Aula 2 – Sinais e Fourier: Série e Transformada

Disciplina: Princípios de Comunicação

Professor: Daniel Gueter

Cronograma

06/05 – Aula 1 - Introdução da disciplina e histórico da área
13/05 – Aula 2 - Sinais e Fourier: Série e Transformada
20/05 – Aula 3
27/05 – Aula 4
03/06 – Aula 5
10/06 – Aula 6
17/06 – Prova
24/06 – Exame (Prova substitutiva)

Como medir um sinal – Energia e Potência

- Em comunicações, existem diversos tipos de sinais, mas é preciso alguma maneira de **“medir a força”** desse sinal. Para isso, existem duas medidas que são utilizadas: A **Energia** e a **Potência** de um sinal.

- Pode-se estimar a Energia de um sinal *x(t)* pelas equações abaixo:

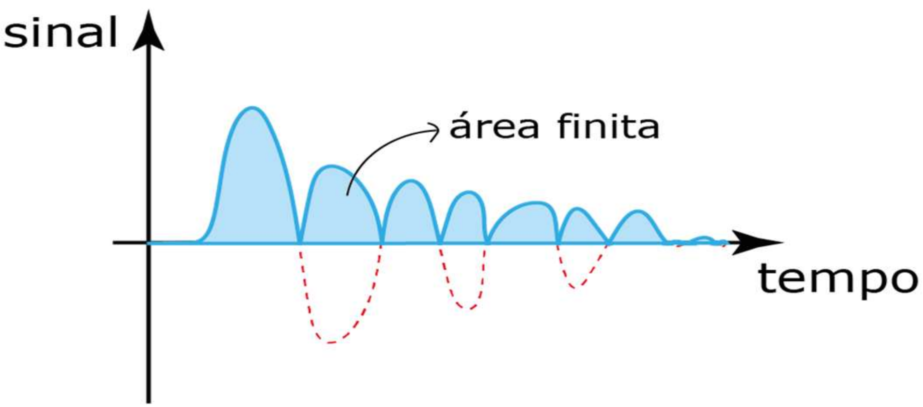
$$\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt}$$

- Se a função *x(t)* for uma função com números complexos, a Energia é calculada como dado abaixo:

$$\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

Como medir um sinal – Energia e Potência

- Para poder utilizar as equações anteriores, a **Energia do sinal deve ser finita**, ou seja, o final deve tender a zero.
- Matematicamente: **Amplitude do sinal → 0 quando $|t| \to \infty$** (O sinal deve "começar" e "acabar")
- Se o sinal não atender a essa condição, é dito que ele possui **Energia infinita**, e as integrais mostradas não irão convergir, impossibilitando o cálculo de Energia.



Exemplo de sinal com energia finita

Como medir um sinal – Energia e Potência

- Uma opção para medir o “tamanho” de sinais com Energia infinita, é medir a sua **Potência**.
- A Potência de um sinal é **igual à sua Energia média**, e pode ser calculada pelas equações abaixo:

$$\boldsymbol{P_x = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt}$$

- Se a função *x(t)* for uma função com números complexos, a Potência é calculada como dado abaixo:

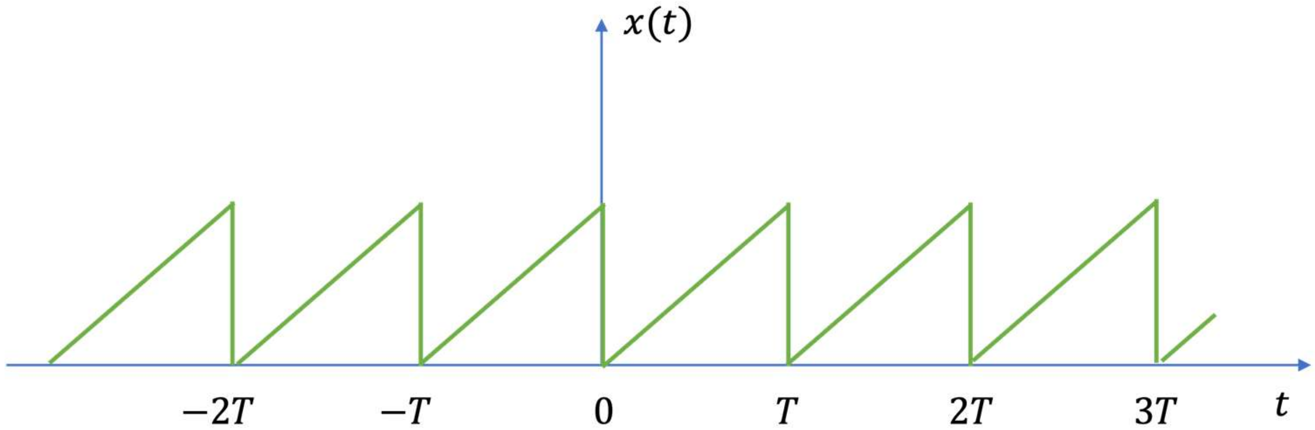
$$\boldsymbol{P_x = \mathit{lim}_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt}$$

- onde *T* é o período do sinal.

Como medir um sinal – Energia e Potência

- Para poder utilizar as equações anteriores, o **sinal deve ser periódico** ou conter regularidade estatística.

