



Interativa

Lógica Matemática

Autores: Prof. Angel Antonio Gonzales Martinez
Prof. Ákio Nogueira Barbosa
Colaboradores: Profa. Márcia Vieira
Profa. Mirtes Mariano
Prof. Daniel Scodeler Raimundo

Professores conteudistas:
Angel Antonio Gonzalez Martinez e Ákio Nogueira Barbosa

Angel Antonio Gonzalez Martinez

Doutorando pela Escola de Engenharia Mackenzie em telecomunicações. Mestre em engenharia elétrica pelo Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP. Graduado em engenharia elétrica modalidade eletrônica pela Escola de Engenharia Mackenzie. Atua como professor dos cursos de Tecnologia em Automação Industrial pela UNIP. Atuou como professor nos cursos tecnológicos de Automação e Robótica pela Unip. Atuou nos cursos tecnológicos de Redes de Computadores, Análise de sistemas, Gestão de TI pela Unip. Ex-coordenador dos cursos de Análise de sistemas, Redes de computadores, Automação Industrial. Atua há vários anos como consultor de TI para diversas empresas do segmento de TI.

Ákio Nogueira Barbosa

Doutorando no Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Mestre em engenharia elétrica pelo Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP (2006). Possui especialização em engenharia de segurança do trabalho pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP/PECE (2002) e graduação em engenharia elétrica (modalidade eletrônica) pela Faculdade de Engenharia São Paulo - FESP (1999). Exerce suas atividades profissionais na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo desde 1988, onde a partir de 2001 assumiu o cargo de especialista em laboratório. Atualmente desempenha suas funções no Laboratório de Arquitetura e Redes de Computadores (Larc) do Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais (PCS) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, atuando nas seguintes áreas: segurança de redes de computadores, gerenciamento e qualidade de serviço em redes computacionais e apoio em laboratórios didáticos. É professor no curso de Gestão e Gerenciamento de Redes da Universidade Paulista - UNIP, membro do Comitê Brasileiro da Comissão de Estudos de Tecnologia da Informação (técnicas de segurança e perícia em informática) da Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT, membro consultor da Comissão de Responsabilidade Social da Ordem dos Advogados do Brasil (OAB-SP) e perito judicial na área de informática. É membro fundador e vice-presidente da Associação Brasileira de Perícias de Informática e Telecomunicações - SBPIT.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M385	Martinez, Angel Antonio Gonzales
	Lógica Matemática. / Angel Antonio Gonzales Martinez; Ákio Nogueira Barbosa - São Paulo: Editora Sol, 2020.
	132 p., il.
	Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.
	1.Proposições 2.Argumentação 3.Predicados I.Título
	CDU 161/162

U507.36 - 20

Prof. Dr. João Carlos Di Genio
Reitor

Prof. Fábio Romeu de Carvalho
Vice-Reitor de Planejamento, Administração e Finanças

Profa. Melânia Dalla Torre
Vice-Reitora de Unidades Universitárias

Prof. Dr. Yugo Okida
Vice-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Profa. Dra. Marília Ancona-Lopez
Vice-Reitora de Graduação

Unip Interativa – EaD

Profa. Elisabete Brihy
Prof. Marcello Vannini
Prof. Dr. Luiz Felipe Scabar
Prof. Ivan Daliberto Frugoli

Material Didático – EaD

Comissão editorial:

Dra. Angélica L. Carlini (UNIP)
Dr. Ivan Dias da Motta (CESUMAR)
Dra. Kátia Mosorov Alonso (UFMT)

Apoio:

Profa. Cláudia Regina Baptista – EaD
Profa. Betisa Malaman – Comissão de Qualificação e Avaliação de Cursos

Projeto gráfico:

Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:

