Aula 15 - Ortogonalidade:

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Vimos na última aula que $\vec{u}, \vec{v} \in V$ são ortogonais $\Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Vamos nos aprofundar mais neste conceito. Diremos que $S = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é um conjunto ortogonal se seus vetores forem dois a dois ortogonais, isto é, $\langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = 0$ se $i \neq j$.

Teorema: Todo conjunto ortogonal $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ de vetores não-nulos é LI.

Dem.: Considere a combinação linear nula $a_1\vec{v_1} + \dots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$. Mostremos que $a_1 = 0$ tomando o produto interno de ambos os lados com $\vec{v_1}$: $\langle a_1\vec{v_1} + \dots + a_n\vec{v_n}, \vec{v_1} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v_1} \rangle = 0$, logo $a_1\langle \vec{v_1}, \vec{v_1} \rangle + a_2\langle \vec{v_2}, \vec{v_1} \rangle + \dots + a_n\langle \vec{v_n}, \vec{v_1} \rangle = 0$. Como $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é ortogonal, segue que $\langle \vec{v_2}, \vec{v_1} \rangle = \dots = \langle \vec{v_n}, \vec{v_1} \rangle = 0$, portanto resta apenas $a_1\langle \vec{v_1}, \vec{v_1} \rangle = 0$. Como $\vec{v_1} \neq \vec{0}$, temos que $\langle \vec{v_1}, \vec{v_1} \rangle > 0$, logo $a_1 = 0$. Analogamente, mostramos que $a_i = 0$ tomando o produto interno com $\vec{v_i}$. Assim, $a_1 = \dots = a_n = 0$ e $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é LI. ■

Dessa forma, se $\dim V = n$ e $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é um conjunto ortogonal com n vetores, então $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é base de V que chamaremos de uma base ortogonal. Quando todos os vetores de uma base ortogonal têm normas iguais a 1, dizemos que é uma base ortonormal. Bases ortonormais são as mais importantes em espaços com produto interno.

Suponha que $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é uma base ortonormal de V. Dado $\vec{v} \in V$, podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores da base. Se $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + \dots + a_n\vec{v_n}$, vamos calcular os coeficientes como na demonstração do Teorema anterior. Para calcular a_1 tomamos o produto interno com $\vec{v}_1$: $a_1\langle \vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle + a_2\langle \vec{v}_2,\vec{v}_1\rangle+\dots+a_n\langle \vec{v}_n,\vec{v}_1\rangle = \langle \vec{v},\vec{v}_1\rangle$. Como a base é ortonormal, segue que $\langle \vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle = 1$ e $\langle \vec{v}_2,\vec{v}_1\rangle=\dots=\langle \vec{v}_n,\vec{v}_1\rangle=0$, logo resta apenas $a_1=\langle \vec{v},\vec{v}_1\rangle$. Analogamente, $a_2=\langle \vec{v},\vec{v}_2\rangle,\dots,a_n=\langle \vec{v},\vec{v}_n\rangle$, logo $\boxed{\vec{v}=\langle \vec{v},\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1+\dots+\langle \vec{v},\vec{v}_n\rangle\vec{v}_n}$.

Os coeficientes, escritos na forma acima, são chamados de coeficientes de Fourier de $\vec{v}$ na base ortonormal $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$. Isso nos mostra a primeira utilidade das bases ortonormais: nelas escrever combinações lineares é muito mais simples. Note que se $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ fosse apenas base ortogonal, então os coeficientes de Fourier seriam $a_1=\dfrac{\langle \vec{v},\vec{v}_1\rangle}{\langle \vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle},\dots,a_n=\dfrac{\langle \vec{v},\vec{v}_n\rangle}{\langle \vec{v}_n,\vec{v}_n\rangle}$.

-Exemplo: Considere $V=\mathbb{R}^3$, com o produto interno canônico. Calcule as coordenadas de $\vec{v}=(1,2,5)$ na base $\beta=\{(1,1,-1),(2,-1,1),(0,1,1)\}$.

