UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA

Interativa

Tópicos de Matemática Aplicada

Autora: Profa. Christiane Mazur Doi
Colaboradora: Profa. Vanessa Santos Lessa

Professora conteudista: Christiane Mazur Doi

Graduada em Engenharia Química, licenciada em Matemática, mestra em Ciências (Tecnologia Nuclear) e doutora em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, com aperfeiçoamento em Estatística. Coordenadora da Comissão de Qualificação e Avaliação (CQA) da UNIP e professora titular da UNIP.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D657t Doi, Christiane Mazur.

Tópicos de Matemática Aplicada / Christiane Mazur Doi. – São Paulo: Editora Sol, 2022.

132 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Funções. 2. Matriz. 3. Sistemas lineares. I. Título.

CDU 517.5

U514.27 – 22

Material Didático

Comissão editorial:
Profa. Dra. Christiane Mazur Doi
Profa. Dra. Angélica L. Carlini
Profa. Dra. Ronilda Ribeiro

Apoio:
Profa. Cláudia Regina Baptista
Profa. Deise Alcantara Carreiro

Projeto gráfico:
Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:
Ricardo Duarte
Willians Calazans

Sumário

Tópicos de Matemática Aplicada

APRESENTAÇÃO

Caro aluno,

Como futuro bacharel em Ciência da Computação, você terá de ser preciso na identificação dos problemas computacionais e competente na proposta de resoluções para tais problemas. Além disso, precisará articular e integrar diferentes campos do saber, sempre usando os recursos computacionais disponíveis com racionalidade, eficiência e eficácia.

Para desempenhar essas funções, você deverá ser apto a sugerir soluções algorítmicas que atendam a situações variadas e a implementar essas soluções com o emprego de teorias, métodos, técnicas, ferramentas e equipamentos adequados. Isso demanda, entre outras habilidades, o domínio de fundamentos da matemática, a fim de que as estruturas de programação criadas, independentemente da linguagem adotada, sejam construídas em bases sólidas e confiáveis.

É nesse contexto que a disciplina *Tópicos de Matemática Aplicada* ganha importância indiscutível na formação do cientista da computação, no sentido de capacitar o estudante a utilizar ferramentas básicas da matemática com o propósito de analisar situações práticas do cotidiano profissional.

Com o intuito de alcançar tal objetivo, vamos estudar, neste livro-texto, funções (em particular, funções lineares, do 1º grau e do 2º grau), matrizes e sistemas lineares.

Bom estudo!

INTRODUÇÃO

Vivemos em um mundo cada vez mais informatizado, o que demanda, de modo crescente, a atuação de profissionais da área da computação.

Os cientistas da computação são peças fundamentais nesse cenário, pois eles são os responsáveis pela proposta de soluções computacionais efetivas para os problemas das sociedades atuais. Isso requer o domínio de disciplinas básicas da área, como as relacionadas à matemática.

Nesse contexto, este livro é dividido didaticamente em duas unidades (unidade I e unidade II).

Na unidade I, apresentamos:

- os conceitos envolvidos nas funções em geral e nas funções lineares, do 1º grau e do 2º grau em particular;

- a construção de gráficos e a análise de comportamentos de funções por meio de estudos que visam a modelar problemas.

Na unidade II, apresentamos:

- as definições e as operações relativas às matrizes, empregando-as na resolução de exercícios;
- o estudo dos sistemas lineares como ferramentas para a solução de problemas que envolvam equações lineares.

Vale acrescentar que este material é escrito em linguagem simples e direta, como se houvesse uma conversa entre a autora e o leitor. Adicionalmente, são inseridas muitas figuras, que auxiliam no entendimento dos tópicos aqui desenvolvidos. Os itens chamados de "observação" e de "lembrete" configuram-se como verdadeiras oportunidades para que o estudante solucione eventuais dúvidas. Os itens chamados de "saiba mais" fazem com que o aluno amplie seus conhecimentos. Há, ainda, muitos exemplos de aplicação, resolvidos em detalhes, o que implica a fixação dos assuntos abordados.

Unidade I

1 FUNÇÕES

1.1 Definições de função, domínio e imagem

Imagine uma "fórmula" do tipo y=5.x, em que x e y representam números reais.

O que isso significa?

Primeiramente, precisamos ver que, em y=5.x, temos o seguinte:

- x, chamado de variável independente, é a entrada de valores;
- y, chamado de variável dependente, é a saída de valores;
- y=5.x é a função que relaciona x e y.

Na figura 1, temos um esquema do que dissemos acima.

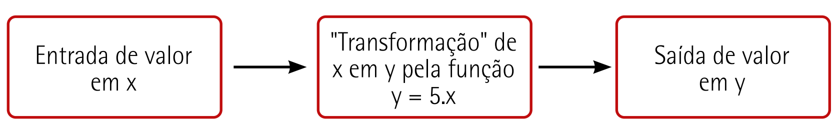


Figura 1 – Esquema da "transformação" de x em y pela função y=5.x

Por exemplo, se substituirmos o símbolo x pelo número 7, teremos como resultado, no símbolo y, o número 35, pois a "fórmula" dada (y=5.x) "diz" que o valor de saída em y é o quíntuplo do valor de entrada em x. Dizemos, nesse caso, que, se x=7, então y=35, pois y=5.7=35.

Podemos, também, escrever a função em análise como f(x)=5.x. Veja que, nessa notação, f(x) **não** é o produto de f por x: f(x) em f(x)=5.x é equivalente a y em y=5.x. Logo, se substituirmos x por 7, por exemplo, ficaremos com f(7)=35, pois f(7)=5.7=35.

Observação

A indicação f(7)=35 é lida como "efe de sete é igual a trinta e cinco".

Veja que, em f(x)=5.x (ou y=5.x), temos a liberdade de trocar x por qualquer número real. Mas, fixado determinado valor para x, o resultado em f(x) está vinculado à regra "multiplicar o valor dado a x por 5". Assim, podemos, por exemplo, verificar que:

- se x=-3, então y=5.(-3)=-15, ou f(-3)=-15
- se x=0, então y=5.(0)=0, ou f(0)=0
- se x=217,8, então y=5.(217,8)= 1089, ou f(217,8)=1089

O conjunto do qual podemos "escolher" valores para a variável independente, representado por D_f, é chamado de domínio da função. Já o conjunto em que temos os possíveis valores para a variável dependente, representado por Im_f, é chamado de imagem da função.

Lembrete

O conjunto dos números naturais, representado por N ou $\mathbb{N}$, é formado pelo zero e pelos inteiros positivos. Ou seja, $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$.

O conjunto dos números inteiros, representado por Z ou $\mathbb{Z}$, é formado pelo zero, pelos inteiros negativos e pelos inteiros positivos. Ou seja, $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.

O conjunto dos números racionais, representado por Q ou $\mathbb{Q}$, é formado pelo zero, pelos inteiros e fracionários negativos e pelos inteiros e fracionários positivos. Esses números podem ser representados como decimais finitas (por exemplo, 0,25 ou 1/4) ou decimais infinitas e periódicas (por exemplo, 0,333... ou 1/3). Ou seja, $\mathbb{Q} = \{...,-5,...,-7/3,...,-2,...,-1,...,0,...,1/2,...,1,...\}$.

O conjunto dos números irracionais, representado por I, é formado pelas dízimas não periódicas (por exemplo, π) e pelas raízes não exatas (por exemplo, $\sqrt{2}$).

O conjunto dos números reais, representado por R ou $\mathbb{R}$, é formado pelo zero, pelos inteiros e fracionários negativos, pelos inteiros e fracionários positivos, pelas dízimas não periódicas e pelas raízes não exatas. Logo, vemos que o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais. Ou seja, $\mathbb{R} = \{-7/3,...,-2,...,-1,...,0,...,1/2,...,1,..., \sqrt{2},...,1,5,..., \pi,...\}$.

Na figura 2, temos representações de exemplos de números reais, em que $0,\overline{3}$ representa a dízima periódica 0,333...

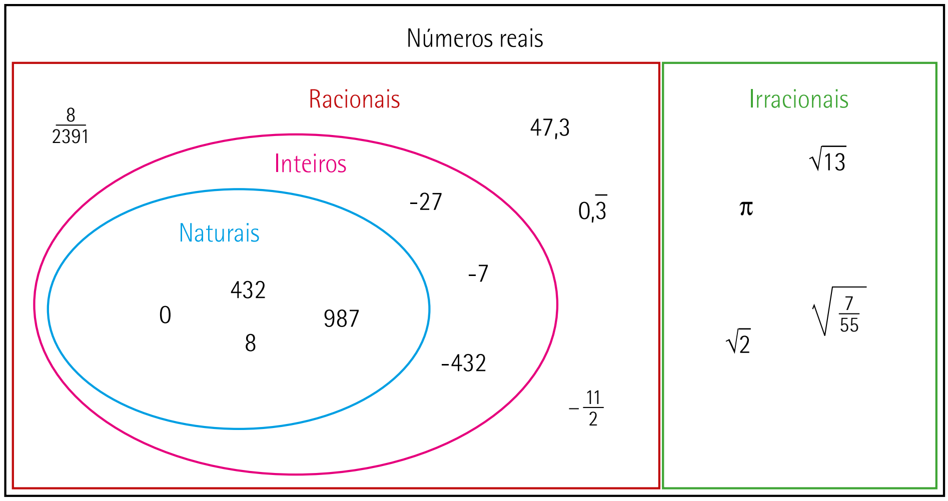


Figura 2 – Representações de exemplos de números reais

Saiba mais

Para saber mais sobre os números reais e suas propriedades, leia o capítulo 1 do livro indicado a seguir.

GUIDORIZZI, H. *Um curso de cálculo*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. v. 1.

No caso da função em estudo, podemos "escolher" qualquer número real para a variável independente e temos como "saída", na variável dependente, um número real. Logo, para y=5.x (ou f(x)=5.x), tanto o domínio D_f quanto a imagem Im_f correspondem ao conjunto dos números reais. Ou seja, $D_f=\mathbb{R}$ e $Im_f=\mathbb{R}$.

Os estudos feitos até agora permitem que entendamos a seguinte definição: função é uma regra que relaciona cada elemento do domínio a um único elemento da imagem.

Assim, se x simboliza a variável independente e y simboliza a variável dependente, então y=f(x) simboliza a função que relaciona as variáveis x e y.

Observação

Neste livro, trataremos apenas de funções de uma variável, ou seja, funções em que associamos uma única variável independente com um resultado.

Vamos fixar o que vimos até agora com o estudo de outra função: $y=f(10) = 3.(10)^2=3.100=300$, ou $f(x)=3x^2$.

A regra aqui proposta é a seguinte: substitua x por um número, eleve esse número ao quadrado e multiplique-o por 3. O resultado assim obtido é assumido por y. Por exemplo, se x=10, então y=300, pois $y=f(10) = 3.(10)^2=3.100=300$. Dizemos que a imagem de x=10 é f(10)=300.

Nesse caso, o conjunto de valores que a variável x pode assumir é o dos números reais. Logo, o domínio de $y=3x^2$ é $D_f=\mathbb{R}$.

Em $y=3x^2$, y é o triplo do quadrado de um número real. Logo, y é um número real maior ou igual a zero, pois:

- o triplo do quadrado de zero é zero;
- o triplo do quadrado de qualquer número real diferente de zero é positivo.

Verificamos que, em $y=3x^2$, y resulta apenas em números reais não negativos, ou seja, ou y é zero ou y é um número real positivo. Assim, concluímos que a imagem dessa função é $Im_f=\mathbb{R}_+$, em que $\mathbb{R}_+$ representa os reais não negativos.

Observação

O número zero não é positivo nem negativo.

Lembrete

Quando elevamos um número positivo ou um número negativo ao quadrado, temos como resultado um número positivo. Vejamos os exemplos a seguir.

- $(5)^2 = (5) . (5) = 25$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$
- $(-7)^2 = (-7) . (-7) = 49$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$

Na tabela 1, temos alguns exemplos de valores assumidos pela função $y=3x^2$.

Tabela 1 – Alguns exemplos de valores assumidos pela função $y=3x^2$

x (valor de entrada)	y (valor de saída)
-7	147, pois $3.(-7)^2=3.49=147$
-2	12, pois $3.(-2)^2=3.4=12$
0	0, pois $3.(0)^2=3.0=0$
1	3, pois $3.(1)^2=3.1=3$
6,8	138,72, pois $3.(6,8)^2=3.(46,24)=138,72$
10	300, pois $3.(10)^2=3.100=300$
20	1200, pois $3.(20)^2=3.400=1200$

Além dos pontos expressos na tabela 1, há infinitos outros pontos que pertencem à função $y=3x^2$. Ou seja, na tabela, há somente alguns dos possíveis valores que x pode ter e os respectivos valores que y pode assumir.

Na figura 3, feita com o auxílio do Excel, visualizamos, por meio de marcadores vermelhos, os pontos calculados na tabela. A linha contínua azul corresponde ao gráfico da função $y=3x^2$.

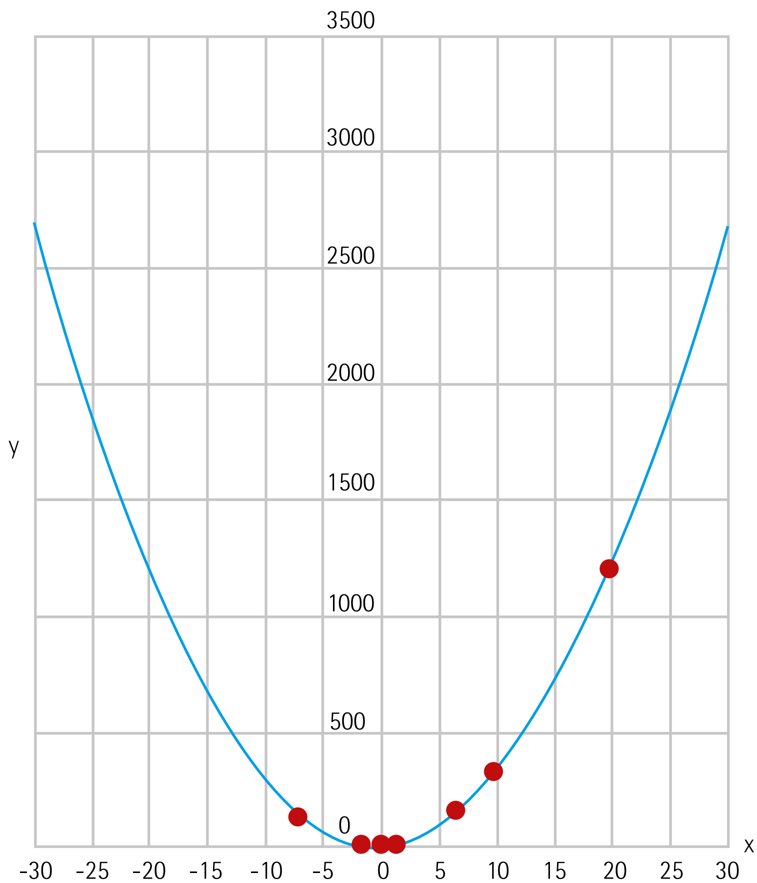


Figura 3 – Gráfico da função $y=3x^2$

Vale notar que o gráfico de $y=3x^2$ não se restringe a valores de x que vão de -30 a 30: ele apenas foi "exibido" nesse intervalo.

O eixo horizontal do gráfico é chamado de eixo das abscissas, e o eixo vertical do gráfico é chamado de eixo das ordenadas.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Suponha que a "regra" de "transformação" de um número real em outro seja a seguinte: calcule cinco vezes o cubo do valor de entrada (variável independente), subtraia 23 e coloque esse resultado no valor de saída (variável dependente).

Para a situação exposta, faça o que se pede.

A) Construa uma tabela que apresente alguns possíveis valores de entrada e os respectivos valores de saída para a regra dada no enunciado.

B) Crie símbolos para as variáveis envolvidas no exemplo e expresse a regra dada como uma função que relaciona essas variáveis.

C) Dê o domínio e a imagem da função em estudo.

D) Faça um gráfico que represente a função em estudo.

Resolução

Item A. Há infinitas possibilidades de tabelas que apresentem alguns possíveis valores de entrada e seus respectivos valores de saída, calculados de acordo com a regra expressa no enunciado. A seguir, temos, nas tabelas 2 e 3, duas dessas possibilidades.

Tabela 2 – Primeira possibilidade de valores de entrada e de saída

Valor de entrada	Valor de saída
-12,5	-9788,63, pois $5.(-12,5)^3-23=-9788,63$
-1	-28, pois $5.(-1)^3-23=-28$
0	-23, pois $5.(0)^3-23=-23$
3	112, pois $5.(3)^3-23=112$
6,8	1549,16, pois $5.(6,8)^3-23=1549,16$
125,4	9859652, pois $5.(125,4)^3-23=9859652$

Tabela 3 – Segunda possibilidade de valores de entrada e de saída

Valor de entrada	Valor de saída
-4	-343
-3,5	-237,375
-3	-158
-2,5	-101,125
-2	-63
-1,5	-39,875
-1	-28
-0,5	-23,625
0	-23
0,5	-22,375
1	-18
1,5	-6,125
2	17
2,5	55,125
3	112
3,5	191,375
4	297

Na tabela 3, não mostramos as "contas" feitas, pois elas seguem procedimentos semelhantes aos executados na tabela 2.

Item B. Se simbolizarmos o valor de entrada (variável independente) por x e o valor de saída (variável dependente) por y, a função que relaciona essas variáveis é $y = 5x^3 - 23$.

Item C. Em $y = 5x^3 - 23$, o conjunto de valores que a variável x pode assumir é o dos números reais. Logo, o domínio de $y = 5x^3 - 23$ é $D_f=\mathbb{R}$.

Se substituirmos a "variedade" de números reais em $y = 5x^3 - 23$, y pode resultar em zero, em números reais negativos e em números reais positivos. Assim, concluímos que a imagem dessa função é $Im_f=\mathbb{R}$.

Vale destacar que o cubo de um número negativo também é negativo e que o cubo de um número positivo também é positivo.

Item D. O gráfico da função $y = 5x^3 - 23$, construído com o auxílio do Excel, está mostrado na figura 4. Destacamos, por meio de marcadores vermelhos, os pontos calculados na tabela 3.

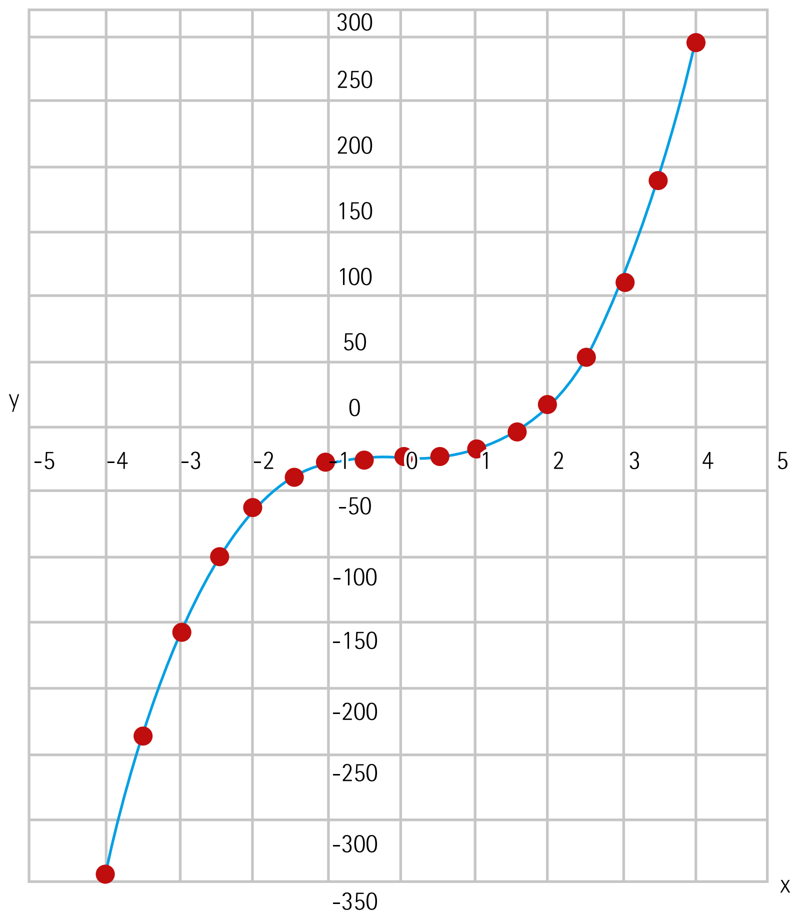


Figura 4 – Gráfico da função $y = 5x^3 - 23$

Existem casos em que há "restrições" aos valores que podemos inserir na variável independente. Para exemplificar um desses casos, tomemos a função dada por $y = \frac{1}{x}$.

