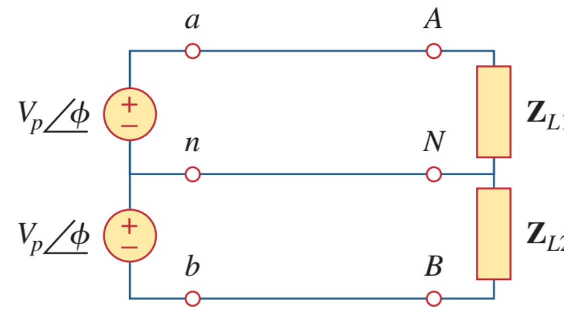
Circuitos Trifásicos

Prof. André E. Lazzaretti

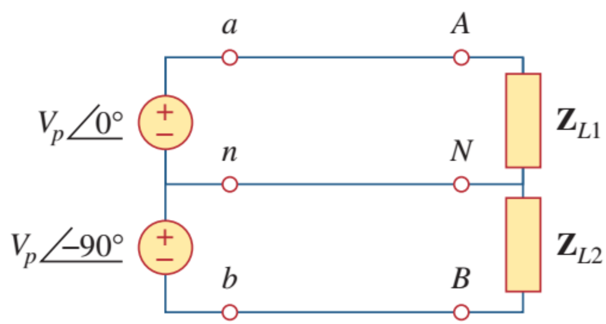
lazzaretti@utfpr.edu.br

Introdução

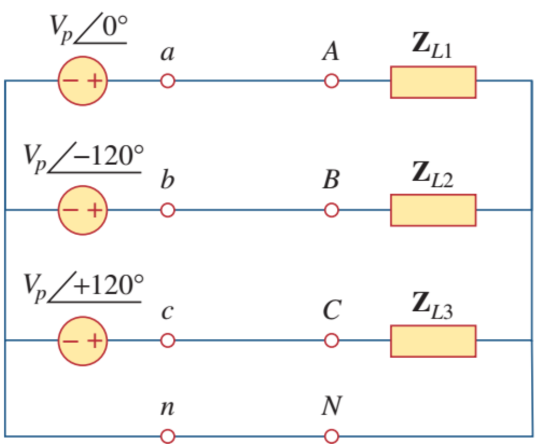
- Sistema monofásico (bifilar ou trifilar):



- Sistema Bifásico (trifilar):

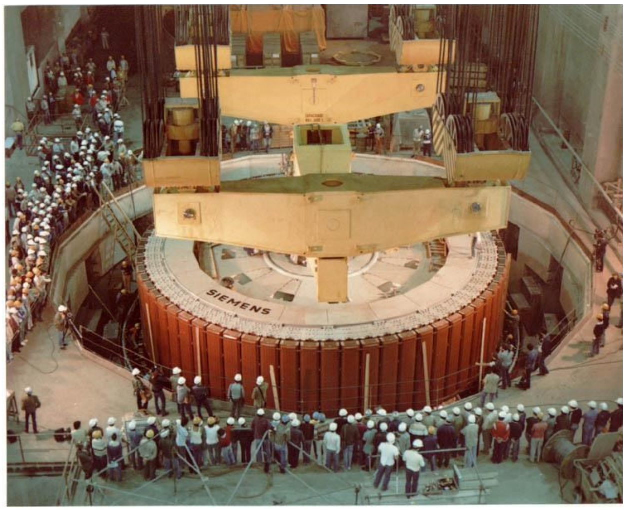


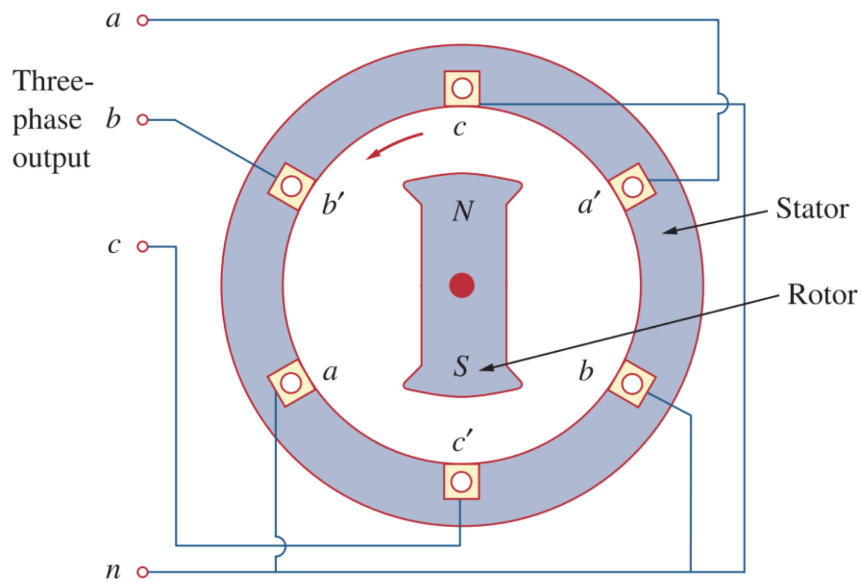
- Sistema trifilar trifásico:

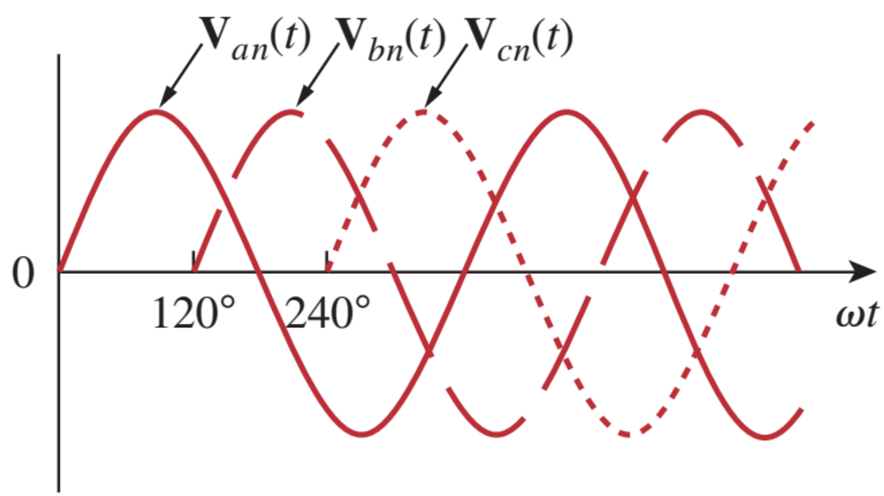


- Entradas monofásicas (independentes) e trifásicas;
- Potência instantânea não-pulsante – máquinas elétricas;
- Mais econômico que o monofásico.