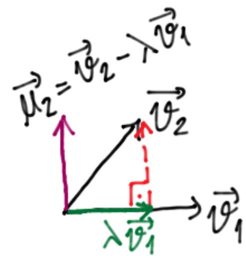
-Solução: Como $\langle(1,1,-1),(2,-1,1)\rangle=0$, $\langle(1,1,-1),(0,1,1)\rangle=0$ e $\langle(2,-1,1),(0,1,1)\rangle=0$, vemos que β é base ortogonal, logo se $(1,2,5)=a(1,1,-1)+b(2,-1,1)+c(0,1,1)$, temos $a=\dfrac{\langle(1,2,5),(1,1,-1)\rangle}{\langle(1,1,-1),(1,1,-1)\rangle}=\boxed{\dfrac{-2}{3}}$, $b=\dfrac{\langle(1,2,5),(2,-1,1)\rangle}{\langle(2,-1,1),(2,-1,1)\rangle}=\boxed{\dfrac{5}{6}}$ e $c=\dfrac{\langle(1,2,5),(0,1,1)\rangle}{\langle(0,1,1),(0,1,1)\rangle}=\boxed{\dfrac{7}{2}}$. ■

Outra aplicação de bases ortonormais é a seguinte. Suponha que $\alpha=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ é base ortonormal de V e que $\vec{v},\vec{u}\in V$. Para simplificar, vamos supor que $n=3$, e suponha que $[\vec{v}]_\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ e $[\vec{u}]_\alpha=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$. Então $\langle\vec{v},\vec{u}\rangle=\langle a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3, b_1\vec{v}_1+b_2\vec{v}_2+b_3\vec{v}_3\rangle = a_1b_1\cancelto{1}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}+a_1b_2\cancelto{0}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle}+a_1b_3\cancelto{0}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_3\rangle}+a_2b_1\cancelto{0}{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_1\rangle}+a_2b_2\cancelto{1}{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_2\rangle}+a_2b_3\cancelto{0}{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle}+a_3b_1\cancelto{0}{\langle\vec{v}_3,\vec{v}_1\rangle}+a_3b_2\cancelto{0}{\langle\vec{v}_3,\vec{v}_2\rangle}+a_3b_3\cancelto{1}{\langle\vec{v}_3,\vec{v}_3\rangle}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Em outras palavras, se $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ é base ortonormal, então nas coordenadas relativas a essa base o produto interno fica muito mais simples: basta multiplicar as coordenadas (relativamente a essa base) e somar os resultados, como se fosse o produto interno canônico!

Isso mostra que, mesmo que o produto interno seja complicado, se conhecermos uma base ortonormal ele se simplificará. Assim, precisamos saber como obter bases ortonormais, que é o que faremos a seguir.

- Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt:



Sejam $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ dois vetores LI. Para projetar $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$ vamos calcular $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $(\lambda\vec{v}_1)\perp(\vec{v}_2-\lambda\vec{v}_1)$. Assim, temos $\langle\lambda\vec{v}_1,\vec{v}_2-\lambda\vec{v}_1\rangle = 0 \Rightarrow \lambda\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle-\lambda^2\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle=0$, logo supondo $\lambda\neq 0$ (nesse caso $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ já seriam ortogonais) temos $\lambda=\dfrac{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}$ e $\vec{u}_2=\vec{v}_2-\dfrac{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}\cdot\vec{v}_1$ é ortogonal a $\vec{v}_1$.

Assim, começamos com $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ LI e obtivemos $\{\vec{v}_1,\vec{u}_2\}$ ortogonal (e portanto LI). Como $\vec{u}_2$ é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos $[\vec{v}_1,\vec{v}_2]=[\vec{v}_1,\vec{u}_2]$, ou seja, ortogonalizamos $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ sem alterar o subespaço gerado por eles. Essa é a ideia do Processo de Gram-Schmidt: ortogonalizar subtraindo projeções.