Leandro Freitas

Sumário

Lógica Matemática

APRESENTAÇÃO	9
INTRODUÇÃO	9

Unidade I

1 FUNDAMENTOS SOBRE PROPOSIÇÕES	13
1.1 Proposições e conectivos	13
1.1.1 Conceito de proposição	13
1.1.2 Valores lógicos das proposições	15
1.1.3 Proposições simples e proposições compostas	15
1.1.4 Conectivos	17
1.1.5 Tabela-verdade	17
1.1.6 Notação	18
1.2 Operações lógicas sobre proposições	20
1.2.1 Negação (\sim)	20
1.2.2 Conjunção (\wedge)	22
1.2.3 Disjunção inclusiva ou soma lógica (\vee)	23
1.2.4 Disjunção exclusiva (\veebar)	25
1.2.5 Condicional (\rightarrow)	27
1.2.6 Bicondicional (\leftrightarrow)	29
2 TRABALHANDO COM AS PROPOSIÇÕES	31
2.1 Construção da tabela-verdade	31
2.2 Tautologia, contradição e contingência	39
3 OPERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE PROPOSIÇÕES	46
3.1 Implicação lógica	46
3.1.1 Definição	46
3.1.2 Propriedades da implicação lógica	46
3.1.3 Tautologias e implicação lógica	48
3.2 Equivalência lógica	49
3.2.1 Definição	49
3.2.2 Propriedades da equivalência lógica	50
3.2.3 Tautologias e equivalência lógica	51
3.2.4 Proposições associadas a uma condicional	52
3.3 Negação conjunta de duas proposições	54
3.4 Negação disjunta de duas proposições	54
4 PROPRIEDADES DAS PROPOSIÇÕES E FUNDAMENTOS DA DEDUÇÃO	55
4.1 Propriedades das principais proposições	55
4.1.1 Propriedades da conjunção	55

4.1.2 Propriedades da disjunção.....	57
4.1.3 Propriedades da conjunção e da disjunção	58
4.1.4 Negação da condicional.....	60
4.1.5 Negação da bicondicional.....	61
4.2 Método dedutivo.....	61
4.3 Redução do número de conectivos	64
4.4 Forma normal das proposições.....	64
4.5 Princípio de dualidade.....	65
Unidade II	
5 PRINCÍPIOS DA ARGUMENTAÇÃO.....	69
5.1 Argumentos.....	69
5.1.1 Introdução	69
5.1.2 Definição simbólica de argumento.....	70
5.2 Validade de um argumento.....	71
5.2.1 Critério de validade de um argumento.....	73
5.2.2 Lista de argumentos válidos fundamentais e/ou regras de inferência.....	73
5.2.3 Exemplos do uso das regras de inferência	75
6 TÉCNICAS PARA VALIDAÇÃO DE ARGUMENTOS	78
6.1 Validação através de tabelas-verdade	78
6.2 Validade mediante regras de inferência	88
7 EMBASAMENTO PARA A LÓGICA DOS PREDICADOS.....	93
7.1 Sentenças abertas.....	93
7.2 Revisão de teoria dos conjuntos.....	93
7.3 Sentença aberta.....	98
7.3.1 Conjunto-verdade de uma sentença aberta com uma variável.....	98
7.3.2 Sentenças abertas com duas variáveis	100
7.3.3 Conjunto-verdade de uma sentença aberta com duas variáveis.....	100
7.3.4 Sentenças abertas com n variáveis	101
7.3.5 Conjunto-verdade de uma sentença aberta com n variáveis	102
7.4 Operações lógicas sobre as sentenças abertas.....	102
7.4.1 Negação.....	102
7.4.2 Conjunção.....	104
7.4.3 Disjunção.....	105
7.4.4 Condicional	107
7.4.5 Bicondicional	108
7.4.6 Propriedades das sentenças abertas.....	109
7.5 Quantificadores.....	109
7.5.1 Quantificador universal.....	109
7.5.2 Quantificador existencial.....	110
7.5.3 Quantificador da unicidade.....	111
7.5.4 Negação de um quantificador.....	112
7.5.5 Quantificação com várias variáveis.....	112
7.5.6 Quantificação parcial	113
7.5.7 Quantificação múltipla.....	113

8 NOÇÕES SOBRE SILOGISMOS CATEGÓRICOS	113
8.1 Proposições categóricas	113
8.2 Proposições contraditórias	117
8.3 Silogismos categóricos.....	119

APRESENTAÇÃO

Caro aluno, esta apostila é uma breve introdução à lógica. Logo, nela, serão examinados os principais temas introdutórios ao assunto. Usou-se da matemática elementar como um apoio à explanação dos temas de interesse pelo fato de ela ser comum a todos aqueles que já concluíram os estudos básicos.

A lógica é muito importante e aplicada em diversos ramos do conhecimento, pois se trata de uma forma de entender o raciocínio humano. Nas ciências exatas, a lógica encontrou maior alcance principalmente nos temas relacionados à computação. Todo o desenvolvimento de *software* é baseado em lógica, assim como o roteamento de dados na internet, que usa livremente os conceitos de lógica.

Não está nos objetivos do livro o estudo da lógica do ponto de vista filosófico, ou de argumentação lógica, mas a apresentação dos principais fundamentos da lógica clássica necessários aos estudantes das áreas de exatas e humanas.

A lógica é um tema bastante abrangente e este livro-texto pretende servir como um primeiro degrau para aqueles que desejam se aprofundar no assunto.

