– Aula 14 – Produto Interno:

Na Geometria Analítica, estudamos o produto escalar em $\mathbb{R}^3$, que é uma operação entre dois vetores $\vec{v}=(x,y,z)$ e $\vec{u}=(a,b,c)$ dada por $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{u}=xa+yb+zc}$. São consequências diretas da definição as seguintes propriedades:

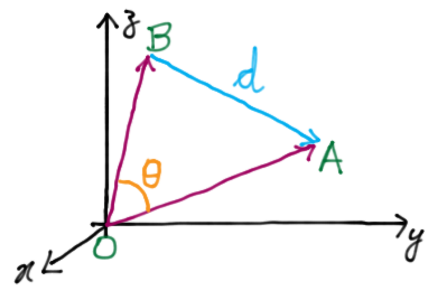
(a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\ \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$;

(b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}\ \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$;

(c) $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})\ \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ e $\forall\lambda\in\mathbb{R}$;

(d) $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0\ \forall\vec{u}\in\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$.

Além disso, vimos que a Geometria do $\mathbb{R}^3$ está relacionada ao produto escalar, pois a norma de um vetor $\vec{v}$ é dada por $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$, o que nos permite calcular distâncias entre pontos: se $A=(x_1,y_1,z_1)$ e $B=(x_2,y_2,z_2)$, então a distância entre A e B é $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ $=\|\vec{OA}-\vec{OB}\|$. Sabemos também que o ângulo θ entre $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ é tal que $\cos\theta=\dfrac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{\|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB}\|}$.



Nosso objetivo agora será generalizar a noção de produto escalar em um espaço vetorial V qualquer. Chamaremos de produto interno qualquer operação entre vetores de V, cujo resultado seja um escalar, satisfazendo as propriedades (a), (b), (c) e (d) acima. A notação que usaremos para o produto interno de $\vec{v}$ por $\vec{u}$ será $\langle\vec{v},\vec{u}\rangle$. Assim, definimos:

– **Definição:** Uma operação $\langle\,,\,\rangle$ entre vetores de um espaço vetorial V cujo resultado é um escalar é um produto interno em V se:

(i) $\langle \vec{v},\vec{u}\rangle = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle \ \forall \vec{v},\vec{u}\in V$;

(ii) $\langle \vec{v},\vec{u}+\vec{w}\rangle = \langle \vec{v},\vec{u}\rangle + \langle \vec{v},\vec{w}\rangle$ e $\langle \vec{v}+\vec{u},\vec{w}\rangle = \langle \vec{v},\vec{w}\rangle + \langle \vec{u},\vec{w}\rangle \ \forall \vec{v},\vec{u},\vec{w}\in V$;

(iii) $\langle \lambda\vec{v},\vec{u}\rangle = \langle \vec{v},\lambda\vec{u}\rangle = \lambda\langle \vec{v},\vec{u}\rangle \ \forall \vec{v},\vec{u}\in V$ e $\forall \lambda\in\mathbb{R}$;

(iv) $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle \geq 0 \ \forall \vec{v}\in V$ e $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$.

A propriedade (i) é chamada de simetria; já (ii) e (iii) juntas são chamadas de bilinearidade (note que o produto interno é linear dos dois lados). A propriedade (iv) costuma ser enunciada como "o produto interno é definido positivo e não-degenerado".

- Exemplos: Seja $V=\mathbb{R}^3$.

(a) O produto escalar $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa+yb+zc$ é obviamente um produto interno, que também chamaremos de produto interno canônico. Em geral, o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ é $\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1y_1+\dots+x_ny_n$.

(b) Vamos mostrar que $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa+xc+za+yb-zb-yc+3zc$ também é um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Temos que verificar as quatro propriedades:

(i) $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa+xc+za+yb-zb-yc+3zc = ax+cx+az+by-bz-cy+3cz =$
$= \langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle$, logo a simetria vale.

