# Unidade II

## 5 PRODUTO ESCALAR

### 5.1 Produto escalar de dois vetores

O resultado do produto escalar entre dois vetores é um escalar, ou seja, um número, e não um vetor. O produto escalar entre dois vetores é indicado por um ponto, como mostrado a seguir.

$\vec{u}$ escalar $\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}$

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ é calculado da seguinte forma:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2$$

O produto escalar é calculado de forma similar para o caso de trabalharmos em três dimensões. Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ é calculado por:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e *a* um escalar. O produto escalar obedece às propriedades mostradas a seguir.

- Propriedade comutativa. Vejamos:

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

- Propriedade distributiva. Vejamos:

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

$$a.(\vec{u}.\vec{v}) = (a.\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(a.\vec{v})$$

Quanto ao produto escalar de um vetor $\vec{u}$ por ele mesmo, temos:

$$\vec{u}.\vec{u} > 0 \text{ se } \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u}.\vec{u} = 0 \text{ se } \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

Essa última expressão é interessante. Ela afirma que o produto escalar de um vetor por ele mesmo é igual ao quadrado do módulo desse vetor.

**Observação**

Quando temos um ponto entre dois números, como em 3.4, estamos tratando de uma multiplicação algébrica. Quando temos um ponto entre dois vetores, como em $\vec{u}.\vec{v}$, estamos tratando de um produto escalar.

## Exemplo de aplicação

### Exemplo 1

Dados os vetores $\vec{u}=(1,2)$ e $\vec{v}=(3,4)$, calcule o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$.

### Resolução

Aplicando o método de cálculo do produto escalar, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v}=(1,2).(3.4)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1.3+2.4$$

$$\vec{u}.\vec{v}=3+8$$

$$\vec{u}.\vec{v}=11$$

Logo, o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ para os vetores dados resultou em 11. Note que a resposta é um número, e não um vetor.

### Exemplo 2

Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,-5)$ e $\vec{v}=(3,4,1)$, calcule o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$.

### Resolução

Aplicando o método de cálculo do produto escalar, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v}=(1,2,-5).(3,4,1)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1.3+2.4+(-5).1$$

$$\vec{u}.\vec{v}=3+8-5$$

$$\vec{u}.\vec{v}=6$$

Logo, o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ para os vetores dados resultou em 6. Note que, novamente, a resposta é um número, e não um vetor.

**Exemplo 3**

Determine *x* de forma que $\vec{u}.\vec{v} = 3$ para $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (-2, x)$.

**Resolução**

Começamos substituindo os vetores na expressão do produto escalar:

$$\vec{u}.\vec{v} = 3$$

$$(1,2).(-2, x) = 3$$

Calculando o produto escalar dos dois vetores do lado esquerdo da equação, temos:

$$1.(-2) + 2.x = 3$$

$$-2 + 2.x = 3$$

Isolando *x*, chegamos a:

$$2.x = 3 + 2$$

$$2.x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Logo, o valor que *x* que satisfaz à expressão $\vec{u}.\vec{v} = 3$ para os vetores dados é *x*=5/2.

**Exemplo 4**

Uma aplicação clássica de produto escalar ocorre no cálculo do trabalho, em física. O trabalho W de uma força $\vec{F}$ é calculado pelo produto escalar dessa força pelo deslocamento $\vec{x}$ experimentado corpo quando sofre a ação da força.

**Resolução**

Seja uma força $\vec{F} = (1,3)$, em newtons, que, quando aplicada em um corpo, produz deslocamento $\vec{x} = (0,2)$, em metros. Calcule o trabalho W da força.

Como o trabalho é o produto escalar da força pelo deslocamento, temos:

$$W = \vec{F}.\vec{x}$$

$$W = (1,3).(0,2)$$

Calculando o produto escalar, chegamos a:

$W = 1.0 + 3.2$

$W = 0 + 6$

$W = 6$

Se a força é dada em newtons (N) e o deslocamento é dado em metros (m), o trabalho é dado em joules (J). Logo, o trabalho, nesse caso, é W = 6 J.

### Observação

Quando o trabalho de uma força é positivo, ele é chamado de trabalho motor. Quando o trabalho de uma força é negativo, ele é chamado de trabalho resistente. A força relacionada com trabalho motor colabora com o movimento do corpo, enquanto a relacionada ao trabalho resistente se opõe ao movimento do corpo.

## 5.2 Ângulo entre dois vetores

O produto escalar entre dois vetores pode ser calculado a partir das coordenadas dos vetores, como vimos, mas também pode ser calculado a partir do módulo dos vetores e do ângulo formado entre eles. Nesse segundo método, o produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com ângulo $\theta$ entre eles (figura 55), é calculado por:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

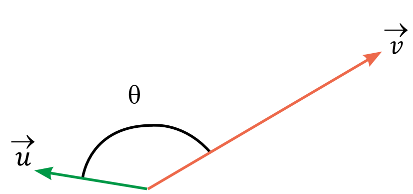


Figura 55 – Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com ângulo $\theta$ entre eles

Aliando os dois métodos de cálculo de produto escalar, é possível determinar o ângulo entre dois vetores, como veremos a seguir.

Sobre a última expressão para cálculo de produto escalar, note que, se os vetores são perpendiculares, ou seja, se formam ângulo de 90º entre si, temos o seguinte:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Como cos(90º) = 0, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.0$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Logo, para vetores perpendiculares, o produto escalar é igual a zero.

Quando os vetores são paralelos e de mesmo sentido, o ângulo entre eles é igual a zero e, portanto, o produto escalar é:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(0^{o})$$

Como cos(0º)=1, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.1$$

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Então, quando os vetores são paralelos e de mesmo sentido, o produto escalar entre eles se reduz ao produto dos módulos dos vetores.

Quando os vetores são paralelos e de mesmo sentido, o ângulo entre eles é igual a 180º e, portanto, o produto escalar é:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(180^{o})$$

Como cos(180º)=-1, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.(-1)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = -|\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Então, quando os vetores são paralelos e de sentidos opostos, o produto escalar entre eles se reduz a "menos" o produto dos módulos dos vetores.

**Lembrete**

No produto escalar, fazemos a soma do produto das coordenadas de dois vetores. O resultado deve sempre ser um escalar, ou seja, um número.

A tabela a seguir contém os valores de seno e cosseno para alguns ângulos mais usados.

**Tabela 1 – Seno e cosseno de alguns ângulos.**

| Ângulo | Seno | Cosseno |
|---|---|---|
| 0º | 0 | 1 |
| 30º | 1/2 | $\sqrt{3}/2$ |
| 45º | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ |
| 60º | $\sqrt{3}/2$ | 1/2 |
| 90º | 1 | 0 |
| 150º | 1/2 | $-\sqrt{3}/2$ |
| 180º | 0 | -1 |
| 270º | -1 | 0 |

### Exemplo de aplicação

**Exemplo 1**

Calcule o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que os vetores têm módulos iguais a 2 e 3, respectivamente, e formam ângulo de 60º entre si.

**Resolução**

Começando pela expressão que relaciona o produto escalar com o módulo dos vetores e o ângulo entre eles, temos:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Substituindo os módulos e o ângulo dados na igualdade, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v} = 2.3.\cos(60°)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 6.\cos(60°)$$

Da tabela 1, temos que cos(60º) = ½. Ou seja:

$$\vec{u}.\vec{v} = 6.\frac{1}{2}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 3$$

Logo, o produto escalar desses vetores é igual a 3.

**Exemplo 2**

Determine o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (0,4)$.

**Resolução**

Devemos usar a expressão que relaciona o produto escalar com os módulos dos vetores e o ângulo entre eles, dada por:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Começamos calculando o produto escalar entre os vetores, a partir de suas coordenadas. Isso é feito multiplicando-se as coordenadas dos vetores em x e fazendo a soma com o produto das coordenadas em y. Ou seja:

$$\vec{u}.\vec{v} = (1,1).(0,4)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 1.0 + 1.4$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 4$$

Em seguida, calculamos o módulo de cada um dos vetores, lembrando que o módulo de um vetor é a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas coordenadas.

Para o vetor $\vec{u}$, temos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2}$$

Para o vetor $\vec{v}$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 4^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16}$$

$$|\vec{v}| = 4$$

Substituindo o que calculamos na expressão que relaciona o produto angular com o ângulo entre os vetores, chegamos a:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

$$4 = \sqrt{2}.4.\cos\theta$$

Como os dois lados da igualdade são multiplicados por 4, temos:

$$1 = \sqrt{2}.\cos\theta$$

Isolando cos(θ), obtemos:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizamos essa fração multiplicando-a por $\sqrt{2}/\sqrt{2}$ :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Como $\sqrt{2}.\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$, temos:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vemos, pela tabela 1, que o ângulo cujo cosseno é $\sqrt{2}/2$ é $\theta = 45^o$.

Podemos colocar os vetores em estudo em um plano cartesiano para visualizar o ângulo, como feito na figura 56.

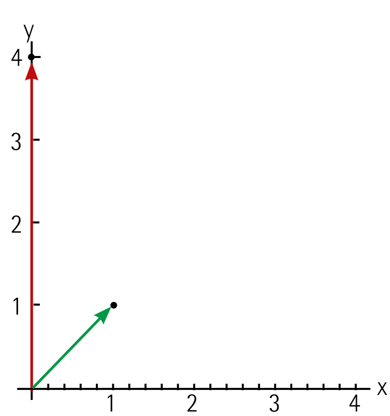


Figura 56 – Vetores $\vec{u} = (1,1)$, em verde, e $\vec{v} = (0,4)$, em vermelho, no plano cartesiano. Note que, dados aos eixos com mesma escala, podemos ver o ângulo de 45° entre os vetores

**Exemplo 3**

Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(1,0,2)$ e $\vec{v}=(1,-1,4)$.

