Observatório Nacional

Divisão de Programas
de Pós-Graduação

INVERSÃO MAGNÉTICA EM DIFERENTES ESCALAS

André Luis Albuquerque dos Reis

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. Vanderlei Coelho de Oliveira Junior

Co-orientador(a): Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa

Rio de Janeiro
Novembro de 2019

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Capítulo 2

Metodologia

2.1 A camada equivalente magnética e a distribuição de momentos positiva

Seja $\Delta T(x, y, z)$ a anomalia de campo total produzida por um conjunto de fontes magnéticas no ponto (x, y, z), que estão posicionadas segundo um sistema de coodenadas Cartesiano topocêntrico com os eixos x, y e z orientados para norte, leste e para baixo, respectivamente. Considere que o campo geomagético principal possua inclinação I_0 e declinação D_0 sobre a área de estudo, de forma que sua direção seja definida por um vetor unitário

$$\hat{\mathbf{F}}_0 = \begin{bmatrix} \cos I_0 \cos D_0 \\ \cos I_0 \sin D_0 \\ \sin I_0 \end{bmatrix} . \tag{2.1}$$

Considere também que as fontes magnéticas tenham direção de magnetização constante definida pelo vetor unitário

$$\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos I \cos D \\ \cos I \sin D \\ \sin I \end{bmatrix} , \tag{2.2}$$

em que as constantes I e D representem a inclinação e a declinação, respectivamente, e $\mathbf{q}$ um vetor de dimensão 2×1 dado por:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} I \\ D \end{bmatrix} . \tag{2.3}$$

Por conveniência, denominamos o vetor $\mathbf{q}$ como vetor de direção de magnetização. Neste caso, a anomalia de campo total $\Delta T(x, y, z)$ pode ser escrita como:

$$\Delta T(x,y,z) = \hat{\mathbf{F}}_0^{\top}\mathbf{B}(x,y,z) \tag{2.4}$$

e $\mathbf{B}(x,y,z)$ é o campo de indução magnética dado pela equação

$$\mathbf{B}(x,y,z) = \gamma_m \,\mathbf{M}(x,y,z)\,\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q}) \,, \tag{2.5}$$

em que $\gamma_m = 10^{-9}\frac{\mu_0}{4\pi}$ (in $n\,H/m$), μ_0 é a permeabilidade no vácuo e $\mathbf{M}(x,y,z)$ é uma matriz dada por

$$\mathbf{M}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\Gamma(x,y,z) & \partial_{xy}\Gamma(x,y,z) & \partial_{xz}\Gamma(x,y,z) \\ \partial_{xy}\Gamma(x,y,z) & \partial_{yy}\Gamma(x,y,z) & \partial_{yz}\Gamma(x,y,z) \\ \partial_{xz}\Gamma(x,y,z) & \partial_{yz}\Gamma(x,y,z) & \partial_{zz}\Gamma(x,y,z) \end{bmatrix} \,, \tag{2.6}$$

cujo os elementos $\partial_{\alpha\beta}\Gamma(x,y,z) \equiv \frac{\partial^2\Gamma(x,y,z)}{\partial\alpha\partial\beta}$, $\alpha, \beta = x, y, z$, representam as derivadas segundas da função harmônica

$$\Gamma(x,y,z) = \iiint\limits_{\upsilon} \frac{m(x',y',z')\,dv'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}} \,. \tag{2.7}$$

Nesta equação, x', y' e z' são as coordenadas do elemento de volume dv', no qual tem intensidade de magnetização $m(x',y',z')$ (em A/m), localizado no interior do volume υ das fontes magnéticas. Consideramos que a intensidade de magnetização $m(x',y',z')$ é estritamente positiva em todos os pontos no interior das fontes. Por conseguinte, $\Gamma(x,y,z)$ é positivo em todos os pontos exteriores a fonte magnética. Do ponto de vista físico, $\mathbf{M}(x,y,z)$ (equação 2.6) e $\Gamma(x,y,z)$ (equação 2.7) representam, respectivamente, o tensor gradiente e o potencial gravitacional correspondente que seria produzido pelas fontes magnéticas no ponto (x,y,z), se elas tivessem distribuição de densidade proporcional a $m(x',y',z')$. Note que $\mathbf{M}(x,y,z)$ é uma matriz simétrica, e seu traço é zero em todos os pontos (x,y,z) exteriores as fontes magnéticas e possui cinco componentes independentes que são funções harmônicas (PEDERSEN e RASMUSSEN, 1990). Explorando estas propriedades, podemos reescrever a anomalias de campo total $\Delta T(x,y,z)$ (equação 2.4) como uma combinação linear de cinco funções harmônicas independentes como:

$$\begin{aligned} \Delta T(x,y,z) = {} & a_{xx}\,\partial_{xx}\Gamma(x,y,z) + a_{xy}\,\partial_{xy}\Gamma(x,y,z) + a_{xz}\,\partial_{xz}\Gamma(x,y,z) + \\ & a_{yy}\,\partial_{yy}\Gamma(x,y,z) + a_{yz}\,\partial_{yz}\Gamma(x,y,z) \end{aligned} \,, \tag{2.8}$$

em que

$$
\begin{aligned}
a_{xx} &= m_x F_x - m_z F_z \\
a_{xy} &= m_x F_y + m_y F_x \\
a_{xz} &= m_x F_z + m_z F_x \\
a_{yy} &= m_y F_y - m_z F_z \\
a_{yz} &= m_y F_z + m_z F_y
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

são constantes definidas pelos elementos F_α e m_β, $\alpha = x, y, z$, $\beta = x, y, z$, dos vetores $\hat{\mathbf{F}}_0$ (equação 2.1) e $\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q})$ (equação 2.2), respectivamente. Por simplicidade, omitimos a dependência em relação aos parâmetros I_0 e D_0 (equação 2.1) e I e D (equação 2.2).

Seja $\Delta\tilde{T}(x, y, z)$ a anomalia de campo total produzida por uma camada contínua de dipolos que possuem direção de magnetização constante definida por um vetor unitário $\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q})$ (equação 2.3), que são localizados a uma profundidade constante $z = z_c$. A anomalia de campo total produzida por esta camada fictícia pode ser definida como:

$$
\Delta\tilde{T}(x, y, z) = \hat{\mathbf{F}}_0^\top \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) \tag{2.10}
$$

e $\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)$ é o campo de indução magnética dado por

$$
\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) = \gamma_m \, \tilde{\mathbf{M}}(x, y, z) \, \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q}) \, , \tag{2.11}
$$

em que $\tilde{\mathbf{M}}(x, y, z)$ é uma matriz dada por

$$
\tilde{\mathbf{M}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\Phi(x, y, z) & \partial_{xy}\Phi(x, y, z) & \partial_{xz}\Phi(x, y, z) \\ \partial_{xy}\Phi(x, y, z) & \partial_{yy}\Phi(x, y, z) & \partial_{yz}\Phi(x, y, z) \\ \partial_{xz}\Phi(x, y, z) & \partial_{yz}\Phi(x, y, z) & \partial_{zz}\Phi(x, y, z) \end{bmatrix} \quad , \tag{2.12}
$$

com elementos $\partial_{\alpha\beta}\Phi(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2 \Phi(x,y,z)}{\partial\alpha\partial\beta}$, $\alpha, \beta = x, y, z$, representando as segundas derivadas da função harmônica

$$
\Phi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x'', y'', z_c) \, dS''}{\left[(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z_c)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \, , \quad z_c > z \, . \tag{2.13}
$$

Nesta equação, x'', y'' and z_c são as coordenadas do elemento de área dS'', que possui momento magnético por unidade de área definido pela função $p(x'', y'', z_c)$ (em A). Note que $\tilde{\mathbf{M}}(x, y, z)$ (equação 2.12) também representa o tensor gradiente (PEDERSEN e RASMUSSEN, 1990) e, consequentemente, simétrico possuindo traço igual a zero em todos os pontos (x, y, z) acima da camada (com $z < z_c$) e possui cinco componentes independentes que são funções harmônicas. Estas propriedades permitem reescrever a anomalia de campo total $\Delta\tilde{T}(x, y, z)$ (equação 2.10) como uma combinação linear de funções harmônicas dadas por

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{T}(x,y,z) = a_{xx}\,\partial_{xx}\Phi(x,y,z) + a_{xy}\,\partial_{xy}\Phi(x,y,z) + a_{xz}\,\partial_{xz}\Phi(x,y,z) + \\ a_{yy}\,\partial_{yy}\Phi(x,y,z) + a_{yz}\,\partial_{yz}\Phi(x,y,z) \end{aligned} \quad , \tag{2.14}$$

com coeficientes $a_{\alpha\beta}$, $\alpha = x, y$, $\beta = x, y, z$, definidos pela equação 2.9.

Sabemos pela teoria do potencial que é possível encontrar uma função $p(x'', y'', z_c)$ (equação 2.13) na qual a condição $\Delta T(x, y, z) = \Delta\tilde{T}(x, y, z)$ é válida para todos os pontos (x, y, z) localizados acima da camada fictícia de dipolos. Neste caso, a camada é chamada *camada equivalente*. Para investigar tais propriedades de $p(x'', y'', z_c)$, devemos primeiro observar que, impondo as condições acima mencionadas e utilizando as equações 2.8 e 2.14, obtemos

$$\begin{aligned} &a_{xx}\ [\partial_{xx}\Phi(x,y,z) - \partial_{xx}\Gamma(x,y,z)] + \\ &a_{xy}\ [\partial_{xy}\Phi(x,y,z) - \partial_{xy}\Gamma(x,y,z)] + \\ &a_{xz}\ [\partial_{xz}\Phi(x,y,z) - \partial_{xz}\Gamma(x,y,z)] + \\ &a_{yy}\ [\partial_{yy}\Phi(x,y,z) - \partial_{yy}\Gamma(x,y,z)] + \\ &a_{yz}\ [\partial_{yz}\Phi(x,y,z) - \partial_{yz}\Gamma(x,y,z)] = 0 \ , \quad z < z_c \ , \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que os coeficientes $a_{\alpha\beta}$ (equation 2.9), $\alpha = x, y$, $\beta = x, y, z$, são definidos por valores arbitrários de I_0 e D_0 (equação 2.1) e I e D (equação 2.2).