A regra "embutida" nessa função é a seguinte: dê um valor para x, calcule o seu inverso e insira esse resultado em y.

Assim, podemos, por exemplo, verificar que:

- se x=-5, então $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} = -0{,}2$, ou f(-5)=-0,2
- se x=0,12, então $y = \frac{1}{0{,}12} = 8{,}333$, ou f(0,12)=8,333, com aproximação até a terceira casa decimal

- se x=25,6, então $y=\frac{1}{25,6}=0{,}039$, ou f(25,6)=0,039, com aproximação até a terceira casa decimal
- se x=100, então $y=\frac{1}{100}=0{,}01$, ou f(100)=0,01

Veja que, em $y=\frac{1}{x}$, não podemos substituir x por zero, pois a divisão por zero não é definida. Você já dever ter ouvido algo do tipo: "não existe divisão por zero". Nesse caso, o domínio da função corresponde aos números reais, com exceção do zero. Isso pode ser escrito como $D_f=\mathbb{R}-0$.

Observação

Em $y=\frac{1}{x}$, vemos que:

- se x>0, então y>0, pois o inverso de um número positivo é positivo;
- se x<0, então y<0, pois o inverso de um número negativo é negativo.

Além disso, em $y=\frac{1}{x}$, observamos que:

- se x>0, y diminui com o aumento de x;
- se x<0, o módulo de y diminui com o aumento do módulo de x.

Lembrete

O módulo (ou valor absoluto) de um número sempre retorna o "seu valor positivo". Rigorosamente:

- se A≥0, então |A|=A
- se A<0, então |A|=-A

Desse modo:

- |3|=3
- |-54|=54
- |-0,273|=0,273

Só para termos uma ideia do aspecto do gráfico de $y=\frac{1}{x}$, podemos ver o que se mostra na figura 5.

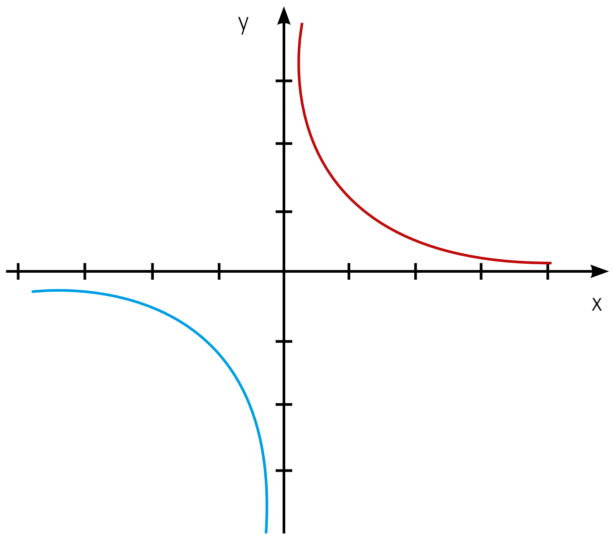


Figura 5 – Gráfico da função $y=\frac{1}{x}$

Pela observação do gráfico de $y=\frac{1}{x}$, concluímos que a imagem dessa função é $Im_f=\mathbb{R}-0$.

Observação

Podemos pensar que o "processamento" de uma função é expresso como uma espécie de algoritmo, estrutura de programação fundamental para o cientista da computação e que corresponde a uma sequência lógica e finita de etapas usada para a solução de um problema.

Por exemplo, vejamos o caso da função $y=\frac{1}{x}$. Um algoritmo de "processamento" dessa função pode ser o mostrado abaixo.

- Substitua a variável x por um número real diferente de zero.
- Calcule o inverso do valor atribuído à variável x.
- Insira o resultado do cálculo acima na variável y.
- Exiba o valor assumido pela variável y.

Exemplo de aplicação

Exemplo 2

Dê o domínio e a imagem da função $y = \sqrt{x}$.

Resolução

Como somente podemos extrair a raiz quadrada de números não negativos, o domínio de $y = \sqrt{x}$ é $D_f = \mathbb{R}_+$, em que $\mathbb{R}_+$ representa os reais não negativos.

Além disso, o resultado obtido pela aplicação da raiz quadrada também é sempre um número não negativo. Logo, a imagem de $y = \sqrt{x}$ é $Im_f = \mathbb{R}_+$

Para termos uma ideia do gráfico de $y = \sqrt{x}$, podemos ver a figura 6.

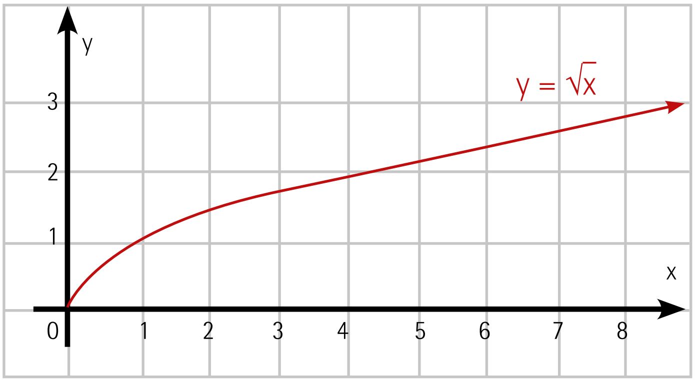


Figura 6 – Gráfico da função $y = \sqrt{x}$

Observação

Há diversos tipos de funções, como a função constante, a função linear, a função do 1º grau, a função do 2º grau, a função exponencial, a função logarítmica e as funções trigonométricas. Na figura 7, temos representações de gráficos desses e de outros tipos de funções.

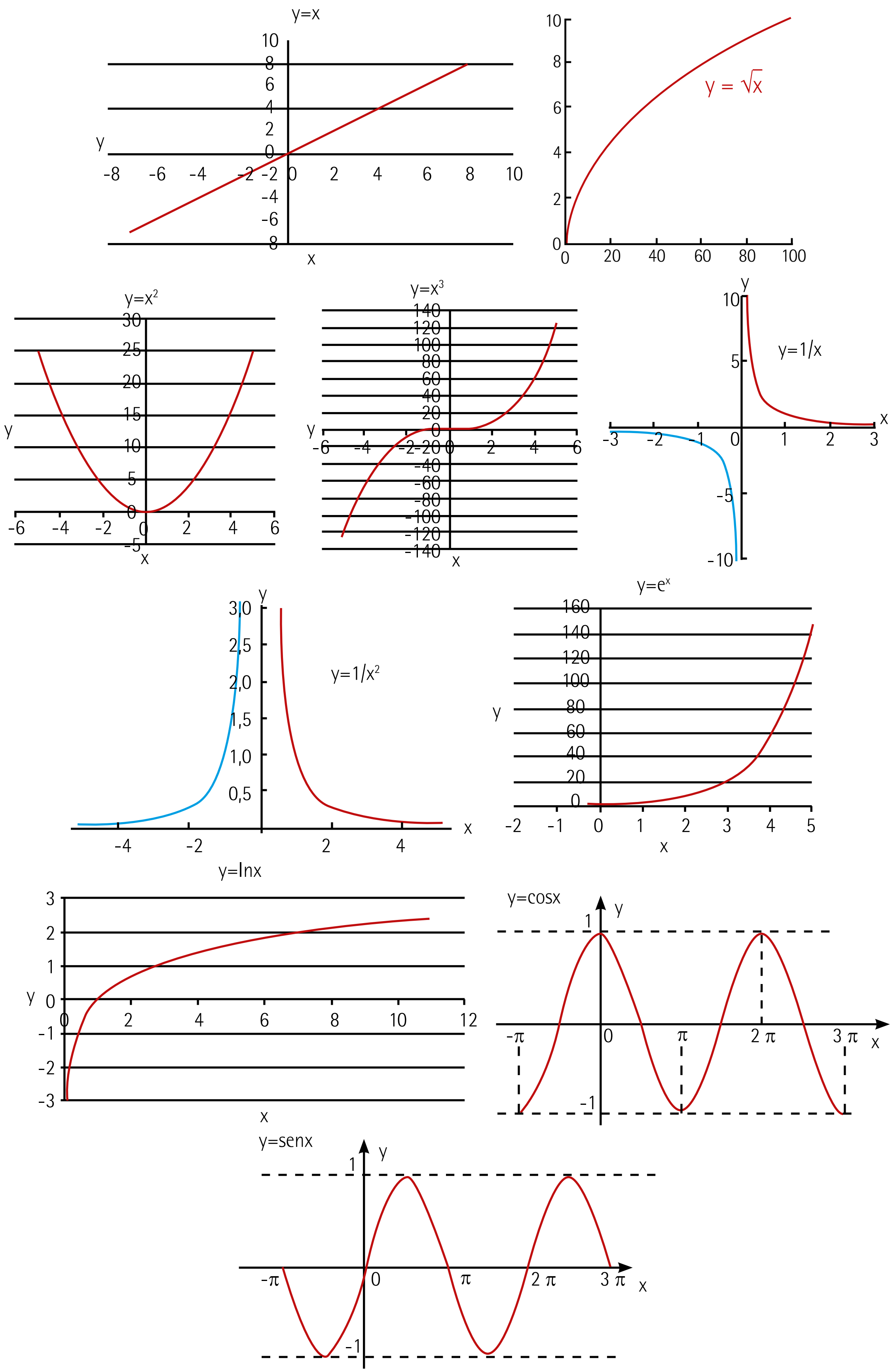


Figura 7 – Esboços de gráficos de funções

Saiba mais

Para saber mais sobre um tipo de função chamada de função exponencial, leia o capítulo 24 do livro indicado a seguir.

ALMEIDA, C. M. V. B.; DOI, C. M. *Explicando matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2018.

1.2 Gráficos que não representam funções

Vimos que uma função é uma regra que associa cada elemento x do domínio a um único elemento y da imagem. Uma maneira de visualizarmos isso é traçando linhas verticais (paralelas ao eixo das ordenadas) e verificando se elas são ou não interceptadas mais de uma vez pelo gráfico. Vejamos as figuras 8 e 9.

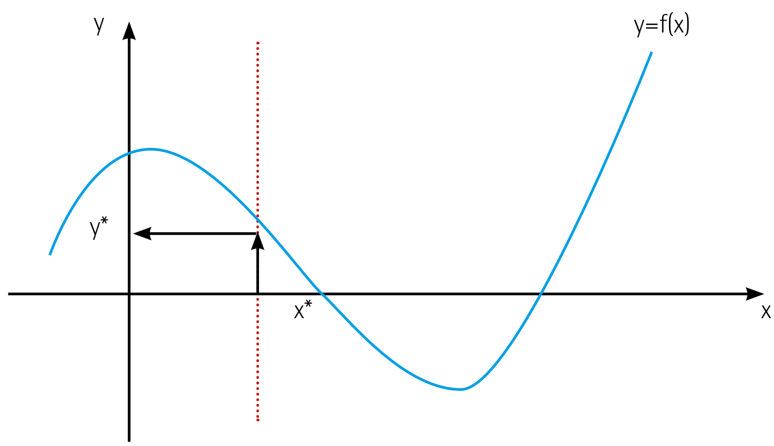


Figura 8 – Caso 1: trata-se de uma função

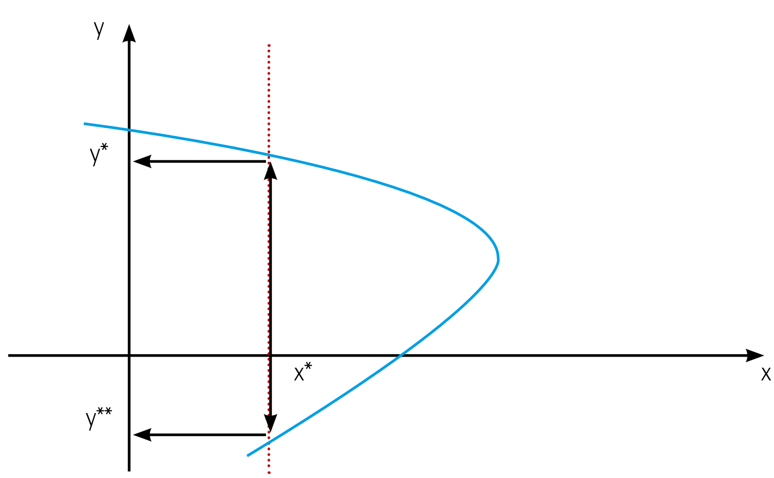


Figura 9 – Caso 2: não se trata de uma função

Vemos que, no caso 1, qualquer que seja a reta vertical (representada genericamente por uma linha pontilhada vermelha) colocada no sistema de eixos usado na figura 8, para cada x^* do domínio da função $y=f(x)$, há uma única imagem y^*.

Já no caso 2, se colocarmos uma reta vertical (também representada genericamente por uma linha pontilhada vermelha) no sistema de eixos usado na figura 9, temos que dado valor de x^* leva a dois valores diferentes, y^* e y^{**}, o que contraria a definição de função.

No entanto, não podemos confundir os casos 1 e 2 com o caso 3, apresentado na figura 10.

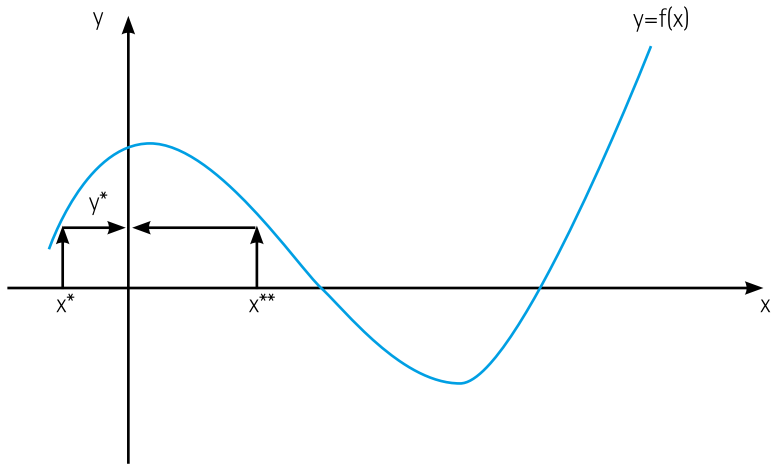
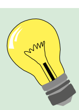


Figura 10 – Caso 3: trata-se de uma função

Vemos que, no caso 3, um mesmo valor y^* corresponde a dois valores x^* e x^{**}, o que não contraria a definição de função. Além disso, cada x está associado a um único y.

Por exemplo, em $y=x^2$ (ou $f(x)=x^2$) tanto a imagem de $x=3$ quanto a imagem de $x=-3$ valem $y=9$, pois:

- se $x=-3$, $y=f(-3)=(-3)^2=9$
- se $x=3$, $y=f(3)=(3)^2=9$



Saiba mais

Para saber mais sobre gráficos que representam e que não representam funções, leia o texto indicado a seguir.

GRÁFICOS de funções. [s.d.]. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/func/grgr.htm. Acesso em: 26 out. 2020.

1.3 Função par e função ímpar

Uma função $y=f(x)$ é chamada de função par se $f(x)=f(-x)$ para qualquer x pertencente ao domínio da função. Se a função é par, ela é simétrica em relação ao eixo y. Por exemplo, vemos, no gráfico de $f(x)=1-x^4$, mostrado na figura 11, que essa função é par.

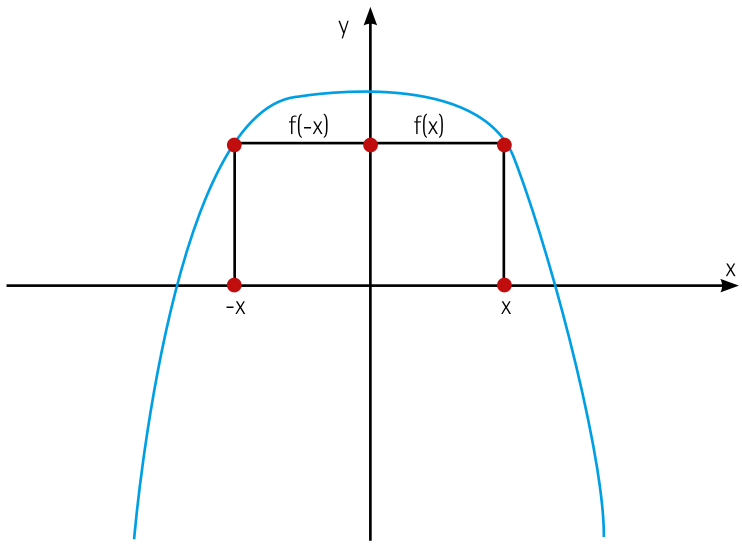


Figura 11 – Exemplo de gráfico de função par: $f(x)=1-x^4$

Veja que, por exemplo, em $f(x)=1-x^4$, se substituirmos x por -2 ou por 2, chegaremos ao mesmo valor de y igual a -15, pois:

- $f(-2)=1-(-2)^4=1-(16)=-15$
- $f(2)=1-(2)^4=1-(16)=-15$

Podemos destacar que, em $f(x)=1-x^4$, não temos apenas $f(-2)=-f(2)$, mas, para qualquer x, verificamos que $f(-x)=-f(x)$.

Uma função $y=f(x)$ é chamada de função ímpar se $f(x)=-f(-x)$ para qualquer x pertencente ao domínio da função. Se a função é ímpar, ela é antissimétrica em relação ao eixo y. Por exemplo, vemos, no gráfico de $f(x)=x+x^5$, mostrado na figura 12, que essa função é ímpar.

