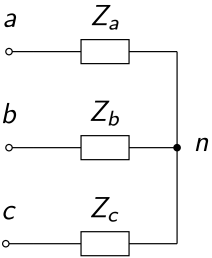
EA611 – Circuitos II

Capítulo 3
Potência em circuitos trifásicos

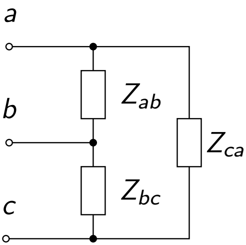
Carlos A. Castro

DSE/FEEC/UNICAMP

- Considere duas cargas trifásicas ligadas em Y e em Δ:



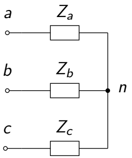
Carga em Y



Carga em Δ

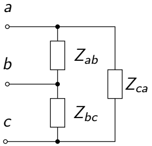
- A potência total fornecida a uma carga trifásica é igual à soma das potências entregues individualmente a cada impedância da carga

- Para a carga em Y:



$$S_{3\phi}^{Y} = S_a + S_b + S_c = \hat{V}_{an}\hat{I}_a^* + \hat{V}_{bn}\hat{I}_b^* + \hat{V}_{cn}\hat{I}_c^* \qquad (1)$$

- Para a carga em Δ:



$$S_{3\phi}^{\Delta} = S_{ab} + S_{bc} + S_{ca} = \hat{V}_{ab}\hat{I}_{ab}^* + \hat{V}_{bc}\hat{I}_{bc}^* + \hat{V}_{ca}\hat{I}_{ca}^* \qquad (2)$$

- As equações (1) e (2) são gerais, ou seja, são válidas para qualquer carga trifásica

- Considere o caso particular de cargas equilibradas. Considere também que as tensões aplicadas sobre as cargas sejam (sequência de fases ABC):

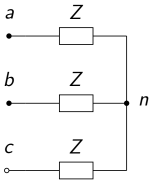
$$\hat{V}_{an} = V_f \angle 0^\circ \text{ V} \qquad \hat{V}_{ab} = V_\ell \angle 30^\circ \text{ V}$$
$$\hat{V}_{bn} = V_f \angle (-120^\circ) \text{ V} \qquad \hat{V}_{bc} = V_\ell \angle (-90^\circ) \text{ V}$$
$$\hat{V}_{cn} = V_f \angle 120^\circ \text{ V} \qquad \hat{V}_{ca} = V_\ell \angle 150^\circ \text{ V}$$

em que $V_\ell = \sqrt{3} V_f$

- No caso de cargas equilibradas, as impedâncias são representadas por:

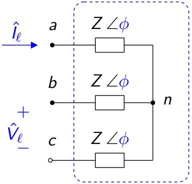
$$Z = |Z| \angle\phi \ \Omega$$

- Para a carga em Y:



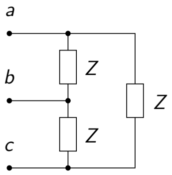
$$\begin{aligned}
\hat{I}_a &= \hat{V}_{an}/Z = I_\ell \angle(-\phi) \ \text{A} \\
\hat{I}_b &= \hat{V}_{bn}/Z = I_\ell \angle(-\phi - 120^\circ) \ \text{A} \\
\hat{I}_c &= \hat{V}_{cn}/Z = I_\ell \angle(-\phi + 120^\circ) \ \text{A}
\end{aligned}$$

- A potência trifásica fornecida pela fonte à carga em Y será igual a:



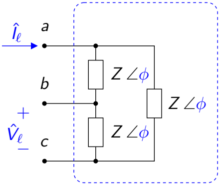
$$
\begin{aligned}
S_{3\phi}^{Y} &= V_f \angle 0^\circ \cdot I_\ell \angle\phi + V_f \angle(-120^\circ) \cdot I_\ell \angle(\phi + 120^\circ) + \\
&\quad V_f \angle 120^\circ \cdot I_\ell \angle(\phi - 120^\circ) \\
&= 3 V_f I_\ell \angle\phi \\
&= 3 \left(\frac{V_\ell}{\sqrt{3}} \right) I_\ell \angle\phi \\
&= \sqrt{3} V_\ell I_\ell \angle\phi \text{ VA}
\end{aligned} \tag{3}
$$

- Para a carga em Δ:



$$\hat{I}_{ab} = \hat{V}_{ab}/Z = I_f \angle (30^\circ - \phi) \text{ A}$$
$$\hat{I}_{bc} = \hat{V}_{bc}/Z = I_f \angle (-90^\circ - \phi) \text{ A}$$
$$\hat{I}_{ca} = \hat{V}_{ca}/Z = I_f \angle (150^\circ - \phi) \text{ A}$$

- A potência trifásica fornecida pela fonte à carga em Δ será igual a:



$$
\begin{aligned}
S_{3\phi}^{\Delta} &= V_\ell \angle 30^\circ \cdot I_f \angle(-30^\circ + \phi) + \\
&\quad V_\ell \angle(-90^\circ) \cdot I_f \angle(90^\circ + \phi) + \\
&\quad V_\ell \angle 150^\circ \cdot I_f \angle(-150^\circ + \phi) \\
&= 3 V_\ell I_f \angle\phi \\
&= 3 V_\ell \left(\frac{I_\ell}{\sqrt{3}}\right) \angle\phi \\
&= \sqrt{3} V_\ell I_\ell \angle\phi \text{ VA}
\end{aligned} \tag{4}
$$

- Para cargas trifásicas equilibradas, a potência total fornecida é igual a:

$$S_{3\phi} = \sqrt{3} V_\ell I_\ell \angle\phi \text{ VA}$$

para conexões em Y e em Δ

- A potência total fornecida a uma carga trifásica equilibrada depende dos valores de tensão e corrente de linha e do ângulo da impedância de carga

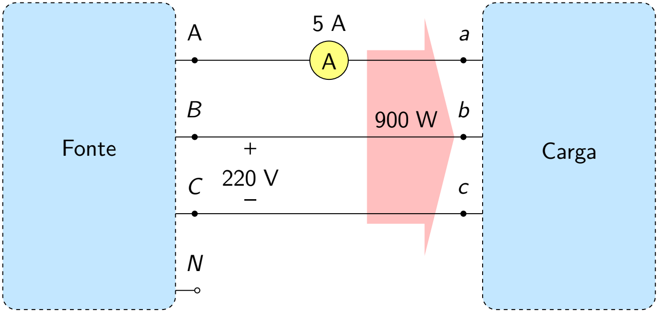
- As potências ativa e reativa totais valem:

$$P_{3\phi} = \Re\{S_{3\phi}\} = \sqrt{3} V_\ell I_\ell \cos\phi \text{ W}$$
$$Q_{3\phi} = \Im\{S_{3\phi}\} = \sqrt{3} V_\ell I_\ell \operatorname{sen}\phi \text{ var}^1$$

[1] Unidade segundo a Resolução n.12, de 12 de outubro de 1988, do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (CONMETRO).

Exemplo

Uma carga indutiva trifásica equilibrada é alimentada por uma fonte de tensão trifásica de 220 V de linha. A corrente de linha medida é de 5 A e a potência ativa total fornecida é de 900 W.



1. Obtenha as potências aparente, complexa, reativa e o fator de potência da carga.
2. Determine as impedâncias por fase para os casos em que a carga está conectada em Y e em Δ.

As grandezas pedidas são calculadas por:

$$|\,S_{3\phi}\,| = \sqrt{3} V_\ell I_\ell = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 5 = 1905{,}3 \text{ VA}$$

$$\text{fp} = \cos\phi = P_{3\phi} / \ |\,S_{3\phi}\,| = 900/1905{,}3 = 0{,}47$$

$$\phi = \cos^{-1}(\text{fp}) = \cos^{-1}(0{,}47) = 61{,}8^\circ$$

$$S_{3\phi} = \ |\,S_{3\phi}\,| \angle\phi = 1905{,}3 \angle 61{,}8^\circ \text{ VA}$$

$$Q_{3\phi} = \ |\,S_{3\phi}\,| \cdot \text{sen}\,\phi = 1679{,}3 \text{ var}$$

Considerando que a carga esteja conectada em Y:

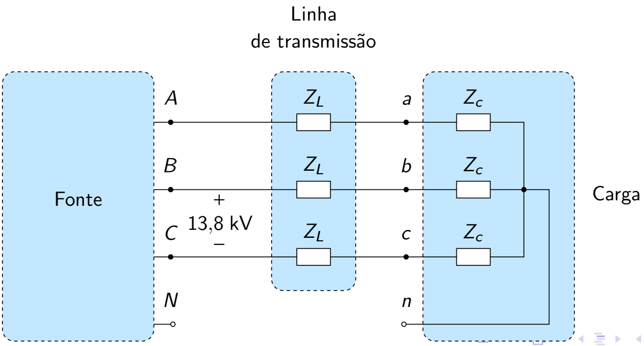
$$
\begin{aligned}
Z_{\mathsf{Y}} &= \frac{\hat{V}_{an}}{\hat{I}_a} \cdot \left(\frac{\hat{V}_{an}^*}{\hat{V}_{an}^*} \right) = \frac{V_{an}^2}{S_a^*} = \frac{\left(V_{ab}/\sqrt{3} \right)^2}{S_{3\phi}^*/3} \\
&= \frac{V_{ab}^2}{S_{3\phi}^*} = \frac{220^2}{1905{,}3 \angle (-61{,}8^\circ)} = 25{,}4 \angle 61{,}8^\circ \ \Omega
\end{aligned}
$$

Para conexão em Δ:

$$
\begin{aligned}
Z_{\Delta} &= \frac{\hat{V}_{ab}}{\hat{I}_{ab}} \cdot \left(\frac{\hat{V}_{ab}^*}{\hat{V}_{ab}^*} \right) = \frac{V_{ab}^2}{S_{ab}^*} = \frac{V_{ab}^2}{S_{3\phi}^*/3} \\
&= \frac{3V_{ab}^2}{S_{3\phi}^*} = \frac{3 \cdot 220^2}{1905{,}3 \angle (-61{,}8^\circ)} = 76{,}2 \angle 61{,}8^\circ \ \Omega = 3 \cdot Z_{\mathsf{Y}}
\end{aligned}
$$

Exemplo

A figura a seguir mostra um circuito em que uma fonte trifásica de 13,8 kV de linha alimenta uma carga trifásica equilibrada em Y de impedância $Z_c = 200 + j\,50\ \Omega$ por fase através de uma linha de transmissão de impedância $Z_L = j\,10\ \Omega$ por fase.



Pede-se:

1. a corrente de linha.
2. a tensão na carga e a queda de tensão na linha.
3. a potência aparente entregue à carga.
4. a potência aparente fornecida pela fonte.
5. as potências ativa e reativa consumidas pela linha.
6. o fator de potência da carga e o fator de potência visto pela fonte.

Como a carga é equilibrada, pode-se calcular somente as tensões e correntes para uma das fases.

As tensões e correntes das outras fases podem ser obtidas simplesmente levando em conta as defasagens apropriadas, já que seus valores eficazes são os mesmos.

Assim, basta definir uma das tensões de fase, como por exemplo:

$$\hat{V}_{AN} = \frac{13{,}8}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ kV}$$

Corrente na fase A:

$$\hat{I}_A = \frac{\hat{V}_{AN}}{Z_c + Z_L} = \frac{13{,}8 \cdot 10^3 / \sqrt{3} \angle 0^\circ}{j\,10 + (200 + j\,50)} = 38{,}16 \angle (-16{,}7^\circ) \text{ A}$$

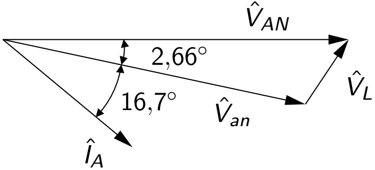
Tensão de fase sobre a carga:

$$\hat{V}_{an} = Z_c \hat{I}_A = 7{,}87 \angle(-2{,}66^\circ) = \frac{13{,}62}{\sqrt{3}} \angle(-2{,}66^\circ) \text{ kV}$$

Queda de tensão na linha de transmissão:

$$\hat{V}_L = \hat{V}_{AN} - \hat{V}_{an} = Z_L \hat{I}_A = 381{,}6 \angle 73{,}3^\circ \text{ V}$$

Diagrama fasorial para a fase A:



Potência aparente entregue à carga:

$$|S_c| = 3V_{an}I_A = 900{,}2 \text{ kVA} \approx 0{,}9 \text{ MVA}$$

Potência aparente fornecida pela fonte:

$$|S_F| = 3V_{AN}I_A = 912{,}1 \text{ kVA} \approx 0{,}91 \text{ MVA}$$

Potência complexa consumida pela linha de transmissão:

$$S_L = 3\hat{V}_L\hat{I}_A^* = 43{,}7 \angle 90^\circ \text{ kVA}$$

ou seja:

$$P_L = 0$$
$$Q_L = 43{,}7 \text{ kvar} \approx 0{,}04 \text{ Mvar}$$

Naturalmente, não há consumo de potência ativa pela linha já que ela é composta somente por uma reatância.

A perda de potência na linha corresponde a pouco mais de 4% da potência fornecida pela fonte.

O fator de potência da carga é igual ao cosseno do ângulo de defasagem entre a tensão da fase A e a corrente pela fase A:

$$\begin{aligned} \mathrm{fp}^c &= \cos\left[\angle\left(\hat{V}_{an}\right) - \angle\left(\hat{I}_A\right)\right] \\ &= \cos\left[(-2{,}66^\circ) - (-16{,}7^\circ)\right] = 0{,}970 \end{aligned}$$

O fator de potência da carga também corresponde ao cosseno do ângulo da impedância da carga:

$$
\begin{aligned}
\text{fp}^c &= \cos\left[\text{tg}^{-1}\left(\frac{X_c}{R_c}\right)\right] \\
&= \cos\left[\text{tg}^{-1}\left(\frac{50}{200}\right)\right] = 0{,}970
\end{aligned}
$$

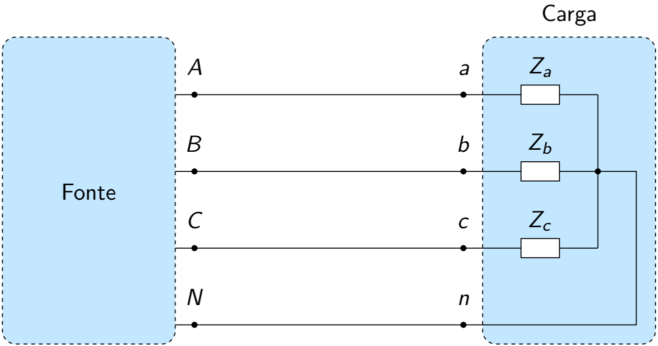
Fator de potência visto pela fonte:

$$
\begin{aligned}
\text{fp}^F &= \cos\left[\angle\left(\hat{V}_{AN}\right) - \angle\left(\hat{I}_A\right)\right] \\
&= \cos\left[0^\circ - (-16{,}7^\circ)\right] = 0{,}958
\end{aligned}
$$

O fator de potência visto pela fonte é igual ao cosseno do ângulo da impedância da carga em série com a impedância da linha.

Como a impedância da linha é puramente indutiva, sua presença resulta em um fator de potência visto pela fonte menor do que o fator de potência da carga.

- Carga trifásica em Y com neutro (a 4 fios), para a qual deseja-se medir a potência ativa total consumida:

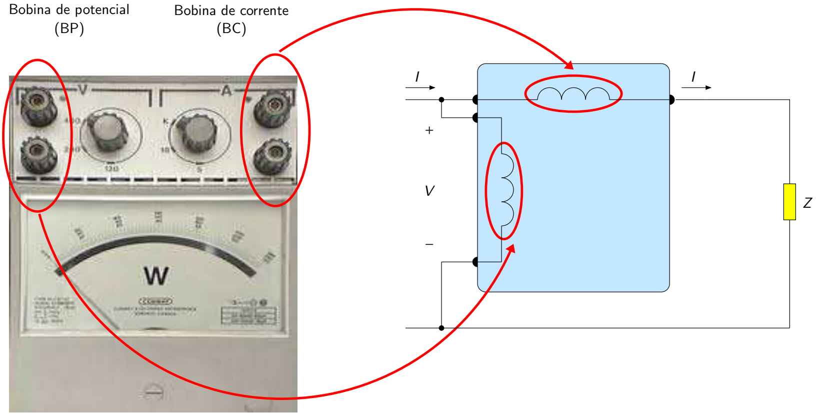


- A potência ativa total consumida pela carga é igual à soma das potências ativas consumidas em cada fase:

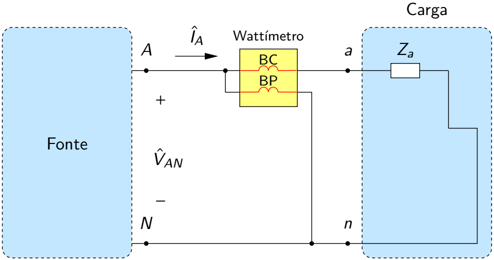
$$\begin{aligned} P_{3\phi} &= P_A + P_B + P_C \\ &= V_{AN} I_A \cos\phi_A + V_{BN} I_B \cos\phi_B + V_{CN} I_C \cos\phi_C \end{aligned}$$

em que ϕ_A, ϕ_B e ϕ_C são os ângulos das impedâncias das fases

- A potência ativa consumida por uma impedância pode ser medida através da conexão de um wattímetro:



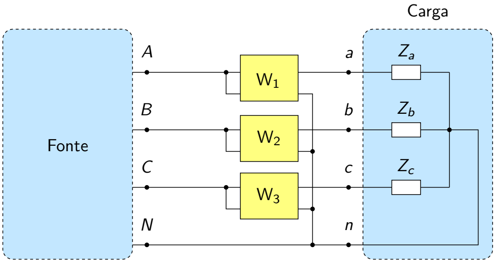
- Voltando ao circuito trifásico, a potência ativa consumida pela impedância da fase A é obtida através da colocação de um wattímetro:



Pela bobina de corrente BC circula a corrente de linha $\hat{I}_A$ e sobre a bobina de potencial BP é aplicada a tensão de fase $\hat{V}_{AN}$. Então:

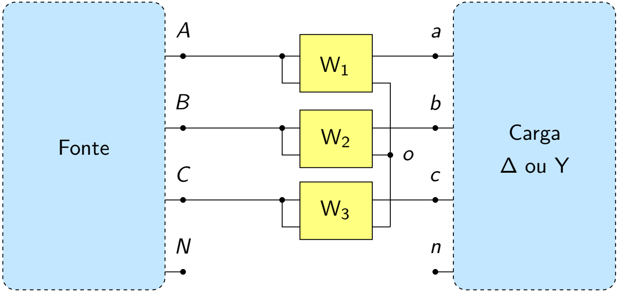
$$P_A = V_{AN} I_A \cos \phi_A = \Re \left\{ \hat{V}_{AN} \hat{I}_A^* \right\}$$

- Se dois wattímetros adicionais forem ligados às outras fases da carga, a potência ativa total será dada pela soma das leituras dos três wattímetros:



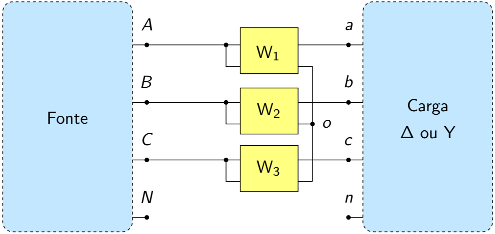
Em particular, se a carga for equilibrada, basta ligar um wattímetro, que medirá um terço da potência total, e multiplicar a leitura por três para obter a potência total consumida.

- Para cargas cujas impedâncias estão conectadas em Δ ou Y sem neutro, a ligação dos wattímetros é feita da seguinte forma:



Não há conexão entre o neutro da carga e o neutro da fonte. Assim, o ponto comum dos wattímetros *o* permanece em um potencial arbitrário

- As indicações dos três wattímetros serão:

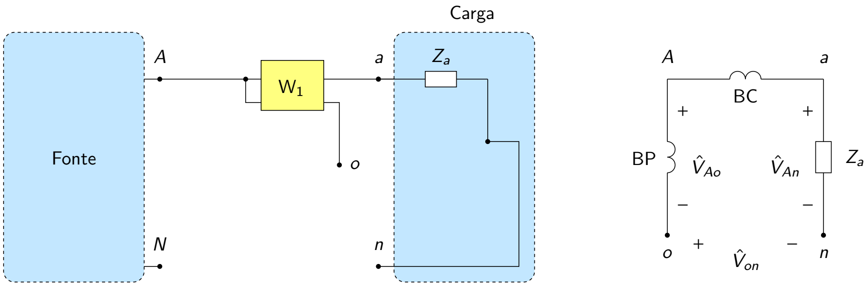


$$P_1 = \Re\left\{\hat{V}_{Ao}\hat{I}_A^*\right\}$$

$$P_2 = \Re\left\{\hat{V}_{Bo}\hat{I}_B^*\right\}$$

$$P_3 = \Re\left\{\hat{V}_{Co}\hat{I}_C^*\right\}$$

- Fase A do circuito trifásico:



Para a malha mostrada tem-se:

$$\hat{V}_{on} + \hat{V}_{Ao} - \hat{V}_{An} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{V}_{Ao} = \hat{V}_{An} - \hat{V}_{on}$$

- Expressões semelhantes são obtidas para as demais fases:

$$\hat{V}_{Bo} = \hat{V}_{Bn} - \hat{V}_{on}$$
$$\hat{V}_{Co} = \hat{V}_{Cn} - \hat{V}_{on}$$

A soma das leituras dos três wattímetros será:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} P_i = P_1 + P_2 + P_3 &= \Re \left\{ \hat{V}_{Ao}\hat{I}_A^* + \hat{V}_{Bo}\hat{I}_B^* + \hat{V}_{Co}\hat{I}_C^* \right\} \\
&= \Re \left\{ \left(\hat{V}_{An} - \hat{V}_{on} \right) \hat{I}_A^* + \left(\hat{V}_{Bn} - \hat{V}_{on} \right) \hat{I}_B^* + \left(\hat{V}_{Cn} - \hat{V}_{on} \right) \hat{I}_C^* \right\} \\
&= \Re \left\{ \hat{V}_{An}\hat{I}_A^* + \hat{V}_{Bn}\hat{I}_B^* + \hat{V}_{Cn}\hat{I}_C - \hat{V}_{on} \left(\hat{I}_A^* + \hat{I}_B^* + \hat{I}_C^* \right) \right\}
\end{aligned}$$

- Como a soma das correntes de linha é igual a zero, chega-se finalmente a:

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = \Re \left\{ \hat{V}_{An} \hat{I}_A^* + \hat{V}_{Bn} \hat{I}_B^* + \hat{V}_{Cn} \hat{I}_C^* \right\} = P_{3\phi}$$

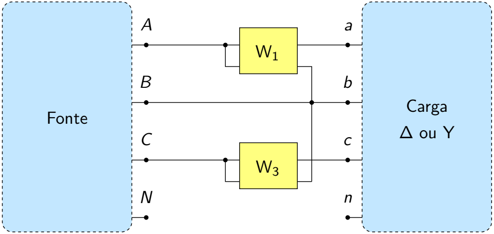
  Assim, a soma das leituras dos três wattímetros fornece a potência ativa total entregue à carga, independentemente do potencial do ponto *o*

- Como o potencial do ponto *o* não tem influência no resultado final, pode-se atribuir a ele um potencial em particular. Portanto, pode-se conectar o ponto *o* a uma das fases, como por exemplo, à fase *b*. Neste caso, o wattímetro 2, que originalmente media:

$$P_2 = \Re\left\{\hat{V}_{Bo}\hat{I}_B^*\right\}$$

passará a indicar potência nula, pois não haverá diferença de potencial aplicada em sua bobina de potencial (BP)

- Portanto, o wattímetro 2 pode ser retirado do circuito:



A soma das leituras indicadas pelos wattímetros 1 e 3 será:

$$P_1 + P_3 = \Re\left\{\hat{V}_{AB}\hat{I}_A^* + \hat{V}_{CB}\hat{I}_C^*\right\}$$

- Considerando que:

$$\hat{V}_{AB} = \hat{V}_{An} - \hat{V}_{Bn}$$
$$\hat{V}_{CB} = \hat{V}_{Cn} - \hat{V}_{Bn}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} P_1 + P_3 &= \Re\left\{\left(\hat{V}_{An} - \hat{V}_{Bn}\right)\hat{I}_A^* + \left(\hat{V}_{Cn} - \hat{V}_{Bn}\right)\hat{I}_C^*\right\} \\ &= \Re\left\{\hat{V}_{An}\hat{I}_A^* - \hat{V}_{Bn}\underbrace{\left(\hat{I}_A^* + \hat{I}_C^*\right)}_{=-\hat{I}_B^*} + \hat{V}_{Cn}\hat{I}_C^*\right\} \\ &= \Re\left\{\hat{V}_{An}\hat{I}_A^* + \hat{V}_{Bn}\hat{I}_B^* + \hat{V}_{Cn}\hat{I}_C^*\right\} = P_{3\phi} \end{aligned}$$

- É possível medir a potência ativa total consumida por uma carga a 4 fios utilizando 3 wattímetros. No caso de uma carga a 3 fios, apenas 2 wattímetros são suficientes

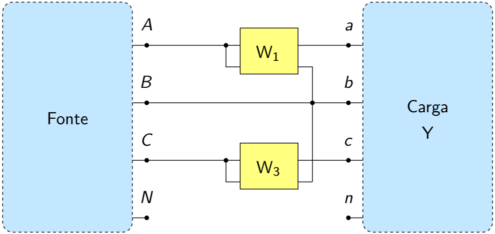
  Em geral, a potência ativa total entregue a uma carga com n fios pode ser obtida através da utilização de $(n-1)$ wattímetros

Teorema de Blondel ou método dos $(n-1)$ wattímetros

Se a energia é fornecida a uma carga polifásica por n fios, a potência total na carga é dada pela soma algébrica das leituras de n wattímetros, ligados de tal maneira que cada um dos n fios contenha uma bobina de corrente de um aparelho, estando a bobina de potencial correspondente ligada entre este fio e um ponto comum a todas as bobinas de potencial. Se este ponto estiver sobre um dos n fios, bastam $(n-1)$ wattímetros.

