Aula 3 – Transformada de Fourier, Transmissão de Sinais e Filtros

Disciplina: Princípios de Comunicação

Professor: Daniel Gueter

CENTRO UNIVERSITÁRIO UniBTA Campus Paulista

Cronograma

06/05 – Aula 1 - Introdução da disciplina e histórico da área
13/05 – Aula 2 - Sinais e Fourier: Série e Transformada
20/05 – Aula 3 - Transformada de Fourier, Transmissão de Sinais e Filtros
27/05 – Aula 4
03/06 – Aula 5
10/06 – Aula 6
17/06 – Prova
24/06 – Exame (Prova substitutiva)

E se o sinal não for periódico, como fazemos?

Utilizamos a Transformada de Fourier!

Transformada de Fourier – O que é?

- Parecida com a Série de Fourier, a Transformada de Fourier serve para **decompor sinais em senos e cossenos**, mas dessa vez qualquer tipo de sinal, **seja ele periódico ou aperiódico**.

- Em outras palavras, ela **transforma um sinal do domínio do tempo** em uma **representação no domínio da frequência**, mostrando **quais frequências (fundamental e harmônicas) estão presentes, e com que intensidade (amplitude)**.

- Analogia com receita de bolo:

"O sinal no domínio do tempo representa o bolo pronto, enquanto a transformada de Fourier decompõe o bolo em seus ingredientes com suas quantidades, representados pelas inúmeras frequência com suas amplitudes"

Transformada de Fourier – Matematicamente

- A Transformada de Fourier se baseia em uma adaptação matemática da Série de Fourier, a qual considera que um sinal possui **período $\boldsymbol{T_0}$ infinito*:***

Se o período $\boldsymbol{T_0} \rightarrow \infty$, a frequência $\boldsymbol{\omega_0} \rightarrow \mathbf{0}$

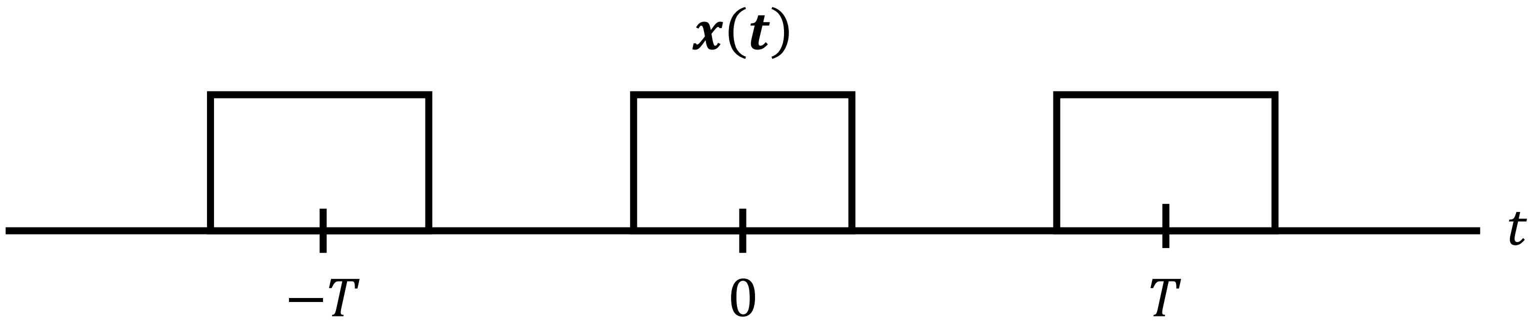
Se a frequência $\boldsymbol{\omega_0} \rightarrow \mathbf{0}$ **,** e considerando $\omega = k\omega_0$, é possível encontrar qualquer frequência ω.

$\rightarrow$ significa tende a.

Ex: $\boldsymbol{T_0} \rightarrow \infty$ significa: Período tende a infinito (valores muitooo grandes).