A distribuição dos temas objetivou ser a mais direta possível. Por isso, optou-se pela introdução dos conceitos de proposição, seguidos pelos de conectivos, que possibilitam criar proposições mais complexas. A seguir, explicam-se as tabelas-verdade, pois é o método mais simples de se verificar a veracidade de uma proposição. São também estudados os métodos dedutivos¹ (por serem estes os utilizados na lógica matemática), que fortalecem a capacidade de abstração e nos dão maior poder para resolver problemas mais complexos. A argumentação é discutida a seguir, sendo examinados os conceitos básicos e algumas ferramentas de validação dos argumentos, as tabelas-verdade e as regras de inferência.

Finaliza-se com um breve embasamento dos subsídios à lógica de predicados, fundamentam-se os conceitos de sentenças abertas, quantificadores e, por fim, o silogismo categórico.

Bons estudos!

INTRODUÇÃO

Fundamento geral

Embora a lógica seja de um modo mais amplo, concebida como um ramo da filosofia, suas aplicações vão muito além dos limites de qualquer disciplina isoladamente considerada. Apenas a título de exemplificação, áreas de estudo da lógica se estendem à matemática, línguas, história, direito, estatística, ciências relacionadas com a computação e tecnologias em um aspecto mais abrangente, cada uma com o respectivo foco de interesse.

¹Na sua vestimenta contemporânea, a lógica é vista como sistema formal dedutivo, edificado sobre linguagem formal, a qual teria a incumbência de eliminar dubiedades interpretativas (N. do R.T.).

Assim, os padrões de crítica da Lógica são aplicáveis a qualquer área do conhecimento em que a inferência² e o argumento³ sejam empregados – a qualquer domínio no qual as conclusões devam presumivelmente apoiar-se em provas. Isto inclui todas as áreas que exijam um sério esforço intelectual, bem como os casos práticos da vida cotidiana.

Conceito de lógica

A lógica⁴, ciência do raciocínio dedutivo, estuda a relação de consequência dedutiva, tratando entre outras coisas das inferências⁵ válidas; ou seja, das inferências cujas conclusões têm que ser verdadeiras quando as premissas⁶ o são. A lógica pode, portanto, ser considerada como "o estudo da razão" ou "o estudo do raciocínio".

O objetivo da lógica consiste, então, na menção e estudo dos princípios lógicos usados no raciocínio dedutivo. Sob essa concepção, temos a lógica dedutiva.

Podemos, entretanto, considerar outra lógica, a lógica indutiva, que se ocupa não das inferências válidas, mas das inferências verossímeis.

A lógica, particularmente sob a acepção dedutiva, constitui a ciência subjacente às investigações no domínio do puramente racional, tratando de argumentos e inferências.

A lógica contemporânea tem se convertido em disciplina matemática, a lógica matemática, com características próprias, dedutiva; é o estudo do tipo de raciocínio feito pelos matemáticos, porém aplicáveis à grande área da Computação.

Breve histórico

O marco histórico do desenvolvimento da lógica inicia-se propriamente, no século IV a.C. com Aristóteles⁷ (384-322 a.C.). A maior parte da contribuição relevante de Aristóteles, para a lógica, encontra-se no grupo de trabalhos conhecidos como *Organon*, mais especificamente nos *Analytica priora* e no *De interpretatione*.

Para os antigos filósofos gregos, lógica era uma ciência do discurso racional. Eles passaram então a usar em suas discussões proposições declarativas enunciadas na forma afirmativa e negativa, atribuindo valores

² Operação intelectual que consiste em estabelecer uma conclusão a partir das premissas de que se parte.

³ Raciocínio que se pretende baseado em fatos e em relações lógicas a partir deles usar para se chegar a uma conclusão.

⁴ Forma de raciocinar coerente, em que se estabelecem relações de causa e efeito; a coerência desse raciocínio.

⁵ Operação intelectual que consiste em estabelecer uma conclusão a partir das premissas de que se parte.

⁶ Ideia ou fato inicial de que se parte para formar um raciocínio. Cada uma das duas proposições de um silogismo (a maior e a menor), das quais se infere ou se tira a consequência.

⁷ Aristóteles, filósofo grego, que viveu no século IV a.C. é considerado o pai ou o criador da lógica. O nome "lógica" veio posterior a Aristóteles. A palavra "logos" do grego significa "palavra", "expressão", "pensamento", "conceito", "discurso", "razão", que para Aristóteles estas são características que diferencia os homens dos outros animais.

verdadeiros e falsos. Isso proporcionou significativa simplificação de grande valia em toda a matemática. Por volta de 1666, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usou em vários trabalhos algumas ideias as quais denominou de *Calculus ratiotinator*, ou *Logica mathematica* ou *Logistica*. Embora estas ideias nunca tenham sido teorizadas por Leibniz, seus trabalhos já traziam a ideia da lógica matemática.