Exemplo

A figura abaixo mostra uma fonte de tensão de 220 V de linha que alimenta uma carga trifásica desequilibrada em Y cujas impedâncias das fases valem $Z_a = 100\ \Omega$, $Z_b = 200\ \Omega$ e $Z_c = 100\ \Omega$.



Calcule a potência ativa total consumida pela carga. Obtenha também as leituras de cada wattímetro e a potência ativa total medida.

Considere que as tensões fornecidas pela fonte de tensão sejam:

$$\hat{V}_{AN} = 127\ \angle 0^\circ\ \text{V} \qquad \hat{V}_{AB} = 220\ \angle 30^\circ\ \text{V}$$
$$\hat{V}_{BN} = 127\ \angle(-120^\circ)\ \text{V} \qquad \hat{V}_{BC} = 220\ \angle(-90^\circ)\ \text{V}$$
$$\hat{V}_{CN} = 127\ \angle 120^\circ\ \text{V} \qquad \hat{V}_{CA} = 220\ \angle 150^\circ\ \text{V}$$

A tensão entre os pontos neutros da carga e da fonte será:

$$\hat{V}_{nN} = \frac{Y_a \hat{V}_{AN} + Y_b \hat{V}_{BN} + Y_c \hat{V}_{CN}}{Y_a + Y_b + Y_c} = 25{,}4\ \angle 60^\circ\ \text{V}$$

Tensões de fase aplicadas sobre carga:

$$\hat{V}_{An} = \hat{V}_{AN} - \hat{V}_{nN} = 116{,}4 \angle(-10{,}9^\circ) \text{ V}$$
$$\hat{V}_{Bn} = \hat{V}_{BN} - \hat{V}_{nN} = 152{,}4 \angle(-120^\circ) \text{ V}$$
$$\hat{V}_{Cn} = \hat{V}_{CN} - \hat{V}_{nN} = 116{,}4 \angle 130{,}9^\circ \text{ V}$$

Correntes de linha:

$$\hat{I}_A = \hat{V}_{An}/Z_a = 1{,}164 \angle(-10{,}9^\circ) \text{ A}$$
$$\hat{I}_B = \hat{V}_{Bn}/Z_b = 0{,}762 \angle(-120^\circ) \text{ A}$$
$$\hat{I}_C = \hat{V}_{Cn}/Z_c = 1{,}164 \angle 130{,}9^\circ \text{ A}$$

Potências por fase e a potência total:

$$P_A = R_A I_A^2 = 135{,}5 \text{ W}$$

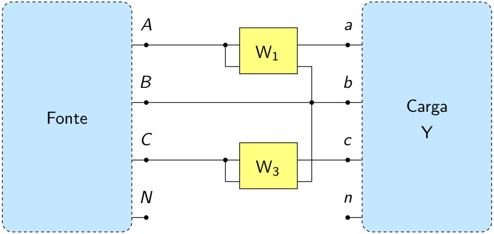
$$P_B = R_B I_B^2 = 116{,}2 \text{ W}$$

$$P_C = R_C I_C^2 = 135{,}5 \text{ W}$$

$$P_{3\phi} = P_A + P_B + P_C = 387{,}2 \text{ W}$$

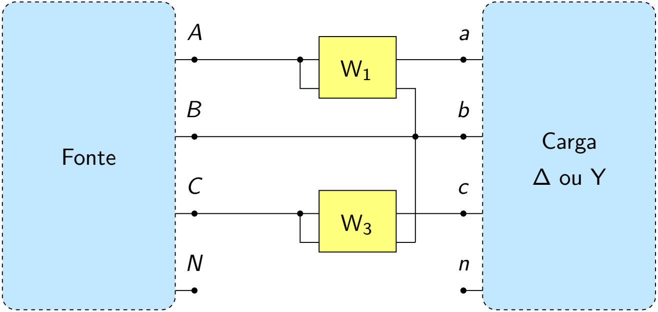
Leituras indicadas por cada wattímetro:

$$\begin{aligned} P_1 &= \Re\left\{\hat{V}_{AB}\hat{I}_A^*\right\} \\ &= V_{AB}I_A\cos\left(30^\circ + 10{,}9^\circ\right) \\ &= 193{,}6 \text{ W} \\ P_3 &= \Re\left\{\hat{V}_{CB}\hat{I}_C^*\right\} \\ &= V_{CB}I_C\cos\left(90^\circ - 130{,}9^\circ\right) \\ &= 193{,}6 \text{ W} \end{aligned}$$

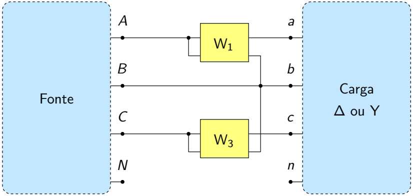


$$P_{3\phi} = P_1 + P_3 = 387{,}2 \text{ W}$$

- Considere novamente o circuito trifásico a 3 fios mostrado a seguir.



- As leituras dos wattímetros 1 e 3 serão iguais a:

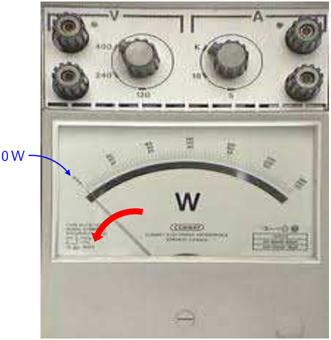


$$
\begin{aligned}
P_1 &= \Re\left\{\hat{V}_{AB}\hat{I}_A^*\right\} \\
&= V_{AB} I_A \cos\left(\angle\left(\hat{V}_{AB}\right) - \angle\left(\hat{I}_A\right)\right) \\
&= V_{AB} I_A \cos\gamma_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \Re\left\{\hat{V}_{CB}\hat{I}_C^*\right\} \\
&= V_{CB} I_C \cos\left(\angle\left(\hat{V}_{CB}\right) - \angle\left(\hat{I}_C\right)\right) \\
&= V_{CB} I_C \cos\gamma_3
\end{aligned}
$$

- Dependendo da característica da carga e, portanto, dos ângulos de defasagem entre as tensões e correntes (γ_1 e γ_3), P_1 e P_3 poderão apresentar valores positivos ou negativos

- Caso sejam utilizados wattímetros analógicos, valores negativos de potências farão com que seus ponteiros tendam a defletir em direção ao lado negativo da escala



Analógico

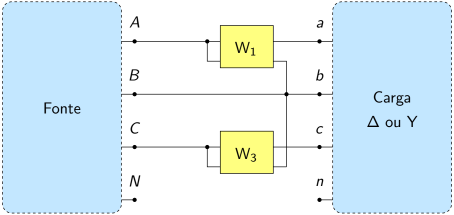
Digital

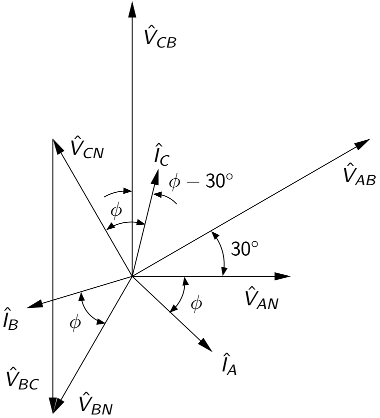
- Nestes casos, deve-se inverter a ligação de uma das bobinas (de corrente ou de potencial, sendo mais comum a inversão da última, pois não há interrupção da operação do circuito)

- Embora a leitura de potência neste caso seja um valor positivo, sabe-se que a potência de fato deve ser considerada como negativa

- A potência total fornecida à carga é dada pela soma algébrica das leituras dos wattímetros

- Diagrama fasorial contendo as tensões e correntes na fonte de tensão, para o caso particular em que a carga é equilibrada ($Z_a = Z_b = Z_c$):