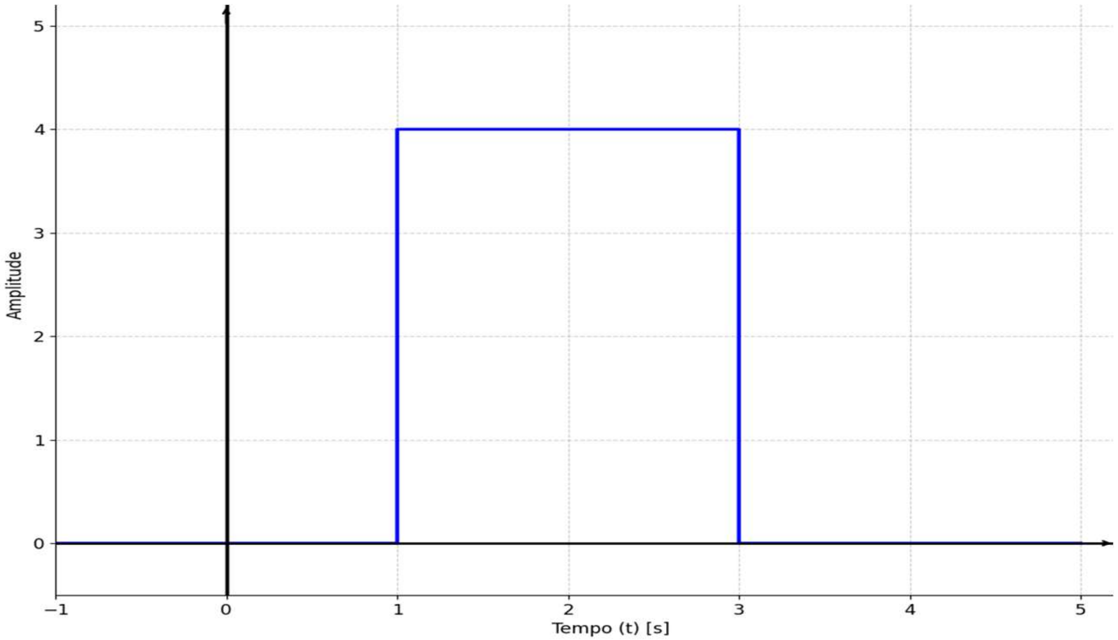
- Integrar de $-\frac{T}{2}$ até $\frac{T}{2}$ significa pegar um período *T* completo da função. No caso abaixo, poderia integrar de 0 a *T*, que simboliza um período e facilita as contas.



Exemplo de sinal periódico onde pode-se calcular a sua Potência

Como medir um sinal – Energia e Potência

- Exemplo: Calcule a Energia do sinal abaixo:



Sinal degrau

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

Sinal *x(t) = 4 se 1 ≤ t ≤ 3*

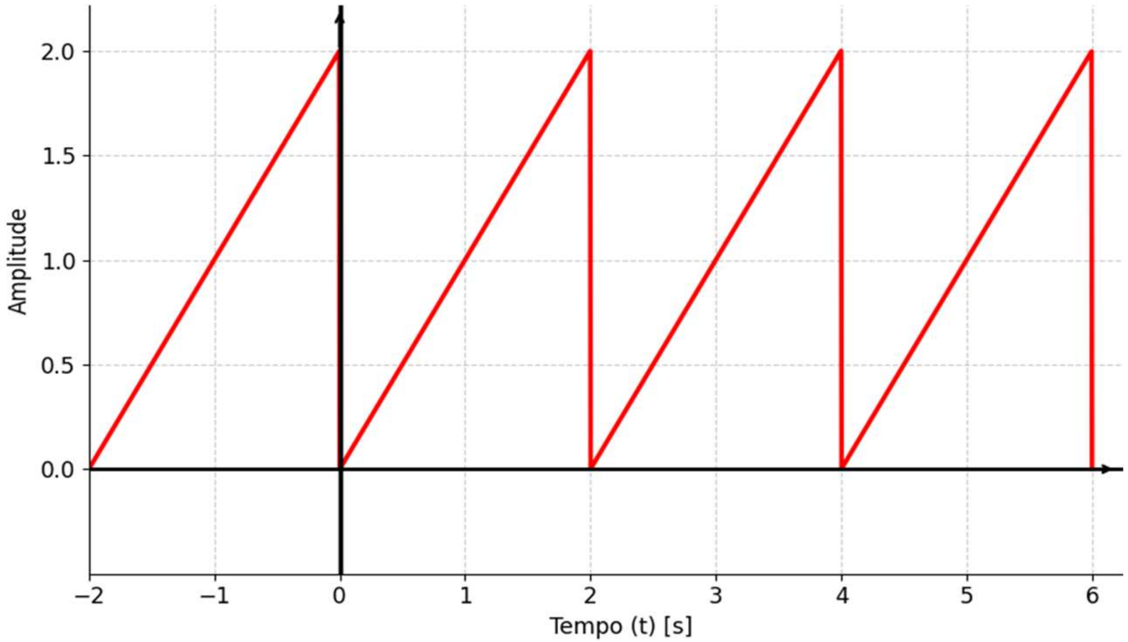
$$E_x = \int_{1}^{3} 4^2 dt$$

$$E_x = 16 \times \ 3 \ - 16 \times 1$$

$$\boldsymbol{E_x = 32}$$

Como medir um sinal – Energia e Potência

- Exemplo: Calcule a Potência do sinal abaixo:



Sinal dente de serra

$$P_x = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$$

Sinal *x(t) = t entre 0 ≤ t ≤ 2 e T = 2)*

$$P_x = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2} \int_0^2 t^2(t)dt$$

$$P_x = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_2 - \frac{t^3}{3}\bigg|_0\right)$$

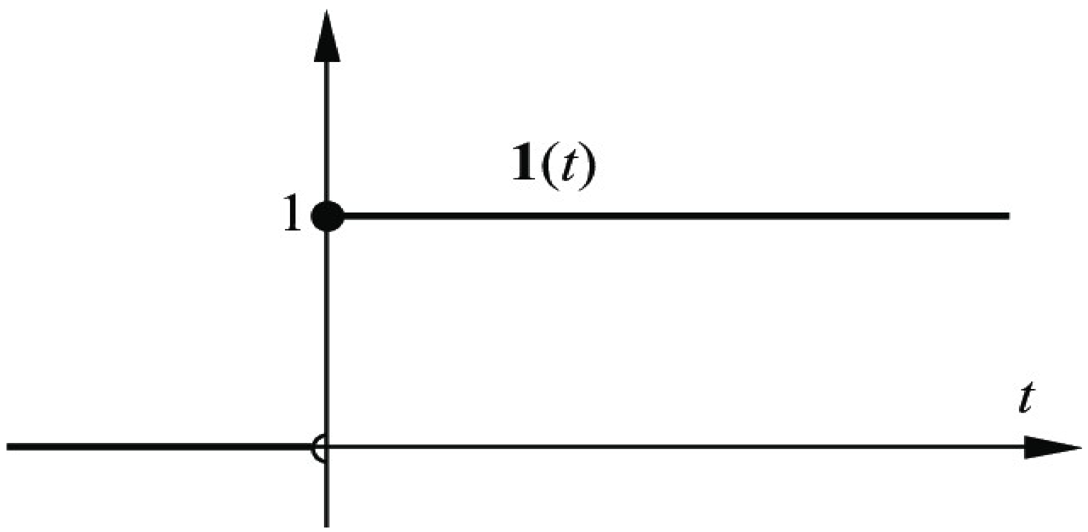
$$\boldsymbol{P_x = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{8}{6} = 1,3333}$$

Típicos modelos de sinais

Degrau

- Definição matemática de um degrau unitário: $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$

- Aplicações: Modelar chaveamento em circuitos, resposta transitória de sistemas, sinais de ativação.



