– Aula 13 – Autovalores e Autovetores:

– **Definição**: Seja V um espaço vetorial. Um operador linear em V é uma transformação linear $T: V \to V$.

Vimos na última aula que um operador $T: V \to V$ tem representações matriciais diferentes se considerarmos bases diferentes. Além disso, nesse caso podemos considerar matrizes $[T]_{\alpha}^{\alpha}$, já que o domínio e o contradomínio de T são iguais.

Pergunta: Qual a melhor representação matricial possível para um operador?

Consideremos a seguinte situação: qual matriz é mais fácil de elevar ao cubo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ou $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$? Como $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ e $B^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$, é claro que é muito mais fácil de calcular B^3. Em particular, $B^m = \begin{bmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{bmatrix}$.

Dizemos que uma matriz é <u>diagonal</u> se todos os termos fora da diagonal principal são iguais a 0. A matriz B citada acima é diagonal. A matriz nula e a matriz identidade também são.

Como vimos, algumas contas tornam-se mais simples quando a matriz é diagonal, o que nos motiva a procurar uma base α de V na qual $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ seja diagonal. Quando tal base existe, dizemos que T é um operador <u>diagonalizável</u>.

Suponha que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ seja diagonal na base $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, digamos $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.
Então $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$ e $T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$.

- **Definição:** Dizemos que $\vec{v} \in V$ é um <u>autovetor</u> do operador $T: V \to V$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Nesse caso, λ é chamado de <u>autovalor</u>.

Dessa forma, se $[T]_\alpha^\alpha$ é diagonal, então os vetores da base α são autovetores de T, cujos autovalores aparecem ao longo da diagonal da matriz.

Cálculo dos Autovalores de T:

Seja $T: V \to V$ um operador linear e α qualquer base de V. Se $\vec{v}$ é autovetor com autovalor λ, então $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Passando para o outro lado, obtemos $T(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0}$, ou ainda $T(\vec{v}) - I(\vec{v}) = \vec{0}$, onde I é o operador identidade de V, $I(\vec{v}) = \vec{v}\ \forall \vec{v} \in V$ (lembre-se que a matriz do operador identidade é a matriz identidade, qualquer que seja a base considerada). Assim, $(T - \lambda I)(\vec{v}) = \vec{0}$, ou seja, $\vec{v}$ pertence ao núcleo de $T - \lambda I$. Como $\vec{v} \neq \vec{0}$ (pois é autovetor), segue que $T - \lambda I$ não é injetivo, logo não é isomorfismo, portanto $[T - \lambda I]_\alpha^\alpha$ é não-inversível (qualquer que seja a base α!)

Daí, λ é autovalor de $T \Leftrightarrow \det[T - \lambda I]_\alpha^\alpha \neq 0$.

- **Obs.:** É possível demonstrar (mas não o faremos) que $p(x) = \det[T - xI]_\alpha^\alpha$ é um polinômio de grau $n = \dim V$ na variável x, que chamamos de <u>polinômio característico</u> de T. Assim, os autovalores de T são as raízes do seu polinômio característico.

- **Obs.:** Seja λ um autovalor de $T: V \to V$. Chamamos de autoespaço o conjunto $\boxed{W_\lambda = \{\vec{v} : T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}}$, ou seja, o conjunto dos autovetores cujo autovalor é λ acrescido de $\vec{0}$.

Note que W_λ é subespaço de V. Se $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, então $T(\vec{v_1}) = \lambda \vec{v_1}$ e $T(\vec{v_2}) = \lambda \vec{v_2}$, logo $T(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = T(\vec{v_1}) + T(\vec{v_2}) = \lambda\vec{v_1} + \lambda\vec{v_2} = \lambda(\vec{v_1}+\vec{v_2})$, logo $\vec{v_1}+\vec{v_2} \in W_\lambda$. Analogamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in W_\lambda$, então $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, logo $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) = \alpha\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v})$, ou seja, $\alpha\vec{v} \in W_\lambda$, como queríamos.

- Exemplo 1: Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica α é dada por $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule os autovalores de T e determine uma base para cada autoespaço.

- Solução: Primeiramente, precisamos determinar o polinômio característico $p(x) = \det[T - xI]_\alpha^\alpha$. Para isso, basta subtrair $xI = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ de $[T]_\alpha^\alpha$ e calcular o determinante: $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x)\left[(1-x)^2-4\right] = (3-x)(1-2x+x^2-4) = (3-x)(x^2-2x-3)$, onde usamos a Regra de Laplace na terceira coluna. Como $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$, vemos que $p(x) = (3-x)(x-3)(x+1) = \boxed{-(x-3)^2\cdot(x+1)}$. Como os autovalores são as raízes de $p(x)$, eles são $\boxed{\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = -1}$.

Agora vamos determinar os autovetores. Como vimos, $\vec{v}$ é autovetor com autovalor λ quando $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$. Para $\lambda = 3$, temos $[T-3I]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $\vec{v} = (x,y,z)$, como α é a base canônica, temos $[\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, logo $[T-3I]_\alpha^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, que é um sistema linear homogêneo. Escalonando,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -L_3]{L_1 \to -\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$ logo $x = y = 0$ e z fica livre.

Daí, $(x,y,z) \in W_3 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,z) = z(0,0,1)$, e uma base para W_3 é $\boxed{\{(0,0,1)\}}$. Analogamente, para $\lambda = -1$, a matriz torna-se $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Como vimos, basta escalonar essa matriz, resolvendo o sistema cuja matriz dos coeficientes é essa. Assim, $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$

$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -L_3]{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, logo $\begin{cases} x = -4z \\ y = 4z \end{cases}$. Assim, $(x,y,z) \in W_{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (-4z, 4z, 1) = z(-4,4,1)$, logo $\boxed{\{(-4,4,1)\}}$ é uma base para W_{-1}. ■

* Note que, juntando as bases, $\{(0,0,1), (-4,4,1)\}$ é LI. Infelizmente, não é possível obter mais um autovetor LI para termos uma base de autovetores, que é necessária para a forma diagonal de T, já que cada autovalor só contribuiu com um autovetor LI. Assim, T não é diagonalizável no Exemplo acima.

