- Aula 17 - Operadores Autoadjuntos e Ortogonais:

Seja V um espaço vetorial com produto interno.

- **Definição:** Um operador $T: V \to V$ é autoadjunto se $\langle T(\vec{v}), \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, T(\vec{u}) \rangle$ $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V$.

Pela definição, precisaríamos provar que $\langle T(\vec{v}), \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, T(\vec{u}) \rangle$ para todos os vetores de V, mas vejamos que basta verificar que isso ocorre em uma base.

- **Teorema 1:** Seja $\alpha = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ uma base de V. Se $\langle T(\vec{v}_i), \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{v}_i, T(\vec{v}_j) \rangle$ $\forall i \neq j$, então T é autoadjunto.

- **Dem.:** Sejam $\vec{v}, \vec{u} \in V$. Podemos escrever $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_m \vec{v}_m$ e $\vec{u} = b_1 \vec{v}_1 + \dots + b_m \vec{v}_m$, logo $\langle T(\vec{v}), \vec{u} \rangle = \langle a_1 T(\vec{v}_1) + \dots + a_m T(\vec{v}_m), b_1 \vec{v}_1 + \dots + b_m \vec{v}_m \rangle$. Para simplificar, vamos supor que $m = 2$. Ficamos com $\langle T(\vec{v}), \vec{u} \rangle = \langle a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2), b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 \rangle = a_1 b_1 \langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_1 \rangle + a_1 b_2 \langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_2 \rangle + a_2 b_1 \langle T(\vec{v}_2), \vec{v}_1 \rangle + a_2 b_2 \langle T(\vec{v}_2), \vec{v}_2 \rangle$. Por outro lado, $\langle \vec{v}, T(\vec{u}) \rangle = \langle a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2, b_1 T(\vec{v}_1) + b_2 T(\vec{v}_2) \rangle = a_1 b_1 \langle \vec{v}_1, T(\vec{v}_1) \rangle + a_1 b_2 \langle \vec{v}_1, T(\vec{v}_2) \rangle + a_2 b_1 \langle \vec{v}_2, T(\vec{v}_1) \rangle + a_2 b_2 \langle \vec{v}_2, T(\vec{v}_2) \rangle$. Pela hipótese, segue que $\langle T(\vec{v}), \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, T(\vec{u}) \rangle$. $\blacksquare$

- **Exemplo:** Considere $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+z, x+y+z)$. Considerando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, mostre que T é autoadjunto.

- **Solução:** Considere a base canônica de $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Temos $T(1,0,0) = (1,2,1)$,

$T(0,1,0)=(2,0,1)$ e $T(0,0,1)=(1,1,1)$. Assim, $\langle T(1,0,0),(0,1,0)\rangle=\langle(1,2,1),(0,1,0)\rangle=2$, $\langle T(1,0,0),(0,0,1)\rangle=$ $=\langle(1,2,1),(0,0,1)\rangle=1$, $\langle T(0,1,0),(1,0,0)\rangle=\langle(2,0,1),(1,0,0)\rangle=2$, $\langle T(0,1,0),(0,0,1)\rangle=\langle(2,0,1),(0,0,1)\rangle=1$, $\langle T(0,0,1),(1,0,0)\rangle=\langle(1,1,1),(1,0,0)\rangle=1$ e $\langle T(0,0,1),(0,1,0)\rangle=\langle(1,1,1),(0,1,0)\rangle=1$. Logo, T é autoadjunto. ■

E se a base α for ortonormal? Nesse caso, a matriz de um operador autoadjunto possui uma forma especial. Lembramos que $[T]_\alpha^\alpha$ é a matriz cujas colunas são as coordenadas $[T(\vec{v}_1)]_\alpha, \dots, [T(\vec{v}_n)]_\alpha$. Como α é ortonormal, essas coordenadas podem ser calculadas usando os coeficientes de Fourier: $[T(\vec{v}_1)]_\alpha=\begin{bmatrix}\langle T(\vec{v}_1),\vec{v}_1\rangle\\ \vdots\\ \langle T(\vec{v}_1),\vec{v}_n\rangle\end{bmatrix}$, $[T(\vec{v}_2)]_\alpha=$ $=\begin{bmatrix}\langle T(\vec{v}_2),\vec{v}_1\rangle\\ \vdots\\ \langle T(\vec{v}_2),\vec{v}_n\rangle\end{bmatrix}$, etc. Novamente, suponha que $n=3$ para facilitar. Temos então que