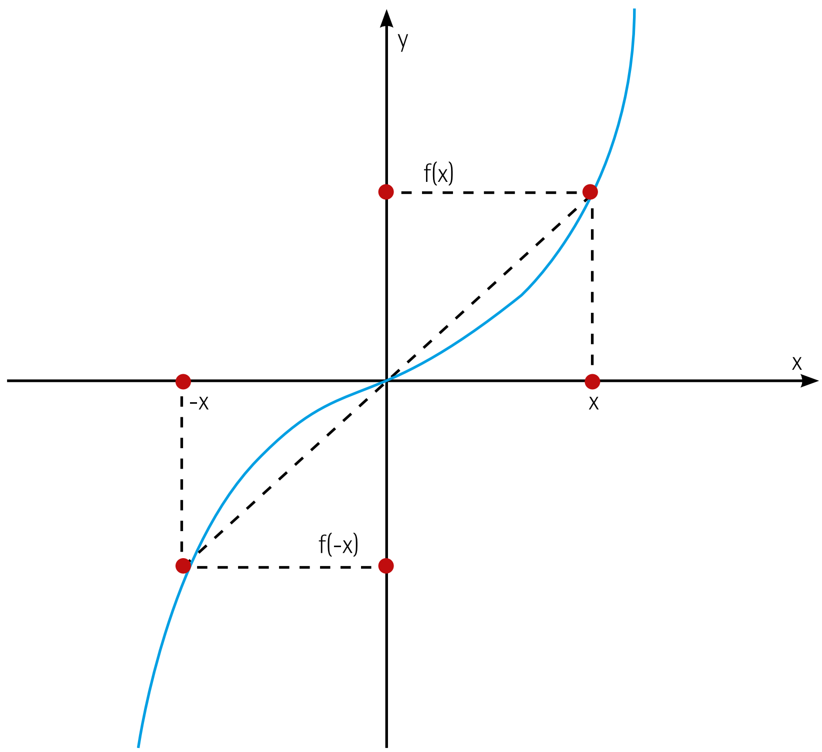


Figura 12 – Exemplo de gráfico de função ímpar: $f(x)=x+x^5$

Veja que, por exemplo, em $f(x)=x+x^5$, se substituirmos x por -2, chegaremos a y igual a -34, e se substituirmos x por 2, chegaremos a y igual a 34, pois:

- $f(-2)=(-2)+(-2)^5=-2+(-32)=-34$
- $f(2)=(2)+(2)^5=2+32=34$

Podemos destacar que, em $f(x)=x+x^5$, não temos apenas $f(2)=-f(-2)$, mas, para qualquer x, verificamos que $f(x)=-f(-x)$.

Vale notar que há funções que não são pares nem ímpares, como a mostrada na figura 8. As funções lineares e do 1º grau, que serão estudadas com detalhes, respectivamente, nos capítulos 2 e 3, também não são funções pares nem funções ímpares.

Observação

Veja que os conceitos de função par e de função ímpar são distintos dos conceitos de número par e de número ímpar.

Saiba mais

Para saber mais sobre funções pares e ímpares, leia o material indicado a seguir.

BORTOLOSSI, H. J. *Pré-cálculo*. [s.d.]. Disponível em: http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2016.1/gma00116/arquivos/gma00116-slides-03.pdf. Acesso em: 25 out. 2020.

2 FUNÇÃO LINEAR

2.1 Definição e características da função linear

O gráfico de uma função linear é uma reta inclinada em relação ao eixo das abscissas (eixo horizontal) que passa pela origem do sistema de eixos.

A função linear segue uma equação do tipo y=a.x (ou f(x)=a.x), em que:

- x é a variável independente (entrada de valores);
- y é a variável dependente (saída de valores);
- a é o coeficiente angular da reta (número real diferente de zero).

Por exemplo, as equações y=3.x, y=-234.x e y=0,005.x representam funções lineares com coeficientes angulares iguais, respectivamente, a 3, -234 e 0,005.

O domínio da função linear é o conjunto de todos os números reais, pois podemos substituir a variável x por qualquer número real ($D_f=\mathbb{R}$). A sua imagem também é o conjunto de todos os números reais, pois y pode "retornar" qualquer número real ($Im_f=\mathbb{R}$).

O coeficiente angular a em y=a.x está relacionado com a inclinação da reta que representa o gráfico dessa função:

- se a>0, temos uma função crescente (reta inclinada para o lado direito);
- se a<0, temos uma função decrescente (reta inclinada para o lado esquerdo).

Por exemplo:

- o coeficiente angular de y=8.x é 8 e trata-se de uma função crescente (reta inclinada para a direita), pois seu coeficiente angular é um número real positivo;

- o coeficiente angular de $y=-7.x$ é -7 e trata-se de uma função decrescente (reta inclinada para a esquerda), pois seu coeficiente angular é um número real negativo;
- o coeficiente angular de $y=\frac{2}{3}.x$ é $\frac{2}{3}$ e trata-se de uma função crescente (reta inclinada para a direita), pois seu coeficiente angular é um número real positivo.

Observação

Uma função $y=f(x)$ é crescente em determinado intervalo I contido em seu domínio D_f $(I \subset D(f))$ se, e somente se, para todo x_1 e para todo x_2 pertencentes a I $(x_1, x_2 \in I)$:

- se $x_1<x_2$, então $f(x_1) \leq f(x_2)$

Uma função $y=f(x)$ é estritamente decrescente em determinado intervalo I contido em seu domínio D_f $(I \subset D(f))$ se, e somente se, para todo x_1 e para todo x_2 pertencentes a I $(x_1, x_2 \in I)$:

- se $x_1>x_2$, então $f(x1)<f(x_2)$

Agora, vamos ver como calculamos o coeficiente angular a de uma função linear se conhecermos o seu gráfico, que, como já dissemos, é uma reta que passa pela origem.

Na figura 13, podemos visualizar os pontos $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$ de uma reta que passa pela origem O do sistema de eixos, sendo que:

- x_1 é a abscissa do ponto P_1
- y_1 é a ordenada do ponto P_1
- x_2 é a abscissa do ponto P_2
- y_2 é a ordenada do ponto P_2

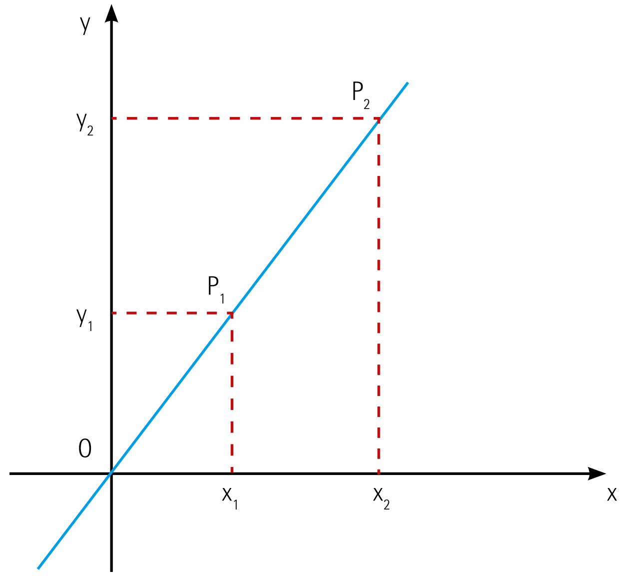


Figura 13 – Pontos $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$ de uma reta que passa pela origem, de equação y=a.x

O coeficiente angular a da reta da figura 13, que está associado com sua inclinação, é calculado por:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Observação

Alternativamente, sem que haja mudança no resultado obtido, poderíamos fazer $a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ no cálculo do coeficiente angular da reta da figura 13.

2.2 Exemplos e aplicações da função linear

Tomemos como exemplo o gráfico da figura 14. Vemos uma reta inclinada que passa pela origem e que é inclinada para a direita; logo, sabemos que se trata de uma função linear, de equação y=a.x, em que a é um número real positivo.

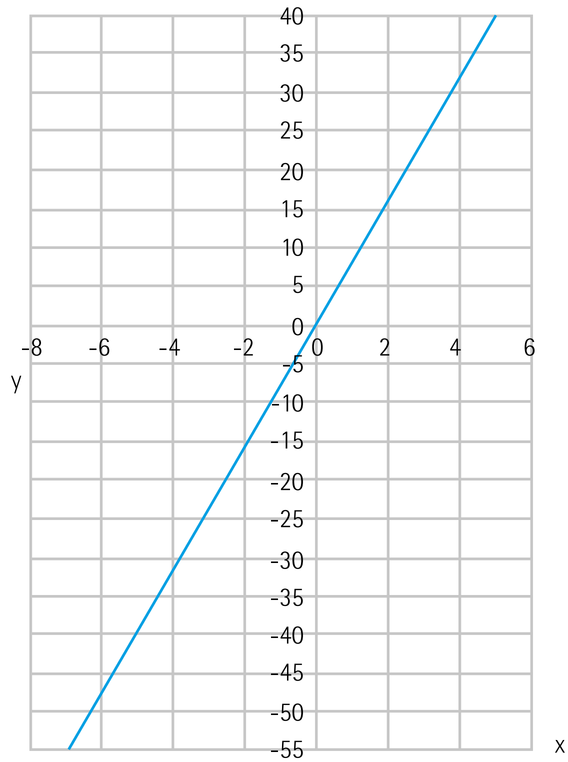


Figura 14 – Gráfico de função linear (y=a.x, com a>0)

Vamos escolher quaisquer dois pontos P_1 e P_2 da reta da figura 14 para calcularmos seu coeficiente angular. Como mostrado na figura 15, podemos selecionar, por exemplo, $P_1=(-5,-40)$ e $P_2=(3,24)$.

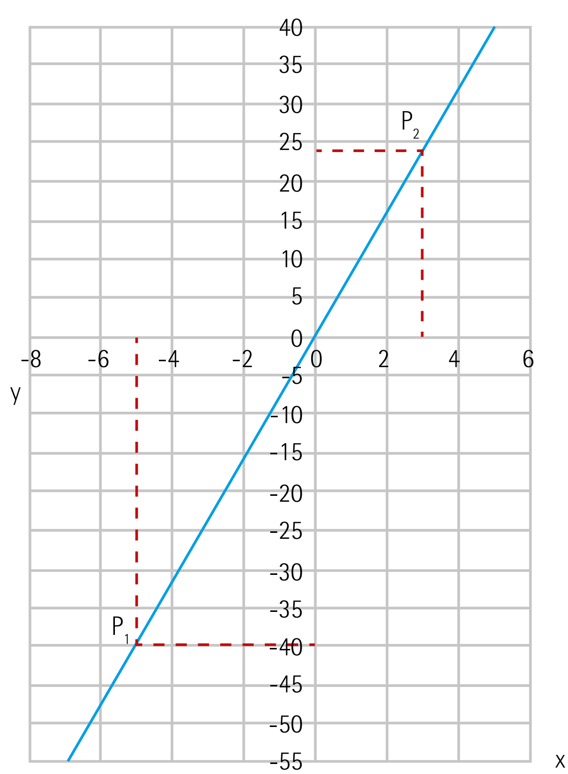


Figura 15 – Gráfico de função linear (y=a.x, com a>0) e indicações de P_1 e de P_2

Nesse caso, temos:

- x_1=-5
- y_1=-40
- x_2=3
- y_2=24

Logo, o coeficiente angular a da reta da figura 14 é igual a 8, pois:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{24-(-40)}{3-(-5)}=\frac{24+40}{3+5}=\frac{64}{8}=8$$

Assim, concluímos que a equação da reta da figura 14 é y=8.x

Veja que, para termos maior precisão de leitura de valores do gráfico e, também, maior facilidade na realização das contas, podemos escolher, por exemplo, P_1=(-5,-40) e P_2=(0,0).

Nesse caso, temos:

- x_1=-5
- y_1=-40
- x_2=0
- y_2=0

Confirmamos que o coeficiente angular a da reta da figura 14 é igual a 8:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-40)}{0-(-5)}=\frac{40}{5}=8$$

Vale destacar que o gráfico da figura 15 não foi feito em escala de 1 para 1. Veja que, por exemplo, a distância entre 0 e 10 no eixo vertical é quase igual à distância entre 0 e 2 no eixo horizontal.

Observação

O coeficiente angular da reta não depende da escolha dos pontos P_1 e P_2.

Lembrete

Quando escrevemos -(-40), estamos pensando no produto (ou na multiplicação) de -1 por -40, o que resulta em +40 (ou apenas 40).

Ou seja, -(-40)=-1.(-40)=+40=40

Exemplo de aplicação

Exemplo 3

Calcule o coeficiente angular da reta mostrada no gráfico da figura 16.

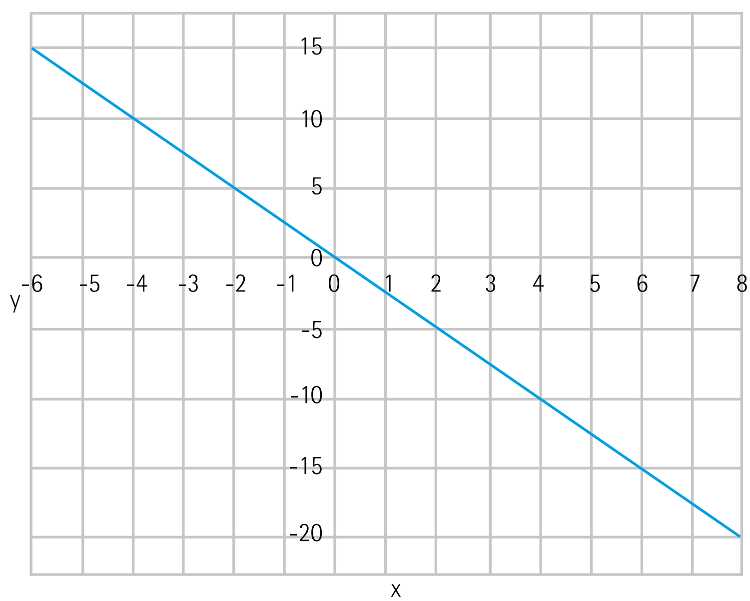


Figura 16 – Gráfico de função linear (y=a.x, com a<0)

Resolução

Vamos escolher quaisquer dois pontos P_1 e P_2 da reta da figura 16 para calcularmos seu coeficiente angular. Como mostrado na figura 17, podemos selecionar, por exemplo, P_1=(-6,15) e P_2=(4,-10).

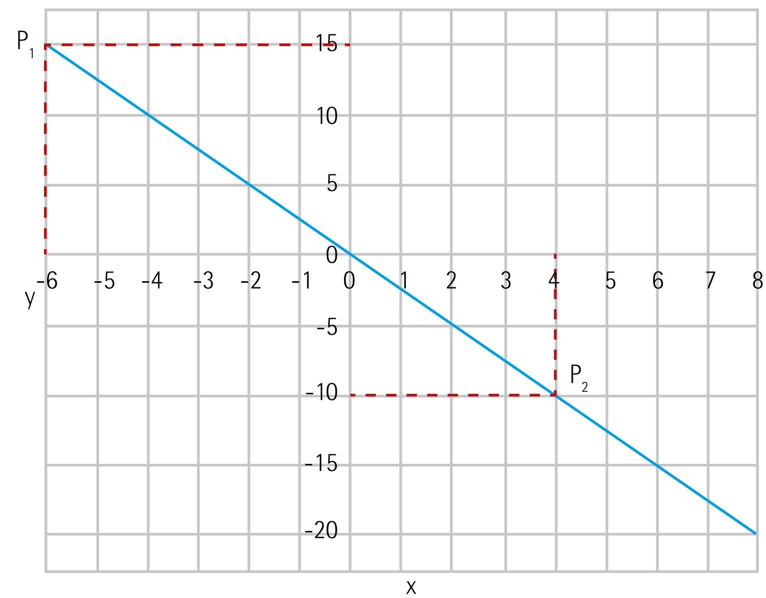


Figura 17 – Gráfico de função linear (y=a.x, com a<0) e indicações de P_1 e de P_2

Nesse caso, temos:

- $x_1=-6$
- $y_1=15$
- $x_2=4$
- $y_2=-10$

Logo, o coeficiente angular a da reta da figura 16 é igual a -2,5, pois:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-10-15}{4-(-6)}=\frac{-25}{10}=-2,5$$

O sinal negativo do coeficiente angular confere com o que visualizamos: uma reta inclinada para a esquerda.

Concluímos que a equação da reta da figura 16 é y=-2,5.x

Na figura 18, temos os gráficos das funções y(x)=-x, y(x)=0,5.x, y(x)=x e y(x)=2.x, construídos no mesmo sistema de eixos.

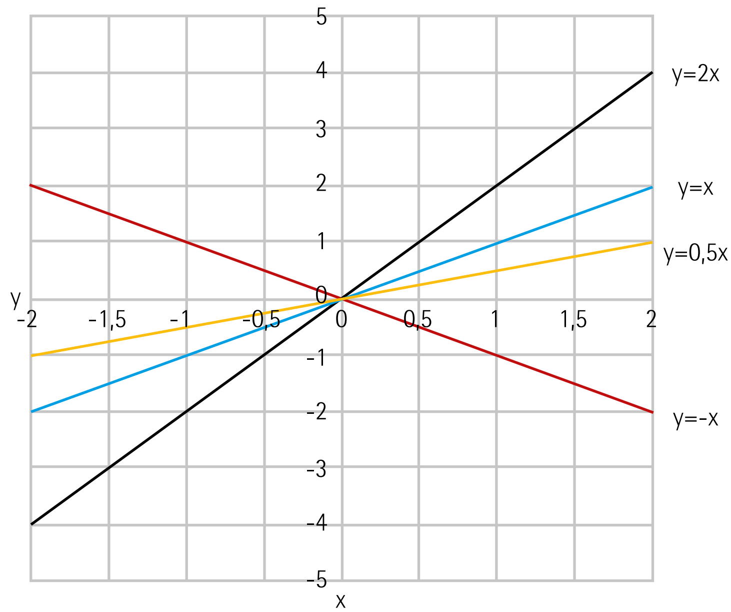


Figura 18 – Gráficos das funções y(x)=-x, y(x)=0,5.x, y(x)=x e y(x)=2.x

Os gráficos de y(x)=0,5.x, y(x)=x e y(x)=2.x são retas crescentes, pois essas funções têm coeficientes angulares positivos (maiores do que zero), respectivamente iguais a 0,5, 1 e 2. Tais funções são crescentes, pois, nelas, aumentos em x implicam aumentos em y.

Lembrete

Escrever y(x)=x é equivalente a escrever y(x)=1.x

O gráfico de y(x)=-x é uma reta decrescente, pois essa função tem coeficiente angular negativo (menor do que zero), igual a -1. Tal função é decrescente, pois, nela, aumentos em x implicam diminuições em y.

Lembrete

Escrever y(x)=-x é equivalente a escrever y(x)=-1.x

Observação

Uma função y=f(x) é decrescente em determinado intervalo I contido em seu domínio D_f ($I \subset D(f)$) se, e somente se, para todo x_1 e para todo x_2 pertencentes a I ($x_1, x_2 \in I$):

- se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) \geq f(x_2)$

Uma função $y=f(x)$ é estritamente decrescente em determinado intervalo I contido em seu domínio D_f $(I \subset D(f))$ se, e somente se, para todo x_1 e para todo x_2 pertencentes a I $(x_1, x_2 \in I)$:

- se $x_1<x_2$, então $f(x_1)>f(x_2)$

As retas relativas às funções $y(x)=x$ e $y(x)=-x$ são simétricas em relação ao eixo y, pois seus coeficientes angulares têm mesmo valor absoluto (módulo), visto que:

- $|1|=1$ e $|-1|=1$

Se observarmos, na figura 18, as retas associadas às funções $y=x$ e $y=0,5.x$, veremos o que segue.

- Em $y=x$, se aumentamos 1 unidade em x, aumentamos também 1 unidade em y, ou seja, a proporção de variação de y em relação a x é de 1, que é o valor do coeficiente angular da função.

- Em $y(x)=0,5.x$, se aumentamos 1 unidade em x, aumentamos 0,5 unidade em y, ou seja, a proporção de variação de y em relação a x é de 0,5, que é o valor do coeficiente angular da função.

Observação

Na "fórmula" $y=0,5.x$, x representa a variável independente (entrada de valores) e y representa a variável dependente (saída de valores). Por exemplo, se pensamos em x igual a 58, a "fórmula" $y=0,5.x$ retorna y igual a 29, pois 0,5 vezes 58 resulta em 29.

A regra estabelecida em $y=0,5.x$ é a seguinte: dê um valor para x, multiplique-o por 0,5 e insira esse resultado em y.

Lembrete

O coeficiente angular a de uma função linear não é um ponto da reta que representa tal função; esse coeficiente está ligado à inclinação da reta que representa a função.

Vejamos a seguinte aplicação: imagine que, em outubro de 2020, o grama de ouro esteja cotado a R$350,00 e que você queira saber como varia o valor a ser pago com a "massa" (peso), em gramas, de ouro comprada por uma pessoa. Essa situação pode ser modelada por uma função linear?