**Resolução**

Para determinar o ângulo entre dois vetores dados, a partir de suas coordenadas, precisamos da expressão que relaciona o produto escalar com o ângulo entre os vetores:

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Calculando primeiro o produto escalar, temos:

$$\vec{u}.\vec{v}=(1,0,2).(1,-1,4)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1.1+0.(-1)+2.4$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1+8$$

$$\vec{u}.\vec{v}=9$$

Calculando o módulo dos vetores a partir de suas coordenadas, primeiramente para o vetor $\vec{u}$, chegamos a:

$$|\vec{u}|=\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+0+4}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{5}$$

Para o vetor $\vec{v}$, obtemos:

$$|\vec{v}|=\sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{1+1+16}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{18}$$

Substituindo o resultado obtido na expressão do produto escalar e do ângulo, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

$$9 = \sqrt{5}.\sqrt{18}.\cos\theta$$

Isolando $\cos\theta$, chegamos a:

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{5}.\sqrt{18}}$$

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{5.18}}$$

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{90}}$$

Usando uma calculadora para calcular o lado direito dessa equação, chegamos a:

$$\cos\theta = 0{,}9487$$

$$\theta = a\cos(0{,}9487)$$

$$\theta = 18{,}4°$$

Logo, para os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados, o ângulo entre eles é 18,4º.

**Observação**

O arco-cosseno, cuja função é representada pelas indicações acos(x), arccos(x) ou $\cos^{-1}(x)$, é a função inversa do cosseno. Quando calculamos, por exemplo, $\alpha$ = acos(0,7), é equivalente a determinarmos o ângulo $\alpha$ cujo cosseno é igual a 0,7.

De forma similar, o arco-seno, cuja função é representada pelas indicações asen(x), arcsen(x) ou até por $\text{sen}^{-1}(x)$, é a função inversa do seno.

**Exemplo de aplicação**

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} = (1,0,3)$ e sabendo que o produto escalar desses vetores é igual a -5 e que o ângulo formado entre eles é de 140º, determine o módulo do vetor $\vec{u}$.

**Resolução**

Começamos com a expressão que relaciona o produto escalar com os módulos dos vetores e o ângulo entre eles, dada por:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

O problema forneceu o resultado do produto escalar, o ângulo entre os vetores e o vetor $\vec{v}$.

Calculando o módulo do vetor $\vec{v}$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

Substituindo as coordenadas na expressão anterior, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+9}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{10}$$

Substituindo o módulo de $\vec{v}$ e as demais informações na equação do produto escalar, temos:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

$$-5 = |\vec{u}|.\sqrt{10}.\cos(140°)$$

Como cos(140º) não é um valor frequentemente tabelado, nem o valor de seu ângulo complementar (180º - 140º = 40º), teremos que usar calculadora para efetuarmos os cálculos do exemplo. Faremos isso também com $\sqrt{10}$. Vejamos:

$$-5 = |\vec{u}|.(3,162).(-0,766)$$

Isolando $|\vec{u}|$, chegamos a:

$$|\vec{u}| = \frac{-5}{(3,162).(-0,766)}$$

$$|\vec{u}| = 2,06$$

Logo, o vetor $\vec{u}$, dadas as condições do problema, tem módulo igual a 2,06.

## 5.3 Condição de perpendicularismo entre dois vetores

Dois vetores são ditos perpendiculares quando formam ângulo de 90 graus entre si.

Considere dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, perpendiculares. Podemos escrever o produto escalar entre esses vetores como:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Como, para vetores perpendiculares, $\theta = 90^\circ$, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(90^\circ)$$

Visto que $\cos(90^\circ) = 0$, obtemos:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.0$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Logo, para vetores perpendiculares, o produto escalar é igual a zero.

### Exemplo de aplicação

**Exemplo 1**

Verifique se os vetores $\vec{u} = (0,1,0)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$ são perpendiculares.

**Resolução**

Devemos lembrar que vetores perpendiculares têm seu produto escalar igual a zero. Logo, para verificar se os vetores dados são perpendiculares, basta calcularmos o seu produto escalar. Temos, então, que:

$$\vec{u}.\vec{v} = (0,1,0).(1,1,1)$$

Calculando o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores,

$$\vec{u}.\vec{v} = 0.1 + 1.1 + 0.1$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 + 1 + 0$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 1$$

Como o produto escalar entre os vetores não é igual a zero, eles não são perpendiculares.

**Exemplo 2**

Determine *a* para que os vetores $\vec{u} = (a, 4)$ e $\vec{v} = (-2, 1)$ sejam perpendiculares.

**Resolução**

Para que os vetores dados sejam perpendiculares, devemos ter:

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Substituindo as coordenadas dos vetores na expressão anterior, ficamos com:

$$(a, 4).(-2, 1) = 0$$

Calculando o produto escalar a partir das coordenadas, chegamos a:

$$a.(-2) + 4.1 = 0$$

Isolando *a* nessa equação, obtemos:

$$-2.a + 4 = 0$$

$$-2.a = -4$$

$$a = \frac{-4}{-2}$$

$$a = 2$$

Logo, *a = 2* faz com que os vetores $\vec{u} = (a, 4)$ e $\vec{v} = (-2, 1)$ sejam perpendiculares. Assim, os vetores $\vec{u} = (2, 4)$ e $\vec{v} = (-2, 1)$ são perpendiculares.

Podemos visualizar se esses vetores são de fato perpendiculares ao representá-los em um plano cartesiano, com a mesma escala nos eixos horizontal e vertical, o que é feito na figura 57.

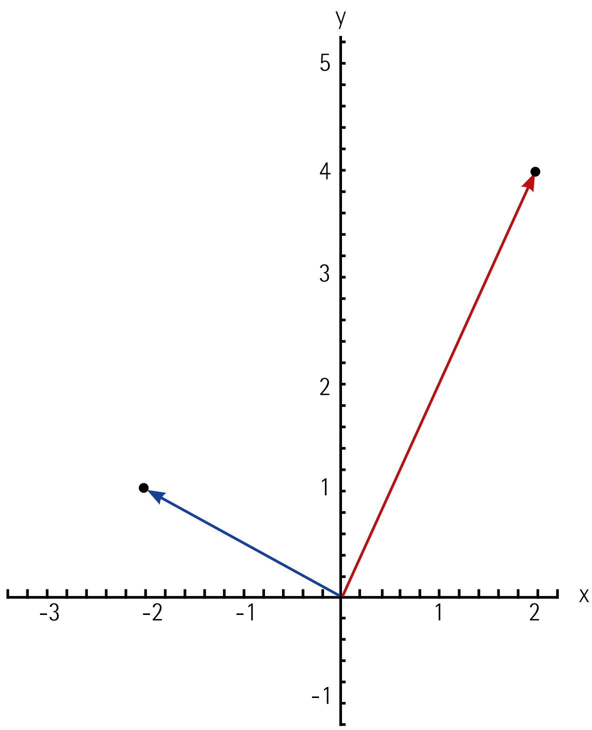


Figura 57 – Vetores $\vec{u}=(2,4)$, em vermelho, e $\vec{v}=(-2,1)$, em azul. Note que os vetores são de fato perpendiculares

**Exemplo 3**

Determine *a* para que os vetores $\vec{u}=(a,4,-1)$ e $\vec{v}=(1,-2,1)$ sejam perpendiculares.

**Resolução**

Para que os vetores dados sejam perpendiculares, devemos ter:

$\vec{u}.\vec{v}=0$

Substituindo as coordenadas dos vetores na equação anterior, temos:

$(a,4,-1).(1,-2,1)=0$

Calculando o produto escalar a partir das coordenadas, chegamos a:

$a.1+4.(-2)+(-1).1=0$

$a-8-1=0$

Isolando a, ficamos com:

$a - 9 = 0$

$a = 9$

Logo, $a = 9$ faz com que os vetores $\vec{u} = (a, 4, -1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$ sejam perpendiculares. Ou seja, os vetores $\vec{u} = (9, 4, -1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$ são perpendiculares.

## 5.4 Condição de paralelismo entre dois vetores.

Dois vetores são ditos paralelos se eles formam ângulo de 0º ou de 180º entre si. No primeiro caso, os vetores são paralelos e de mesmo sentido, já no segundo caso, os vetores são paralelos e de sentidos opostos.

Da definição de produto escalar, temos:

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$

Para vetores paralelos e de mesmo sentido, temos:

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(0°)$

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.1$

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$

Para vetores paralelos e de sentidos opostos, temos:

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(180°)$

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.(-1)$

$\vec{u}.\vec{v} = -|\vec{u}|.|\vec{v}|$

Então, quando o produto escalar de dois vetores é igual a 1 ou a -1, esses vetores são paralelos. Podemos juntar essas duas condições usando a noção de módulo (ou valor absoluto) de um número. Dessa forma, dois vetores serão paralelos se:

$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$

### Observação

Note que, no lado esquerdo da última equação, temos um produto escalar, que retorna um número. Logo, dentro do módulo, estamos tratando do valor absoluto de um número. Já do lado direito da última equação, temos um produto de módulos de vetores, que quantificam o tamanho ou a intensidade de um vetor.

O módulo ou o valor absoluto de um número nada mais é do que o número em sua forma positiva. Dessa forma, temos, por exemplo, que:

$$|3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

## Exemplo de aplicação

**Exemplo 1**

Determine se os vetores $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (2,1)$ são paralelos.

