Aula 9 - Transformações Lineares:

Exemplo 1: Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Note que funções lineares satisfazem $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ e $f(Kx) = a(Kx) = K(ax) = K f(x)$, onde $K \in \mathbb{R}$, ou seja, elas são bem comportadas com respeitos às operações típicas da Álgebra Linear. Vamos generalizar essa ideia para definir funções lineares entre espaços vetoriais.

Definição 1: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear entre V e W é uma função $T: V \to W$ que satisfaz:

(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$;

(ii) $T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$ $\forall \vec{v} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2: A transformação $T: M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ dada por $T(A) = A^t$, onde A^t é a matriz transposta de A, é linear. Com efeito, se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, então $A + B =$
$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$, logo $T(A+B) = (A+B)^t = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = A^t + B^t =$
$= T(A) + T(B)$.

Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$, logo $T(\lambda A) = (\lambda A)^t = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} =$
$= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \lambda A^t = \lambda T(A)$, como queríamos. ∎

Exemplo 3: A transformação $T: P_n \to P_n$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$, a derivada de $p(x)$, é linear. Com efeito, sabemos do Cálculo $T(p_1(x) + p_2(x)) = (p_1(x) + p_2(x))' = p_1'(x) + p_2'(x) = T(p_1(x)) + T(p_2(x))$ e $T(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda T(p(x))$. ∎

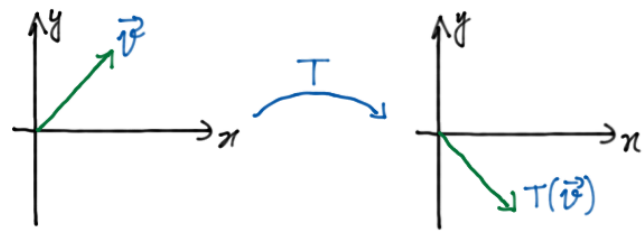
Exemplo 4: Seja A uma matriz $m \times n$. Então a transformação $T: M_{n\times 1} \to M_{m\times 1}$ dada por $T(X) = A\cdot X$ é linear. Com efeito, $T(X_1+X_2) = A(X_1+X_2) = A\cdot X_1 + A\cdot X_2 = T(X_1)+T(X_2)$ e $T(\lambda X) =$ $= A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda T(X)$. Esse Exemplo mostra que a toda matriz está associada uma transformação linear. Veremos em breve que o inverso também é verdade! ■

Vamos estudar alguns exemplos de transformações do plano no plano:

Exemplo 5: (Homotetia) São transformações da forma $T: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} \mapsto \alpha\vec{v} \end{array}$, com $\alpha \neq 0$. Por exemplo, $T(x,y) = 3(x,y) = (3x, 3y)$. Note que as homotetias dilatam os vetores se $|\alpha| > 1$ e os contraem se $|\alpha| < 1$, invertendo o sentido se $\alpha < 0$ e mantendo-o se $\alpha > 0$.

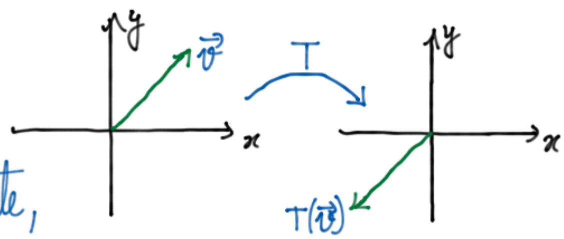
Matricialmente, escrevemos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{T} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Exemplo 6: (Reflexão em torno do eixo x)



É a transformação $T(x,y) = (x,-y)$. Matricialmente, temos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Exemplo 7: (Reflexão na origem)



É a transformação $T(x,y) = (-x,-y)$. Matricialmente, temos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{T} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Exemplo 8: (Rotação de um ângulo θ) Sabemos da Geometria Analítica que ao realizarmos uma rotação de ângulo θ, as coordenadas (x,y) transformam-se em (u,v), dadas por $u = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $v = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$. Daí, $T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$ é uma transformação que realiza uma rotação de ângulo θ, no sentido anti-horário. Matricialmente, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{T} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Devido às suas representações matriciais, as transformações dos Exemplos 5, 6, 7 e 8 são lineares, de acordo com o Exemplo 4.