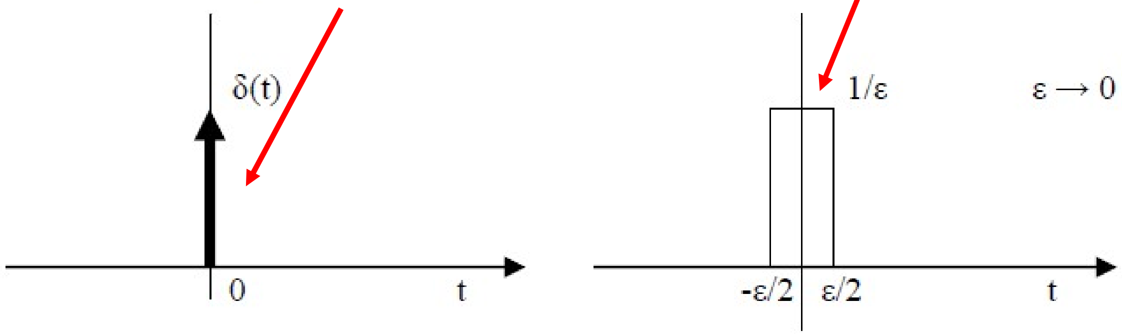
Exemplo de um sinal degrau unitário

Típicos modelos de sinais

Impulso unitário (Delta de Dirac)

- Um impulso com amplitude “infinita” e “infinitamente” estreito
- Aplicações: Análise de sistemas (resposta ao impulso), amostragem de sinais, filtros.
- Definição matemática de um Impulso unitário:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = 0, \\ 0 & \text{se } t \neq 0, \end{cases} \quad \text{com} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



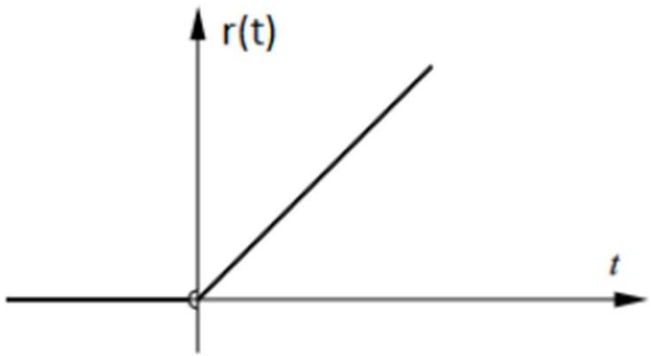
Exemplo de sinal impulso unitário – Representação do impulso (esquerda) e de sua área (direita)

Típicos modelos de sinais

Rampa

- Definição matemática: $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ A \cdot t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$ onde *A* é a inclinação da rampa.

- Aplicações: Controle de motores (varredura), geradores de sinais, sistemas de tempo real.



Exemplo de sinal rampa

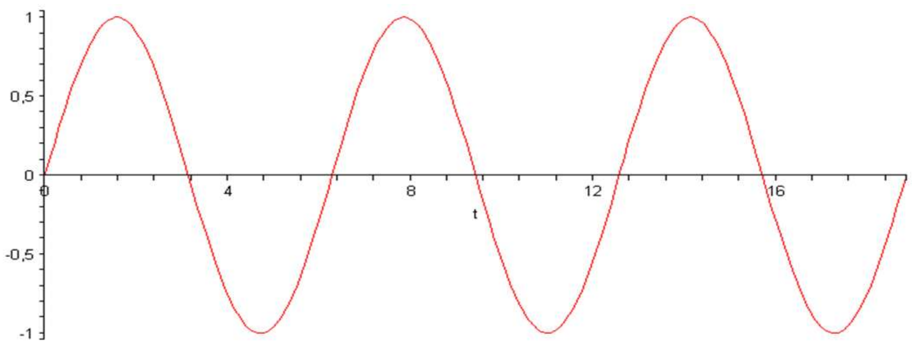
Típicos modelos de sinais

Senoidal

- Definição matemática: $\boldsymbol{x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \theta)}$

onde:
A é a Amplitude
ω é a frequência angular em radianos por segundo ($\omega = 2.\pi.f$ onde f é a frequência em Hertz)
θ é a fase em radianos

- Aplicações: Ondas de rádio, sistemas de potência, energia da tomada.



Exemplo de sinal senoidal

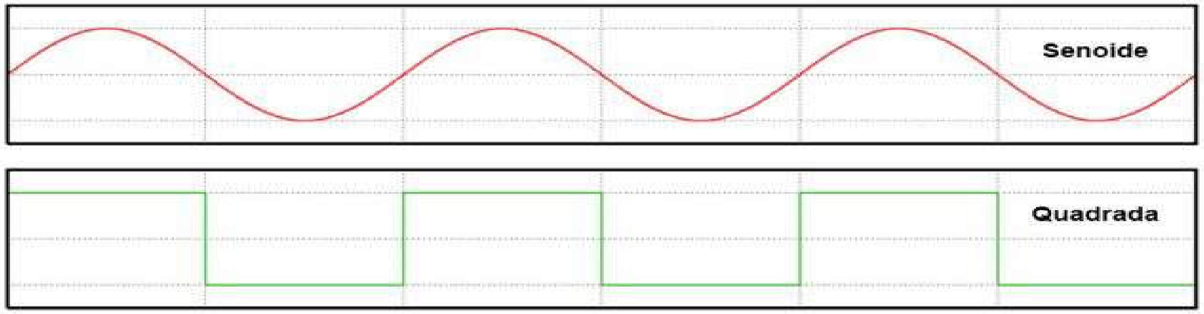
Típicos modelos de sinais

Onda quadrada ou retangular

- Sinal similar ao senoidal, mas contendo somente dois níveis entre: negativo, zero e positivo.
- Definição matemática para onda quadrada entre 1 e -1: $x(t) = A \cdot \begin{cases} +1 & \text{se } \sin(2\pi f t) \geq 0, \\ -1 & \text{se } \sin(2\pi f t) < 0. \end{cases}$

onde *A* é a amplitude da onda.