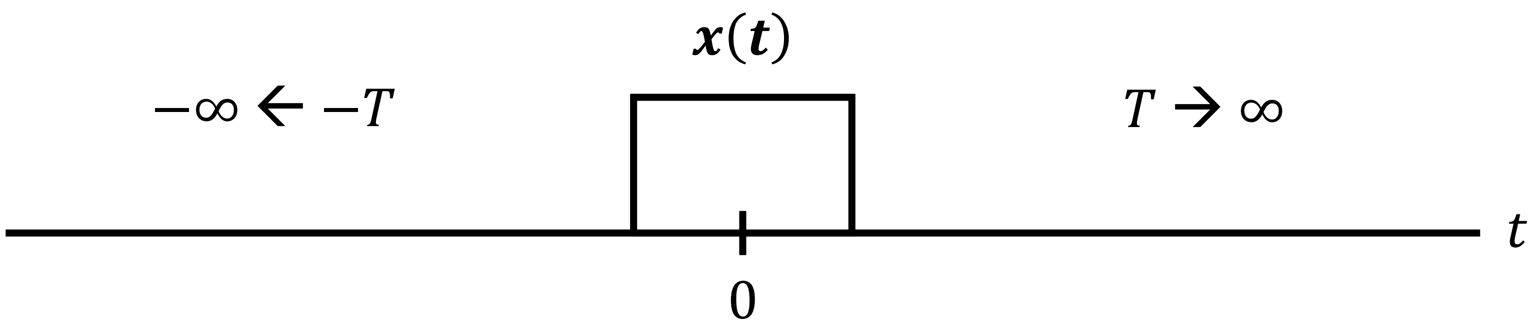
Ex: $\boldsymbol{\omega_0} \rightarrow \mathbf{0}$ significa: Frequência fundamental tende a zero (valores muitooo pequenos).

Transformada de Fourier – Matematicamente



Se o período $T_0 \rightarrow -\infty$

Um sinal aperiódico!



Transformada de Fourier – Matematicamente

- Agora substituindo a nova condição $T_0 \rightarrow \infty$ e $\omega = k\omega_0$ na Equação de Análise da Série de Fourier:

Equação de Análise da Série de Fourier

$$d_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t).e^{-jk\omega_0 t}\,dt \longrightarrow d_k = \frac{1}{T_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-j\omega t}\,dt}_{\boxed{X(j\omega)}}$$

Transformada direta de Fourier

Transformada de Fourier – Matematicamente

- Agora substituindo a nova condição $T_0 \rightarrow \infty$ e $\omega = k\omega_0$ na Equação de Síntese da Série de Fourier:

Equação de Síntese da Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k . e^{jk\omega_0 t}$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \cdot x(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$\nearrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot x(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega}$$

Transformada inversa de Fourier

Transformada de Fourier

Sinais contínuos

Transformada direta de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Transformada de Fourier

Sinais discretos

Transformada direta de Fourier

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].\, e^{-j\omega t}$$

Transformada inversa de Fourier

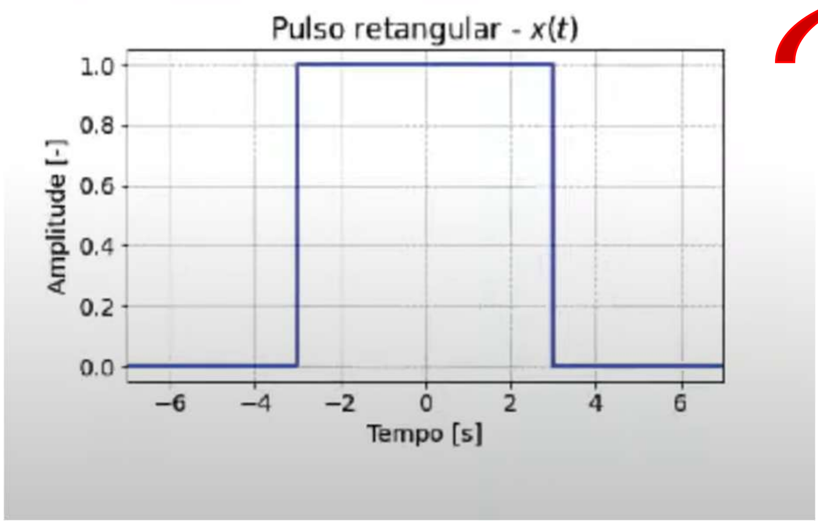
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