(ii)(iii) Como já provamos a simetria, basta mostrar a linearidade apenas de um dos lados: $\langle (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2),(a,b,c)\rangle = \langle (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),(a,b,c)\rangle = (x_1+x_2)a+(x_1+x_2)c\ +$
$+(z_1+z_2)a+(y_1+y_2)b-(z_1+z_2)b-(y_1+y_2)c+3(z_1+z_2)c = x_1a+x_2a+x_1c+x_2c+z_1a+z_2a+y_1b\ +$
$+y_2b-z_1b-z_2b-y_1c-y_2c+3z_1c+3z_2c = (x_1a+x_1c+z_1a+y_1b-z_1b-y_1c+3z_1c)+(x_2a+x_2c\ +$
$+z_2a+y_2b-z_2b-y_2c+3z_2c) = \langle (x_1,y_1,z_1),(a,b,c)\rangle + \langle (x_2,y_2,z_2),(a,b,c)\rangle$.

Analogamente, $\langle \lambda(x,y,z),(a,b,c)\rangle = \langle (\lambda x,\lambda y,\lambda z),(a,b,c)\rangle = \lambda xa+\lambda xc+\lambda za+\lambda yb-\lambda zb$
$-\lambda yc+3\lambda zc = \lambda(xa+xc+za+yb-zb-yc+3zc) = \lambda\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle$, logo a bilinearidade vale.

(iv) $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = x^2+2xz+y^2-2yz+3z^2 = (x^2+2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)+z^2 = (x+z)^2+(y-z)^2+z^2 \geq 0 \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$. Além disso, $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = 0 \Leftrightarrow x+z=0,\ y-z=0$ e $z=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$. Logo $\langle\ ,\ \rangle$ é definido positivo e não-degenerado, portanto é um produto interno em $\mathbb{R}^3$. ■

Exemplo: Um produto interno importantíssimo é definido em termos de uma integral. Em P_n, defina $\langle p_1(x), p_2(x)\rangle = \int_a^b p_1(x)p_2(x)\,dx$. As propriedades da integral garantem que é um produto interno.

Já vimos que um mesmo espaço vetorial tem mais de um produto interno. Vejamos como a Geometria muda ao trocarmos o produto interno. Como $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle \geq 0\ \forall \vec{v}\in V$ e vale zero se, e só se, $\vec{v}=\vec{0}$, podemos generalizar a ideia de norma:

Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno. Dado $\vec{v}\in V$, definimos $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v},\vec{v}\rangle}$.

Observe que a norma depende do produto interno escolhido. Se considerarmos o produto interno canônico em $\mathbb{R}^3$, então $\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, mas se considerarmos o produto interno $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa+xc+za+yb-zb-yc+3zc$, então $\|(x,y,z)\| = \sqrt{(x+z)^2+(y-z)^2+z^2}$. A fórmula mudou! Devemos prestar bastante atenção ao produto interno considerado nos problemas, pois todos os cálculos serão feitos com ele! Em particular, nesse produto interno temos $\|(0,0,1)\| = \sqrt{3}$. Podemos pensar que o produto interno é a régua do nosso espaço: ao mudar o produto interno, também muda a forma de medir distâncias.

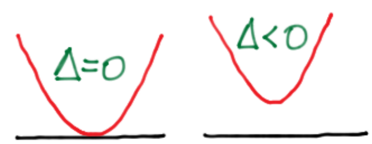
A norma tem as seguintes propriedades, que decorrem diretamente da definição e das propriedades do produto interno:

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0 \ \forall \vec{v} \in V$ e $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$;

(b) $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\| \ \forall \vec{v} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

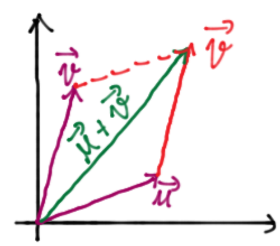
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Seja V um espaço vetorial com produto interno. Se $\vec{u}, \vec{v} \in V$, então $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

