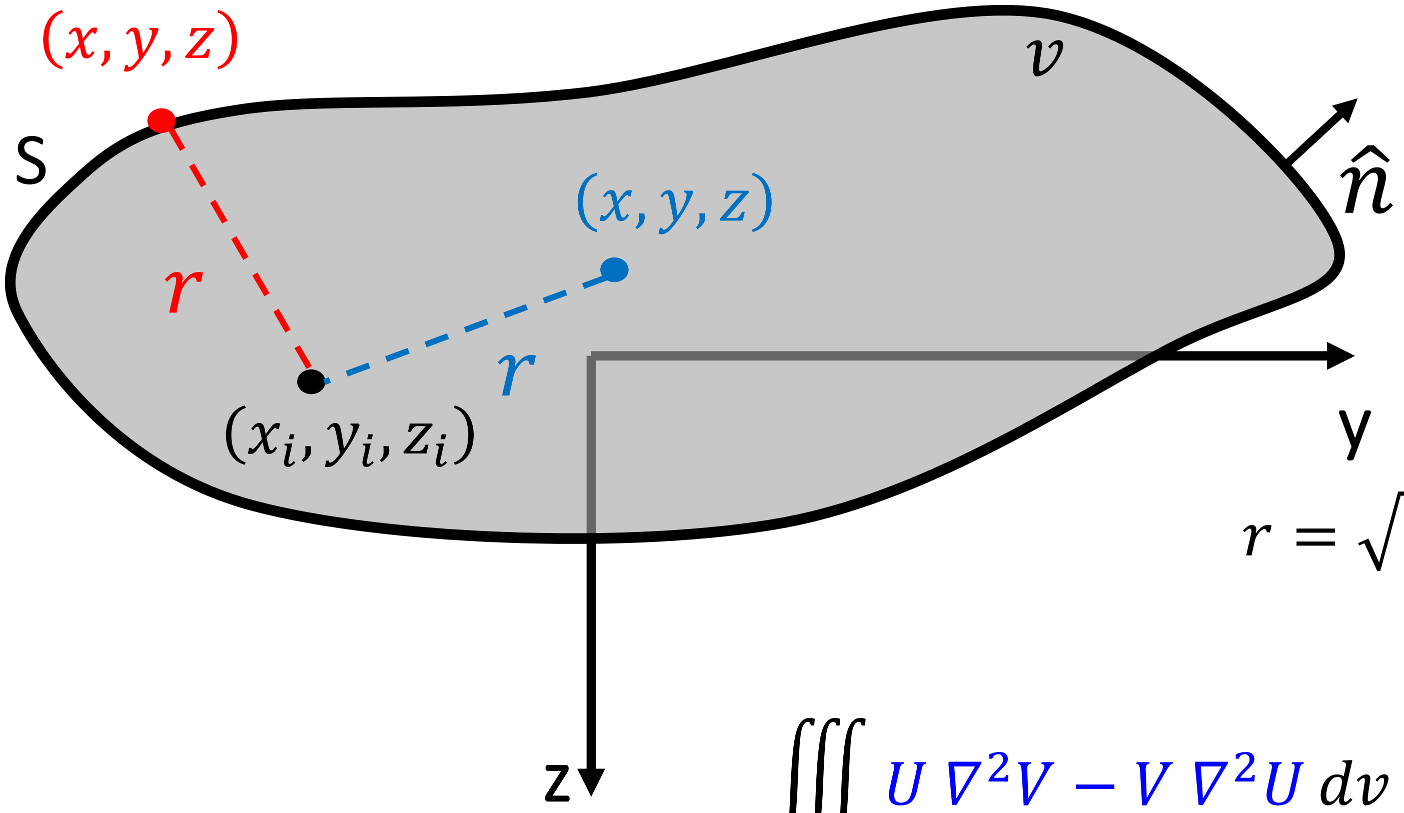


$$\iiint_v U\,\nabla^2 V - V\,\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\,\nabla V^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - V\,\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



Além disso, considere que a função V seja o inverso da distância r entre o ponto (x_i, y_i, z_i) e um ponto (x, y, z)

$$V = \frac{1}{r}$$

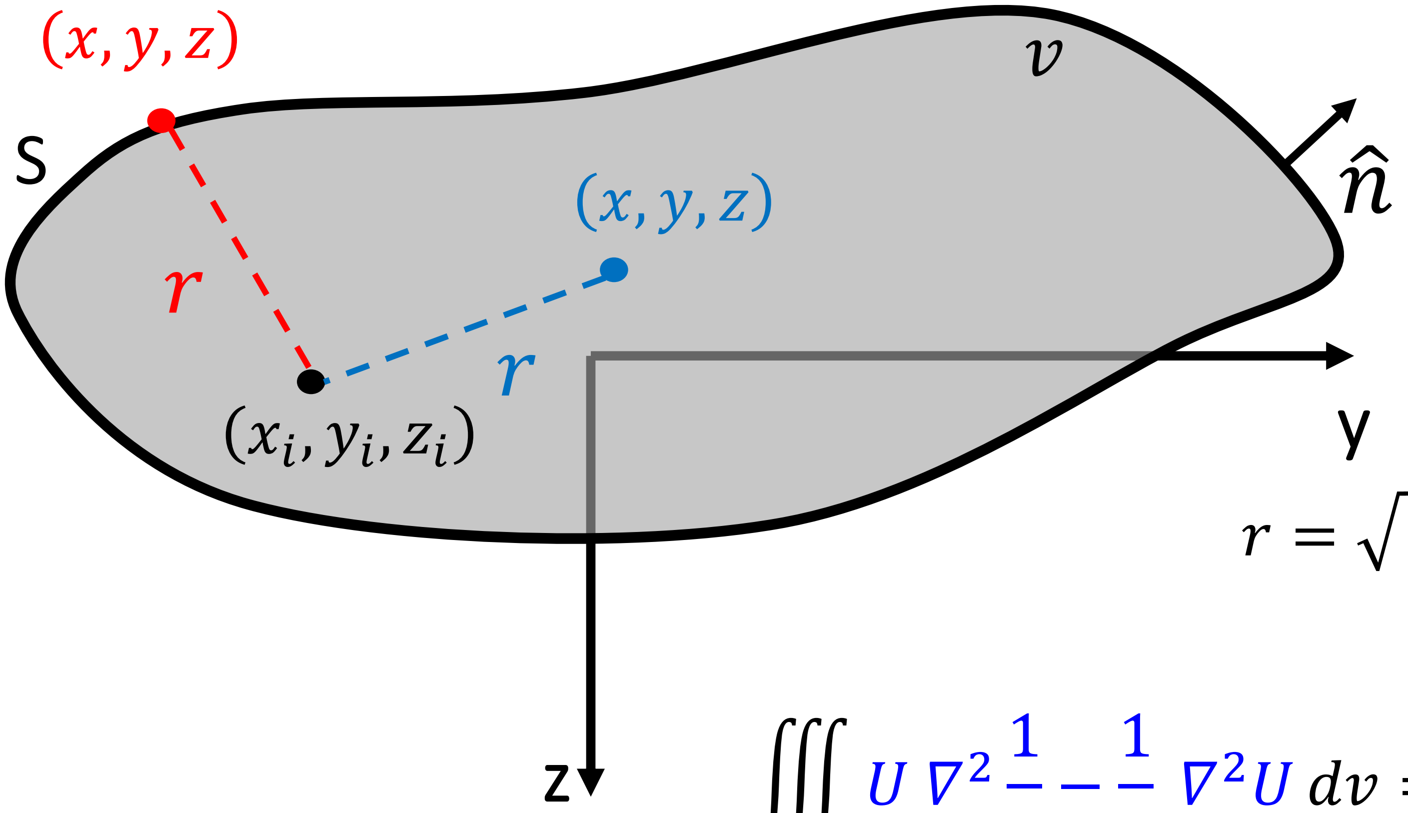
$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

$$\iiint\limits_{v} U\, \nabla^2 V - V\, \nabla^2 U\, dv = \iint\limits_{S} U\, \nabla V^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - V\, \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



Além disso, considere que a função V seja o inverso da distância r entre o ponto (x_i, y_i, z_i) e um ponto (x, y, z)

$$V = \frac{1}{r}$$

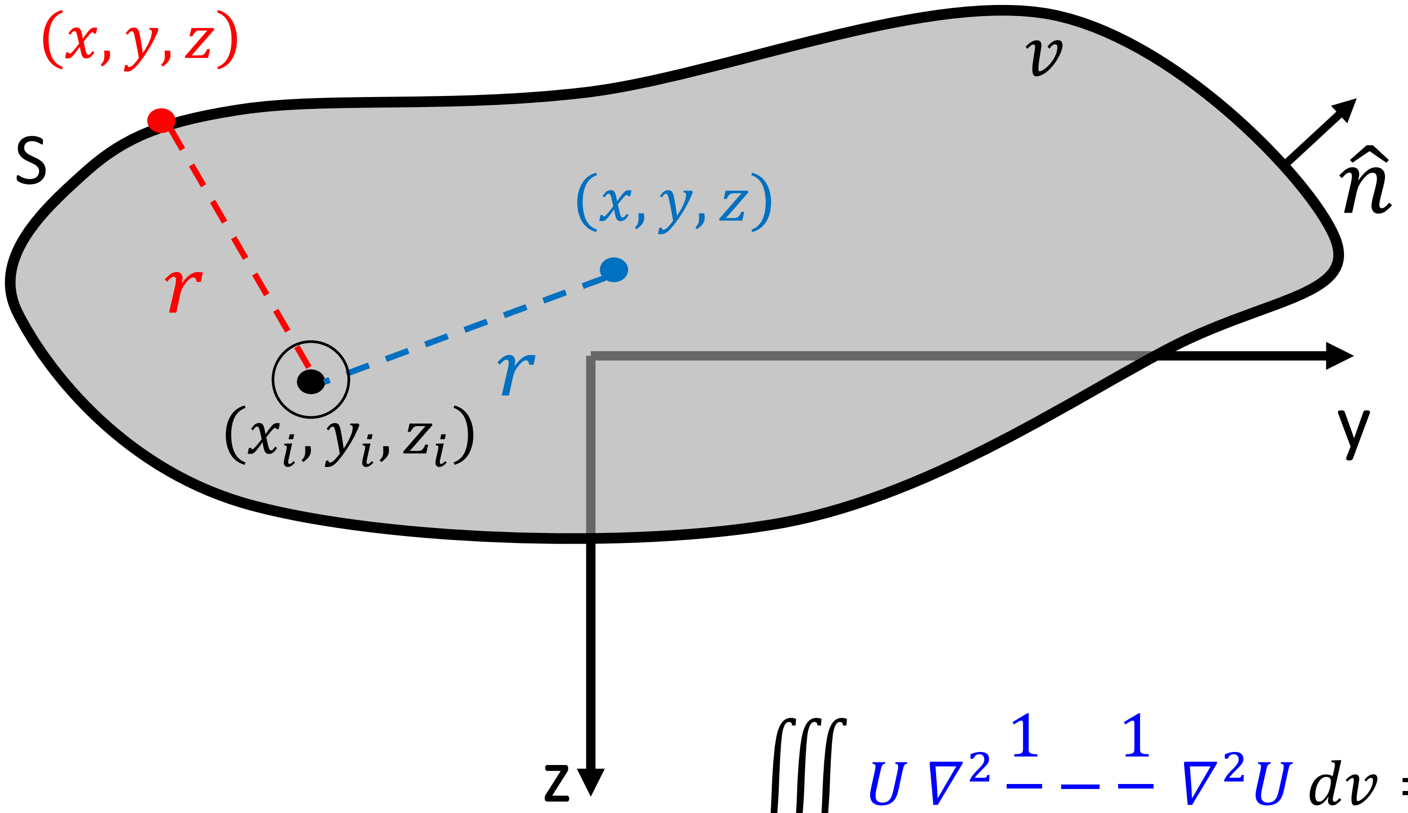
$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

$$\iiint_v U\, \nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\, \nabla^2 U\, dv = \iint_S U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\ dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