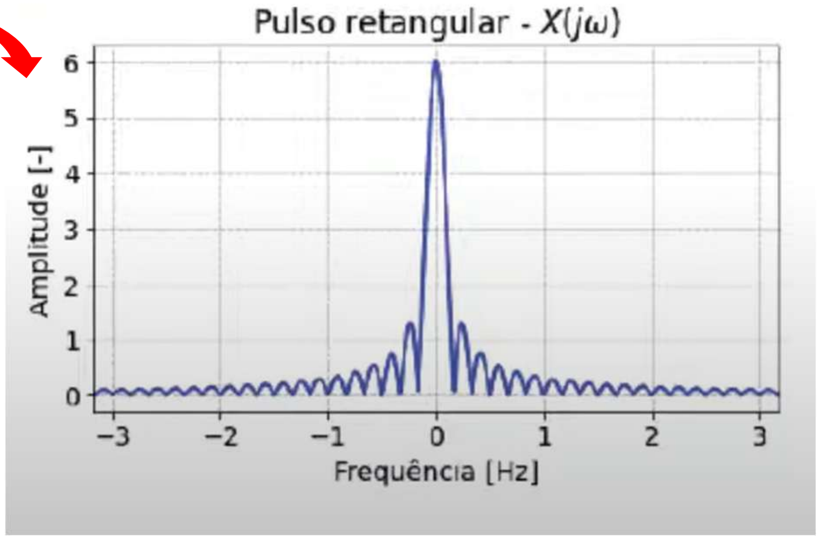
Transformada de Fourier – Exemplo sinal contínuo

Transformada de Fourier

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq |T_0| \\ 0, & \text{se } t \geq |T_0| \end{cases} \qquad X(j\omega) = \frac{2 \cdot \sin(\omega T_0)}{\omega}$$

Transformada de Fourier





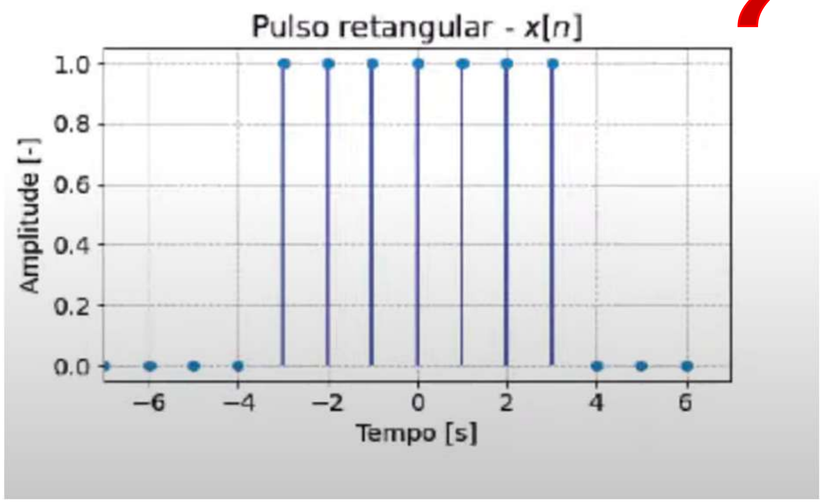
Transformada de Fourier – Exemplo sinal discreto