A resposta é sim!

Para modelarmos a situação apresentada com uma função linear, vamos usar os símbolos a seguir.

- M: massa de ouro, em gramas, comprada por uma pessoa.
- V: valor, em reais (R$), que a pessoa deve pagar pelo ouro comprado.

Pela natureza do problema em estudo, vemos que:

- $M \geq 0$, pois não podemos comprar "gramas negativos" de ouro;
- $V \geq 0$, pois não podemos pagar o ouro comprado com "reais negativos".

Claramente, estamos lidando com um caso em que ocorre proporção, como mostrado nos exemplos a seguir:

- 0 grama de ouro custa 0 reais;
- 0,5 grama de ouro custa 175,00 reais;
- 1 grama de ouro custa 350,00 reais;
- 2 gramas de ouro custam 700,00 reais;
- 50 gramas de ouro custam 17.500,00 reais.

Assim, temos uma função do tipo $V=350.M$, que é do tipo linear.

O domínio da função é $Dom_V = \{M \in \mathbb{R} / M \geq 0\}$, lido como M pertence aos números reais, tal que M seja maior do que zero ou igual a zero.

A imagem da função é $Im_V = \{V \in \mathbb{R} / V \geq 0\}$, lido como V pertence aos números reais, tal que V seja maior do que zero ou igual a zero.

Na figura 19, temos o gráfico de $V=350.M$.

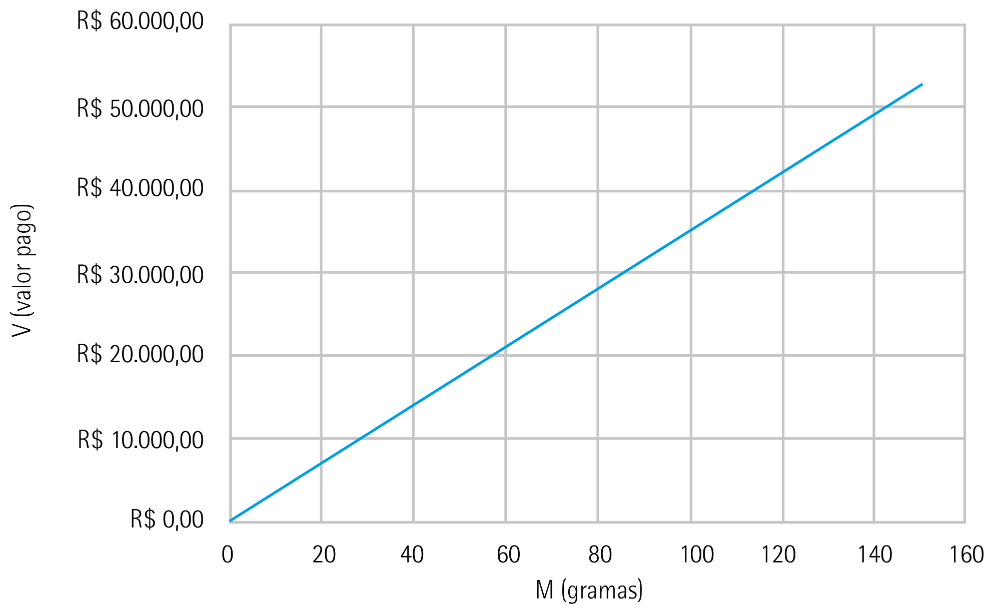


Figura 19 – Gráfico da função V=350.M

Saiba mais

Para saber mais sobre funções lineares, leia o material indicado a seguir.

CAIUSCA, A. Função linear. *Guia estudo*. 11 jun. 2019. Disponível em: https://www.guiaestudo.com.br/funcao-linear. Acesso em: 27 out. 2020.

Observação

A função dada por y=a, sendo a um número real, é chamada de função constante, e seu gráfico é uma reta de altura a paralela ao eixo horizontal (eixo x). Por exemplo, o gráfico da função y=5, ilustrado na figura 20, é uma reta paralela ao eixo x e de altura igual a 5. Veja que, nesse caso, qualquer que seja o valor atribuído à variável independente x, sua imagem é y=5.

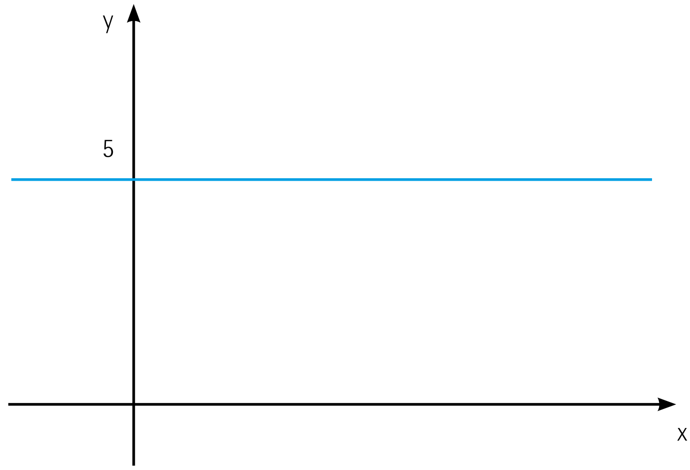


Figura 20 – Gráfico da função constante y=5

3 FUNÇÃO DO 1° GRAU

3.1 Definição e características da função do 1° grau

O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta inclinada em relação ao eixo das abscissas (eixo horizontal).

A função do 1º grau segue uma equação do tipo y=a.x+b (ou f(x)=a.x+b), em que:

- x é a variável independente (entrada de valores);
- y é a variável dependente (saída de valores);
- a é o coeficiente angular da reta (número real diferente de zero);
- b é o coeficiente linear (número real).

Por exemplo, as equações y=3.x+1, y=-234.x+12 e y=0,005.x-2 representam funções do 1º grau com coeficientes angulares iguais, respectivamente, a 3, -234 e 0,005 e com coeficientes lineares iguais, respectivamente, a 1, 12 e -2.

O domínio da função do 1º grau é o conjunto de todos os números reais, pois podemos substituir a variável x por qualquer número real ($D_f=\mathbb{R}$). A sua imagem também é o conjunto de todos os números reais, pois y pode "retornar" qualquer número real ($Im_f=\mathbb{R}$).

Assim como no caso da função linear, o coeficiente angular a da função do 1º grau, dada por y=a.x+b, está relacionado com a inclinação da reta que representa o gráfico dessa função:

- se $a>0$, temos uma reta inclinada para o lado direito;
- se $a<0$, temos uma reta inclinada para o lado esquerdo.

Em outras palavras, no caso de $y=a.x+b$:

- $a>0$ implica uma reta crescente;
- $a<0$ implica uma reta decrescente.

O coeficiente linear b da função do 1º grau, dada por $y=a.x+b$, é a posição em que a reta intercepta o eixo vertical (eixo y).

Vejamos os exemplos a seguir.

- O coeficiente angular de $y=8.x-3$, ou $y=8.x+(-3)$, é 8 e seu coeficiente linear é -3. Trata-se de uma reta inclinada para a direita (pois seu coeficiente angular é um número real positivo) e que cruza o eixo vertical em $y=-3$.
- O coeficiente angular de $y=-7.x+2$ é -7 e seu coeficiente linear é 2. Trata-se de uma reta inclinada para a esquerda (pois seu coeficiente angular é um número real negativo) e que cruza o eixo vertical em $y=2$.
- O coeficiente angular de $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{11}$ é $\frac{2}{3}$ e seu coeficiente linear é $\frac{7}{11}$. Trata-se de uma reta inclinada para a direita (pois seu coeficiente angular é um número real positivo) e que cruza o eixo vertical em $y=\frac{7}{11}$.
- O coeficiente angular de $y=-21{,}56.x$, ou $y=-21{,}56.x+0$, é -21,56 e seu coeficiente linear é 0. Trata-se de uma reta inclinada para a esquerda (pois seu coeficiente angular é um número real negativo) e que cruza o eixo vertical em $y=0$.

Observação

Podemos considerar que a função linear $y=a.x$ é um caso particular de função do 1º grau $y=a.x+b$ com $b=0$.

Agora, vamos ver como calculamos o coeficiente angular a de uma função do 1º grau se conhecermos o seu gráfico, que, como já dissemos, é uma reta.

Na figura 21, podemos visualizar os pontos $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$ de uma reta, sendo que:

- x_1 é a abscissa do ponto P_1
- y_1 é a ordenada do ponto P_1
- x_2 é a abscissa do ponto P_2
- y_2 é a ordenada do ponto P_2

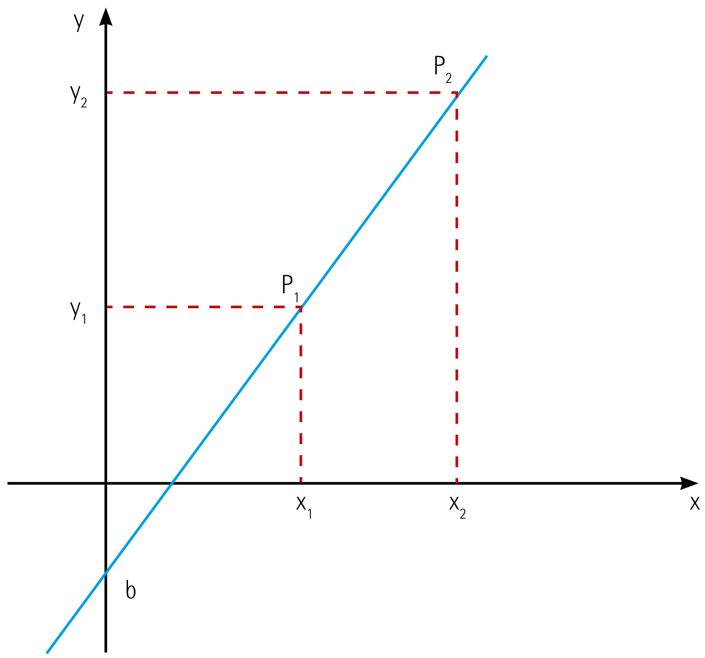


Figura 21 – Pontos $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$ de uma reta de equação $y=a.x+b$

O coeficiente angular a da reta da figura 21, que está associado com sua inclinação, é calculado por:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Veja que o coeficiente linear b da função do 1º grau pode ser lido diretamente no seu gráfico, como indicado na figura 21.

Vale reforçar que o valor do coeficiente angular independe da escolha dos pontos P_1 e P_2, visto que esse valor está relacionado com a inclinação da reta, que é única. Em resumo, podemos escolher, livremente, quaisquer dois pontos pertencentes à reta em estudo para determinarmos o seu coeficiente angular.

3.2 Exemplos e aplicações da função do 1° grau

Tomemos como exemplo o gráfico da figura 22. Como vemos uma reta inclinada para a direita, sabemos que se trata de uma função do 1º grau de equação $y=a.x+b$, em que a é um número real positivo.

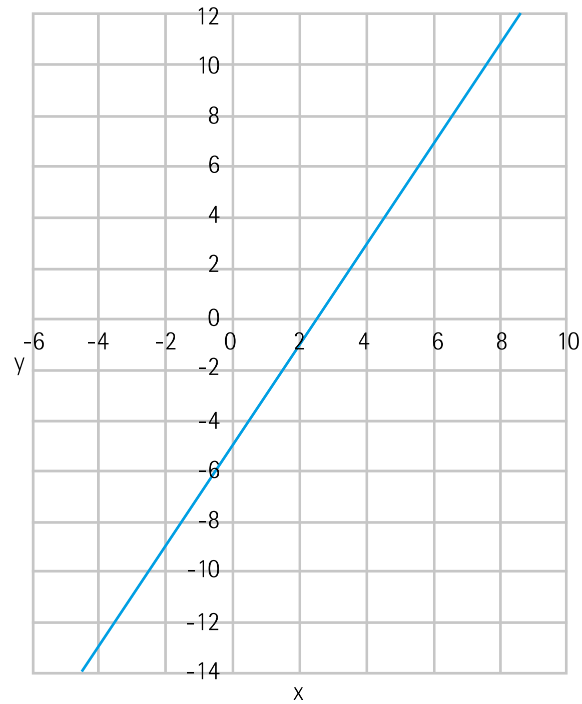


Figura 22 – Gráfico de função do 1º grau (reta inclinada para a direita)

Vamos escolher quaisquer dois pontos P_1 e P_2 da reta da figura 22 para calcularmos seu coeficiente angular. Como mostrado na figura 23, podemos selecionar, por exemplo, $P_1=(-4,-13)$ e $P_2=(6,7)$.

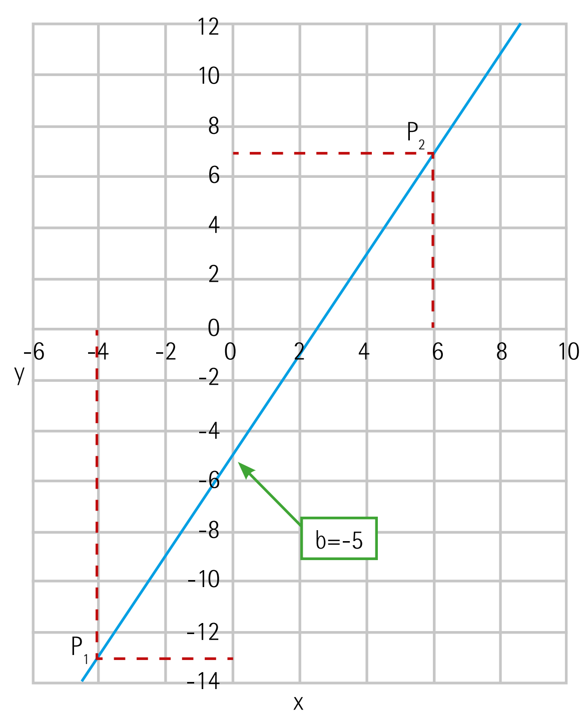


Figura 23 – Gráfico de função do 1º grau (reta inclinada para a direita), indicações de P_1 e de P_2 e exibição do cruzamento da reta com o eixo Oy em b=-5

Nesse caso, temos:

- x_1=-4
- y_1=-13
- x_2=6
- y_2=7

Logo, o coeficiente angular a da reta da figura 22 é igual a 2, pois:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-(-13)}{6-(-4)}=\frac{7+13}{6+4}=\frac{20}{10}=2$$

O coeficiente linear b da reta está identificado na figura 23 e vale -5.

Assim, concluímos que a equação da reta da figura 22 é y=2.x-5.

Observação

Na "fórmula" y=2.x-5, x representa a variável independente (entrada de valores) e y representa a variável dependente (saída de valores). Por exemplo, se pensamos em x igual a 327, a "fórmula" y=2.x-5 retorna y igual a 649, pois 2 vezes 327 menos 5 resulta em 649.

A regra estabelecida em y=2.x-5 é a seguinte: dê um valor para x, multiplique-o por 2, subtraia 5 e insira esse resultado em y.

Exemplo de aplicação

Exemplo 4

Apresente a equação da reta mostrada no gráfico da figura 24.

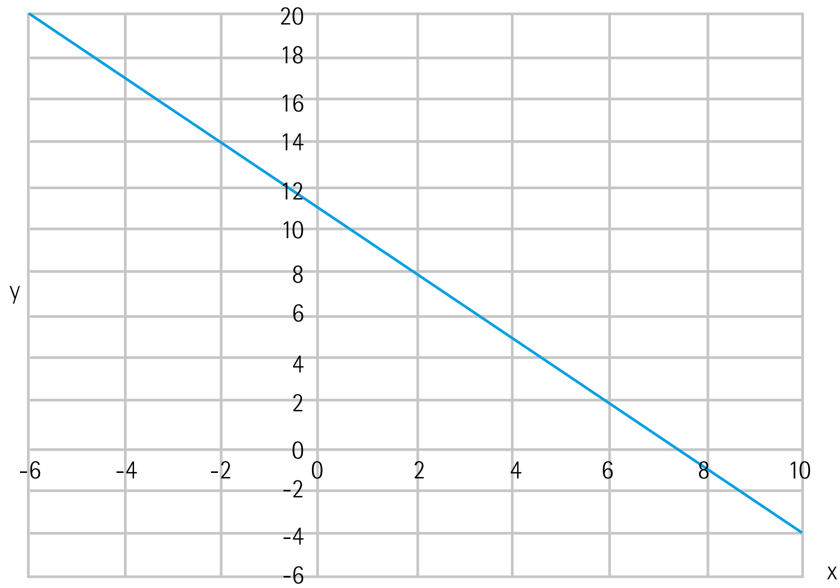


Figura 24 – Gráfico de função do 1º grau (reta inclinada para a esquerda)

Resolução

Vamos escolher quaisquer dois pontos P_1 e P_2 da reta da figura 24 para calcularmos seu coeficiente angular. Como mostrado na figura 25, podemos selecionar, por exemplo, $P_1=(-2,14)$ e $P_2=(-4,10)$.

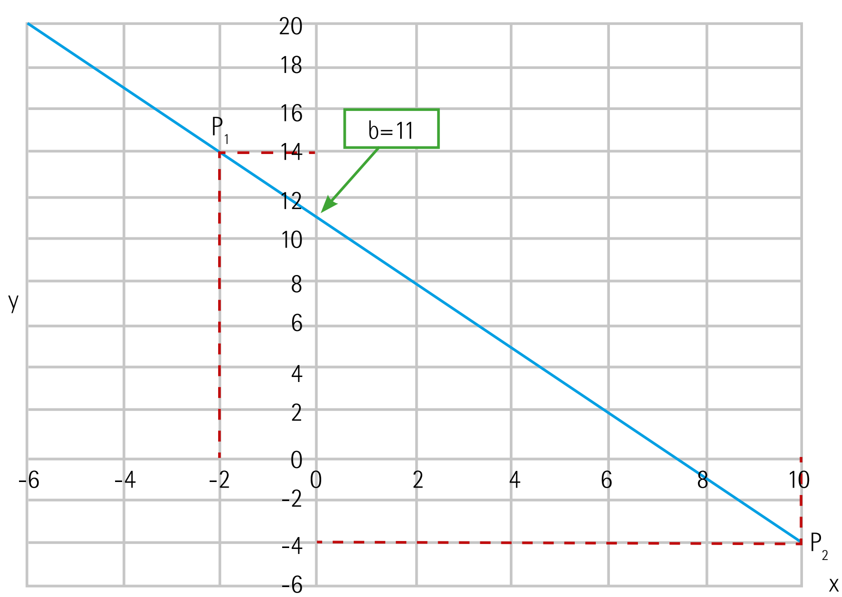


Figura 25 – Gráfico de função do 1º grau (reta inclinada para a esquerda) e indicações de P_1 e de P_2

Nesse caso, temos:

- $x_1=-2$

- y_1=14
- x_2=-4
- y_2=10

Logo, o coeficiente angular a da reta da figura 24 é igual a -1,5, pois:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-14}{10-(-2)}=\frac{-18}{12}=-1,5$$

O sinal negativo do coeficiente angular confere com o que visualizamos: uma reta inclinada para a esquerda.

O coeficiente linear b da reta está identificado na figura 25 e vale 11.

Assim, concluímos que a equação da reta da figura 24 é y=-1,5.x+11

Observe o gráfico da figura 26.