**Resolução**

Da condição de paralelismo de vetores, devemos ter que:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Calculando primeiramente o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores, temos:

$$\vec{u}.\vec{v} = (1,0).(2,1)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 1.2 + 0.1$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 2 + 0$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 2$$

Como o resultado é positivo, ele não se altera quando calculamos o módulo.

Vamos calcular o módulo de cada um dos vetores.

Para o vetor $\vec{u}$, temos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+0}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1}$$

$$|\vec{u}| = 1$$

Para o vetor $\vec{v}$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+1}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{5}$$

Substituindo os resultados obtidos pela condição de paralelismo, temos:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

$$|2| = 1.\sqrt{5}$$

$$2 = \sqrt{5}$$

Vemos que a igualdade anterior é claramente falsa. Portanto, os vetores $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (2,1)$ não são paralelos.

**Exemplo 2**

Determine se os vetores $\vec{u} = (1,0,3)$ e $\vec{v} = (-2,0,-6)$ são paralelos.

**Resolução**

Da condição de paralelismo de vetores, devemos ter:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Calculando primeiramente o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores, temos:

$$\vec{u}.\vec{v} = (1,0,3).(-2,0,-6)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 1.(-2) + 0.0 + 3.(-6)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = -2 + 0 - 18$$

$$\vec{u}.\vec{v} = -20$$

O produto escalar resultou em um valor negativo. Ao aplicarmos o módulo ou valor absoluto a esse resultado mais adiante, teremos um valor positivo.

Vamos calcular o módulo de cada um dos vetores.

Para o vetor $\vec{u}$, temos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 0 + 9}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{10}$$

Para o vetor $\vec{v}$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-6)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 0 + 36}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{40}$$

Substituindo os resultados obtidos na condição de paralelismo, temos:

$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$

$|-20| = \sqrt{10}.\sqrt{40}$

$20 = \sqrt{400}$

$20 = 20$

Chegamos a uma expressão verdadeira. Logo, os vetores $\vec{u} = (1,0,3)$ e $\vec{v} = (-2,0,-6)$ são paralelos.

**Exemplo 3**

Determine *p* para que os vetores $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (5,p)$ sejam paralelos.

**Resolução**

A condição de paralelismo diz que:

$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$

Calculando primeiramente o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores, temos:

$\vec{u}.\vec{v} = (1,3).(5,p)$

$\vec{u}.\vec{v} = 1.5 + 3.p$

$\vec{u}.\vec{v} = 5 + 3.p$

Vamos calcular o módulo de cada um dos vetores.

Para o vetor $\vec{u}$, temos:

$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 3^2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{1+9}$

$|\vec{u}| = \sqrt{10}$

Para o vetor $\vec{v}$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + p^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{25 + p^2}$$

Substituindo os resultados obtidos na condição de paralelismo, temos:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

$$|5 + 3.p| = \sqrt{10}.\sqrt{25 + p^2}$$

$$|5 + 3.p| = \sqrt{10.(25 + p^2)}$$

$$|5 + 3.p| = \sqrt{250 + 10.p^2}$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado e sabendo que o quadrado é a operação inversa da raiz quadrada, temos:

$$(5 + 3.p)^2 = (\sqrt{250 + 10.p^2})^2$$

$$(5 + 3.p)^2 = 250 + 10.p^2$$

Do trinômio do quadrado perfeito (veja observação adiante), temos:

$$5^2 + 2.5.3.p + (3.p)^2 = 250 + 10.p^2$$

$$25 + 30.p + 9.p^2 = 250 + 10.p^2$$

Agrupando os termos, temos:

$$10.p^2 - 9.p^2 - 30.p + 250 - 25 = 0$$

$$p^2 - 30.p + 225 = 0$$

Chegamos a uma equação do segundo grau. O discriminante $\Delta$ determina quantas soluções temos e é calculado, a partir dos coeficientes a, b e c da equação do segundo grau, por:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 30^2 - 4.1.225$$

$$\Delta = 900 - 900$$

$$\Delta = 0$$

Como o discriminante $\Delta$ é igual a zero, temos uma única raiz real. Essa raiz é dada por:

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Substituindo os coeficientes da equação do segundo grau e o discriminante na igualdade anterior, chegamos a:

$$p = \frac{-(-30) \pm \sqrt{0}}{2.1}$$

$$p = \frac{30}{2}$$

$$p = 15$$

Logo, para que os vetores $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (5,p)$ sejam paralelos, devemos ter p = 15. Concluímos que os vetores $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (5,15)$ são paralelos.

**Observação**

O trinômio do quadrado perfeito diz que:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2$$

Uma equação do segundo grau é aquela do tipo:

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Na igualdade, a, b e c são os coeficientes da equação do segundo grau. A partir dos coeficientes determinamos a solução dessa equação.

O discriminante $\Delta$ é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

O resultado de $\Delta$ diz se temos soluções reais para a equação do segundo grau e, se tivermos, quantas são essas soluções reais. Assim, há os três casos listados a seguir.

- $\Delta > 0$: há duas soluções reais e distintas.
- $\Delta = 0$: há uma única solução real.
- $\Delta < 0$: não há nenhuma solução real.

As soluções da equação do segundo grau, que são as raízes da função do segundo grau correspondente, são calculadas pela expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Vejamos os exemplos mostrados nas figuras 58, 59 e 60.

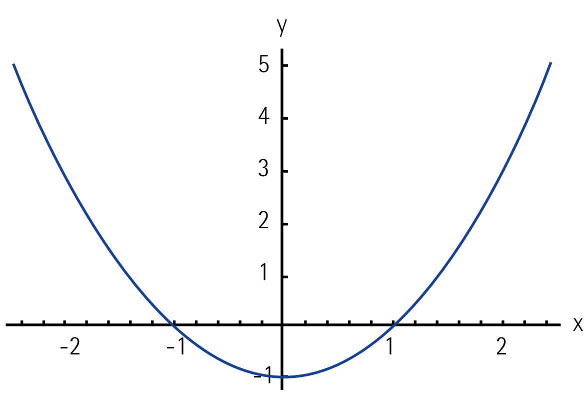


Figura 58 – Gráfico da função $y=x^2-1$, com concavidade para cima e duas raízes reais e distintas, em x = -1 e x = +1

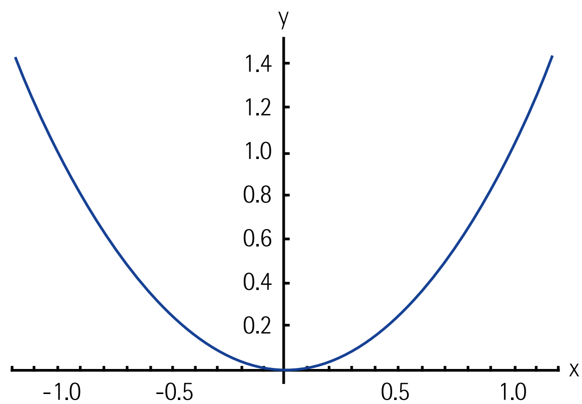


Figura 59 – Gráfico da função $y = x^2$, com concavidade para cima e uma única raiz real, em $x = 0$

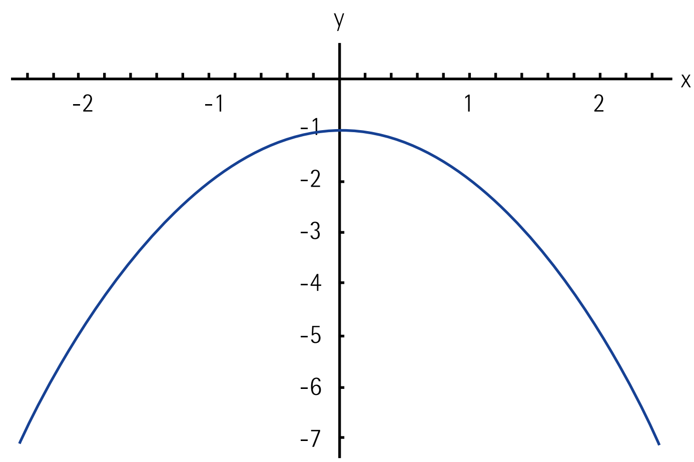


Figura 60 – Gráfico da função $y = -x^2-1$, com concavidade para baixo e nenhuma raiz real. Note que a função não cruza o eixo x

## 5.5 Produto escalar e dependência linear de dois vetores

Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão linearmente dependentes (LD) se existir um escalar a de forma que:

$$\vec{u} = a.\vec{v}$$

Ou seja, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes se forem paralelos. Podemos, então, usar a condição de paralelismo para verificar se dois vetores dados são linearmente dependentes.

Vimos que a condição de paralelismo entre dois vetores é:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Logo, dois vetores serão linearmente dependentes se essa condição for satisfeita.

## Exemplo de aplicação

### Exemplo 1

Verifique se os vetores $\vec{u}=(1,2)$ e $\vec{v}=(3,2)$ são linearmente dependentes (LD).

### Resolução

Vimos que, para que os vetores sejam linearmente dependentes, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$|\vec{u}.\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Calculando o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores, temos:

$$\vec{u}.\vec{v}=(1,2).(3,2)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1.3+2.2$$

$$\vec{u}.\vec{v}=3+4$$

$$\vec{u}.\vec{v}=7$$

O produto escalar resultou em um valor positivo. Logo, o seu módulo ou valor absoluto é igual a 7.

Vamos calcular o módulo de cada um dos vetores.