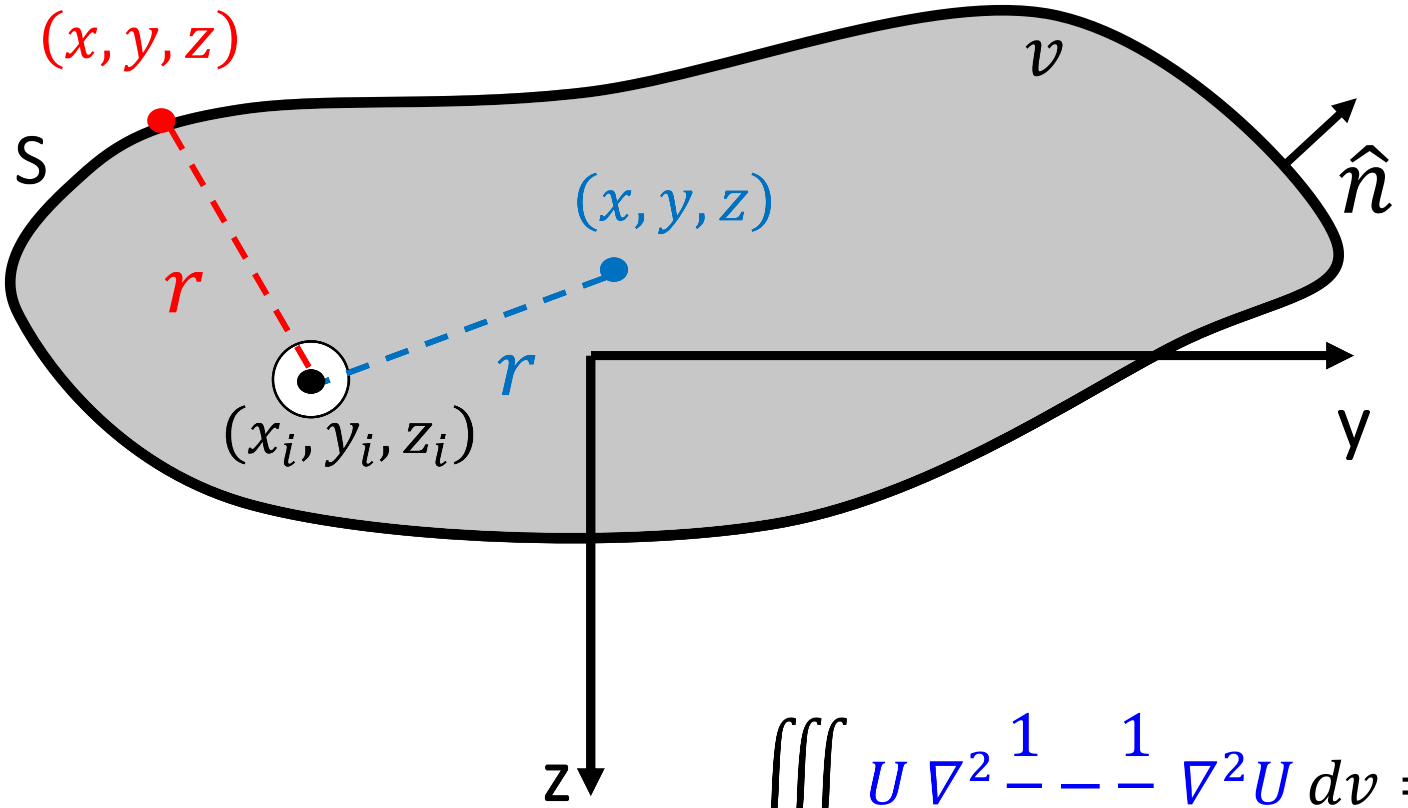
Note que há um problema na integral de volume quando o ponto (x, y, z) coincide com (x_i, y_i, z_i)

$$\iiint_v U\,\nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\, dv = \iint_S U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\; dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.

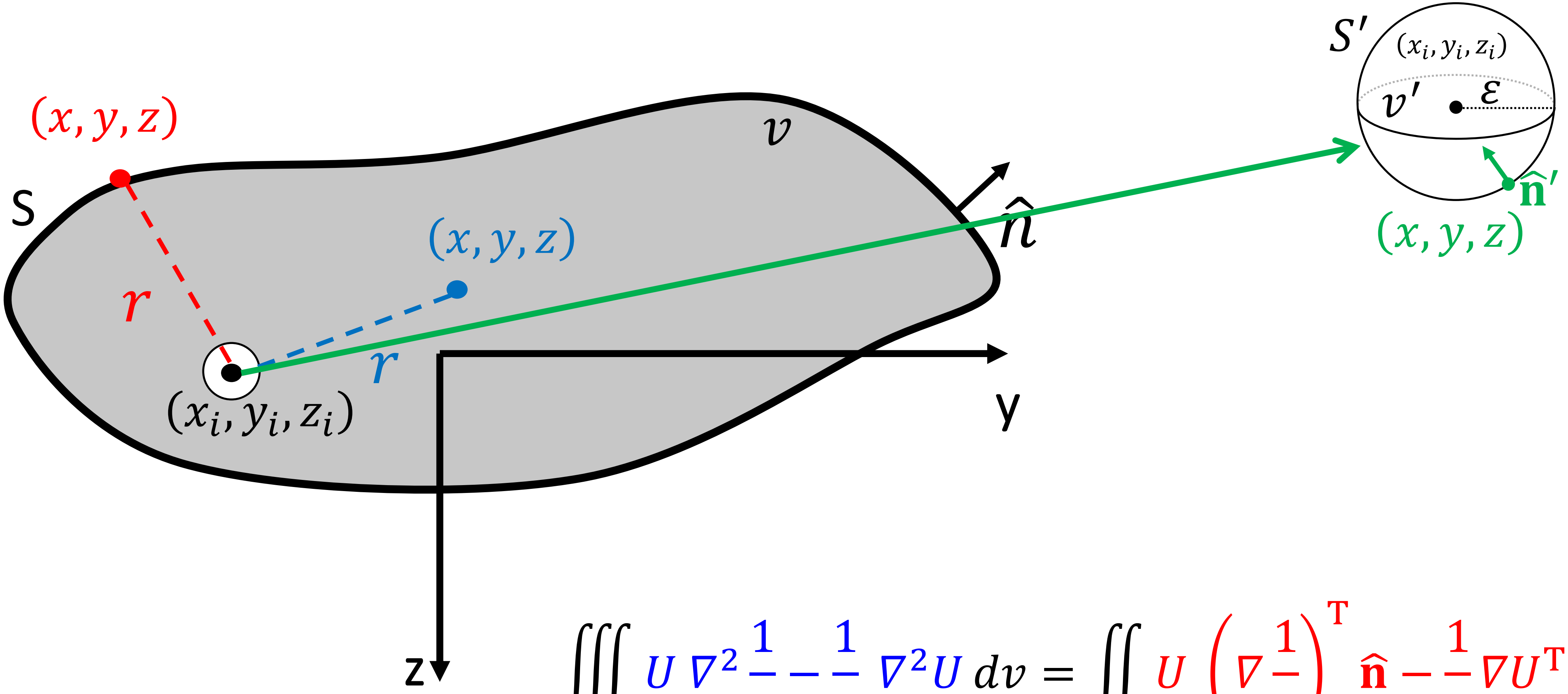


$$\iiint_v U\,\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.

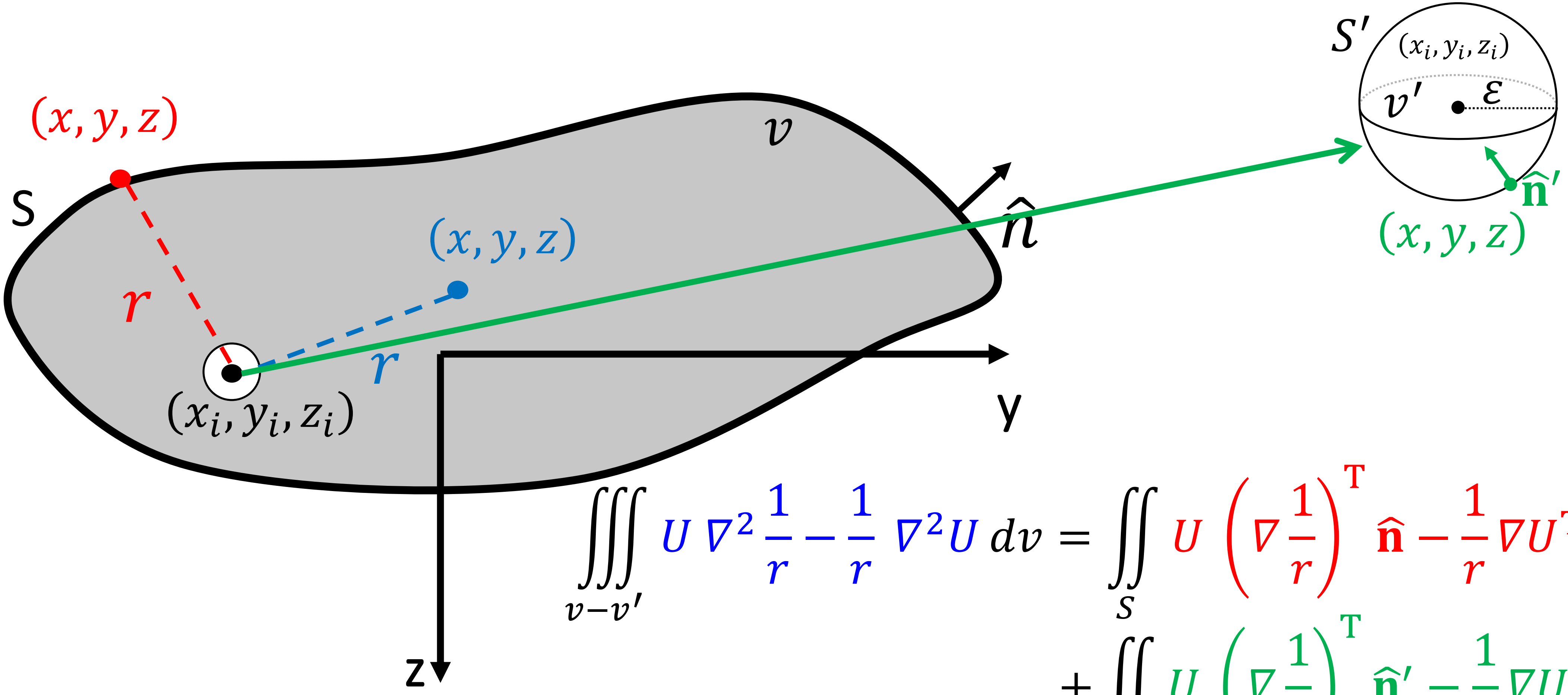


$$\iiint_v U\, \nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\, \nabla^2 U \, dv = \iint_S U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.

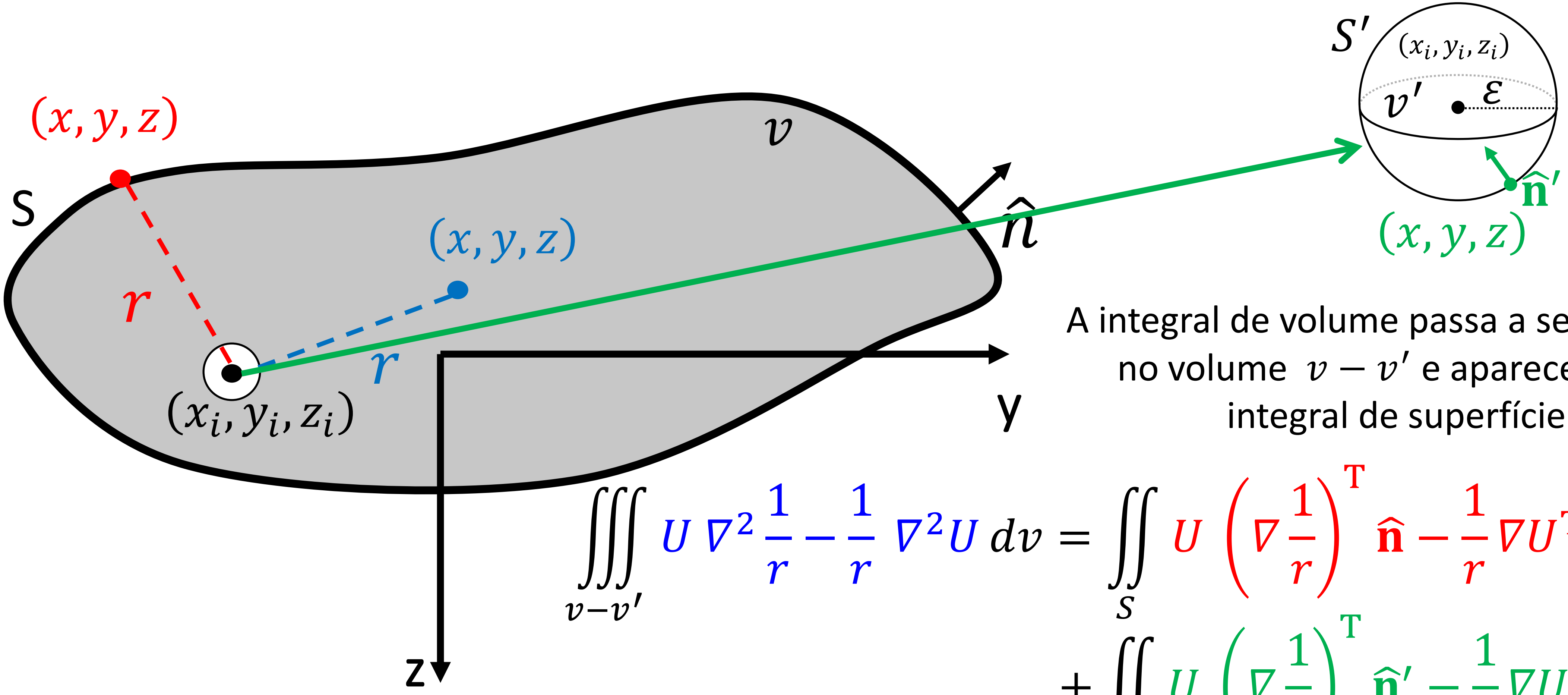


$$\iiint_{v-v'} U\,\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS + \iint_{S'} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}'\;dS'$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