Já no século XVIII, Leonard Euler (1707-1783) introduziu a representação gráfica das relações entre sentenças ou proposições, pesquisadas e ampliadas por John Venn (1834-1923), Edward W. Veitch em 1952 e Maurice Karnaugh em 1953.

Em 1847, Augustus DeMorgan (1806-1871) publicou o tratado *Formal logic*. Em 1848, George Boole (1815-1864) escreveu o artigo *The mathematical analysis of logic*, e mais tarde, em 1854, publica um livro sobre Álgebra de Boole⁸, chamado *An investigation of laws of thought* (Uma investigação das leis do pensamento) e posteriormente, em 1859, escreveu *Treatise on differential equations* (Tratado em equações diferenciais) no qual discutiu um método simbólico geral.

O trabalho de George Boole foi estudado e ampliando por Lewis Carrol em 1896, Alfred North Whitehead em 1898, Edward V. Huntington (1904 e 1933) entre outros. Todo estes períodos de estudos e desenvolvimento da lógica proporcionaram a Alfred North Whitehead (1861-1947) e Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) publicar a obra *Principia mathematica*, que representou importante complemento aos estudos de Leibniz, sempre buscando mostrar uma base lógica para toda a matemática.

Embora existisse há mais de cem anos, a Álgebra de Boole não teve qualquer utilização prática até 1937, quando Akira Nakashima utilizou pela primeira vez na análise de circuito de relés, tentando aplicar seus próprios conceitos.

Em 1938 Claude E. Shannon mostrou, em sua dissertação de mestrado no Departamento de Engenharia Elétrica do MIT (Massachusetts Institute of Technology – Instituto Tecnológico de Massachusetts), a aplicação da Álgebra de Boole na análise de circuitos de relés, o que serviu de base para o desenvolvimento da teoria dos interruptores (DAGHLIAN, 1936), (D'OTTAVIANO, Í. M. L., FEITOSA, H. A., 2003).

Os tópicos elementares da lógica matemática compilados neste material são de extrema relevância para todo e qualquer estudante de cursos relacionados à grande área das ciências da computação, visto consiste no embasamento teórico para o entendimento dos outros importantes conceitos utilizados na Computação (processamento automático de dados), em diversas disciplinas que serão estudadas paralelamente à disciplina de lógica matemática ou futuramente, tais como: sistemas de informação, automação, linguagens de programação, organização e arquitetura de computadores, sistemas operacionais, redes de computadores, inteligência artificial, robótica, algoritmos etc.

⁸ Os circuitos digitais de computadores e outros sistemas digitais são projetados e têm seu comportamento analisado, em termos de uma teoria matemática conhecida como Álgebra de Boole. A álgebra booleana faz uso de variáveis e operações lógicas.

Unidade I

Objetivos

Apresentar os conceitos elementares de lógica, operações básicas e a simbologia a ser utilizada juntamente com as respectivas tabelas-verdade. Construir tabelas verdade de proposições compostas, juntando proposições simples através dos conectivos lógicos.

Introdução

Esta unidade é uma introdução à lógica clássica⁹, o que implica que o foco são os aspectos básicos da disciplina, objetivando o aprendizado teórico e, ao final da unidade, exercícios são propostos com o intuito de que o estudante possa fixar os conceitos abordados, alguns com respostas mais imediatas, cujo objetivo consiste em fixar conceitos abordados e outros que exigem um grau de reflexão e raciocínio mais profundo, possibilitando ao estudante a assimilação dos aspectos elementares de maneira robusta e conceitualmente bem fundamentada, preparando-o para enveredar por fronteiras mais distantes da lógica.

Colocaram-se várias definições de dicionário para vocábulos que surgiram no texto, com o intuito motivar o leitor ao hábito de consultar este instrumento tão valioso em qualquer idioma, fortalecendo o entendimento do texto. Verificar-se-á que nem sempre a definição do dicionário tradicional será coincidente no contexto; às vezes, pode levar a uma conceituação inversa da desejada.

1 FUNDAMENTOS SOBRE PROPOSIÇÕES

1.1 Proposições e conectivos

1.1.1 Conceito de proposição



Lembrete

Proposição: 1. Ato ou efeito de propor; proposta 2. Expressão de pensamentos por meio de palavras. 3. Máxima, sentença, asserção.

