Aula 2 - Posto e Nulidade:

- **Definição**: Dizemos que uma matriz é linha reduzida à forma escada se:

(I) Toda linha nula aparece abaixo de todas as linhas não-nulas;

(II) O primeiro elemento não-nulo de toda linha não-nula é 1. Esses elementos são chamados de pivôs;

(III) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero;

(IV) Se as linhas i e j são não-nulas, com $i<j$, então o pivô da linha j aparece em uma coluna à direita da coluna em que aparece o pivô da linha i.

- **Exemplo 1**:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (I) ✓ (II) ✓
   (III) ✗ (IV) ✓

2. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (I) ✓ (II) ✗
   (III) ✓ (IV) ✗

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (I) ✗ (II) ✗
   (III) ✓ (IV) ✓

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (I) ✓ (II) ✓
   (III) ✓ (IV) ✓

- **Obs.:** Dizemos que duas matrizes $m \times n$ A e B são linha-equivalentes se B pode ser obtida por meio de operações elementares sobre as linhas de A. Assim, é possível demonstrar que toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escada.

- **Definição:** Seja A uma matriz $m \times n$ e B a matriz na forma escada que é linha-equivalente a A. O número de linhas não-nulas de B é chamado de posto de A e será denotado por p. A diferença $n-p$ (ou seja, número de colunas menos o posto) é chamada de nulidade de A.

- **Exemplo 2:** Reduza a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 2 & 21 \\ 3 & 1 & 2 & 21 \end{bmatrix}$ à forma escada e determine seu posto e sua nulidade.

- **Solução:** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 2 & 21 \\ 3 & 1 & 2 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -4 & 35 \\ 0 & 7 & -7 & 42 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -4 & 35 \\ 0 & 1 & 1 & -28 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -28 \\ 0 & 3 & -4 & 35 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_2]{L_1 \to L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -63 \\ 0 & 1 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 119 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{7}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -63 \\ 0 & 1 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -17 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - 5L_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -17 \end{bmatrix}}_{\text{forma escada}}.$$ O posto vale $\boxed{3}$ e a nulidade vale $\boxed{1}$. ■

- Exemplo 3: Reduza a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ à forma escada e determine seu posto e sua nulidade.

- Solução: $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_1]{L_3 \to L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{7}L_3,\ L_4 \to -\frac{1}{5}L_4]{L_2 \to \frac{1}{2}L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2,\ L_4 \to L_4 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{forma escada}}.$$ O posto vale $\boxed{2}$ e a nulidade vale $\boxed{1}$. ■

- Exemplo 4: Reduza a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ à forma escada e determine seu posto e sua nulidade.

- Solução: $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{forma escada}}$$

. O posto vale $\boxed{2}$ e a nulidade vale $\boxed{2}$. ∎

Na aula anterior vimos como resolver um sistema linear usando escalonamento. Em todos aqueles exemplos obtivemos uma única solução para o sistema, mas esse não é o único caso possível, como veremos a seguir.

- **Exemplo 5:** O sistema $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ não possui nenhuma solução. Geometricamente, as equações representam duas retas paralelas, que não possuem pontos em comum. Escalonando a matriz aumentada, temos $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Note que o posto da matriz dos coeficientes é 1 e o da matriz aumentada é 2.

- **Exemplo 6:** O sistema $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$ possui infinitas soluções. Geometricamente, as equações representam a mesma reta, logo qualquer ponto dessa reta satisfaz o sistema. Escalonando, temos $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Note que tanto a matriz dos coeficientes como a matriz aumentada têm posto igual a 1. Note ainda que a nulidade da matriz dos coeficientes é positiva.

Exemplo 7: O sistema $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ possui uma única solução. Geometricamente, as equações representam um par de retas concorrentes, que se cruzam em um único ponto, que é a solução do sistema. Escalonando, temos $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{array}\right]$. Note que tanto a matriz dos coeficientes como a matriz aumentada têm posto igual a 2 e que nulidade da matriz dos coeficientes vale 0.

Vejamos o caso geral. Considere o sistema $\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$.