Para o vetor $\vec{u}$, temos:

$$|\vec{u}|=\sqrt{x_u^2+y_u^2}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{5}$$

Para o vetor $\vec{v}$, temos:

$$|\vec{v}|=\sqrt{x_v^2+y_v^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{13}$$

Substituindo os resultados obtidos na condição para que os vetores sejam linearmente dependentes, ficamos com:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

$$|7| = \sqrt{5}.\sqrt{13}$$

$$7 = \sqrt{65}$$

Chegamos a uma relação claramente falsa, já que $\sqrt{65}$ não é igual a 7. Logo, os vetores $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (3,2)$ não são linearmente dependentes (ou podemos dizer também que são linearmente independentes).

**Exemplo 2**

Verifique se os vetores $\vec{u} = (1,2,5)$ e $\vec{v} = (-1,-2,-5)$ são linearmente dependentes.

**Resolução**

Vimos que, para que os vetores sejam linearmente dependentes, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Calculando o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores, temos:

$$\vec{u}.\vec{v} = (1,2,5).(-1,-2,-5)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 1.(-1) + 2.(-2) + 5.(-5)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = -1 - 4 - 25$$

$$\vec{u}.\vec{v} = -30$$

Vamos calcular o módulo de cada um dos vetores.

Para o vetor $\vec{u}$, temos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 25}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{30}$$

Para o vetor $\vec{v}$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 25}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{30}$$

Substituindo os resultados obtidos na condição para que os vetores sejam linearmente dependentes ficamos com:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

$$|-30| = \sqrt{30}.\sqrt{30}$$

$$30 = (\sqrt{30})^2$$

$$30 = 30$$

Chegamos a uma igualdade verdadeira. Logo, os vetores $\vec{u} = (1,2,5)$ e $\vec{v} = (-1,-2,-5)$ são linearmente dependentes.

## 6 PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM VETOR SOBRE OUTRO

### 6.1 Projeção ortogonal de vetores

Uma das aplicações do produto escalar é o cálculo da projeção ortogonal de um vetor sobre o outro.

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ implica decompor o vetor $\vec{u}$ em uma projeção paralela ao vetor $\vec{v}$ e em outra projeção perpendicular ao vetor $\vec{v}$ (figura 61).

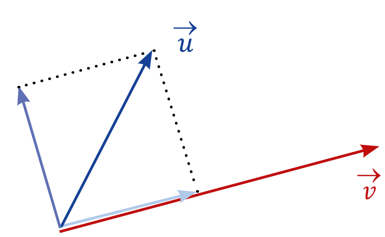


Figura 61 – Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e as projeções ortogonais de $\vec{u}$ paralela (em azul mais claro) e perpendicular (em azul intermediário) a $\vec{v}$

A projeção de $\vec{u}$ paralela a $\vec{v}$ é dada por:

$$proj\vec{u}_{//v} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

Note que, entre parênteses, temos um produto escalar, que resulta em um número, dividido pelo quadrado do módulo de um vetor, que é outro número. Então, a expressão entre parênteses é um número. De fato, a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ deve conservar a direção e o sentido de $\vec{v}$, o que é feito quando multiplicamos um escalar por $\vec{v}$.

A projeção de $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{v}$ pode ser calculada por uma soma de vetores. Da figura 61, vemos que:

$$\vec{u} = proj\vec{u}_{//v} + proj\vec{u}_{\perp v}$$

Assim:

$$proj\vec{u}_{\perp v} = \vec{u} - proj\vec{u}_{//v}$$

**Observação**

O símbolo // significa paralelo. O símbolo ⊥ significa perpendicular.

### Exemplo de aplicação

**Exemplo 1**

Determine a projeção do vetor $\vec{u} = (4,3)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1,2)$.

**Resolução**

Aqui, foi pedida apenas a projeção na direção do vetor. Então, devemos calcular apenas a projeção do vetor $\vec{u}$ paralela ao vetor $\vec{v}$.

Da expressão que dá a projeção de um vetor paralela a outro vetor, temos:

$$proj\vec{u}_{//v} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

Calculando o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v} = (4,3).(1,2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 4.1 + 3.2$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 4 + 6$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 10$$

Calculando o módulo do vetor $\vec{v}$, ficamos com:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{5}$$

Substituindo os resultados obtidos na expressão que dá uma das projeções solicitadas, chegamos a:

$$\text{proj}\vec{u}_{//v} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

$$\text{proj}\vec{u}_{//v} = \left(\frac{10}{(\sqrt{5})^2}\right).(1,2)$$

Lembramos que temos um escalar multiplicando um vetor. Seguindo com o cálculo, ficamos com:

$$\text{proj}\vec{u}_{//v} = \left(\frac{10}{5}\right).(1,2)$$

$$\text{proj}\vec{u}_{//v} = 2.(1,2)$$

$$\text{proj}\vec{u}_{//v} = (2,4)$$

Logo, a projeção do vetor $\vec{u} = (4,3)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1,2)$ é o vetor (2,4).

**Exemplo 2**

Determine as projeções ortogonais do vetor $\vec{u}=(1,2,3)$ em relação ao vetor $\vec{v}=(1,0,1)$.

**Resolução**

Da expressão que dá a projeção de um vetor paralela a outro vetor, temos:

$$\text{proj}\vec{u}_{//v}=\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

Calculando o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v}=(1,2,3).(1,0,1)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1.1+2.0+3.1$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1+0+3$$

$$\vec{u}.\vec{v}=4$$

Calculando o módulo do vetor $\vec{v}$, ficamos com:

$$|\vec{v}|=\sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{1+0+1}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{2}$$

Substituindo os resultados obtidos na expressão que dá uma das projeções solicitadas, chegamos a:

$$\text{proj}\vec{u}_{//v}=\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

$$\text{proj}\vec{u}_{//v}=\left(\frac{4}{(\sqrt{2})^2}\right).(1,0,1)$$

$$\text{proj}\vec{u}_{//v}=\left(\frac{4}{2}\right).(1,0,1)$$

$proj_{\vec{v}}\vec{u}_{//v} = 2.(1,0,1)$

$proj_{\vec{v}}\vec{u}_{//v} = (2,0,2)$

Calculando a projeção perpendicular ao vetor $\vec{v}$, ficamos com:

$proj_{\vec{v}}\vec{u}_{\perp v} = \vec{u} - proj_{\vec{v}}\vec{u}_{//v}$

$proj_{\vec{v}}\vec{u}_{\perp v} = (1,2,3) - (2,0,2)$

$proj_{\vec{v}}\vec{u}_{\perp v} = (1-2, 2-0, 3-2)$

$proj_{\vec{v}}\vec{u}_{\perp v} = (-1,2,1)$

Logo, as projeções ortogonais do vetor $\vec{u} = (1,2,3)$ em relação ao vetor $\vec{v} = (1,0,1)$ são $proj_{\vec{v}}\vec{u}_{//v} = (2,0,2)$ e $proj_{\vec{v}}\vec{u}_{\perp v} = (-1,2,1)$.

## 6.2 Aplicações

Uma das aplicações de projeção de um vetor sobre o outro é, em física, o cálculo da força resultante de um conjunto de forças.

Outra aplicação da projeção ortogonal de um vetor é o cálculo de áreas de paralelogramos pela fórmula de Lagrange, dada por:

$$A^2 = (|\vec{u}|.|\vec{v}|)^2 - \vec{u}.\vec{v}$$

Na igualdade, A é a área e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definem o paralelogramo (figura 62).

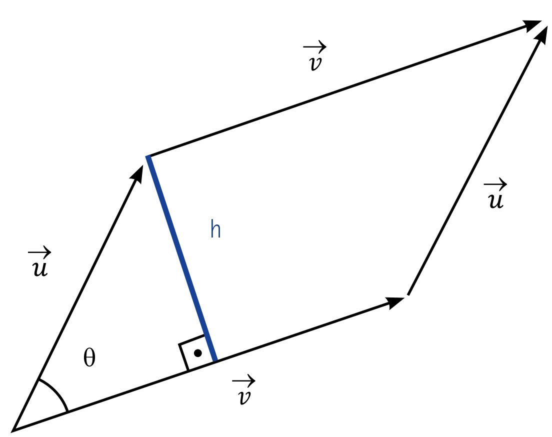


Figura 62 – Cálculo da área de um paralelogramo pela fórmula de Lagrange

Fonte: Massago (s.d., p. 15).

**Exemplo de aplicação**

Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}=(1,0)$ e $\vec{v}=(0,1)$.

**Resolução**

Da fórmula de Lagrange para a área do paralelogramo, temos:

$$A^2=(|\vec{u}|.|\vec{v}|)^2-\vec{u}.\vec{v}$$

Calculando primeiramente o módulo dos vetores, para o vetor $\vec{u}$ temos:

$$|\vec{u}|=\sqrt{x_u^2+y_u^2}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+0^2}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1}$$

$$|\vec{u}|=1$$

De forma equivalente, para o vetor $\vec{v}$ temos:

$$|\vec{v}|=\sqrt{x_v^2+y_v^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+1^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{1}$$

$$|\vec{v}|=1$$

Calculando o produto escalar dos dois vetores a partir de suas coordenadas, ficamos com:

$$\vec{u}.\vec{v}=(1,0).(0,1)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=1.0+0.1$$

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$

Substituindo os resultados obtidos na fórmula de Lagrange para o cálculo de áreas de paralelogramos, chegamos a:

$$A^2 = (|\vec{u}|.|\vec{v}|)^2 - \vec{u}.\vec{v}$$

$$A^2 = (1.1)^2 - 0$$

$$A^2 = 1$$

$$A = \sqrt{1}$$

$$A = 1$$

Logo, a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (0,1)$ é igual a 1. Mas, qual paralelogramo é esse e por que esse valor é razoável para sua área? Na figura 63, temos esses vetores em um plano cartesiano, com eixos simétricos.