Origem do Sistema Trifásico

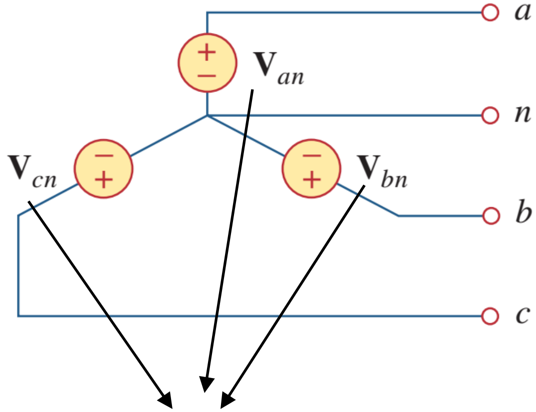


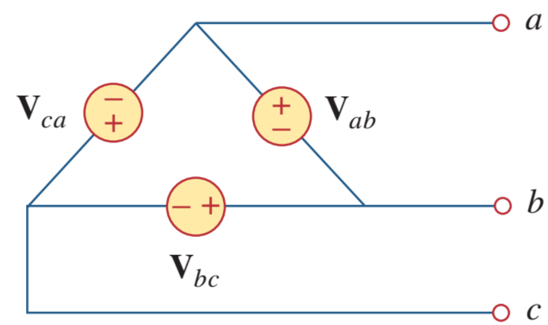




Tensões Trifásicas

- Sistemas típicos: estrela e triângulo.





- Tensões de **Fase** Equilibradas:

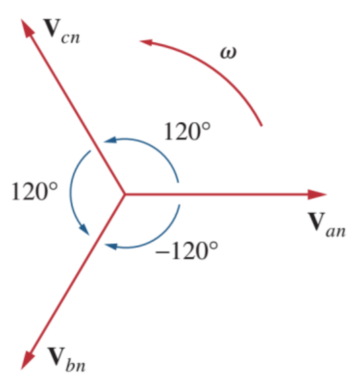
$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

- Defasagem e sequência:

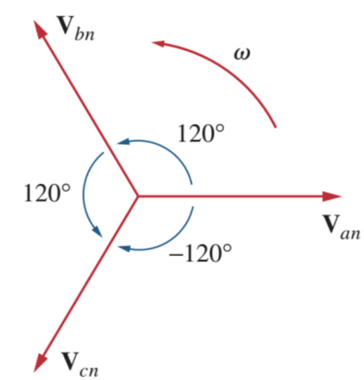
Sequência Positiva:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\underline{/0^\circ}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/-120^\circ}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/-240^\circ} = V_p\underline{/+120^\circ}$$



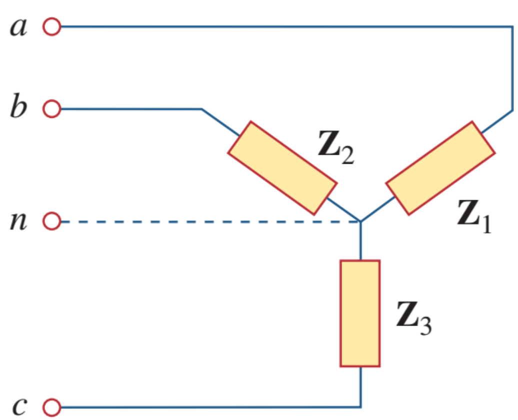
Sequência Negativa:

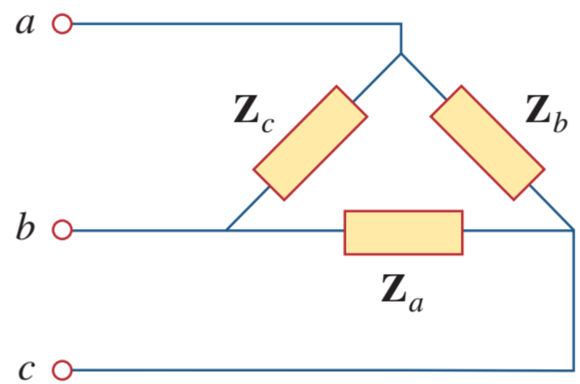
$$\mathbf{V}_{an} = V_p\underline{/0^\circ}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/-120^\circ}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/-240^\circ} = V_p\underline{/+120^\circ}$$



Cargas Trifásicas

- Estrela ou triângulo:





- Carga equilibrada:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_Y \qquad \mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_\Delta$$