Como os coeficientes $a_{\alpha\beta}$ são não nulos, concluimos que as cinco funções harmônicas linearmente independentes devem ser zero para todos os pontos (x, y, z) acima da camada equivalente, em que $z < z_c$. Igualando cada termo a zero e reescrevendo as segundas derivadas da integral de superfície $\Phi(x, y, z)$ (equação 2.13), teremos

$$\partial_{\alpha\beta}\Gamma(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x'', y'', z_c)\,\partial_{\alpha\beta}\frac{1}{r}\ dS'' \ , \quad z_c > z \ , \tag{2.16}$$

em que (x'', y'', z_c) é um ponto sobre a camada equivalente e $\partial_{\alpha\beta}\frac{1}{r} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{1}{r}$, representa a segunda derivada com respeito a $\alpha = x, y$ e $\beta = x, y, z$, do inverso da distância da função

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{[(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z_c)^2]^{\frac{1}{2}}} \ . \tag{2.17}$$

Note que a equação 2.16 é obtida derivando ambos os lados de

$$\Gamma(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x'',y'',z_c)\,\frac{1}{r}\;dS''\,, \quad z_c > z\,. \tag{2.18}$$

Pode ser mostrado (APÊNDICE A) que esta equação integral tem a solução

$$p(x'',y'',z_c) = \frac{1}{2\pi}\partial_z\Gamma(x'',y'',z_c)\,, \tag{2.19}$$

que, de acordo com a equação 2.7,

$$\partial_z\Gamma(x'',y'',z_c) = \iiint\limits_v \frac{m(x',y',z')(z'-z_c)\,dv'}{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z_c-z')^2]^{\frac{3}{2}}}\,, \quad z' > z_c\,. \tag{2.20}$$

Do ponto de vista físico, a equação 2.20 representa a componente vertical da atração gravitacional (ou a pseudogravidade) que seria produzida pelas fontes magnéticas sobre a camada equivalente, se elas tivessem a distribuição de densidade proporcional a $m(x',y',z')$. Tendo em vista que $m(x',y',z')$ é estritamente positiva em todos os pontos (x',y',z') no interior das fontes magnéticas, $\partial_z\Gamma(x'',y'',z_c)$ é positiva em todos os pontos (x'',y'',z_c) localizadas sobre a camada equivalente.

O aspecto mais interessante sobre a distribuição de momentos magnéticos $p(x'',y'',z_c)$ (equação 2.19) é que ela é definida como o produto de uma constante positiva $\frac{1}{2\pi}$ e a função $\partial_z\Gamma(x'',y'',z_c)$, que é estritamente positiva em todos os pontos (x'',y'',z_c) sobre a camada equivalente. Consequentemente, a função $p(x'',y'',z_c)$ também é positiva em todos os pontos sobre a camada. Esta relação é similar àquela apresentada por PEDERSEN (1991) e LI *et al.* (2014). Os autores determinam, no domínio do número de onda, a distribuição de momentos magnéticos no interior de uma camada equivalente contínua com magnetização verticalmente induzida. Eles também consideram uma camada equivalente plana localizada abaixo e paralela ao plano horizontal contendo os dados observados de anomalia de campo total. Contudo, aqui não seguimos a abordagem no domínio de Fourier como estes autores. Além disso, a equação 2.19 generaliza a condição de positividade por que (1) é válida para todos os casos nos quais a magnetização da camada equivalente tem a mesma direção da magnetização total das fontes, mesmo que ela seja puramente induzida ou não, e (2) não requer que os dados de anomalia de campo total observados estejam em um plano.

2.2 Fundamentação teórica das componentes do vetor magnético

Além do desenvolvimento matemático para a distribuição positiva de momentos magnéticos, iremos explicar teoricamente que o cálculo das componentes do vetor magnético não depende da direção de magnetização no contexto da camada equivalente. Supondo que em determinadas situações somente uma das componentes do campo de indução magnética gerado por uma rocha possa ser medida e que as medições são realizadas em regiões livres de fontes e, portanto, em pontos exteriores as rochas. Além disso, consideramos que o cálculo das componentes do vetor magnético não depende do tipo de fonte, bem como de sua configuração espacial. Assumimos também que o campo magnético não varia com o tempo, ou que esta variação seja tão pequena que pode ser desprezada ao longo das medições. Neste caso, o campo de indução magnética $\mathbf{B}(x, y, z)$ é governado pela lei de Gauss

$$\nabla.\mathbf{B}(x, y, z) = 0 \tag{2.21}$$

e pela lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B}(x, y, z) = 0. \tag{2.22}$$

Portanto, em coordenadas Cartesianas, a equação 2.22 corresponde a

$$\begin{aligned} \partial_y B_z - \partial_z B_y &= 0 \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z &= 0 \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x &= 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

em que $\partial_\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial \alpha}$ é denotado como a derivada parcial em relação a coordenada α, $\alpha = x, y, z$.

A partir da equação 2.11, as componentes do campo de indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)$ gerado por uma camada contínua de dipolos que tem direção de magnetização constante $\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q})$ posicionada a uma profundidade $z = z_c$ abaixo do plano de observação podem ser reescritas como:

$$\tilde{B}_\alpha(x, y, z) = \gamma_m \, \partial_{\alpha\beta}\Phi(x, y, z) m_\beta \, , \tag{2.24}$$

em que $\tilde{B}_\alpha(x, y, z)$ é a componente α, $\alpha = x, y, z$, do campo de indução magnética e m_β é a componente β, $\beta = x, y, z$, da direção de magnetização $\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q})$ da camada. Por conveniência, a componente vertical do campo magnético pode ser escrita como:

$$\tilde{B}_z(x,y,z) = \gamma_m \left[\partial_{xz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_x^\dagger + \partial_{yz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_y^\dagger + \partial_{zz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_z^\dagger\right], \quad (2.25)$$

em que a função harmônica $\Phi^\dagger(x,y,z)$ é dada por

$$\Phi^\dagger(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^\dagger(x'',y'',z_c)\,dS''}{\left[(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z_c)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.26)$$

A função $p^\dagger(x'',y'',z_c)$ descreve a distribuição de momentos magnéticos por unidade de área relativa a componente $\tilde{B}_z(x,y,z)$ do campo de indução magnética gerado por uma camada contínua e direção de magnetização $\hat{\mathbf{m}}^\dagger(\mathbf{q})$ que possui componentes $m_\beta^\dagger$, $\beta = x,y,z$. Analogamente, podemos escrever as outras duas componentes do campo como:

$$\tilde{B}_x(x,y,z) = \gamma_m \left[\partial_{xx}\Phi^\ddagger(x,y,z)m_x^\ddagger + \partial_{xy}\Phi^\ddagger(x,y,z)m_y^\ddagger + \partial_{xz}\Phi^\ddagger(x,y,z)m_z^\ddagger\right] \quad (2.27)$$

e

$$\tilde{B}_y(x,y,z) = \gamma_m \left[\partial_{xy}\Phi^\sharp(x,y,z)m_x^\sharp + \partial_{yy}\Phi^\sharp(x,y,z)m_y^\sharp + \partial_{yz}\Phi^\sharp(x,y,z)m_z^\sharp\right], \quad (2.28)$$

em que $\tilde{B}_x(x,y,z)$ e $\tilde{B}_y(x,y,z)$ são as componentes do campo magnético que dependem das funcões harmônicas $\Phi^\ddagger(x,y,z)$ e $\Phi^\sharp(x,y,z)$ e das direções de magnetização $\hat{\mathbf{m}}^\ddagger(\mathbf{q})$ e $\hat{\mathbf{m}}^\sharp(\mathbf{q})$, respectivamente. Note que as equações 2.25, 2.27 e 2.28 representam as camadas contínuas que geram as componentes do vetor magnético com suas respectivas direções magnetização e distribuições de momentos magnéticos.

Aplicando as condições de contorno acima mencionadas pelas equações 2.23 nas componentes do vetor magnético teremos que

$$\begin{aligned}
&[\partial_{xyz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_x^\dagger - \partial_{xyz}\Phi^\sharp(x,y,z)m_x^\sharp]+\\
&[\partial_{xyy}\Phi^\dagger(x,y,z)m_y^\dagger - \partial_{xyy}\Phi^\sharp(x,y,z)m_y^\sharp]+\\
&[\partial_{xyz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_z^\dagger - \partial_{xyz}\Phi^\sharp(x,y,z)m_z^\sharp] = 0,
\end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
&[\partial_{xxz}\Phi^\ddagger(x,y,z)m_x^\ddagger - \partial_{xxz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_x^\dagger]+\\
&[\partial_{xyz}\Phi^\ddagger(x,y,z)m_y^\ddagger - \partial_{xyz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_y^\dagger]+\\
&[\partial_{xzz}\Phi^\ddagger(x,y,z)m_z^\ddagger - \partial_{xzz}\Phi^\dagger(x,y,z)m_z^\dagger] = 0
\end{aligned} \quad (2.30)$$

e

$$
\begin{aligned}
&[\partial_{xxy}\Phi^{\sharp}(x,y,z)m_x^{\sharp} - \partial_{xxy}\Phi^{\ddagger}(x,y,z)m_x^{\ddagger}]+ \\
&[\partial_{xyz}\Phi^{\sharp}(x,y,z)m_y^{\sharp} - \partial_{xyz}\Phi^{\ddagger}(x,y,z)m_y^{\ddagger}]+ \\
&[\partial_{xzz}\Phi^{\sharp}(x,y,z)m_z^{\sharp} - \partial_{xzz}\Phi^{\ddagger}(x,y,z)m_z^{\ddagger}] = 0.
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

Note que para satisfazer as condições apresentadas pelas equações 2.23 e de acordo com as equações 2.29, 2.30 e 2.31, as distribuições de momentos magnéticos e as direções de magnetização das camadas que ajustam as componentes do vetor de indução magnética devem ser iguais. Portanto, isto nos leva que

$$
p^{\dagger}(x'',y'',z_c) = p^{\ddagger}(x'',y'',z_c) = p^{\sharp}(x'',y'',z_c) \tag{2.32}
$$

e

$$
\begin{aligned}
m_x^{\dagger} &= m_x^{\ddagger} = m_x^{\sharp} \\
m_y^{\dagger} &= m_y^{\ddagger} = m_y^{\sharp} \\
m_z^{\dagger} &= m_z^{\ddagger} = m_z^{\sharp}.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

O que as equações 2.32 e 2.33 nos diz é que uma vez que conheçamos a distribuição de momentos magnéticos e a direção de magnetização que ajustam uma das componentes conseguimos recuperar as outras duas. Além disso, as derivadas parciais $\partial_{\alpha\beta}\Phi(x,y,z)$, $\alpha,\beta = x,y,z$ são tomadas em relação a x, y e z das funções harmônicas, fazendo com que todo o cálculo das componentes do vetor magnético não dependa das componentes m_β, $\beta = x,y,z$, da direção de magnetização. Portanto, é possível ajustar todas as componentes do vetor magnético a partir de uma distribuição de momentos magnéticos associada a qualquer direção de magnetização arbitrária imposta sobre a camada.