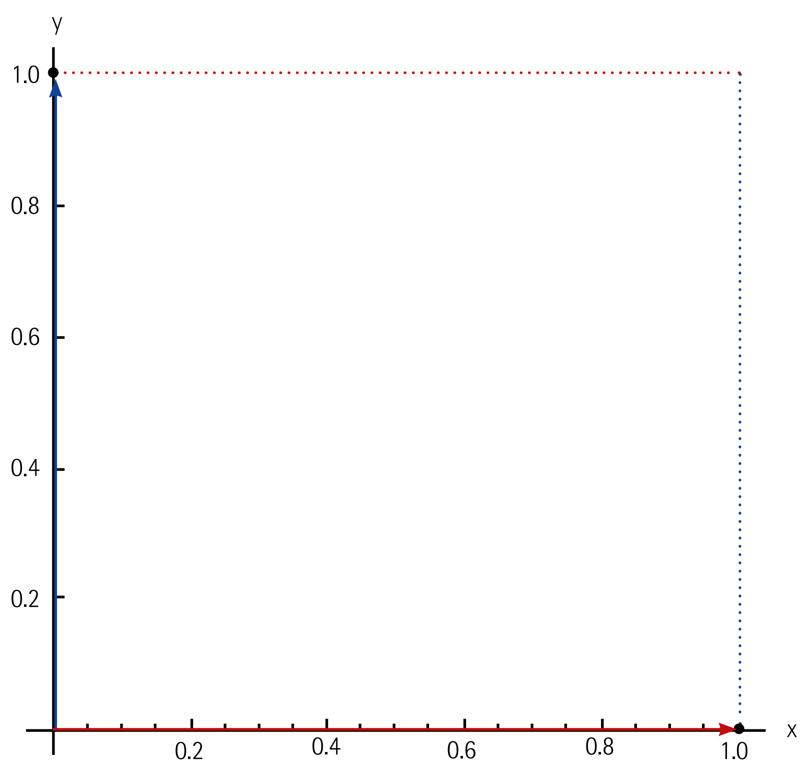


Figura 63 – Paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,0)$, em vermelho, e $\vec{v} = (0,1)$, em azul

Note que a o paralelogramo da figura 63 é um quadrado, já que os vetores têm mesmo módulo e são perpendiculares. A área A de um quadrado é calculada como:

$$A = L^2$$

Na expressão, L é a medida do lado do quadrado. Logo, a área é A=1, o que confere com o valor que obtivemos pela equação de Lagrange.

Na área de informática, o produto escalar é utilizado no campo da computação gráfica, por exemplo.

Um exemplo do uso de produto escalar na computação gráfica é na determinação de pontos de suporte de figuras. O ponto de suporte é o ponto mais afastado da figura na direção de um vetor $\vec{d}$ (figura 64). Esse ponto é identificado quando o valor do produto escalar de um vértice da figura pela direção $\vec{d}$ é máximo.

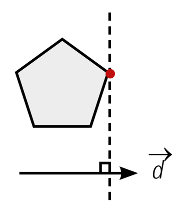


Figura 64 – Exemplo de um ponto de suporte, indicado em vermelho, de um pentágono em relação a um vetor $\vec{d}$

# 7 PRODUTO VETORIAL

## 7.1 Definição

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O produto vetorial entre esses dois vetores é indicado por $\vec{u} \times \vec{v}$ ou por $\vec{u} \hat{} \vec{v}$.

O produto vetorial de vetores "tridimensionais" (no espaço) é calculado a partir do determinante de uma matriz cuja primeira linha é composta pelos versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e a segunda e a terceira linhas são compostas pelas coordenadas dos vetores em questão.

Se $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é calculado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

É importante apontar que o resultado de um produto vetorial é um vetor.

### Exemplo de aplicação

Considere uma matriz A de ordem 3x3, ou seja, com 3 linhas e 3 colunas, como a matriz mostrada a seguir. Calcule o determinante da matriz A.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Resolução**

Para calcular o determinante da matriz A, podemos copiar as duas primeiras colunas ao lado da matriz:

$$A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Em seguida, fazemos a soma dos produtos dos três elementos da diagonal principal e de suas diagonais paralelas. Depois, fazemos a subtração dos produtos dos três elementos da diagonal secundária e de suas paralelas. A diagonal principal é composta pelos elementos $a_{11}$, $a_{22}$ e $a_{33}$. Já a diagonal secundária é composta pelos elementos $a_{31}$, $a_{22}$ e $a_{13}$.

Dessa forma, o determinante da matriz A, indicada por $|A| = \det A$, é calculado por:

$$|A| = \det A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

**Saiba mais**

No cálculo de produtos vetoriais, usamos determinantes de matrizes 3x3, ou seja, de matrizes quadradas com três linhas e três colunas.

Para revisar o cálculo de determinantes de matrizes 3x3, veja o vídeo:

KHAN ACADEMY. *Determinante de uma matriz 3x3*: método padrão (1 de 2). [s.d.]a. Disponível em: https://cutt.ly/dnZIwXg. Acesso em: 9 dez. 2020.

Consulte ainda o capítulo 8 do livro a seguir:

BOSQUILHA, A.; CORRÊA, M. L. P.; VIVEIRO, T. C. *Manual compacto de matemática*: ensino médio. São Paulo: Rideel, 2010.

## Exemplo de aplicação

### Exemplo 1

Sejam os vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$. Calcule o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

### Resolução

O primeiro passo é montarmos a matriz para o cálculo do produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0.0\vec{i} + 1.1\vec{j} + 1.1\vec{k} - 1.0\vec{k} - 1.1\vec{i} - 0.1\vec{j}$$

Agrupamos, então, os termos de cada versor, excluindo, logicamente, os termos que já são nulos (pois temos multiplicações por zero):

$$\vec{u} \times \vec{v} = -1.1\vec{i} + 1.1\vec{j} + 1.1\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$$

Ou, na representação apenas com as coordenadas do vetor, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-1,1,1)$$

Logo, o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$ é $\vec{u} \times \vec{v} = (-1,1,1)$.

**Exemplo 2**

Um exemplo de aplicação em física de produto vetorial é o cálculo da força magnética $\vec{F}_m$ que atua em uma carga elétrica q que se move com velocidade $\vec{v}$ em uma região de campo magnético $\vec{B}$. A força magnética, nesse caso, é dada por:

$$\vec{F}_m = q.\vec{v} \times \vec{B}$$

**Resolução**

Considere uma carga q = 1C que se move com vetor velocidade $\vec{v} = (1,0,0)$ m/s em uma região de campo magnético $\vec{B} = (1,2,1)$, medido em tesla (T). Calculamos a força magnética por:

$$\vec{F}_m = q.\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_m = 1.(1,0,0) \times (1,2,1)$$

$$\vec{F}_m = (1,0,0) \times (1,2,1)$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{F}_m = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas para facilitar o cálculo do determinante, temos:

$$\vec{F}_m = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Calculando o determinante, ficamos com:

$$\vec{F}_m = 0.1\vec{i} + 0.1\vec{j} + 1.2\vec{k} - 1.0\vec{k} - 2.0\vec{i} - 1.1\vec{j}$$

$$\vec{F}_m = -1\vec{j} + 2\vec{k}$$

Em termos das coordenadas do vetor, obtemos:

$$\vec{F}_m = (0, -1, 2)$$

Logo, a força magnética que atua na carga, nas condições apresentadas, é $\vec{F}_m = (0, -1, 2)$ N.

**Observação**

No sistema internacional de unidades, a velocidade é medida em metros por segundo (m/s), a força é medida em newton (N), a carga elétrica é medida em coulomb (C) e o campo magnético é medido em tesla (T).

## Exemplo de aplicação

Sejam os vetores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Calcule o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

### Resolução

O primeiro passo é montar a matriz para o cálculo do produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade anterior, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0.0\vec{i} + 0.0\vec{j} + 1.1\vec{k} - 0.0\vec{k} - 1.0\vec{i} - 0.1\vec{j}$$

Então, excluindo os termos que já são nulos (pois agora temos muitas multiplicações por zero), chegamos a:

$\vec{u} \times \vec{v} = 1.1\vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v} = 1\vec{k}$

Ou, na representação apenas com as coordenadas do vetor, temos:

$\vec{u} \times \vec{v} = (0,0,1)$

Logo, o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (1,0,0)$ e $\vec{v} = (0,1,0)$ é $\vec{u} \times \vec{v} = (0,0,1)$.

Qual é o significado desse produto vetorial?

O vetor $\vec{u} = (1,0,0)$ é unitário e tem apenas coordenada x não nula, ou seja, tem direção e sentido do eixo x. O vetor $\vec{v} = (0,1,0)$ também é unitário, mas tem apenas a coordenada y não nula; logo, tem direção e sentido do eixo y. Com isso, concluímos que $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = \vec{j}$. O resultado do produto vetorial, $\vec{u} \times \vec{v} = (0,0,1)$, é unitário e tem apenas coordenada z não nula; logo, tem direção e sentido de z, ou seja, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{k}$.

Concluímos que, para os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, vale a relação:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

Essa relação deve ser respeitada quando construímos sistemas de eixos para gráficos cartesianos, como veremos adiante.

## 7.2 Propriedades do produto vetorial

A ordem com que é calculado o produto vetorial é importante, pois:

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

Logo, no caso do produto vetorial, a ordem dos vetores afeta o resultado. Essa expressão quer dizer que o produto vetorial é anticomutativo.