- Obs.: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então $T(\vec{0}) = \vec{0}$ (na verdade, deveríamos escrever $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, já que são elementos de espaços diferentes, mas faremos este abuso de notação). De fato, $T(\vec{0}) = T(\vec{0}+\vec{0}) = T(\vec{0}) + T(\vec{0})$, pois T é linear. Cancelando, obtemos $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

- Exemplo 9: A observação acima nos permite mostrar que translações, isto é, transformações da forma $T(x,y) = (x+a, y+b)$, não são lineares, já que $T(0,0) = (a,b)$ (a menos, é claro, que $(a,b) = (0,0)$).

Cuidado, pois nem toda transformação que satisfaz $T(\vec{0}) = \vec{0}$ é linear! Por exemplo, $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$ satisfaz $T(0) = 0$, mas não é linear pois, por exemplo, $T(1) = 1$ e $T(2) = 4$, ou seja, $T(2 \cdot 1) \neq 2 \cdot T(1)$.

- Exemplo 10: (Transformação nula) A transformação $T: V \to W$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{0}\ \forall v \in V$ é linear. Você pode se convencer disso?

Feitas as devidas apresentações, vejamos alguns conceitos e resultados importantes.

Transformações lineares são unicamente determinadas por seus valores em uma base. É isso que provamos no

-**Teorema 1:** Sejam V e W espaços vetoriais, $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ base de V e $\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n\in W$. Então existe uma única transformação linear $T:V\to W$ tal que $T(\vec{v}_1)=\vec{w}_1,\dots,T(\vec{v}_n)=\vec{w}_n$.

-**Demonstração:** Dado $\vec{v}\in V$, podemos escrever $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n$. Defina $T:V\to W$ pondo $T(\vec{v})=T(a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n)=a_1\vec{w}_1+\dots+a_n\vec{w}_n$. Então:

① **T é linear:** Se $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n$ e $\vec{u}=b_1\vec{v}_1+\dots+b_n\vec{v}_n$, então $\vec{v}+\vec{u}=(a_1+b_1)\vec{v}_1+\dots+$ $+(a_n+b_n)\vec{v}_n$, logo $T(\vec{v}+\vec{u})=(a_1+b_1)\vec{w}_1+\dots+(a_n+b_n)\vec{w}_n=(a_1\vec{w}_1+\dots+a_n\vec{w}_n)+(b_1\vec{w}_1+\dots+b_n\vec{w}_n)=$ $=T(\vec{v})+T(\vec{u})$. Se $\lambda\in\mathbb{R}$, então $\lambda\vec{v}=\lambda a_1\vec{v}_1+\dots+\lambda a_n\vec{v}_n$, logo $T(\lambda\vec{v})=\lambda a_1\vec{w}_1+\dots+\lambda a_n\vec{w}_n=$ $=\lambda(a_1\vec{w}_1+\dots+a_n\vec{w}_n)=\lambda T(\vec{v})$, logo T é linear.

② **$T(\vec{v}_i)=\vec{w}_i,\ i=1,\dots,n$:** De fato, isso decorre diretamente da definição: $T(\vec{v}_i)=$ $=T(0\vec{v}_1+\dots+1\vec{v}_i+\dots+0\vec{v}_n)=0\vec{w}_1+\dots+1\vec{w}_i+\dots+0\vec{w}_n=\vec{w}_i$, $i=1,\dots,n$.

③ **Unicidade:** Se $S:V\to W$ é uma transformação linear satisfazendo $S(\vec{v}_1)=\vec{w}_1,\dots,$ $S(\vec{v}_n)=\vec{w}_n$, então se $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n$, temos $S(\vec{v})=S(a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n)=S(a_1\vec{v}_1)+\dots+$ $+S(a_n\vec{v}_n)=a_1S(\vec{v}_1)+\dots+a_nS(\vec{v}_n)=a_1\vec{w}_1+\dots+a_n\vec{w}_n=T(\vec{v})$. Como $\vec{v}\in V$ foi arbitrário, concluímos que $S=T$, logo T é a única transformação possível com essa propriedade. ■

-**Exemplo 11:** Determine a transformação linear $T:P_1\to P_1$ tal que $T(1+x)=1$ e $T(1-x)=-x$.