- Dem.: Se $\vec{v} = \vec{0}$, não há o que fazer: basta notar que $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0$ qualquer que seja $\vec{u} \in V$. Com efeito, $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{0} + \vec{0} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle$, logo $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0$. Suponha então $\vec{v} \neq \vec{0}$ e seja $t \in \mathbb{R}$. Então $\langle \vec{u} - t\vec{v}, \vec{u} - t\vec{v} \rangle \geq 0$. Usando a bilinearidade, essa desigualdade pode ser reescrita como $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2t\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + t^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$, ou seja, $\|\vec{v}\|^2 \cdot t^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle t + \|\vec{u}\|^2 \geq 0$, uma inequação do segundo grau, já que $\|\vec{v}\| \neq 0$, que não assume valores negativos. Como o coeficiente de t^2 é positivo, temos que o discriminante Δ satisfaz $\Delta \leq 0$. Assim, temos que



$(2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 - 4 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2 \leq 0 \Rightarrow 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq 4 \cdot \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. ■

- Desigualdade Triangular: Se $\vec{u}, \vec{v} \in V$, então $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.



- Dem: Temos $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle =$
$= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$ pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Daí, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

O lado verde é menor ou igual à soma dos outros dois.

■

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz nos mostra que $\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$ para todos $\vec{u}, \vec{v} \in V$, logo $-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$, de modo que faz sentido definir:

Definição: O ângulo entre os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ é definido como $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$. Observe que isso estende o conceito da Geometria Analítica para qualquer produto interno.

Exemplo: Novamente considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno $\langle (x,y,z), (a,b,c) \rangle = xa + xc + za + yb - zb - yc + 3zc$. Calculemos o ângulo θ entre $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ nesse produto interno. Temos $\langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle = 1$, $\|(1,0,0)\| = \sqrt{\langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle} = 1$ e $\|(0,0,1)\| = \sqrt{3}$, logo $\cos\theta = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}}$, ou seja, $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$. No produto interno usual o ângulo entre esses vetores é $\pi/2$, logo os ângulos também mudam quando modificamos o produto interno, que, além da régua, também é o transferidor do espaço vetorial.

* Como em Geometria Analítica, dizemos que $\vec{u}, \vec{v} \in V$ são ortogonais se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, o que denotamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$. É claro que isso também depende do produto interno, como vimos no Exemplo acima: $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ são ortogonais no produto interno canônico, mas não nesse outro produto interno.

Exemplo: Em P_1, calcule o ângulo entre $p_1(x) = 1 + x$ e $p_2(x) = 1 - x$ se o produto interno é dado por $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx$.

Solução: Temos $\cos\theta = \frac{\langle 1+x, 1-x \rangle}{\|1+x\| \cdot \|1-x\|}$. Como $\langle 1+x, 1-x \rangle = \int_0^1 (1+x)(1-x)\, dx = \int_0^1 (1-x^2)\, dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} =$

$= \frac{2}{3}$, $\|1+x\|^2 = \langle 1+x, 1+x\rangle = \int_0^1 (1+x)^2 dx = \int_0^1 (1+2x+x^2) dx = \left(x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ e $\|1-x\|^2 =$
$= \langle 1-x, 1-x\rangle = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 (1-2x+x^2)\, dx = \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1-1+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, segue que $\cos\theta = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} =$
$= \dfrac{2/3}{\sqrt{7}/3} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, logo $\boxed{\theta = \arccos\left(2/\sqrt{7}\right)}$. ■

- **Exemplo:** Em $M_{2\times 2}$, calcule o ângulo entre $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ se o produto interno é dado por $\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right\rangle = ax + 2by + 3cz + dw$.

- **Solução:** Temos $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 2+3+1 = 6$, $\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1+3+1 = 5$ e $\left\| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 4+2+3+1 = 10$, logo $\cos\theta = \dfrac{6}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{6}{5\sqrt{2}}$, ou seja, $\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{6}{5\sqrt{2}}\right)}$. ■