A propriedade distributiva também se aplica ao produto vetorial, de forma que:

$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Quanto à multiplicação de um produto vetorial por um escalar *a*, temos a seguinte propriedade:

$$a.(\vec{u} \times \vec{v}) = (a.\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (a.\vec{v})$$

Há, ainda, uma relação entre o módulo do produto vetorial de dois vetores e o ângulo $\theta$ formado entre esses vetores, dada por:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\text{sen}\theta$$

Com essa relação, podemos usar o produto vetorial, além do produto escalar, como visto anteriormente, para determinar o ângulo entre dois vetores dados.

Essa última expressão retorna apenas a informação do módulo do produto vetorial, mas sua direção e seu sentido podem ser determinados pela regra da mão direita.

Na regra da mão direita, tomamos a mão direita (obviamente), erguemos o polegar e curvamos os outros quatro dedos, juntos. Com esses quatro dedos curvados, ligamos a extremidade do primeiro vetor do produto vetorial com a extremidade do segundo vetor, enquanto o polegar erguido dá a direção e o sentido do produto vetorial. Tente aplicar esse procedimento nas figuras a seguir.

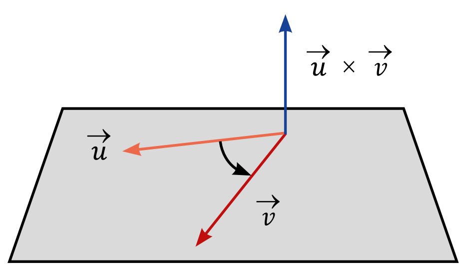


Figura 65 – Direção e sentido do produto vetorial. Nesse caso, o resultado do produto vetorial tem sentido para cima, em relação ao plano

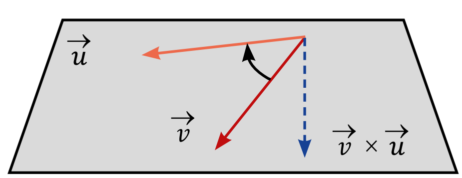


Figura 66 – Direção e sentido do produto vetorial. Nesse caso, o resultado do produto vetorial tem sentido para baixo, em relação ao plano, e, por isso, está indicado em tracejado

Note que dois vetores definem um plano e que o produto vetorial desses dois vetores sempre será perpendicular a esse plano.

Aplicando a regra da mão direita para os versores da base canônica (figura 67), que determina a direção e sentido dos eixos cartesianos, temos:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

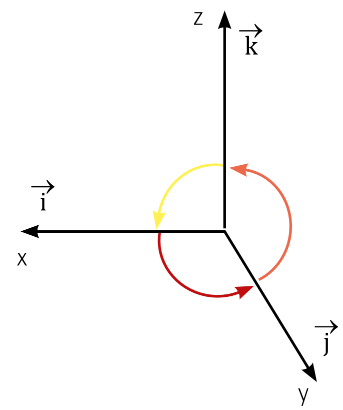


Figura 67 – Base canônica. As setas coloridas são indicativas para aplicação da regra da mão direita com os versores da base

Quando construímos um sistema de eixos cartesianos, é fundamental que uma dessas relações sejam obedecidas, ou seja, podemos montar o sistema de eixos de qualquer forma, mas devemos garantir que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

**Exemplo de aplicação**

Determine um vetor unitário que seja simultaneamente ortogonal a $\vec{u} = (1,0,2)$ e a $\vec{v} = (0,-1,1)$.

**Resolução**

Como dois vetores definem um plano, o vetor ortogonal a $\vec{u}$ e também a $\vec{v}$ deve ser perpendicular a esse plano, ou seja, deve ter a mesma direção do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

Calculando o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade anterior, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, chegamos a:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0.1\vec{i} + 2.0\vec{j} + 1.(-1)\vec{k} - 0.0\vec{k} - (-1).2\vec{i} - 1.1\vec{j}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

Representando o resultado do produto vetorial por suas coordenadas, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, -1)$$

Esse vetor é simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas precisamos de um vetor unitário. Um vetor unitário, mantendo a direção e o sentido do vetor original, é obtido dividindo-se o vetor por seu módulo. Então, chamando de $\vec{x}$ o vetor unitário solicitado no exemplo, temos:

$$\vec{x} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Calculando o módulo do produto vetorial, ficamos com:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados, ficamos com:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 1}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6}$$

O vetor unitário é:

$$\vec{x} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$$

Racionalizando a fração multiplicando e dividindo por $\sqrt{6}$, temos:

$$\vec{x} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}.\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$$

$$\vec{x} = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}(2,-1,-1)$$

$$\vec{x} = \frac{\sqrt{6}}{6}(2,-1,-1)$$

Lembrando da multiplicação de escalar por vetor, ficamos com:

$$\vec{x} = \left(2.\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\vec{x} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Logo, um vetor unitário e simultaneamente ortogonal a $\vec{u} = (1,0,2)$ e a $\vec{v} = (0,-1,1)$ é $\vec{x} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. Note que o oposto desse vetor, ou seja, $\vec{y} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, também seria uma resposta correta, já que teríamos apenas uma inversão de sentido, mantendo a direção e o módulo.

## 8 APLICAÇÕES DO PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial é usado, entre outras aplicações, para o cálculo da área de polígonos dos tipos paralelogramo e triângulo, que são utilizados em computação gráfica e no desenvolvimento de jogos eletrônicos. Outra aplicação é o cálculo da normal à superfície desses polígonos, o que permite a criação de efeitos de iluminação dos polígonos, tornando a imagem mais realista.

### 8.1 Cálculo da área de um paralelogramo

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos. Esses vetores definem um paralelogramo, e a área A desse paralelogramo (figura 68) é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores. Ou seja:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

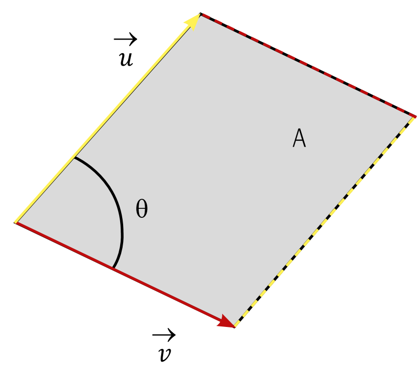


Figura 68 – Paralelogramo definido por dois vetores

**Exemplo de aplicação**

Determine a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,3,2)$.

**Resolução**

A área do paralelogramo é dada pelo módulo do produto vetorial dos dois vetores. Ou seja:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade anterior, ficamos com:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3\end{array}\right.$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=1.2\vec{i}+1.1\vec{j}+1.3\vec{k}-1.1\vec{k}-3.1\vec{i}-2.1\vec{j}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=2\vec{i}+1\vec{j}+3\vec{k}-1\vec{k}-3\vec{i}-2\vec{j}$$

Agrupando os termos de cada versor, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(2-3)\vec{i}+(1-2)\vec{j}+(3-1)\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=-1\vec{i}+-1\vec{j}+2\vec{k}$$

Representado esse vetor por suas coordenadas, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-1,-1,2)$$

Calculando o módulo desse vetor, temos:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{1+1+4}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{6}$$

Logo, a área do paralelogramo é igual a:

$$A=|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{6}$$

## Observação

Por que demos a resposta do exemplo anterior como $A=\sqrt{6}$ em vez de usarmos uma calculadora para expressar o resultado final?

Se usarmos uma calculadora, chegaremos a $\sqrt{6}=2{,}44948974...$ Não podemos apresentar o resultado com essa quantidade de casas decimais, então precisaríamos arredondar tal número. Com isso, perdemos precisão na resposta, o que pode ser prejudicial, dependendo do caso. Expressar a resposta como uma raiz ou como uma fração garante uma solução por vezes mais elegante e sem a necessidade de arredondamentos.

### Exemplo de aplicação

Determine a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}=(1,0,0)$ e $\vec{v}=(2,2,4)$.

**Resolução**

A área do paralelogramo é dada pelo módulo do produto vetorial dos dois vetores. Ou seja:

$$A=|\vec{u}\times\vec{v}|$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2\end{array}\right.$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=0.4\vec{i}+0.2\vec{j}+1.2\vec{k}-2.0\vec{k}-2.0\vec{i}-4.1\vec{j}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=-4\vec{j}+2\vec{k}$$

Representado esse vetor por suas coordenadas, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(0,-4,2)$$

Calculando o módulo desse vetor, temos:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{0^2+(-4)^2+2^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{0+16+4}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{20}$$

Podemos melhorar o resultado apresentado fatorando o número 20. Para isso, basta lembrar que $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Vejamos:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{2.2.5}$$

Sabemos que $2 \cdot 2 = 2^2$. Ou seja:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{2^2.5}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{2^2}.\sqrt{5}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=2.\sqrt{5}$$

Logo, a área do paralelogramo é igual a:

$$A=|\vec{u}\times\vec{v}|$$

$$A=2.\sqrt{5}$$

O processo de fatorar um número é verificar se ele é divisível por números primos, ou seja, por 1, 2, 3, 5, 7, 11... Logicamente, ser divisível por 1 não acrescenta nenhuma informação relevante, já que todo número é divisível por 1 e por ele mesmo.

Por exemplo, podemos escrever 64 como $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, ou seja, $64 = 2^6$:

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ \hline 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Ainda, 35 pode ser escrito como $5 \cdot 7$, ou seja, $35 = 5 \cdot 7$:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ \hline 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

No processo de fatoração, fazemos divisões por números primos. É interessante partirmos do menor número primo maior do que 1, ou seja, começamos a dividir por 2 e prosseguimos até não conseguirmos mais fazer a divisão.

**Observação**

Número primo é o número inteiro que é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Por exemplo, 11, 17 e 79 são números primos.

