– Aula 6 – Bases:

– **Exemplo 1:** Um conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ em um espaço vetorial V é LD se um deles for combinação linear do outro, ou seja, se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$. Em outras palavras, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LD se, e somente se, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos, como na Geometria Analítica. ■

Vejamos um critério mais prático para determinar se $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LI ou LD. Diremos que uma combinação linear de $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é nula se for da forma $a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$. Esta combinação é dita trivial se $a_1 = \dots = a_n = 0$.

– **Teorema 1:** $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LD se, e somente se, existir uma combinação linear nula de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ além da trivial.

- **Dem.:** Suponha que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LD. Então um deles é combinação linear dos demais, digamos $\vec{v}_n = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_{n-1}\vec{v}_{n-1}$. Passando para o outro lado obtemos $a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_{n-1}\vec{v}_{n-1} - \vec{v}_n = \vec{0}$, uma combinação linear nula não trivial de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Reciprocamente, se existir uma combinação linear $a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ com ao menos um dos coeficientes diferente de zero (digamos $a_n \neq 0$), então podemos escrever $\vec{v}_n = \left(-\frac{a_1}{a_n}\right)\vec{v}_1 + \ldots + \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\vec{v}_{n-1}$, ou seja, $\vec{v}_n$ é combinação linear dos demais e $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LD. ■

* Costumamos usar o Teorema 1 na seguinte forma: $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI se, e somente se, a única combinação linear nula de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ for a trivial.

- **Exemplo 2:** Um conjunto unitário $\{\vec{v}\}$ é LD se, e só se, existir $a \neq 0$ tal que $a\vec{v} = \vec{0}$, mas isso só é possível se $\vec{v} = \vec{0}$. Logo, $\{\vec{v}\}$ é LD $\Leftrightarrow$ $\vec{v} = \vec{0}$ (logo $\{\vec{v}\}$ é LI $\Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0}$). ■

- **Exemplo 3:** Qualquer conjunto S que contenha $\vec{0}$ é LD. Com efeito, se $S=\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{0}\}$, então $0\cdot\vec{v}_1+\ldots+0\cdot\vec{v}_n+1\cdot\vec{0}=\vec{0}$ é uma combinação linear nula não-trivial dos vetores de S. ■

- **Exemplo 4:** Determine se $\{(1,0,1),(-1,2,1),(1,1,1)\}$ é LI ou LD.

- **Solução:** Considere a combinação linear nula

$$a(1,0,1)+b(-1,2,1)+c(1,1,1)=(0,0,0),$$

que equivale ao sistema homogêneo:

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ \phantom{a-{}}2b+c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}.$$

Escalonando, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3\to L_3-L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3\to(-\frac{1}{2})L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3-2L_2]{L_1\to L_1+L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\to L_1-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a única solução é $a=b=c=0$, logo o conjunto é LI. ■

Note que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível, pois ao final do escalonamento chegou-se à matriz identidade. Essa matriz foi obtida colocando os vetores $(1,0,1)$, $(-1,2,1)$ e $(1,1,1)$ nas colunas; em geral, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI $\Leftrightarrow$ a matriz cujas colunas são as coordenadas de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ é invertível $\Leftrightarrow$ o determinante dessa matriz é diferente de zero! Geometricamente, isso significa que $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ são coplanares.

Sejam $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ e considere $W = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$. Se $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ for LD, então um desses vetores é supérfluo, podendo ser descartado sem alterar o subespaço W. Quando $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI, nenhum vetor pode ser eliminado. Nesse caso dizemos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base de W.

Definição 1: Seja V um espaço vetorial. Diremos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é base de V se for LI e $V = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$.

- **Exemplo 5:** (i) É fácil ver que $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Elas são chamadas de bases canônicas.

(ii) $\{(1,1),(-1,1)\}$ também é base de $\mathbb{R}^2$. Com efeito, eles são LI pois não são paralelos e dado $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, temos $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{-x+y}{2}(-1,1)$.

(iii) $\{(1,0,1),(-1,2,1),(1,2,3)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. Como $(1,2,3) = 2\cdot(1,0,1)+(-1,2,1)$, esse conjunto é LD.

Vejamos alguns resultados fundamentais sobre bases:

- **Teorema 2:** Suponha que $V=[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n]$. Então dentre esses vetores podemos extrair uma base de V.

- **Demonstração:** Se $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ for LI, então já é uma base de V. Caso contrário, um desses vetores é combinação linear dos demais.

Digamos, por exemplo, que seja $\vec{v}_n$. Então podemos descartar $\vec{v}_n$, mantendo $V=[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-1}]$, já que todo vetor que é combinação linear de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ também é combinação linear de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-1}$.

Agora basta repetir o argumento. Em alguma etapa chegaremos a um conjunto LI que, portanto, será uma base, já que não podemos descartar todos os vetores (a menos que $V=\{\vec{0}\}$, mas esse caso não tem graça). $\blacksquare$

Vejamos o procedimento para extrair bases:

- **Exemplo 6:** Dado $W=[(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(-2,2,1,1),(1,0,0,0)]$, obtenha uma base de W contida no seu conjunto de geradores acima.

- **Solução:** Vamos montar a matriz M cujas colunas são os geradores de W, isto é, $M=\begin{bmatrix}1&0&-2&1\\-1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$. Seja C_k a k-ésima coluna de M e $M_k = [C_1 \cdots C_k]$ a submatriz de M formada pelas k primeiras colunas de M.

Note que M_k é a matriz ampliada do sistema

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_{n-1} C_{k-1} = C_k .$$

Assim, C_k é combinação linear das colunas $C_1, \ldots, C_{k-1} \Leftrightarrow$ o sistema é possível $\Leftrightarrow$ posto de M_{k-1} = posto de M_k.

Assim, os vetores geradores que podem ser eliminados correspondem às colunas C_k tais que o posto de M_{k-1} é igual ao posto de M_k. Escalonando, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Temos então que $P_{M_1} = 1$, $P_{M_2} = 2$, $P_{M_3} = 2$ e $P_{M_4} = 3$. Como vimos, isso garante que $(-2,2,1,1)$ é combinação linear dos demais. Excluindo-o, obtemos a base $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)\}$.

Além disso, $(-2,2,1,1) = -2(1,-1,0,0) + 1\cdot(0,0,1,1)$, onde os coeficientes são os mesmos números que aparecem na terceira coluna. ∎

– Resumo:

1. Ponha os vetores geradores nas colunas de uma matriz M;
2. As colunas que contêm pivôs na matriz na forma escada linha-equivalente a M indicam os vetores originais que constituem a base.

– Exemplo 7: Seja $W = [(1,2,-1,3,4),(2,4,-2,6,8),(1,3,2,2,6),(1,4,5,1,8),(2,7,3,3,9)]$. Obtenha uma base para W.

– Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 \to L_4 - 3L_1 \\ L_5 \to L_5 - 4L_1}]{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 \to L_4 + L_2 \\ L_5 \to L_5 - 2L_2}]{\substack{L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 - 3L_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 3L_3 \\ L_5 \to L_5 + 5L_3}]{L_1 \to L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo que vimos, a base é $\{(1,2,-1,3,4),(1,3,2,2,6),(2,7,3,3,9)\}$.

Além disso, os coeficientes nas outras colunas nos mostram que $(2,4,-2,6,8) = 2\cdot(1,2,-1,3,4)$ e $(1,4,5,1,8) = -1\cdot(1,2,-1,3,4) + 2(1,3,2,2,6)$. ∎