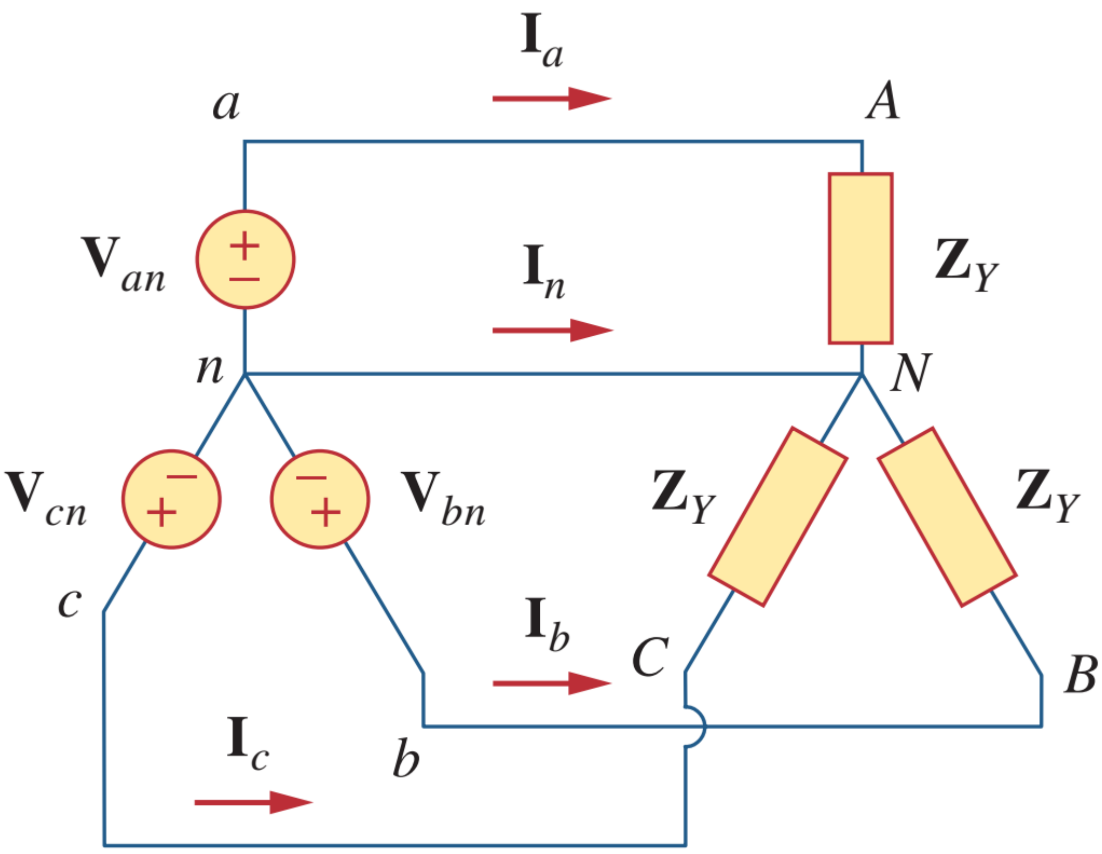
$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y \qquad \text{or} \qquad \mathbf{Z}_Y = \frac{1}{3}\mathbf{Z}_\Delta$$

Possíveis Conexões

- Conexão estrela-estrela (carga em estrela e a fonte em estrela);
- Conexão estrela-triângulo;
- Conexão triângulo-triângulo;
- Conexão triângulo-estrela.

Estrela-Estrela

- Fonte estrela e carga em estrela:



Equacionamento

- Supondo sequência positiva:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0^\circ$$
$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -120^\circ, \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\angle +120^\circ$$

- Tensões linha-linha (**tensões de linha**):

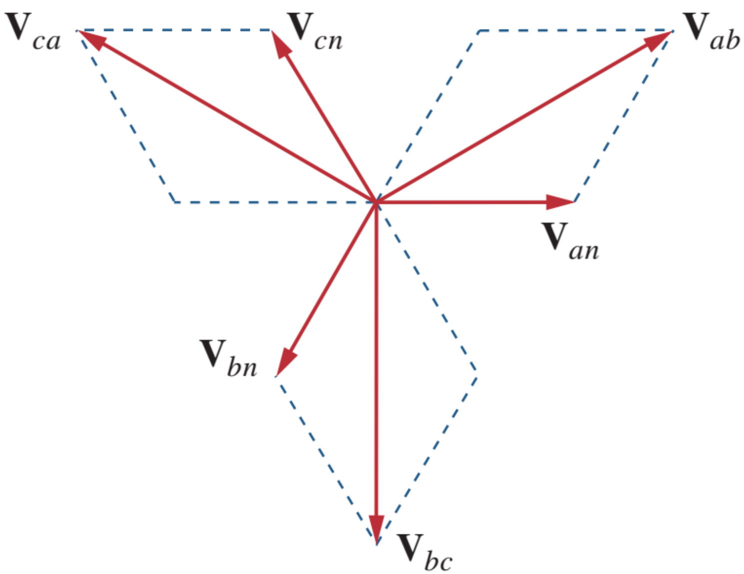
$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p\angle 0^\circ - V_p\angle -120^\circ$$
$$= V_p\left(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ$$
$$\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{bn} - \mathbf{V}_{cn} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ$$
$$\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{cn} - \mathbf{V}_{an} = \sqrt{3}V_p\angle -210^\circ$$

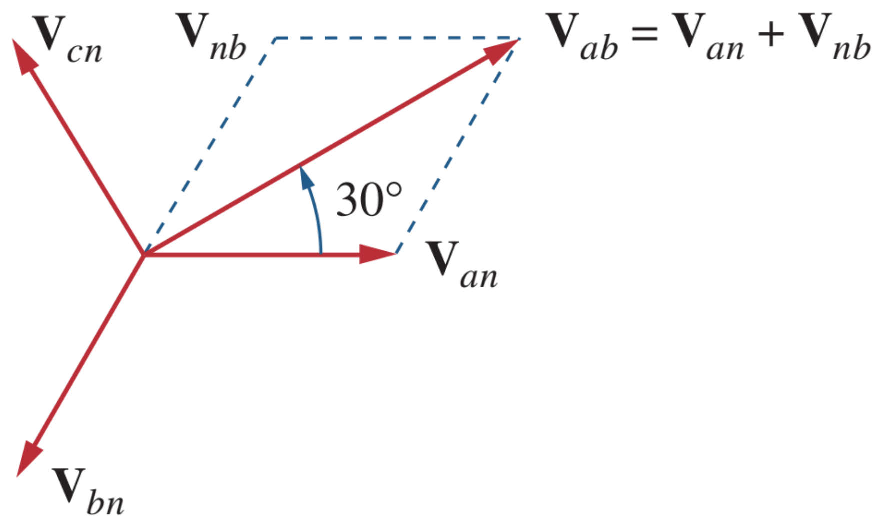
- Relação Geral: $V_L = \sqrt{3}V_p$

- Sendo: $V_p = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$ $\qquad V_L = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}|$

Diagrama Fasorial

- Relação tensões de fase e de linha:

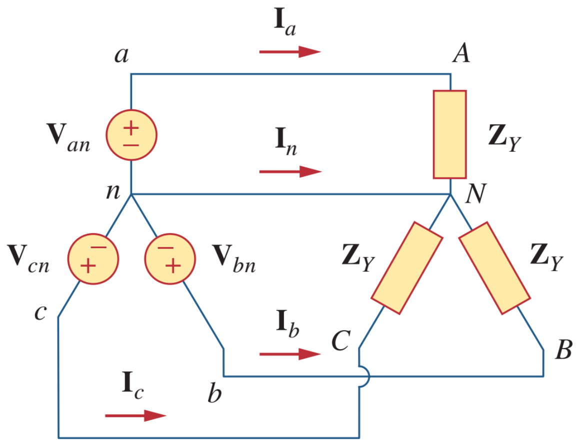




$$V_L = \sqrt{3}V_p$$

Relações de Corrente

- Aplicando a LKT a cada fase:



$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y}, \qquad \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an}\underline{/-120^\circ}}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a\underline{/-120^\circ}$$

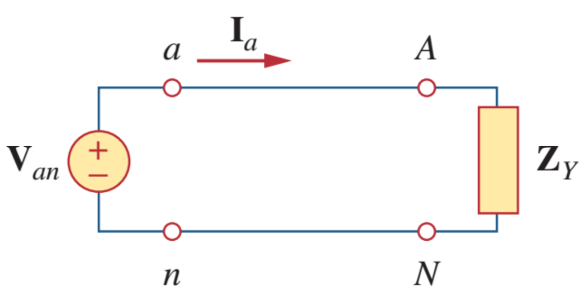
$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an}\underline{/-240^\circ}}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a\underline{/-240^\circ}$$

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$$

- Corrente/Tensão de Neutro: $\mathbf{I}_n = -(\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) = 0$

$$\mathbf{V}_{nN} = \mathbf{Z}_n\mathbf{I}_n = 0$$

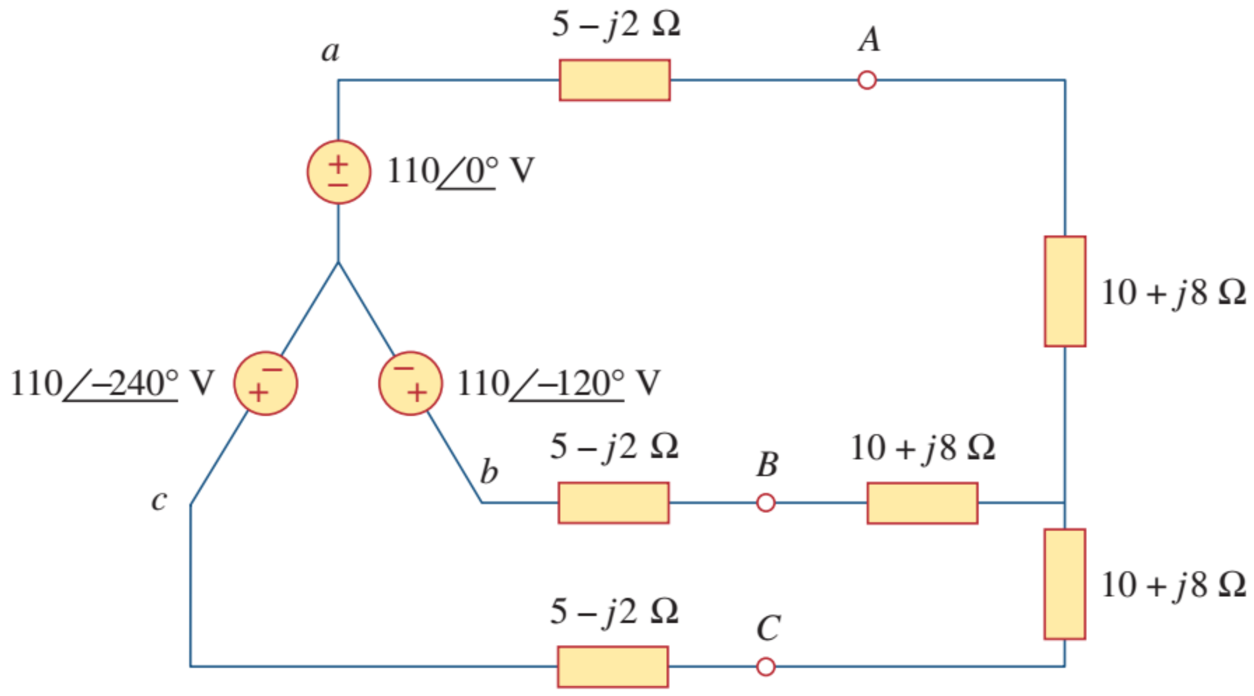
- Análise por fase:



$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y}$$

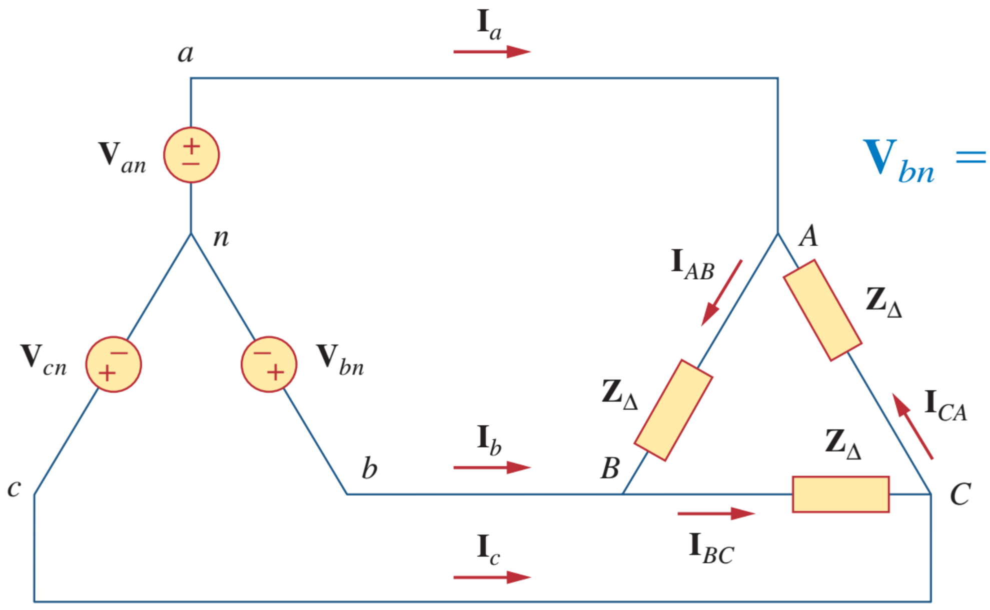
Exemplo 1

- Calcular correntes de linha:



Conexão Estrela-Triângulo

- Fonte estrela, carga triângulo:



$$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -120^\circ, \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\angle +120^\circ$$