- Considerando que a sequência de fases seja ABC e que a tensão da fase A seja tomada como referência angular, as leituras dos wattímetro serão:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \Re\left\{\hat{V}_{AB}\hat{I}_A^*\right\} \\
&= \Re\left\{V_L \angle 30^\circ \cdot \left[I_L \angle(-\phi)\right]^*\right\} \\
&= \Re\left\{V_L I_L \angle(\phi + 30^\circ)\right\} \\
P_1 &= V_L I_L \cos(\phi + 30^\circ) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \Re\left\{\hat{V}_{CB}\hat{I}_C^*\right\} \\
&= \Re\left\{V_L \angle 90^\circ \cdot \left[I_L \angle(120^\circ - \phi)\right]^*\right\} \\
&= \Re\left\{V_L I_L \angle(\phi - 30^\circ)\right\} \\
P_3 &= V_L I_L \cos(\phi - 30^\circ) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

- Nota-se que os valores de potência indicados pelos wattímetros podem ser positivos ou negativos dependendo do ângulo da impedância, ou seja, do fator de potência da carga

  Se $\phi > 60^\circ$ ou $\phi < -60^\circ$, uma das leituras será negativa

  Então, se o fator de potência da carga for menor que 0,5 (ou seja, $\cos 60^\circ$), um dos wattímetros tenderá a defletir para o lado negativo da escala

  Assim, deve-se inverter a ligação de uma das bobinas do mesmo para a leitura de medida

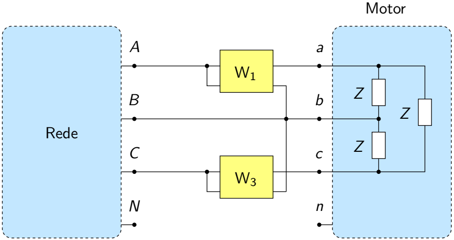
  No entanto, para a obtenção da potência ativa total, deve-se lembrar que a leitura daquele wattímetro é negativa

- Através das expressões de P_1 e P_3 dadas pelas equações (5) e (6) verifica-se que, no caso de um dos wattímetros acusar leitura negativa, deve-se inverter uma de suas bobinas e a potência total será dada por:

$$\text{(potência total)} = \text{(maior leitura)} - \text{(menor leitura)}$$

Exemplo

Um motor de indução[2] trifásico opera em vazio, ou seja, sem carga mecânica acoplada ao seu eixo. Ele está conectado a uma rede elétrica cuja tensão de linha é igual a 220 V:



Note que o motor é modelado como uma carga trifásica equilibrada em triângulo. A impedância por fase do motor é igual a $50\ \angle 80^\circ\ \Omega$. A sequência de fases é ABC.

Obtenha os valores das potência lidas em cada wattímetro analógico e a potência ativa total consumida pelo motor.

[2] Motor largamente empregado na prática devido à sua robustez de operação e baixo custo.

Corrente de linha fornecida pela rede ao motor:

$$I_L = \sqrt{3}\frac{V_L}{|\,Z\,|} = \sqrt{3} \cdot \frac{220}{50} = 4{,}4\sqrt{3} \text{ A}$$

Potências lidas em cada wattímetro:

$$P_1 = V_L I_L \cos(\phi + 30^\circ) = 220 \cdot 4{,}4\sqrt{3} \cdot \cos(80^\circ + 30^\circ) = -573{,}4 \text{ W}$$
$$P_3 = V_L I_L \cos(\phi - 30^\circ) = 220 \cdot 4{,}4\sqrt{3} \cdot \cos(80^\circ - 30^\circ) = 1077{,}7 \text{ W}$$

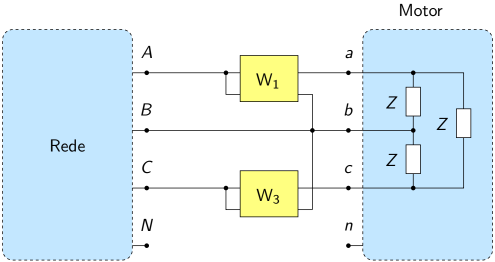
Potência total consumida pelo motor:

$$P_{3\phi} = P_1 + P_2 = -573{,}4 + 1077{,}7 = 504{,}3 \text{ W}$$

Se os wattímetros forem analógicos, deve-se inverter a conexão de uma das bobinas de W_1 para que a leitura seja feita adequadamente. Nota-se que a leitura de menor valor é aquela cujo sinal resultou negativo.

Exercício

Verifique que os valores de P_1, P_3 e $P_{3\phi}$ para o circuito do slide 50 serão os mesmos calculados anteriormente utilizando:



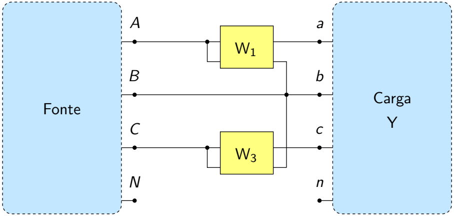
$$P_1 = \Re\left\{\hat{V}_{AB} \cdot \hat{I}_A^*\right\}$$

$$P_3 = \Re\left\{\hat{V}_{CB} \cdot \hat{I}_C^*\right\}$$

$$P_{3\phi} = P_1 + P_3$$

Exemplo

Considere novamente o circuito a seguir, em que uma fonte cuja tensão de linha é 220 V alimenta uma carga trifásica conectada em estrela e que tem as impedâncias por fase iguais a $Z_a = Z_b = Z_c = |\,Z\,| \angle\phi = 100 \angle\phi\ \Omega$.



A sequência de fases é ABC. Obtenha as leituras dos dois wattímetros e a potência trifásica total para $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$.

O valor eficaz da corrente de linha fornecida pela fonte independe do ângulo da impedância e vale:

$$I_L = \frac{V_L}{\sqrt{3}\ |Z|} = \frac{220}{\sqrt{3} \cdot 100} = 1{,}27 \text{ A}$$

As leituras dos wattímetros e a potência total são dadas por:

$$\begin{aligned} P_1 &= V_L I_L \cos(\phi + 30^\circ) = 220 \cdot 1{,}27 \cdot \cos(\phi + 30^\circ) = 279{,}4 \cdot \cos(\phi + 30^\circ) \\ P_3 &= V_L I_L \cos(\phi - 30^\circ) = 220 \cdot 1{,}27 \cdot \cos(\phi - 30^\circ) = 279{,}4 \cdot \cos(\phi - 30^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{3\phi} &= P_1 + P_3 = V_L I_L \left[\cos(\phi + 30^\circ) + \cos(\phi - 30^\circ)\right] \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \cos\phi = 483{,}9 \cos\phi \end{aligned}$$

Gráfico das curvas de P_1, P_2 e $P_{3\phi}$ em função de ϕ:

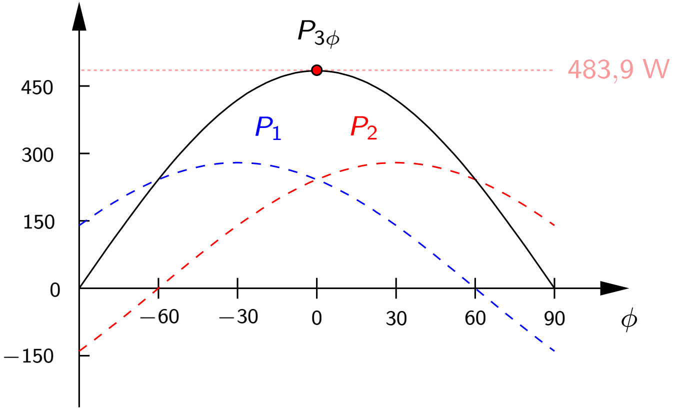


Tabela com leituras dos wattímetros e a potência total para alguns valores de ϕ:

ϕ (°)	P_1 (W)	P_3 (W)	$P_{3\phi}$ (W)
-90	139,70	$-139{,}70$	0,0
-60	241,97	0,0	241,97
-30	279,40	139,70	419,10
0	241,97	241,97	483,94
30	139,70	279,40	419,10
60	0,0	241,97	241,97
90	$-139{,}70$	139,70	0,0

Pode-se notar que:

- As potências totais para ϕ igual a -90° e 90° são iguais a zero, caracterizando cargas puramente reativas (capacitiva e indutiva, respectivamente).
- A leitura de um dos wattímetros é nula quando o valor absoluto de ϕ é 60°. Este é o ponto de mudança na deflexão dos wattímetros.