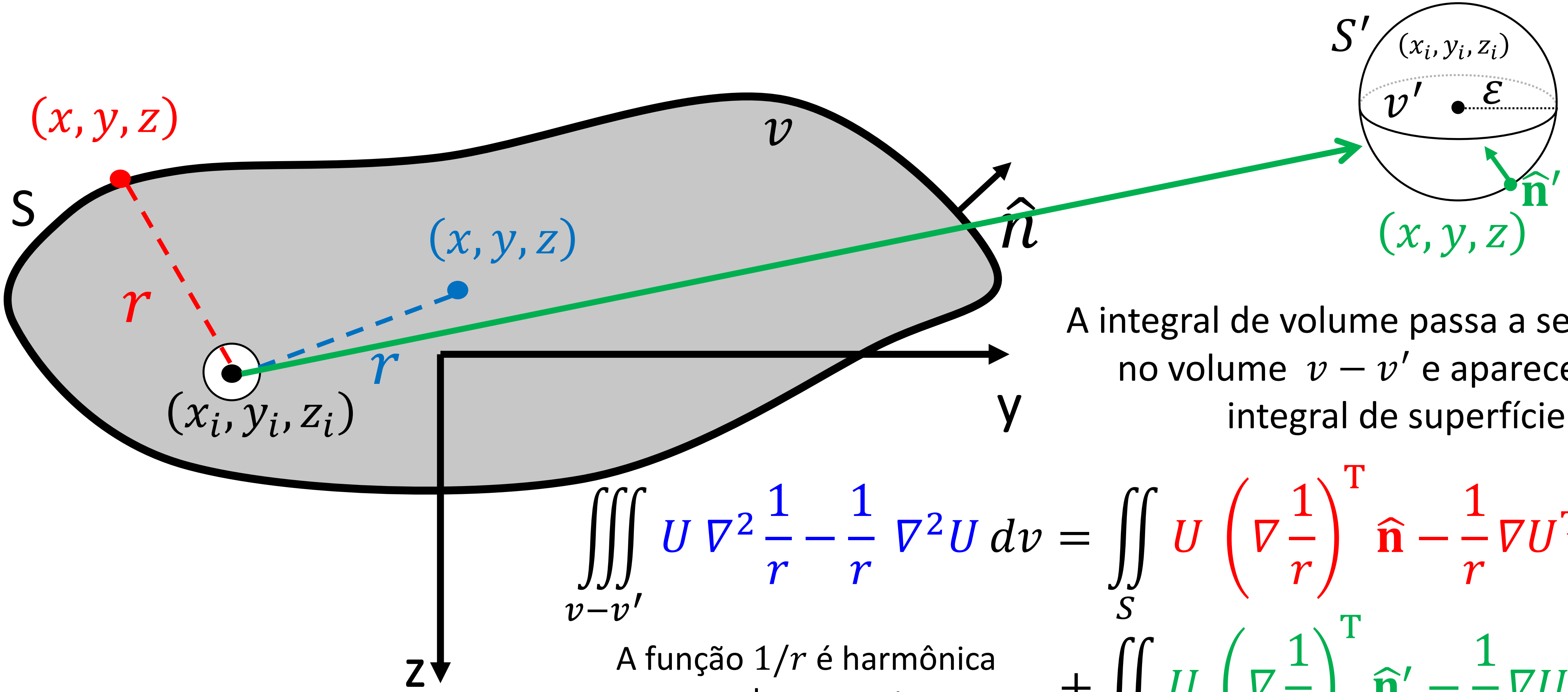
A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

$$\iiint_{v-v'} U\,\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS + $$
$$+ \iint_{S'} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}'\;dS'$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

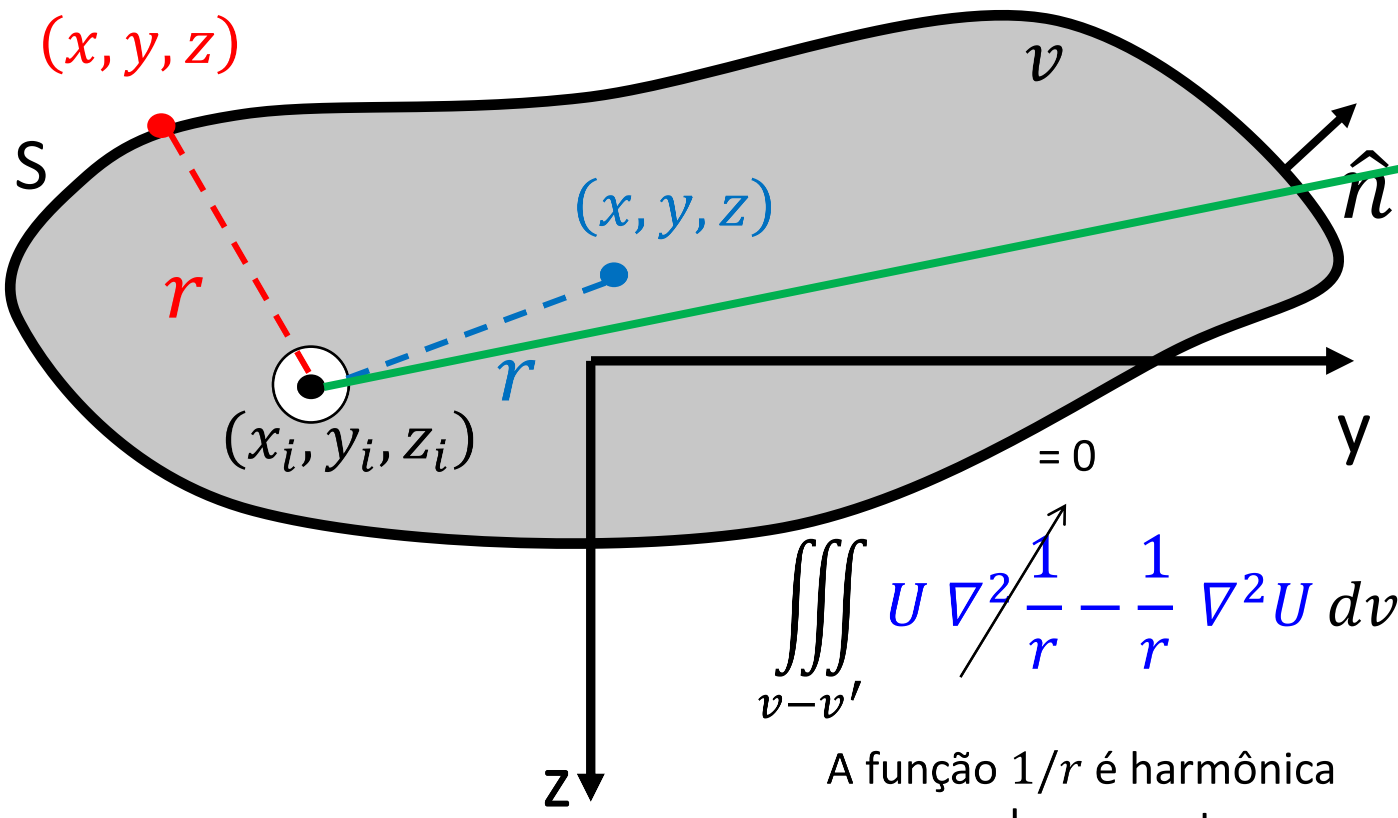
$$\iiint_{v-v'} U\,\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS + \iint_{S'} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}'\;dS'$$

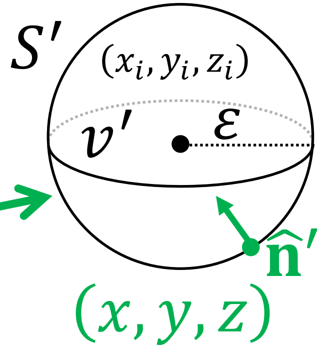
A função $1/r$ é harmônica em qualquer ponto no volume $v - v'$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.





A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

$$\iiint_{v-v'} U\,\cancelto{0}{\nabla^2\frac{1}{r}} - \frac{1}{r}\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\,dS + $$

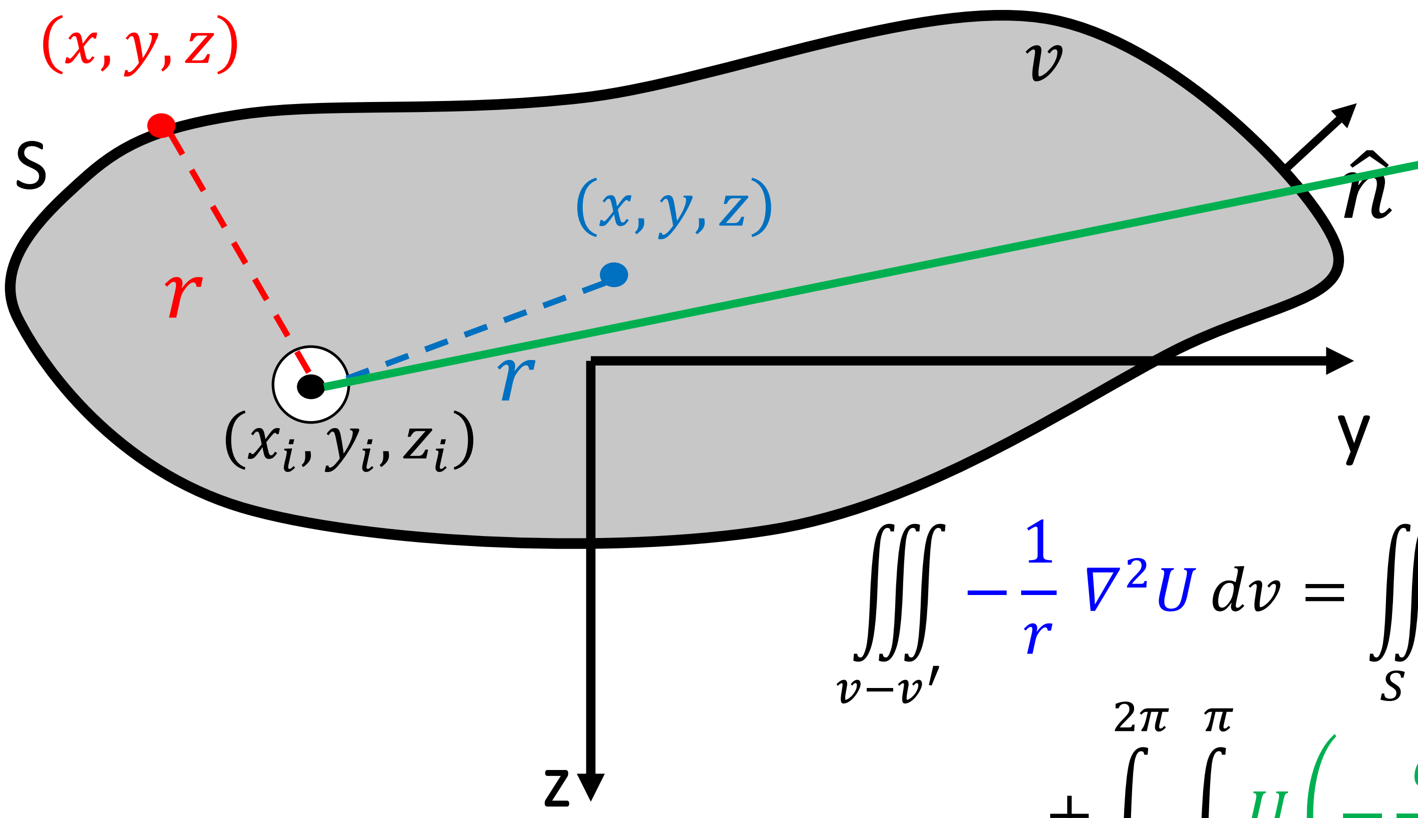
$$+\iint_{S'} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}'\,dS'$$

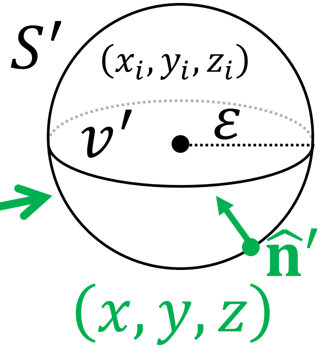
A função $1/r$ é harmônica em qualquer ponto no volume $v - v'$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.





