UNIDADE II

Matemática Discreta

Prof. Hugo Insua

Conjuntos – Definição e relação de pertinência

- Coleção desordenada de objetos.
- Exemplo: A = {teclado, monitor, microfone}. “A” é uma coleção de três palavras da língua portuguesa.
- Exemplo: B = {0, 1}. “B” é uma coleção de dois dígitos.
- Exemplo: C = {!, ?, $, +}. “C” é uma coleção de quatro caracteres.
- Para se representar que ! pertence a “C”, escreve-se ! ∈ “C”. Para se representar que @ não pertence a “C”, escreve-se @ ∉ C.

Não existe uma relação de ordem entre os elementos de um conjunto e é irrelevante o número de ocorrências do mesmo elemento em um conjunto. Assim sendo, tem-se que:

$$A = \{a, b, c\} = \{c, a, b\} = \{c, a, a, b, b, b\}$$

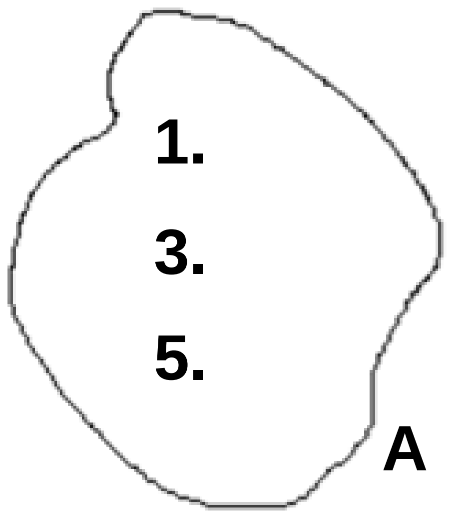
Conjuntos – Cardinalidade

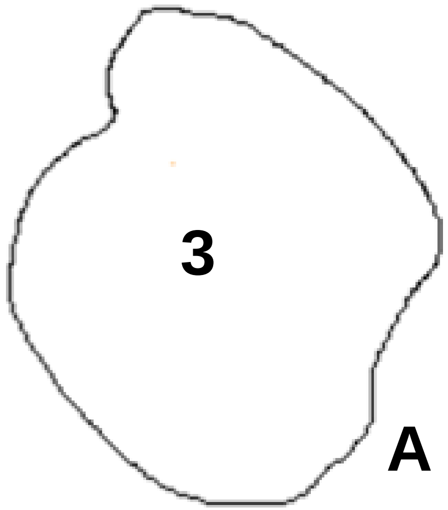
- Os conjuntos podem ser finitos ou infinitos.
- Seja o conjunto A = {a, e, i, o, u}. “A” é um conjunto finito, representado pela enumeração de seus elementos (cardinalidade) *a*, *e*, *i*, *o*, *u*. Logo, |A| = 5.
- Um conjunto sem elementos é denominado de conjunto vazio e é denotado como { } ou $\emptyset$.
- Os conjuntos podem ser infinitos. São exemplos de conjuntos infinitos o conjunto: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, entre outros.

Conjuntos – Representação

- Por extensão: listar os seus elementos por meio de chaves.
- Exemplo: P = {2, 4, 6}. Esse tipo de notação é apropriado para os pequenos conjuntos.
- Por compreensão, cuja forma é {variável/condições}.
- Exemplo: o conjunto dos inteiros maiores que 5, faremos $\{x \,/\, x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 5\}$.

Por Diagrama de Venn:





Conjuntos – Relação de inclusão

- “A” é um subconjunto de “B”, se cada elemento de “A” é também um elemento de “B”.
- Representa-se por: $A \subseteq B$ (lê-se: “A está contido em B”).
- Note-se que qualquer conjunto é um subconjunto de si mesmo. Diz-se que “A” é um subconjunto próprio de “B” se “A” é um subconjunto de “B”, mas não coincide com o conjunto “B.” Neste caso, representa-se $A \subset B$ (lê-se: “’A’ está contido propriamente em ‘B’”). O conjunto vazio é o subconjunto de qualquer conjunto.