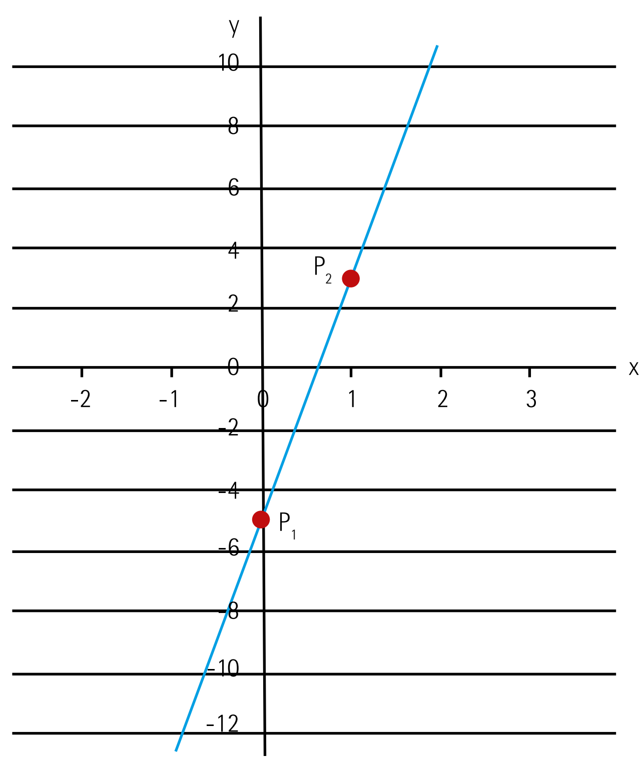


Figura 26 – Gráfico de função do 1º grau para análise

Os pontos P_1 e P_2 indicados na figura 26 têm as seguintes coordenadas:

- $P_1=(x_1,y_1)=(0,-5)$
- $P_2=(x_2,y_2)=(1,3)$

Se tomarmos esses pontos, ou quaisquer outros dois pontos da reta da figura 26, poderemos fazer o cálculo do seu coeficiente angular a, que resulta em 8, conforme mostrado a seguir.

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-5)}{1-0}=\frac{8}{1}=8$$

O que isso significa?

Significa que a proporção de aumento de y em relação a x vale 8. Assim, para esse caso, podemos dizer que:

- se aumentamos 0,5 (meia) unidade no valor de x, aumentamos 4 unidades no valor de y;
- se aumentamos 1 unidade no valor de x, aumentamos 8 unidades no valor de y;
- se aumentamos 2 unidades no valor de x, aumentamos 16 unidades no valor de y;
- se diminuímos 10 unidades no valor de x, diminuímos 80 unidades no valor de y.

Lembrete

O coeficiente angular a de uma função do 1º grau não é um ponto da reta que representa tal função; esse coeficiente está ligado à inclinação da reta que representa a função.

Exemplo de aplicação

Exemplo 5

Escreva a equação da reta que contém os pontos P_1 e P_2 cujas coordenadas são:

- $P_1=(-3,-8)$
- $P_2=(5,8)$

Resolução

Queremos saber a equação da reta que passa por $P_1=(x_1,y_1)=(-3,-8)$ e $P_2=(x_2,y_2)=(5,8)$.

Nesse caso, temos:

- $x_1=-3$
- $y_1=-8$
- $x_2=5$
- $y_2=8$

Logo, o coeficiente angular a da reta em estudo é 2, pois:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$a=\frac{8-(-8)}{5-(-3)}=\frac{8+8}{5+3}=\frac{16}{8}=2$$

O sinal positivo do coeficiente angular mostra que a reta em estudo é inclinada para a esquerda.

Para calcularmos o coeficiente linear b da reta, podemos substituir as coordenadas de P_1, por exemplo, e o valor do coeficiente angular a na equação geral da reta. Logo, fazendo y=-8, x=-3 e a=2 em y=a.x+b, ficamos com b=-2, conforme mostrado a seguir.

$y = a.\,x + b \Rightarrow -8 = 2\,.\,(-3) + b \Rightarrow -8 + 6 = b \Rightarrow b = -2$

Alternativamente, poderíamos ter substituído as coordenadas de P_s (ou de qualquer outro ponto da reta) e o valor do coeficiente angular a na equação geral da reta. Obteríamos, assim, o mesmo valor de b igual a -2.

Concluímos que a equação da reta em estudo é: y=2.x-2

Agora, vamos construir o gráfico da função y=2.x-2 com o auxílio do assistente de gráfico do Excel e de acordo com o passo a passo mostrado a seguir.

Passo 1. Faça uma tabela no Excel digitando as abscissas (x_1 e x_2) e as ordenadas (y_1 e y_2) dos pontos P_1 e P_2 em células dessa planilha, como mostrado na figura 27.

	A	B	C	D
1				
2		x	y	
3		-3	-8	
4		5	8	
5				

Figura 27 – Construção do gráfico de y=2.x-2 (parte 1)

Passo 2. Selecione toda a extensão da tabela (faixa de valores de A2 até C4), clique na aba "Inserir" e escolha o tipo e o subtipo de gráfico, como mostrado na figura 28.

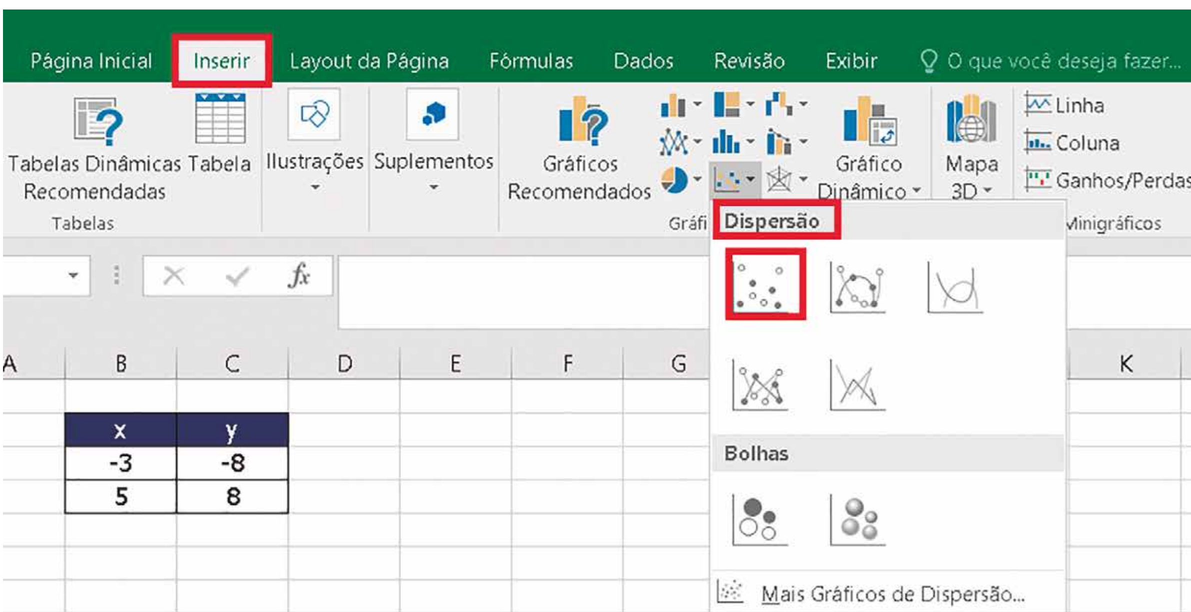


Figura 28 – Construção do gráfico de y=2.x-2 (parte 2)

Você obterá algo similar à figura 29.

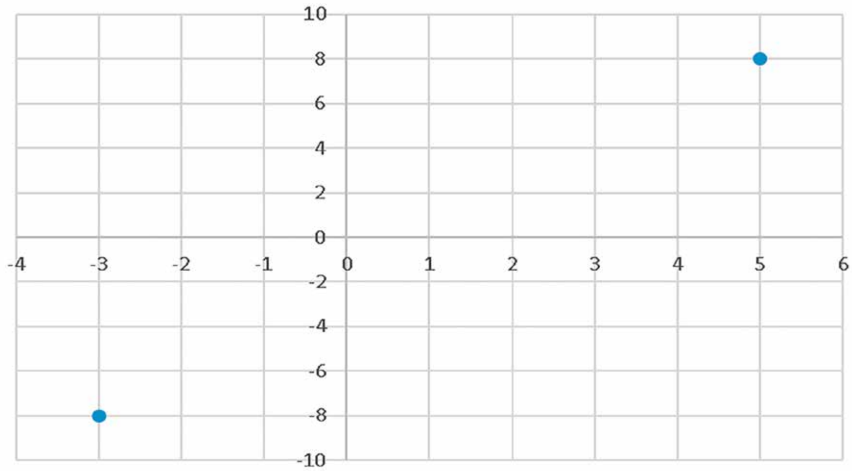


Figura 29 – Construção do gráfico de y=2.x-2 (parte 3)

Observação

Se a imagem que você obteve não é a do posicionamento dos pontos P_1 e P_2, o Excel não está tratando os dados ao longo de colunas. Nesse caso, clique na área do gráfico com o botão direito do *mouse* e selecione a opção "Selecionar Dados". Com isso, abre-se uma caixa de diálogo que possibilita que se faça a alternância entre linhas e colunas. Para isso, clique no botão no centro da caixa.

Passo 3. Clique nos marcadores e adicione uma linha de tendência do tipo linear, como mostrado nas figuras 30 e 31.

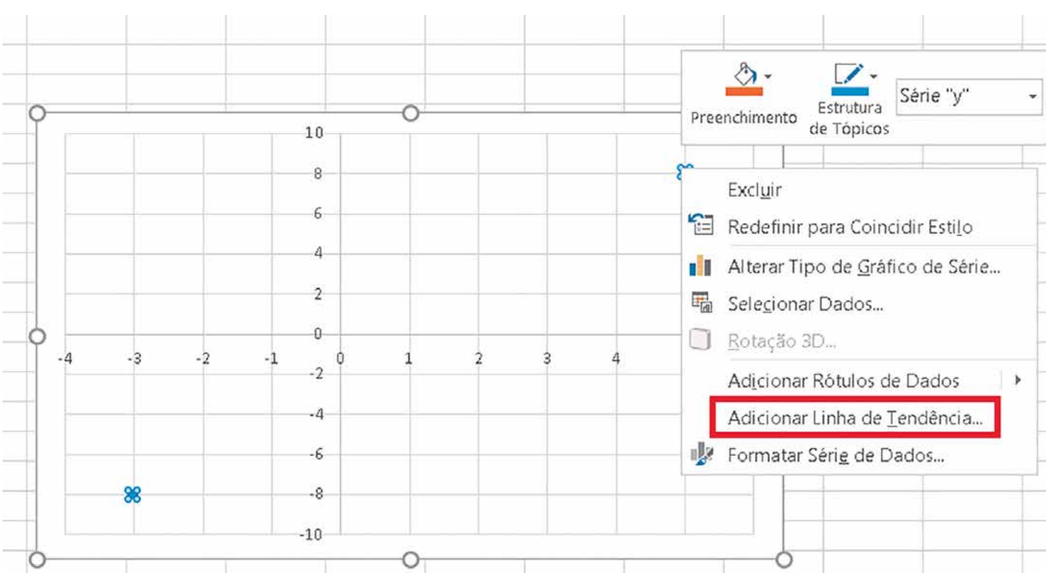


Figura 30 – Construção do gráfico de y=2.x-2 (parte 4)

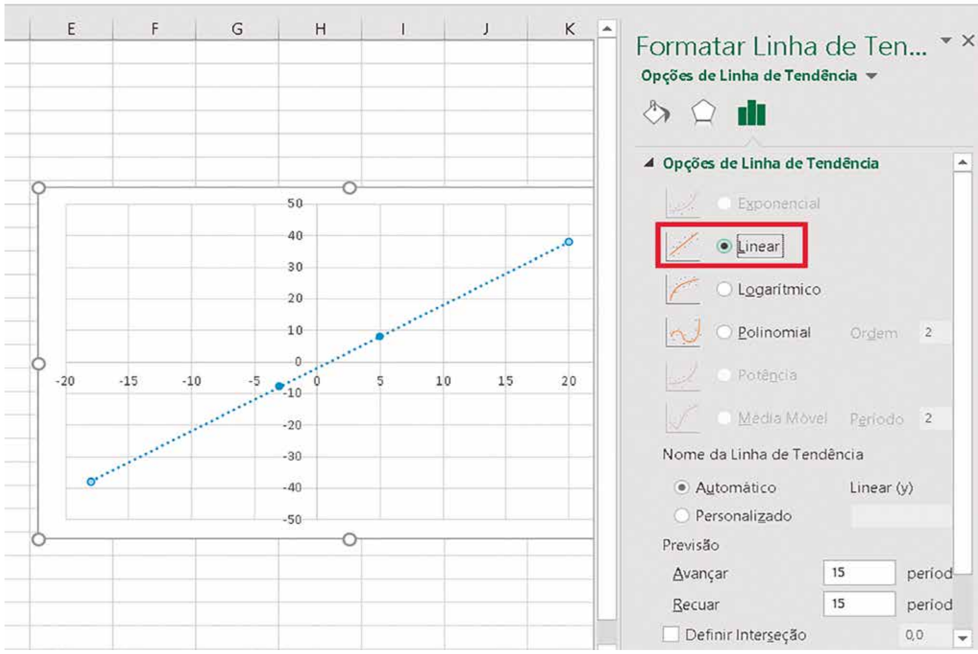


Figura 31 – Construção do gráfico de y=2.x-2 (parte 5)

Observação

A linha de tendência visa ao ajuste de uma função aos dados do gráfico.

Passo 4. Veja, na figura 32, o gráfico de y=2.x-2, uma reta inclinada para a direita e que intercepta o eixo vertical em y=-2.

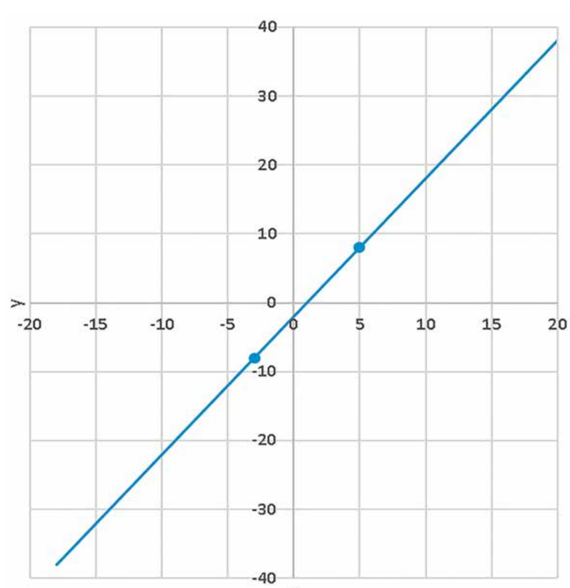


Figura 32 – Construção do gráfico de y=2.x-2 (parte 6)

Observação

O Excel disponibiliza diversas ferramentas gráficas, incluindo vários tipos de gráficos padronizados e personalizados. É bastante fácil construirmos gráficos com o auxílio do Excel, visto que existe um "assistente de gráfico" situado na barra de ferramentas dessa planilha de cálculo. Após digitarmos coordenadas de pontos da função em células da planilha, selecionamos esses dados e escolhemos, na aba identificada por "Inserir", o tipo de gráfico apropriado.

Podemos fazer aproximações de dados por funções do 1º grau com o uso do Excel. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

Exemplo 6

Aproxime os dados da tabela a seguir por uma função de 1º grau.

Tabela 4

x	y
-7	-16,8
-3	-9,3
0	0,8
2	1,2
3	2,7
6	9,5

Resolução

Os pontos presentes na tabela não estão perfeitamente alinhados, ou seja, não formam, rigorosamente, uma reta. Contudo, podemos fazer uma reta aproximada para essa situação. A fim de termos a melhor reta adaptada aos pontos, vamos usar o ajuste de linha de tendência do Excel. Os passos para exercitarmos isso são os mostrados a seguir.

- **Passo 1**. Digitar a tabela em uma planilha do Excel.
- **Passo 2**. Selecionar a faixa de valores relativa às células da tabela.

- **Passo 3**. Clicar em "Inserir" e escolher o tipo e o subtipo de gráfico oferecidos na caixa de diálogo colocada na tela (no caso, dispersão xy).
- **Passo 4**. Nomear os eixos (eixo x e eixo y).
- **Passo 5**. Pressionar o botão direito do *mouse* na posição de um dos marcadores.
- **Passo 6**. Selecionar "Adicionar Linha de Tendência".
- **Passo 7**. Escolher "Tipo Linear" na caixa de diálogo e clicar em "Exibir Equação no Gráfico".

Obtemos o gráfico da figura 33.

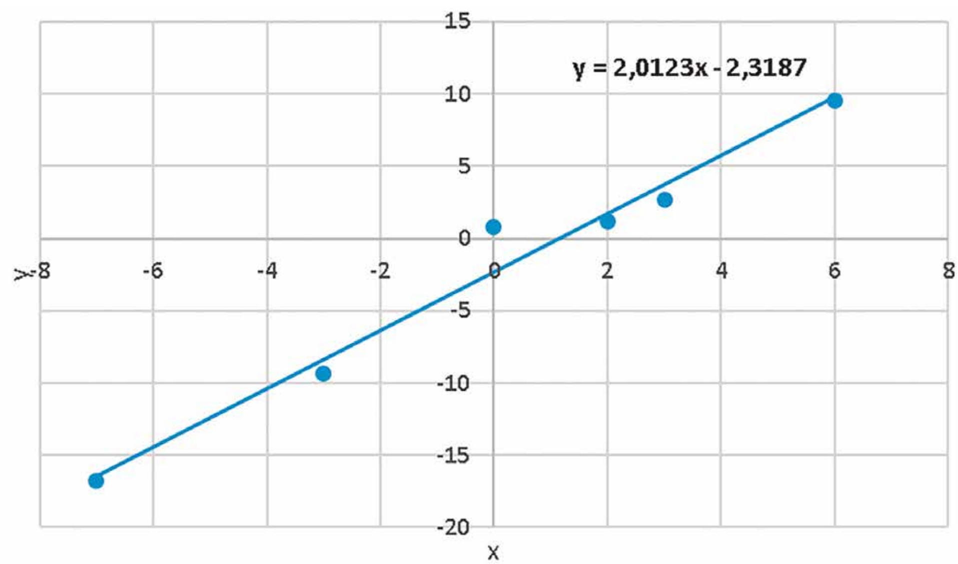


Figura 33 – Reta ajustada

A equação y=2,0123.x-2,3187 é a reta ajustada aos dados da tabela.

Exemplo 7

Na figura 34, temos a representação de um circuito elétrico em que:

- I representa a intensidade da corrente elétrica (em ampere, unidade indicada por A);
- U representa a tensão (em volt, unidade indicada por V);
- E representa a força eletromotriz da bateria (em volt, unidade indicada por V);
- R representa a resistência (em ohm, unidade indicada por Ω).

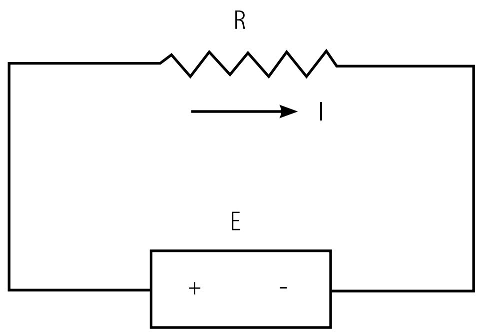


Figura 34 – Circuito elétrico

Sabe-se que U=E-R.I e que, para o caso em estudo, o gráfico dessa função é o apresentado na figura 35.