A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

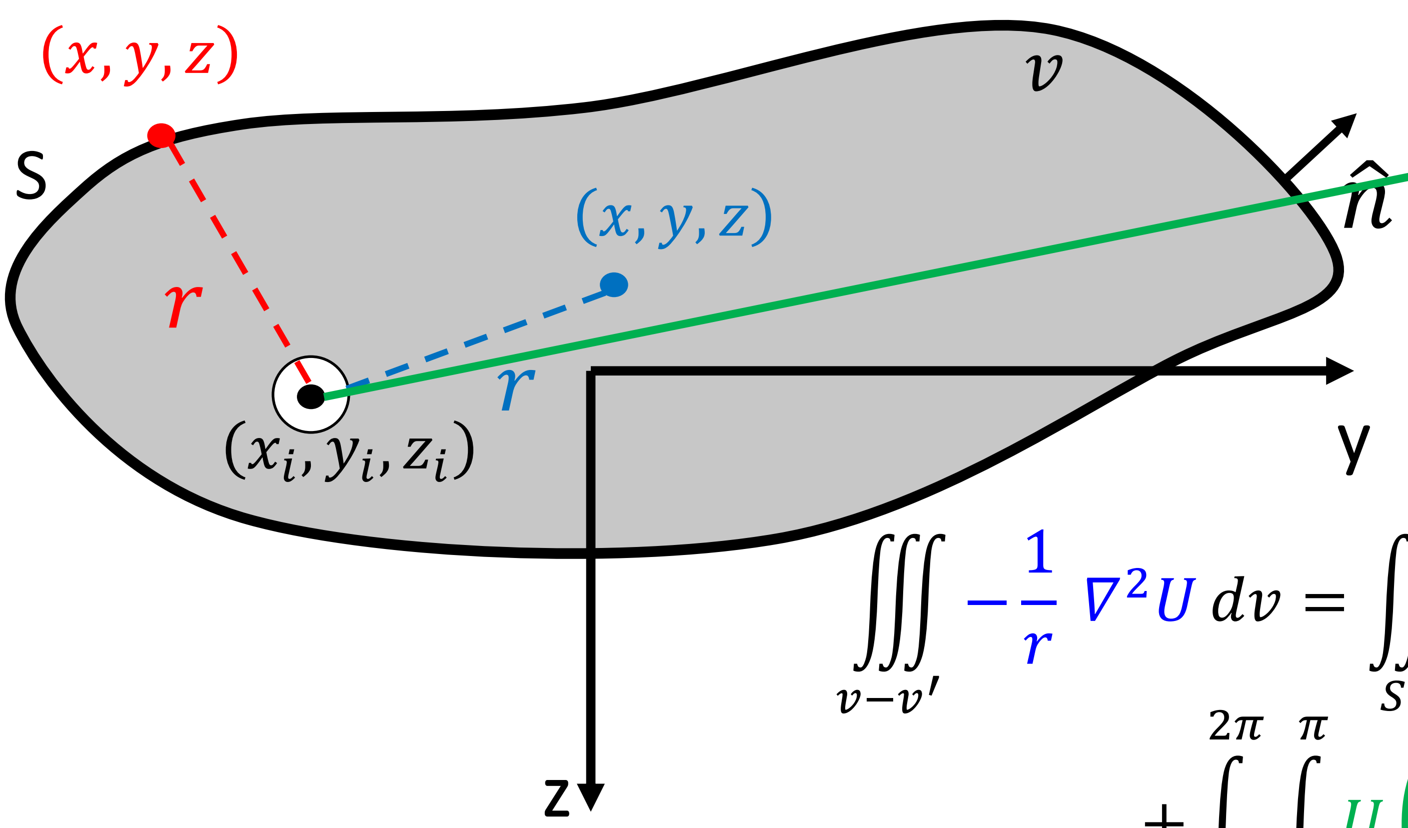
$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U\, dv = \iint\limits_{S} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\; dS +$$

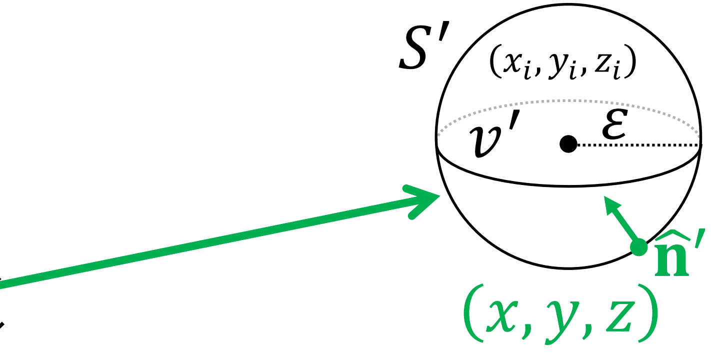
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U\left(-\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\varepsilon^2 sen\theta d\theta d\lambda$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.





A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

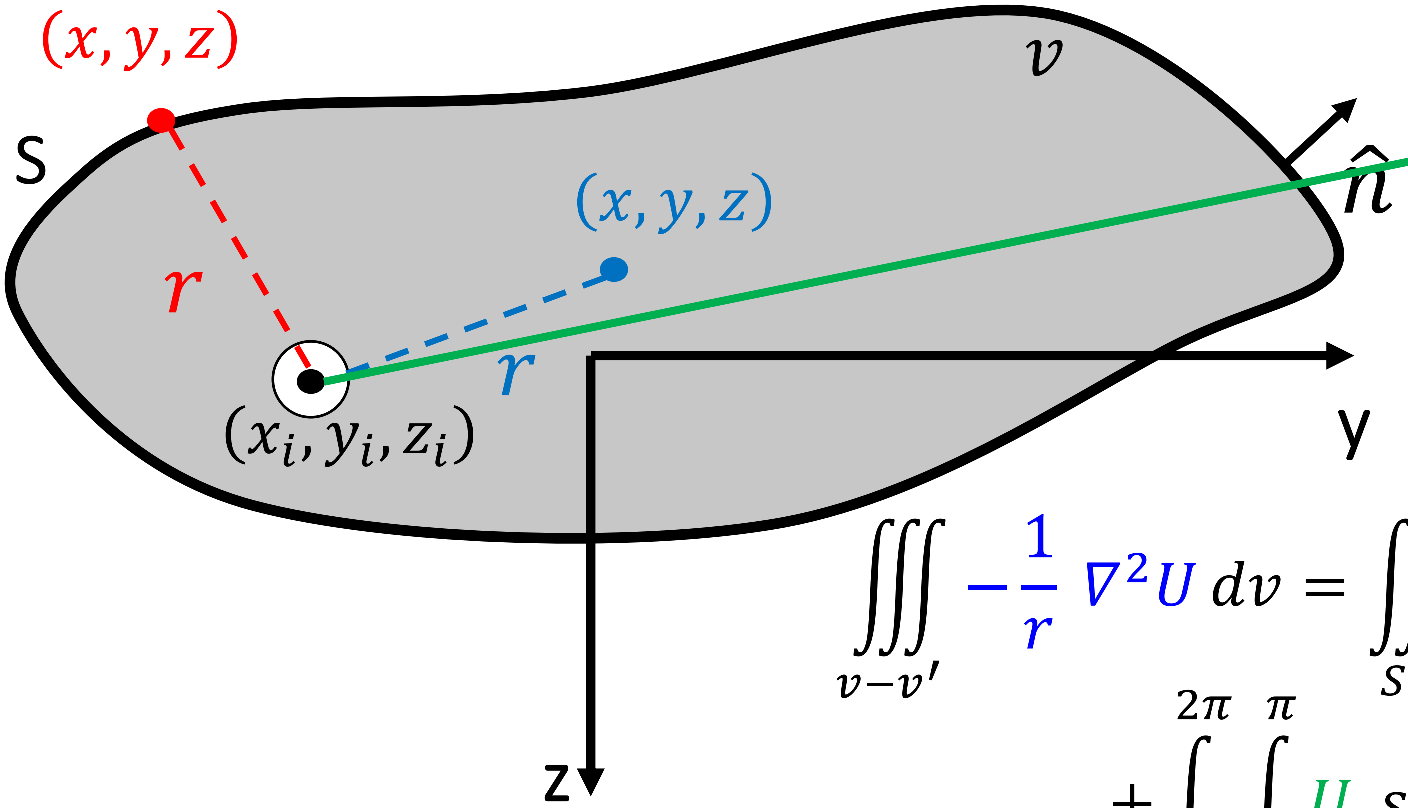
$$\iiint_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\,dS +$$

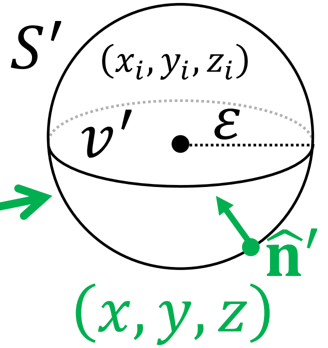
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\varepsilon^2 sen\theta\, d\theta\, d\lambda$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.





A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

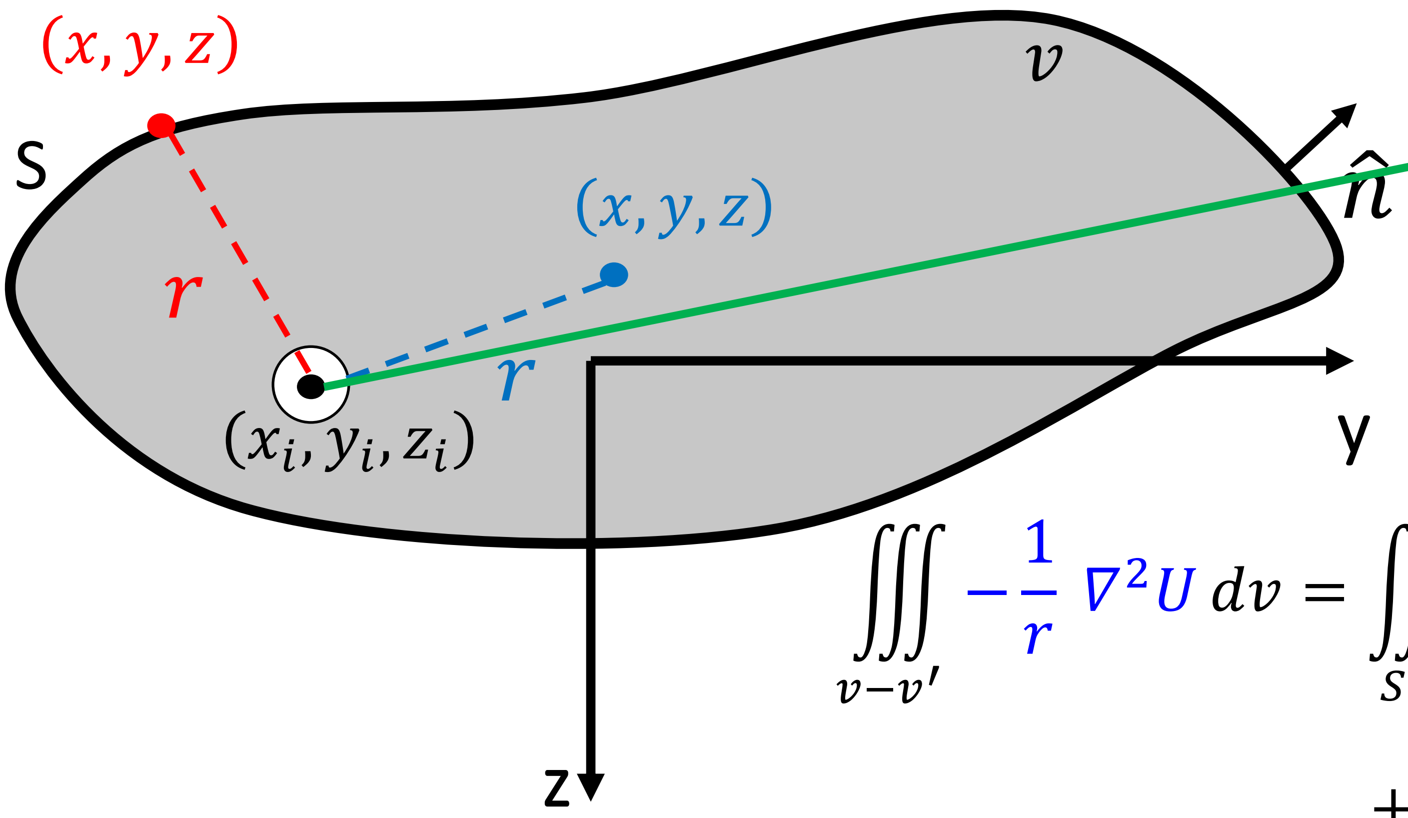
$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U\,dv = \iint\limits_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\,dS +$$