- Aplicações: Clock de circuitos digitais, transmissão de dados binários, modulação PWM.

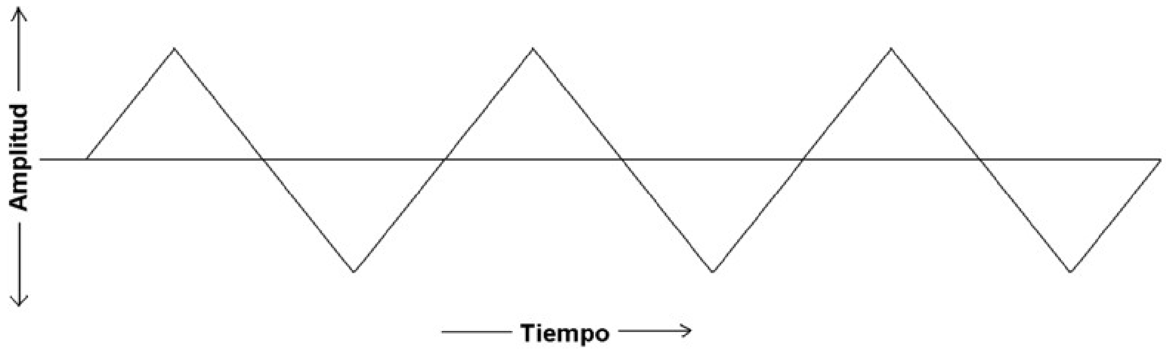


Exemplo de sinal onda quadrada a partir de uma senoide

Típicos modelos de sinais

Triangular

- Sinal similar ao senoidal, mas sendo composto por rampas lineares de subida e descida.
- Definição matemática: $r(t) = A \cdot t$ na subida e $r(t) = -A \cdot t$ na descida.
- Aplicações: Modulação de distorções, calibração de equipamentos.

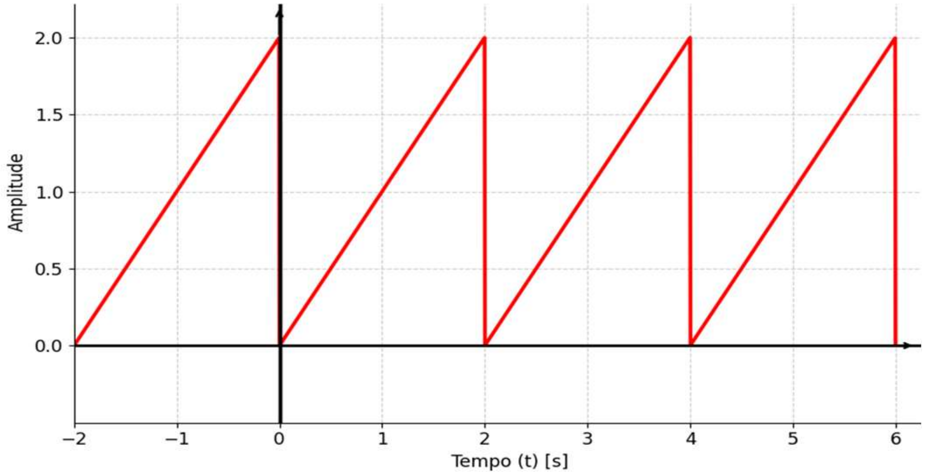


Exemplo de sinal triangular

Típicos modelos de sinais

Dente de serra

- Sinal composto por sequência de rampas lineares na subida, e uma descida instantânea.
- Definição matemática: $r(t) = A \cdot t$ na subida
- Aplicações: Varredura em osciloscópios, síntese musical.



Exemplo de sinal senoidal

Típicos modelos de sinais

Observação:

Sinais **senoidais, dentes de serra, triangulares e de onda quadrada** são típicos sinais **periódicos**, essenciais para análise de Série de Fourier.

Sinais do tipo **degrau, impulso e rampa** são típicos sinais **aperiódicos**, utilizados para modelar eventos únicos ou transitórios, analisados pela Transformada de Fourrier.

Exemplo de sinal senoidal

Série de Fourier e Transformada de Fourier

Aula 1- Introdução da disciplina e histórico da área

Série e Transformada de Fourier – O que são e para que servem?

- Em um sistema de comunicação, existe o desejo de **transmitir inúmeros tipos de sinais (funções)**, com diferentes tipos e **graus de complexidade matemática**.
- Sendo assim, **a Série de Fourier** e a **Transformada de Fourier** são **ferramentas matemáticas** que servem para **facilitar a manipulação de funções** e o envio de sinais em sistemas de comunicação.
- Ambas as ferramentas se baseiam na **decomposição de sinais em senos e cossenos**, funções mais simples de realizar cálculos.
- Veremos nas próximas aulas que ambas as ferramentas são a **base matemática para vários métodos de envio de informações**.

Série de Fourier

- A Série de Fourier foi apresentada em um trabalho preliminar por Jean-Baptiste-Joseph Fourier em 1807, tendo um versão revisada que foi premiada em 1812 e com a versão final sendo apresentada em 1822 sob o nome Teoria Analítica do Calor.

- O trabalho de Fourier é considerado uma das descobertas matemáticas mais brilhantes e impactantes de todos os tempos.

- Resumidamente, Fourier demonstrou que todo sinal periódico com período fundamental T pode ser **decomposto em uma somatória de senos e cossenos**.

Jean-Baptiste-Joseph-Fourier

Série de Fourier

- Começamos pensando que um sinal senoidal possui três parâmetros importantes e que podem variar:

  - Sua Amplitude (A)
  - Sua Frequência (ω)
  - Sua fase ($\boldsymbol{\theta}$)

$$\boldsymbol{x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)}$$

- A primeira consideração que temos que fazer é que a frequência ω não pode ser qualquer frequência, mas sim um múltiplo da frequência ω_0 , chamada de **frequência fundamental**. Assim, criamos um família de frequências baseadas em ω_0 , a qual chamamos de **harmônicas**.

