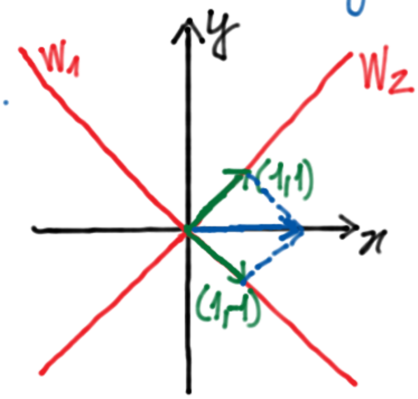
- Aula 5 - Combinação Linear e Dependência Linear:

Vimos na aula passada que, se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V, então a interseção $W_1 \cap W_2$ também é subespaço. No entanto, o mesmo não ocorre, em geral, com a união.

- **Exemplo 1:** Sejam $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ e $W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y=0\}$. Como W_1 e W_2 são conjuntos-solução de sistemas homogêneos de duas incógnitas, sabemos que ambos são subespaços de $\mathbb{R}^2$.



No entanto, temos $(1,-1) \in W_1$, $(1,1) \in W_2$, mas

$$(2,0) = (1,-1) + (1,1) \notin W_1 \cup W_2,$$

logo $W_1 \cup W_2$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. ∎

Apesar de $W_1 \cup W_2$ não ser, em geral, subespaço de V, veremos a seguir que existe um subespaço que contém W_1 e W_2.

- **Definição 1:** Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. A *soma* de W_1 e W_2 é o conjunto $\boxed{W_1+W_2=\{\vec{w_1}+\vec{w_2} : \vec{w_1}\in W_1, \vec{w_2}\ W_2\}}$.

- **Teorema 1:** Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então W_1+W_2 também é subespaço de V.

- **Demonstração:** Como $\vec{0}\in W_1$ e $\vec{0}\in W_2$, temos que $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}\in W_1+W_2$. Note ainda que se $\vec{u}\in W_1$, então $\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}\in W_1+W_2$, logo $W_1\subset W_1+W_2$. Analogamente, $W_2\subset W_1+W_2$, logo $W_1\cup W_2\subset W_1+W_2$.

Se $\vec{u_1},\vec{u_2}\in W_1+W_2$, então podemos escrever $\vec{u_1}=\vec{w_1}+\vec{w_2}$ e $\vec{u_2}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$, com $\vec{w_1},\vec{v_1}\in W_1$ e $\vec{w_2},\vec{v_2}\in W_2$. Logo, $\vec{u_1}+\vec{u_2}=(\vec{w_1}+\vec{w_2})+(\vec{v_1}+\vec{v_2})=(\vec{w_1}+\vec{v_1})+$ $+(\vec{w_2}+\vec{v_2})\in W_1+W_2$.

Finalmente, se $\vec{w}\in W_1+W_2$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, então temos $\vec{w}=\vec{w_1}+\vec{w_2}$, com $\vec{w_1}\in W_1$ e $\vec{w_2}\in W_2$, logo $\lambda\vec{w}=\lambda(\vec{w_1}+\vec{w_2})=\lambda\vec{w_1}+\lambda\vec{w_2}\in W_1+W_2$. Assim, W_1+W_2 é subespaço de V. $\blacksquare$

* Quando $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, diremos que a soma de W_1 e W_2 é direta e usaremos a notação $W_1 \oplus W_2$.

- **Definição 2**: Diremos que um vetor $\vec{v} \in V$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ se existirem escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n.$$

- **Exemplo 2**: A matriz $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$?

- **Solução**: Devemos obter $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Isso nos fornece o sistema

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a+2b+c=7 \\ a+3b+4c=7 \\ a+4b+5c=9 \end{cases}.$$

Escalonando o sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - 3L_2}]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{3} L_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 4L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Daí, temos $a=2$, $b=3$ e $c=-1$, logo $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. ■

- **Exemplo 3:** O vetor $\vec{v} = (2,-5,3)$ é combinação linear de $\vec{u}_1 = (1,-3,2)$, $\vec{u}_2 = (2,-4,-1)$ e $\vec{u}_3 = (1,-5,7)$?

- **Solução:** Precisamos obter $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(2,-5,3) = a(1,-3,2) + b(2,-4,-1) + c(1,-5,7).$$

Isso nos fornece o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + c = 2 \\ -3a - 4b - 5c = -5 \\ 2a - b + 7c = 3 \end{cases}.$$

Escalonando o sistema acima, vamos obter:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 5L_2]{L_1 \to L_1 - 2L_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}\right].$$

Vemos então que $P_C < P_A$, logo o sistema é impossível, ou seja, $\vec{v}$ não é combinação linear de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$. ∎

Denotamos o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ por $[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$. No exemplo 2, mostramos que $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \in \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right]$, e no exemplo 3 vimos que $\vec{v} \notin [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$.

- **Teorema 2:** Se $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$, então $[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$ é subespaço de V.

