- Aula 7 - Bases (Continuação):

Considere um sistema homogêneo de m equações e n incógnitas, com $m<n$. Como o sistema é sempre possível, temos que o posto P_C da matriz dos coeficientes é igual ao posto P_A da matriz aumentada. Além disso, como $P_C \leq m$, temos $P_C = P_A \leq m < n$, logo o sistema é possível e indeterminado. Em outras palavras, existe alguma solução não-trivial do sistema. Usaremos isso para provar o seguinte Teorema:

- Teorema 1: Suponha que um espaço vetorial V possui uma base com m elementos. Então qualquer conjunto com mais de m vetores em V é necessariamente LD. Em outras palavras, todo conjunto LI tem no máximo m vetores.

- **Demonstração:** Sejam $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ base de V e $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ um conjunto de n vetores de V, com $n > m$. Podemos escrever cada um desses vetores como combinação linear de $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + \dots + a_{1m}\vec{v}_m \\ \vec{u}_2 = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{2m}\vec{v}_m \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vec{u}_n = a_{n1}\vec{v}_1 + a_{n2}\vec{v}_2 + \dots + a_{nm}\vec{v}_m \end{cases}$$

Vejamos que $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ é LD. Devemos mostrar que existe uma combinação linear nula não-trivial

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n = \vec{0}. \qquad (1)$$

Substituindo as equações do sistema na equação acima, obtemos

$$x_1(a_{11}\vec{v}_1 + \dots + a_{1m}\vec{v}_m) + x_2(a_{21}\vec{v}_1 + \dots + a_{2m}\vec{v}_m) + \dots + x_n(a_{n1}\vec{v}_1 + \dots + a_{nm}\vec{v}_m) = \vec{0},$$

ou seja,

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n)\vec{v}_1 + \dots + (a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n)\vec{v}_m = \vec{0}.$$

Como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ é LI, todos os coeficientes têm que ser iguais a zero, o que nos fornece o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases},$$

um sistema homogêneo com m equações e n incógnitas. Como vimos, esse sistema possui uma solução não-trivial $(x_1, \ldots, x_m)$, que ao ser substituída em (1) fornece uma combinação nula não-trivial de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, mostrando que esse conjunto é LD, como queríamos. ■

- **Consequência**: Quaisquer duas bases de um mesmo espaço vetorial possuem o mesmo número de vetores. Com efeito, se $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ e $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ são duas bases de V com $n \neq m$, então temos que $n < m$ (e $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ seria LD) ou $m < n$ (e $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ seria LD). Como isso não é possível, segue que $n = m$.

* A dimensão de V é o número de elementos presentes em qualquer base de V e será denotada por $\dim(V)$. Neste curso vamos considerar apenas espaços vetoriais de dimensão finita.

Para o próximo Teorema, precisaremos da seguinte propriedade:

- **Prop.:** Se $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LI e $\vec{v} \notin [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ (isto é, $\vec{v}$ não é combinação linear de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$), então $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$ é LI.

- **Demonstração:** Considere a combinação nula

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n + a\vec{v} = \vec{0}.$$

Afirmamos que $a = 0$. Com efeito, se $a \neq 0$, então poderíamos escrever

$$\vec{v} = \left(-\frac{a_1}{a}\right)\vec{v}_1 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a}\right)\vec{v}_n,$$

ou seja, $\vec{v} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$, mas isso contradiz nossa hipótese. Daí, $a = 0$ e a combinação linear nula torna-se

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LI, concluímos que $a_1 = \dots = a_n = 0$. Como $a = a_1 = \dots = a_n = 0$, temos que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$ é LI. $\blacksquare$

- **Consequência**: Se $\dim V = n$ e $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LI, então $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é base. Caso contrário, existiria $\vec{v} \notin [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$, logo $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$ seria um conjunto LI com mais de n vetores, o que é impossível pelo Teorema 1. $\blacksquare$

- **Teorema 2**: Qualquer conjunto LI em um espaço vetorial V pode ser completado para formar uma base de V.

- **Demonstração**: Suponha que $\dim V = n$ e seja $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ um conjunto LI. Pelo Teorema 1, sabemos que $k \leq n$. Se $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ já for base, não há o que fazer. Senão, então $V \neq [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]$, logo existe $\vec{v}_{k+1} \in V$ tal que $\vec{v}_{k+1} \notin [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]$. Como vimos, $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}\}$ é LI. Se esse conjunto for uma base, acabou. Senão, repita o processo. Quando esse conjunto LI tiver n vetores, ele será uma base e o processo terminará. $\blacksquare$

Agora vamos voltar a estudar somas e interseções de subespaços, mas no contexto de bases e dimensões. Começamos com a seguinte propriedade:

- **Prop.:** Sejam $W_1 = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ e $W_2 = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m]$ subespaços de V. Então $W_1 + W_2 = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m]$.