⁹ A lógica clássica, na sua parte elementar, versa essencialmente sobre os chamados conectivos lógicos de negação, conjunção, disjunção, implicação e bicondicional, sobre os quantificadores existencial e universal e sobre o predicado de igualdade; e sobre algumas de suas extensões, como por exemplo, certos sistemas de teorias de conjuntos e certos cálculos de predicados de ordem superior (N. do R.T.).

Define-se como proposição o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. As proposições transmitem pensamentos, que afirmam fatos ou juízos que formamos a respeito das coisas. Enfim, uma proposição é uma declaração a respeito de algum tema.

A declaração não pode ser ambígua, isto é, ter mais de uma interpretação. Digamos que João diz a Maria: "Eu vi uma foto sua no metrô". Sem dúvida, essa frase é ambígua, pois pode significar mais de um fato: por exemplo, 1) que João estava na estação de metro quando pegou uma foto de Maria para admirá-la, ou 2) que João estava em casa quando olhou para uma foto de Maria em um trem do metrô.

Logo, frases como "João chutou a bola" ou "A bola foi chutada por João" representam a mesma proposição, pois possuem exatamente o mesmo significado. Não importa em si se a proposição é verdadeira ou falsa.

Proposição: é uma sentença declarativa que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa.



Lembrete

Ambiguidade: 1. Dúvida, incerteza 2. Falta de clareza das palavras ou expressões, que pode causar várias interpretações.

Exemplos de proposições:

- a. Madrid é a capital da Espanha.
- b. Aracaju é capital de Sergipe.
- c. $10 > \sqrt{23}$
- d. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
- e. Cristovão Colombo descobriu o Brasil.
- f. Cervantes escreveu os Sertões.
- g. $\frac{12}{5}$ é um número inteiro.
- h. O número 17 é um número igual 29.
- i. $\tan \frac{\pi}{4} = 2$.

A lógica matemática tem como princípios (leis) fundamentais do pensamento os três seguintes axiomas¹⁰.

I. Princípio da identidade: se uma proposição é verdadeira, e ela é verdadeira, isso equivale a dizer que todo objeto é idêntico a si mesmo.

II. Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

III. Princípio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Deste princípio diz-se que a lógica matemática é uma lógica bivalente.

Por exemplo, as proposições (a), (b), (c) e (d) são todas verdadeiras e as demais são falsas.

1.1.2 Valores lógicos das proposições

O valor lógico de uma proposição ou é **verdadeiro** se a proposição é verdadeira, ou é **falso** se a proposição é falsa, abreviadamente pelas letras **V** e **F**, respectivamente.

Exemplo:

a. O chumbo é mais pesado que a água.

b. O sol gira em torno de Marte.

O valor lógico da proposição (a) é verdadeiro (V) e o valor lógico da proposição (b) é falso (F) (ALENCAR FILHO, 2002)

1.1.3 Proposições simples e proposições compostas

As proposições podem ser classificadas em simples ou compostas.

Uma proposição simples é aquela que não pode ser subdividida em outras proposições.

As proposições simples são geralmente designadas pelas letras latinas minúsculas p, q, r, s etc., chamadas de letras proposicionais (ALENCAR FILHO, 2002).

¹⁰ Em seus escritos, Aristóteles caracteriza a lógica como uma ciência do raciocínio, posteriormente entendida como estabelecadora das formas válidas de raciocínio [inferências válidas], a qual repousava sobre estes três princípios fundamentais (N. do R.T.).



Saiba mais

Vale a pena ler o livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan.

O autor (heterônimo do professor Júlio César de Mello e Souza) narra as aventuras e proezas matemáticas do calculista persa Beremiz Samir, na Bagdá do século XIII.

Exemplos:

p: João é careca.

q: Alice é jogadora de futebol.

r: O número 16 é ímpar.

Chama-se de proposição composta aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.

As proposições compostas são habitualmente designadas pelas letras latinas maiúsculas P, Q, R, S etc., também chamadas das letras proposicionais (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplo:

P: João é careca e Alice é estudante.

Q: Alice é bonita ou Viviane é estudante.

R: Se João é careca, então é infeliz.

Observe que cada uma das proposições anteriores é formada por duas proposições simples.

As proposições compostas também costumam ser chamadas de fórmulas proposicionais ou apenas fórmulas. As proposições simples são também chamadas de átomos, pois, assim como o átomo, não é divisível, enquanto a proposição composta é chamada de molécula.

Quando interessa destacar ou explicitar que uma proposição composta P é formada pela combinação das proposições simples P, Q, R etc., escreve-se:

P (P, Q, R etc.). Essas proposições simples serão chamadas de proposições componentes simples quando for o caso.