Este sistema poderá ter:

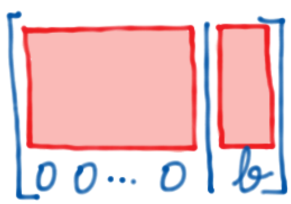
(I) uma única solução (sistema possível e determinado);

(II) infinitas soluções (sistema possível e indeterminado);

(III) nenhuma solução (sistema impossível).

Sejam P_C e P_A, respectivamente, os postos da matriz dos coeficientes (que tem m linhas e n colunas) e da matriz aumentada (que tem m linhas e $n+1$ colunas). Note que $P_C \leq P_A$.

- Se $P_C < P_A$, então a matriz na forma escada linha-equivalente à matriz aumentada tem que ter a forma



com $b \neq 0$. A última linha corresponde à equação $0x_1 + \dots + 0x_n = b$, ou seja, $0 = b \neq 0$, e o sistema é claramente impossível.

- Se $P_C = P_A = n$, então a nulidade da matriz dos coeficientes é 0.

A matriz na forma escada linha-equivalente à matriz aumentada tem que ser da forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & k_1\\ & 1 & & & k_2\\ & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & & 1 & k_n \\ \hline & & 0 & & 0\end{array}\right],$$

logo $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ é a solução única do sistema, que é possível e determinado.

- Se $P_C = P_A = p < n$, então é possível escrever p variáveis (que correspondem às colunas com pivôs na matriz dos coeficientes) em função das outras $n-p$ variáveis (que chamaremos de variáveis livres). Nesse caso, o sistema admite infinitas soluções e dizemos que $n-p$ é seu grau de liberdade. Resumindo:

$P_C < P_A \longleftrightarrow$ sistema impossível

$P_C = P_A = n \longleftrightarrow$ sistema possível e determinado

$P_C = P_A < n \longleftrightarrow$ sistema possível e indeterminado

$P_C \to$ posto da matriz dos coeficientes; $P_A \to$ posto da matriz aumentada; $n \to$ número de variáveis

- **Exemplo 8:** Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \end{cases}$.

- **Solução:** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right] \to$

$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & 17/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -5/3 \end{array}\right]$.

Temos $P_C = P_A = 2 < 3 = n$, logo o sistema é possível e indeterminado. Temos $x + \frac{7z}{3} = \frac{17}{3}$ e $y - \frac{4z}{3} = -\frac{5}{3}$. Se (x,y,z) é solução, então $(x,y,z) = \left(\frac{17}{3} - \frac{7}{3}z, -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}z, z\right) = \left(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right) + z\cdot\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$, e o conjunto solução é $\boxed{S = \left\{\left(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right) + z\cdot\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) : z \in \mathbb{R}\right\}}$, que geometricamente representa uma reta. ∎

- **Exemplo 9:** Resolva o sistema $\begin{cases} x+y-z+2t=0 \\ 3y-z+3t=0 \\ 2x-y-y+t=0 \end{cases}$.

- **Solução:** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{3}L_3]{L_2 \to \frac{1}{3}L_2}$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Temos $P_C = P_A = 2 < 4 = n$, logo o sistema é possível e indeterminado. Temos $x - \frac{2}{3}z + t = 0$ e $y - \frac{1}{3}z + t = 0$, logo se (x,y,z,t) é solução, então $(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{3}z - t, \frac{1}{3}z - t, z, t\right) = z\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + t\left(-1,-1,0,1\right)$. O conjunto solução é

$$\boxed{S = \{z(2/3, 1/3, 1, 0) + t(-1,-1,0,1) : z,t \in \mathbb{R}\}}.$$

■

* Quando todos os termos independentes são iguais a 0, dizemos que o sistema é homogêneo. É claro que todo sistema homogêneo é possível, pois sempre tem a solução com todas as incógnitas iguais a 0, chamada de solução trivial. Como a coluna dos termos independentes não muda ao longo do escalonamento, costumamos ignorá-la e escalonamos apenas a matriz dos coeficientes.