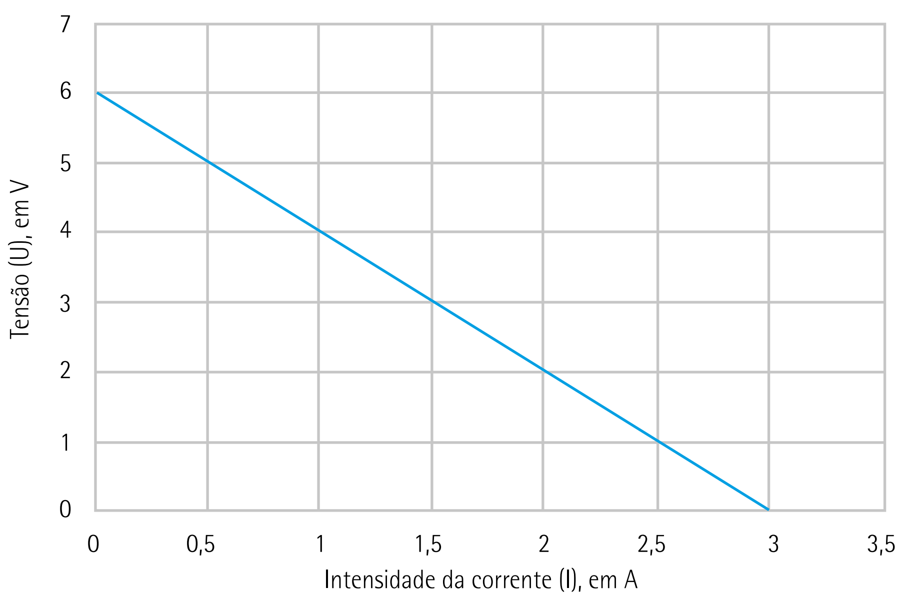


Figura 35 – Circuito elétrico: gráfico

Determine, para o caso exposto, os valores de E e de R.

Resolução

Estamos trabalhando com a função do 1º grau dada por U=E-R.I, que pode ser reescrita como U=-R.I+E. Nessa função, temos o que segue:

- I é a variável independente;
- U é a variável dependente;
- E é o coeficiente linear da reta U=U(I);
- -R é o coeficiente angular da reta U=U(I).

Na figura 35, visualizamos uma reta inclinada para a esquerda e que intercepta o eixo vertical na posição 6. Logo, o coeficiente linear dessa reta é E=6.

Assim, ficamos com U=-R.I+6

Do gráfico da figura 35, podemos tomar, por conveniência, o ponto P_1=(3,0).

Podemos substituir U por 0 e I por 3 em U=-R.I+6:

0=-R.3+6→R=6/3=2

Concluímos que E=6V e que R=2Ω.

Observação

A posição em que o gráfico de uma função y=f(x) cruza o eixo horizontal, se existir, é chamada de raiz da função. Nessa posição, y=0. No caso da função do 1º grau (y=a.x+b) , a raiz é dada por $x = -\frac{b}{a}$, conforme calculado a seguir.

$$a.x + b = 0 \Rightarrow a.x = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

3.3 Retas paralelas

Retas paralelas têm mesma inclinação, ou seja, apresentam mesmo valor de coeficiente angular, mas diferentes valores de coeficientes lineares.

Tomemos como exemplo de retas paralelas as dadas pelas funções y=2.x (ou y=2x+0), y=2.x-1 e y=2.x+1: essas três retas têm coeficiente angular igual a 2 e coeficientes lineares iguais a 0, -1 e 1, respectivamente.

Vemos, na figura 36, que a reta y=2.x+1 intercepta o eixo y em y=1, a reta y=2.x intercepta o eixo y em y=0 e a reta y=2.x-1 intercepta o eixo y em y=-1.

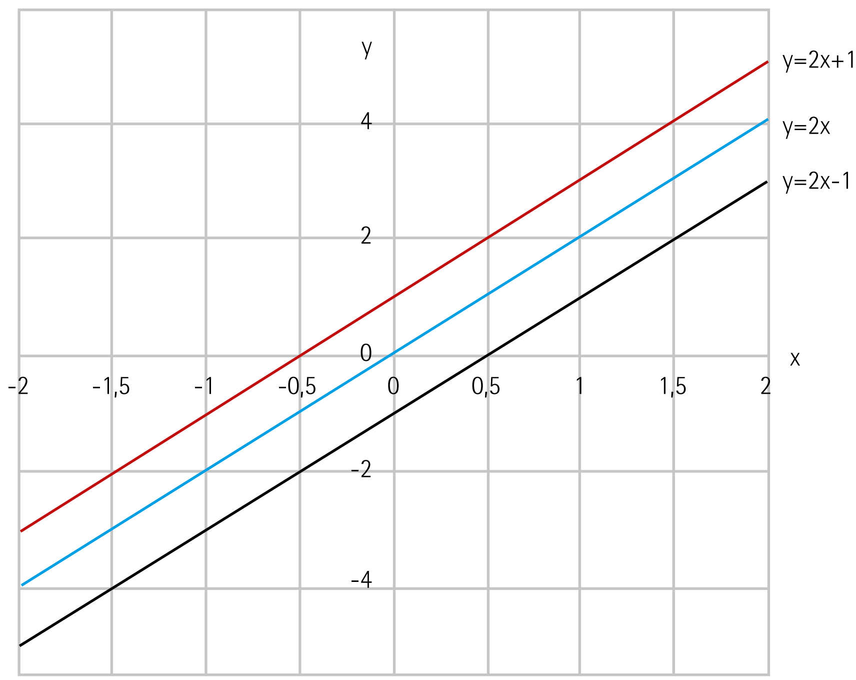


Figura 36 – Gráficos de retas paralelas

De modo geral, podemos dizer que duas retas de equações $y_1=a_1.x+b_1$ e $y_2=a_2.x+b_2$ são paralelas se $a_1=a_2$.

Saiba mais

Para saber mais sobre funções lineares, leia o material indicado a seguir.

JORDON. Retas paralelas. *Saber matemática*. [s.d.]. Disponível em: https://sabermatematica.com.br/retas-paralelas.html. Acesso em: 27 out. 2020.

3.4 Retas perpendiculares

Retas perpendiculares formam ângulo de 90 graus entre si.

De modo geral, podemos dizer que duas retas de equações $y_1=a_1.x+b_1$ e $y_2=a_2.x+b_2$ são perpendiculares se seus coeficientes angulares satisfazem a relação $a_1.a_2=-1$.

Com base nessa relação, vemos que:

- $y_1=2.x+3$ e $y_2=-\frac{1}{2}.x+5$ são retas perpendiculares, pois a multiplicação do coeficiente angular de y_1, que vale 2, pelo coeficiente angular de y_2, que vale $-\frac{1}{2}$, resulta em -1;

- y_1=-3.x+1 e y_2=3.x+1 não são retas perpendiculares, pois a multiplicação do coeficiente angular de y_1, que vale -3, pelo coeficiente angular de y_2, que vale 3, não resulta em -1;

- y_1=-x+7 e y_2=x+13 são retas perpendiculares, pois a multiplicação do coeficiente angular de y_1, que vale -1, pelo coeficiente angular de y_2, que vale 1, resulta em -1.

Podemos visualizar, na figura 37, que as retas dadas por y_1=-x+7 e y_2=x+13 são perpendiculares.

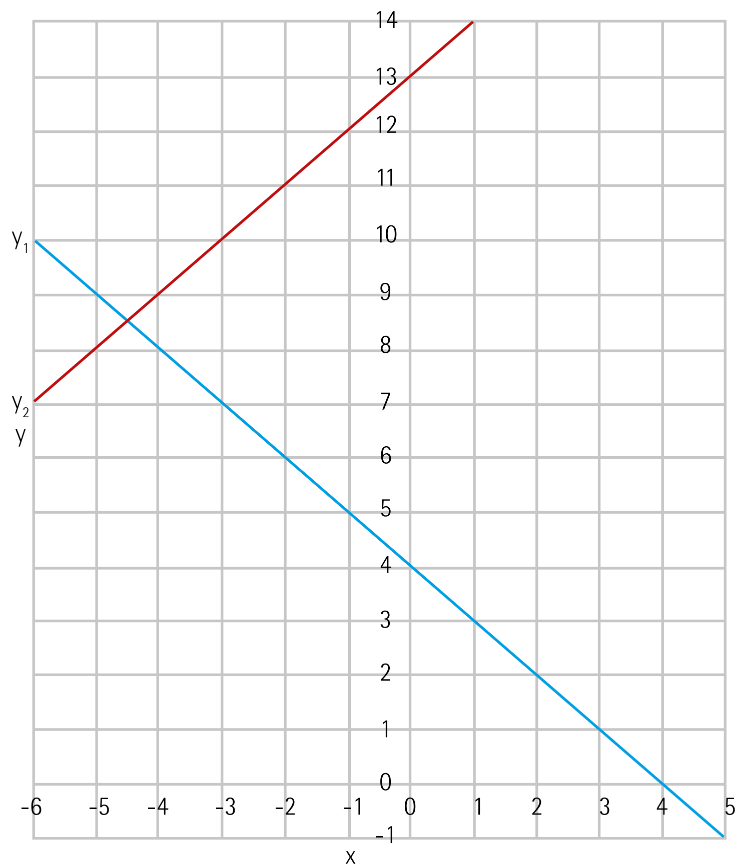


Figura 37 – Gráficos de retas perpendiculares

Observação

Somente conseguiremos visualizar que o ângulo entre retas perpendiculares é igual a 90 graus se as escalas usadas nos eixos x e y forem as mesmas.

4 FUNÇÃO DO 2° GRAU

4.1 Definição e características da função do 2° grau

O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola, que pode ter sua concavidade voltada para baixo, como mostrado na figura 38, ou voltada para cima, como mostrado na figura 39.

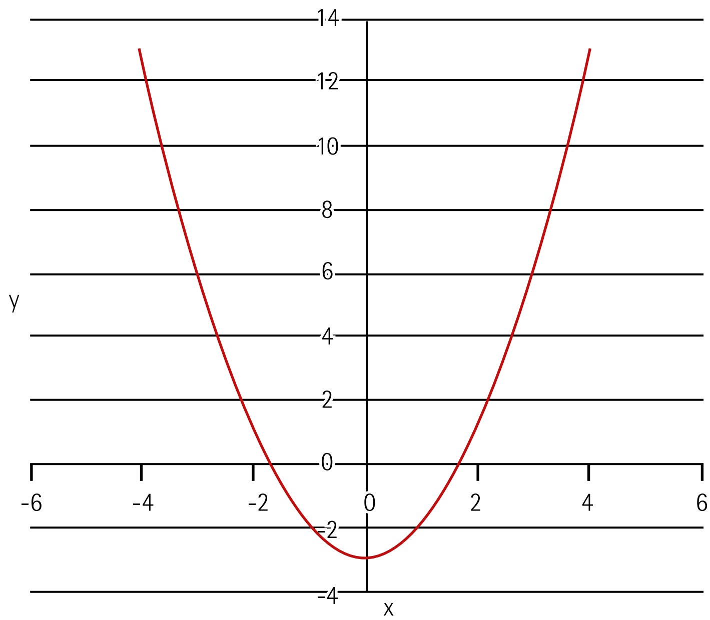


Figura 38 – Parábola com concavidade voltada para cima

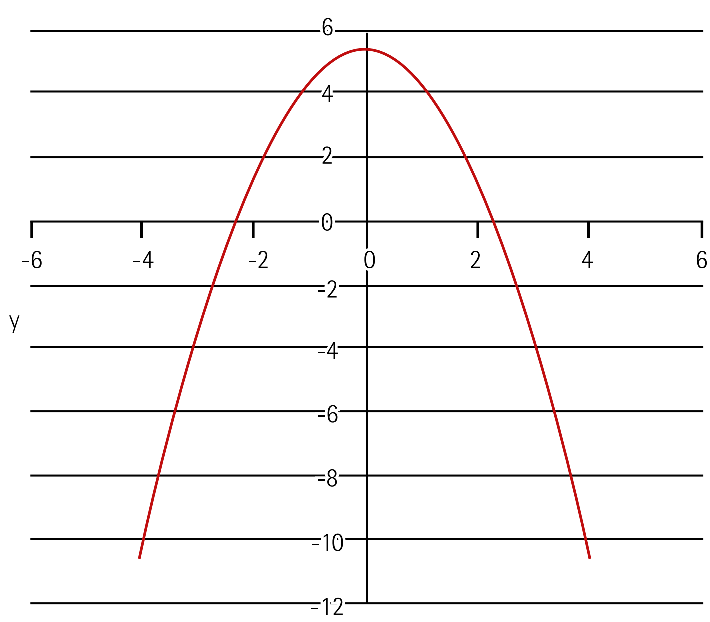


Figura 39 – Parábola com concavidade voltada para baixo

A função do 2º grau segue uma equação do tipo $y=f(x)ax^2+bx+c$, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$. Por exemplo, $y=7x^2+2x-3$ e $y=-3x^2+6x-13$ são equações de funções do 2º grau.

Em relação ao coeficiente a em $y=ax^2+bx+c$, temos o que segue.

Se a for um número maior do que zero ($a>0$), a parábola tem concavidade voltada para cima.

Se a for um número menor do que zero ($a<0$), a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Em relação à constante c em $y=ax^2+bx+c$, ela corresponde à posição em que a parábola cruza o eixo vertical (eixo y).

Na tabela 5, temos alguns exemplos de funções do 2º grau, em que destacamos os valores das constantes a, b e c e mostramos as concavidades da parábola.

Tabela 5 – Alguns exemplos de funções do 2º grau

Equação	a	b	c	Concavidade
$y=4,7x^2+x+3$	4,7	1	3	Para cima
$y=-3x^2+0,44x-6$	-3	0,44	-6	Para baixo
$y=\frac{3}{5}x^2+21x$	$\frac{3}{5}$	21	0	Para cima
$y=-6x^2+429$	-6	0	429	Para baixo
$y=11x^2+x-3$	11	1	-3	Para cima
$y=-6x^2$	-6	0	0	Para baixo

Em relação às raízes de $y=ax^2+bx+c$, obtidas quando resolvemos $ax^2 + bx + c = 0$, temos o que segue.

- Se a parábola não cortar o eixo horizontal x, ela não tem raízes reais.
- Se a parábola cortar o eixo horizontal x apenas uma vez, ela tem apenas uma raiz real.
- Se a parábola cortar o eixo horizontal x duas vezes, que é o número máximo de vezes, ela tem duas raízes reais.

As raízes da função do 2º grau costumam ser representadas por x_1 e x_2. Para calcularmos esses valores, caso existam, precisamos inicialmente determinar o valor do discriminante "delta", dado por:

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

Se o valor do discriminante Δ for um número negativo (Δ<0), a parábola não tem raízes reais e, por isso, não corta o eixo x, como podemos ver nas duas situações mostradas na figura 40.

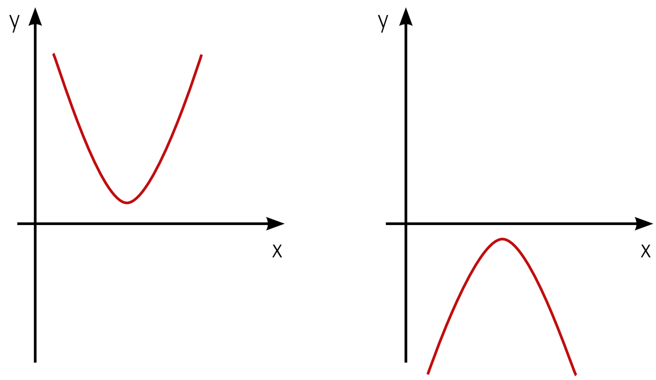


Figura 40 – Parábolas que não têm raízes reais (Δ<0) e, por isso, não cortam o eixo x

Se o valor do discriminante Δ for um número positivo ou zero (Δ≥0), as raízes por x_1 e x_2 da parábola são calculadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Devemos destacar que, se Δ for igual a zero (Δ=0), as raízes x_1 e x_2 da parábola são iguais (x_1=x_2).

Lembrete

Vimos que a função do 2º grau pode ter duas raízes distintas, uma raiz (ou seja, duas raízes idênticas) ou nenhuma raiz, o que é definido pelo sinal do discriminante $\Delta=b^2-4.a.c$. Temos o seguinte:

- se o discriminante for positivo (Δ>0), há duas raízes reais e distintas;
- se o discriminante for nulo (Δ=0), há uma única raiz,
- se o discriminante for negativo (Δ<0), não há raízes reais.

Toda parábola tem um ponto extremo, chamado de vértice e indicado por $V=(x_V,y_V)$. Esse ponto extremo pode ser seu "ponto mais alto" (ponto de máximo M) ou seu "ponto mais baixo" (ponto de mínimo m).

O vértice V é:

- o ponto de máximo M de uma parábola de concavidade para baixo;
- o ponto de mínimo m de uma parábola de concavidade para cima.

A abscissa (x_V) e a ordenada (y_V) do vértice V de uma parábola são calculadas por:

$$x_V = \frac{-b}{2.a} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4.a}$$

Na figura 41, mostramos o vértice V de uma parábola que tem concavidade para cima. Vemos que, nesse caso, o vértice corresponde ao ponto de mínimo do gráfico.

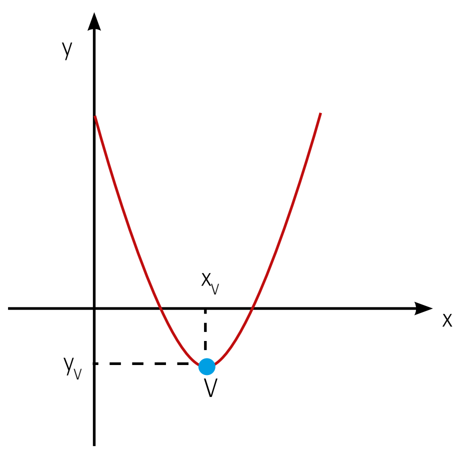


Figura 41 – Indicação do vértice V de uma parábola com concavidade para cima

Na figura 42, temos o esboço do gráfico de $y=-x^2+8$. Veja que se trata de uma parábola que tem concavidade para baixo e cujo vértice corresponde ao ponto de máximo do gráfico, que ocorre em $x_v=0$ e $y_v=8$.

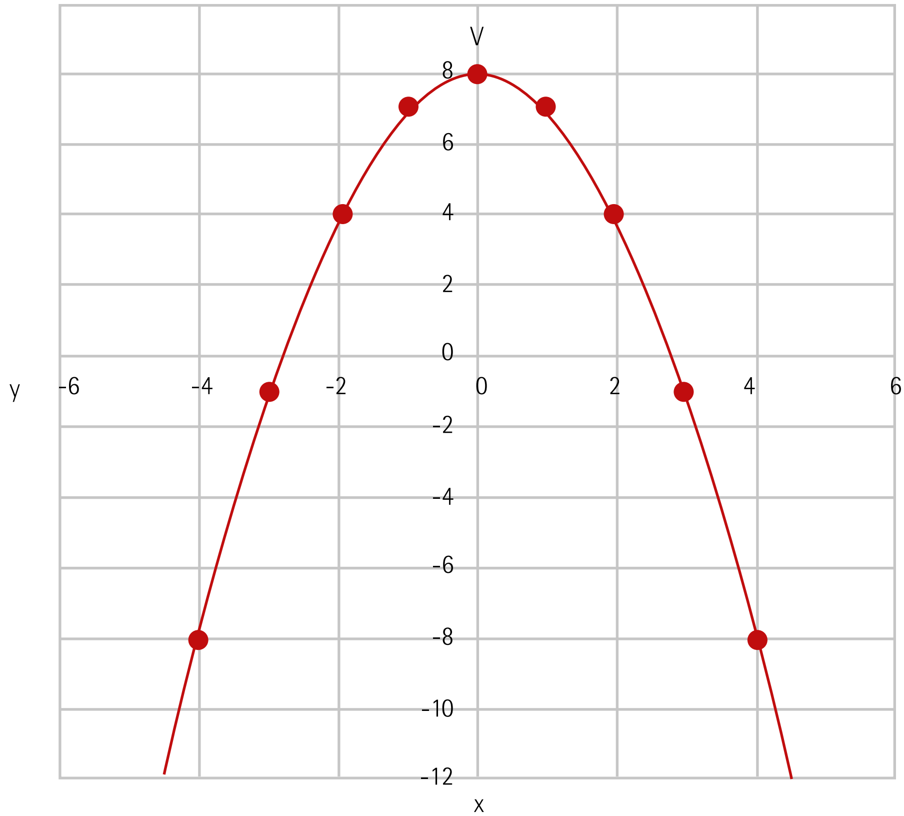


Figura 42 – Indicação do vértice V da parábola $y=-x^2+8$

O domínio da função do 2º grau é o conjunto de todos os números reais, pois podemos substituir a variável x por qualquer número real ($D_f=\mathbb{R}$). No entanto, sua imagem não é o conjunto de todos os números reais, pois ela é condicionada pela ordenada do vértice.