$$\boxed{[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}\langle T(\vec{v}_1),\vec{v}_1\rangle & \langle T(\vec{v}_2),\vec{v}_1\rangle & \langle T(\vec{v}_3),\vec{v}_1\rangle\\ \langle T(\vec{v}_1),\vec{v}_2\rangle & \langle T(\vec{v}_2),\vec{v}_2\rangle & \langle T(\vec{v}_3),\vec{v}_2\rangle\\ \langle T(\vec{v}_1),\vec{v}_3\rangle & \langle T(\vec{v}_2),\vec{v}_3\rangle & \langle T(\vec{v}_3),\vec{v}_3\rangle\end{bmatrix}}$$

$[T]_\alpha^\alpha$ só tem essa forma se α for ortonormal!

Daí, se T for autoadjunto, os elementos simétricos com relação à diagonal principal de $[T]_\alpha^\alpha$ serão iguais, ou seja, $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica. Reciprocamente, se $[T]_\alpha^\alpha$ for simétrica, então a condição de autoadjunto vale em uma base, logo T é autoadjunto pelo Teorema 1. Enfatizamos que essas conclusões só foram possíveis pois α era uma base ortonormal. Assim, provamos o

Teorema 2: Um operador $T: V \to V$ é autoadjunto se, e somente se, sua matriz em uma (qualquer) base ortonormal for simétrica.

Exemplo: No Exemplo anterior, a base canônica é ortonormal e $[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ é simétrica.

Obs.: Note que uma matriz quadrada A é simétrica se e só se $A^T = A$.

Exemplo: Considere $V=\mathbb{R}^3$ com o produto interno $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa + xb + ya + 2yb + zc$. Determine se o operador $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (x+y+2z,\ x+y-z,\ 2x-y+3z)$ é auto-adjunto.

Solução: Temos $[T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}$, que é simétrica. No entanto, a base canônica não é ortonormal relativamente a esse produto interno: por exemplo, temos $\langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle = 1$. Assim, ainda não podemos concluir nada. Vejamos o que o Teorema 1 nos diz: temos $T(1,0,0)=(1,1,2)$, $T(0,1,0)=(1,1,-1)$ e $T(0,0,1)=(2,-1,3)$, portanto $\langle T(1,0,0),(0,1,0)\rangle = \langle (1,1,2),(0,1,0)\rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 = 3$ e $\langle (1,0,0),T(0,1,0)\rangle = \langle (1,0,0),(1,1,-1)\rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$. Dessa forma, $\langle T(1,0,0),(0,1,0)\rangle \neq \langle (1,0,0),T(0,1,0)\rangle$, logo T não é autoadjunto. ■

Exemplo: Considere $V=\mathbb{R}^3$ com o produto interno $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa + 2yb + 3zc$. Determine se o operador $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (2x+y+2z,\ x-2z,\ 2x-2y+4z)$ é auto-adjunto.

Solução: A base canônica é ortogonal nesse produto interno. Como $\|(1,0,0)\| = 1$, $\|(0,1,0)\| = \sqrt{2}$ e $\|(0,0,1)\| = \sqrt{3}$, então $\alpha = \left\{(1,0,0), \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ é ortonormal. Como $T(1,0,0) = (2,1,4) = 2\cdot(1,0,0) + \sqrt{2}\cdot\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) + 4\sqrt{3}\cdot\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $T\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0) + 0\cdot\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $T\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}(1,0,0) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) + 4\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, temos que $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix}2 & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2}/\sqrt{3}\\ 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3}/\sqrt{2} & 4\end{bmatrix}$ não é simétrica em uma base ortonormal, logo T não é autoadjunto. ■

A grande importância dos operadores autoadjuntos é que eles sempre possuem uma base ortonormal de autovetores. Em particular, todo operador autoadjunto é diagonalizável. Usaremos em breve este fato para classificar as quádricas, e o demonstramos a seguir no caso $\dim V = 2$. Antes disso, provemos o:

- **Teorema 3:** Se $T: V \to V$ é autoadjunto e $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ são autovetores associados a autovalores distintos λ_1 e λ_2, respectivamente, então $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

- **Dem.:** Como T é autoadjunto, temos $\langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, T(\vec{v}_2) \rangle$, mas $\langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_2 \rangle =$ $= \langle \lambda_1 \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ e $\langle \vec{v}_1, T(\vec{v}_2) \rangle = \langle \vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Daí, $\lambda_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle =$ $= \lambda_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluímos que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$. ∎

- **Teorema Espectral:** Todo operador $T: V \to V$ autoadjunto possui uma base ortonormal de autovetores.