$\omega = k\omega_0$ sendo que k é um número inteiro e o período $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Série de Fourier – Trigonométrica

Equação de Síntese em tempo contínuo – Compondo um sinal real

- Como compor um sinal periódico com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ com senos e cossenos:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot sen(k\omega_0 t)$$

Somatória infinita de senos e cossenos

Lembrando que a_k e b_k são as amplitudes do sinal da harmônica k e a_0 é a amplitude média do sinal

Série de Fourier – Trigonométrica

Equação de Análise em tempo contínuo – Decompondo o sinal

- Para decompor um sinal periódico com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ em senos e cossenos, temos que **achar as amplitudes a_k e b_k da componente fundamental e das suas harmônicas**

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot \text{sen}(k\omega_0 t)\, dt$$

Achando as amplitudes da somatória infinita de senos e cossenos

Série de Fourier – Compacta

Equação de Síntese em tempo contínuo – Compondo um sinal real

- Se desejarmos, podemos representar senos e cossenos em somente cossenos, uma vez que um seno é um cosseno deslocado. Mas ai, precisamos incluir a **fase θ nas equações**:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Somatória infinita de cossenos

Lembrando que c_k é a amplitude do sinal da harmônica k e $c_0 = a_0$, que é a amplitude média do sinal

Série de Fourier – Compacta

Equação de Análise em tempo contínuo – Decompondo o sinal

- Para decompor um sinal periódico com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ em cossenos, temos que **achar a amplitude c_k da componente fundamental e das suas harmônicas**

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot dt$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\theta_k = -\tan^{-1} \frac{b_k}{a_k}$$

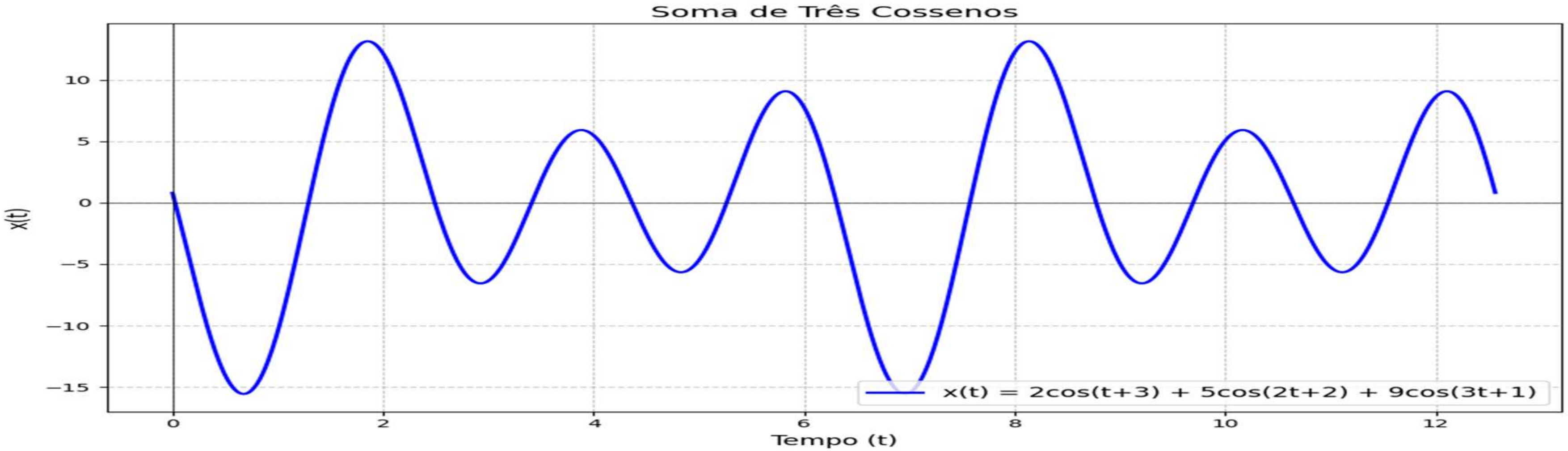
Achando as amplitudes e fases da somatória infinita de cossenos