2.3 Parametrização e o problema direto

2.3.1 Para a anomalia de campo total

Em situações práticas, não é possível determinar uma distribuição contínua de momentos magnéticos $p(x'',y'',z_c)$ (equação 2.19) sobre a camada equivalente. Por esta razão, a camada tem que ser aproximada por um conjunto discreto de dipolos (fontes equivalentes) de volume unitário localizado a uma profundidade constante e igual a $z = z_c$. A anomalia de campo total produzida por esta camada discreta (anomalia de campo total predita) no ponto (x_i, y_i, z_i), $i = 1,\ldots,N$, é dada por

$$\Delta T_i(\mathbf{s}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{q})^\top \mathbf{p}, \tag{2.34}$$

em que $\mathbf{s}$ é um vetor $(M+2) \times 1$ particionado (vetor de dados preditos) dado por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

$\mathbf{q}$ é o vetor direção de magnetização (equação 2.3), $\mathbf{p}$ é um vetor $M \times 1$ (vetor de momentos magnéticos) cujo j-ésimo elemento, $j = 1, \ldots, M$, é a intensidade do momento magnético p_j (em $A\,m^2$) dos j-ésimo dipolo e $\mathbf{g}_i(\mathbf{q})$ é outro vetor $M \times 1$ cujo j-ésimo elemento é definido pela função harmônica

$$g_{ij}(\mathbf{q}) = \gamma_m \hat{\mathbf{F}}_0^T \, \mathbf{M}_{ij} \, \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q}) \, . \tag{2.36}$$

Nesta equação, $\mathbf{M}_{ij}$ é uma matriz 3×3 dada por

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\frac{1}{r} & \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{xz}\frac{1}{r} \\ \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{yy}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} \\ \partial_{xz}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} & \partial_{zz}\frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad , \tag{2.37}$$

em que $\partial_{\alpha\beta}\frac{1}{r} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{1}{r}$, representa a derivada segunda com respeito a $\alpha = x, y, z$ e $\beta = x, y, z$, do inverso da distância $\frac{1}{r}$ (equação 2.17) entre as coordenadas de observação $(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ e as coordenadas das fontes equivalentes $(x'', y'', z_c) = (x_j, y_j, z_c)$. As equações 2.34-2.37 mostram que a anomalia de campo total predita $\Delta T_i(\mathbf{s})$ possui uma relação linear com o vetor de momentos magnéticos $\mathbf{p}$ e uma relação não linear com o vetor de direção de magnetização $\mathbf{q}$ (equação 2.3).

2.3.2 Para a componente vertical do campo magnético

De forma análoga a seção 2.3.1, a componente vertical do campo de indução magnética (componente vertical predita) produzida por uma camada discreta posicionada a uma profundidade constante $z = z_c$ no ponto (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, N$, é dada por

$$B_{zi}(\mathbf{s}) = \mathbf{g}_i^z(\mathbf{q})^\top \, \mathbf{p}, \tag{2.38}$$

em que $\mathbf{s}$ é um vetor $(M+2) \times 1$ particionado (vetor de dados preditos) dado por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \tag{2.39}$$

$\mathbf{q}$ é o vetor direção de magnetização (equação 2.3), $\mathbf{p}$ é um vetor $M \times 1$ (vetor de momentos magnéticos) cujo j-ésimo elemento, $j = 1, \ldots, M$, é a intensidade do momento magnético p_j (em $A\,m^2$) dos j-ésimo dipolo e $\mathbf{g}_i^z(\mathbf{q})$ é outro vetor $M \times 1$

cujo j-ésimo elemento é definido pela função harmônica

$$g^z_{ij}(\mathbf{q}) = \gamma_m \, \mathbf{M}^{z^\top}_{ij} \, \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q}) \, . \tag{2.40}$$

Nesta equação, $\mathbf{M}^{z^\top}_{ij}$ é um vetor 1×3 dada por

$$\mathbf{M}^{z^\top}_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_{xz}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} & \partial_{zz}\frac{1}{r} \end{bmatrix}^\top \quad , \tag{2.41}$$

em que $\partial_{\alpha z}\frac{1}{r} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial z}\frac{1}{r}$, representa a derivada segunda com respeito a $\alpha = x, y, z$, do inverso da distância $\frac{1}{r}$ (equação 2.17) entre as coordenadas de observação $(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ e as coordenadas das fontes equivalentes $(x'', y'', z_c) = (x_j, y_j, z_c)$. Note que, analogamente a seção 2.3.1, a componente vertical do campo $B_{zi}(\mathbf{s})$ possui uma relação linear com o vetor de momentos magnéticos $\mathbf{p}$ e uma relação não linear com o vetor de direção de magnetização $\mathbf{q}$ (equação 2.3).

2.4 Problema inverso

2.4.1 A estimativa da direção de magnetização

Seja $\mathbf{\Delta T}^o$ o vetor de dados observados cujo i-ésimo elemento ΔT^o_i é a anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética no ponto (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, N$. Similarmente, seja $\mathbf{\Delta T}(\mathbf{s})$ o vetor de dados preditos cujo i-ésimo elemento $\Delta T_i(\mathbf{s})$ (equação 2.34) é a anomalia de campo total produzida por uma camada equivalente discreta no mesmo ponto (x_i, y_i, z_i). Com o objetivo de estimarmos um vetor de parâmetros $\mathbf{s}$ (equação 2.35) que minimiza a diferença entre $\mathbf{\Delta T}^o$ e $\mathbf{\Delta T}(\mathbf{s})$, temos que resolver o problema inverso:

$$\text{minimizar} \qquad \Psi(\mathbf{s}) = \|\mathbf{\Delta T}^o - \mathbf{\Delta T}(\mathbf{s})\|_2^2 + \mu f_0 \, \| \, \mathbf{p} \, \|_2^2 \, , \tag{2.42a}$$

$$\text{sujeito a} \qquad \mathbf{p} \geqslant \mathbf{0} \, . \tag{2.42b}$$

O primeiro e o segundo termo da equação 2.42a são, respectivamente, a função de ajuste e a função regularizadora de Tikhonov de ordem zero, μ é o parâmetro de regularização, $\| \cdot \|_2^2$ representa o quadrado da norma Euclidiana e f_0 é um fator de normalização. Na inequação 2.42b, $\mathbf{0}$ é um vetor $M \times 1$ com todos os elementos iguais a zero no qual o sinal da inequação é aplicado elemento a elemento. Este vínculo de positividade sobre o vetor de momentos magnéticos $\mathbf{p}$ é incorporado utilizando o chamado *estimador de mínimos quadrados não negativo* ou somente NNLS (do inglês *Nonnegative least squares*) proposto por LAWSON e HANSON (1974).

Para resolver este problema inverso, temos que considerar primeiramente uma expansão até segunda ordem da função objetivo (equação 2.42a) em torno de $\mathbf{s} = \mathbf{s}^k$ (equação 2.35):

$$\Psi(\mathbf{s}^k + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}^k) \approx \Psi(\mathbf{s}^k) + \mathbf{J}^{k\top}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}^k + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}^{k\top}\mathbf{H}^k\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}^k \,, \tag{2.43}$$

em que $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}^k$ é uma perturbação no vetor de parâmetros e os termos $\mathbf{J}^k$ e $\mathbf{H}^k$ são, respectivamente, o vetor gradiente e a matriz Hessiana avaliadas em $\mathbf{s}^k$. Então, estimamos o vetor de perturbação $\bar{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}}^k$ que minimiza a função expandida (equação 2.43) tomando o seu gradiente e igualando o resultado ao vetor nulo. Este procedimento nos leva ao sistema linear

$$\mathbf{H}^k\bar{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}}^k = -\mathbf{J}^k \,, \tag{2.44}$$

que representa o k-ésimo passo do método de Gauss-Newton (ASTER *et al.*, 2005) para a minimização da função objetivo (equação 2.42a). Reescrevemos este sistema linear desprezando as derivadas cruzadas na matriz Hessiana como:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}^k_{pp} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^\top & \mathbf{H}^k_{qq} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}}^k \\ \bar{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}}^k \end{array}\right] \approx -\left[\begin{array}{c} \mathbf{J}^k_p \\ \mathbf{J}^k_q \end{array}\right], \tag{2.45}$$

em que $\mathbf{0}$ é uma matriz $M \times 2$ que contém todos os elementos iguais a zero, $\bar{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}}^k = \bar{\mathbf{p}}^{k+1} - \bar{\mathbf{p}}^k$ é a correção no vetor de momentos magnéticos $\mathbf{p}$, $\bar{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}}^k = \bar{\mathbf{q}}^{k+1} - \bar{\mathbf{q}}^k$ é a correção no vetor direção de magnetização e os termos $\mathbf{J}^k_\alpha$ e $\mathbf{H}^k_{\alpha\alpha}$, $\alpha = p, q$, são os vetores gradientes e as matrizes Hessianas calculadas com respeito aos elementos dos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, respectivamente.