- **Dem.:** ($\dim V = 2$) Seja $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ uma base ortonormal de V. Pelo Teorema 2, a matriz de T nessa base é simétrica. Suponha então que $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Daí, o polinômio característico de T é $p(x) = \det [T - xI]_\alpha^\alpha = \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = (a-x)(c-x) - b^2$, portanto $p(x) = x^2 - (a+c)x + (ac - b^2)$. Temos $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = a^2 - 2ac + c^2 +$ $+ 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Isso garante que T tem pelo menos um autovalor.

Se $\Delta = 0$, então $a = c$ e $b = 0$, logo $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a \cdot I$, logo todo vetor não-nulo é autovetor de T, com autovalor $\lambda = a$. Com efeito, $[T(\vec{v})]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha =$ $= a \cdot I \cdot [\vec{v}]_\alpha = a [\vec{v}]_\alpha \Rightarrow T(\vec{v}) = a\vec{v}$. Daí, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ seria uma base ortonormal de autovetores.

Se $\Delta > 0$, então o polinômio característico possui duas raízes reais distintas, logo T possui dois autovalores distintos. Como $\dim V = 2$, segue que T é diagonalizável, logo existe uma base de autovetores, que é ortogonal pelo Teorema 3. Normalizando essa base, obtemos uma base ortonormal de autovetores. ■

Estudaremos novamente operadores autoadjuntos em breve. Agora voltaremos nossa atenção a outro tipo importante de operador linear.

- Definição: Um operador $T: V \to V$ é ortogonal se $\langle T(\vec{v}), T(\vec{u}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \ \forall \vec{v}, \vec{u} \in V$.

Como no caso autoadjunto, também basta verificar em uma base.

- Teorema 4: Seja $\alpha = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ uma base de V. Se $\langle T(\vec{v}_i), T(\vec{v}_j) \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \ \forall i, j$, então T é ortogonal.

- Dem.: Dados $\vec{v}, \vec{u} \in V$, podemos escrever $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n$ e $\vec{u} = b_1 \vec{v}_1 + \dots + b_n \vec{v}_n$. Supondo $n = 2$ para simplificar, temos $\langle T(\vec{v}), T(\vec{u}) \rangle = \langle a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2), b_1 T(\vec{v}_1) + b_2 T(\vec{v}_2) \rangle$ $= a_1 b_1 \langle T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_1) \rangle + a_1 b_2 \langle T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2) \rangle + a_2 b_1 \langle T(\vec{v}_2), T(\vec{v}_1) \rangle + a_2 b_2 \langle T(\vec{v}_2), T(\vec{v}_2) \rangle$. Por outro lado, $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2, b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 \rangle = a_1 b_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + a_1 b_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle + a_2 b_1 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle +$ $+ a_2 b_2 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle$, logo por hipótese concluímos que $\langle T(\vec{v}), T(\vec{u}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$. ■

- Exemplo: Se $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, mostre que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (z, y, x)$ é um operador ortogonal.

- **Solução**: Considere a base canônica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Temos $T(1,0,0)=(0,0,1)$, $T(0,1,0)=(0,1,0)$ e $T(0,0,1)=(1,0,0)$, logo $\langle T(1,0,0),T(1,0,0)\rangle = 1 = \langle(1,0,0),(1,0,0)\rangle$, $\langle T(1,0,0),T(0,1,0)\rangle = 0 = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$, $\langle T(1,0,0),T(0,0,1)\rangle = 0 = \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$, $\langle T(0,1,0),T(0,1,0)\rangle = 1 = \langle(0,1,0),(0,1,0)\rangle$, $\langle T(0,1,0),T(0,0,1)\rangle = 0 = \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$ e $\langle T(0,0,1),T(0,0,1)\rangle = 1 = \langle(1,0,0),(1,0,0)\rangle$, logo T é operador ortogonal. $\blacksquare$