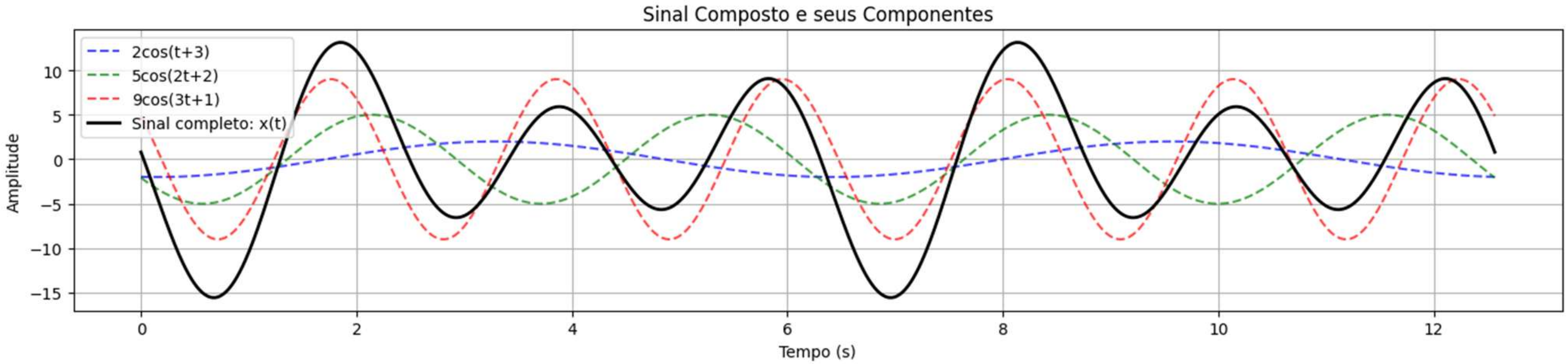
Série de Fourier – Compacta

Espectro de Amplitude e de Fase

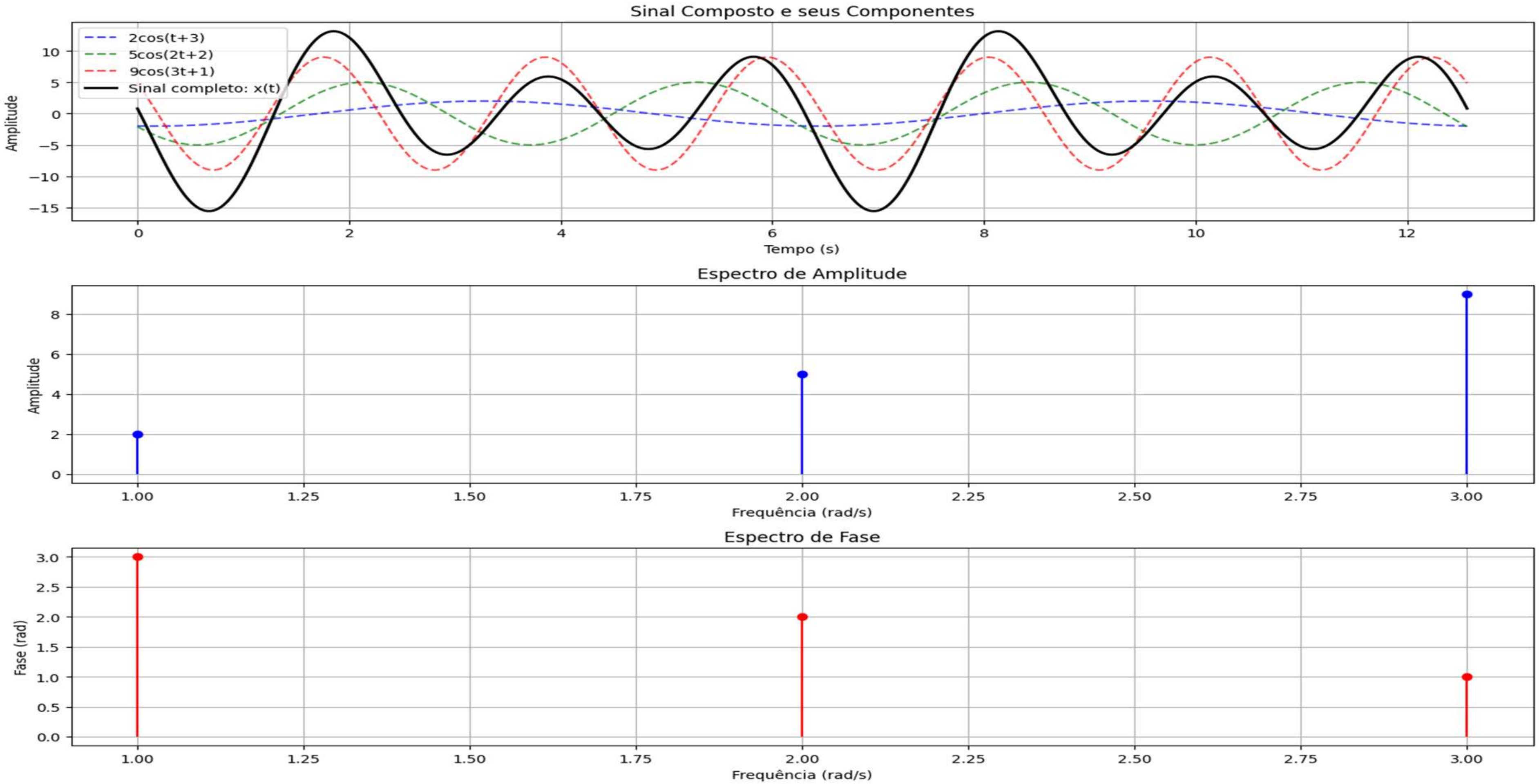
- É possível representar a Série de Fourier de um sinal periódico a partir de um **Espectro de Amplitude e de Fase**.
- O espectro de amplitude representa qual é a amplitude, ou seja, o coeficiente c_k , de cada harmônica do sinal.
- O espectro de fase representa qual é a fase, ou seja, o parâmetro θ_k para cada harmônica do sinal.
- Exemplo a seguir:

Série de Fourier - Espectro de Amplitude e de Fase

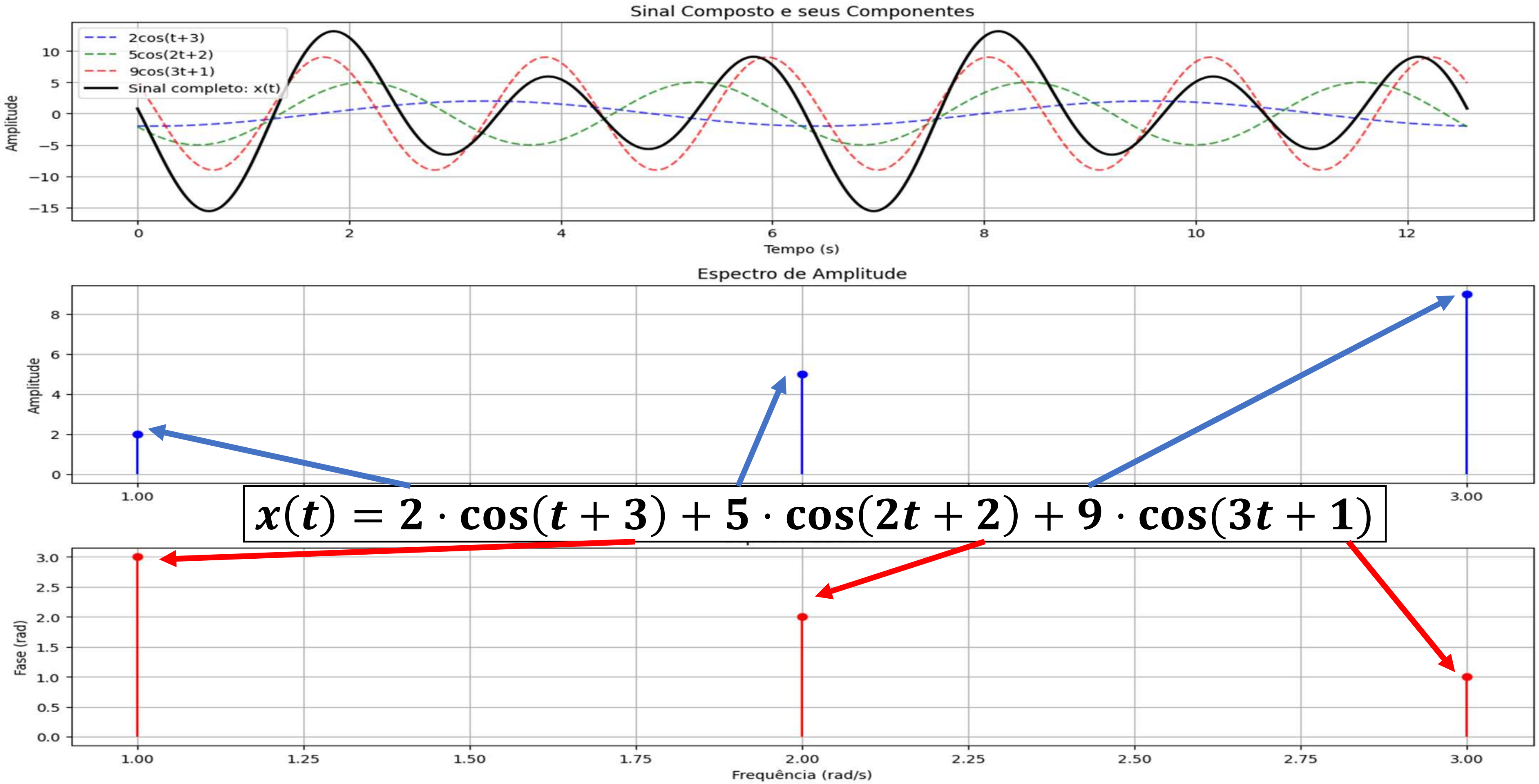




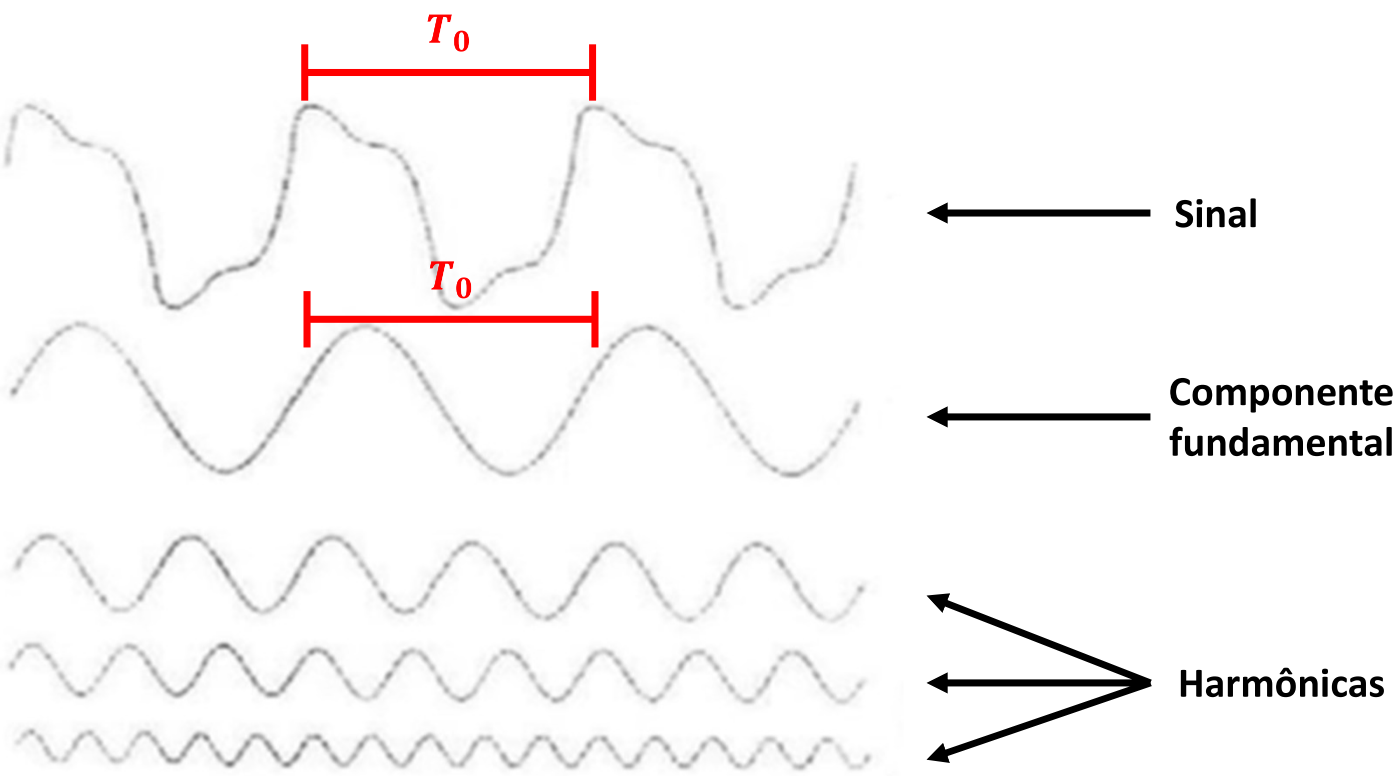
Série de Fourier - Espectro de Amplitude e de Fase



Série de Fourier - Espectro de Amplitude e de Fase



Série de Fourier



Exemplo de sinal decomposto

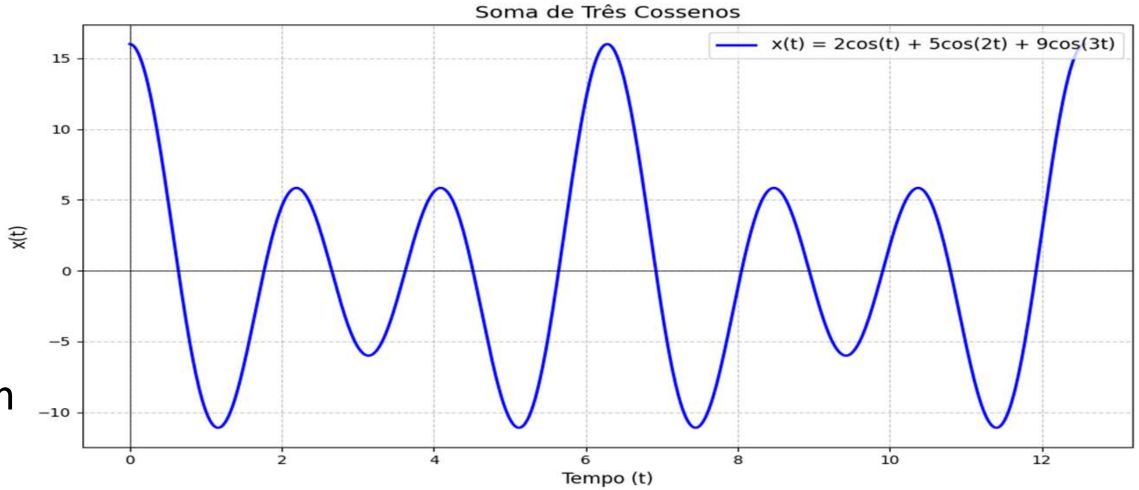
O período T_0 do sinal e da componente fundamental sempre serão iguais!