Observação

As proposições componentes de uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas.

1.1.4 Conectivos

Chamam-se conectivos as palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras (ALENCAR FILHO, 2002).



Lembrete

Conectivo: 1. Que liga ou une 2. Vocábulo que estabelece conexão entre palavras ou partes de uma frase.

Exemplos:

P: O número 10 é par **e** o número 27 é impar.

Q: O quadrilátero ABCD é retângulo **ou** é quadrado.

R: **Não** está quente.

S: **Se** Roberto é físico, **então** sabe matemática.

T: O triângulo ABC é equilátero **se e somente se** é equiângulo.

São conectivos usuais em lógica matemática as palavras que estão grifadas, isto é: "e", "ou", "não", "se... então...", "... se e somente se..."

1.1.5 Tabela-verdade

Segundo o princípio do terceiro excluído, toda a proposição simples p é verdadeira ou falsa, isto é, tem um valor lógico V (verdade) ou o valor lógico F (falso) (ALENCAR FILHO, 2002).

A seguir, tem-se a representação tabular.

p
V
F

Para uma proposição composta, a determinação do seu valor lógico se faz com base no seguinte princípio:

O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado (ALENCAR FILHO, 2002).

Na prática, para a determinação do valor lógico de uma proposição composta, recorre-se quase sempre a um dispositivo denominado **tabela-verdade**, na qual figuram todos os possíveis valores lógicos da proposição composta correspondentes a todas as possíveis combinações de valores lógicos das proposições simples componentes.

Exemplo, no caso de uma proposição composta por duas proposições simples componentes p e q , as únicas possíveis atribuições de valores lógicos para p e q são:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Observe-se que os valores lógicos são V e F, e se alternam de dois em dois para a primeira proposição p e de um em um para a segunda proposição q .

Caso tivéssemos uma proposição composta de três proposições simples componentes p , q e r , as únicas possíveis atribuições de valores lógicos para p , q e r são:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Da mesma forma, os valores lógicos V e F se alternam de quatro em quatro para a primeira proposição em p , de dois em dois para a segunda proposição q , e de um em um para a terceira r (ALENCAR FILHO, 2002).

1.1.6 Notação

O valor lógico de uma proposição simples p indica-se por $V(p)$, isto é, se p é verdadeira, escreve-se $V(p) = V$; se p é falsa (F), escreve-se $V(p) = F$. O mesmo vale para proposições compostas $V(P) = V$, caso P seja verdadeira, ou $V(P) = F$, caso P seja falsa.

Exemplos:

$$V(p) = F, V(q) = F, V(r) = V$$

$$V(P) = V, V(q) = F, V(r) = F$$



Lembrete

Notação: 1. Ato ou efeito de notar 2. Maneira de notar 3. Conjunto de sinais para se fazer representação ou designação.

A trigonometria (*trigono*: triângulo e *metria*: medidas) é o estudo da matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Ao longo do texto usar-se-á alguns exemplos de proposições baseadas em trigonometria, logo, segue-se algo para recordar.

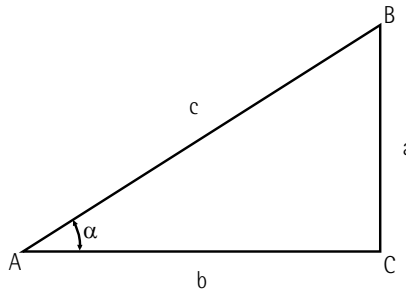


Figura 1

Quadro 1

Algumas relações trigonométricas tiradas do triângulo

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Quadro 2

Valores trigonométricos notáveis							
Radianos	Graus	Seno	Cosseno	Tangente	Cossecante	Secante	Cotangente
0	0	0	1	1	Não existe	1	Não existe
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	Não existe	1	Não existe	1

1.2 Operações lógicas sobre proposições

Ver-se-á neste tópico a criação das fórmulas (ou expressões) lógicas através das operações lógicas realizadas por meio de conectivos. Estas são as operações lógicas fundamentais.

No final da parte teórica sobre cada um dos conectivos, também é apresentado o respectivo diagrama de Venn, com o intuito de mostrar uma representação gráfica, que consiste em uma forma auxiliar para a compreensão do conectivo e operações lógicas.

1.2.1 Negação (\sim)

A negação de uma proposição p é proposição representada por "não p ", cujo valor lógico é verdade (V) quando p é falsa, e falso (F) quando p é verdadeira. Disto tem-se que "não p " têm valor lógico oposto ao de p (ALENCAR FILHO, 2002).