Observe o gráfico da figura 43, que corresponde à parábola da função $y=x^2-2x-3$.

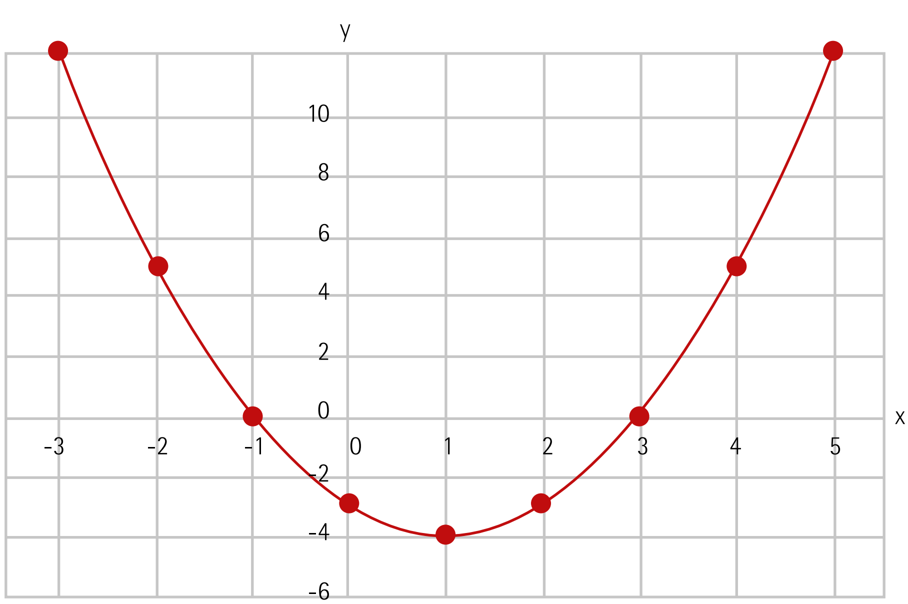


Figura 43 – Gráfico da parábola $y=x^2-2x-3$

Pela observação do gráfico de $y=x^2-2x-3$ (figura 43), vemos que:

- o vértice da função é $V=(1,-4)$
- as raízes da função são $x_1=-1$ e $x_2=3$
- a imagem da função é $Im_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -4\}$

Lembrete

Uma parábola pode ter ou não ter raízes reais, ou seja, ela pode cortar ou não cortar o eixo x. No entanto, toda parábola tem vértice.

Exemplo de aplicação

Exemplo 8

Comente as características da função $y=0{,}5x^2+x-1{,}5$

Resolução

A função $y=0{,}5x^2+x-1{,}5$, ou $y=f(x)=0{,}5x^2+1x-1{,}5$, é uma função do 2º grau, pois é um caso de $y=ax^2+bx+c$ com:

- $a=0{,}5$
- $b=1$
- $c=-1{,}5$

Nesse caso, como a é um número maior do que zero ($a=0{,}5$), o gráfico de $y=0{,}5x^2+x-1{,}5$ é uma parábola com concavidade voltada para cima. Essa parábola intercepta o eixo vertical (eixo y) na posição -1,5, pois esse é o valor da constante c ($c=-1{,}5$).

Para calcularmos as raízes x_1 e x_2 de $y=0{,}5x^2+x-1{,}5$, devemos, primeiramente, determinar o valor do discriminante "delta":

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (1)^2 - 4.(0{,}5).(-1{,}5) = 1 + 3 = 4$$

As raízes x_1 e x_2 da parábola são:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(1)+\sqrt{4}}{2.0,5} = \frac{-1+2}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(1)-\sqrt{4}}{2.0,5} = \frac{-1-2}{1} = -3$$

As coordenadas x_V e y_V do vértice V de $y=0,5x^2+x-1,5$ são:

$$x_V = \frac{-b}{2.a} = \frac{-1}{2.0,5} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-4}{4.0,5} = \frac{-4}{2} = -2$$

Concluímos que o vértice de $y=0,5x^2+x-1,5$ é V=(-1,-2).

Veja que as "regras" dadas nessa função são as seguintes:

- dê um valor para x;
- eleve esse valor ao quadrado e multiplique-o por 0,5;
- some o valor dado a x ao resultado da etapa anterior;
- subtraia 1,5 do resultado da etapa anterior;
- insira o resultado da etapa anterior na variável y.

Logo, se substituirmos x por 2 (x=2), ficamos com y=f(2)=2,5, pois:

$y = f(2) = 0,5.(2)^2 + 2 - 1,5 = 2 + 2 - 1,5 = 4 - 1.5 = 2,5$

De modo similar ao que fizermos acima, podemos obter outros pontos que pertencem ao gráfico da função $y=0,5x^2+x-1,5$, como os mostrados na tabela 6.

Tabela 6 – Alguns exemplos da função y=0,5x²+x-1,5

x	y=0,5x²+x-1,5
-7	16
-6	10,5
-5	6
-4	2,5
-3	0
-2	-1,5
-1	-2
0	-1,5
1	0
2	2,5
3	6
4	10,5
5	16

O gráfico de $y=0,5x^2+x-1,5$ está apresentado na figura 44.

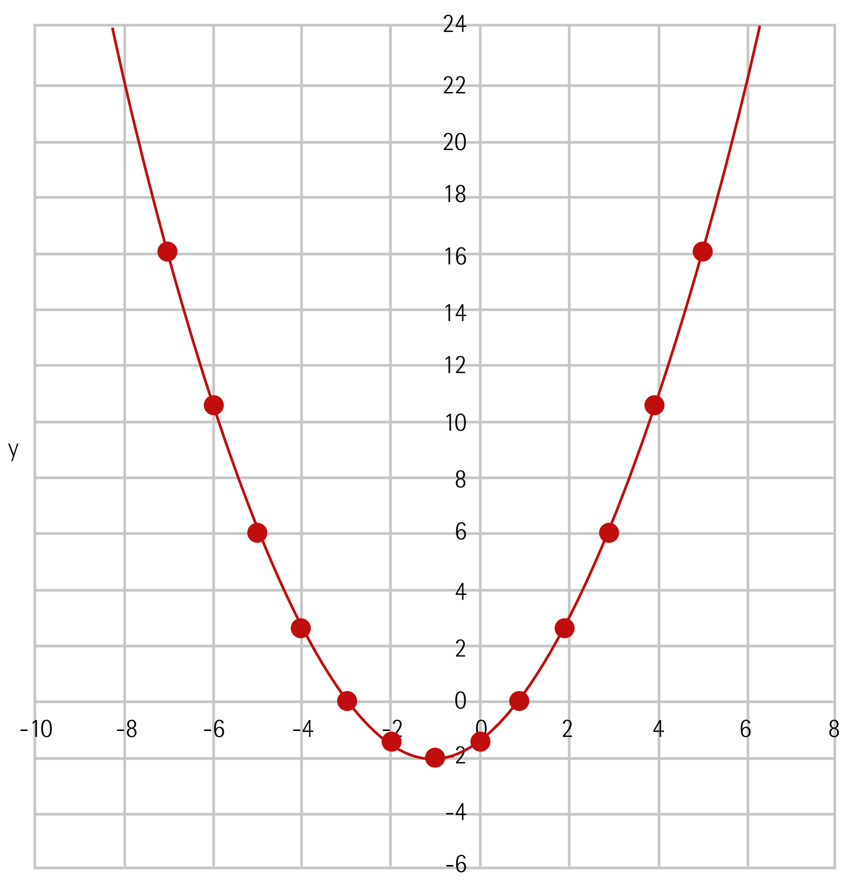


Figura 44 – Gráfico de $y=0,5x^2+x-1,5$

Veja que o domínio da função $y=0{,}5x^2+x-1{,}5$ é o conjunto de todos os números reais, pois podemos substituir a variável x por qualquer número real ($D_f=\mathbb{R}$). Já sua imagem corresponde aos números reais maiores ou iguais a -2, que é a ordenada do vértice da parábola em estudo. Assim, escrevemos a imagem de $y=0{,}5x^2+x-1{,}5$ como $Im_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -2\}$.

Agora, vamos construir o gráfico da função $y=x^2$, ou $y=1x^2+0x+0$, com o auxílio do assistente de gráfico do Excel, conforme o passo a passo descrito a seguir.

Passo 1. Faça uma tabela no Excel digitando alguns valores do domínio de $y(x)=x^2$. Por exemplo, podemos ir de -6 a 6, de 1 em 1. Podemos atribuir esses valores a células da coluna A, desde a linha 2 até a linha 14 e inserir a fórmula =A2ˆ2 na célula B2, conforme mostrado na figura 45.

	A	B	C
1	x	y	
2	-6	=A2^2	
3	-5		
4	-4		
5	-3		
6	-2		
7	-1		
8	0		
9	1		
10	2		
11	3		
12	4		
13	5		
14	6		
15			

Figura 45 – Construção do gráfico de $y=x^2$ (parte 1)

Passo 2. Copie a fórmula =A2ˆ2 até a célula B14. O próprio Excel atualiza essa fórmula ao longo da coluna B, até a célula B14 (por exemplo, na célula B3, a fórmula será =A3ˆ2 e assim por diante). Obtemos a situação mostrada na figura 46.

	A	B	C
1	x	y	
2	-6	36	
3	-5	25	
4	-4	16	
5	-3	9	
6	-2	4	
7	-1	1	
8	0	0	
9	1	1	
10	2	4	
11	3	9	
12	4	16	
13	5	25	
14	6	36	

Figura 46 – Construção do gráfico de $y=x^2$ (parte 2)

Passo 3. Selecione toda a extensão da tabela (faixa de valores de A1 até B14), clique na aba "Inserir" e escolha o tipo e o subtipo de gráfico, conforme mostrado na figura 47.

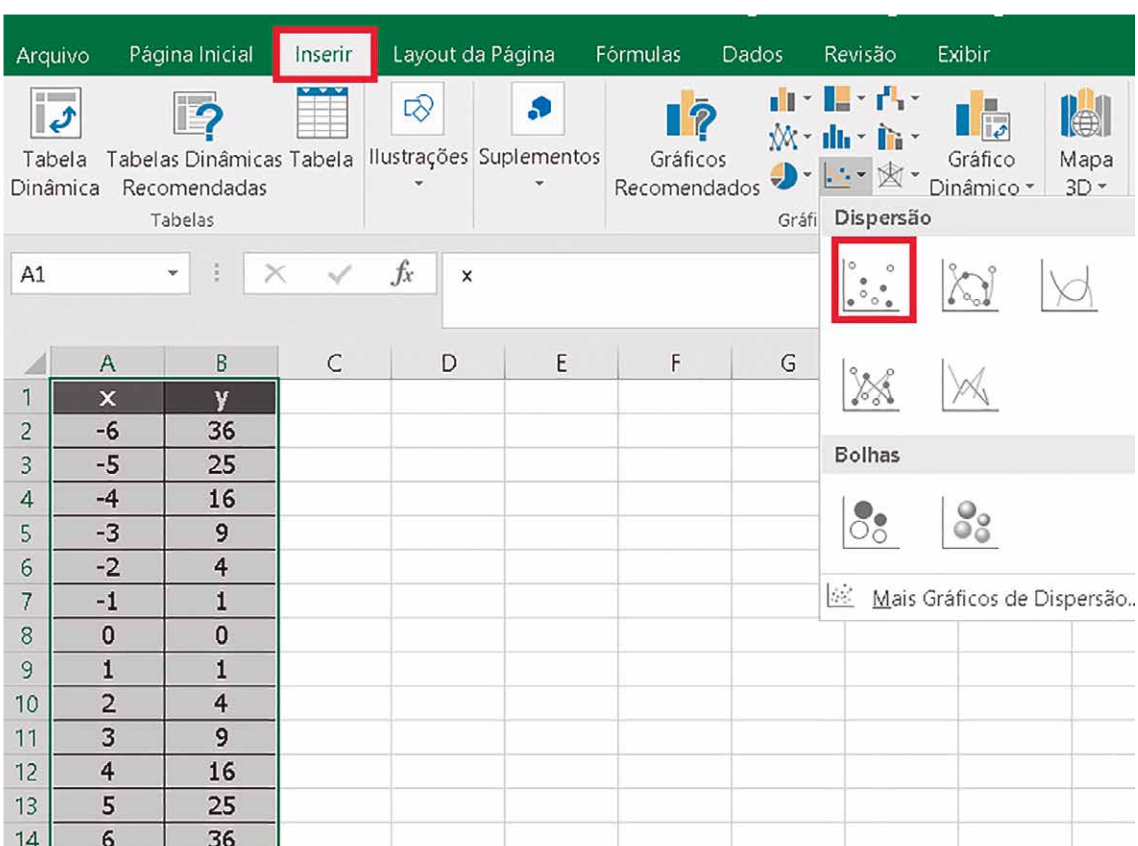


Figura 47 – Construção do gráfico de $y=x^2$ (parte 3)

Você obterá algo similar à figura 48.

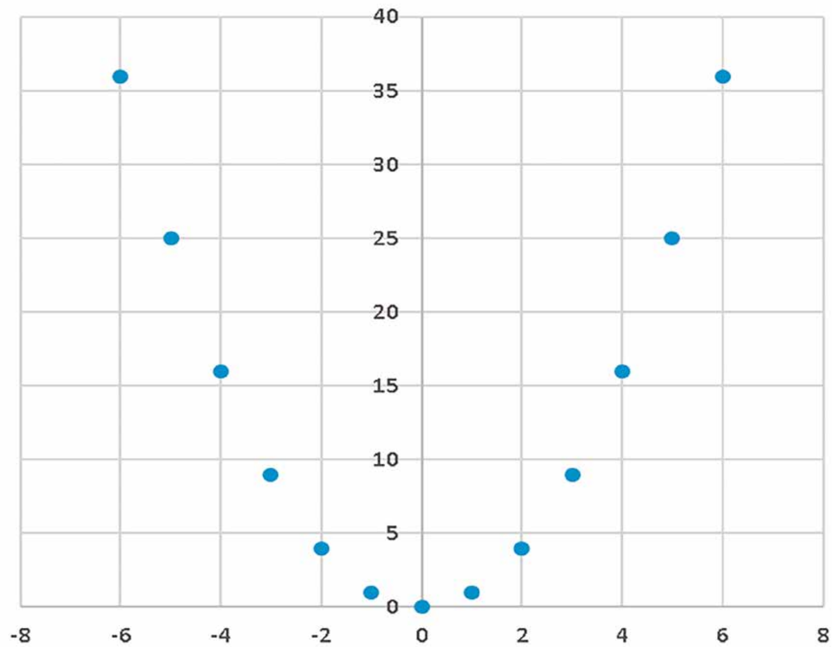


Figura 48 – Construção do gráfico de $y=x^2$ (parte 4)

Passo 4. Clique nos marcadores e adicione uma linha de tendência do tipo polinomial de ordem 2, conforme mostrado na figura 49.

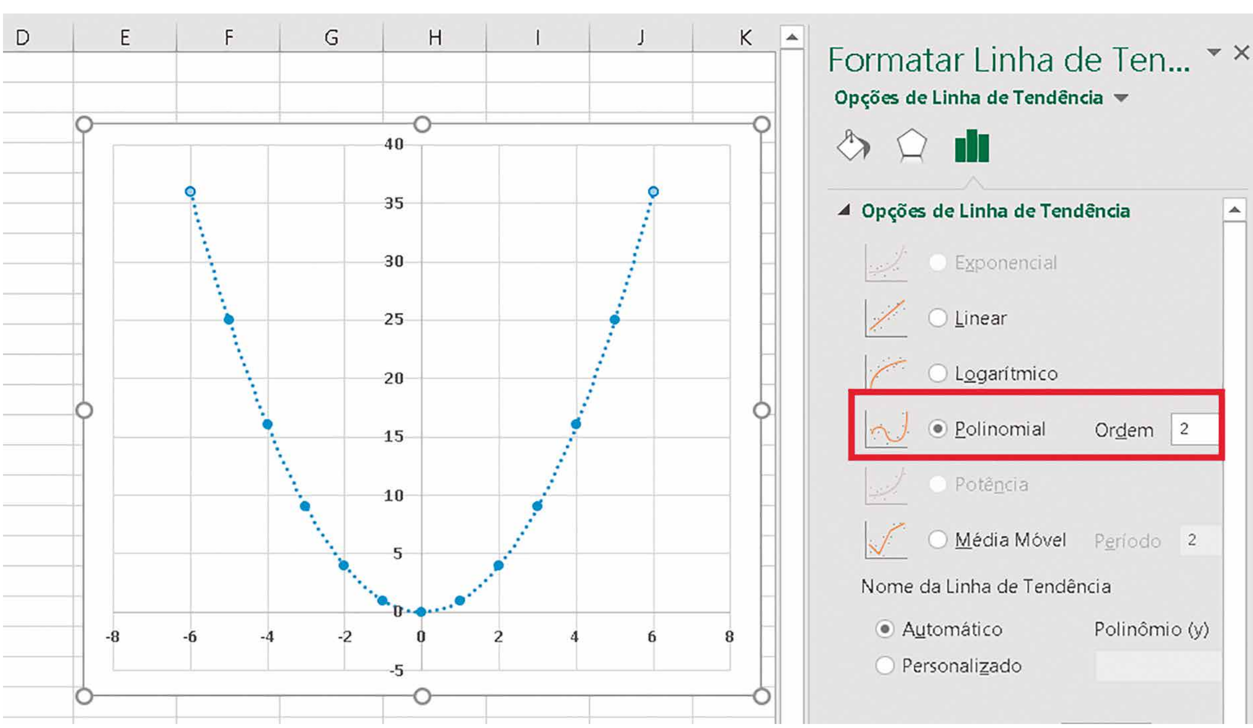


Figura 49 – Construção do gráfico de $y=x^2$ (parte 5)

Passo 5. Veja, na figura 50, o gráfico de $y=x^2$.

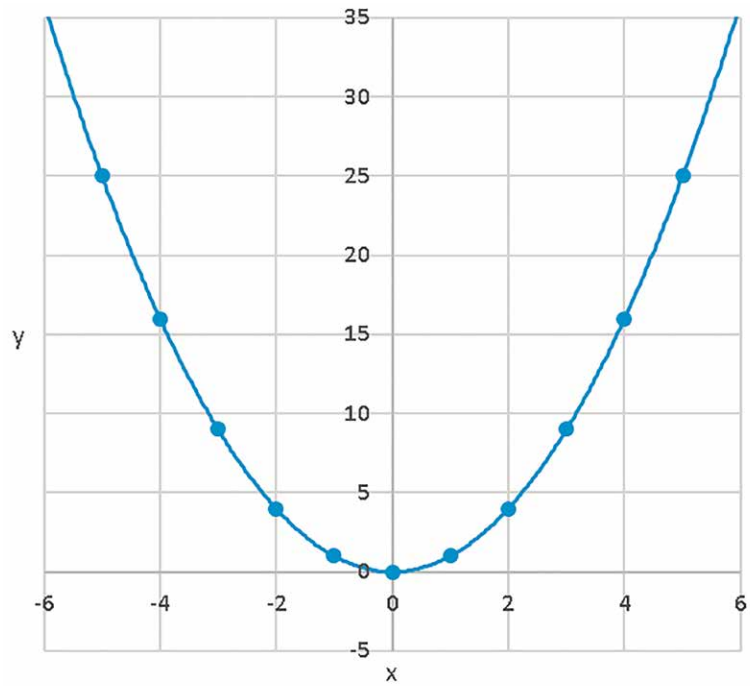


Figura 50 – Construção do gráfico de $y=x^2$ (parte 6)

Lembrete

Vimos, no capítulo anterior, que uma função f(x) é par se f(x)=f(-x) para qualquer x pertencente ao domínio da função. Se a função é par, ela é simétrica em relação ao eixo y, como ocorre com $y=x^2$. Isso pode ser visualizado na figura 50.