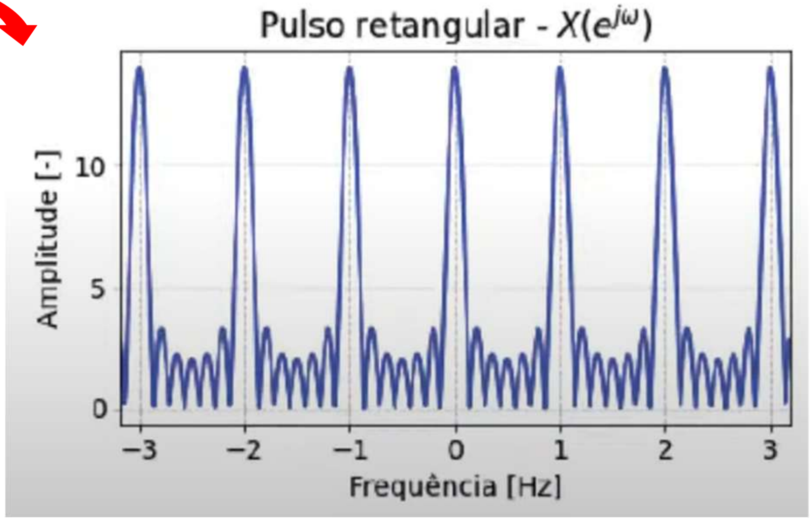
Transformada de Fourier

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq |N| \\ 0, & \text{se } n \geq |N| \end{cases}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sin\left(\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