A notação da negação de p indica-se por " $\sim p$ ", que se lê: "não p ".

O valor lógico da negação de uma proposição é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

Quadro 3

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ou seja,

A negação de V é F e a negação de F é V. Em símbolos:

$$\sim V = F, \sim F = V$$

O valor lógico de "não p " é a negação do valor lógico de p . Em símbolos:

$$V(\sim p) = \sim V(p)$$

Exemplos:

(1) p : $3 + 3 = 6$ (V) e $\sim p$: $3 + 3 \neq 6$ (F), que pode ser reescrito por meio da expressão dos valores lógicos como: $V(\sim p) = \sim V(p) = \sim V = F$;

(2) q : $10 < 4$ (F) e $\sim q$: $10 \geq 4$ (V), que pode ser reescrito por meio da expressão dos valores lógicos como: $V(\sim q) = \sim V(q) = \sim F = V$;

(3) r : Brasília é a capital da Argentina (F) e $\sim r$: Brasília não é a capital da Argentina (V), que pode ser rescrito por meio da expressão dos valores lógicos como: $V(\sim r) = \sim V(r) = \sim F = V$.

Na linguagem a negação efetua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio "não" ao verbo da proposição, por exemplo, a negação da proposição (ALENCAR FILHO, 2002).

p : A Ursa Maior é uma estrela.

é

$\sim p$: A Ursa Maior não é uma estrela.

Outra maneira de efetuar a negação consiste em antepor à proposição dada expressões tais como "não é verdade que", "é falso que", por exemplo, a negação da proposição (ALENCAR FILHO, 2002).

q : Jorge é jogador de futebol.

$\sim q$: Não é verdade que Jorge é jogador de futebol.

$\sim q$: É falso que Jorge é jogador de futebol.

Entretanto, a negação de "Todas as mulheres são amáveis" é "Nem todas as mulheres são amáveis", e a de "Nenhuma mulher é amável" é "Alguma mulher é amável".

Avalie as seguintes expressões:

"Esta frase é falsa."

"O atual imperador da França é descendente de Napoleão."

Sobre essas proposições, não faz sentido avaliar sua veracidade ou falsidade, pois no primeiro caso temos um paradoxo, enquanto no segundo não há atualmente imperadores na França. O ramo da lógica que avalia declarações como essas está fora do escopo desta apostila, cujo paradigma é a lógica clássica.



Lembrete

Paradoxo: 1. Opinião contrária à opinião comum 2. Opinião inverossímil ou absurda que se apresenta como verdadeira.

Paradigma: 1. Modelo, padrão 2. Modelo ou tipo de conjugação.

Representação da negação usando o diagrama de Venn

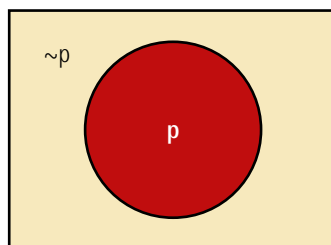


Figura 2

1.2.2 Conjunção (\wedge)

A conjunção de duas proposições p e q é proposição representada por " p e q ", cujo valor lógico é verdadeiro (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras, e falso (F) nos demais casos (ALENCAR FILHO, 2002).

A notação da conjunção de duas proposições p e q indica-se por: " $p \wedge q$ ", que se lê: " p e q ".

O valor lógico da conjugação de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade (ALENCAR FILHO, 2002).

Quadro 4

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ou seja:

$$V \wedge V = V, V \wedge F = F, F \wedge V = F, F \wedge F = F$$

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge (q)$$



Lembrete

Conjunção: 1. União, ajuntamento 2. Palavra ou expressão que liga orações ou frases.

Exemplos:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} p: \text{A clara do ovo é branca (V)} \\ q: 3 < 7 \text{ (V)} \end{array} \right. \\ 1. \hline p \wedge q: \text{A clara do ovo é branca e } 3 < 7 \text{ (V)} \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Enxofre é azul (F)} \\ q: 17 \text{ é um número primo (V)} \end{array} \right. \\ 2. \hline p \wedge q: \text{Enxofre é azul e } 17 \text{ é um número primo (F)} \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = F \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Cantor nasceu na Rússia (V)} \\ q: \text{Fermat era médico (F)} \end{array} \right. \\ 3. \hline p \wedge q: \text{Cantor nasceu na Rússia e Fermat era médico (F)} \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge F = (F) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} p: 3 > 9 \text{ (F)} \\ q: \sin \frac{\pi}{4} = 0 \text{ (F)} \end{array} \right. \\ 4. \hline p \wedge q: 3 > 4 \text{ e } \sin \frac{\pi}{4} = 0 \text{ (F)} \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge F = (F) \end{array}$$

Representação da negação usando o diagrama de Venn

Note que apenas a intersecção entre os conjuntos está destacada.