- O maior consumo de potência ativa ocorre para uma carga puramente resistiva, ou seja, para $\phi = 0°$. Para cada fase, a potência ativa consumida é:

$$P = R \cdot (I_L)^2$$

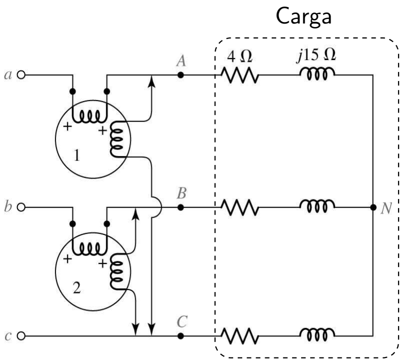
em que I_L é a corrente de linha e R é a resistência da respectiva fase, sendo dada por:

$$R = \mid Z \mid \cdot \cos\phi$$

A corrente de linha é constante para este exemplo e R atinge seu valor máximo para ϕ igual a zero.

Exercício

Determine as potências lidas nos wattímetros 1 e 2 e as potências ativa e reativa totais consumidas pela carga do circuito abaixo, alimentado por uma tensão de 230 V de linha, sequência de fases ABC.



Resp.: −511,5152 W ; 1389,4429 W ; 877,9277 W ; 3292,5560 var

- A potência reativa total de uma carga trifásica é igual à soma das potências reativas de cada fase, e pode ser medida através de wattímetros convenientemente conectados ao circuito
- O esquema de ligação será deduzido a partir do tipo mais geral de carga, que é a desequilibrada em estrela sem neutro, e será válido para todo tipo de carga, equilibrada ou desequilibrada, a três ou quatro fios

- A potência reativa total é dada por:

$$\begin{aligned} Q_{3\phi} &= Q_A + Q_B + Q_C \\ &= V_{An}\, I_A\ \operatorname{sen}\phi_A + V_{Bn}\, I_B\ \operatorname{sen}\phi_B + V_{Cn}\, I_C\ \operatorname{sen}\phi_C \\ &= \Im\left\{\hat{V}_{An}\, \hat{I}_A^*\right\} + \Im\left\{\hat{V}_{Bn}\, \hat{I}_B^*\right\} + \Im\left\{\hat{V}_{Cn}\, \hat{I}_C^*\right\} \end{aligned}$$

em que se considera que existe uma diferença de potencial entre o neutro da carga n e o neutro da fonte N (deslocamento de neutro)

- Conforme mostrado anteriormente, as tensões de fase da carga se relacionam com as tensões de fase da fonte através de:

$$\hat{V}_{An} = \hat{V}_{AN} - \hat{V}_{nN} \qquad \hat{V}_{Bn} = \hat{V}_{BN} - \hat{V}_{nN} \qquad \hat{V}_{Cn} = \hat{V}_{CN} - \hat{V}_{nN}$$

- A expressão de $Q_{3\phi}$ fica:

$$
\begin{aligned}
Q_{3\phi} &= \Im\left\{\hat{V}_{An}\,\hat{I}_A^* + \hat{V}_{Bn}\,\hat{I}_B^* + \hat{V}_{Cn}\,\hat{I}_C^*\right\} \\
&= \Im\left\{\left(\hat{V}_{AN} - \hat{V}_{nN}\right)\,\hat{I}_A^* + \left(\hat{V}_{BN} - \hat{V}_{nN}\right)\,\hat{I}_B^* + \left(\hat{V}_{CN} - \hat{V}_{nN}\right)\,\hat{I}_C^*\right\} \\
&= \Im\left\{\hat{V}_{AN}\,\hat{I}_A^* + \hat{V}_{BN}\,\hat{I}_B^* + \hat{V}_{CN}\,\hat{I}_C^* - \hat{V}_{nN}\,\left(\underbrace{\hat{I}_A^* + \hat{I}_B^* + \hat{I}_C^*}_{=0}\right)\right\} \\
&= \Im\left\{\hat{V}_{AN}\,\hat{I}_A^* + \hat{V}_{BN}\,\hat{I}_B^* + \hat{V}_{CN}\,\hat{I}_C^*\right\} \\
&= \Im\left\{\hat{V}_{AN}\,\hat{I}_A^*\right\} + \Im\left\{\hat{V}_{BN}\,\hat{I}_B^*\right\} + \Im\left\{\hat{V}_{CN}\,\hat{I}_C^*\right\}
\end{aligned}
$$

- Considerando as tensões da fonte como equilibradas, na sequência ABC e com referência angular na fase *a*, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{AN} &= V_{AN}\angle 0^\circ = V_F\angle 0^\circ \text{ V} \\
\hat{V}_{BN} &= V_{BN}\angle -120^\circ = V_F\angle -120^\circ \text{ V} \\
\hat{V}_{CN} &= V_{CN}\angle 120^\circ = V_F\angle 120^\circ \text{ V}
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{AB} &= V_{AB}\angle 30^\circ = \sqrt{3}\ V_F\angle 30^\circ \text{ V} \\
\hat{V}_{BC} &= V_{BC}\angle -90^\circ = \sqrt{3}\ V_F\angle -90^\circ \text{ V} \\
\hat{V}_{CA} &= V_{CA}\angle 150^\circ = \sqrt{3}\ V_F\angle 150^\circ \text{ V}
\end{aligned}$$

- A relação entre as tensões $\hat{V}_{AN}$ e $\hat{V}_{BC}$ é:

$$\frac{\hat{V}_{AN}}{\hat{V}_{BC}} = \frac{V_F \angle 0^\circ}{\sqrt{3}\ V_F \angle -90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ$$

- Da mesma forma:

$$\frac{\hat{V}_{BN}}{\hat{V}_{CA}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ \qquad \text{e} \qquad \frac{\hat{V}_{CN}}{\hat{V}_{AB}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ$$

- Substituíndo as tensões na expressão de $Q_{3\phi}$:

$$Q_{3\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\Im\left\{ \hat{V}_{BC}\ \hat{I}_A^* \angle 90^\circ \right\} + \Im\left\{ \hat{V}_{CA}\ \hat{I}_B^* \angle 90^\circ \right\} + \Im\left\{ \hat{V}_{AB}\ \hat{I}_C^* \angle 90^\circ \right\} \right]$$

- Tomando somente um dos termos da expressão de $Q_{3\phi}$ tem-se:

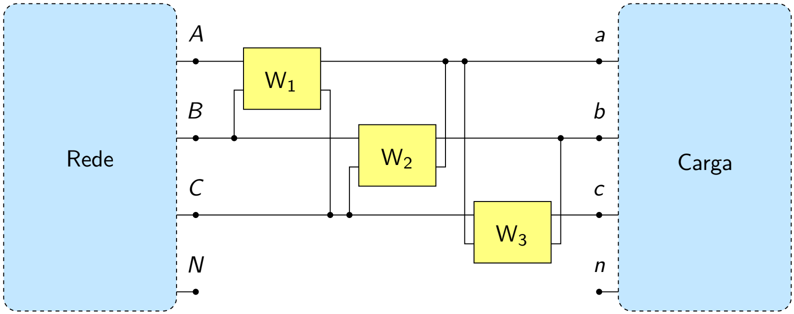
$$\begin{aligned}
\Im\left\{ \hat{V}_{BC}\ \hat{I}_A^* \angle 90^\circ \right\} &= V_{BC}\ I_A\ \text{sen}\ \left[\underbrace{\angle\left(\hat{V}_{BC}\right) - \angle\left(\hat{I}_A\right)}_{\alpha} + 90^\circ \right] \\
&= V_{BC}\ I_A\ [\text{sen}\,\alpha\ \cos 90^\circ + \text{sen}\,90^\circ\ \cos\alpha] \\
&= V_{BC}\ I_A\ \cos\alpha = \Re\left\{ \hat{V}_{BC}\ \hat{I}_A^* \right\}
\end{aligned}$$

- Assim, a expressão de $Q_{3\phi}$ fica:

$$Q_{3\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\Re\left\{ \hat{V}_{BC}\, \hat{I}_A^* \right\} + \Re\left\{ \hat{V}_{CA}\, \hat{I}_B^* \right\} + \Re\left\{ \hat{V}_{AB}\, \hat{I}_C^* \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[W_1 + W_2 + W_3 \right]$$

em que W_1, W_2 e W_3 são as leituras de três wattímetros ligados convenientemente!