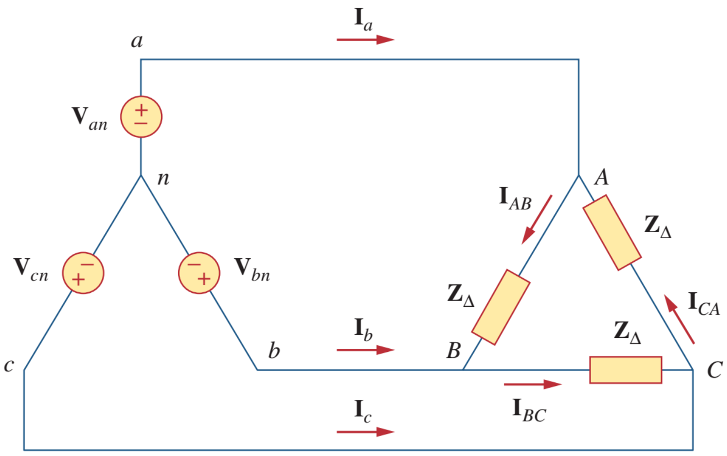
$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ = \mathbf{V}_{AB}, \qquad \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ = \mathbf{V}_{BC}$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -150^\circ = \mathbf{V}_{CA}$$

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta}, \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta}, \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

Conexão Estrela-Triângulo

- Outra forma, aplicar LKT na malha aABbna:



$$-\mathbf{V}_{an} + \mathbf{Z}_\Delta \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{V}_{bn} = 0$$

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}, \quad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB}, \quad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC}$$

- Já que: $\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB}\underline{/-240^\circ}$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB}(1 - 1\underline{/-240^\circ}) \\ &= \mathbf{I}_{AB}(1 + 0.5 - j0.866) = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\underline{/-30^\circ}\end{aligned}$$

- Portanto: $I_L = \sqrt{3} I_p$

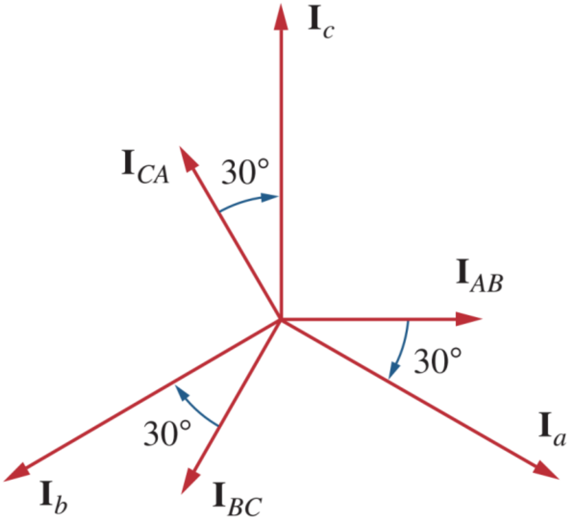
linha fase

$$I_L = |\mathbf{I}_a| = |\mathbf{I}_b| = |\mathbf{I}_c|$$

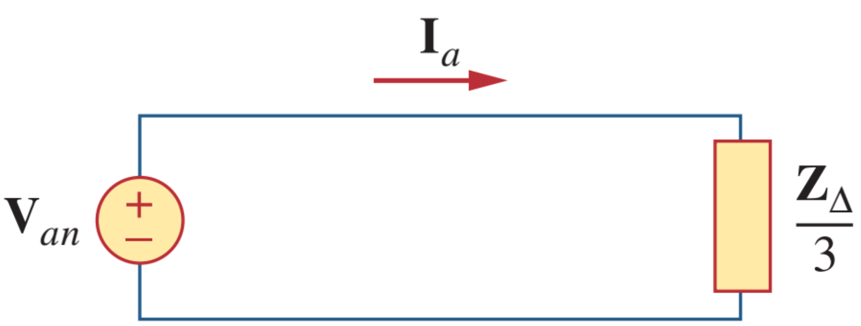
$$I_p = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

Conexão Estrela-Triângulo

- Diagrama fasorial de correntes:



- Outra forma de analisar é alterar a carga:



$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3}$$

Resumo

- A corrente de linha I_L é a corrente fluindo do gerador para carga em cada linha de transmissão em um sistema trifásico.
- A corrente de fase I_P é a corrente que flui por fase em uma carga trifásica.
- A tensão de linha V_L é a tensão entre cada par de linhas, excluindo o neutro, caso exista.
- A tensão de fase V_P é a tensão de cada fase.

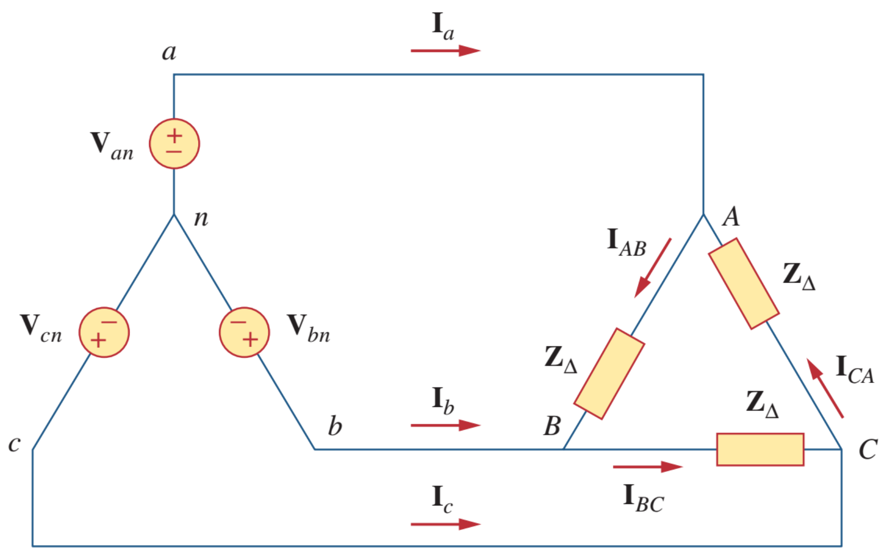
- Sistema estrela: $V_L = \sqrt{3}V_p$ and $I_L = I_p$

- Sistema delta: $V_L = V_p$ and $I_L = \sqrt{3}I_p$

Exemplo 2

- Uma fonte conectada em estrela equilibrada com sequência positiva e $\mathbf{V}_{an}$=100 ∡ 10°V está conectada a uma carga em triângulo equilibrada com (8+j4) Ω. Calcule as correntes de fase e de linha.