Exemplo: sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40\}$ e $B = \{1, 10, 2, 20\}$, pode-se afirmar que:

- $B \subset A$, $A \subseteq A$, $B \subseteq B$;
- Dois conjuntos são iguais se e, somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Conjuntos – Operações

Dois conjuntos “A” e “B” quaisquer podem ser combinados, e formar um terceiro por meio de várias operações sobre os conjuntos. As principais operações são:

- União: sejam “A” e “B” dois conjuntos; então: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;

Exemplo: sejam $A = \{0, 1, 2, 6, 7\}$ e $B = \{0, 3, 5, 7, 8, 9\}$, tem-se que:

- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- Intersecção: sejam “A” e “B” dois conjuntos; então: $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Exemplo: sejam $A = \{0, 1, 2, 6, 7\}$ e $B = \{0, 3, 5, 7, 8, 9\}$, tem-se que:

- $A \cap B = \{0, 7\}$.

Conjuntos – Operações

- Diferença: sejam “A” e “B” dois conjuntos, então: $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Exemplo: sejam $A = \{0, 1, 2, 6, 7\}$ e $B = \{0, 3, 5, 7, 8, 9\}$, tem-se que:

- $A - B = \{1, 2, 6\}$ e $B - A = \{3, 5, 8, 9\}$.
- Complementação: a operação de complementação é definida em relação a um conjunto universo U. Seja “A” um conjunto, então a complementação de “A” é o conjunto formado pelos elementos de “U” que não pertencem a “A”.
- $\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$.
- Exemplo: seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $U = \mathbb{N}$, tem-se que: $\overline{A} = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$.

Conjuntos – Operações

- Conjunto das partes – Conjunto dos subconjuntos.

Dado o conjunto A = {a, e, i}. O conjunto formado por todos os subconjuntos de “A” é chamado de conjunto das partes de “A” e indicamos por P(A). Assim, temos:

- $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$. $|P(A)| = 8$;
- Observe que $\emptyset$, {a}, {e}, {i}, {a, e}, {a, i}, {e, i}, {a, e, i} são todos elementos de P(A); logo, a relação entre esses elementos e P(A) é de pertinência e não de inclusão, ou seja, devemos escrever, por exemplo: $\{a\} \in P(A)$ e não $\{a\} \subseteq P(A)$.

Conjuntos – Operações

- Contagem de subconjuntos.
- Tomemos, novamente, o conjunto $A = \{a, e, i\}$. Vimos que ele possui 3 elementos e 8 subconjuntos.
- Para determinarmos a quantidade de subconjuntos de um conjunto, resolvemos a potência $2^{|A|}$.
- Portanto, a quantidade de subconjuntos de “A” é: $2^3 = 8$ subconjuntos.

Conjuntos – Operações

- Produto cartesiano.

Sejam “A” e “B” dois conjuntos, o produto cartesiano A x B define-se como:

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$;
- O elemento do produto cartesiano (a, b) é denominado como par ordenado, ou seja, a ordem em que os componentes *a* e *b* se apresentam é relevante.

Exemplo: sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$, tem-se que:

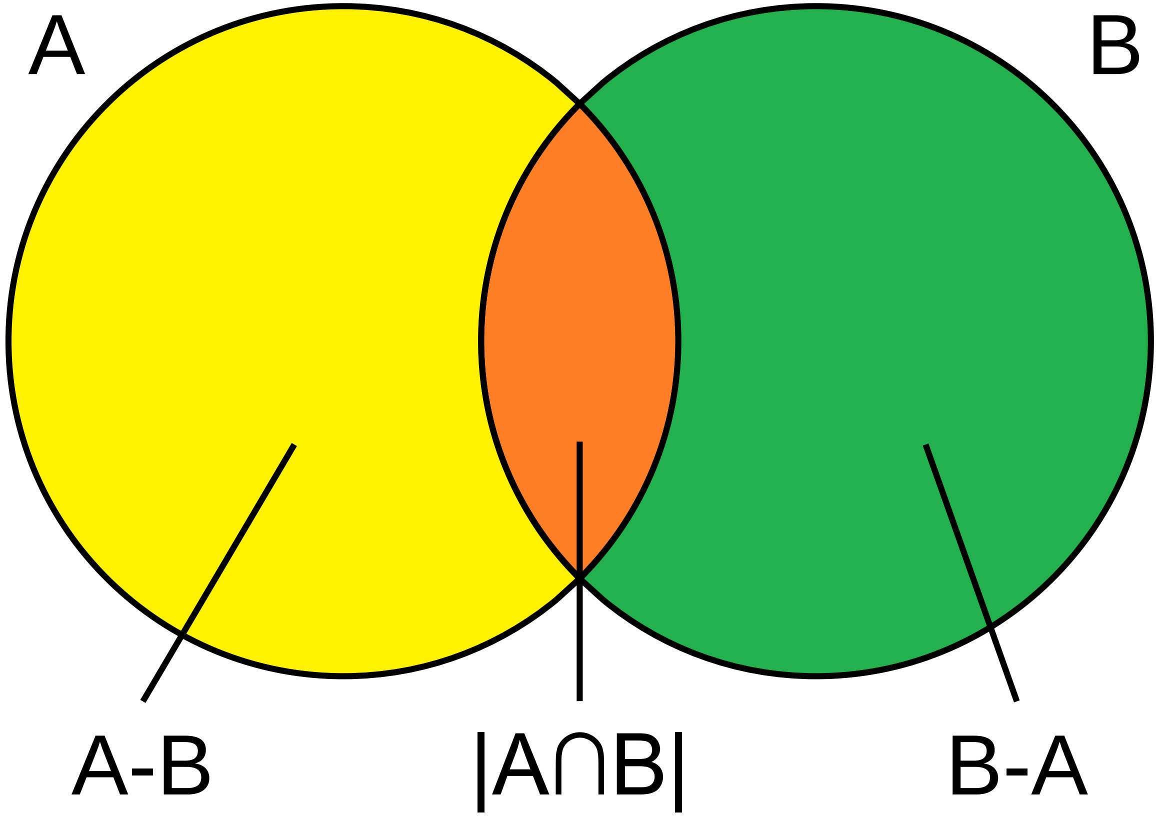
- $A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$;
- $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1), (z, 2)\}$.

Conjuntos – Cardinalidade da união

- Princípio de inclusão e exclusão.
- O número de elementos resultantes da união de 2 conjuntos é a soma (inclusão) do número de elementos dos 2 conjuntos menos (exclusão) a quantidade de elementos da intersecção dos 2 conjuntos.

Assim, para dois conjuntos finitos, temos:

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.



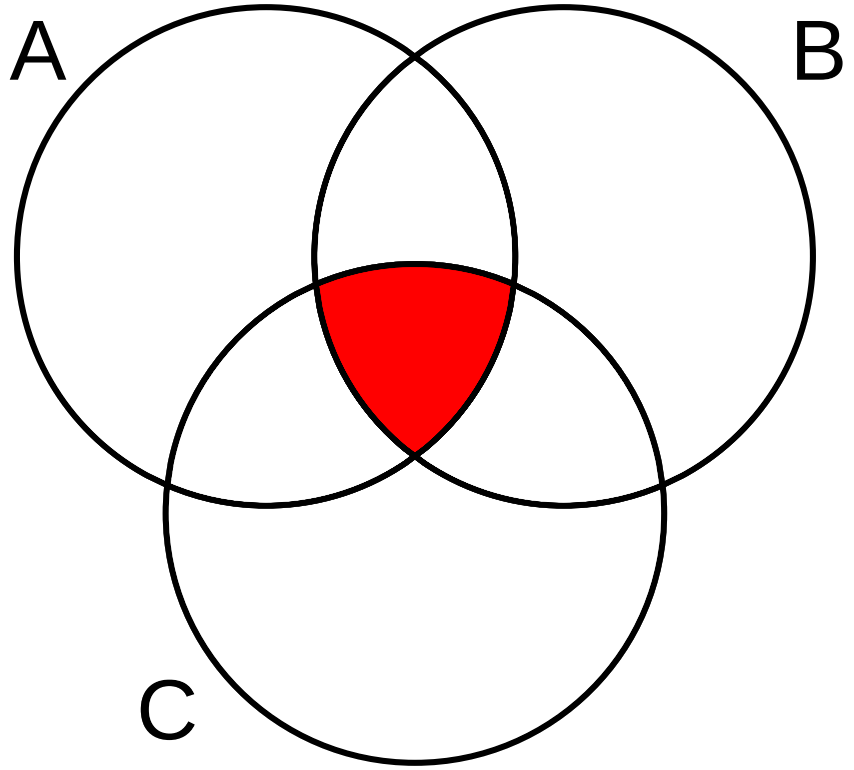
Conjuntos – Cardinalidade da união

Para 3 conjuntos, o princípio da inclusão e exclusão tem a seguinte configuração:

- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$;

Observação:

- Um dica na resolução de problemas envolvendo a cardinalidade da união é identificar, primeiramente, as intersecções.