**Exemplo de aplicação**

Determine *a* de forma que a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (2,a,0)$ seja igual a 3.

**Resolução**

A área do paralelogramo é dada pelo módulo do produto vetorial dos dois vetores. Ou seja:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & a & 0\end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & a & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 1 & 0\\ 2 & a\end{matrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=0.0\vec{i}+1.2\vec{j}+1.a\vec{k}-2.0\vec{k}-a.1\vec{i}-0.1\vec{j}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=2\vec{j}+a\vec{k}-a\vec{i}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=-a\vec{i}+2\vec{j}+a\vec{k}$$

Representado esse vetor por suas coordenadas, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-a,2,a)$$

Calculando o módulo desse vetor, temos:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-a)^2+2^2+a^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{a^2+4+a^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{2a^2+4}$$

A área do paralelogramo relaciona-se com o módulo do produto vetorial por:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$A = \sqrt{2a^2 + 4}$$

É pedido que a área do paralelogramo seja igual a 3. Assim:

$$3 = \sqrt{2a^2 + 4}$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, ficamos com:

$$3^2 = (\sqrt{2a^2 + 4})^2$$

Como elevar ao quadrado é a operação inversa da raiz quadrada, ficamos com:

$$9 = 2a^2 + 4$$

Isolando *a*, chegamos a:

$$2a^2 = 9 - 4$$

$$2a^2 = 5$$

$$a^2 = \frac{5}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Logo, $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$ faz com que a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (2,a,0)$ seja igual a 3. Ou seja, o paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{u} = \left(1,\sqrt{\frac{5}{2}},1\right)$ tem área igual a 3.

## 8.2 Cálculo da área de um triângulo

Uma extensão do cálculo da área de paralelogramos usando produto vetorial é o cálculo da área de triângulos. Para tanto, basta visualizarmos que um triângulo nada mais é do que metade de um paralelogramo (figura 69).

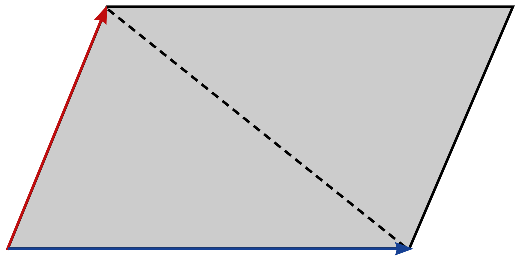

Figura 69 – Triângulo como metade do paralelogramo determinado por dois vetores, em vermelho e em azul

Logo, a área A de um triângulo determinado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

**Lembrete**

No cálculo do produto vetorial de dois vetores precisamos primeiro montar uma matriz cuja primeira linha é composta pelos versores i, j e k, e a segunda e a terceira linhas são compostas pelas coordenadas dos vetores em questão. Em seguida calculamos o determinante dessa matriz. O produto vetorial é sempre um vetor.

## Exemplo de aplicação

### Exemplo 1

Determine a área do triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (4,0,2)$.

### Resolução

A área do paralelogramo é dada pelo módulo do produto vetorial dos dois vetores. Ou seja:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade anterior, ficamos com:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, ficamos com:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0\end{array}\right.$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=1.2\vec{i}+1.4\vec{j}+1.0\vec{k}-4.1\vec{k}-0.1\vec{i}-2.1\vec{j}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}-2\vec{j}$$

Agrupando os termos de cada versor, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=2\vec{i}+(4-2)\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=2\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$$

Representado esse vetor por suas coordenadas, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(2,2,-4)$$

Calculando o módulo desse vetor, temos:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{4+4+16}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{24}$$

Lembrando que 24 = 2 · 2 · 2 · 3, ficamos com:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2.2.2.3}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2.6}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2}.\sqrt{6}$$

Como elevar ao quadrado é a operação inversa da raiz quadrada, chegamos a:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 2.\sqrt{6}$$

Finalmente, calculamos a área do triângulo, que é dada por:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

$$A = \frac{2.\sqrt{6}}{2}$$

$$A = \sqrt{6}$$

Logo, a área do triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (4,0,2)$ é $A = \sqrt{6}$.

**Exemplo 2**

Determine *a* de forma que a área do triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,-2,0)$ e $\vec{v} = (3,a,0)$ seja igual a 3.

**Resolução**

A área do paralelogramo é dada pelo módulo do produto vetorial dos dois vetores. Ou seja:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & a & 0 \end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, chegamos a:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & a & 0 & 3 & a \end{array}\right.$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-2).0\vec{i} + 0.3\vec{j} + 1.a\vec{k} - 2.3\vec{k} - 0.a\vec{i} - 0.1\vec{j}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = a\vec{k} - 6\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a - 6)\vec{k}$$

Representado esse vetor por suas coordenadas, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, a - 6)$$

Calculando o módulo desse vetor, temos:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (a - 6)^2}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(a - 6)^2}$$

Como a raiz quadrada é a operação inversa de elevamos ao quadrado, ficamos com:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = a - 6$$

A área do paralelogramo é dada por:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

$$A = \frac{a - 6}{2}$$

É pedido que a área do paralelogramo seja igual a 3. Assim:

$$3 = \frac{a - 6}{2}$$

Isolando *a*, ficamos com:

$3 \cdot 2 = a - 6$

$6 = a - 6$

$a = 6 + 6$

$a = 12$

Logo, $a = 12$ faz com que a área do triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (1, -2, 0)$ e $\vec{v} = (3, a, 0)$ seja igual a 3. Ou seja, o triângulo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1, -2, 0)$ e $\vec{v} = (3, 12, 0)$ tem área igual a 3.

## 8.3 Vetor normal a uma figura plana determinada por dois vetores

Considere uma figura plana, ou seja, bidimensional, definida por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Um vetor normal ao plano definido pelos dois vetores e, consequentemente, à figura plana determinada pelos dois vetores é dado pelo produto vetorial dos dois vetores. Note que temos dois sentidos possíveis e, portanto, dois vetores normais possíveis (figura 70).

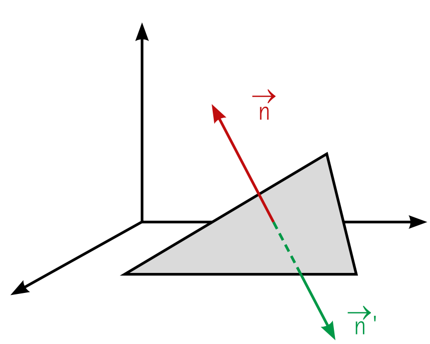


Figura 70 – Vetores normais a um triângulo

## Exemplo de aplicação

### Exemplo 1

Determine um vetor normal ao triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,0,0)$ e $\vec{v} = (0,0,1)$.

### Resolução

Um vetor normal $\vec{n}$ é dado pelo produto vetorial dos dois vetores. Assim:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade, temos:

$$\vec{n} = (1,0,0) \times (0,0,1)$$

Calculando o produto vetorial, chegamos a:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade, temos:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, temos:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{n} = 0.1\vec{i} + 0.0\vec{j} + 1.0\vec{k} - 0.0\vec{k} - 0.0\vec{i} - 1.1\vec{j}$$

$$\vec{n} = -1.1\vec{j}$$

$$\vec{n} = -1\vec{j}$$

Em termos das coordenadas, temos:

$$\vec{n} = (0, -1, 0)$$

Logo, um vetor normal ao triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,0,0)$ e $\vec{v} = (0,0,1)$ é $\vec{n} = (0,-1,0)$. Outro vetor também normal ao triângulo é o oposto desse vetor. Ou seja:

$$\vec{n}' = -\vec{n}$$

$$\vec{n}' = -(0,-1,0)$$

$$\vec{n}' = (0,1,0)$$

Note que os vetores dados no enunciado, $\vec{u} = (1,0,0)$ e $\vec{v} = (0,0,1)$, têm direção e sentido dos eixos x e z, respectivamente. Os vetores normais que obtivemos, $\vec{n} = (0,-1,0)$ e $\vec{n}' = (0,1,0)$, têm direção do eixo y. Veja a representação vetorial feita na figura 71.

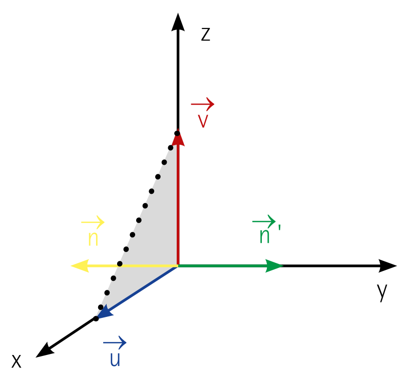


Figura 71 – Representação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e dos vetores normais ao triângulo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

**Exemplo 2**

Determine um vetor normal ao triângulo definido pelos vetores $\vec{v} = (1,5,4)$ e $\vec{v} = (-3,1,0)$.