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB}(1 - 1\angle{-240^\circ}) = \mathbf{I}_{AB}(1 + 0.5 - j0.866) = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\angle{-30^\circ}$$

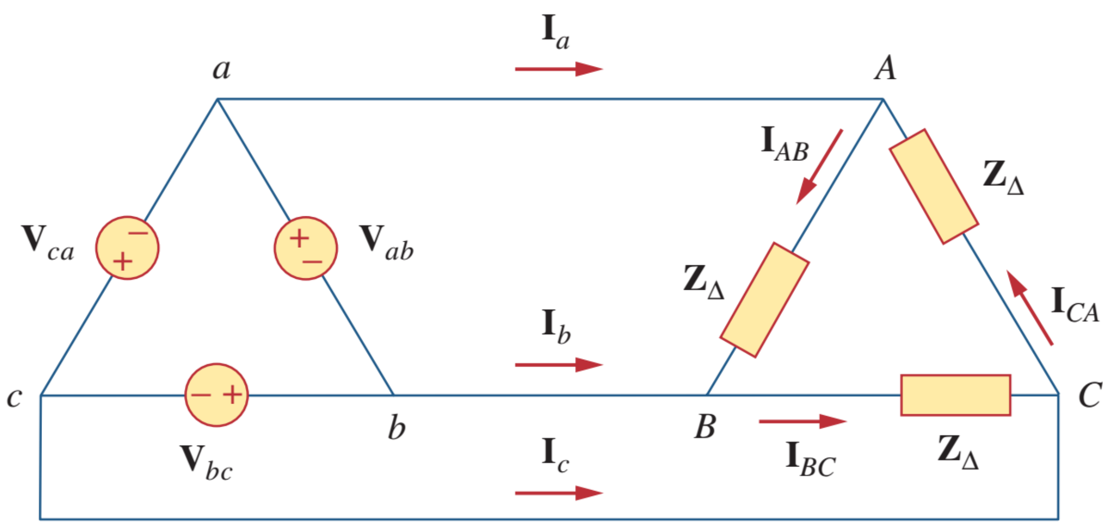


$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3}$$

Conexão Triângulo-Triângulo

- Fonte triângulo; Carga triângulo:



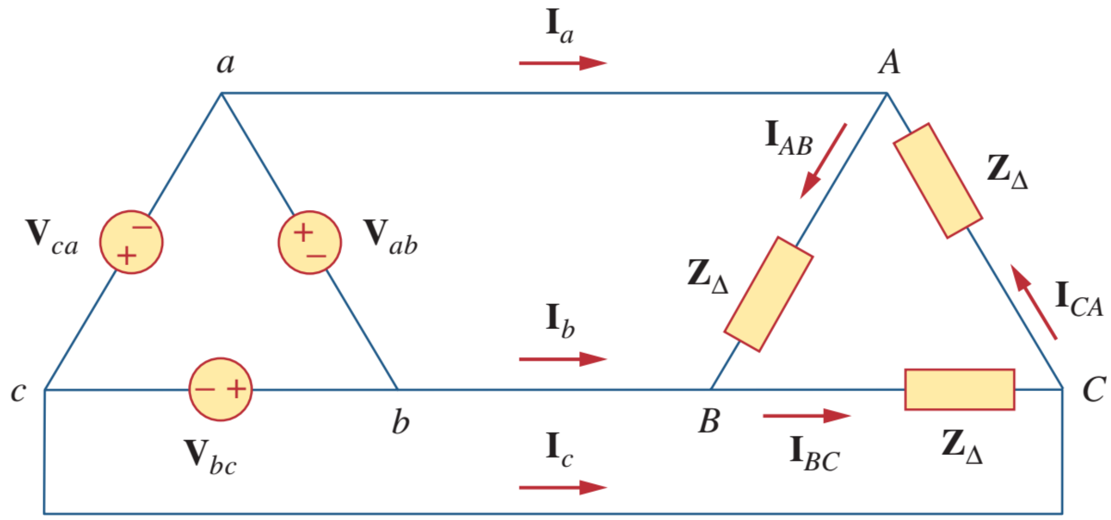
$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{Z_\Delta}, \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{Z_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{Z_\Delta}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{Z_\Delta}$$

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}, \qquad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB}, \qquad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC}$$