Interatividade

Um grupo de estudantes está planejando encomendar *pizzas*. Se 13 comem linguiça calabresa, 10 comem salame italiano, 12 comem queijo extra, 4 comem tanto calabresa quanto salame, 5 comem tanto salame quanto queijo extra, 7 comem tanto linguiça calabresa quanto queijo extra e 3 comem de tudo, quantos estudantes há no grupo?

a) 10.

b) 15.

c) 18.

d) 22.

e) 19.

Resposta

Um grupo de estudantes está planejando encomendar *pizzas*. Se 13 comem linguiça calabresa, 10 comem salame italiano, 12 comem queijo extra, 4 comem tanto calabresa quanto salame, 5 comem tanto salame quanto queijo extra, 7 comem tanto linguiça calabresa quanto queijo extra e 3 comem de tudo, quantos estudantes há no grupo?

a) 10.

b) 15.

c) 18.

d) 22.

e) 19.

Relação

- Seja R uma relação e sejam os conjuntos “A” e “B”, dizemos que “R” é uma relação sobre “A” desde que $R \subseteq A \times A$; e dizemos que “R” é uma relação de “A” para “B”, se $R \subseteq A \times B$.

Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{4,5,6,7\}$. E os conjuntos, a seguir, de pares ordenados:

- $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$; é uma relação sobre “A”. Note que é a relação de igualdade em “A”;
- $S = \{(1,2), (3,2)\}$; é uma relação sobre “A”. Note que não houve a ocorrência do elemento 4;
- $T = \{(1,4), (1,5), (4,7)\}$; “T” é uma relação de “A” para “B”. Note que não houve a ocorrência dos elementos 2 e 3 de “A” e do elemento 6 de “B”;
- $U = \{(4,4), (5,2), (6,2), (7,3)\}$; “U” é uma relação de “B” para “A”;
- $V = \{(1,7), (7,1)\}$; “V” é uma relação, mas não é relação de “A” para “B”, nem de “B” para “A”.

Relação inversa

- Seja “R” uma relação, “A” inversa de “R”, denotada por R^{-1}, é a relação formada invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados.

Matematicamente:

- $R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R \}$;
- Se “R” é uma relação sobre “A”, R^{-1} também o é. Se “R” é uma relação de “A” para “B”; então: R^{-1} é uma relação de “B” para “A”.

Relação inversa

- Seja a relação $R = \{(1,6), (2,5), (3,4), (7,8)\}$, determine R^{-1}.

Basta inverter os pares ordenados, assim:

- $R^{-1} = \{(6,1), (5,2), (4,3), (8,7)\}$.

Propriedades das relações

Seja “R” uma relação definida em um conjunto “A”:

- Se, para todo $x \in A$, temos xRx; então, “R” é reflexiva;
- Se, para todo $x \in A$, temos $x \not R x$; então, “R” é antirreflexiva;
- Se, para todo $x, y \in A$, temos $xRy \Rightarrow yRx$; então, “R” é simétrica;
- Se, para todo $x, y \in A$, temos $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$; então, “R” é antissimétrica;
- Se, para todo $x, z \in A$, temos $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$; então, “R” é transitiva.

Relação de equivalência

- Todas as relações que são reflexivas, simétricas e transitivas recebem o nome de relação de equivalência.
- Exemplo: consideremos que a relação “tem o mesmo tamanho que sobre os conjuntos finitos”. Para os conjuntos finitos de inteiros A e B, ARB, se, e somente se, $|A| = |B|$. Tomando os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6\}$, temos que $A \neq B$, mas $|A| = |B|$.
- “R” é reflexiva, pois para todo $x \in A$, temos xRx.
- É simétrica, pois para todo $x, y \in A$, temos $xRy \Rightarrow yRx$.
- É transitiva, pois, para todo $x, z \in A$, temos $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$; então, “R” é transitiva.

Congruência Módulo *n* – Relação de equivalência

- Seja *n* um inteiro positivo. Dizemos que os inteiros *x* e *y* são congruentes módulo *n* e denotamos por $x \equiv y \pmod{n}$, se, e somente se, *x* e *y* diferem por um múltiplo de *n*.

