– Aula 11 – Isomorfismos, Transformações Lineares e Matrizes:

Começamos a aula com algumas consequências do Teorema do Núcleo e da Imagem.

① Se $T: V \to W$ é uma transformação linear e $\dim V = \dim W$, então T é sobrejetiva se, e somente se, for injetiva.

Com efeito, T é sobrejetiva $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = \dim W = \dim V \Leftrightarrow \dim V - \dim \mathrm{Im}(T) =$
$= \dim \mathrm{Ker}(T) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow T$ é injetiva. ■

Assim, se V e W tiverem mesma dimensão, então para mostrar que T é isomorfismo basta verificar que T é injetiva ou sobrejetiva, apenas. Provando uma, a outra fica automaticamente garantida. Isso lembra algo que vimos na 1ª Unidade: se $\dim V = n$, então $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LI se, e somente se, for um conjunto gerador de V!

② Suponha que $T: V \to W$ é isomorfismo. Nesse caso, dizemos que V e W são espaços isomorfos. Como T é injetiva e sobrejetiva, sabemos que $\dim \mathrm{Ker}(T) = 0$ e que $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim W$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim W$, ou seja, espaços isomorfos têm sempre dimensões iguais!

Outra importante propriedade dos isomorfismos é a seguinte:

– **Prop.:** Suponha que $T: V \to W$ é isomorfismo. Então T leva base em base, isto é, se $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é base de V, então $\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$ é base de W.

Dem.: Como T é isomorfismo, temos que $\dim V = \dim W = n$. Já sabemos que o conjunto $\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$ gera $\mathrm{Im}(T)$, mas $\mathrm{Im}(T) = W$ pois T é sobrejetiva. Daí, esse é um conjunto gerador de W com $n = \dim W$ vetores, portanto também é LI, ou seja, é base de W. ■

Também vale a recíproca:

Prop.: Se uma transf. linear $T: V \to W$ leva alguma base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ em uma base $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ de W, então T é um isomorfismo.

Dem.: Estamos supondo que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, \dots, T(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$ e que $\dim V = \dim W = n$. Dado $\vec{w} \in W$, podemos escrever $\vec{w} = a_1\vec{w}_1 + \dots + a_n\vec{w}_n = a_1 T(\vec{v}_1) + \dots + a_n T(\vec{v}_n) = T(a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n)$, ou seja, se $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n$, então $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Isso mostra que T é sobrejetiva, e como as dimensões de V e W são iguais, T também é injetiva, logo é um isomorfismo. ■

Qual a importância dos isomorfismos? Começamos lembrando que se $T: V \to W$ é isomorfismo, então T é bijetiva, logo existe uma inversa $T^{-1}: W \to V$ definida por $T^{-1}(\vec{w}) = \vec{v}$ se $T(\vec{v}) = \vec{w}$.

Prop.: Se $T: V \to W$ é um isomorfismo, então $T^{-1}: W \to V$ é linear (logo também é um isomorfismo por ser bijetiva).

Dem.: Sejam $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$. Como T é bijetiva, existem únicos $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ tais que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ e $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$, o que significa que $\vec{v}_1 = T^{-1}(\vec{w}_1)$ e $\vec{v}_2 = T^{-1}(\vec{w}_2)$. Daí, $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, ou seja, $T^{-1}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = T^{-1}(\vec{w}_1) + T^{-1}(\vec{w}_2)$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in W$, existe um único $\vec{v} \in V$ tal que

$T(\vec{v}) = \vec{w}$, ou seja, $\vec{v} = T^{-1}(\vec{w})$. Daí, $T(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{w}$, logo $T^{-1}(\lambda\vec{w}) = \lambda\vec{v} = \lambda T^{-1}(\vec{w})$, portanto T^{-1} é linear. ■

Suponha então que precisamos calcular algo em um espaço V, onde as contas são bastante complicadas, mas sabemos que V é isomorfo a um espaço W, onde as contas são mais simples. Se T é o isomorfismo entre V e W, podemos transformar o nosso problema em V em um problema em W, onde é mais fácil resolvê-lo. Obtido o resultado, por meio do isomorfismo inverso T^{-1} é possível transmitir esses dados de volta para o espaço V e resolver o problema original.

De certa forma, já fazemos isso desde o começo do Curso. Por exemplo, ao resolver problemas em P_2 somos tentados a identificar um polinômio $a+bx+cx^2$ com o vetor (a,b,c) em $\mathbb{R}^3$, fazer a análise nesse espaço e, no final, converter a resposta de volta para P_2. Agora mostramos o motivo de esse método funcionar.

- Teorema: Quaisquer dois espaços de mesma dimensão finita são isomorfos.

