- Aula 1 - Sistemas Lineares:

- **Definição**: Uma equação linear é qualquer equação da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são as incógnitas, $a_1, \ldots, a_n$ são os coeficientes e b é o termo independente.

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares que devem ser satisfeitas simultaneamente:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{mn} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}.$$

Uma solução de um sistema linear é uma sequência de n números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz todas as equações presentes no sistema. Nosso objetivo inicial do Curso será desenvolver um procedimento que nos permita resolver um sistema, ou seja, obter todas as suas soluções.

- **Exemplo 1:** Resolva o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$.

- **Solução:** Podemos multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda por -2, obtendo o novo sistema $\begin{cases} 6x - 9y = 3 \\ -6x - 4y = -8 \end{cases}$. Somando as equações, obtemos $-13y = -5$, logo $y = 5/13$. Substituindo na primeira equação, vamos obter $2x - \frac{15}{13} = 1 \Rightarrow 2x = \frac{28}{13} \Rightarrow x = 14/13$, logo a solução é o par $\boxed{\left(5/13, 14/13\right)}$. ■

Vamos entender melhor o que fizemos. O primeiro passo foi multiplicar equações por constantes diferentes de zero. O segundo passo foi somar equações para eliminar uma das incógnitas, para obter um novo sistema mais simples que o original, formado pela equação $y = 5/13$ e por uma das equações originais.

A ideia por trás dessa resolução é trocar o sistema por outro mais simples e que tenha as mesmas soluções do original. Destrinchando ainda mais o que fizemos, poderíamos resumir a solução nos seguintes passos:

① Multiplicar a equação $3x+2y=4$ por -2, obtendo o sistema $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -6x-4y=-8 \end{cases}$;

② Trocar a equação $-6x-4y=-8$ pela sua soma com 3 vezes a outra equação, obtendo o sistema $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -13y=-5 \end{cases}$, e com o valor de y obtivemos o valor de x.

Os dois passos acima fornecem as seguintes operações permitidas para resolver o sistema:

$\boxed{E1}$ Multiplicar uma equação por uma constante diferente de zero;

$\boxed{E2}$ Trocar uma equação por sua soma com um múltiplo de outra equação.

Existe outra operação permitida:

$\boxed{E3}$ Permutar duas equações.

As operações E1, E2 e E3 são chamadas de operações elementares e formam a base do processo de escalonamento usado para resolver sistemas.

- Exemplo 2: Resolva o sistema $\begin{cases} 3x+2y-5z=8 \\ 2x-4y-2z=-4 \\ x-2y-3z=-4 \end{cases}$.

- Solução: Começamos permutando a primeira e a terceira equações, obtendo $\begin{cases} x-2y-3z=-4 \\ 2x-4y-2z=-4 \\ 3x+2y-5z=8 \end{cases}$. Sempre tentaremos fazer com que a primeira equação tenha o coeficiente de x igual a 1 para simplificar as contas. Agora vamos usar a primeira equação para eliminar x nas outras duas. Trocando a segunda equação por sua soma com -2 vezes a primeira, obtemos $\begin{cases} x-2y-3z=-4 \\ 4z=4 \\ 3x+2y-5z=8 \end{cases}$.

Agora trocamos a terceira equação por sua soma com -3 vezes a primeira, obtendo $\begin{cases} x-2y-3z=-4 \\ 4z=4 \\ 8y+4z=20 \end{cases}$. Pela segunda equação, temos $z=1$. Substituindo na terceira obtemos $8y+4=20 \Rightarrow y=2$, e substituindo na primeira obtemos $x-4-3=-4 \Rightarrow x=3$, e a solução é dada por $\boxed{(3,2,1)}$.

- Exemplo 3: Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ 2x+5y-9z=-10 \\ 3x-2y+3z=11 \end{cases}$.