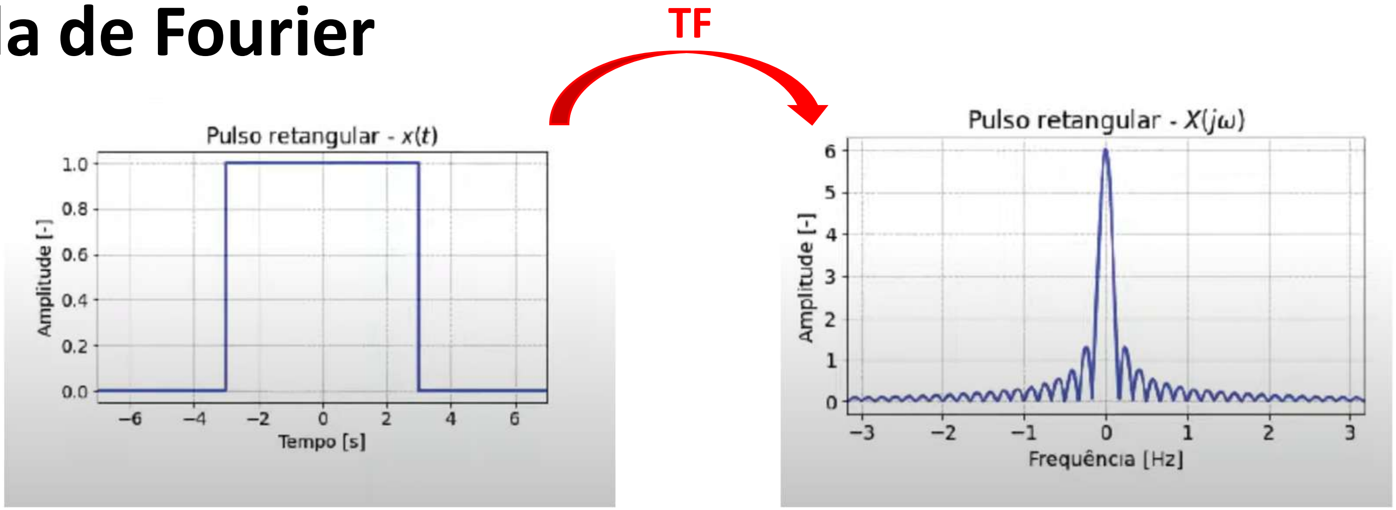
Transformada de Fourier



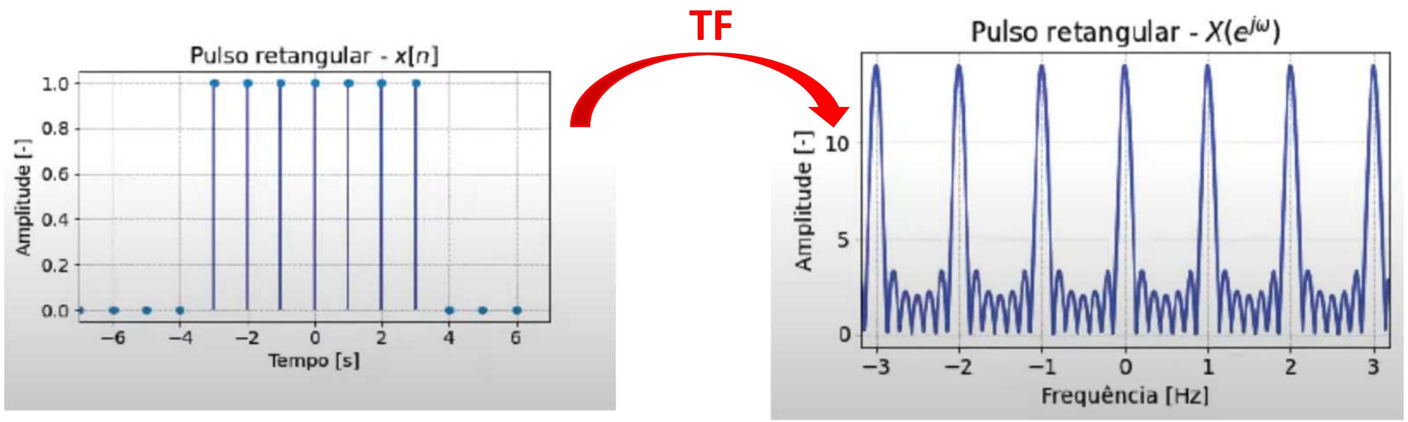


Transformada de Fourier

TF a um sinal contínuo:
Espectro contínuo e **aperiódico**



TF a um sinal discreto:
Espectro contínuo e **periódico**



Na prática, vamos ver que o nosso computador realiza a chamada Transformada Rápida de Fourier – Fast Fourier Transform (FFT)

O que é a FFT?

FFT – O que é?

- Em 1805, Gauss já havia desenvolvido um método similar ao FFT para calcular a orbita de asteroides, entretanto, o algoritmo genérico do FFT foi oficialmente desenvolvido em 1965 por James Cooley e John Tukey, com o objetivo de identificar testes nucleares da União Soviética a partir de sensores posicionados em volta do território soviético.

- De maneira resumida, o algoritmo **FFT é uma maneira mais eficiente computacionalmente** para realizar a Transformada Discreta de Fourier, executando as **contas na forma de matrizes**.

- Desse jeito, você **diminui consideravelmente o processamento necessário** na análise e transferência de um sinal.

FFT – Como funciona

- Tanto a Transformada Discreta de Fourier e a Transformada Discreta Inversa de Fourier podem ser representadas por somatórias, no lugar de integrais:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].\, e^{-j\omega t}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega t}\ d\omega$$

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k\cdot n}}$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k\cdot n}}$$

- k representa o loop externo do sinal em frequência
- n representa o loop externo do sinal em tempo

FFT – Como funciona

- Para realizar a FFT, ao invés de escrever sempre o $\boldsymbol{e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k\cdot n}}$, substitui-se ele por um kernel chamado de W_{kn}

$$\boxed{\boldsymbol{W_{kn=}\ e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k\cdot n}}}$$

$$\boldsymbol{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k\cdot n}} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]}.\, W_{kn}}$$

- k representa o loop externo do sinal em frequência
- n representa o loop externo do sinal em tempo

FFT – Como funciona

- Com o kernel W_{kn} , pode-se representar a somatório de maneira matricial, facilitando a necessidade de processamento:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{N}-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}].W_{kn}$$

$$X(0) = x[0]W_{00} + x[1]W_{01} + \ldots + x[N-1]W_{0(N-1)}$$
$$X(1) = x[0]W_{10} + x[1]W_{11} + \ldots + x[N-1]W_{1(N-1)}$$
$$X(N-1) = x[0]W_{(N-1)0} + x[1]W_{(N-1)1} + \ldots + x[N-1]W_{(N-1)(N-1)}$$

$$\begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & \cdots & W_{0(N-1)} \\ W_{10} & W_{11} & \cdots & W_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{(N-1)0} & W_{(N-1)1} & \cdots & W_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{Bmatrix}$$