- Dem.: Suponha que $\dim V = \dim W = n$ e sejam $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ e $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ bases de V e W, respectivamente. Sabemos que existe uma única $T: V \to W$ tal que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, \ldots, T(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$. Note que T leva uma base de V em uma base de W. Como vimos, isso garante que T é isomorfismo, portanto V e W são isomorfos. ■

Em outras palavras, esse Teorema nos permite tratar qualquer espaço vetorial V de dimensão finita n como $\mathbb{R}^n$. Por isso, costumamos dizer que os únicos espaços vetoriais de dimensão finita que existem são os $\mathbb{R}^n$, a menos de isomorfismo.

Exemplo 1: Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z)=(2x,4x-y,2x+3y-z)$. Mostre que T é isomorfismo e determine a fórmula $T^{-1}(x,y,z)$ da inversa.

Solução: Vamos determinar $\ker(T)$ resolvendo o sistema $\begin{cases}2x=0\\4x-y=0\\2x+3y-z=0\end{cases}$. É fácil ver que a única solução é $x=y=z=0$, logo $\ker(T)=\{\vec{0}\}$ e T é injetiva. Como o domínio e o contradomínio de T têm mesma dimensão, segue que T é isomorfismo.

Note que $T(1,0,0)=(2,4,2)$, $T(0,1,0)=(0,-1,3)$ e $T(0,0,1)=(0,0,-1)$. Como T leva base em base, temos que $\{(2,4,2),(0,-1,3),(0,0,-1)\}$ também é base, e $T^{-1}(2,4,2)=(1,0,0)$, $T^{-1}(0,-1,3)=(0,1,0)$ e $T^{-1}(0,0,-1)=(0,0,1)$. Usamos nossas técnicas usuais de obter transformações lineares, obtendo $a,b,c\in\mathbb{R}$ tais que $(x,y,z)=a(2,4,2)+b(0,-1,3)+c(0,0,-1)$, o que fornece o sistema $\begin{cases}2a=x\\4a-b=y\\2a+3b-c=z\end{cases}$, logo $\boxed{a=\frac{x}{2},\ b=2x-y \text{ e } c=7x-3y-z}$.

Com isso, $(x,y,z)=\frac{x}{2}(2,4,2)+(2x-y)(0,-1,3)+(7x-3y-z)(0,0,-1)$. Aplicando T^{-1} e usando a linearidade, obtemos $T^{-1}(x,y,z)=\frac{x}{2}(1,0,0)+(2x-y)(0,1,0)+(7x-3y-z)(0,0,1)$, ou seja,

$$\boxed{T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{x}{2},2x-y,7x-3y-z\right)}.$$

■

Considere agora uma transformação linear $T:V\to W$, com $\alpha=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$, $\beta=\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m\}$ bases de V e W, respectivamente. Dado $\vec{v}\in V$, temos que $T(\vec{v})\in W$, logo podemos calcular as coordenadas $[T(\vec{v})]_\beta$. Para isso, começamos escrevendo $\vec{v}=x_1\vec{v}_1+\dots+x_n\vec{v}_n$, ou seja, $[\vec{v}]_\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$. Daí, $T(\vec{v})=x_1T(\vec{v}_1)+\dots+x_nT(\vec{v}_n)$, e como $T(\vec{v}_1),\dots,T(\vec{v}_n)\in W$, também podemos escrevê-los como combinação linear dos vetores da base β. Para simplificar, vamos supor que $n=3$ e $m=2$, logo $T(\vec{v}_1)=a_{11}\vec{w}_1+a_{21}\vec{w}_2$, $T(\vec{v}_2)=a_{12}\vec{w}_1+a_{22}\vec{w}_2$ e $T(\vec{v}_3)=$
$=a_{13}\vec{w}_1+a_{23}\vec{w}_2$.

Daí, $T(\vec{v}) = x_1(a_{11}\vec{w_1} + a_{21}\vec{w_2}) + x_2(a_{12}\vec{w_1} + a_{22}\vec{w_2}) + x_3(a_{13}\vec{w_1} + a_{23}\vec{w_2})$, ou seja, $T(\vec{v}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\vec{w_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\vec{w_2}$. Pela unicidade das coordenadas, segue que $[T(\vec{v})]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{bmatrix}$.

Note ainda que $[T(\vec{v})]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Denotamos a matriz ao lado por $[T]^\alpha_\beta$, e com isso escrevemos $\boxed{[T(\vec{v})]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [\vec{v}]_\alpha}$.

* Em geral, a matriz $[T]^\alpha_\beta$ é obtida aplicando T em todos os vetores da base α e calculando suas coordenadas na base β. Se $\alpha = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$, então a primeira coluna de $[T]^\alpha_\beta$ é $[T(\vec{v_1})]_\beta$, a segunda coluna é $[T(\vec{v_2})]_\beta$, e assim por diante. Chamamos $[T]^\alpha_\beta$ de matriz de T nas bases α e β.