Observação

No gráfico da figura 50, visualizamos claramente que o vértice da parábola $y=x^2$ situa-se na origem O do sistema de eixos ortogonais xOy.

Os gráficos de funções do 2º grau do tipo $y=ax^2$ são parábolas com vértices localizados na origem O=(0,0). Vamos estudar como o valor de a influencia tais funções.

Inicialmente, vamos analisar parábolas com a>0, ou seja, com concavidade voltada para cima. Para isso, tomemos os gráficos das funções $f(x)=x^2$ (ou $f(x)=1x^2$), $g(x)=2x^2$ e $h(x)=0,5x^2$, mostrados na figura 51.

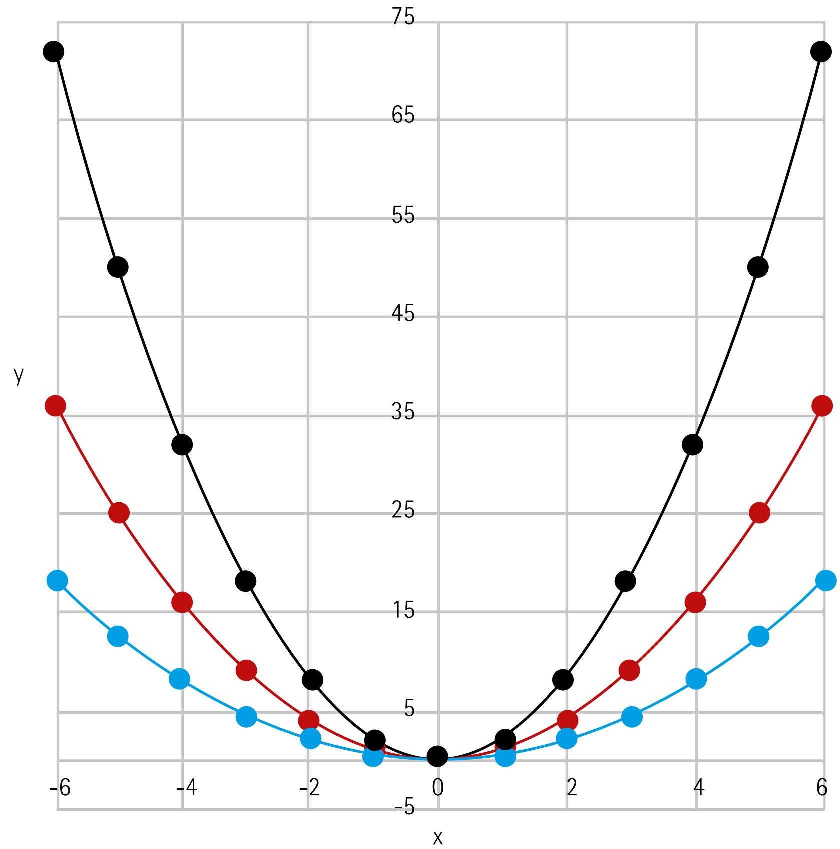


Figura 51 – Gráficos das funções $f(x)=1x^2$, $g(x)=2x^2$ e $h(x)=0,5x^2$ sem indicações dessas funções

De modo proposital, não indicamos "quem são" as funções $f(x)=1x^2$, $g(x)=2x^2$ e $h(x)=0,5x^2$ nos gráficos da figura 51. Você saberia identificá-las?

Poderíamos fazer assim: trocamos x pelo mesmo valor nas três funções e verificamos os valores das imagens obtidas. Por exemplo, como $f(1)=1$, $g(1)=2$ e $h(1)=0,5$, concluímos que:

- o gráfico em vermelho refere-se à função $f(x)=1x^2$
- o gráfico em preto refere-se à função $g(x)=2x^2$
- o gráfico em azul refere-se à função $h(x)=0,5x^2$

Isso está indicado na figura 52.

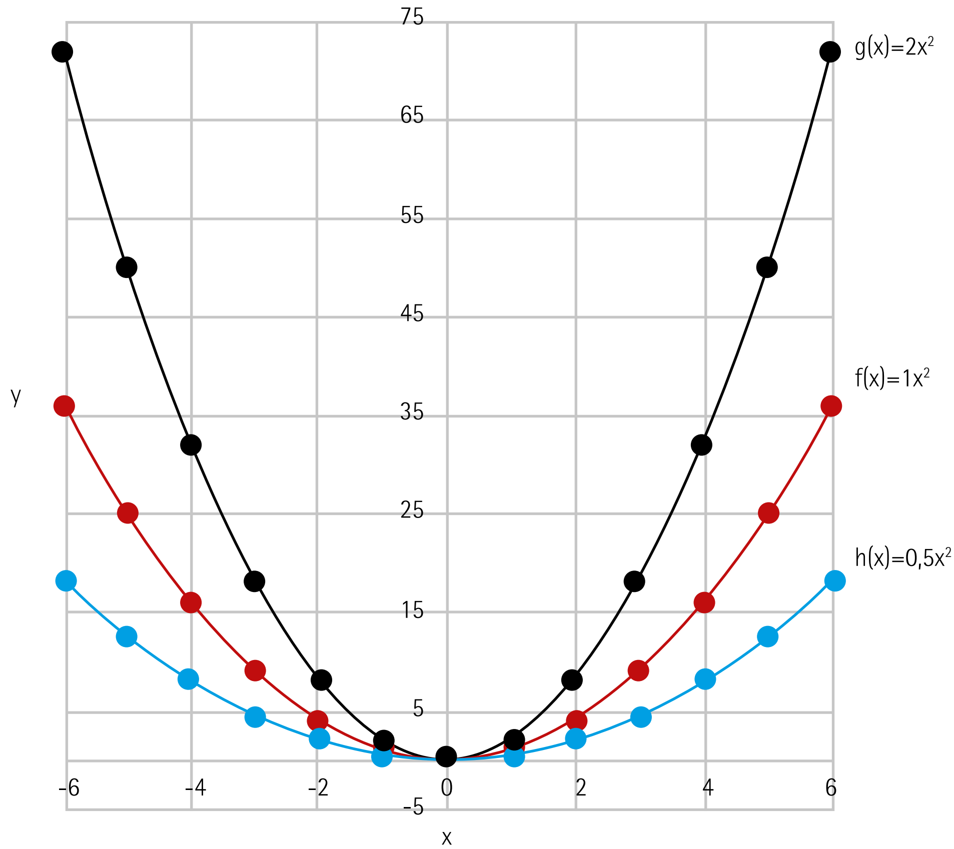


Figura 52 – Gráficos das funções $f(x)=1x^2$, $g(x)=2x^2$ e $h(x)=0{,}5x^2$ com indicações dessas funções

Visualizamos, na figura 51, que, para a>0, o aumento do valor de a em $y=ax^2$ causa "afunilamento" na parábola. Logo, a mesma variação de x em $f(x)=1x^2$ e em $g(x)=2x^2$ causa maior variação em g(x) do que em f(x).

Agora, vamos analisar as funções $f(x)=x^2$ (ou $f(x)=1x^2$) e $m(x)=-x^2$ (ou $m(x)=-1x^2$):

- o coeficiente de x^2 em f(x) é a=1, o que significa uma parábola com concavidade voltada para cima;
- o coeficiente de x^2 em m(x) é a=-1, o que significa uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Além disso:

- os vértices de f(x) e de m(x) localizam-se na origem O=(0,0);
- os gráficos de f(x) e de m(x) têm o eixo x como eixo de simetria.
- o gráfico de m(x) é o "rebatimento" do gráfico de f(x) para valores negativos do eixo y.

O que dissemos pode ser visualizado na figura 53.

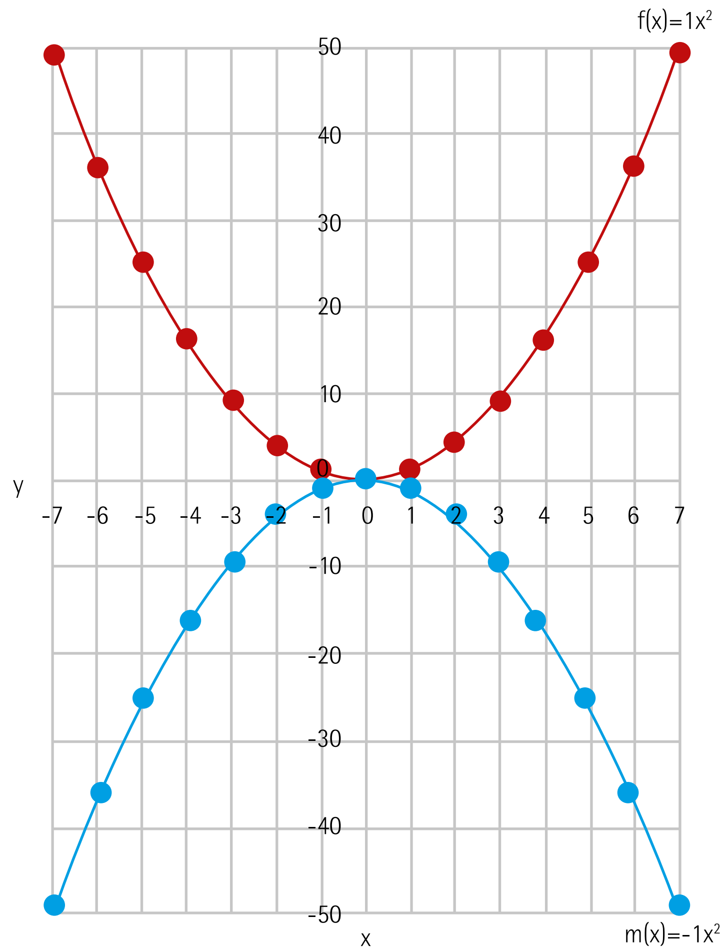


Figura 53 – Gráficos das funções $f(x)=1x^2$ e $m(x)=-1x^2$ com indicações dessas funções

Resumo

Na unidade I, abordamos os seguintes tópicos: funções em geral, funções lineares, funções do 1º grau e funções do 2º grau.

Estudamos os conceitos de funções, de domínio e de imagem. Apresentamos variados tipos de gráficos, mostramos representações gráficas que não se associam a funções e diferenciamos função par de função ímpar.

Vimos que uma função do tipo $y=f(x)=a.x$, sendo a seu coeficiente angular, é chamada de função linear e que seu gráfico é uma reta que passa pela origem O dos eixos coordenados. Se a é positivo, a reta $y=f(x)=a.x$ é crescente (inclinada para a direita). Se a é negativo, a reta $y=f(x)=a.x$ é decrescente (inclinada para a esquerda).

Dissemos que uma função do tipo y=f(x)=a.x+b, sendo a seu coeficiente angular e b seu coeficiente linear, é chamada de função do 1º grau e que seu gráfico é uma reta. O termo independente b mostra em que posição a reta corta o eixo y. O coeficiente a determina a inclinação da reta. Se a é positivo, a reta y=f(x)=a.x+b é crescente (inclinada para a direita). Se a é negativo, a reta y=f(x)=a.x+b é decrescente (inclinada para a esquerda).

Observamos que duas retas paralelas têm a mesma inclinação, ou seja, seus coeficientes angulares são iguais. Para que duas retas sejam perpendiculares, o coeficiente angular de uma deve ser o inverso do oposto do coeficiente angular da outra.

Expusemos que uma função do tipo $y=f(x)=ax^2+bx+c$, com a, b e c constantes e a diferente de zero, é chamada de função do 2º grau e que seu gráfico é uma parábola. O termo independente c mostra em que posição a parábola corta o eixo y. O coeficiente a determina a concavidade da parábola. Se a é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima. Se a é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

O cálculo das raízes de uma função do 2º grau, se existirem, envolve o discriminante Δ, calculado por $\Delta=b^2-4.a.c$. Se Δ é zero, a função tem duas raízes reais e idênticas. Se Δ é negativo, a função não tem raízes reais. Se Δ é positivo, a função tem duas raízes reais e distintas.

Mostramos que as raízes x_1 e x_2 de $y=f(x)=ax^2+bx+c$, se existirem, são calculadas por:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Além disso, explicamos, passo a passo, como construir gráficos de funções usando o Excel e fizemos diversos exemplos de aplicação.

Exercícios

Questão 1. Observe o gráfico da figura a seguir, no qual:

- x representa o nível de unidades (nível de vendas mensal) de um bem que determinada empresa produz e vende mensalmente;
- y=C(x) representa o custo total dos bens vendidos, em R$.

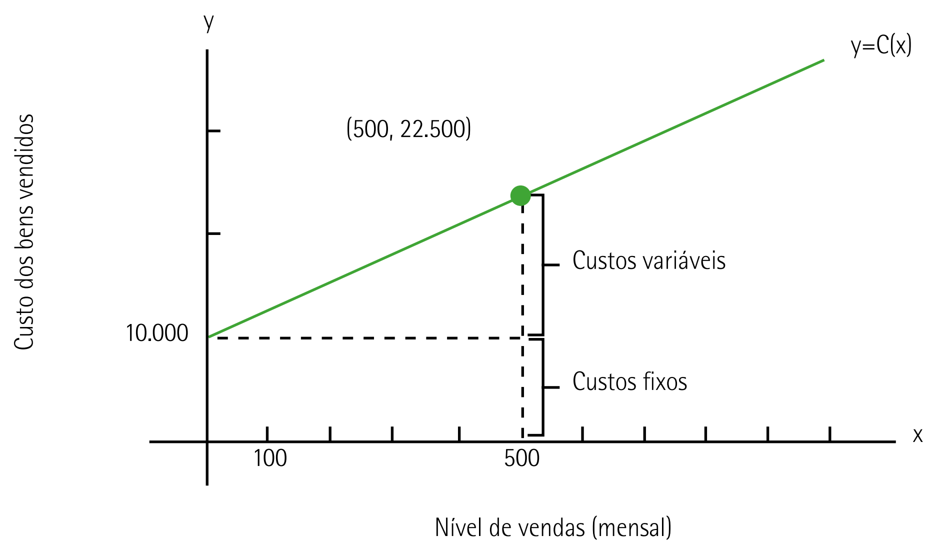


Figura 54

Fonte: GOLDSTEIN, L. J. *et al. Matemática aplicada*. Tradução: Claus Ivo Doering. 12. ed. Rio Grande do Sul: Bookman, 2012. p. 16.

Com base no exposto e nos seus conhecimentos, analise as afirmativas.

I – O coeficiente angular da reta mostrada na figura do enunciado é igual a 25.

II – A figura do enunciado mostra uma função crescente, em que os custos fixos permanecem constantes com o aumento do nível de vendas.

III – A figura do enunciado mostra uma função crescente, em que os custos variáveis aumentam com o aumento do nível de vendas.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I e II, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa E.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa correta.

Justificativa: na reta do gráfico enunciado, foram identificados dois dos seus pontos, que chamaremos de P_1 e de P_2. Esses pontos são dados por:

- $P_1=(x_1,y_1)=(10.000,0)$
- $P_2=(x_2,y_2)=(22.500,500)$

Logo, podemos calcular o coeficiente angular a da reta:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{22.500-10.000}{500-0}=\frac{12.500}{500}=25$$

II e III – Afirmativas corretas.

Justificativa: a figura do enunciado mostra uma função crescente, visto que:

- se aumentarmos a variável independente x, também aumentaremos a variável dependente y;
- se diminuirmos a variável independente x, também diminuiremos a variável dependente y.

Conforme pode ser visto na figura do enunciado, os custos fixos são constantes e equivalem a R$10.000,00, e os custos variáveis aumentam com o aumento do nível de vendas.

Questão 2. Observe os gráficos 1 e 2 mostrados na figura a seguir.

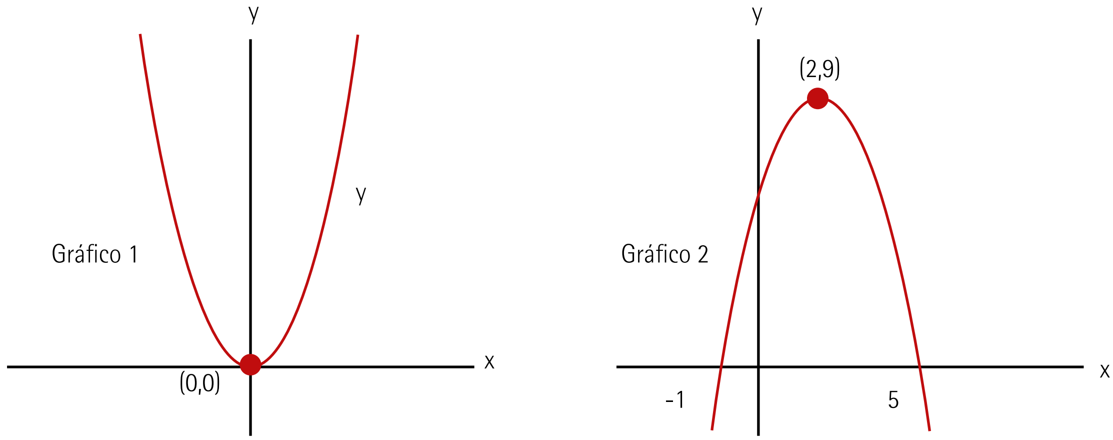


Figura 55

Fonte: GOLDSTEIN, L. J. *et al. Matemática aplicada*. Tradução: Claus Ivo Doering. 12. ed. Rio Grande do Sul: Bookman, 2012. p. 18.

Com base na observação e nos seus conhecimentos, analise as afirmativas.

I – O gráfico 1 pode referir-se à função do 2º grau dada por $f(x)=x^2$

II – O gráfico 2 pode referir-se à função do 2º grau dada por $g(x)=-x^2+4x-0,5$

III – O vértice V do gráfico 2 é dado por V=(2,9) e representa o ponto de mínimo dessa parábola

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I e II, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa A.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa correta.

Justificativa: no gráfico 1, vemos uma parábola que:

- passa pela origem O=(0,0) dos eixos coordenados;
- é simétrica em relação ao eixo Ox;
- tem concavidade voltada para cima.

Logo, em virtude das características expostas, o gráfico 1 pode referir-se à função do 2º grau dada por $f(x)=x^2$.

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: o gráfico da função do 2º grau dada por $g(x)=-x^2+4x-0,5$ cruza o eixo Oy em $y=-0,5$, visto que o termo independente c é -0,5. Como podemos ver na figura do enunciado, o gráfico 2 cruza o eixo vertical em posição $y>0$. Logo, o gráfico 2 não pode se referir à função do 2º grau dada por $g(x)=-x^2+4x-0,5$.

III – Afirmativa incorreta.

Justificativa: como podemos ver na figura do enunciado, o vértice V do gráfico 2 é dado por V=(2,9). No entanto, V representa o ponto de máximo da parábola em estudo, e não o seu ponto de mínimo.