Exemplo: analise a relação de congruência módulo 5 para os números a seguir:

- $3 \equiv 13 \pmod{5}$, porque $3 - 13 = -10$ é múltiplo de 5;
- $4 \equiv 4 \pmod{5}$, porque $4 - 4 = 0$ é múltiplo de 5;
- $16 \not\equiv 3 \pmod{5}$, porque $16 - 3 = 13$ não é múltiplo de 5.

Classe de equivalência

Seja “R” uma relação de equivalência em um conjunto “A” e seja $a \in A$. A classe de equivalência de a, denotada por [a], é o conjunto de todos os elementos de “A” relacionados com a pela “R”; assim:

- $[a] = \{ x \in A \,/\, xRa \}$.

Classe de equivalência

- Exemplo: determine a classe de equivalência em $\mathbb{Z}$ sobre a relação de congruência módulo 3, $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / a \equiv b \pmod 3\}$.

Resolução:

- Tomamos um o subconjunto finito qualquer de $\mathbb{Z}$, {1,6,8,10};
- A classe de equivalência de 1 é {..., -5, -2, 1, 4, 7, ...};
- A classe de equivalência de 6 é {..., -6, -3, 0, 3, 6, ...};
- A classe de equivalência de 8 é {..., -4, -1, 2, 11, 14, ...};
- A classe de equivalência de 10 é {..., -5, -2, 1, 4, 7, ...};
  - Note que só teremos três classes de equivalência distintas; aquelas formadas pelos inteiros cujo valor do resto da divisão por 3 for 0, 1 e 2.

Interatividade

Seja $E = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -5 \leq x \leq 5\}$ e considere a relação $R = \{(x,y) \in ExE/\ x^2 + 2x = y^2+2x\}$. Assinale a alternativa que contenha a classe de equivalência do inteiro 2:

a) $[2] = \{-4, 3\}$.
b) $[2] = \{-4, 2\}$.
c) $[2] = \{-2, 4\}$.
d) $[2] = \{-3, 4\}$.
e) $[2] = \{2, 3\}$.

Resposta

Seja $E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leq x \leq 5\}$ e considere a relação $R = \{(x,y) \in ExE / x^2 + 2x = y^2+2x\}$. Assinale a alternativa que contenha a classe de equivalência do inteiro 2:

a) $[2] = \{-4, 3\}$.
b) $[2] = \{-4, 2\}$.
c) $[2] = \{-2, 4\}$.
d) $[2] = \{-3, 4\}$.
e) $[2] = \{2, 3\}$.

Recursão

- Imagine a realização de uma sequência de procedimentos (algoritmo). Se, em cada procedimento, a partir do segundo, for necessário a repetição do procedimento anterior, estamos tratando de recursão. Um procedimento que se utiliza da recursão é dito recursivo.
- O conceito é usado na definição de sequências, funções, conjuntos e na implementação de algoritmos.

Função recursiva

- São funções que utilizam processos recursivos. Uma função é dita recursiva quando, dentro dela, é feita uma ou mais chamadas a ela mesma. Assim, a função recursiva é uma função que é definida em termos de si mesma.

Exemplo: uma função é definida para qualquer número natural da seguinte forma:

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ se } x=0 - 1^{\text{a}} \text{ condição} \\ x \cdot f(x-1), \text{ se } x>0 - 2^{\text{a}} \text{ condição} \end{cases}$$

Determine, para esta função, a imagem para x = 0; x = 1; x = 2; x = 3; x = 4 e x = 5. Qual propriedade matemática esta função representa?

Função recursiva

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ se } x=0 - 1^{a} \text{ condição} \\ x \cdot f(x-1), \text{ se } x>0 - 2^{a} \text{ condição} \end{cases}$$

- Para x = 0; então, f(0) = 1.
- Para x = 1; então, f(1) = 1· f(1 – 1) = 1·f(0) = 1·1 = 1.
- Para x = 2; então, f(2) = 2· f(2 – 1) = 2·f(1) = 2·1 = 2.
- Para x = 3; então, f(3) = 3· f(3 – 1) = 3·f(2) = 3·2 = 6.
- Para x = 4; então, f(4) = 4· f(4 – 1) = 4·f(3) = 4·6 = 24.
- Para x = 5; então, f(5) = 5· f(5 – 1) = 5·f(4) = 5·24 = 120.

