- Aula 3 - Determinantes e Matriz Inversa:

- **Exemplo 1**: Determine k para que o sistema $\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases}$ admita solução.

- **Solução**: Para que o sistema tenha solução devemos ter $P_C = P_A$.

Assim, $\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1+L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3-2L_1]{L_2 \to L_2-5L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & k-4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3-L_2]{L_1 \to L_1+L_2}$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & k+6 \end{array}\right]$. Assim, $P_C = 2$, e para que também tenhamos $P_A = 2$, devemos ter $k+6=0$, ou seja, $\boxed{k=-6}$. ■

- **Exemplo 2**: A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & a & 1 \\ -2 & 5 & -1 & b \end{bmatrix}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, representa a matriz ampliada de um sistema linear. Determine os valores de a e b para que o sistema não possua solução.

- **Solução**: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & a & 1 \\ -2 & 5 & -1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3+2L_1]{L_2 \to L_2-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & b-2 \\ 0 & -1 & a-2 & 2 \end{array}\right] \to$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{L_1 \to L_1 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 2b-5 \\ 0 & 1 & 3 & b-2 \\ 0 & 0 & a+1 & b \end{array}\right].$$

Se $a \neq -1$, então $P_C = P_A = 3 = n$ e o sistema tem solução única.
Se $a = -1$, então $P_C = 2$. Para que não exista solução devemos ter $P_A = 3$, logo $b \neq 0$. **Resposta**: $a = -1$ e $b \neq 0$ ∎

- **Determinantes**: Durante a disciplina de Geometria Analítica já estudamos o conceito de determinante de uma matriz quadrada de ordem n.

- $\boxed{n=2}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$
- $\boxed{n=3}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ é calculado

por meio da Regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \multicolumn{5}{c}{- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +} \end{array}$$

Para o caso geral, usaremos a Regra de Laplace, que apresentamos a seguir. Ainda no caso $n=3$, note que podemos escrever

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Observe que cada um dos determinantes menores que aparecem acima são obtidos eliminando uma linha e uma coluna da matriz original: exatamente a linha e a coluna do elemento a_{ij} que multiplica esse determinante!

Devemos ficar atentos ao sinal de cada parcela, que alterna: é positivo quando a soma da linha com a coluna eliminadas for par e negativo quando for ímpar. Em outras palavras, se eliminamos a linha i e a coluna j, então o sinal da parcela é o mesmo de $(-1)^{i+j}$.

Nos cálculos da página anterior, escolhemos os elementos da primeira linha para colocar em evidência, mas poderíamos ter escolhido qualquer linha ou qualquer coluna.

Denotaremos por Δ_{ij} o determinante da matriz obtida de A eliminando a linha i e a coluna j, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Chamaremos esse número de um cofator de A.

Temos então a

- **Regra de Laplace:** Para calcular o determinante de uma matriz A $n \times n$:

(I) Escolha uma fila (linha ou coluna) de A;

(II) Multiplique cada elemento dessa fila pelo cofator correspondente;

(III) Some os resultados obtidos na etapa anterior.

Vejamos alguns exemplos:

- Exemplo 3: Calcule det A, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

- Solução: Para facilitar, escolhemos uma fila com o maior número de zeros, como a segunda linha. Pela Regra de Laplace, temos

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}_{-3} + 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{18} = -6 + 18 = \boxed{12}.$$

■

Podemos usar as seguintes propriedades de determinantes para facilitar as contas:

① Se uma matriz tem uma fila nula, então seu determinante vale 0;

② $\det A = \det A^T$;

③ Ao permutarmos duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz, o determinante muda de sinal;

4. Se uma matriz tem duas linhas (ou colunas) iguais, então o seu determinante vale 0;

5. Ao multiplicarmos uma fila por uma constante, o determinante também é multiplicado pela constante;

6. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

7. Se a uma linha (ou coluna) somarmos um múltiplo de outra linha (ou coluna), o determinante não se altera;

8. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

- Exemplo 4: Calcule $\det A$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Solução: Vamos usar a Regra de Laplace na quarta coluna, mas antes vamos colocar mais um zero nela fazendo $L_1 \to L_1 - 2L_4$.

Pela propriedade 7 o determinante não muda, logo teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 2 & -3 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (C_2 \to C_2 - 2C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(3-4) = \boxed{1}.$$

- Exemplo 5: Calcule $\det A$, onde $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Solução: Começamos fazendo $C_1 \to C_1 + 3C_2$ e usamos a Regra de Laplace na segunda linha:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ \boxed{0 \quad -1 \quad 0 \quad 0} \\ 11 & 3 & 1 & 0 \\ 21 & 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 11 & 1 & 0 \\ 21 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 11 & 1 & 0 \\ 21 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(L_1 \to L_1 + 2L_3) = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 43 & 4 & \boxed{0} \\ 11 & 1 & \boxed{0} \\ 21 & 1 & \boxed{1} \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 43 & 4 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = -(43-44) = \boxed{1}.$$

■

- Definição: Dizemos que uma matriz A $n\times n$ é inversível quando existe uma matriz B $n\times n$ tal que $A\cdot B = B\cdot A = I$. Dizemos que B é a inversa de A e escrevemos $B = A^{-1}$.

Pela propriedade 8, se A é inversível, então como $\det I = 1$, temos $1 = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$. Em particular, $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. É possível demonstrar que a recíproca também é verdadeira, fornecendo o

- **Teorema:** Uma matriz quadrada A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

- **Exemplo 6:** Determine qual a condição sobre λ para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja inversível.

- **Solução:** Comecemos fazendo $L_1 \to L_1 - L_4$. Vamos usar a Regra de Laplace na primeira coluna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ \lambda \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ \lambda \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -(1-\lambda) = \lambda - 1$. Assim, A é inversível $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda \neq 1}$. ■

Agora vejamos como calcular a inversa:

- Exemplo 7: Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Solução: Como $\det A = 3 \neq 0$, A é realmente inversível. Devemos obter $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que $A \cdot B = I$. Daí,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+2z & y+2w \\ -x+z & -y+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos os sistemas $\begin{cases} x+2z=1 \\ -x+z=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y+2w=0 \\ -y+w=1 \end{cases}$. Note que os dois sistemas possuem matrizes dos coeficientes iguais. Vamos resolvê-los simultaneamente:

1º sistema   2º sistema

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2+L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1-2L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right].$$

Analisando cada sistema separadamente, temos $x=1/3$, $z=1/3$, $y=-2/3$ e $w=1/3$, ou seja, $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, que é justamente a matriz que aparece do lado direito no final do escalonamento!

* INVERTER UMA MATRIZ POR ESCALONAMENTO:

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{escalone}} [I \mid A^{-1}]$$