* Se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, então $[T]^\alpha_\beta$ é uma matriz $m \times n$. Já havíamos visto que toda matriz determinava uma transformação linear, agora vemos como obter matrizes a partir de transformações lineares.

- Exemplo 2: Sejam $\alpha = \{(1,2), (-1,1)\}$ e $\beta = \{(-3,0), (2,-1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$. Suponha que $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Se $\vec{v} = (1,5)$, determine $T(\vec{v})$.

(b) Para $\gamma = \{(1,-1), (1,1)\}$, determine $[T]^\gamma_\beta$.

(c) Determine $T(x,y)$.

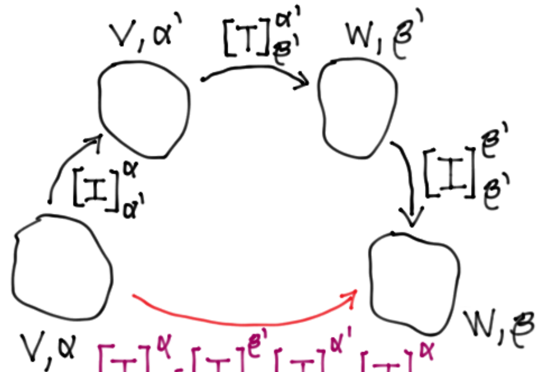
- Solução: Começamos calculando $[\vec{v}]_\alpha$. Se $(1,5) = a(1,2) + b(-1,1)$, então $\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$, logo $a = 2$ e $b = 1$. Assim, $[T(\vec{v})]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, portanto $T(\vec{v}) = 4 \cdot (-3,0) + 9 \cdot (2,-1)$ $\therefore$ $\therefore \boxed{T(\vec{v}) = (6,-9)}$, o que responde o item (a).

Para o item (b), apresentamos duas soluções:

Modo 1: Pela Definição

Sejam $\vec{v}_1=(1,-1)$ e $\vec{v}_2=(1,1)$. Então $\vec{v}_1=0\cdot(1,2)+(-1)\cdot(-1,1)$ e $\vec{v}_2=\frac{2}{3}(1,2)-\frac{1}{3}(-1,1)$, portanto $[\vec{v}_1]_\alpha=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ e $[\vec{v}_2]_\alpha=\begin{bmatrix}2/3\\-1/3\end{bmatrix}$. Com isso, $[T(\vec{v}_1)]_\beta=\begin{bmatrix}1&2\\3&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}$ e $[T(\vec{v}_2)]=\begin{bmatrix}1&2\\3&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2/3\\-1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, logo $\boxed{[T]^\delta_\beta=\begin{bmatrix}-2&0\\-3&1\end{bmatrix}}$.

Modo 2: Por Mudança de Base



$[T]^\alpha_\beta=[I]^{\beta'}_\beta\cdot[T]^{\alpha'}_{\beta'}\cdot[I]^\alpha_{\alpha'}$

Usando a fórmula geral indicada na figura ao lado, temos $[T]^\delta_\beta=[T]^\alpha_\beta\cdot[I]^\delta_\alpha$. Como vimos acima, a matriz de mudança de base é $[I]^\delta_\alpha=\begin{bmatrix}0&2/3\\-1&-1/3\end{bmatrix}$, logo $[T]^\delta_\beta=\begin{bmatrix}1&2\\3&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&2/3\\-1&-1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\-3&1\end{bmatrix}$.

* Vale a pena ressaltar a fórmula

$$\boxed{[T]^\alpha_\beta=[I]^{\beta'}_\beta\cdot[T]^{\alpha'}_{\beta'}\cdot[I]^\alpha_{\alpha'}}$$

Finalmente, a matriz $[T]^\alpha_\beta=\begin{bmatrix}1&2\\3&3\end{bmatrix}$ nos diz que $T(1,2)=1\cdot(-3,0)+3\cdot(2,-1)=(3,-3)$ e $T(-1,1)=2\cdot(-3,0)+3(2,-1)=(0,-3)$. Daí, se $(x,y)=c(1,2)+d(-1,1)$, então $\begin{cases}c-d=x\\2c+d=y\end{cases}$, logo $c=\frac{x+y}{3}$ e $d=\frac{-2x+y}{3}$. Assim, $(x,y)=\left(\frac{x+y}{3}\right)(1,2)+\left(\frac{-2x+y}{3}\right)(-1,1)\Rightarrow T(x,y)=\left(\frac{x+y}{3}\right)(3,-3)+$ $+\left(\frac{-2x+y}{3}\right)(0,-3)$ $\therefore$ $\boxed{T(x,y)=(x+y,\,x-2y)}$. ■