O vetor gradiente $\mathbf{J}^k_p$ e a matriz Hessiana $\mathbf{H}^k_{pp}$ (equação 2.45) relativas ao vetor de momentos magnéticos $\mathbf{p}$ (equação 2.35) são, respectivamente,

$$\mathbf{J}^k_p = -2\mathbf{G}^{k\top}_p \left[\boldsymbol{\Delta}\mathbf{T}^o - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}^k)\right] + 2\mu f^k_0 \bar{\mathbf{p}}^k \tag{2.46}$$

e

$$\mathbf{H}^k_{pp} = 2\mathbf{G}^{k\top}_p\mathbf{G}^k_p + 2\mu f^k_0\mathbf{I} \,, \tag{2.47}$$

em que $\mathbf{G}^k_p$ é uma matriz de dimensão $N \times M$ cujo ij-ésimo elemento é dado pela função harmônica $g_{ij}(\bar{\mathbf{q}}^k)$ (equação 2.36) avaliada na direção de magnetização $\bar{\mathbf{q}}^k$, $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de dimensão $M \times M$ e f^k_0 é um fator de normalização igual a

$$f^k_0 = \frac{trace\left(\mathbf{G}^{k\top}_p\mathbf{G}^k_p\right)}{M} \,. \tag{2.48}$$

O vetor gradiente $\mathbf{J}^k_q$ e a matriz Hessiana $\mathbf{H}^k_{qq}$ (equação 2.45) relativas a direção de magnetização $\mathbf{q}$ (equação 2.3) são, respectivamente,

$$\mathbf{J}_q^k = -2\mathbf{G}_q^{k\top}\left[\mathbf{\Delta T}^o - \mathbf{\Delta T}(\bar{\mathbf{s}}^k)\right] \tag{2.49}$$

e

$$\mathbf{H}_{qq}^k \approx 2\mathbf{G}_q^{k\top}\mathbf{G}_q^k \,, \tag{2.50}$$

em que $\mathbf{G}_q^k$ é uma matriz $N \times 2$ dada por

$$\mathbf{G}_q^k = \begin{bmatrix} \partial_I \mathbf{g}_1(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k & \partial_D \mathbf{g}_1(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k \\ \vdots & \vdots \\ \partial_I \mathbf{g}_N(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k & \partial_D \mathbf{g}_N(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k \end{bmatrix} \,, \tag{2.51}$$

em que $\partial_\alpha \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k) \equiv \frac{\partial \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k)}{\partial \alpha}$, $\alpha = I, D$, representa a primeira derivada do vetor $\mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k)$ (equação 2.34) com respeito a inclinação I e a declinação D da magnetização total das fontes.

Processo iterativo para a estimativa da direção de magnetização

A iteração $k = 0$ do nosso algoritmo começa com uma aproximação inicial $\bar{\mathbf{q}}^k = \bar{\mathbf{q}}^0$ para o vetor direção de magnetização $\mathbf{q}$ (equação 2.3). Utilizando esta aproximação inicial $\bar{\mathbf{q}}^k$, a parte superior da equação 2.45 nos leva ao seguinte sistema linear para o vetor de momentos magnéticos:

$$\left[\mathbf{G}_p^{k\top}\mathbf{G}_p^k + \mu f_0^k \mathbf{I}\right]\bar{\mathbf{p}}^k = \mathbf{G}_p^{k\top}\mathbf{\Delta T}^o \,. \tag{2.52}$$

Para impor o vínculo de positividade (equação 2.42b) sobre a distribuição de momentos magnéticos, este sistema linear é resolvido usando o método de NNLS (DIAS *et al.*, 2007; LAWSON e HANSON, 1974). Esta distribuição de momentos magnéticos é então usada para estimar uma correção $\bar{\mathbf{\Delta q}}^k$ no vetor direção de magnetização resolvendo um sistema não linear utilizando o método de Levenberg-Marquardt (ASTER *et al.*, 2005):

$$\left[\mathbf{G}_q^{k\top}\mathbf{G}_q^k + \lambda\mathbf{I}\right]\bar{\mathbf{\Delta q}}^k = \mathbf{G}_q^{k\top}\left[\mathbf{\Delta T}^o - \mathbf{\Delta T}(\mathbf{s}^k)\right] \,, \tag{2.53}$$

em que λ é o parâmetro de Marquardt e $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade. Após estimarmos a correção $\bar{\mathbf{\Delta q}}^k$ na k-ésima iteração, atualizamos a direção de magnetização aplicando a correção a seguir:

$$\bar{\mathbf{q}}^{k+1} = \bar{\mathbf{q}}^k + \bar{\mathbf{\Delta q}}^k \,, \tag{2.54}$$

e utilizando esta nova direção para estimar uma nova distribuição de momentos magnéticos com a equação 2.52 e assim sucessivamente. O processo iterativo é interrompido quando a função objetivo (equação 2.42a) é invariante ao longo de sucessivas iterações. Mostramos também que este método falha em situações nas quais as fontes são magnetizadas verticalmente (APENDICE B).

2.4.2 O cálculo das componentes do campo magnético e a amplitude do campo

Seja $\mathbf{B}_z^o$ o vetor de dados observados cujo i-ésimo elemento B_{zi}^o é a componente vertical do campo magnético produzida por uma fonte magnética no ponto (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, N$. Similarmente, seja $\mathbf{B}_z^p(\mathbf{s})$ o vetor de dados preditos cujo i-ésimo elemento $B_{zi}^p(\mathbf{s})$ (equação 2.38) é a componente vertical do campo magnético produzida por uma camada equivalente discreta no mesmo ponto (x_i, y_i, z_i). Com o objetivo de minimizar a diferença entre $\mathbf{B}_z^o$ e $\mathbf{B}_z^p(\mathbf{s})$, temos que resolver a equação:

$$\Psi(\mathbf{s}) = \|\mathbf{B}_z^o - \mathbf{B}_z^p(\mathbf{s})\|_2^2 + \mu \parallel \mathbf{p} \parallel_2^2 , \tag{2.55}$$

em que o primeiro e o segundo termo da equação 2.55 são a função de ajuste e a função regularizadora de Tikhonov de ordem zero, μ é o parâmetro de regularização e $\| \cdot \|_2^2$ representa o quadrado da norma Euclidiana.

Assumimos neste caso que a camada equivalente depende somente do vetor de momentos magnéticos $\mathbf{p}$ e, portanto, devemos impor uma direção de magnetização $\mathbf{q}$ arbitrária sobre ela. Com isso, o sistema linear que iremos resolver é dado por:

$$\left[\mathbf{G}_z^\top \mathbf{G}_z + \mu \mathbf{I}\right] \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{G}_z^\top \mathbf{B}_z^o , \tag{2.56}$$

em que $\mathbf{G}_z$ é uma matriz de dimensão $N \times M$ cujo ij-ésimo elemento é dado pela função harmônica $g_{ij}^z(\mathbf{q})$ (equação 2.40) avaliada na direção de magnetização fixa $\mathbf{q}$ e $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de dimensão $M \times M$. A equação 2.56 é denominada como estimador de mínimos quadrados. Após estimarmos uma distribuição de momentos magnéticos $\bar{\mathbf{p}}$ relativa a uma direção de magnetização arbitrária $\mathbf{q}$, calculamos as outras duas componentes do campo magnético aplicando a relação dada por:

$$\mathbf{B}_x^p = \mathbf{G}_x \bar{\mathbf{p}} \tag{2.57}$$

e

$$\mathbf{B}_y^p = \mathbf{G}_y \bar{\mathbf{p}} \tag{2.58}$$

em que $\mathbf{B}_x^p$ e $\mathbf{B}_y^p$ são, respectivamente, os vetores de dados preditos com dimensão

$N \times 1$ das componentes x e y do campo de indução magnética. As matrizes $\mathbf{G}_x$ e $\mathbf{G}_y$ possuem dimensão $N \times M$ cujo os elementos são dados por:

$$g_{ij}^{x}(\mathbf{q}) = \gamma_m \, \mathbf{M}_{ij}^{x^\top} \, \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q}) \tag{2.59}$$

e

$$g_{ij}^{y}(\mathbf{q}) = \gamma_m \, \mathbf{M}_{ij}^{y^\top} \, \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q}) \, , \tag{2.60}$$

em que

$$\mathbf{M}_{ij}^{x^\top} = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\frac{1}{r} & \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{xz}\frac{1}{r} \end{bmatrix}^\top \tag{2.61}$$

e

$$\mathbf{M}_{ij}^{y^\top} = \begin{bmatrix} \partial_{xy}\frac{1}{r} & \partial_{yy}\frac{1}{r} & \partial_{yz}\frac{1}{r} \end{bmatrix}^\top \quad . \tag{2.62}$$

As derivadas $\partial_{\alpha\beta}\frac{1}{r} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{1}{r}$, representam as derivadas segundas com respeito a $\alpha = x, y$ e $\beta = x, y, z$, do inverso da distância $\frac{1}{r}$ (equação 2.17) entre as coordenadas de observação $(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ e as coordenadas das fontes equivalentes $(x'', y'', z_c) = (x_j, y_j, z_c)$. Além disso, calculamos a amplitude do campo magnético aplicando a relação

$$\mathbf{B}_a = \sqrt{\mathbf{B}_x^{p^2} + \mathbf{B}_y^{p^2} + \mathbf{B}_z^{p^2}} \tag{2.63}$$

em que $\mathbf{B}_x^p$, $\mathbf{B}_y^p$ e $\mathbf{B}_z^p$ são as componentes do campo magnético e $\mathbf{B}_a$ é a vetor amplitude do campo magnético.

2.5 A escolha da profundidade da camada ($\mathbf{z_c}$) e do parâmetro de regularização (μ)

O procedimento pelo qual utilizamos a camada equivalente para estimar a direção de magnetização total das fontes magnéticas e o cálculo das componentes do campo magnético requer a escolha de dois parâmetros principais. O primeiro é a profundidade da camada z_c (COLOCAR FIGURAS) e o segundo é o parâmetro de regularização μ mostrado na equação 2.52.

O método utilizado para a escolha da profundidade da camada é baseado na abordagem clássica proposta por DAMPNEY (1969). O autor aponta que o posicionamento da camada deve satisfazer um intervalo de $2,5$ a $6,0$ vezes o espaçamento dos dados. Vale ressaltar que esta regra foi aplicada pelos autores em uma grade com dados regularmente espaçados. Contudo, a escolha para aplicar nosso método corresponde a um intervalo de 2 a 3 vezes o valor do maior espaçamento entre os dados. É necessário lembrar que este intervalo foi encontrado empiricamente.

Para resolver a equação 2.52, temos que escolher um valor confiável para o parâmetro de regularização. Com este propósito, usamos o método da curva-L, que serve como uma filtragem de ruídos dos dados, sem que o resultado final perca informações. O "cotovelo"desta curva é o valor ótimo de parâmetro no qual é feito o balanço entre a função de ajuste e a função regularizadora.

Capítulo 3

Testes sintéticos para estimativa da direção de magnetização

Aplicamos o método proposto em três conjuntos de dados sintéticos simulando diferentes cenários geológicos. O primeiro deles é um modelo contendo um conjunto de fontes com diferentes geometrias e mesma direção de magnetização. O segundo conjunto de dados é gerado por um modelo contendo múltiplas fontes com mesma direção de magnetização, porém uma delas representando uma fonte rasa. No terceiro teste violamos a hipótese de magnetização unidirecional simulando uma fonte rasa com diferente direção de magnetização.