- Solução: A primeira equação já tem coeficiente de x igual a 1. Trocando a segunda equação por sua soma com -2 vezes a primeira, obtemos $\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ 3x-2y+3z=11 \end{cases}$. Trocando a terceira equação por sua soma com -3 vezes a primeira, obtemos $\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ -8y+15z=23 \end{cases}$. Agora vamos usar a segunda equação para eliminar y na terceira equação. Nesse ponto é interessante que o coeficiente de y na segunda equação seja 1 para facilitar, mas isso já ocorre no exemplo. Trocando a terceira equação por sua soma com 8 vezes a segunda, obtemos $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ y - z = -2 \\ 7z = 7 \end{cases}$. Neste ponto já é fácil obter a solução do sistema, mas muitas vezes será útil continuar o processo. Assim, eliminamos y na primeira equação trocando-a por sua soma com -2 vezes a segunda, obtendo $\begin{cases} x \quad\; - 2z = 0 \\ y - z = -2 \\ 7z = 7 \end{cases}$. Finalmente, usamos a terceira equação para eliminar z nas outras duas. Começamos dividindo a terceira equação por 7, obtendo $\begin{cases} x \quad\; - 2z = 0 \\ y - z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$. Trocando a primeira equação por 2 vezes a terceira, obtemos $\begin{cases} x \quad\;\; = 2 \\ y - z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$. Trocando a segunda equação por sua soma com a terceira, obtemos $\boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}}$ como a solução do sistema. ■

O processo descrito nos exemplos acima é conhecido como Eliminação Gaussiana. Note que as incógnitas x, y e z só foram importantes no final. Ao longo do processo, os cálculos eram feitos apenas com os coeficientes do sistema. Assim, vamos introduzir as matrizes associadas ao sistema. Observe que o sistema do exemplo anterior podia ser escrito na forma $A \cdot X = B$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Consideraremos também a matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right]$. Com isso, todas as operações elementares que fizemos com as equações do sistema correspondem às mesmas operações com as linhas de sua matriz aumentada. Nos exemplos a seguir, usaremos as notações $L_i \leftrightarrow L_j$ para a permutação das linhas i e j, $L_i \to cL_i$ para a multiplicação da linha i por $c \neq 0$ e $L_i \to L_i + c \cdot L_j$ para a troca da linha i por sua soma com c vezes a linha j.

- **Exemplo 4:** Resolva o sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$.

- **Solução:** Escalonamos a matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 17 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \left(-\frac{1}{7}\right)L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -17/7 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - 5L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 22/7 \\ 0 & 1 & 0 & -11/7 \\ 0 & 0 & 1 & -17/7 \end{array}\right],$$

que corresponde às equações $\boxed{\begin{cases} x = 22/7 \\ y = -11/7 \\ z = -17/7 \end{cases}}$, resolvendo o sistema.

- **Exemplo 5:** Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + 3y + 6z = 10 \\ 3x + 6y + 10z = 14 \end{cases}$.

- **Solução:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

A solução é $\boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}}$.

- **Exemplo 6:** Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = 2 \end{cases}$.

– **Solução:**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{2} L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_4 \to -\frac{1}{2} L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = -2 \end{cases}} \text{ é a solução.}$$

– **Exemplo 7:** Resolva o sistema $\begin{cases} 4x - y - 3z = 15 \\ 3x - 2y + 5z = -7 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$.

– **Solução:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -3 & 15 \\ 3 & -2 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -8 & 22 \\ 3 & -2 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -8 & 22 \\ 0 & -5 & 29 & -73 \\ 0 & 1 & 20 & -37 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -8 & 22 \\ 0 & 1 & 20 & -37 \\ 0 & -5 & 29 & -73 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 5L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -28 & 59 \\ 0 & 1 & 20 & -37 \\ 0 & 0 & 129 & -258 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{129} L_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -28 & 59 \\ 0 & 1 & 20 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 20L_3]{L_1 \to L_1 + 28L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]. \text{ A solução é } \boxed{\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}}.$$