- Aula 8 - Mudança de Base:

Começamos a aula introduzindo a ideia de coordenadas com relação a uma base.

- **Teorema 1:** Seja $\beta=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ uma base do espaço vetorial V. Então todo vetor de V se escreve de maneira única como combinação linear de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$.

Antes de demonstrar esse Teorema, vejamos um exemplo. Sabemos que $\{(1,0),(0,1)\}$ é base (canônica de $\mathbb{R}^2$). Todo vetor de $\mathbb{R}^2$ se escreve como combinação linear desses vetores como $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$. Note que para cada vetor (x,y) há uma única escolha possível para os coeficientes. Por outro lado, $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^2$ que não é base, já que é LD. Observe que podemos escrever $(1,1)=1(1,0)+1(0,1)+$ $+0(1,1)$ e $(1,1)=0(1,0)+0(0,1)+1(1,1)$. Temos mais de uma combinação linear possível!

- **Demonstração:** Seja $\vec{v}\in V$. Como β é gerador de V, podemos escrever $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$. Agora suponha que podemos fazer isso de duas maneiras, isto é, $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n=b_1\vec{v}_1+\dots+b_n\vec{v}_n$. Passando para o outro lado, obtemos $(a_1-b_1)\vec{v}_1+\dots+$ $+(a_n-b_n)\vec{v}_n=\vec{0}$. Como $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ é LI, segue que $a_1-b_1=\dots=a_n-b_n=0$, ou seja, $a_1=b_1,\dots,$ $a_n=b_n$, portanto só há uma forma de escrever $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$. ■

- **Definição:** Se $\beta=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ é base de V e $\vec{v}\in V$ é tal que $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n$, dizemos que os números $a_1,\dots,a_n$ são as coordenadas de $\vec{v}$ na base β, o que denotamos por $[\vec{v}]_\beta=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$.

- **Obs.:** Ao mudarmos a ordem nos vetores da base, também mudamos a ordem das coordenadas. Por exemplo, se $\vec{v}=(3,6)$, $\beta_1=\{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta_2=\{(0,1),(1,0)\}$, então temos $[\vec{v}]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ e $[\vec{v}]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$. Para não haver confusão, passaremos a considerar bases como conjuntos ordenados, de modo que as bases β_1 e β_2 acima são diferentes, apesar de terem os mesmos elementos.

- **Exemplo 1:** Quais as coordenadas de $(1,0,0)$ em relação à base $\beta=\{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$?

- **Solução:** Temos que escrever $(1,0,0)$ como combinação linear de $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$ e $(1,0,-1)$, ou seja, obter $x,y,z\in\mathbb{R}$ tais que $(1,0,0)=x(1,1,1)+y(-1,1,0)+z(1,0,-1)$. Isso nos fornece o sistema $\begin{cases}x-y+z=1\\x+y=0\\x-z=0\end{cases}$. Daí, $y=-x$ e $z=x$, logo substituindo na primeira equação vemos que $x-(-x)+x=1 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=1/3, y=-1/3$ e $z=1/3$. Logo, as coordenadas são $[\vec{v}]_\beta=\begin{bmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\end{bmatrix}$. ■

Na base canônica $\alpha=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, temos $[\vec{v}]_\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Assim, podemos ver que um mesmo vetor terá coordenadas diferentes em bases diferentes. Dessa forma, é importante saber como converter (ou traduzir) coordenadas de uma base para outra. Para isso, suponha que um certo espaço vetorial V possui as bases $\alpha=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ e $\beta=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$. Se $[\vec{v}]_\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$, então quais são as coordenadas $[\vec{v}]_\beta$? Para facilitar o entendimento, vamos supor que $n=3$ e escrever $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ como combinação linear de $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_1&=a_{11}\vec{u}_1+a_{21}\vec{u}_2+a_{31}\vec{u}_3\\\vec{v}_2&=a_{12}\vec{u}_1+a_{22}\vec{u}_2+a_{32}\vec{u}_3\\\vec{v}_3&=a_{13}\vec{u}_1+a_{23}\vec{u}_2+a_{33}\vec{u}_3\end{aligned}}$$