Em todos os testes, os dados simulados foram calculados em um grid regular de 49×25 pontos (um total de $N = 1225$ observações) a uma altura constante de 100 m. Assumimos uma área de observação que se extende por 12 km ao longo do eixo x e do eixo y, resultando em um espaçamento entre os dados de 250 m e 500 m ao longo dos eixos x e y, respectivamente. Os dados foram contaminados com um ruído Gaussiano de média zero e desvio padão de 10 nT. O campo geomagnético principal simulado possui $I_0 = -40°$ e $D_0 = -22°$ para a inclinação e declinação, respectivamente. Para o processo de inversão, utilizamos uma camada equivalente composta por um grid de 49×25 dipolos (um total de $M = 1225$ fontes equivalentes) posicionados a uma profundidade de $z_c = 1150$ m abaixo do plano de observação ($2,5$ vezes o maior espaçamento entre os dados). Para a escolha do parâmetro de regularização (μ) utilizamos a curva-L. Nosso algoritmo começa com uma aproximação inicial $\bar{\mathbf{q}}^0 = (-10°, -10°)$ para a inclinação e a declinação, respectivamente.

3.1 Fontes de mesma direção de magnetização

Geramos um prisma poligonal cujo topo é posicionado a uma profundidade de 450 m e a base a 3150 m com intensidade de magnetização de 4 A/m. Geramos também

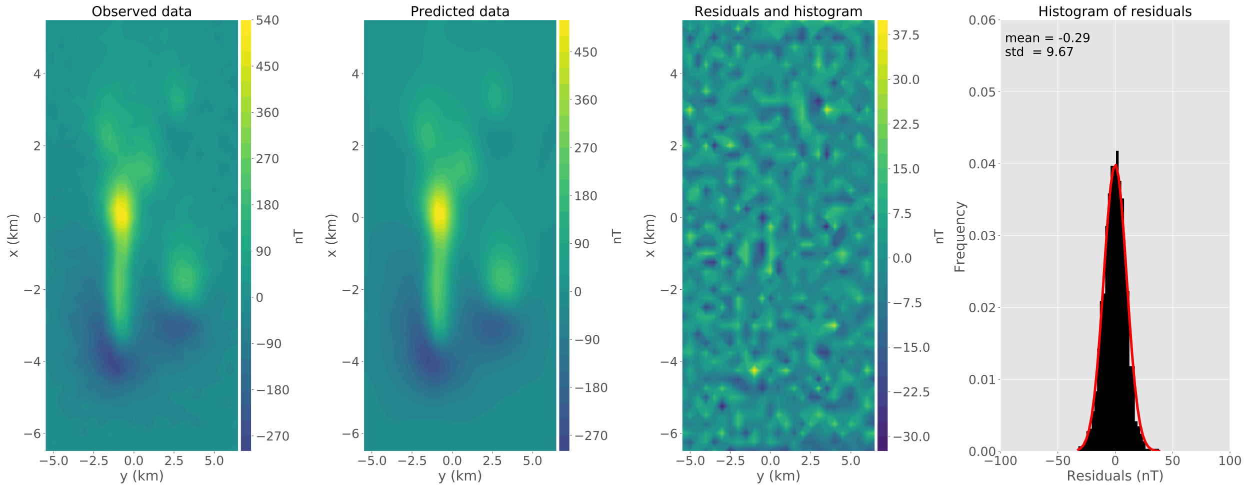

Figura 3.1: Aplicação a dados sintéticos para múltiplas fontes de mesma direção de magnetização. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

duas esferas com intensidade de magnetização igual a 3 A/m e raio 500 m. As coordenadas de seus respectivos centros são $x_c = 1800$ m, $y_c = -1800$ m e $z_c = 1000$ m e $x_c = 800$ m, $y_c = 800$ m and $z_c = 1000$ m. Simulamos dois prismas retangulares com 2.5 A/m de intensidade de magnetização. O prisma menor possui topo a uma profundidade de 450 m e lados de comprimento 1000 m, 700 m e 500 m ao longo dos eixos x, y e z, respectivamente. O prisma maior tem o topo localizado a uma profundidade de 500 m e lados de comprimento 1000 m, 2000 m e 1550 m ao longo dos eixos x, y e z, respectivamente. Todas as fontes simuladas tem inclinação $-25°$ e declinação $30°$. O dado observado é mostrado na figura 3.1a.

A figura 3.1b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. A figura 3.1c mostra os resíduos definidos pela diferença entre os dados simulados (Figura 3.1a) e os dados preditos (Figura 3.1b). Os resíduos aparecem com distribuição normal de média $-0,30\,nT$ e desvio padrão $9,67\,nT$ como mostrado na figura 3.1d. A direção de magnetização estimada $\bar{\mathbf{q}}$ tem inclinação $-28,6°$ e declinação $30,8°$, que são muito próximas a direção verdadeira. A distribuição de momentos magnéticos positivos $\bar{\mathbf{p}}$ é mostrada na figura 3.2. A convergência do algoritmo é mostrado na figura 3.3. A escolha do parâmetro de regularização $\mu = 350000$ através da curva-L (triângulo preto na figura 3.4). Consideramos que o método foi bem sucedido em estimar a direção de magnetização das múltiplas fontes do modelo, de forma que a distribuição de momentos magnéticos produziu um bom ajuste dos dados observados.

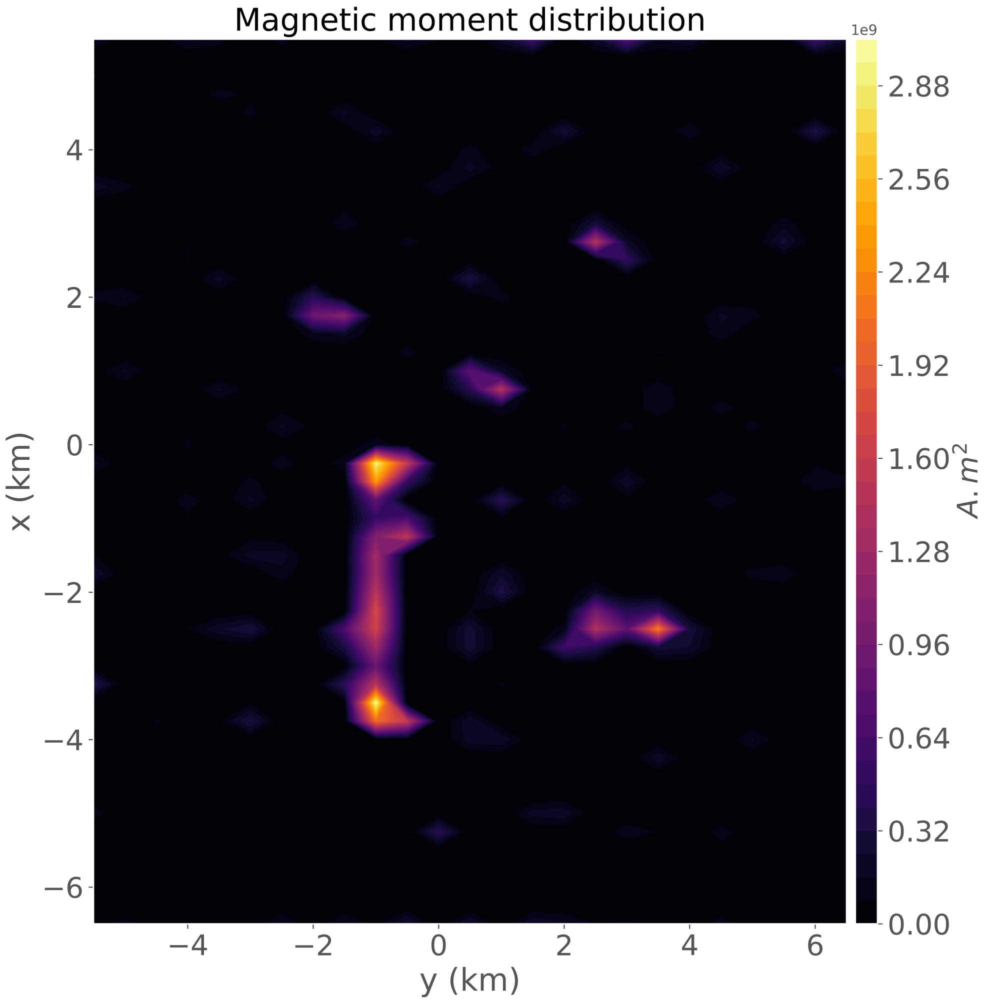

Figura 3.2: Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados sintéticos para múltiplas fontes de mesma direção de magnetização.

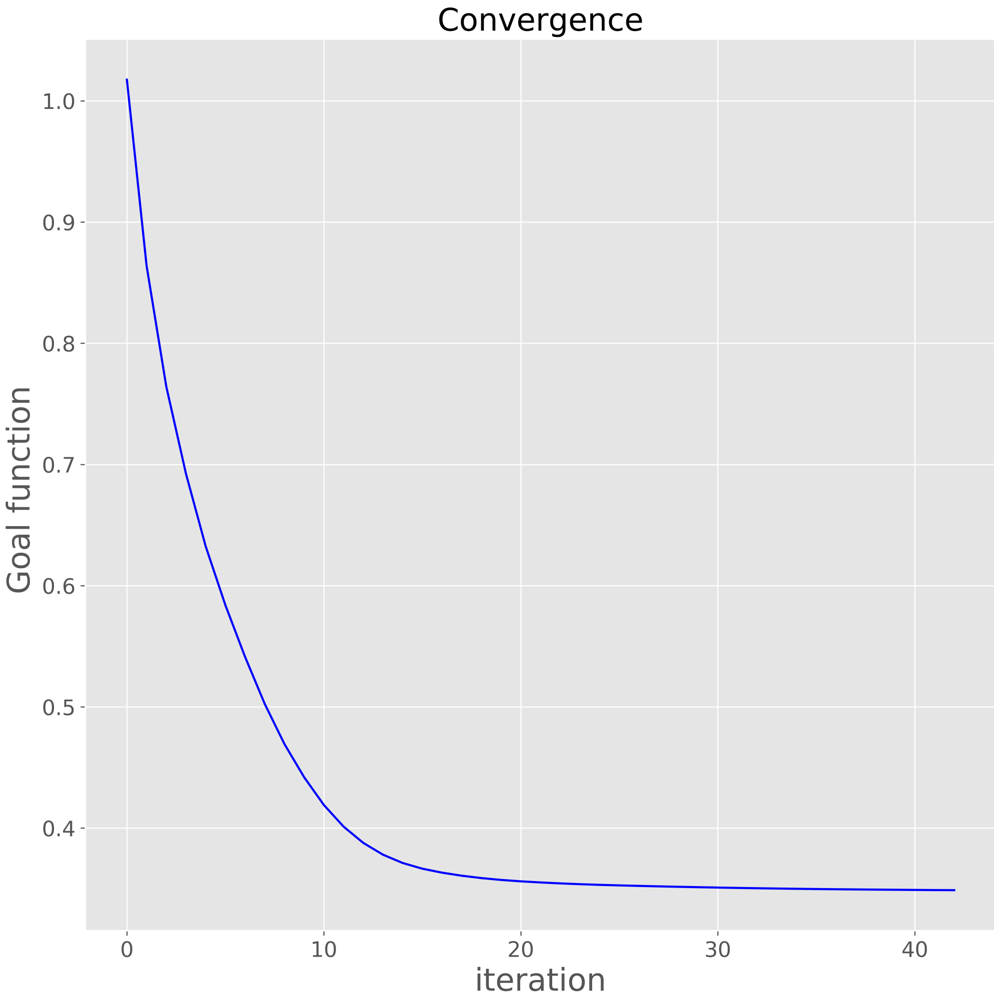

Figura 3.3: Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 2.42a) mostrando a convergência do algoritmo.