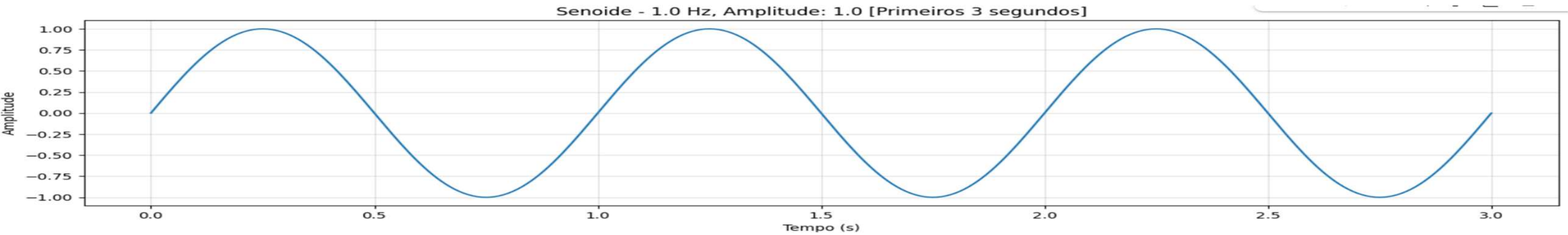
FFT – Ganho computacional

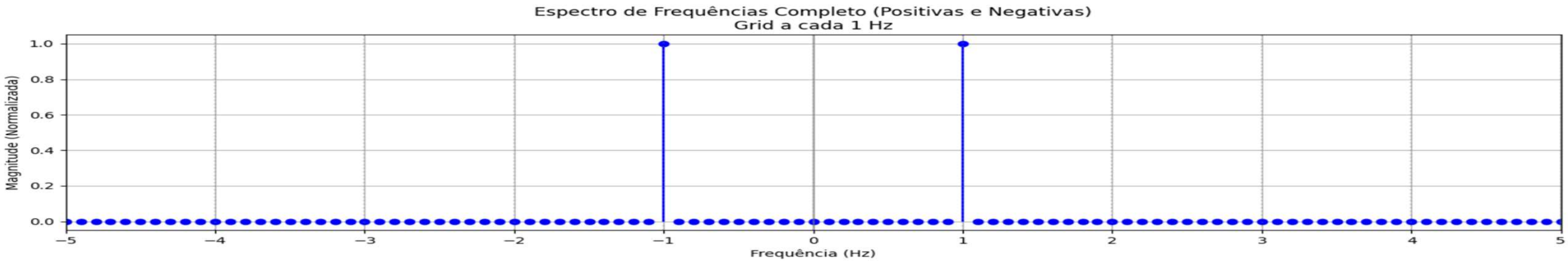
- O FFT diminui drasticamente o número de operações necessárias para realizar umas Transformada Discreta de Fourier:

N	N^2 **(DFT)**	$N\log_2(N)$ **(FFT)**	$N^2/(N\log_2(N))$
16	256	64	4 x
512	262.144	4.608	56 x
2048	4.194.304	22.528	186 x