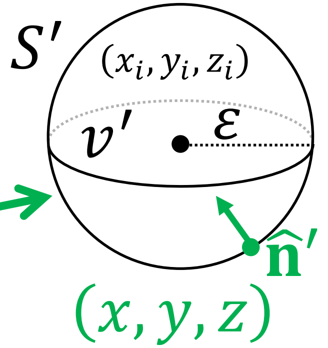
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U\ sen\theta d\theta d\lambda + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\frac{dU}{d\varepsilon} sen\theta d\theta d\lambda$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.





A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

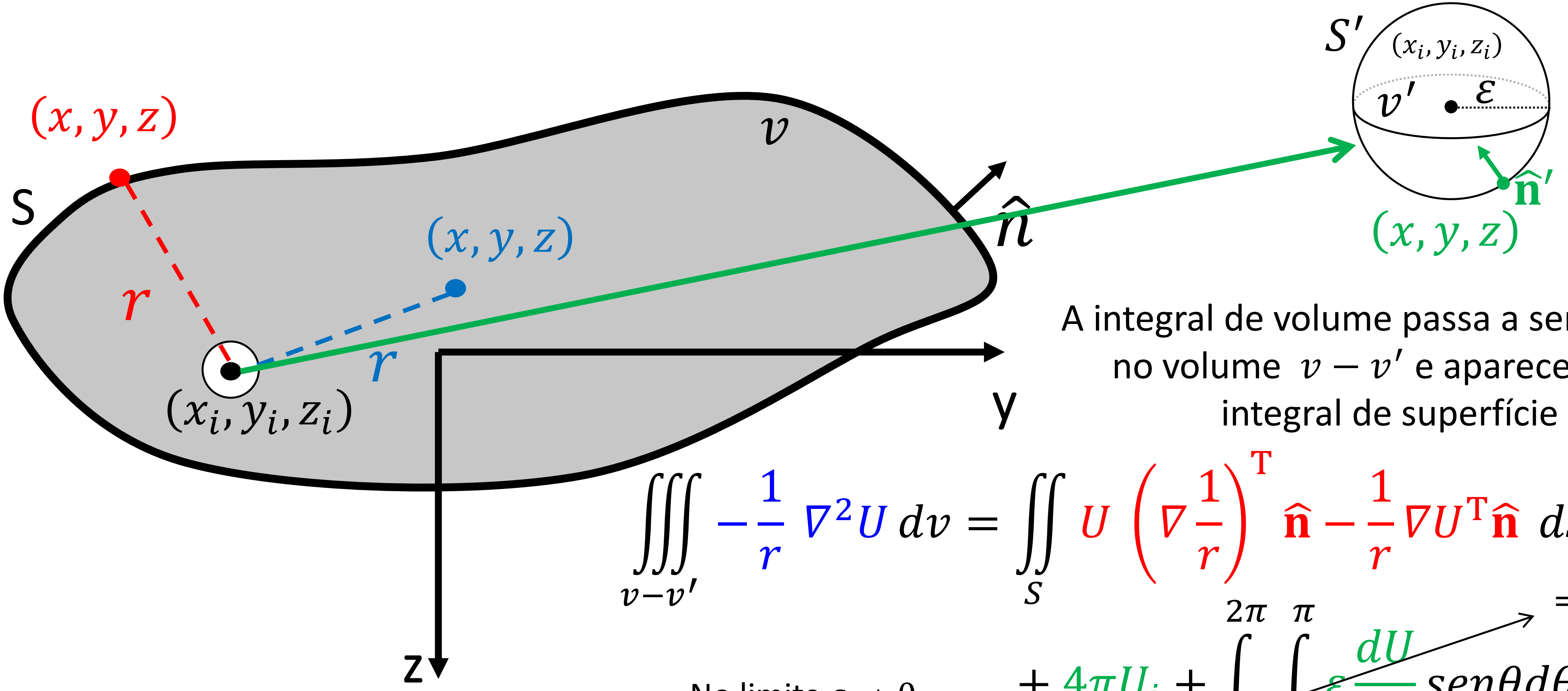
$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U\, dv = \iint\limits_{S} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\; dS +$$

$$+\,4\pi U_i + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\frac{dU}{d\varepsilon}\, sen\theta\, d\theta\, d\lambda$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U\, dv = \iint\limits_{S} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\, dS +$$

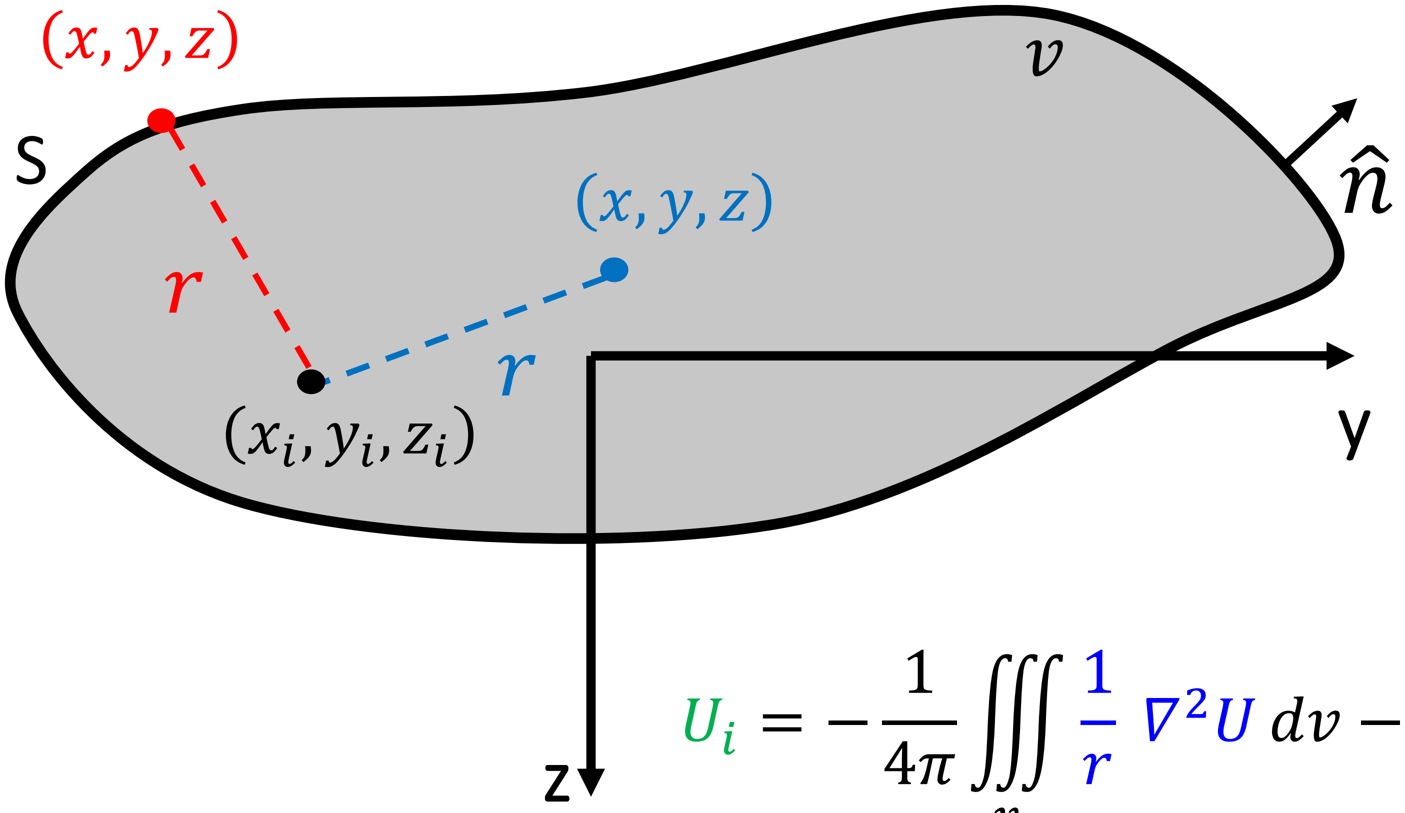
$$+\,4\pi U_i + \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\frac{dU}{d\varepsilon}}}_{=0} sen\theta\, d\theta\, d\lambda$$

No limite $\varepsilon \to 0$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.

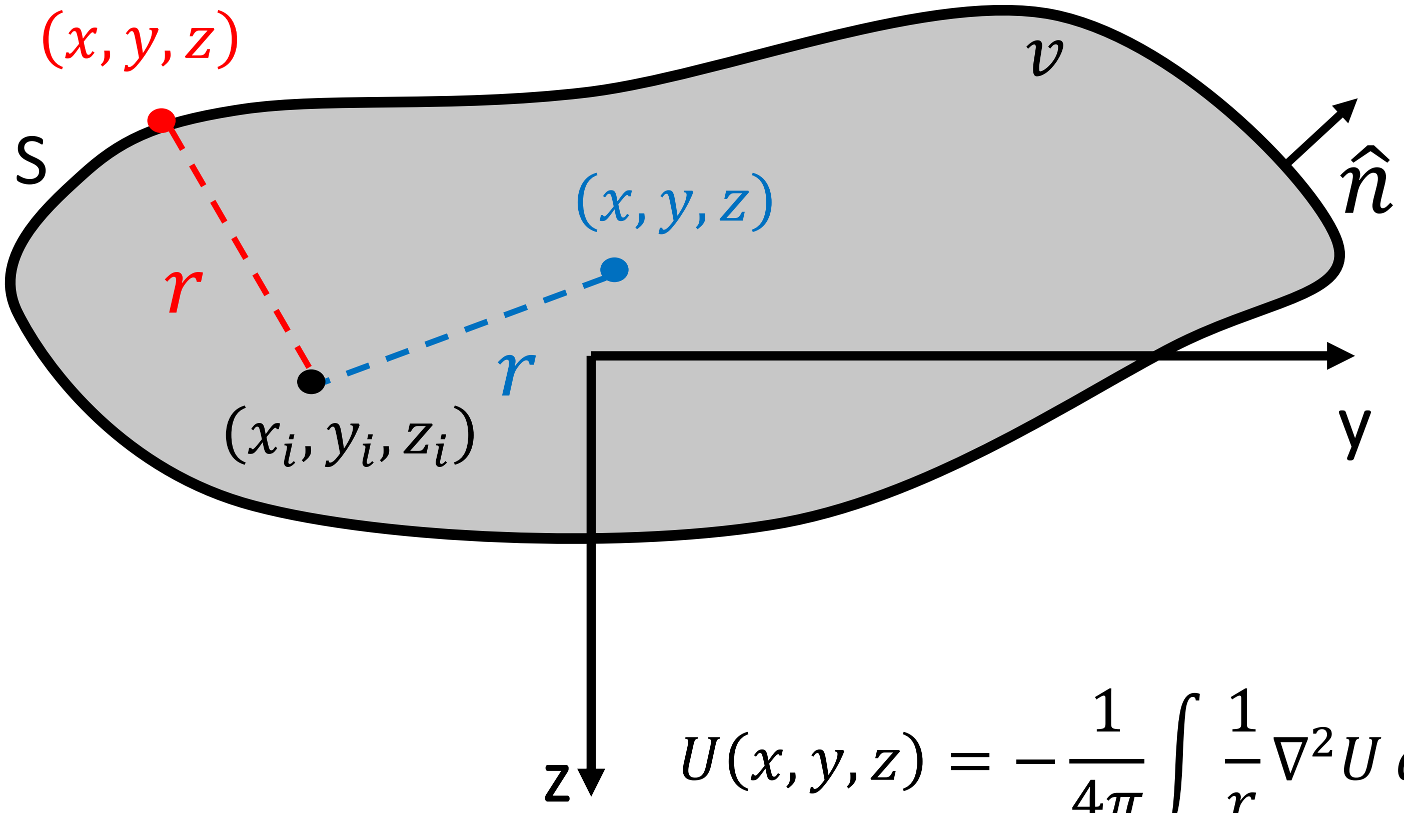


$$U_i = -\frac{1}{4\pi}\iiint_v \frac{1}{r}\, \nabla^2 U \, dv - \frac{1}{4\pi}\iint_S U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