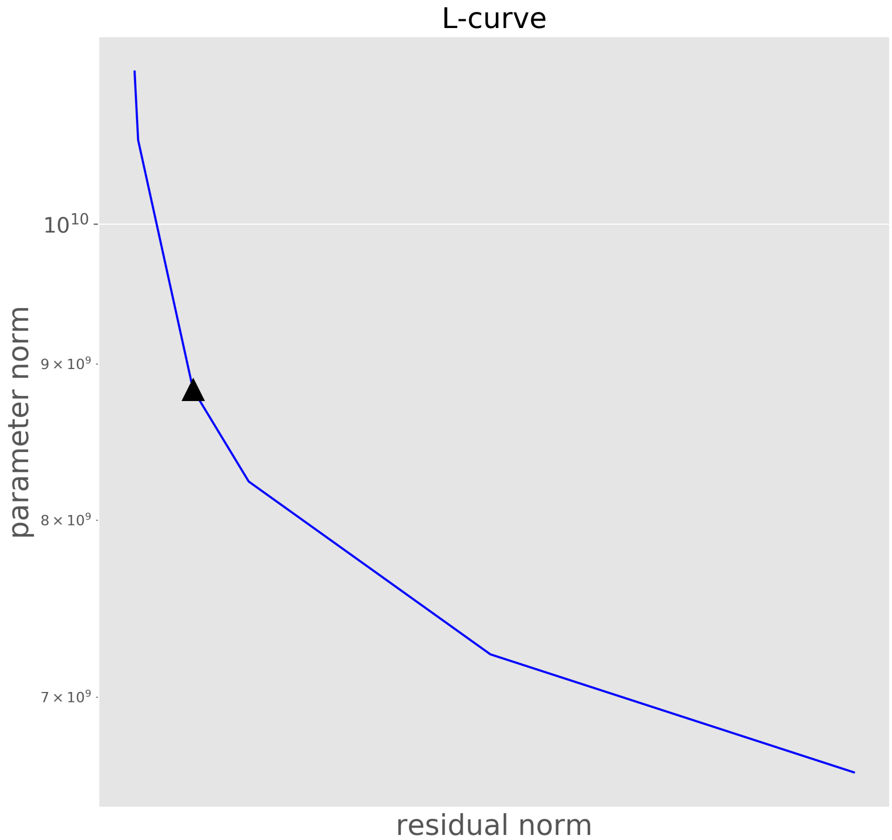

Figura 3.4: Gráfico da curva-L mostrando a escolha do parâmetro de regularização μ (equação 2.42a). O triângulo em preto indica o ponto no qual foi escolhido o parâmetro igual a 350000.

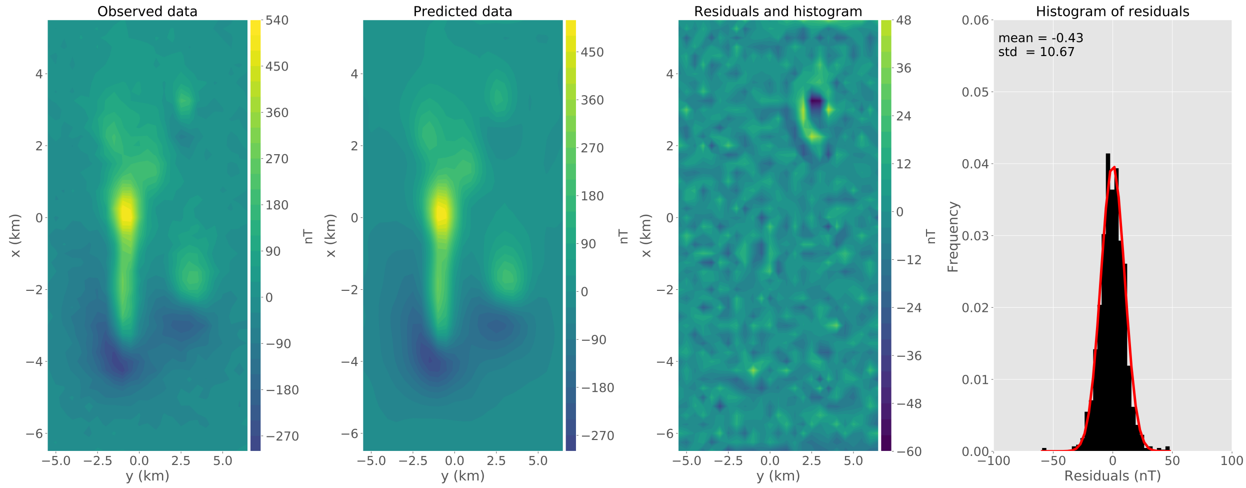

Figura 3.5: Aplicação a dados sintéticos para múltiplos corpos com fonte rasa e mesma direção de magnetização. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

3.2 Magnetização unidirecional com fonte rasa

Testamos a performance do método quando existe uma fonte rasa. O modelo é similar ao anterior com exceção do prisma menor, cujo topo é localizado a uma profundidade de 150 m enquanto seu volume é mantido o mesmo. A intensidade de magnetização deste prisma raso é igual a $1,5$ A/m. A direção de magnetização de todas as fontes é $-25°$ de inclinação e $30°$ graus para a declinação. Os dados sintéticos são mostrados na figura 3.5a.

A figura 3.5b mostra a anomalia de campo total predita produzida pela camada equivalente. A figura 3.5c mostra o mapa dos resíduos definido como a diferença entre a anomalia de campo total observada (Figura 3.5a) e a anomalia de campo total predita (Figura 3.5b). Os resíduos aparecem com uma distribuição normal de média $-0,42$ nT e desvio padrão de $10,67$ nT como mostra a figura 3.5d. A figura 3.6 mostra a distribuição de momentos magnéticos $\bar{\mathbf{p}}$. A convergência do algoritmo é mostrada na figura 3.7. A escolha do parâmetro de regularização $\mu = 3500000$ é mostrada na figura 3.8. Apesar do grande resíduo acima da fonte rasa, consideramos que a metodologia produziu uma confiável estimativa para a direção de magnetização $\bar{\mathbf{q}}$, que possui inclinação $-28,7°$ e declination $31,7°$. A direção de magnetização estimada é próxima a direção verdadeira e a distribuição de momentos magnéticos produziu um ajuste aceitável dos dados.

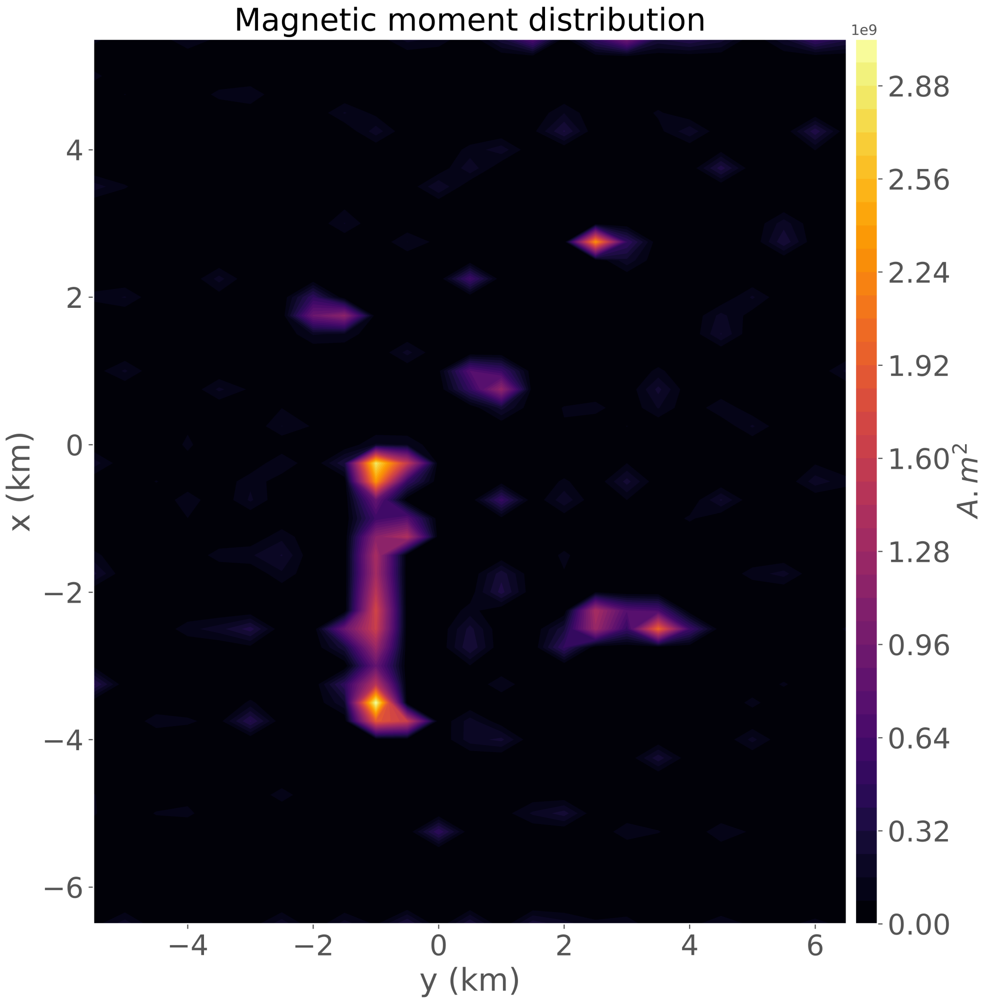

Figura 3.6: Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados sintéticos para múltiplos corpos e fonte rasa com mesma direção de magnetização.