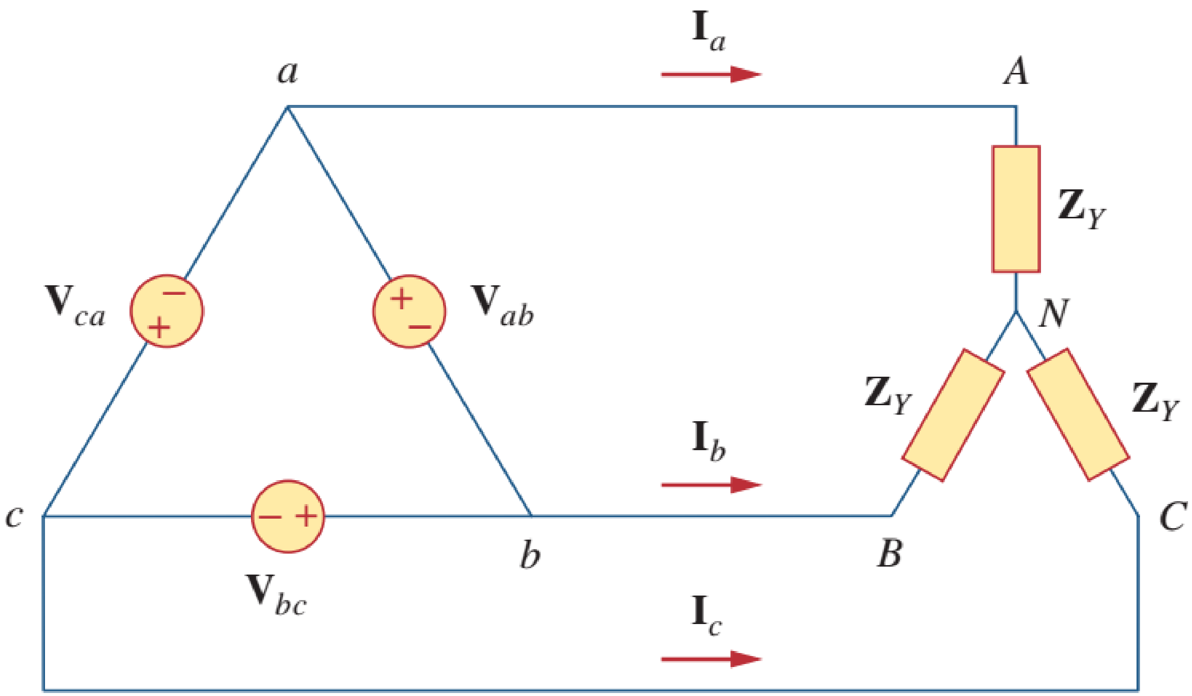
Exemplo 3

- Uma carga conectada em triângulo equilibrada com impedância (20-j15) Ω está conectada a um gerador de sequência positiva em triângulo equilibrado com $\mathbf{V}_{ab} = 330\angle 0°$V. Calcule as correntes de fase da carga e de linha.



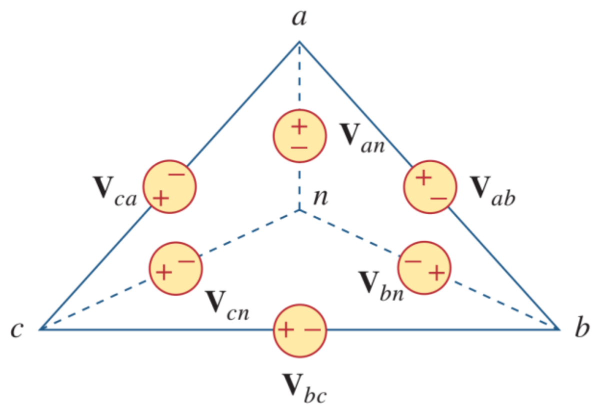
Conexão Triângulo-Estrela

- Fonte triângulo; carga estrela:



Conexão Triângulo-Estrela

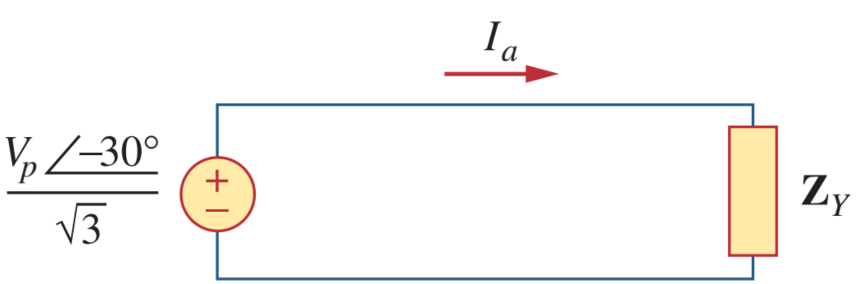
- Forma alternativa para obter as correntes de linha seria substituir a fonte:



$$\mathbf{V}_{an} = \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle{-30^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{bn} = \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle{-150^\circ}, \qquad \mathbf{V}_{cn} = \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle{+90^\circ}$$

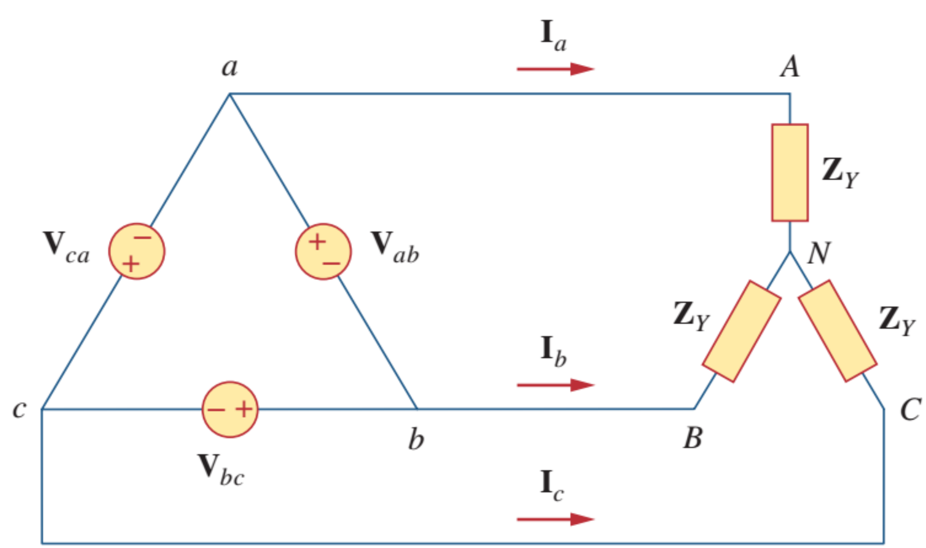
- Com isso, poderia se usar o seguinte equivalente monofásico:



$$\mathbf{I}_a = \frac{V_p/\sqrt{3}\angle{-30^\circ}}{\mathbf{Z}_Y}$$

Exemplo 4

- Uma carga conectada em estrela equilibrada com impedância (40+j25) Ω está conectada a um gerador de sequência positiva em triângulo equilibrado com tensão de 210V. Calcule as correntes de fase.



Potência em Sistemas Equilibrados

- Para uma carga em estrela, a potência instantânea é (valores de pico):

$$v_{AN} = \sqrt{2}V_p \cos \omega t, \qquad v_{BN} = \sqrt{2}V_p \cos(\omega t - 120°)$$
$$v_{CN} = \sqrt{2}V_p \cos(\omega t + 120°)$$

$$i_a = \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta), \qquad i_b = \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta - 120°)$$
$$i_c = \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta + 120°)$$

$$\begin{aligned} p = p_a + p_b + p_c &= v_{AN}i_a + v_{BN}i_b + v_{CN}i_c \\ &= 2V_pI_p[\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \\ &\quad + \cos(\omega t - 120°) \cos(\omega t - \theta - 120°) \\ &\quad + \cos(\omega t + 120°) \cos(\omega t - \theta + 120°)] \end{aligned}$$

Potência em Sistemas Equilibrados

- Usando: $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$

$$
\begin{aligned}
p = p_a + p_b + p_c &= v_{AN} i_a + v_{BN} i_b + v_{CN} i_c \\
&= 2V_p I_p[\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \\
&\quad + \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\
&\quad + \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t - \theta + 120^\circ)]
\end{aligned}
$$

