- Aula 4 - Espaços Vetoriais:

Começamos com alguns exercícios sobre matrizes inversas:

- **Exemplo 1:** Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1}, se existir.

- **Solução:** Conforme vimos no final da aula passada, basta escalonar

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 9 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 9 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -21 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 9 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -21 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_2]{L_1 \to L_1 + L_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 19/2 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -45/2 & 5 & -3/2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \left(-\frac{2}{45}\right)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 19/2 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10/45 & 3/45 & 4/45 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_3]{L_1 \to L_1 - \frac{19}{2}L_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/45 & -6/45 & 7/45 \\ 0 & 1 & 0 & 5/45 & 21/45 & -2/45 \\ 0 & 0 & 1 & -10/45 & 3/45 & 4/45 \end{array}\right].$$

Daí, $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{45} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{bmatrix}}$

■

* Vimos na última aula que as únicas operações elementares que

modificam o determinante são permutar linhas (det A troca de sinal) e multiplicar uma linha por uma constante não-nula (det A fica multiplicado pela constante). Como a matriz identidade tem determinante igual a 1, poderíamos percorrer o escalonamento no sentido inverso e mostrar que det $A = 45$.

- Exemplo 2: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1}, se existir.

- Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to -L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right].$$ Assim, $\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}$.

■

* Mostre, percorrendo o escalonamento no sentido inverso, que det $A = 1$.

* Se A não fosse inversível, não chegaríamos à identidade do lado esquerdo!

- **Exemplo 3:** Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1}, se existir.

- **Solução:** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$

$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$. Não é possível chegar à matriz identidade no lado esquerdo, logo A não é inversível. ■

- **Espaços Vetoriais:**

Seja V um conjunto, no qual definimos duas operações: uma soma e uma multiplicação por escalar (que, em geral, é um número real). Diremos que V é um espaço vetorial se satisfizer as propriedades:

(I) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$;

(II) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$;

(III) Existe $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$;

(IV) Para todo $\vec{u} \in V$ existe $-\vec{u} \in V$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$;

(V) $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}\ \forall \vec{u}\in V,\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

(VI) $1\cdot\vec{u}=\vec{u}\ \ \forall\vec{u}\in V$;

(VII) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}\ \ \forall u,v\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$;

(VIII) $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}\ \ \forall u\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Quando V é um espaço vetorial, chamamos seus elementos de vetores. O elemento 0 da propriedade (III) é chamado de vetor nulo de V.

- Exemplo 4: São espaços vetoriais:

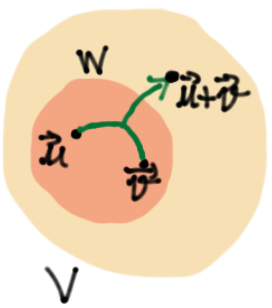
(a) O plano $\mathbb{R}^2$ e o espaço $\mathbb{R}^3$, com suas operações usuais. Em geral, o conjunto $\mathbb{R}^n$, das sequências de n números reais $(x_1,\dots,x_n)$, é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar usuais.

(b) O conjunto P_n, dos polinômios com coeficientes reais e grau no máximo n, com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais.

(c) O conjunto $M_{m\times n}$, das matrizes $m\times n$, com a soma e a multiplicação por escalar usuais.

- **Subespaços:** Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ um subconjunto não-vazio. Como vimos, podemos somar vetores de V e multiplicar vetores de V por escalares, e essas operações satisfazem as oito propriedades de espaço vetorial. Como $W \subset V$, é claro que também podemos fazer isso com vetores de W (dizemos que W herda as operações de V).

Quando W é, por si só, um espaço vetorial com as operações herdadas de V, dizemos que W é um subespaço de V. Note que como a soma de vetores está definida em V, ao somarmos vetores de W vamos obter um vetor de V, que pode não estar em W (figura ao lado). Mas como W também é um espaço vetorial, podemos estudá-lo sem recorrer ao espaço maior V, portanto a soma de vetores de W deve sempre ser um vetor de W! O mesmo vale para a multiplicação por escalar. Assim, temos o:



- **Teorema**: Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ não-vazio. Então W é subespaço de V se, e somente se, satisfaz as propriedades:

(a) se $\vec{u} \in W$ e $\vec{v} \in W$, então $\vec{u} + \vec{v} \in W$;

(b) se $\vec{u} \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha \vec{u} \in W$.

* As propriedades acima costumam ser ditas como "W é fechado para soma e para multiplicação por escalar".

* Como $W \neq \emptyset$, existe $u \in W$. Pela propriedade (b), $0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \in W$. Assim, se W é subespaço de V, então $\vec{0} \in W$. Essa propriedade costuma ser usada para provar que W não é subespaço: basta ver que $\vec{0} \notin W$.

- **Exemplo 5**: Todo espaço vetorial V contém dois subespaços triviais: $\{\vec{0}\}$ e o próprio V.

Exemplo 6: O conjunto solução S de uma equação linear homogênea

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$$

$(0,\ldots,0)$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Com efeito, $S\neq\emptyset$ pois $0\in S$.