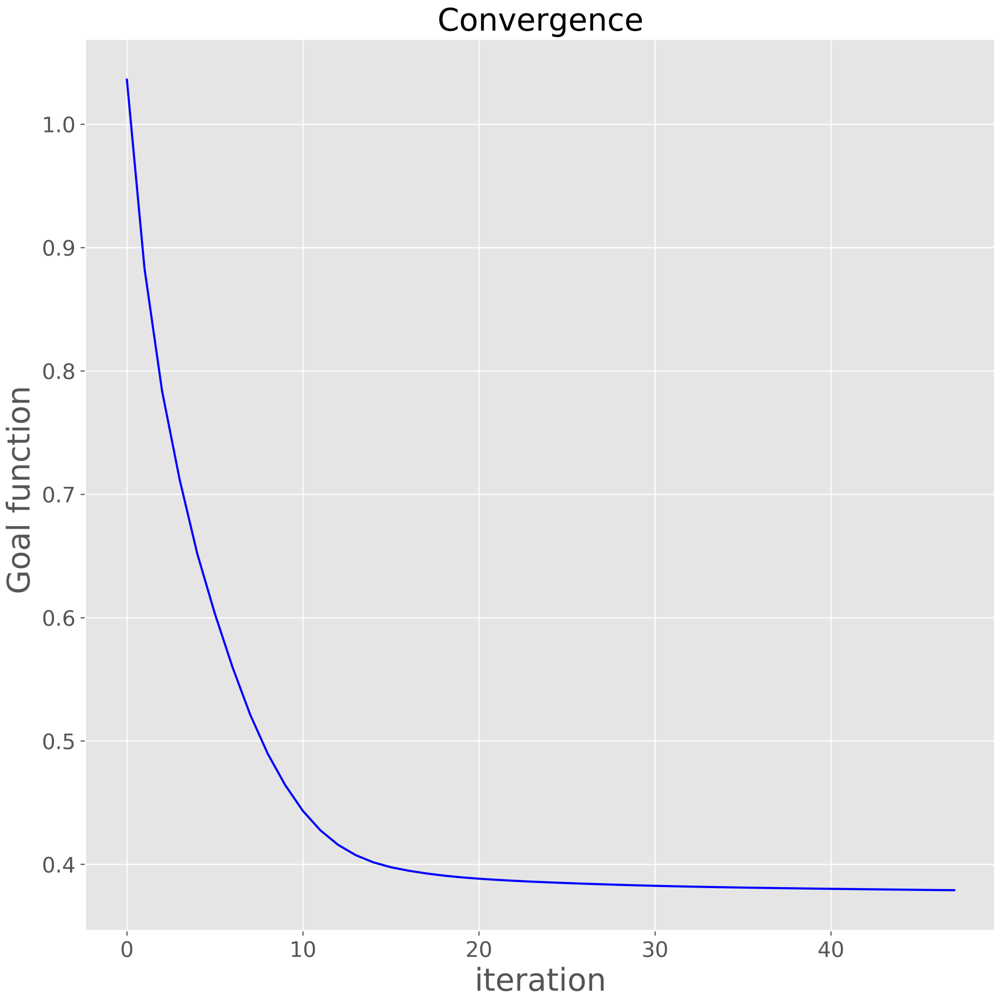

Figura 3.7: Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 2.42a) mostrando a convergência do algoritmo.

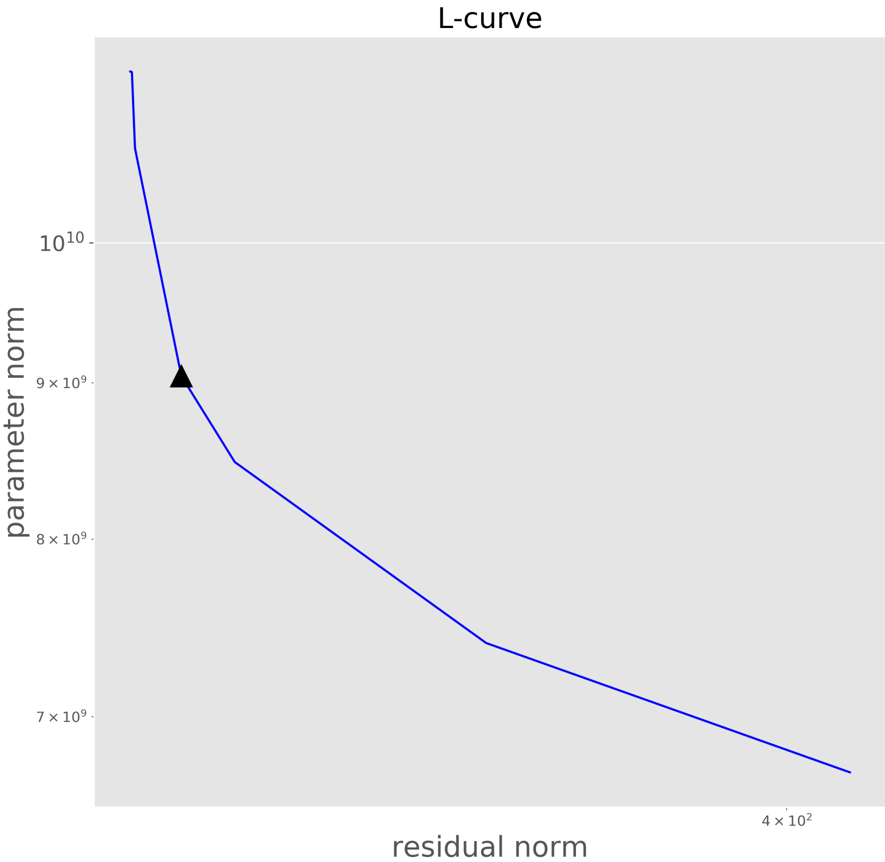

Figura 3.8: Gráfico da curva-L mostrando a escolha do parâmetro de regularização μ (equação 2.42a) para o segundo teste. O triângulo em preto indica o ponto no qual foi escolhido o parâmetro igual a 350000.

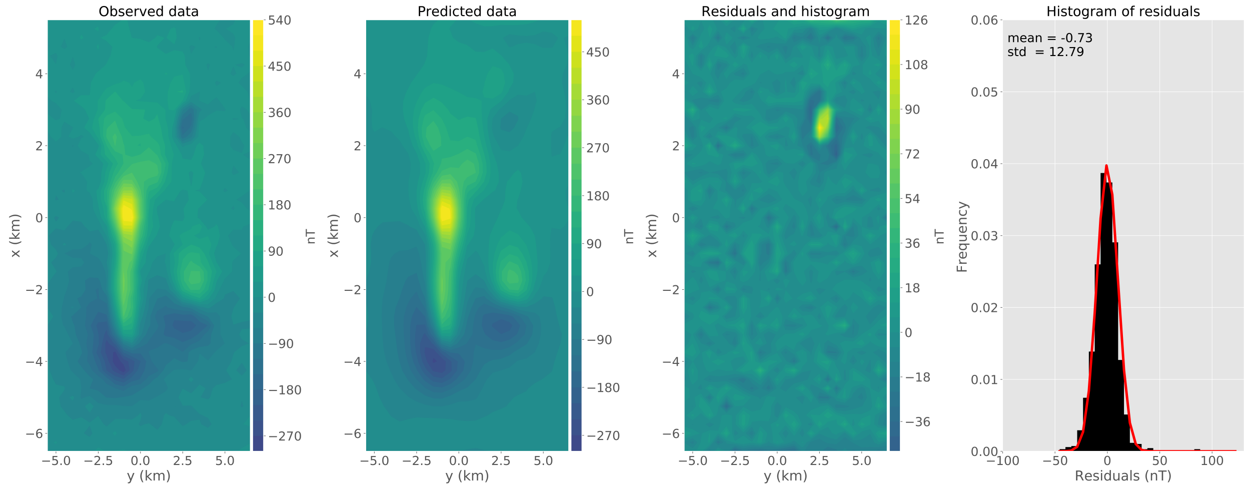

Figura 3.9: Aplicação a dados sintéticos para fonte rasa com direção de magnetização diferente. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

3.3 Fonte rasa com direção de magnetização diferente

Neste teste simulamos a presença de uma fonte rasa com direção de magnetização diferente das demais. O prisma raso tem dimensão igual ao do teste anterior. No entanto, a direção de magnetização deste prisma é $20°$ de inclinação e $-30°$ de declinação, enquanto as outras fontes possuem inclinação $-25°$ e declinação $30°$. Os dados calculados são mostrados na figura 3.9a.

A figura 3.9b mostra a anomalia de campo total predita pela camada equivalente. O mapa dos resíduos é mostrado na figura 3.9c, e é definido como a diferença entre os dados observados (Figura 3.9a) e os dados preditos (Figura 3.9b). Os resíduos tem média igual a $-0,73$ nT e desvio padrão igual a $12,67$ nT como mostra a figura 3.9d. A direção de magnetização estimada $\bar{\mathbf{q}}$ tem inclinação $-30,4°$ e declinação $27,6°$. A figura 3.10 mostra a distribuição de momentos magnéticos positiva. A convergência do algoritmo é mostrada na figura 3.11. A escolha do parâmetro de regularização $\mu = 3500000$ é mostrada na figura 3.12. Apesar da diferença em relação a direção de magnetização verdadeira, a distribuição de momentos positiva produziu um ajuste aceitável dos dados observados. Com exceção da pequena área acima da fonte rasa, a maior parte dos resíduos são próximos de 0 nT.