Sequência recursiva

- Uma sequência é recursiva quando seus termos podem ser calculados em função dos termos antecessores, ou seja, quando o termo seguinte depende do termo anterior.
- Exemplo: a Sequência de Fibonacci tem origem no seguinte problema: em um pátio fechado, coloca-se um casal de coelhos. Supondo que, em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, e que os coelhos não morrem ao fim de 6 meses, quantos casais de coelhos estão no pátio? Escreva o termo geral da Sequência de Fibonacci na forma recursiva.

Sequência recursiva

Chamando os termos da sequência da a_1; a_2; a_3 . . . temos:

- $a_1 = 1$;
- $a_2 = 1$;
- $a_3 = 2$; o casal inicial deu origem ao novo casal;
- $a_4 = 3$; o casal inicial deu origem a 1 novo casal;
- $a_5 = 5$; o casal nascido em a_3 começa a reproduzir;
- $a_6 = 8$; os casais nascidos em a_4 começam a reproduzir.

No final de seis meses, teremos 8 casais e que cada termo, a partir do 2º, é a soma de dois anteriores:

Sequência recursiva

- $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 + a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, ..., $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \\ 1, \text{ se } n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

Partições de um conjunto

Seja “A” um conjunto não vazio, define-se como partição de “A”, e representa-se por part(A), qualquer subconjunto do conjunto das partes de “A”, que satisfaz, simultaneamente, às seguintes condições:

I. Nenhum dos elementos de part(A) é o conjunto vazio;
II. A interseção de quaisquer dois elementos de part(A) é o conjunto vazio;
III. A união de todos os elementos de part(A) é igual ao conjunto “A”.

Partições de um conjunto

- Exemplo: considere o conjunto A = {{1; 2}; {4; 6}; {3; 5}}. Este conjunto pode ser considerado partições de um conjunto “B”? Justifique.

Resolução:

Sim, pois foram satisfeitas as 3 condições de partição de um conjunto que são:

I. Nenhum dos elementos de “A” é o conjunto vazio;

II. A interseção de quaisquer dois elementos de “A” é o conjunto vazio;

III. A união de todos os elementos de partição é o conjunto B = {1; 2; 3; 4; 5}.

Conjuntos recursivos

- Um conjunto é recursivo quando um elemento depende de um ou de mais elementos anteriores.

Um conjunto “S” é definido recursivamente por:

Determine os seus elementos:

$$S = \begin{cases} \{x/\ x \in S\} \\ 2 \in S \\ \text{Se } x \in S\text{, então } x + 7 \in S \end{cases}$$

- 1º elemento de “S” é 2;
- 2º elemento é 2 + 7 = 9;
- 3º elemento é 9 + 7 = 16;
- Aplicando o mesmo raciocínio, obtemos os demais elementos;
- Assim: S = {2, 9, 16, ...}.

Interatividade

Definimos recursivamente a seguinte função: $\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + n2, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$

Então, o valor de F(4) é:

a) 15.
b) 30.
c) 48.
d) 127.
e) 144.

Resposta

Definimos recursivamente a seguinte função: $\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + n2, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$

Então, o valor de F(4) é:

a) 15.
b) 30.
c) 48.
d) 127.
e) 144.

Primeiro Princípio da Indução

Antes de definimos o 1º Princípio da Indução, que tem como principal causa o Princípio da Boa Ordem, que é enunciado da seguinte maneira:

- Todo conjunto não vazio de inteiros positivos contém um elemento mínimo.

Dessa forma, estabelecemos o 1º Princípio da Indução:

Sendo “P” uma propriedade, *k* e *n* inteiros positivos, temos:

I. P(1) é verdade;

II. Para qualquer *k*, se P(k) é verdade; logo, P(k + 1) é verdade;

- Então, P(n) é verdade para todo inteiro positivo *n*.

Primeiro Princípio da Indução

Provar usando o Primeiro Princípio da Indução Matemática que:

- 1 + 3 + 5 + 7 + ... (2n – 1) = n2;
- O primeiro passo é provar a veracidade do item I. P(1).

O número 1 é base da indução. Substituindo n = 1, temos:

- P(1): $1 = 1^2$ é verdadeiro.

Primeiro Princípio da Indução

- Agora, vamos para o item II. Para ∀k, se P(k) é verdade; então, P(k + 1) é verdade.
- P(k): 1 + 3 + 5 + 7 + ... (2k – 1) = k^2.
- P(k + 1): 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k – 1) + [2(k + 1) – 1] = $(k + 1)^2$. Temos que provar que esta expressão é verdadeira.
- $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1)}_{k^2} + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$.
- $k^2 + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$.
- $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ é verdadeiro; então, P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + ... (2n – 1) = n^2 é verdade.