Considere agora $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Como vimos, $\vec{u}_2=\vec{v}_2-\dfrac{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}\cdot\vec{v}_1$ é ortogonal a $\vec{v}_1$. Trocando $\vec{v}_2$ por $\vec{u}_2$, ficamos com $\{\vec{v}_1,\vec{u}_2,\vec{v}_3\}$ com $\vec{v}_1\perp\vec{u}_2$. Da mesma forma, $\vec{w}_3=\vec{v}_3-\dfrac{\langle\vec{v}_3,\vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}\vec{v}_1$ é ortogonal a $\vec{v}_1$, logo $\{\vec{v}_1,\vec{u}_2,\vec{w}_3\}$ é tal que $\vec{v}_1\perp\vec{u}_2$ e $\vec{v}_1\perp\vec{w}_3$. Falta apenas ortogonalizar $\vec{u}_2$ e $\vec{w}_3$, mas para isso basta fazer $\vec{u}_3=\vec{w}_3-\dfrac{\langle\vec{w}_3,\vec{u}_2\rangle}{\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle}\cdot\vec{u}_2$. Note que, como $\vec{u}_2$ e $\vec{w}_3$ são ortogonais a $\vec{v}_1$, então $\vec{u}_3$ também é, logo $\{\vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Por outro lado, note que $\langle \vec{w}_3, \vec{u}_2 \rangle = \left\langle \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \vec{v}_1 , \vec{u}_2 \right\rangle = \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \cdot \cancelto{0}{\langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle}$ $= \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle$. Com isso, podemos escrever $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \cdot \vec{v}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle} \cdot \vec{u}_2$.

Resumindo, se $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ é base de V, então $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ é base ortogonal de V, onde

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 \ ; \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \cdot \vec{u}_1 \ ; \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle} \cdot \vec{u}_2 \ ; \\
\vec{u}_4 &= \vec{v}_4 - \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle} \cdot \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{u}_3 \rangle}{\langle \vec{u}_3, \vec{u}_3 \rangle} \cdot \vec{u}_3 \ ; \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}}$$

Daí, para obter uma base ortonormal basta dividir cada vetor de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ por sua norma, o que chamamos normalizar a base.

Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$, com produto interno usual, use o Processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal a partir da base $\{(1,1,0), (1,2,0), (2,-1,1)\}$.

Solução: Ponha $\vec{u}_1 = (1,1,0)$. Temos $\vec{u}_2 = (1,2,0) - \frac{\langle (1,2,0), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} \cdot (1,1,0) = (1,2,0) - \frac{3}{2}(1,1,0) =$ $= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, mas vamos usar $\vec{u}_2{}' = (-1,1,0)$ pois este vetor ainda é ortogonal a $\vec{u}_1$ (sempre que possível, simplifique!), e $\vec{u}_3 = (2,-1,1) - \frac{\langle (2,-1,1), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} \cdot (1,1,0) - \frac{\langle (2,-1,1), (-1,1,0) \rangle}{\langle (-1,1,0), (-1,1,0) \rangle} \cdot (-1,1,0)$ $= (2,-1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{(-3)}{2}(-1,1,0) = (0,0,1)$. Assim, obtemos a base ortogonal $\{(1,1,0), (-1,1,0), (0,0,1)\}$, logo uma base ortonormal é $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1)\right\}$. ■

- **Exemplo:** Consideremos novamente $V=\mathbb{R}^3$ e $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa+xc+za+yb-yc-zb+3zc$. Obtenha uma base ortogonal e use-a para calcular $\langle (1,1,1),(1,-1,3)\rangle$.

- **Solução:** Vamos aplicar o Processo de Gram-Schmidt na base canônica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Seja $\vec{u}_1=(1,0,0)$. Então $\vec{u}_2=(0,1,0)-\frac{\langle (0,1,0),(1,0,0)\rangle}{\langle (1,0,0),(1,0,0)\rangle}(1,0,0)=(0,1,0)-\frac{0}{1}(1,0,0)=(0,1,0)$, e $\vec{u}_3=(0,0,1)-\frac{\langle (0,0,1),(1,0,0)\rangle}{\langle (1,0,0),(1,0,0)\rangle}\cdot(1,0,0)-\frac{\langle (0,0,1),(0,1,0)\rangle}{\langle (0,1,0),(0,1,0)\rangle}\cdot(0,1,0)=(0,0,1)-\frac{1}{1}(1,0,0)-\frac{(-1)}{1}(0,1,0)=(-1,1,1)$, portanto $\alpha=\{(1,0,0),(0,1,0),(-1,1,1)\}$ é uma base ortogonal nesse produto interno.