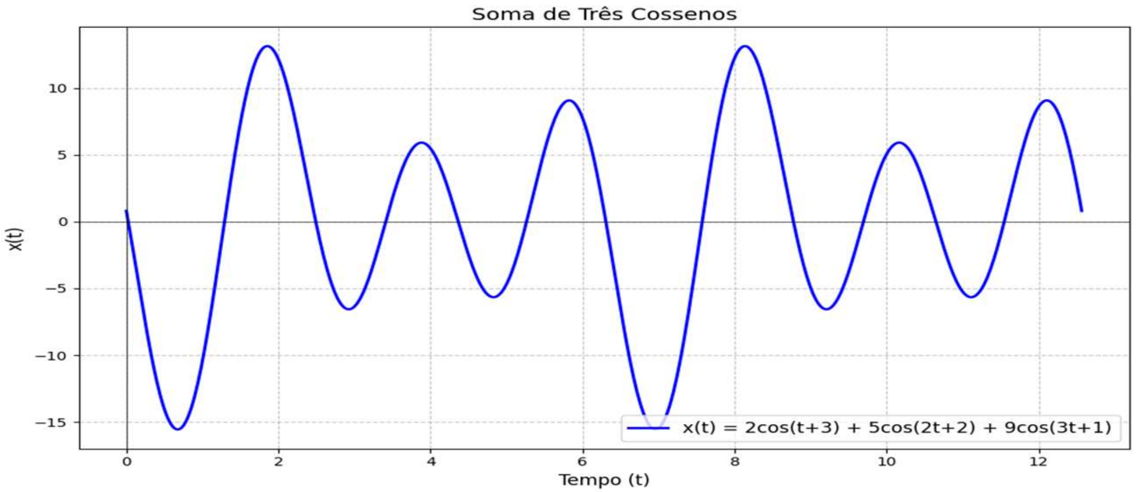
Série de Fourier

- Vemos ao lado que os sinais são formados pelo mesmo número de cossenos, com a mesma frequência fundamental e a mesma amplitude, entretanto a **fase θ é diferente**, o que resulta em sinais diferentes.

- Quando temos **fases diferentes**, é mais fácil de realizar contas com **números complexos**.

- Números complexos são utilizados para resolver equações que possuem **raiz de números negativos** → $j = \sqrt{-1}$.





Série de Fourier – Números complexos e a Identidade de Euler

- Leonhard Euler, um matemático suíço, deduziu a Identidade de Euler, onde senos e cossenos podem ser expressados por exponenciais complexas (exponenciais com números complexos). Abaixo estão as chamadas Identidades de Euler:

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2}\, e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2}\, e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\mathrm{sen}(k\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\, e^{jk\omega_0 t} - \frac{1}{2j}\, e^{-jk\omega_0 t}$$

onde $\boldsymbol{e}$ é a constante de Euler

Série de Fourier

Equação de Síntese em tempo contínuo – Compondo o sinal

- Como compor um sinal periódico com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ com senos e cossenos:

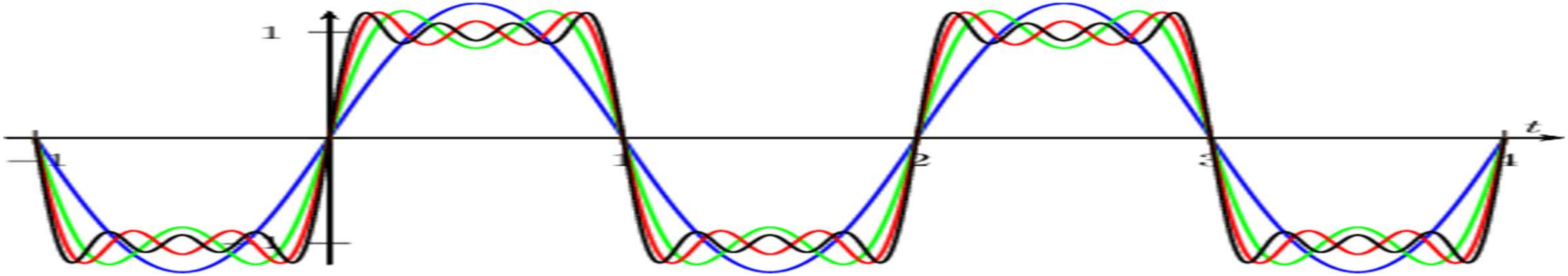
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k . e^{jk\quad {}_0 t}$$

Somatória infinita de senos e cossenos

Lembrando que d_k é a amplitude do sinal da harmônica k e $e^{jk\quad {}_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + jsen(k\omega_0 t)$

Série de Fourier

Como assim **COMPOR QUALQUER SINAL PERIÓDICO COM UMA SOMATÓRIA DE SENOS E COSSENOS?**



Sinal Digital (-1 a 1) decomposto em senos e cossenos

(https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k&t=1010s)

Série de Fourier

Equação de Análise em tempo contínuo – Decompondo o sinal

- Para decompor um sinal periódico com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ em senos e cossenos, temos que **achar a amplitude d_k da componente fundamental e das suas harmônicas**

$$d_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t).\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Achando as amplitudes da somatória infinita de senos e cossenos

Lembrando que d_k é a amplitude do sinal da harmônica k

Série de Fourier – Sinal periódico contínuo ou discreto

	Contínuo	Discreto
Equação de Síntese (Compondo o sinal)	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k . e^{jk\ \ {}_0 t}$ $(t) \rightarrow (n)$	$x(n) = \sum_{k=N} d_k . e^{jk\omega_0 n}$
Equação de Análise (Decompondo o sinal)	$d_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t). e^{-jk\omega_0 t}\, dt$ $(T_0) \rightarrow (N)$	$d_k = \frac{1}{N} \sum_{n=N} x(n). e^{-jk\omega_0 n}$

Exemplos no Google Colab

E se o sinal não for periódico, como fazemos?

Utilizamos a Transformada de Fourier!


To be continued...