3ª Identidade de Green

Seja v uma região do espaço delimitada pela superfície **S**. Considere também uma função **U**(x,y,z) que satisfaz as seguintes condições: 1. seja contínua em todos os pontos no interior desta região **R**, inclusive sobre a superfície que a delimita; 2. as suas derivadas segundas sejam contínuas até segunda ordem; 3. que seja regular no infinito.



$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{v} \frac{1}{r}\nabla^2 U\, dv \;-\frac{1}{4\pi}\int_{S}\left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\partial_n U\right] dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

A Equação de Continuação para Cima

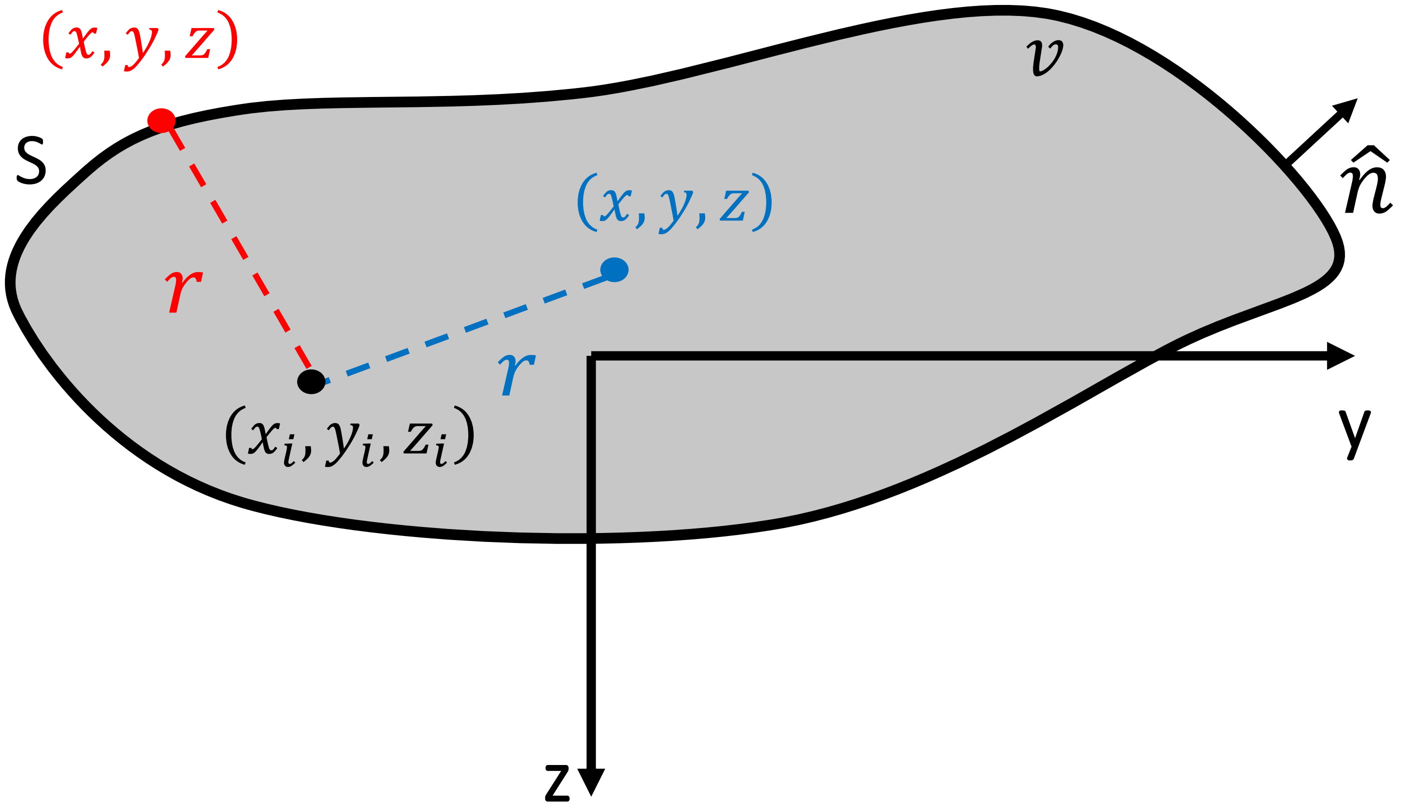
Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

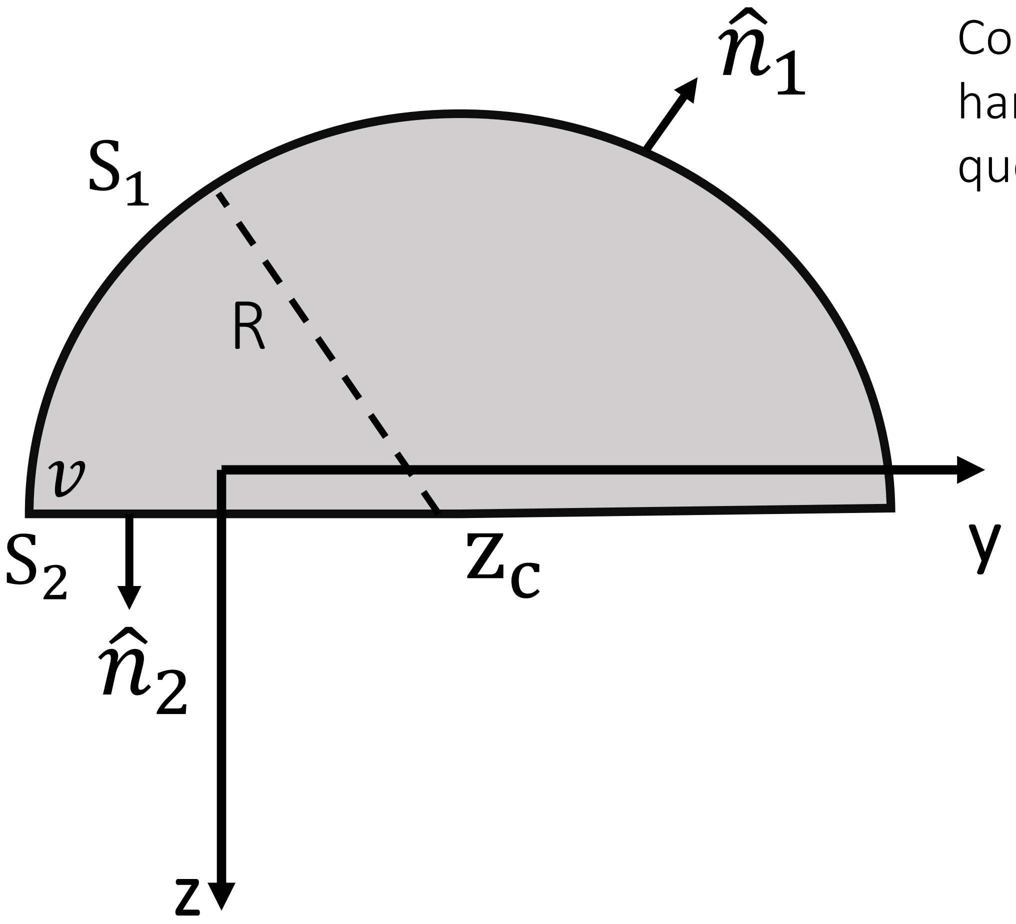
Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.

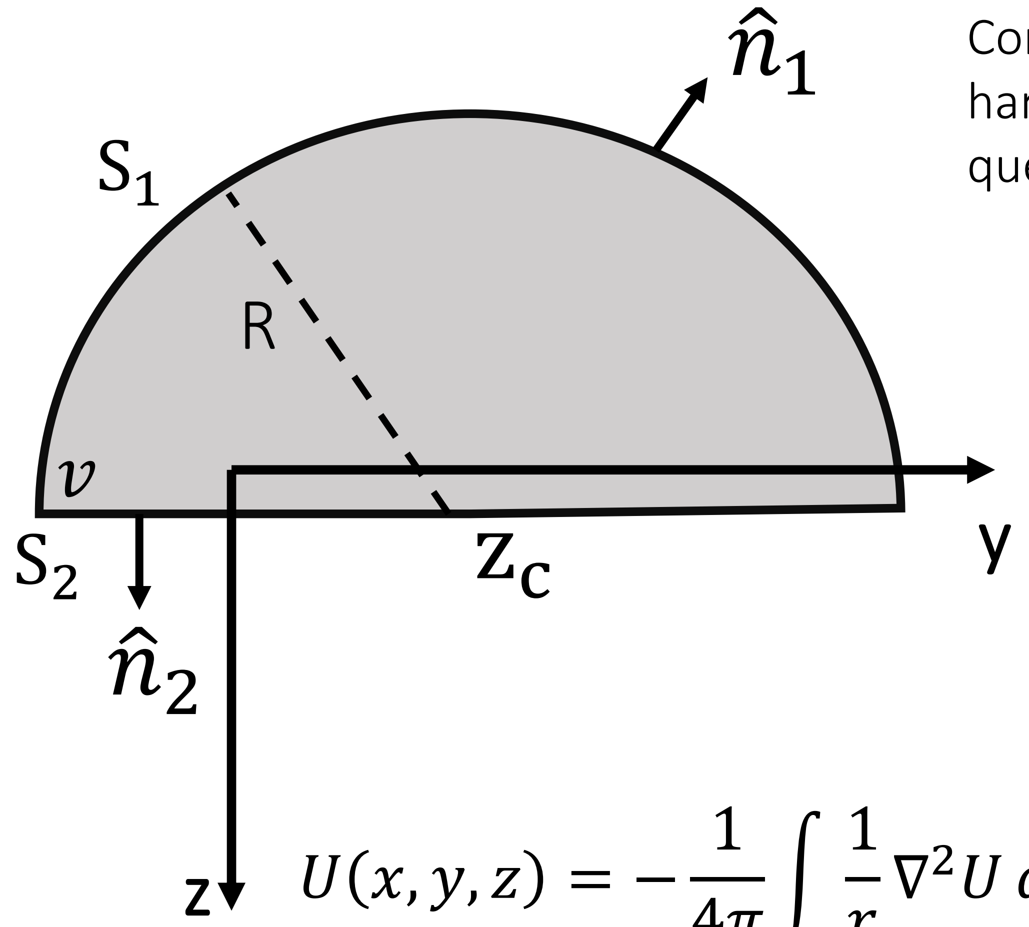


Considerando que a função U(x,y,z) seja harmônica no interior da região v e impondo que o raio R dessa tenda ao infinito, teremos

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.