Rede
A
B
C
N
W$_1$
W$_2$
W$_3$
a
b
c
n
Carga

- Em particular, se a carga for equilibrada, os três termos da expressão de $Q_{3\phi}$ serão iguais e somente um wattímetro é necessário

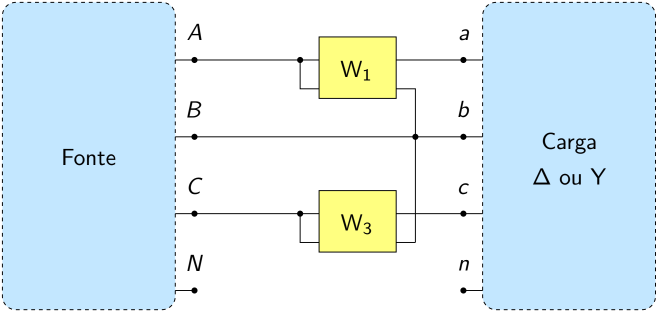
  Por exemplo, mantendo-se o wattímetro 1, a expressão da potência reativa total fica:

$$Q_{3\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \, [W_1 + W_2 + W_3] = \frac{1}{\sqrt{3}} \, [3 \cdot W_1] = \sqrt{3} \cdot W_1$$

  ou seja, a potência reativa total é $\sqrt{3}$ vezes maior que a leitura do wattímetro

- Se o método dos dois wattímetros estiver sendo utilizado para a medição de potência ativa em cargas equilibradas, é possível obter a potência reativa total utilizando a mesma conexão

- Considerando o circuito da figura:



- Realizando a operação:

$$
\begin{aligned}
P_3 - P_1 &= V_L \; I_L \; \cos\left(\phi - 30^\circ\right) - V_L \; I_L \; \cos\left(\phi + 30^\circ\right) \\
&= V_L \; I_L \; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \; \cos\phi + \frac{1}{2} \; \text{sen}\,\phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \; \cos\phi + \frac{1}{2} \; \text{sen}\,\phi \right) \\
&= V_L \; I_L \; \text{sen}\,\phi = \frac{Q_{3\phi}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

- É possível então obter o ângulo da impedância da carga:

$$
\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Q_{3\phi}}{P_{3\phi}} \right) = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\sqrt{3} \; \left(P_3 - P_1\right)}{P_1 + P_3} \right]
$$

Exemplo

O método dos dois wattímetros foi utilizado para medir a potência total entregue a um motor trifásico e as leituras foram:

$$P_1 = 1100 \text{ W} \qquad \text{e} \qquad P_3 = 2200 \text{ W}$$

Se a tensão de linha e a corrente de linha medidas são 220 V e 10 A respectivamente, obter as potências ativa, reativa e aparente totais consumidas pelo motor. Obter também o fator de potência do motor.

Potência ativa total consumida pelo motor:

$$P_{3\phi} = P_1 + P_3 = 3300 \text{ W}$$

Potência reativa total:

$$Q_{3\phi} = \sqrt{3}\ (P_3 - P_1) = 1905{,}3 \text{ var}$$

Ângulo da impedância do motor:

$$\phi = \text{ tg}^{-1} \left[\frac{\sqrt{3}\ (P_3 - P_1)}{P_1 + P_3} \right] = 30^\circ$$

que corresponde a um fator de potência 0,866 indutivo.

Potência aparente total:

$$S_{3\phi} = \frac{P_{3\phi}}{fp} = \frac{3300}{0{,}866} = 3810{,}5 \text{ VA}$$

- Medição das potências ativa e reativa em um motor trifásico [Vídeo]

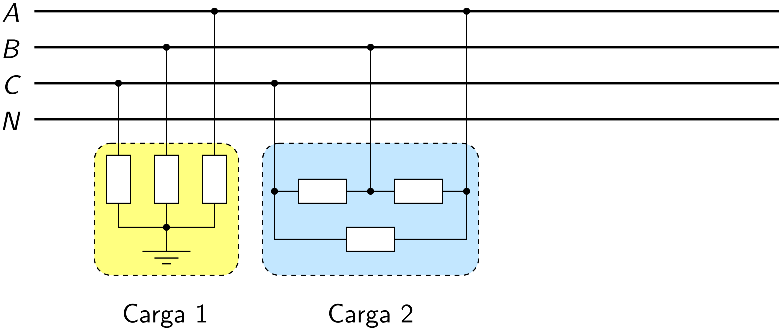
Exemplo

Considere novamente a fábrica alimentada em 380 V, 60 Hz (tensão de linha) com as seguintes cargas conectadas:

1. Carga 1, formada por três impedâncias de 250 VA, fp 0,7 indutivo, 220 V
2. Carga 2, formada por três impedâncias de 550 W, fp 0,8 indutivo, 380 V

Especifique um banco de capacitores para a correção do fator de potência para 0,92, se necessário.

De acordo com as especificações, o circuito é:



Carga 1: $S_1 = 3 \cdot 250 \angle \cos^{-1} 0{,}7 = 750 \angle 45{,}6^\circ$ VA

Carga 2: $S_2 = 3 \cdot \dfrac{550}{0{,}8} \angle \cos^{-1} 0{,}8 = 2062{,}5 \angle 36{,}9^\circ$ VA

Carga total: $S_T = S_1 + S_2 = 2174{,}1 + j\,1774{,}2 = 2806{,}2 \angle 39{,}2^\circ$ VA

$P_T = 2174{,}1$ W

$Q_T = 1774{,}2$ var

$\text{fp} = \cos 39{,}2^\circ = 0{,}77 \quad \rightarrow$ correção necessária

Fator de potência desejado:

$$\text{fp}' = \frac{P_T}{S'_T} = 0{,}92 \quad \rightarrow \quad S'_T = 2363{,}2 \text{ VA}$$

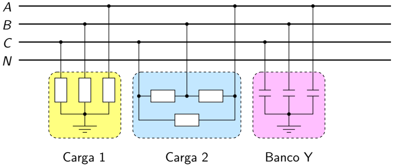
Potência reativa fornecida ao circuito após a correção do fator de potência:

$$Q'_T = \sqrt{{S'_T}^2 - {P_T}^2} = 926{,}3 \text{ var}$$

Potência requerida pelo banco de capacitores:

$$Q_C = Q'_T - Q_T = -847{,}9 \text{ var}$$

Considere um banco de capacitores em Y:



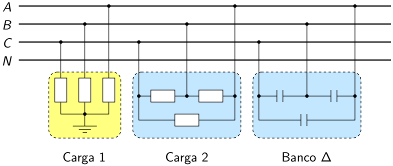
$$S_C = 3 \cdot \hat{V}_f \, \hat{I}_f^* = 3 \cdot \hat{V}_f \, \frac{\hat{V}_f^*}{Z_C^*} = 3 \cdot \frac{V_f^2}{Z_C^*}$$

$$Z_C = 3 \cdot \frac{V_f^2}{S_C^*} = 3 \cdot \frac{220^2}{j\,847{,}9} = -j\,171{,}2\,\Omega$$

$$C_Y = \frac{1}{\omega \cdot |Z_C|} = \frac{1}{377 \cdot 171{,}2} = 15{,}5\,\mu\text{F}$$

$\rightarrow$ Banco de capacitores de $15{,}5\,\mu\text{F}, 220\,\text{V}$

Considere agora um banco de capacitores em Δ:

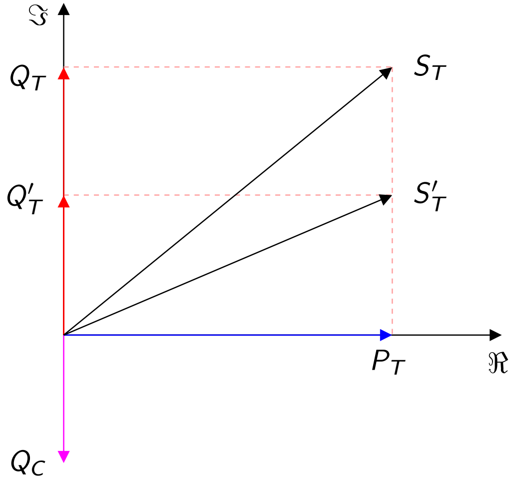


$$S_C = 3 \cdot \hat{V}_\ell \, \hat{I}_f^* = 3 \cdot \hat{V}_\ell \, \frac{\hat{V}_\ell^*}{Z_C^*} = 3 \cdot \frac{V_\ell^2}{Z_C^*}$$

$$Z_C = 3 \cdot \frac{V_\ell^2}{S_C^*} = 3 \cdot \frac{380^2}{j\,847{,}9} = -j\,510{,}9\,\Omega$$

$$C_Y = \frac{1}{\omega \cdot |Z_C|} = \frac{1}{377 \cdot 510{,}9} = 5{,}2\,\mu\text{F}$$

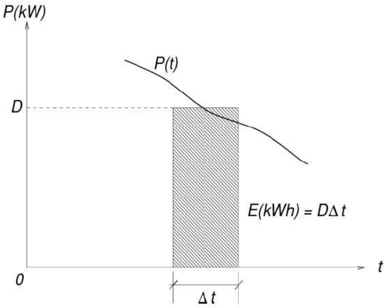
$\rightarrow$ Banco de capacitores de $5{,}2\,\mu$F, 380 V