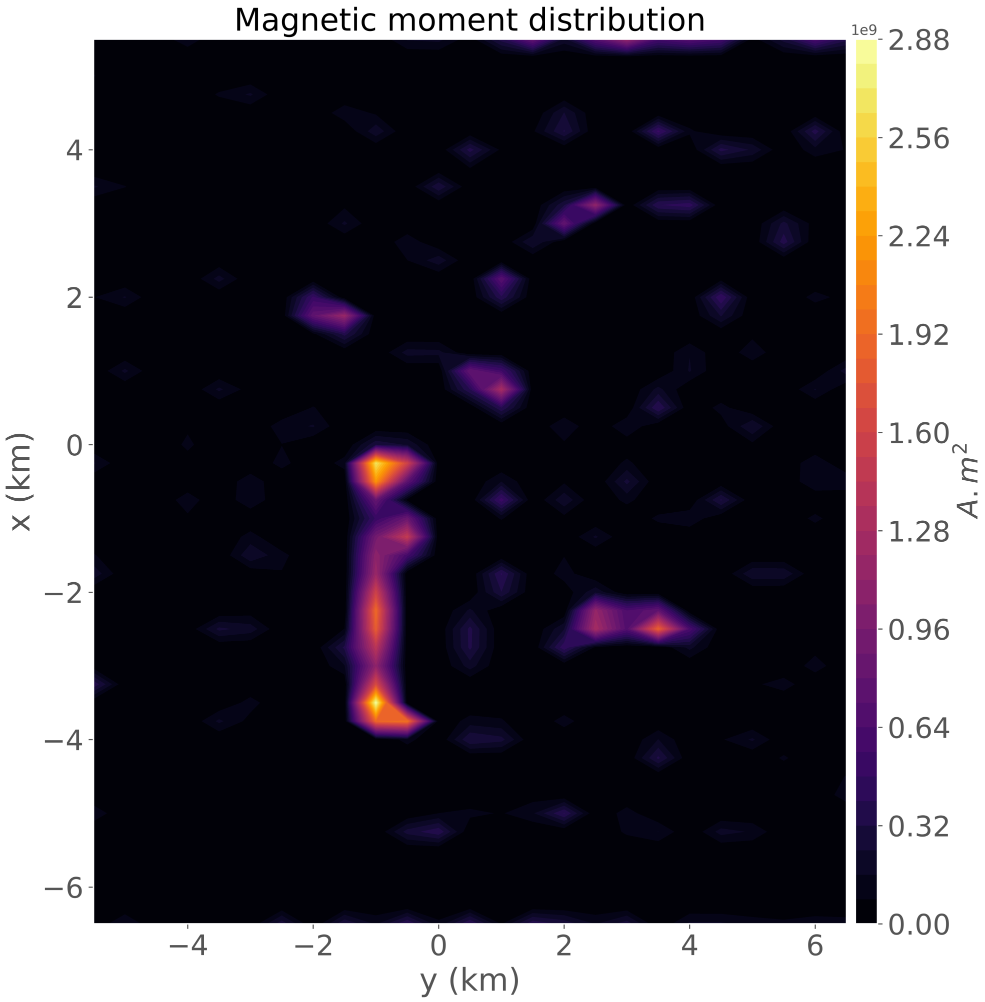

Figura 3.10: Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados sintéticos para múltiplos corpos e fonte rasa com direção de magnetização diferente.

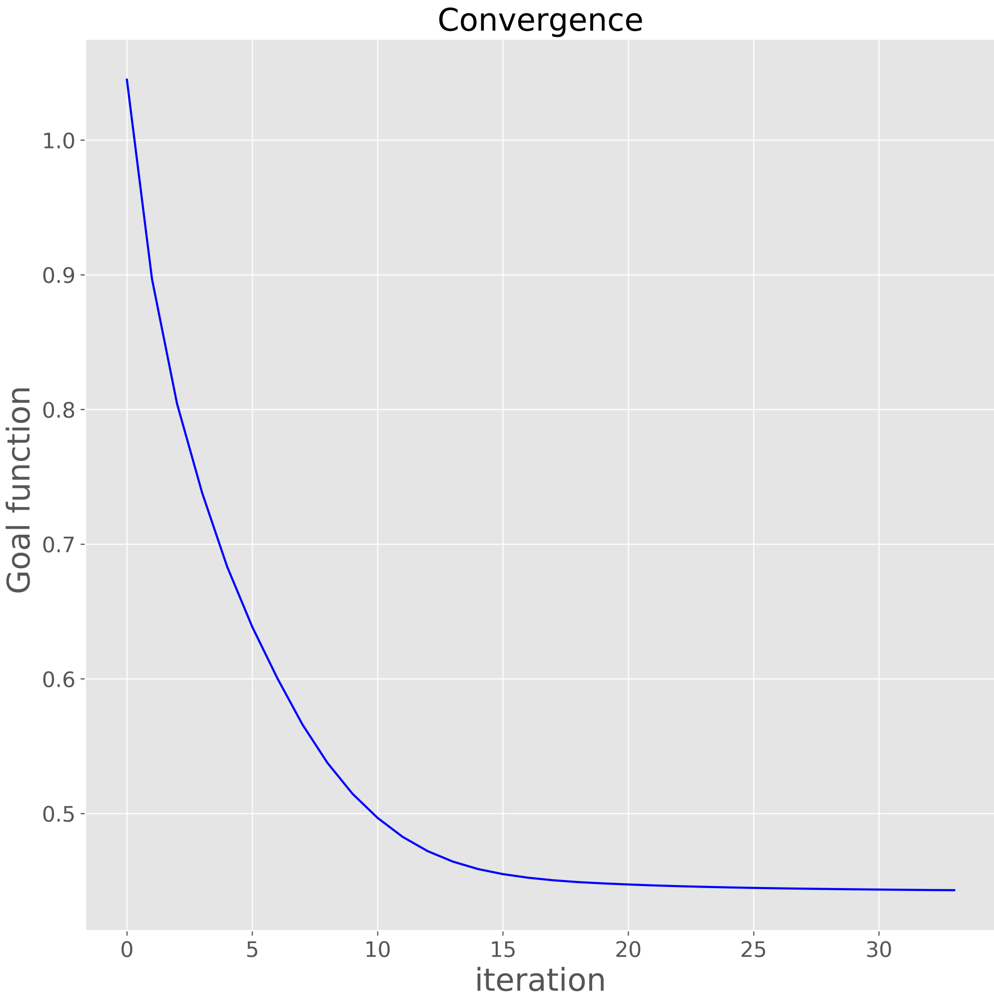

Figura 3.11: Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 2.42a) mostrando a convergência do algoritmo.

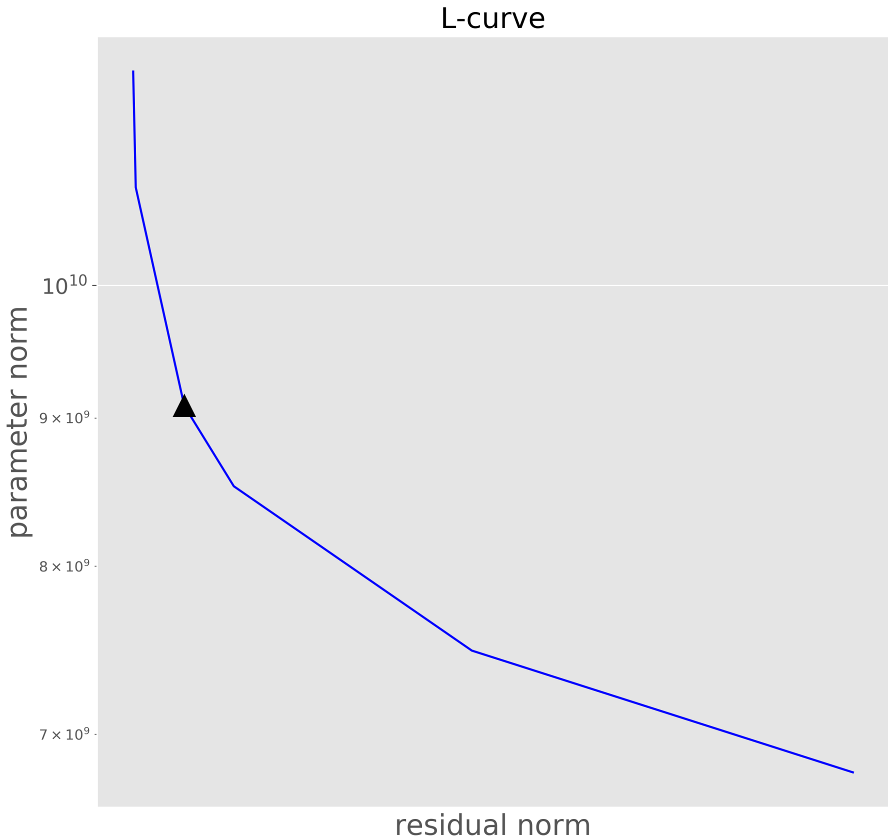

Figura 3.12: Gráfico da curva-L mostrando a escolha do parâmetro de regularização μ (equação 2.42a) para o terceiro teste. O triângulo em preto indica o ponto no qual foi escolhido o parâmetro igual a 350000.

Referências Bibliográficas

ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2005, *Parameter Estimation and Inverse Problems (International Geophysics)*. Academic Press. ISBN: 0120656043.

DAMPNEY, C. N. G., 1969, “The equivalent source technique”, *GEOPHYSICS*, v. 34, n. 1, pp. 39–53. doi: 10.1190/1.1439996.

DIAS, F. J. S., BARBOSA, V. C., SILVA, J. B., 2007, “2D gravity inversion of a complex interface in the presence of interfering sources”, *GEOPHYSICS*, v. 72, n. 2, pp. I13–I22. doi: 10.1190/1.2424545.

LAWSON, C. L., HANSON, R. J., 1974, *Solving least squares problems*. SIAM.

LI, Y., NABIGHIAN, M., OLDENBURG, D. W., 2014, “Using an equivalent source with positivity for low-latitude reduction to the pole without striation”, *GEOPHYSICS*, v. 79, n. 6, pp. J81–J90. doi: 10.1190/geo2014-0134.1.

PEDERSEN, L. B., 1991, “Relations between potential fields and some equivalent sources”, *GEOPHYSICS*, v. 56, n. 7, pp. 961–971. doi: 10.1190/1.1443129.

PEDERSEN, L. B., RASMUSSEN, T. M., 1990, “The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps”, *GEOPHYSICS*, v. 55, n. 12, pp. 1558–1566. doi: 10.1190/1.1442807. Disponível em: <https://doi.org/10.1190/1.1442807>.