Pelos cálculos acima, vemos que $\|(1,0,0)\|=\|(0,1,0)\|=1$. Além disso, $\langle (-1,1,1),(-1,1,1)\rangle = 1-1-1+1-1-1+3=1$, logo $\|(-1,1,1)\|=1$ e α é, na verdade, ortonormal!

Para calcular $\langle (1,1,1),(1,-1,3)\rangle$, precisamos calcular $[(1,1,1)]_\alpha$ e $[(1,-1,3)]_\alpha$, mas para isso podemos usar os coeficientes de Fourier. Nesse caso, especificamente, é mais simples fazer o cálculo direto: é fácil ver que $(1,1,1)=2\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)+1\cdot(-1,1,1)$ e que $(1,-1,3)=4\cdot(1,0,0)+(-4)(0,1,0)+3(-1,1,1)$, portanto $\langle (1,1,1),(1,-1,3)\rangle = 2\cdot 4+0\cdot(-4)+1\cdot 3=\boxed{11}$. ■

- **Exemplo:** Obtenha uma base ortogonal para P_2 com $\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

- **Solução:** Começamos com a base canônica $\{1,x,x^2\}$ de P_2. Seja $\vec{u}_1=1$. Então $\vec{u}_2=x-\frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1$. Como $\langle x,1\rangle=\int_0^1 x\cdot 1\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$ e $\langle 1,1\rangle=\int_0^1 1\cdot 1\,dx=x\Big|_0^1=1$, temos $\boxed{\vec{u}_2=x-\frac{1}{2}}$. Da mesma forma, $\vec{u}_3=x^2-\frac{\langle x^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1-\frac{\langle x^2,x-1/2\rangle}{\langle x-1/2,x-1/2\rangle}$, mas $\langle x^2,1\rangle=\int_0^1 x^2\cdot 1\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$, $\langle x^2,x-1/2\rangle = =\int_0^1 x^2(x-1/2)\,dx=\int_0^1(x^3-x^2/2)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3-2}{12}=\frac{1}{12}$ e $\langle x-1/2,x-1/2\rangle=\int_0^1(x-1/2)^2dx= =\int_0^1(x^2-x+1/4)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4-6+3}{12}=\frac{1}{12}$, vemos que $\vec{u}_2=x^2-\frac{1}{3}\cdot 1-\frac{1/12}{1/12}(x-1/2)= =x^2-\frac{1}{3}-x+\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\vec{u}_2=\frac{1}{6}-x+x^2}$, logo $\boxed{\{1,x-1/2,1/6-x+x^2\}}$ é uma base ortogonal. ■

* Decorre do Processo de Gram-Schmidt que todo espaço com produto interno tem base ortonormal.

- **Exemplo:** Considere em $V=\mathbb{R}^2$ com um produto interno (não-usual) no qual a base $\{(1,1),(1,0)\}$ é ortonormal. Calcule $\langle(3,5),(-1,4)\rangle$.

- **Solução:** Temos $(3,5)=5\cdot(1,1)+(-2)\cdot(1,0)$ e $(-1,4)=4\cdot(1,1)+(-5)\cdot(1,0)$. Como a base é ortonormal, basta fazer $\langle(3,5),(-1,4)\rangle=5.4+(-2)\cdot(-5)=\boxed{30}$. ■

- **Exemplo:** Obtenha a fórmula do produto interno do Exemplo anterior.

- **Solução:** Dado $(x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2$, temos $(x,y)=y\cdot(1,1)+(x-y)\cdot(1,0)$ e $(a,b)=b\cdot(1,1)+(a-b)\cdot(1,0)$. Logo, procedendo como no Exemplo acima temos $\langle(x,y),(a,b)\rangle=y\cdot b+(x-y)\cdot(a-b)=yb+xa-xb-ya+yb=\boxed{xa-xb-ya+2yb}$. ■