Como $\vec{v} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + x_3\vec{v_3}$, por substituição vemos que

$$\vec{v} = x_1\left(a_{11}\vec{u_1} + a_{21}\vec{u_2} + a_{31}\vec{u_3}\right) + x_2\left(a_{12}\vec{u_1} + a_{22}\vec{u_2} + a_{32}\vec{u_3}\right) + x_3\left(a_{13}\vec{u_1} + a_{23}\vec{u_2} + a_{33}\vec{u_3}\right),$$

ou seja,

$$\vec{v} = \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right)\vec{u_1} + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right)\vec{u_2} + \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\right)\vec{u_3}.$$

Como vimos, as coordenadas em uma base são únicas, portanto

$$[\vec{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}.$$

Note que é possível escrever a equação acima como

$$[\vec{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

onde o vetor coluna $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\alpha}$. A matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ realiza a conversão das coordenadas na base α para as coordenadas na base β, por isso é chamada de <u>matriz de mudança de base</u>, denotada por $[I]^{\alpha}_{\beta}$.

Observe que a primeira coluna de $[I]^{\alpha}_{\beta}$ corresponde a $[\vec{v_1}]_{\beta}$ (as coordenadas do primeiro vetor de α na base β), a segunda coluna é $[\vec{v_2}]_{\beta}$, e assim por diante! Resumindo, acabamos de deduzir a fórmula $\boxed{[\vec{v}]_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta} \cdot [\vec{v}]_{\alpha}}$

- <u>Exemplo 2</u>: Sejam $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1+x, x, x^2+x\}$ bases de P_2. Determine $[I]^{\beta}_{\alpha}$.

- <u>Solução</u>: Como vimos, precisamos escrever os vetores de β como combinação linear dos vetores de α e colocar as coordenadas nas colunas da matriz. Como α é a base canônica, isso é fácil: $\boxed{[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$, pois as coordenadas de um vetor na base canônica são dadas justamente pelos seus coeficientes. ■

Assim, é fácil escrever $[I]_\alpha^\beta$ se α for a base canônica. E se α não for a base canônica?

- **Teorema 2:** Sejam α e β bases de V. Então $[I]_\alpha^\beta$ é inversível e $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$.

- **Demonstração:** Seja $\vec{v} \in V$. Então $[\vec{v}]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \cdot [\vec{v}]_\beta$. Por outro lado, $[\vec{v}]_\beta = [I]_\beta^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha$, logo $[\vec{v}]_\beta = [I]_\alpha^\beta \cdot [I]_\beta^\alpha \cdot [\vec{v}]_\beta$. Como $\vec{v}$ foi arbitrário, a última igualdade só é possível se $[I]_\alpha^\beta \cdot [I]_\beta^\alpha$ for a matriz identidade, portanto $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$, como queríamos. ■

- **Exemplo 3:** Se $\alpha = \{(1,0,-1), (1,0,1), (1,1,0)\}$ e $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Determine $[I]_\alpha^\beta$.

- **Solução:** Como vimos, $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ já que β é a base canônica (basta colocar os coeficientes dos vetores de α nas colunas). Pelo Teorema 2, $[I]_\alpha^\beta = \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$. Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_3]{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

logo $\boxed{[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$ ■

Já vimos o que fazer se α ou β for a base canônica. E se nenhuma delas for?

- **Teorema 3:** Se α, β e γ são bases de V, então $[I]_\beta^\alpha = [I]_\gamma^\alpha \cdot [I]_\beta^\gamma$.

- **Demonstração**: Seja $\vec{v} \in V$. Então $[\vec{v}]_\beta = [I]_\beta^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha$. Por outro lado, também podemos escrever $[\vec{v}]_\beta = [I]_\beta^\gamma \cdot [\vec{v}]_\gamma = [I]_\beta^\gamma \cdot [I]_\gamma^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha$, logo $[I]_\beta^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha = [I]_\beta^\gamma \cdot [I]_\gamma^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow [\vec{v}]_\alpha = \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} \cdot [I]_\beta^\gamma \cdot [I]_\gamma^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha$. Como $\vec{v}$ foi arbitrário, temos então que $\left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} \cdot [I]_\beta^\gamma \cdot [I]_\gamma^\alpha = I_d$ (matriz identidade), logo $[I]_\beta^\alpha = [I]_\beta^\gamma \cdot [I]_\gamma^\alpha$. ∎

- **Exemplo 4**: Considere as bases $\beta = \{(1,2,0),(1,3,2),(0,1,3)\}$ e $\alpha = \{(1,0,-1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine $[I]_\alpha^\beta$.