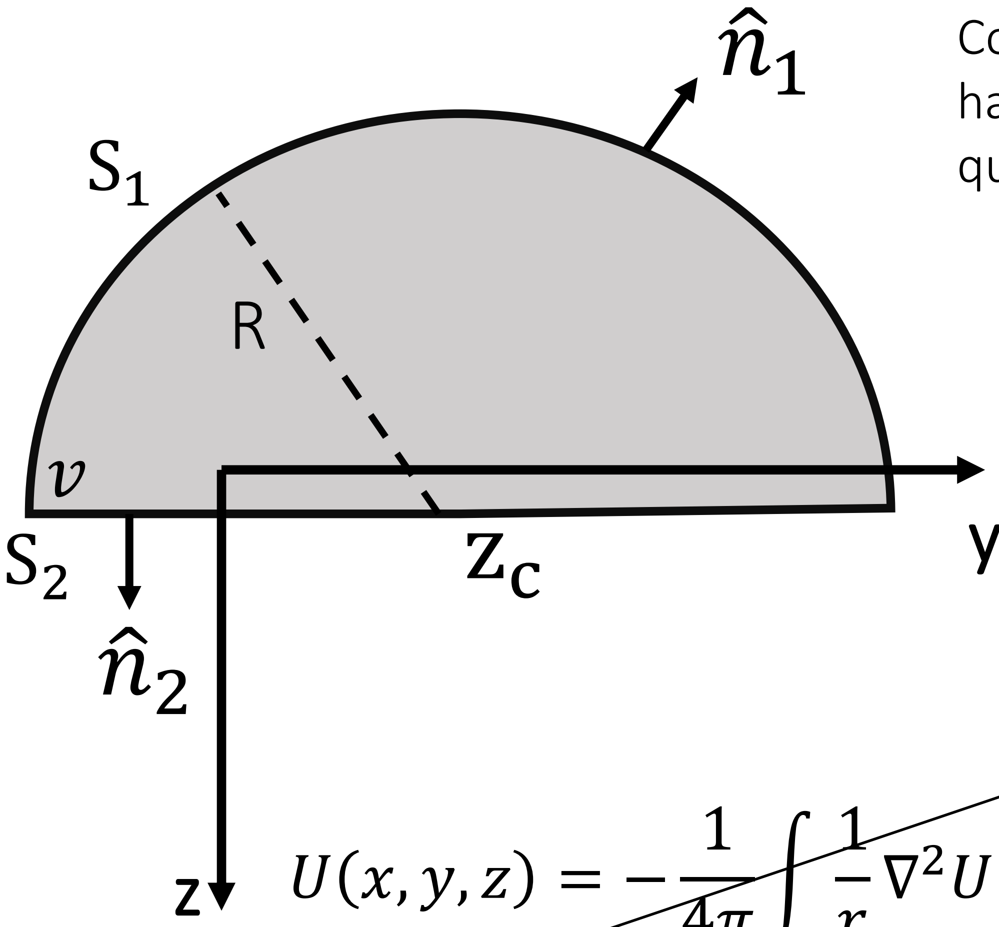
Considerando que a função U(x,y,z) seja harmônica no interior da região v e impondo que o raio R dessa tenda ao infinito, teremos

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_v \frac{1}{r}\nabla^2 U\, dv - \frac{1}{4\pi}\int_S \left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\partial_n U\right] dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.



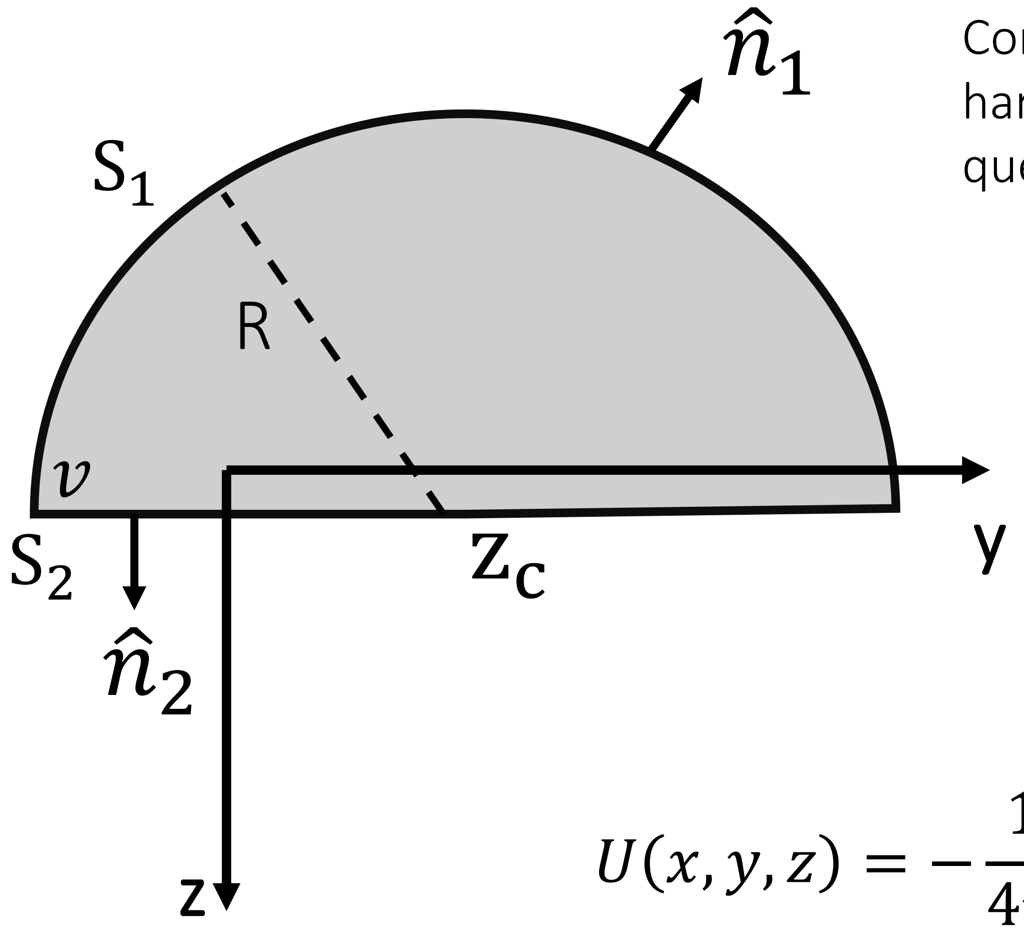
Considerando que a função U(x,y,z) seja harmônica no interior da região v e impondo que o raio R dessa tenda ao infinito, teremos

$$U(x,y,z) = \overbrace{\cancel{-\frac{1}{4\pi}\int_{v} \frac{1}{r}\nabla^2 U\, dv}}^{=0} - \frac{1}{4\pi}\int_{S} \left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\partial_n U \right] dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.



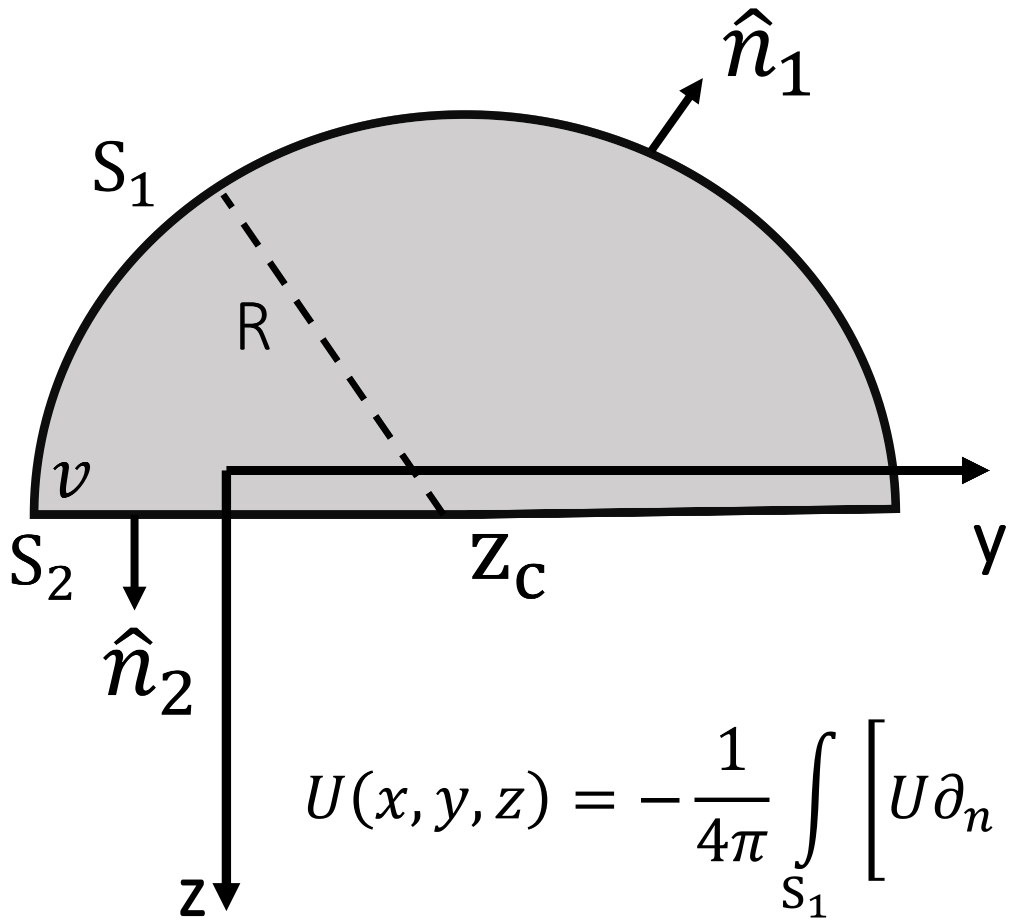
Considerando que a função U(x,y,z) seja harmônica no interior da região v e impondo que o raio R dessa tenda ao infinito, teremos

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\partial_n U\right] dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.



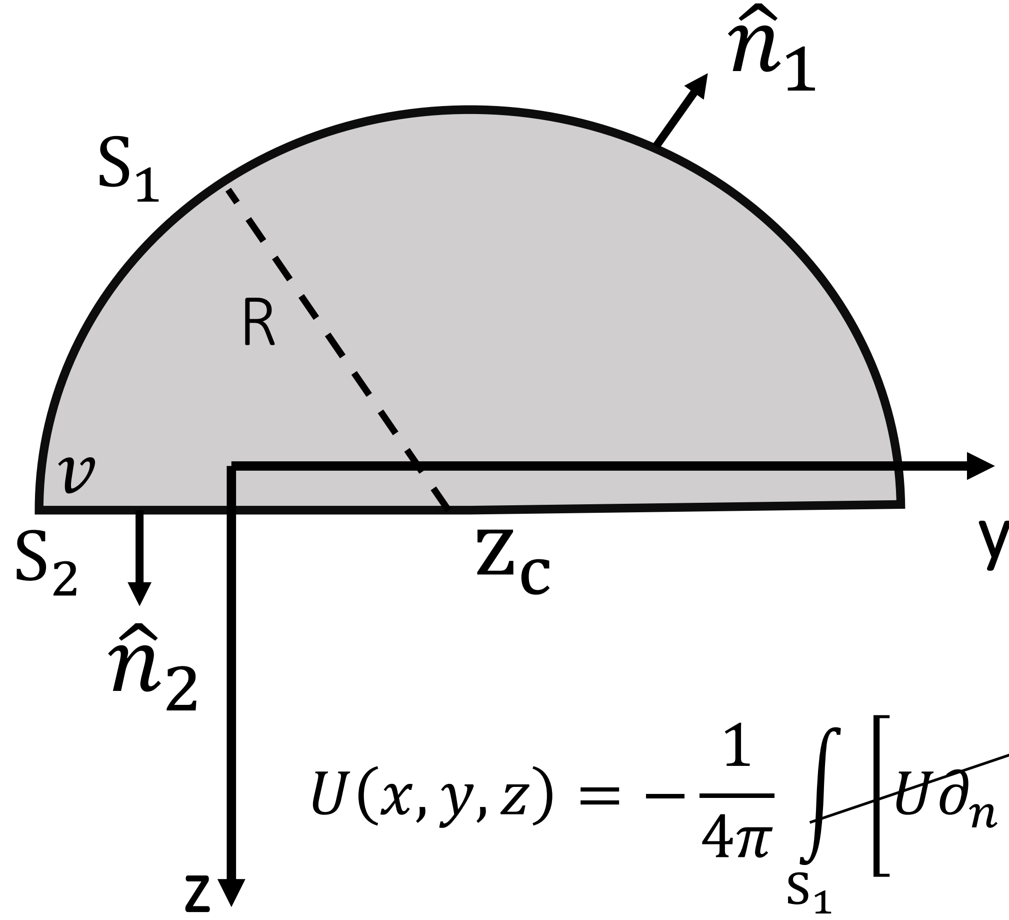
Considerando que a função U(x,y,z) seja harmônica no interior da região v e impondo que o raio R dessa tenda ao infinito, teremos

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\partial_n U\right]dS - \frac{1}{4\pi}\int_{S_2}\left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\partial_n U\right]dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.