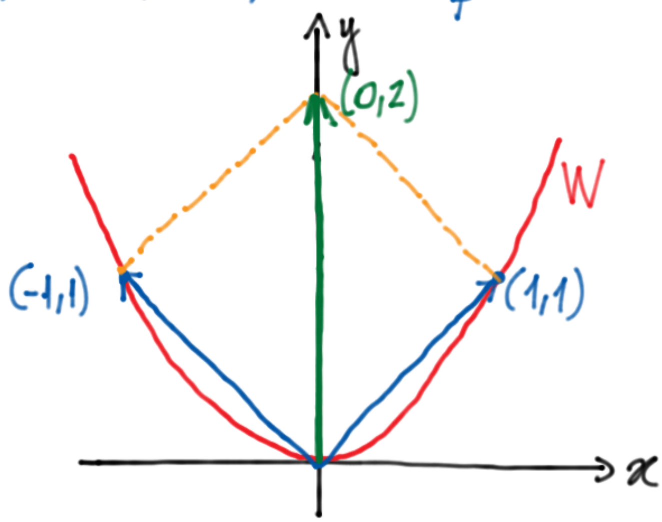
Se $(x_1,\ldots,x_n)\in S$ e $(y_1,\ldots,y_n)\in S$, então a soma $(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\in S$:

$a_1(x_1+y_1)+\ldots+a_n(x_n+y_n)=(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)+(a_1y_1+\ldots+a_ny_n)=0+0=0$, já que $(x_1,\ldots,x_n)$ e $(y_1,\ldots,y_n)$ são soluções. Além disso, se $(x_1,\ldots,x_n)\in S$ (é solução) e $\alpha\in\mathbb{R}$, então $(\alpha x_1+\ldots+\alpha x_n)\in S$, pois $a_1(\alpha x_1)+\ldots+a_n(\alpha x_n)=$
$=\alpha(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)=\alpha\cdot 0=0$, como queríamos. ∎

Exemplo 7: Considere $V=M_{2\times 2}$ e $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}: a,b,c,d\in\mathbb{R},\ b=c+1\right\}$.

Note que $\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\notin W$. Se isso fosse verdade, teríamos $a=b=c=d=0$ e $0=b=c+1=1$, um absurdo. Logo W não é subespaço de $M_{2\times 2}$!

Cuidado! A recíproca não é verdadeira! Podemos ter $\vec{0}\in W$ sem que W seja subespaço. Considere por exemplo $V=\mathbb{R}^2$ e $W=\{(x,y): y=x^2\}$. Então $\vec{0}=(0,0)\in W$, mas como $(-1,1)\in W$, $(1,1)\in W$ e a soma $(-1,1)+(1,1)=(0,2)\notin W$, vemos que W não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.



- **Exemplo 8:** Mostre que $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

- **Solução:** É claro que $\vec{0}=(0,0,0,0)\in W$. Se $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)\in W$, então $x_1+y_1=0$, $z_1-t_1=0$, $x_2+y_2=0$ e $z_2-t_2=0$. Daí, temos $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2)\in W$, pois $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=0$ e $(z_1+z_2)-(t_1+t_2)=(z_1-t_1)+(z_2-t_2)=0$. Se $\alpha\in\mathbb{R}$, então $(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1,\alpha t_1)\in W$, pois $\alpha x_1+\alpha y_1=\alpha(x_1+y_1)=0$ e $\alpha z_1-\alpha t_1=\alpha(z_1-t_1)=0$. Logo, W é subespaço. ∎

Em geral, o conjunto solução de um sistema homogêneo de m equações e n incógnitas é subespaço de $\mathbb{R}^n$. Isso decorre do:

- **Teorema:** Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então a interseção $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V.

- **Dem.:** Como W_1 e W_2 são subespaços, temos $\vec{0} \in W_1$ e $\vec{0} \in W_2$, logo $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$. Se $\vec{u}, \vec{v} \in W_1 \cap W_2$, então $\vec{u}, \vec{v} \in W_1$ e $\vec{u}, \vec{v} \in W_2$, portanto $\vec{u} + \vec{v} \in W_1$ e $\vec{u} + \vec{v} \in W_2$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} \in W_1 \cap W_2$. Finalmente, se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha\vec{u} \in W_1$ e $\alpha\vec{u} \in W_2$, logo $\alpha\vec{u} \in W_1 \cap W_2$. Assim, $W_1 \cap W_2$ é subespaço. ■

* Consequentemente, se $W_1, \ldots, W_m$ são subespaços de V, então $W_1 \cap \ldots \cap W_m$ é subespaço de V!

* Considere um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas, e seja S_i o conjunto solução da i-ésima equação.

Vimos no exemplo 6 que S_i é subespaço de $\mathbb{R}^n$. O conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap \ldots \cap S_m$, que também é subespaço de $\mathbb{R}^n$ pelo que acabamos de ver. ∎

- **Exemplo 9:** O conjunto $W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} : \det A = 0 \right\}$ é subespaço de $M_{2\times 2}$?

- **Sol.:** Considere $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Temos $\det A_1 = \det A_2 = 0$, mas $A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é tal que $\det(A_1 + A_2) = 1$, logo $A_1 \in W$, $A_2 \in W$ e $A_1 + A_2 \notin W$, mostrando que W não é subespaço. ∎

- **Exemplo 10:** $W = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_0 + a_2 = 1 \text{ e } a_1 - a_3 = 0 \}$ é subespaço de P_3?

- **Solução:** Temos $p_1(x) = x + x^2 + x^3 \in W$, $p_2(x) = 1 + x + x^3 \in W$, mas $p_1(x) + p_2(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 \notin W$ (pois $a_0 + a_2 = 2$) $\Rightarrow W$ não é subespaço. ∎