-**Solução:** Começamos escrevendo um polinômio $a+bx\in P_1$ como combinação linear de $1+x$ e de $1-x$: se $a+bx=\alpha(1+x)+\beta(1-x)$, então $\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha-\beta=b\end{cases}$, logo $\alpha=\frac{a+b}{2}$ e $\beta=\frac{a-b}{2}$. Com isso, temos

$a+bx = \left(\frac{a+b}{2}\right)(1+x) + \left(\frac{a-b}{2}\right)(1-x)$. Aplicando T a ambos os lados da última equação e usando a linearidade de T, obtemos $T(a+bx) = T\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)(1+x) + \left(\frac{a-b}{2}\right)(1-x)\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)T(1+x) + \left(\frac{a-b}{2}\right)T(1-x) = \left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)(-x) = \boxed{\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)x}$. ■

Note que o procedimento que usamos no Exemplo anterior foi exatamente o mesmo usado na parte da Unicidade na demonstração do Teorema 1.

- Exemplo 12: Determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(3,2,1) = (1,1)$, $T(0,1,0) = (0,-2)$ e $T(0,0,1) = (0,0)$.

- Solução: Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, vamos escrevê-lo como combinação linear da base $\{(3,2,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$: $(x,y,z) = a(3,2,1) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$, o que nos fornece o sistema $\begin{cases} 3a = x \\ 2a + b = y \\ a + c = z \end{cases}$, cuja solução é $a = \frac{x}{3}$, $b = -\frac{2x}{3} + y = \frac{-2x+3y}{3}$ e $c = -\frac{x}{3} + z = \frac{-x+3z}{3}$. Assim, $(x,y,z) = \frac{x}{3}(3,2,1) + \left(\frac{-2x+3y}{3}\right)(0,1,0) + \left(\frac{-x+3z}{3}\right)(0,0,1)$. Aplicando T e usando a linearidade, obtemos $T(x,y,z) = \frac{x}{3}T(3,2,1) + \left(\frac{-2x+3y}{3}\right)T(0,1,0) + \left(\frac{-x+3z}{3}\right)T(0,0,1) = \frac{x}{3}(1,1) + \left(\frac{-2x+3y}{3}\right)(0,-2) + \left(\frac{-x+3z}{3}\right)(0,0)$, ou seja,

$$\boxed{T(x,y,z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{5x-6y}{3}\right)}$$

■

- Exemplo 13: Existe alguma transformação linear $T: P_3 \to P_4$ que satisfaz $T(1+t) = t^4$, $T(t^3) = 1$ e $T(1+t+t^3) = 2+t^4$?

- Solução: Cuidado! Como $\{1+t, t^3, 1+t+t^3\}$ não é base, o Teorema 1 não nos garante nada, e como esse conjunto é LD, devemos ficar ainda mais atentos. Note que $2+t^4 = T(1+t+t^3) = T(1+t) + T(t^3) = t^4 + 1$, mas isso é um absurdo! Assim, não existe transformação linear $T: P_3 \to P_4$ com essas propriedades. ■

– NÚCLEO E IMAGEM:

Definição: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então:

(i) O núcleo de T é o conjunto $Ker(T) = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}\}$;

(ii) A imagem de T é o conjunto $Im(T) = \{\vec{w} \in W : \vec{w} = T(\vec{v})$ para algum $\vec{v} \in V\}$.

Esses conjuntos possuem propriedades importantes e que nos ajudam a compreender melhor as transformações lineares. Por exemplo,

Teorema 2: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então $Ker(T)$ e $Im(T)$ são subespaços de V e W, respectivamente.

Demonstração: Observe que, como $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, temos $\vec{0}_V \in Ker(T)$ e $\vec{0}_W \in Im(T)$.

Primeiramente, mostremos que $Ker(T)$ é subespaço de V. Sejam $\vec{v}, \vec{u} \in Ker(T)$, ou seja, $T(\vec{v}) = T(\vec{u}) = \vec{0}$. Então $T(\vec{v} + \vec{u}) = T(\vec{v}) + T(\vec{u}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, logo $\vec{v} + \vec{u} \in Ker(T)$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, logo $\lambda\vec{v} \in Ker(T)$, provando que, de fato, $Ker(T)$ é subespaço de V.

Agora mostraremos que $Im(T)$ é subespaço de W. Sejam $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in Im(T)$. Então existem $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ tais que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ e $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$. Daí, $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, logo $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in Im(T)$, pois $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$. Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in Im(T)$, podemos escrever $\vec{w} = T(\vec{v})$, com $\vec{v} \in V$, portanto $\lambda\vec{w} = \lambda T(\vec{v}) = T(\lambda\vec{v}) \in Im(T)$, provando que $Im(T)$ é subespaço de W. $\blacksquare$