- **Solução**: Vamos denotar a base canônica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ por can. Pelo Teorema 3, $[I]_\alpha^\beta = [I]_\alpha^{can} \cdot [I]_{can}^\beta$. Já sabemos que $[I]_{can}^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, e no Exemplo 3 vimos que $[I]_\alpha^{can} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, logo

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1/2 & -2 & -2 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}$$

∎

- **Exemplo 5**: Seja $\beta = \{1+x, 2-x, 1+x^2\}$ base de P_2. Determine uma base α de P_2 tal que $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- **Solução**: Digamos que $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. As colunas de $[I]_\beta^\alpha$ nos mostram que $[\vec{v}_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\vec{v}_2]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $[\vec{v}_3]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ou seja, $\vec{v}_1 = 1(1+x) + 2(2-x) + 0(1+x^2) = 5-x$, $\vec{v}_2 = 2(1+x) + 0(2-x) + 1(1+x^2) = 3+2x+x^2$ e $\vec{v}_3 = 0(1+x) + 1(2-x) + 2(1+x^2) = 4-x+2x^2$. Daí, $\alpha = \{5-x, 3+2x+x^2, 4-x+2x^2\}$. ∎

- **Exemplo 6**: Seja $\beta = \{1+x, x, x+x^2\}$ base de P_2, e considere outra base α de P_2 tal que $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (a) Determine $\vec{v} \in P_2$ tal que $[\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (b) Encontre a base α.

- Solução: Sabemos que $[\vec{v}]_\beta = [I]^\alpha_\beta \cdot [\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\2&0&-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$, portanto $\vec{v} = 2(1+x)+2(x)+4(x+x^2) = \boxed{2+8x+4x^2}$. Para determinar a base α, olhamos para as colunas de $[I]^\alpha_\beta$: se $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, então $[\vec{v}_1]_\beta = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, $[\vec{v}_2]_\beta = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ e $[\vec{v}_3]_\beta = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, logo $\vec{v}_1 = 1(1+x)+0(x)+2(x+x^2) = 1+3x+2x^2$, $\vec{v}_2 = 0(1+x)+2(x)+0(x+x^2) = 2x$ e $\vec{v}_3 = 1(1+x)+1(x)+(-1)(x+x^2) = 1+x-x^2$, ou seja, $\boxed{\alpha = \{1+3x+2x^2,\ 2x,\ 1+x-x^2\}}$. ■

- Exemplo 7: Considere as bases $\alpha = \{1-x^2, 1-x, 1+x+x^2\}$ e $\beta = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ de P_3. Determine $[I]^\alpha_\beta$.

- Solução: Temos $[I]^\alpha_\beta = [I]^{can}_\beta \cdot [I]^\alpha_{can}$. Temos $[I]^\alpha_{can} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$ e $[I]^{can}_\beta = \left([I]^\beta_{can}\right)^{-1}$. Como $[I]^\beta_{can} = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$, invertendo obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1/2&-1/2\\0&1&0&-1/2&1/2&1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right]$$

, logo $[I]^{can}_\beta = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$.

Finalmente, $[I]^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&1\\-2&-2&1\\0&2&1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}1&0&1/2\\-1&-1&1/2\\0&1&1/2\end{bmatrix}}$. ■

- Exemplo 8: Considere a base $\alpha = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ de P_2. Determine uma base β de P_2 tal que $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$.

- Solução: Para determinar $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ precisamos conhecer $[I]^\beta_\alpha$. Invertendo, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\-1&-1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&-1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&-1&0\\0&0&3&1&1&1\end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{3}L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&-1&0\\0&0&1&1/3&1/3&1/3\end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 + 2L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2/3&-1/3&-1/3\\0&1&0&-1/3&-1/3&2/3\\0&0&1&1/3&1/3&1/3\end{array}\right]$$

, logo $[I]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix}2/3&-1/3&-1/3\\-1/3&-1/3&2/3\\1/3&1/3&1/3\end{bmatrix}$. Daí, $\vec{v}_1 = \frac{2}{3}(1) + \left(-\frac{1}{3}\right)(1+x) + \frac{1}{3}(1+x^2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2$, $\vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)(1) + \left(-\frac{1}{3}\right)(1+x) + \frac{1}{3}(1+x^2) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2$ e $\vec{v}_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)(1) + \frac{2}{3}(1+x) + \frac{1}{3}(1+x^2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2$, ou seja, $\boxed{\alpha = \left\{\frac{2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3}\right\}}$ ■