- **Demonstração:** Seja $\vec{v} \in W_1 + W_2$. Por definição, existem $\vec{w}_1 \in W_1$ e $\vec{w}_2 \in W_2$ tais que $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. Por hipótese, podemos escrever $\vec{w}_1 = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n$ e $\vec{w}_2 = b_1\vec{u}_1 + \dots + b_m\vec{u}_m$, com $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, logo $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n + b_1\vec{u}_1 + \dots + b_m\vec{u}_m$. Daí, concluímos que $W_1 + W_2 = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m]$. ■

- **Prop.:** Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então $\dim W_1 \leq \dim V$, $\dim W_2 \leq \dim V$ e $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Demonstração: Para a primeira parte, suponha que $\dim V = n$ e seja $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ uma base de W_1. Então $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ é LI, logo $\dim W_1 = m \leq n = \dim V$ pelo Teorema 1. Analogamente podemos mostrar que $\dim W_2 \leq \dim V$.

Para a segunda parte, seja $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ uma base de $W_1 \cap W_2$. Podemos completá-la e obter bases $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ e $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ de W_1 e W_2, respectivamente. Pela Propriedade anterior, temos $W_1 + W_2 = [\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m]$. Vamos mostrar que $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ é LI. Considere a combinação nula

$$a_1\vec{w}_1 + \dots + a_k\vec{w}_k + b_1\vec{v}_1 + \dots + b_r\vec{v}_r + c_1\vec{u}_1 + \dots + c_m\vec{u}_m = \vec{0}. \quad (*)$$

Temos então que

$$W_1 \ni a_1\vec{w}_1 + \dots + a_k\vec{w}_k + b_1\vec{v}_1 + \dots + b_r\vec{v}_r = -c_1\vec{u}_1 - \dots - c_m\vec{u}_m \in W_2,$$

logo $-c_1\vec{u}_1 - \dots - c_m\vec{u}_m \in W_1 \cap W_2$. Como $W_1 \cap W_2 = [\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k]$, podemos escrever $-c_1\vec{u}_1 - \dots - c_m\vec{u}_m = d_1\vec{w}_1 + \dots + d_k\vec{w}_k \Rightarrow c_1\vec{u}_1 + \dots + c_m\vec{u}_m + d_1\vec{w}_1 + \dots + d_k\vec{w}_k = \vec{0}$.

Como $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k,\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\}$ é LI por ser base de W_2, segue que todos os coeficientes dessa última combinação linear são iguais a zero. Em particular, $c_1=\dots=c_m=0$, e a combinação linear (*) torna-se $a_1\vec{w}_1+\dots+a_k\vec{w}_k+b_1\vec{v}_1+\dots+b_r\vec{v}_r=\vec{0}$. Como $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_r\}$ é LI por ser base de W_1, segue que $a_1=\dots=a_k=b_1=\dots=b_r=0$.

Mostramos que todos os coeficientes em (*) são iguais a zero, logo $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_r,\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\}$ é LI e portanto é uma base de W_1+W_2. Temos então $\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)=$
$=(k+r)+(k+m)-k=k+r+m=\dim(W_1+W_2)$. ■

Já vimos que, em teoria, podemos completar conjuntos LI para obter bases. Vejamos como fazer isso na prática:

- Exemplo 1: O conjunto $\{1+x,-1+x+x^2\}$ é LI em P_3. Complete-o para obter uma base de P_3

Solução: Sabemos que $\{1, x, x^2, x^3\}$ é base (canônica) de P_3. Unindo-a ao nosso conjunto LI obtemos $\{1+x, 1-x+x^2, 1, x, x^2, x^3\}$, que claramente é um conjunto gerador de P_3. Vamos extrair uma base desse conjunto usando o método da aula passada, mas de forma que as duas primeiras colunas tenham pivôs no escalonamento. Colocamos os coeficientes de cada polinômio nas colunas da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como os pivôs ficaram nas colunas 1, 2, 3 e 6, isso significa que $\{1+x, 1-x+x^2, 1, x^3\}$ é uma base de P_3 que completa o nosso conjunto LI. ■

- **Exemplo 2:** Considere os subespaços W_1 e W_2 de $M_{2\times 2}$ cujas bases são $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right\}$, respectivamente.

(a) Determine uma base para $W_1 + W_2$. Esta soma é direta?

(b) Determine uma base para $W_1 \cap W_2$.

- **Solução:** (a) Sabemos que $W_1 + W_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right]$.

Vamos extrair uma base desse conjunto usando escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{L_3 \to L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{2} L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 + L_3 \\ L_4 \to L_4 + L_3}]{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como os pivôs ficaram nas três primeiras colunas, uma base de $W_1 + W_2$ é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Daí, a fórmula $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ nos fornece $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, logo $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$ e a soma não é direta.

(b) Já sabemos que $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, portanto para obter uma base basta encontrar uma matriz não-nula na interseção. A última coluna da forma escada obtida no item (a) nos fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\underbrace{-2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\in W_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + (-2)\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in W_2} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2.$$

Dessa forma, $\left\{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right\}$ é base de $W_1 \cap W_2$. ∎