Primeiro Princípio da Indução

- Provar usando o Primeiro Princípio da Indução Matemática, que n2 > n + 1 para n ≥2.
- Neste caso, o valor de partida é 2, pois a expressão é válida para n ≥2; então, devemos provar que P(2) é verdade. O valor 2 é a base da indução.
- P(2): $2^2 > 2 + 1$ é verdadeiro.
- Para ∀k, se P(k) é verdade; então, P(k + 1) é verdade.
- P(k): $k^2 > k + 1$.
- P(k + 1): $(k + 1)^2 = (k +1) +1$(temos que provar que esta expressão é verdadeira).
- $k(k + 2) + 1 > k + 2$ é verdadeiro; então: P(n): $n^2 > n + 1$ para $n \geq 2$ é verdade.

Segundo Princípio da Indução

Sendo "P" uma propriedade, *k*, *r*, e *n* inteiros positivos, o Segundo Princípio da Indução Matemática afirma:

- P(1) é verdade;
- Para qualquer *k*, se P(r) é verdade, para $1 \leq r \leq k$; logo, P(k + 1) é verdade. Então, P(n) é verdade para todo inteiro positivo *n*.

Segundo Princípio da Indução

- Provar pelo Segundo Princípio da Indução Matemática que, para qualquer valor igual ou superior a 8, este pode ser escrito na forma de soma cuja parcelas sejam 3 e 5.
- 8 é base da indução. Base da indução: $P(8) = 3 + 5$ (verdade). Pelo Primeiro Princípio, o próximo *k* seria, necessariamente, $8 + 3 = 11$, ou seja, $P(k+1) = 11$ e não se conseguiria provar para $P(9)$ e $P(10)$.
- A hipótese de indução agora é que, para qualquer *r*, $8 \leq r \leq k$, $P(r)$ é verdadeira; isto é, $P(r)$ é a sentença que resulta da soma de valores iguais a 3 e/ou 5. Queremos provar também que $k+1$ também pode ser representado por somas de parcelas 3 e 5.

Segundo Princípio da Indução

- Temos que $k + 1 \geq 11$, pois já vimos $P(r)$ para 8, 9 e 10.
- Como $(k + 1) – 3 \geq 11 – 3$ (para usarmos a hipótese).
- Então: $(k - 2) \geq 8$.
- Pela hipótese, para qualquer r, $8 \leq r \leq k$, $P(r)$ é verdadeira. Daí $P(k - 2)$ é verdadeira, ou seja, pode ser escrita como uma soma de valores iguais a 3 e/ou 5.
- É rápida a verificação, pois: $(k-2) + 3 = k+1$ (o elemento seguinte a k).

Interatividade

Usando o Primeiro Princípio da Indução, podemos provar que, para todo número natural *n* maior ou igual a 1, vale a igualdade 1 + 2 + 3 + 4 +.......... + n = n.(n+1) / 2. Se tomarmos como a hipótese da indução a expressão 1 + 2 + 3 + 4 +...... + k = k.(k+1) / 2, o próximo passo será provar à seguinte tese:

a) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (2k+1) = (2k+1).(2k+2) / 2.

b) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k+1) = (k+1).(k+2) / 2.

c) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + 2(k+1) = (k+1).(k+2) / 2.

d) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k+1) = [k.(k+1) / 2] + 1.

e) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + 2(k+1) = [k.(k+1) + 1] / 2.

Resposta

Usando o Primeiro Princípio da Indução, podemos provar que, para todo número natural *n* maior ou igual a 1, vale a igualdade 1 + 2 + 3 + 4 +.......... + n = n.(n+1) / 2. Se tomarmos como a hipótese da indução a expressão 1 + 2 + 3 + 4 +...... + k = k.(k+1) / 2, o próximo passo será provar à seguinte tese:

a) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (2k+1) = (2k+1).(2k+2) / 2.
b) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k+1) = (k+1).(k+2) / 2.
c) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + 2(k+1) = (k+1).(k+2) / 2.
d) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k+1) = [k.(k+1) / 2] + 1.
e) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + 2(k+1) = [k.(k+1) + 1] / 2.

ATÉ A PRÓXIMA!