FFT – Espectro de frequências

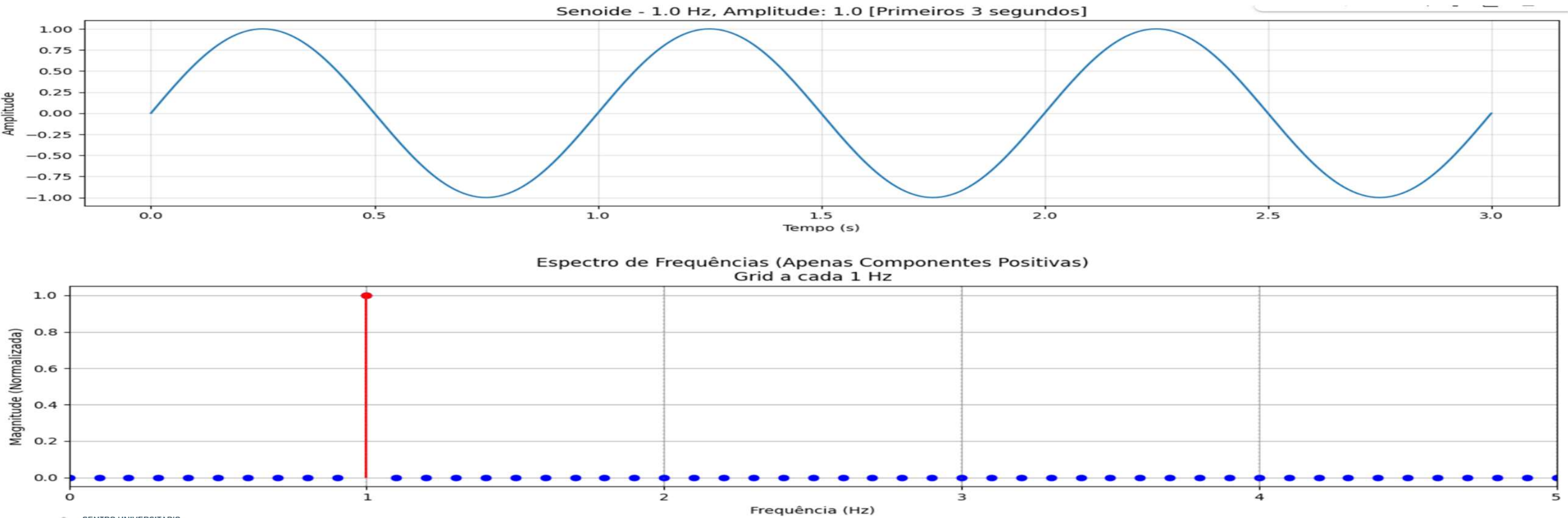
- A melhor forma de representar o resultado da FFT aplicada a um sinal, é pelo seu espectro de frequências.





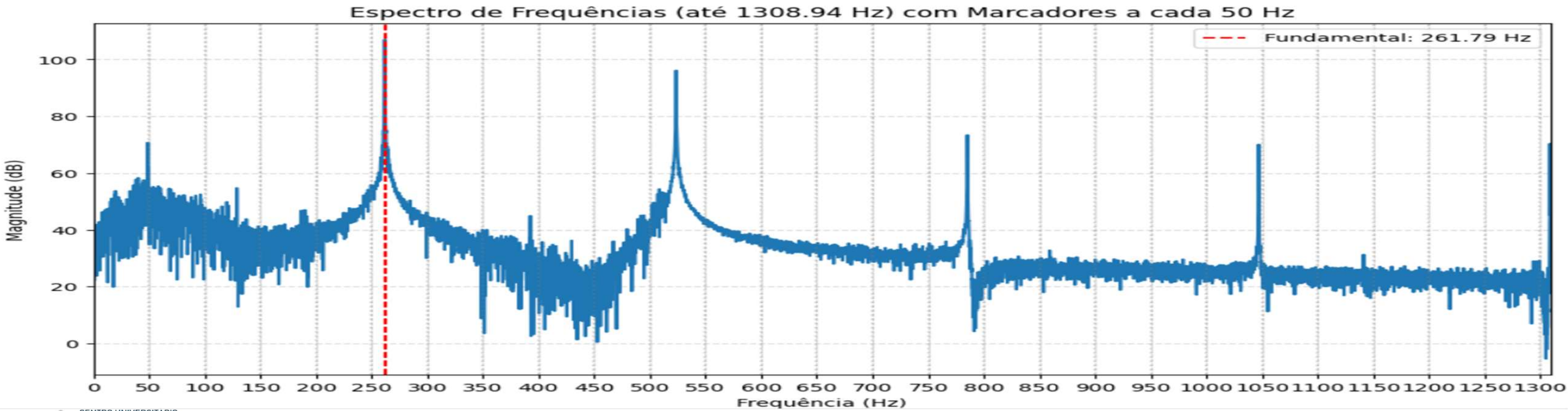
FFT – Espectro de frequências

- É comum apresentar o espectro de frequências somente com a componente positiva.



FFT – Espectro de frequências

- FFT de um áudio aleatório.



Exemplos no Google Colab