Observe ainda que os autovetores oriundos de autovalores diferentes foram LI no Exemplo acima. Isso sempre acontece, como mostra o seguinte Teorema.

- Teorema: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalores distintos do operador $T: V \to V$. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são autovetores associados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente, então $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LI.

- Demonstração: Mostraremos o caso $n = 2$. Suponha que $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ $(*)$. Aplicando T a ambos os lados de $(*)$ e usando a linearidade, obtemos $a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2) = \vec{0}$, ou seja, $\lambda_1 a_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 a_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. Por outro lado, multiplicando $(*)$ por λ_1 obtemos $\lambda_1 a_1 \vec{v}_1 + \lambda_1 a_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. Com isso, $\lambda_1 a_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 a_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 a_1 \vec{v}_1 + \lambda_1 a_2 \vec{v}_2$, logo $\lambda_2 a_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 a_2 \vec{v}_2 \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) a_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. Como $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, temos $(\lambda_2 - \lambda_1) a_2 = 0$, mas $\lambda_2 \neq \lambda_1$, logo $a_2 = 0$. Multiplicando $(*)$ por λ_1 e procedendo de modo análogo, vemos que $a_1 = 0$, logo $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI. ■

Consequência: Se um operador $T: V \to V$, com $\dim V = n$, tem n autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então escolhendo um autovetor associado a cada autovalor vamos obter um conjunto LI de n vetores, portanto, uma base de V formada por autovetores de T. Como vimos, isso garante que T é diagonalizável.

- Exemplo 2: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear $T(x,y,z) = (x+z, -y, y-2z)$.

(a) Calcule os autovalores de T.

(b) Para cada valor encontrado em (a), encontre uma base para o autoespaço correspondente.

(c) T é diagonalizável? Se sim, exiba uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\beta^\beta$ seja diagonal e exiba esta matriz.

- Solução: Começamos calculando a matriz $[T]_{can}^{can}$, que é $[T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Daí, o polinômio característico é $p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 1 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x)\cdot(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1-x & 0 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1-x)(-2-x) =$

$= \boxed{-(x-1)(x+1)(x+2)}$ (usamos a Regra de Laplace na primeira coluna), logo os autovalores são $\boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \text{ e } \lambda_3 = -2}$. Como são 3 autovalores distintos e $V = \mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, já sabemos que T é diagonalizável. Vamos calcular os autoespaços:

$\lambda_1 = 1$ Escalonamos a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 3L_1}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $z = 0$, $y = 0$ e x está livre. Assim, $(x,y,z) \in W_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,0,0) = x(1,0,0)$, portanto $\boxed{\{(1,0,0)\}}$ é uma base de W_1.

$\lambda_2 = -1$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Já temos $2x + z = 0$ e $y - z = 0$, logo $x = -z/2$ e $y = z$. Daí, $(x,y,z) \in W_{-1}$ $\Leftrightarrow (x,y,z) = \left(-\frac{z}{2}, z, z\right) = -\frac{z}{2}(1,-2,-2)$, logo $\boxed{\{(1,-2,-2)\}}$ é uma base de W_{-1}.

$\lambda_3 = -2$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vemos que $y=0$ e $z=-3x$, logo $(x,y,z) \in W_{-2} \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,0,-3x) =$
$= x(1,0,-3)$, portanto $\boxed{\{(1,0,-3)\}}$ é base de W_{-2}.

Unindo as três bases, obtemos um conjunto LI pelo Teorema anterior, portanto uma base de $\mathbb{R}^3$. Essa base é $\boxed{\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,-2,-2),(1,0,-3)\}}$. Para calcularmos $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, usamos o fato de que seus elementos são autovetores:

$$T(1,0,0) = 1\cdot(1,0,0) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(1,-2,-2) + 0\cdot(1,0,-3)$$
$$T(1,-2,-2) = -1\cdot(1,-2,-2) = 0\cdot(1,0,0) + (-1)\cdot(1,-2,-2) + 0\cdot(1,0,-3)$$
$$T(1,0,-3) = -2(1,0,-3) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(1,-2,-2) + (-2)\cdot(1,0,-3)$$

Dessa forma, $\boxed{[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}$. ■

Roteiro: 1 Calcule $[T - xI]^{\alpha}_{\alpha}$, onde α é qualquer base de V (a canônica, por exemplo).

2 As raízes de $p(x) = \det[T - xI]^{\alpha}_{\alpha}$ são os autovalores de T.

3 Para cada autovalor λ, obtenha uma base para o autoespaço W_λ correspondente substituindo $x = \lambda$ em $[T - xI]^{\alpha}_{\alpha}$ e resolvendo o sistema que tem essa matriz como matriz dos coeficientes (usando escalonamento se necessário).

4 Una as bases dos autoespaços. Se esse conjunto tiver menos que $n = \dim V$ vetores, então T não é diagonalizável. Caso contrário, o conjunto é uma base $\mathcal{B}$ de V, e a matriz $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ é diagonal, cujos elementos diagonais são os autovalores, que aparecem na ordem correspondente aos autovetores na base $\mathcal{B}$:

Se $\mathcal{B} = \{\overset{\lambda_1}{\vec{v}_1}, \overset{\lambda_2}{\vec{v}_2}, \overset{\lambda_3}{\vec{v}_3}\}$, com $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$ e $T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$, então temos $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

mesma ordem da base!