- Tem-se que:

$$
\begin{aligned}
p &= V_p I_p[3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) \\
&\quad + \cos(2\omega t - \theta + 240^\circ)] \\
&= V_p I_p[3 \cos \theta + \cos \alpha + \cos \alpha \cos 240^\circ + \sin \alpha \sin 240^\circ \\
&\quad + \cos \alpha \cos 240^\circ - \sin \alpha \sin 240^\circ] \\
&\quad \text{where } \alpha = 2\omega t - \theta \\
&= V_p I_p\left[3 \cos \theta + \cos \alpha + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos \alpha\right] = 3V_p I_p \cos \theta
\end{aligned}
$$

cos (a+b) = cos(a)cos(b) – sen(a)sen(b)

cos (240) = -1/2

Potência em Sistemas Equilibrados

$$
\begin{aligned}
p &= V_p I_p[3\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) \\
&\qquad + \cos(2\omega t - \theta + 240^\circ)] \\
&= V_p I_p[3\cos\theta + \cos\alpha + \cos\alpha\cos 240^\circ + \sin\alpha\sin 240^\circ \\
&\qquad + \cos\alpha\cos 240^\circ - \sin\alpha\sin 240^\circ] \\
&\qquad \text{where } \alpha = 2\omega t - \theta \\
&= V_p I_p\left[3\cos\theta + \cos\alpha + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\alpha\right] \boxed{= 3V_p I_p\cos\theta}
\end{aligned}
$$

- Constante e independente do tempo! Isso vale para carga em triângulo e em estrela.

Potência em Sistemas Equilibrados

- Potência Ativa por fase é: $P_p = V_p I_p \cos\theta$
- Potência Reativa por fase: $Q_p = V_p I_p \sin\theta$
- Potência Aparente por fase: $S_p = V_p I_p$
- Potência Complexa por fase: $\mathbf{S}_p = P_p + jQ_p = \mathbf{V}_p \mathbf{I}_p^*$
- Potência Ativa total:

$$P = P_a + P_b + P_c = 3P_p = 3V_p I_p \cos\theta = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta$$

- Potência Reativa total:

$$Q = 3V_p I_p \sin\theta = 3Q_p = \sqrt{3} V_L I_L \sin\theta$$

Potência em Sistemas Equilibrados

- Potência complexa total:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{S}_p = 3\mathbf{V}_p\mathbf{I}_p^* = 3I_p^2\mathbf{Z}_p = \frac{3V_p^2}{\mathbf{Z}_p^*}$$

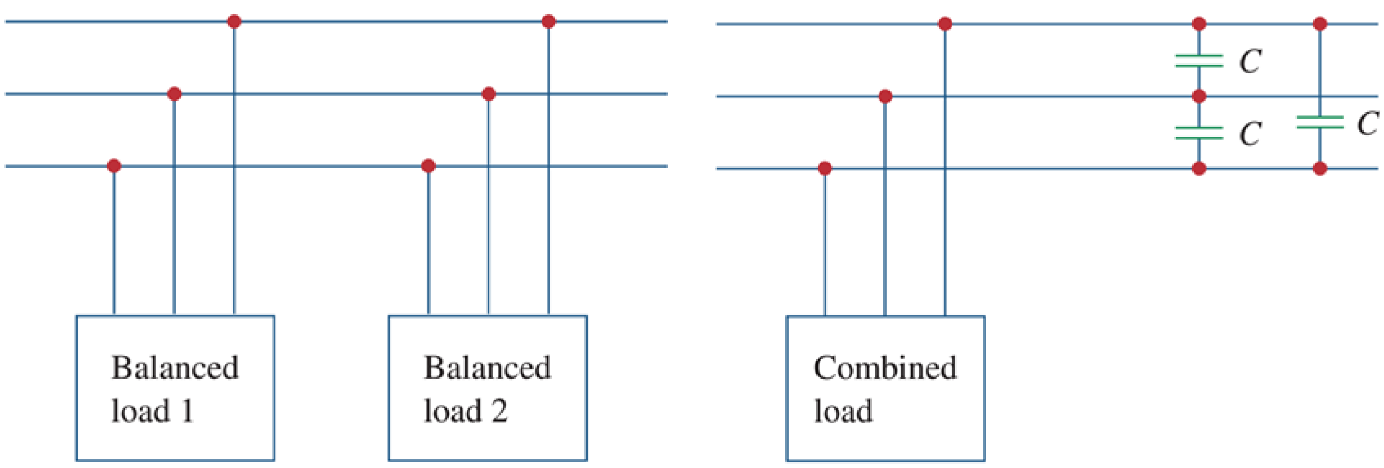
$$\mathbf{S} = P + jQ = \sqrt{3}V_L I_L \angle \theta$$

Exemplo 5

- Um motor trifásico pode ser considerado uma carga conectada em estrela equilibrada. E absorve 5,6kW quando a tensão de linha for 220V e a corrente de linha for 18,2A. Determine o fator de potência do motor.

Exemplo 6

- Duas cargas equilibradas são ligadas a uma linha de 60Hz, 240kV$_{RMS}$, como mostra o esquema a seguir. A carga 1 absorve 30kW com fator de potência 0,6 (atrasado) enquanto a carga 2 absorve 45kVAR com fator de potência 0,8 (atrasado). Supondo sequência abc, determine (a) as potências complexa, real e reativas absorvidas pela carga conectada; (b) as correntes de linha; (c) kVAR nominal dos três capacitores ligados em triângulo em paralelo com a carga que elevará o fator de potência para 0,9 (atrasado) e a capacitância de cada capacitor.



Referências

- Principalmente:
  - **Notas de Aula do Prof. Dr. Alessandro Koerich (PUCPR): http://www.ppgia.pucpr.br/~alekoe/CIR**
  - **Charles K. Alexander; Matthew N. O. Sadiku; Fundamentos de Circuitos Elétricos; 5ª Edição**
- J. David Irwin; Análise Básica de Circuitos Para Engenharia; 10ª Ed.
- Jack E. Kemmerly, Steven M. Durbin, William H. Hayt; Análise de Circuitos de Engenharia; 8ª Ed
- Robert Boylestad; Introdução À Análise de Circuitos; 12ª edição