- **Demonstração:** É claro que $\vec{0} \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$, já que $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + \dots + 0\vec{u}_n$. Se $\vec{u}, \vec{v} \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$, então existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + \dots + a_n\vec{u}_n$ e $\vec{v} = b_1\vec{u}_1 + \dots + b_n\vec{u}_n$, portanto $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\vec{u}_1 + \dots + (a_n + b_n)\vec{u}_n \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$.

Por outro lado, se $\vec{u} \in [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\vec{u} = a_1\vec{u_1} + \dots + a_n\vec{u_n}$ com $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, logo $\lambda\vec{u} = (\lambda a_1)\vec{u_1} + \dots + (\lambda a_n)\vec{u_n}$, portanto $\lambda\vec{u} \in [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}]$. Daí, $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}]$ é subespaço de V. ■

* Dizemos que $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}]$ é o <u>subespaço gerado</u> por $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$. Quando temos $W = [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}]$ para algum subespaço W de V, dizemos que $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}\}$ é um <u>conjunto gerador</u> de W.

- <u>Exemplo 5:</u> Mostre que $[(1,1,1), (1,2,3), (1,5,8)] = \mathbb{R}^3$.

- <u>Solução:</u> Devemos mostrar que todo vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ e $(1,5,8)$, ou seja, temos que obter $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,2,3) + c(1,5,8)$. Temos o sistema

$$\begin{cases} a+b+c = x \\ a+2b+5c = y \\ a+3b+8c = z \end{cases}.$$

Escalonando-o, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\1&2&5&y\\1&3&8&z\end{array}\right]\xrightarrow[L_3\to L_3-L_1]{L_2\to L_2-L_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&1&4&-x+y\\0&2&7&-x+z\end{array}\right]\xrightarrow[L_3\to L_3-2L_2]{L_1\to L_1-L_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&2x-y\\0&1&4&-x+y\\0&0&-1&x-2y+z\end{array}\right]\to$$

$$\xrightarrow{L_3\to -L_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&2x-y\\0&1&4&-x+y\\0&0&1&-x+2y-z\end{array}\right]\xrightarrow[L_2\to L_2-4L_3]{L_1\to L_1+3L_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-x+5y-3z\\0&1&0&3x-7y+4z\\0&0&1&-x+2y-z\end{array}\right], \text{ logo}$$

$(x,y,z)=(-x+5y-3z)(1,1,1)+(3x-7y+4z)(1,2,3)+(-x+2y-z)(1,5,8)$, portanto $[(1,1,1),(1,2,3),(1,5,8)]=\mathbb{R}^3$. ■

- **Exemplo 6:** Determine um sistema linear homogêneo cujo conjunto solução seja $[(2,1,3,0),(-1,-1,0,1)]$.

- **Solução:** Se (x,y,z,t) é solução do sistema, então (x,y,z,t) é combinação linear de $(2,1,3,0)$ e $(-1,-1,0,1)$, ou seja, existem $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $(x,y,z,t)=a(2,1,3,0)+b(-1,-1,0,1)$. Obtemos o sistema (possível!)

$$\begin{cases}2a-b=x\\ a-b=y\\ 3a=z\\ b=t\end{cases}.$$

Na forma matricial, temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 3 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{3}L_3} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & z/3 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z/3 \\ 1 & -1 & y \\ 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z/3 \\ 0 & -1 & (3y-z)/3 \\ 0 & -1 & (3x-2z)/3 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z/3 \\ 0 & 1 & (-3y+z)/3 \\ 0 & -1 & (3x-2z)/3 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_2]{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z/3 \\ 0 & 1 & (-3y+z)/3 \\ 0 & 0 & (3x-3y-z)/3 \\ 0 & 0 & (3y-z+t)/3 \end{array}\right].$$

Como o sistema original é possível, devemos ter $P_C = P_A$, mas isso só ocorre se $\boxed{\begin{cases} 3x - 3y - z = 0 \\ 3y - z + t = 0 \end{cases}}$, que é um sistema homogêneo com o conjunto solução desejado. ■

Já havíamos visto que o conjunto solução de um sistema homogêneo com n incógnitas é subespaço de $\mathbb{R}^n$. O exemplo acima nos permite ver que todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ é solução de algum sistema homogêneo! Basta conhecer um conjunto gerador do subespaço e aplicar o procedimento acima.

- **Exemplo 7:** Seja $W=[(1,1),(-1,2),(2,5)]$. Como $(2,5)=3\cdot(1,1)+1\cdot(-1,2)$, é claro que todo vetor que é combinação linear de $(1,1),(-1,2)$ e $(2,5)$ também é de $(1,1)$ e $(-1,2)$, e vice-versa. Por exemplo, $(2,8)=$ $=1\cdot(1,1)+1\cdot(-1,2)+1\cdot(2,5)=4\cdot(1,1)+2\cdot(-1,2)$. Assim, $W=[(1,1),(-1,2)]$, ou seja, o vetor $(2,5)$ não é necessário para definir W. Ele é supérfluo pois é combinação linear dos demais.

- **Definição 3:** Dizemos que um conjunto $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ de um espaço vetorial V é linearmente independente quando nenhum de seus vetores é combinação linear dos demais. Caso contrário, dizemos que $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ é linearmente dependente.

* Em geral, abreviaremos os conceitos acima como LI e LD.