**Resolução**

Um vetor normal $\vec{n}$ é dado pelo produto vetorial dos dois vetores. Assim:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade, temos:

$$\vec{n} = (1,5,4) \times (-3,1,0)$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade, temos:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & 4\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, temos:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & 4\\ -3 & 1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 1 & 5\\ -3 & 1\end{matrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$\vec{n}=5.0\vec{i}+4.(-3)\vec{j}+1.1\vec{k}-(-3).5\vec{k}-1.4\vec{i}-0.1\vec{j}$$

$$\vec{n}=-12\vec{j}+1\vec{k}+15\vec{k}-4\vec{i}$$

Agrupando os termos de cada versor, temos:

$$\vec{n}=-4\vec{i}-12\vec{j}+(1+15)\vec{k}$$

$$\vec{n}=-4\vec{i}-12\vec{j}+16\vec{k}$$

Escrevendo em termos das coordenadas, temos:

$$\vec{n}=(-4,-12,16)$$

Então, um dos vetores normais ao triângulo definido pelos vetores $\vec{v}=(1,5,4)$ e $\vec{v}=(-3,1,0)$ é o vetor $\vec{n}=(-4,-12,16)$. Outro vetor normal é o vetor oposto a $\vec{n}$, dado por:

$\vec{n}' = -\vec{n}$

$\vec{n}' = -(-4, -12, 16)$

$\vec{n}' = (4, 12, -16)$

## Resumo

O resultado do produto escalar entre dois vetores é um escalar, ou seja, um número, e não um vetor. O produto escalar entre dois vetores é indicado por um ponto, como mostrado a seguir.

$\vec{u}$ escalar $\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}$

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ é calculado por:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

O produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com ângulo $\theta$ entre eles, é calculado por:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Podemos usar o produto escalar para verificar se dois vetores são paralelos ou perpendiculares.

No caso de vetores perpendiculares, devemos ter:

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

No caso de vetores paralelos, devemos ter:

$$|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

A condição de paralelismo é a mesma para que dois vetores sejam linearmente dependentes.

Outra aplicação do produto escalar é o cálculo das projeções ortogonais de um vetor sobre o outro.

A projeção de $\vec{u}$ paralela a $\vec{v}$ é dada por:

$$proj\vec{u}_{//v} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

A projeção de $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{v}$ é calculada por:

$$proj\vec{u}_{\perp v} = \vec{u} - proj\vec{u}_{//v}$$

Sejam dois vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$. O produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é calculado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

É importante apontar que o resultado de um produto vetorial é um vetor.

A ordem com que é calculado o produto vetorial é importante, pois:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Temos ainda uma relação entre o produto vetorial de dois vetores e o ângulo $\theta$ formado entre esses vetores, dada por:

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\theta$$

Essa equação dá apenas o módulo do produto vetorial, mas a sua direção e o seu sentido podem ser determinados pela regra da mão direita. Na regra da mão direita, pegamos a mão direita, erguemos o polegar e curvamos os outros quatro dedos, juntos. Com esses quatro dedos curvados, ligamos a extremidade do primeiro vetor do produto vetorial com a extremidade do segundo vetor, enquanto o polegar erguido dá a direção e o sentido do produto vetorial.

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos. Esses vetores definem um paralelogramo, e a área A desse paralelogramo é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores. Ou seja:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

A área A de um triângulo determinado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

Seja uma figura plana, ou seja, bidimensional, definida por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Um vetor normal ao plano definido pelos dois vetores e, consequentemente, à figura plana determinada pelos dois vetores é dado pelo produto vetorial dos dois vetores. O outro vetor normal é o oposto desse vetor.

## Exercícios

**Questão 1**. O produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u}.\vec{v}$ e lido como "u escalar v", resulta em um escalar (número real). Esse resultado é igual ao produto dos módulos dos vetores ($|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$) pelo cosseno do ângulo $\theta$ formado entre eles, isto é, $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$. A figura a seguir mostra uma representação pictórica de dois vetores e do ângulo formado entre eles.

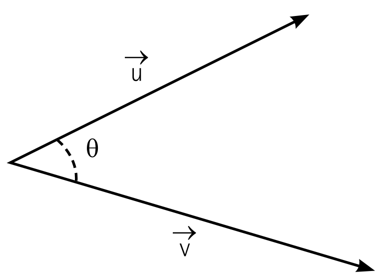


Figura 72 – Representação de dois vetores e do ângulo formado entre eles

Com base no conceito de produto escalar, assinale a alternativa correta.

A) Se $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 9$ e o ângulo formado entre eles é de 150º, então $\vec{u}.\vec{v} = -27\sqrt{3}$.

B) Se $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 4$ e o ângulo formado entre eles é de 45º, então $\vec{u}.\vec{v} = 20\sqrt{3}$.

C) Se $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$ e o ângulo formado entre eles é de 90º, então $\vec{u}.\vec{v} = 10$.

D) Se $|\vec{u}| = 12$, $|\vec{v}| = 5$ e o ângulo formado entre eles é de 0º, então $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

E) Se $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 5$ e o ângulo formado entre eles é de 180º, então $\vec{u}.\vec{v} = 30$.

Resposta correta: alternativa A.

**Resolução da questão**

Se $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 9$ e o ângulo formado entre eles é de 150º, então $\vec{u}.\vec{v} = -27\sqrt{3}$, pois:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta = 6.9.\cos 150° = 54.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -27\sqrt{3}$$

Se $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 4$ e o ângulo formado entre eles é de 45º, então $\vec{u}.\vec{v} = 20\sqrt{2}$, pois:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta = 10.4.\cos 45° = 40.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 20\sqrt{2}$$

Se $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$ e o ângulo formado entre eles é de 90º, então $\vec{u}.\vec{v} = 0$, pois:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta = 2.5.\cos 90° = 10.(0) = 0$$

Se $|\vec{u}| = 12$, $|\vec{v}| = 5$ e o ângulo formado entre eles é de 0º, então $\vec{u}.\vec{v} = 60$, pois:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta = 12.5.\cos 0° = 60.(1) = 60$$

Se $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 5$ e o ângulo formado entre eles é de 180º, então $\vec{u}.\vec{v} = -30$, pois:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta = 6.5.\cos 180° = 30.(-1) = -30$$

**Questão 2**. A área do triângulo definido pelos vetores $\vec{u} = (2,0,1)$ e $\vec{v} = (-1,1,1)$ é igual a:

A) $\sqrt{14}$

B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{14}}{2}$

D) $\sqrt{7}$

E) $7$

Resposta correta: alternativa C.

**Resolução da questão**

A área do triângulo é dada pela metade do módulo do produto vetorial dos dois vetores. Ou seja:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

Calculando o produto vetorial, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores dados na igualdade anterior, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right.$$

Calculando o determinante, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0.1\vec{i} + 1.(-1)\vec{j} + 2.(-1)\vec{k} - (-1).0\vec{k} - 1.1\vec{i} - 2.1\vec{j}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0\vec{i} - 1\vec{j} - 2\vec{k} + 0\vec{k} - 1\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -1\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

Representando esse vetor por suas coordenadas, ficamos com:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -3, -2)$$

Calculando o módulo desse vetor, ficamos com:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1 + 9 + 4}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{14}$$

Calculamos então a área do triângulo, que é dada por:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

## REFERÊNCIAS

### Textuais


ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra *linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BORIN JR., A. M. S (org.). *Geometria analítica*. São Paulo: Pearson, 2014.

BOSQUILHA, A.; CORRÊA, M. L. P.; VIVEIRO, T. C. *Manual compacto de matemática*: ensino médio. São Paulo: Rideel, 2010.

CALLIOLI, C. A; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria analítica*: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2007.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear*. São Paulo: EDUSP, 2001.

EDWARDS, D. E.; PENNEY, C. H. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: LTC, 2005. v. 1.

ESPINOSA, I. C. de N.; BARBIERI FILHO, P. *Vetores e geometria analítica*. São Paulo: UNIP, 1992.

FERNANDES. L. F. D. *Geometria analítica*. Curitiba: Intersaberes, 2016.

KHAN ACADEMY. *Determinante de uma matriz 3x3*: método padrão (1 de 2). [s.d.]a. Disponível em: https://cutt.ly/dnZIwXg. Acesso em: 9 dez. 2020.

KHAN ACADEMY. *Introdução à racionalização de denominadores*. [s.d.]b. Disponível em: https://cutt.ly/CnBvG2W. Acesso em: 18 jun. 2021.

KOLMAN, B. Álgebra *linear com aplicações*. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 1999.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1977. v. 1.

LIMA, E. L. Álgebra *linear*. 6. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2003. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. *Coordenadas no espaço*. Rio de Janeiro: SBM, 1993. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. *Coordenadas no plano*: geometria analítica, vetores e transformações geométricas. Rio de Janeiro: SBM, 1992. (Coleção do Professor de Matemática).

MASSAGO, S. *Planos e espaços coordenados e vetores*. [s.d.]. Disponível em: https://cutt.ly/CnZIbSW. Acesso em: 11 dez. 2020.

MATOS, D. *Por que você deve aprender* álgebra linear *para trabalhar com machine learning?* Disponível em: https://cutt.ly/enZIW0o. Acesso em: 15 dez. 2020.

POOLE, D. Álgebra *linear*. São Paulo: Thomson, 2004.

PROVASI, R. *PEF – 5743 – Computação gráfica aplicada à engenharia de estruturas*. São Paulo: USP, 2011. Disponível em: https://cutt.ly/7nZIAsw. Acesso em: 11 dez. 2020.

RIBEIRO, F. M. A. *Revisão de alguns conceitos de matemática*. [s.d.]a. Disponível em: https://bit.ly/rev_matematica1. Acesso em: 15 dez. 2020.

RIBEIRO, F. M. A. *Revisão de outros conceitos de matemática*: potências. [s.d.]b. Disponível em: https://bit.ly/rev_matematica2. Acesso em: 15 dez. 2020.

SANTOS, N. M. *Vetores e matrizes*. Rio de Janeiro: LTC, 1988.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica.* São Paulo: Makron Books, 2000.

YOUNG, H. D. *Física III*: eletromagnetismo – Young e Freedman. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

ZANI, S. L. Álgebra *linear*. [s.d.]. Disponível em: https://cutt.ly/QnZzuXA. Acesso em: 15 dez. 2020.

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000