$\Im$
Q_T
Q'_T
Q_C
S_T
S'_T
P_T
$\Re$

- A potência ativa consumida por uma instalação elétrica é variável, sendo função do número de cargas ligadas e da potência consumida por cada uma delas, a cada instante

- Para a análise de uma instalação é mais conveniente trabalhar com o conceito de demanda (D), que corresponde ao valor médio da potência ativa (P) em um intervalo de tempo Δt especificado, isto é:

$$D = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} P \cdot dt$$



No Brasil é oficializado o intervalo de tempo $\Delta t = 15$ minutos

- A definição indica que a demanda é medida em unidades de potência ativa (W, kW). Pode-se também definir uma demanda reativa D_Q (var, kvar) e uma demanda aparente D_S (VA, kVA)

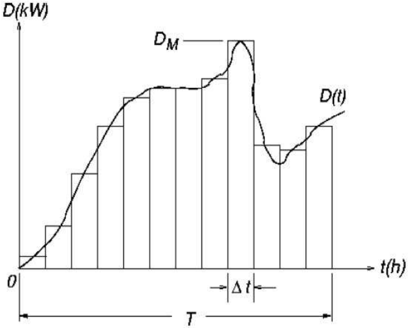
- A área hachurada entre a curva $P(t)$ e o eixo dos tempos corresponde à energia consumida pela instalação no intervalo considerado:

$$E = D \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad D = \frac{E}{\Delta t}$$

Por isso é comum a referência à demanda na forma MW·h/h, MVA·h/h

- Curva de carga – demanda em função do tempo, para um dado intervalo de tempo (T)

  É constituída por patamares, sendo, no entanto, mais comum apresentá-la como uma curva, resultando da união dos pontos médios das bases superiores do retângulo de largura Δt



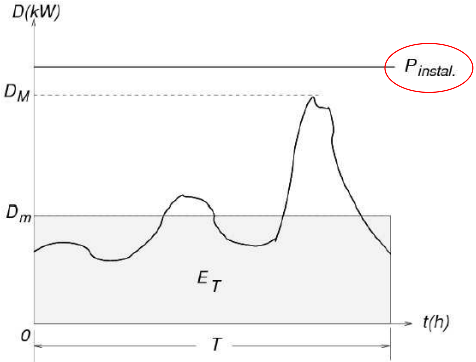
- Demanda máxima D_M – ordenada máxima da curva no intervalo T

- Energia total consumida no período E_T – área entre a curva e o eixo horizontal:

$$E_T = \int_0^T D \cdot dt$$

- Demanda média D_m – altura de um retângulo cuja base é o intervalo T e cuja área é a energia total E_T:

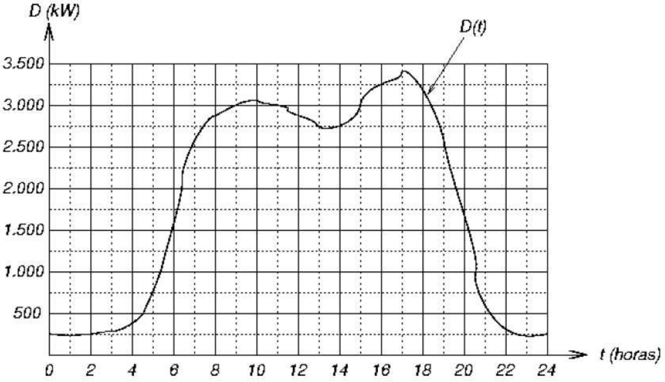
$$D_m = \frac{E_T}{T}$$



Capacidade da instalação maior que a demanda máxima

Exemplo

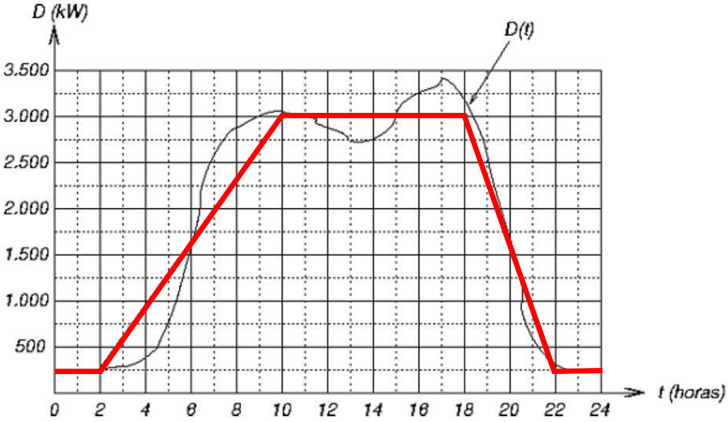
O gráfico a seguir mostra uma curva de carga diária típica de uma indústria.



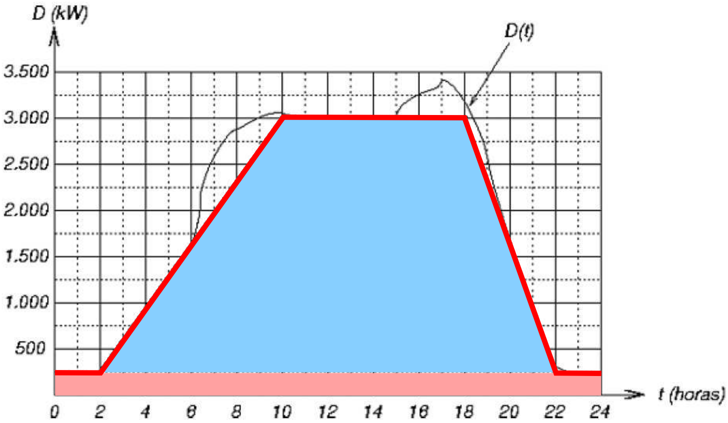
Estime:

1. a energia elétrica consumida por dia.
2. a demanda máxima solicitada.
3. a potência mínima do transformador de entrada.

A energia elétrica consumida por dia pela indústria corresponde à área abaixo da curva de carga (integral da curva de carga). Esta pode ser aproximada pela soma das áreas limitadas pelas retas:



Logo, a energia elétrica consumida por dia pela indústria pode ser aproximada pela soma das áreas limitadas pelas retas:



A energia elétrica pode ser calculada por:

$$\text{Energia} = 250 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot (20 + 8) \cdot 2750 = 44500\,\text{kWh}$$

A demanda máxima corresponde ao valor máximo registrado na curva (pico), que vale aproximadamente 3440 kW.

A especificação da potência nominal do transformador de entrada depende de muitos fatores, mas, para responder exclusivamente à este exemplo, a potência mínima do transformador de entrada pode ser estimada em 3500 kW, pois assim ele suportará a demanda máxima.

- A medição da energia elétrica é necessária para possibilitar à concessionária o faturamento adequado da energia elétrica consumida por cada usuário, segundo uma tarifa preestabelecida

- O instrumento que possibilita esta medição é o medidor de energia elétrica, popularmente conhecido como relógio de luz:

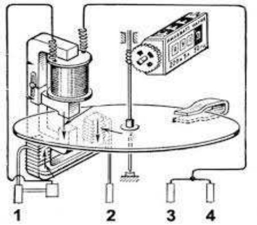
Ponteiros

Registrador ciclométrico

Smart meter

- O medidor eletromecânico é constituído, essencialmente, pelos seguintes componentes:

- Bobina de tensão (ou de potencial), com muitas espiras de fio fino de cobre, ligada em paralelo com a carga
- Bobina de corrente, com poucas espiras de fio grosso de cobre, ligada em série com a carga
- Núcleo de material ferromagnético (ferro-silício), composto de lâminas justapostas, isoladas entre si



- Conjunto móvel ou rotor constituído de disco de alumínio de alta condutividade, com liberdade para girar em torno do seu eixo de suspensão, ao qual é solidário
- Parafuso com rosca-sem-fim fixado ao eixo, que aciona um sistema mecânico de engrenagens que registra, num mostrador, a energia elétrica consumida
- Ímã permanente para produzir um conjugado frenador no disco

- G. Barreto, C.A. Castro, C.A.F. Murari, F. Sato, Circuitos de corrente alternada: fundamentos e prática, Oficina de Textos, 2012 – capítulo 7.

- C.A. Castro, M.R. Tanaka, Circuitos de corrente alternada – um curso introdutório, Unicamp, 1995 – capítulo 4.

- P. Cardieri, notas de aula de EA611, FEEC/UNICAMP.
- M.C.D. Tavares, notas de aula de EA611, FEEC/UNICAMP.
- C.A. Castro, M.R. Tanaka, Circuitos de corrente alternada – um curso introdutório, Unicamp, 1995.
- G. Barreto, C.A. Castro, C.A.F. Murari, F. Sato, Circuitos de corrente alternada: fundamentos e prática, Oficina de Textos, 2012.