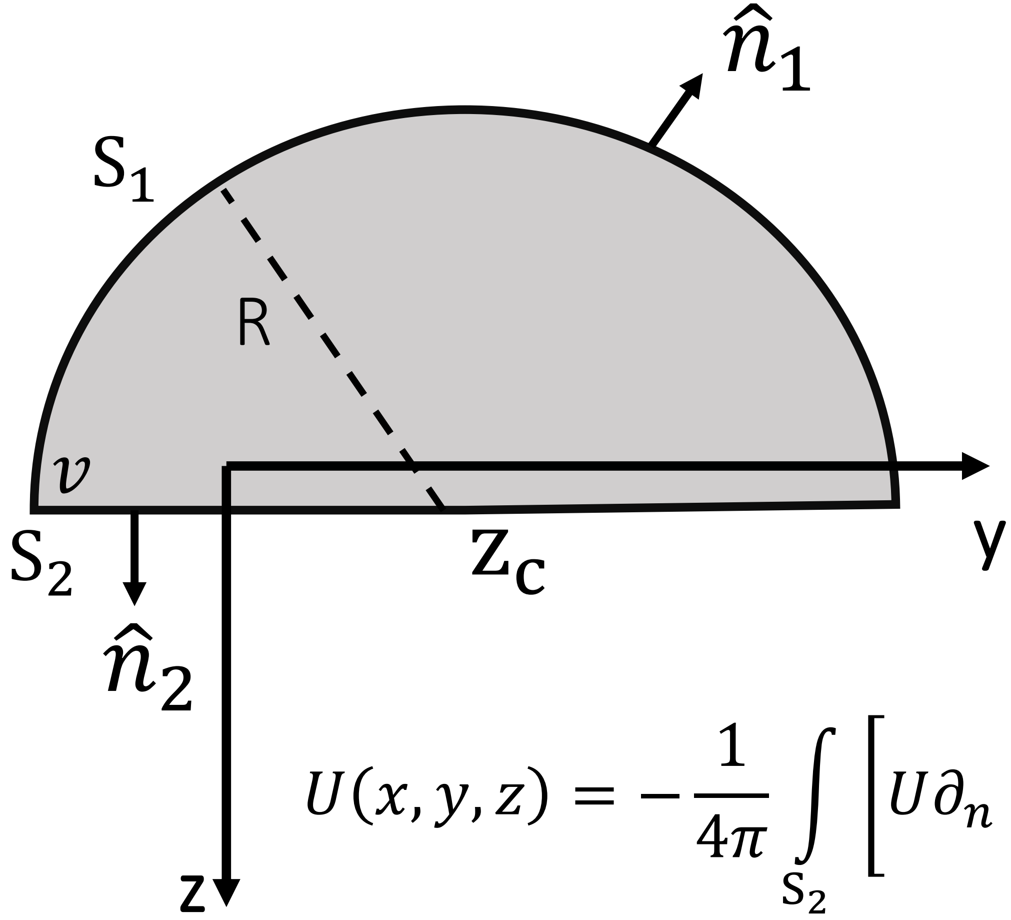
Considerando que a função U(x,y,z) seja harmônica no interior da região v e impondo que o raio R dessa tenda ao infinito, teremos

$$U(x,y,z) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\partial_n U\right]dS}_{=0} - \frac{1}{4\pi}\int_{S_2}\left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\partial_n U\right]dS$$

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Podemos aproximar a região v (caso anterior) por uma semi-esfera de **R**, limitada por duas superfícies.

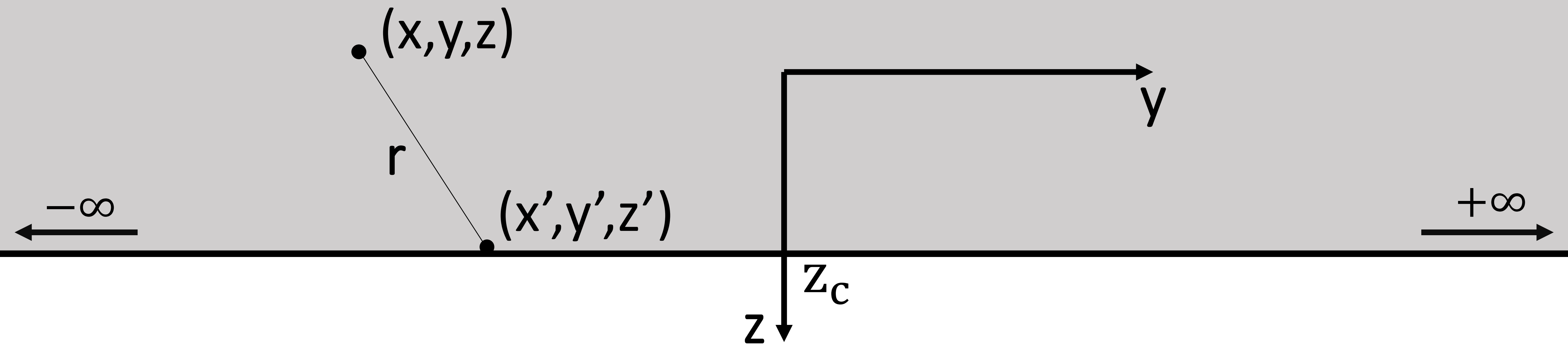


Considerando que a função U(x,y,z) seja harmônica no interior da região v e impondo que o raio R dessa tenda ao infinito, teremos

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_2}\left[U\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\partial_n U\right]dS$$

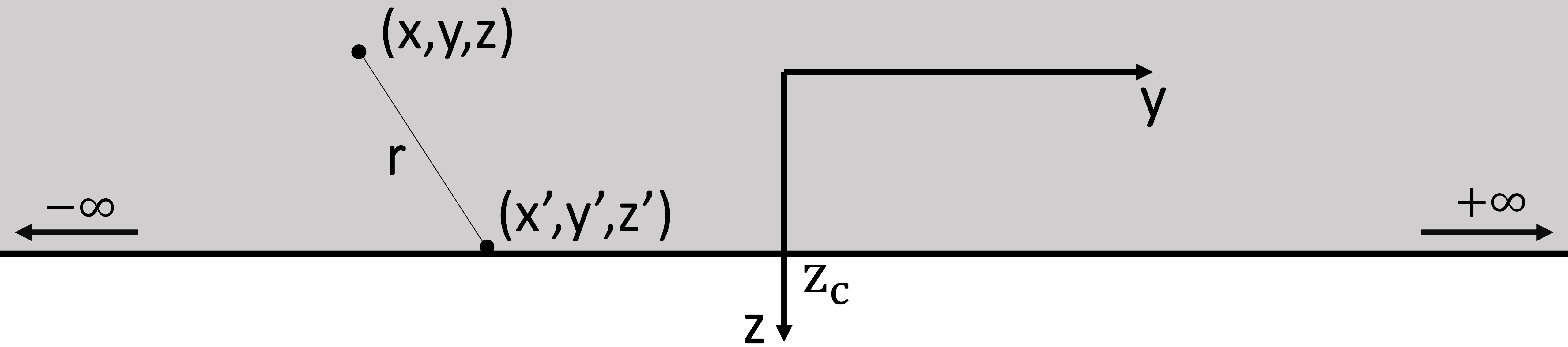
(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima



(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima



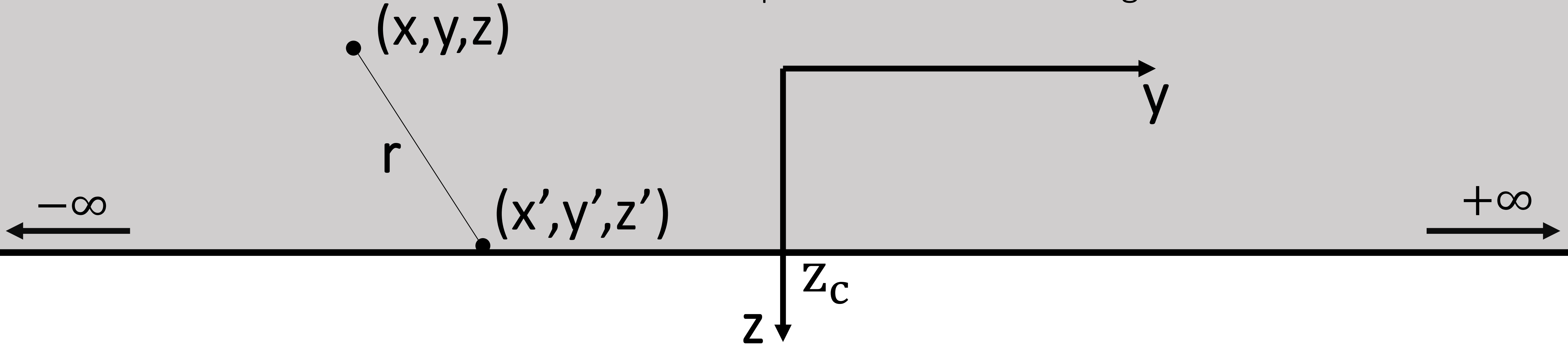
$$U(x,y,z) = \frac{(z_c - z)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x',y',z_c)}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_c)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx'dy'$$

Integral de continuação para cima

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Uma vez que sabemos os valores da função U sobre o plano zc, podemos calcular os valores dela em qualquer ponto no interior da região v!



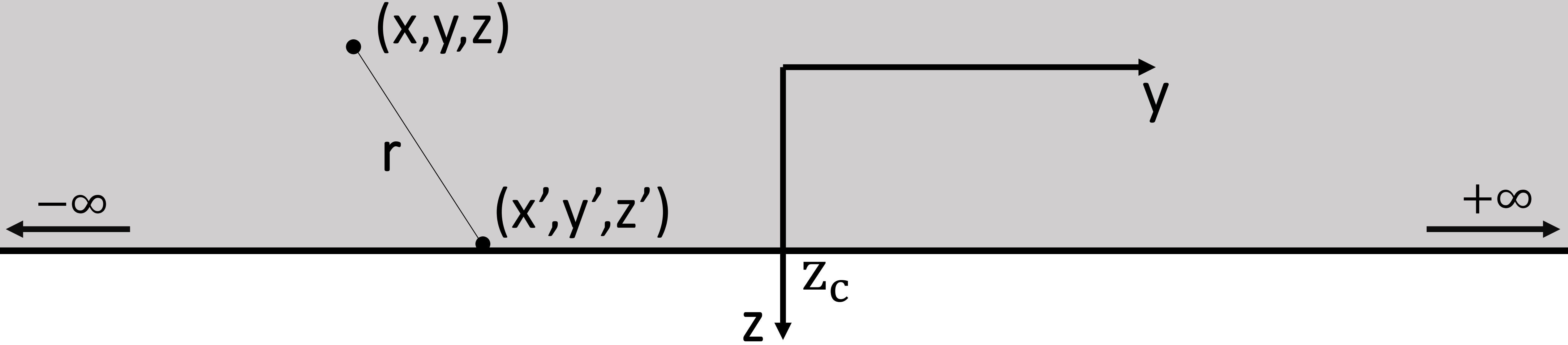
$$U(x,y,z) = \frac{(z_c - z)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x',y',z_c)}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_c)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx'dy'$$

Integral de continuação para cima

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Equação de Continuação para cima

Em situações práticas, essa equação é utilizada processarmos dados potenciais no domínio do espaço!



$$U(x,y,z) = \frac{(z_c - z)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x',y',z_c)}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_c)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\, dx'dy'$$

Integral de continuação para cima

(Kellogg, 1929;MacMillan, 1958;Blakely, 1996)

Referências

- Blakely, R. J., 1996, Potential theory in gravity and magnetic applications: Cambridge University Press.

- Kellogg, O. D., 1929, Foundations of potential theory: Frederick Ungar Publishing Company.

- Macmillan, W. D., 1958, Theory of the Potential: Dover Publications Inc.

Até a próxima aula!