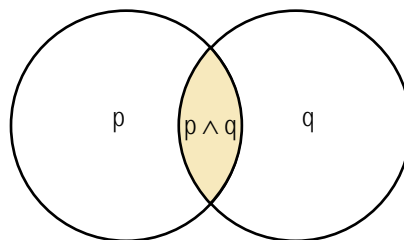


Figura 3

1.2.3 Disjunção inclusiva ou soma lógica (\vee)

A disjunção de duas proposições p e q é proposição representada por " p ou q ", cujo valor lógico é verdadeiro (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira, e falso (F) quando as proposições p e q são ambas falsas (ALENCAR FILHO, 2002).



Lembrete

Disjunção: 1. Separação, desunião, divisão.

Observe que o significado do dicionário é oposto ao da lógica, que significa a união. Não confunda.

A notação da disjunção de duas proposições p e q indica-se por: " $p \vee q$ ", que se lê: " p ou q ".

O valor lógico da disjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade (ALENCAR FILHO, 2002).

Quadro 5

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou seja:

$$V \vee V = V, V \vee F = V, F \vee V = V, F \vee F = F$$

e

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$$

Exemplos (adaptados de Alencar Filho, 2002):

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Madrid é a capital da Espanha (V)} \\ q: 9 - 4 = 5 \text{ (V)} \end{array} \right. \\
 1. \frac{}{p \vee q: \text{Madrid é a capital da Espanha ou } 9 - 4 = 5 \text{ (V)}} \\
 V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Camões escreveu os Lusíadas (V)} \\ q: \pi = 3 \text{ (F)} \end{array} \right. \\
 2. \frac{}{p \vee q: \text{Camões escreveu os Lusíadas ou } \pi = 3 \text{ (V)}} \\
 V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Roma é a capital da Austrália (F)} \\ q: \frac{5}{7} \text{ é uma fração própria (V)} \end{array} \right. \\
 3. \frac{p \vee q: \text{Roma é a capital da Austrália ou } \frac{5}{7} \text{ é uma fração própria (V)}}{V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee V = V}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Pelé nasceu na Bahia (F)} \\ q: \sqrt{-1} = 1 \text{ (F)} \end{array} \right. \\
 4. \frac{p \vee q: \text{Pelé nasceu na Bahia ou } \sqrt{-1} = 1 \text{ (F)}}{V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F}
 \end{array}$$

Representação da negação usando o diagrama de Venn

Note que ambos os conjuntos estão destacados.

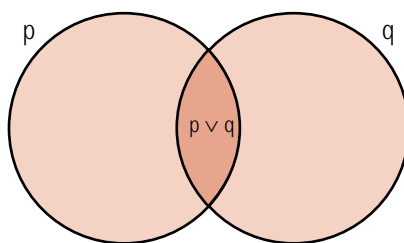


Figura 4

1.2.4 Disjunção exclusiva ($\underline{\vee}$)

A palavra "ou" tem dois sentidos, por exemplo, consideremos as duas seguintes proposições compostas (ALENCAR FILHO, 2002):

P: Marcos é médico ou professor.

Q: Maria é alagoana ou gaúcha.

A proposição P indica que, pelo menos, uma das proposições "Marcos é médico", "Marcos é professor" é verdadeira, podendo ser ambas verdadeiras: "Marcos é médico e professor". Mas, na proposição Q, uma e somente uma das proposições "Maria é alagoana", "Maria é gaúcha" é verdadeira, pois não é possível ocorrer "Maria é alagoana e gaúcha".

Na proposição P, diz-se que "ou" é inclusivo, e na proposição Q, diz-se que "ou" é exclusivo.

Em lógica matemática, usa-se habitualmente o símbolo " \vee " para "ou" inclusivo e o símbolo " $\underline{\vee}$ " para "ou" exclusivo.

Logo, a proposição P é uma disjunção inclusiva ou apenas disjunção das proposições simples "Marcos é médico", "Marcos é professor", isto é:

P: Marcos é médico \vee Marcos é professor.

Ao passo que a proposição Q é uma disjunção exclusiva das proposições simples "Maria é alagoana", "Maria é gaúcha", isto é:

Q: Maria é alagoana $\underline{\vee}$ Maria é gaúcha.

A disjunção exclusiva de duas proposições p e q é proposição representada por " $p \underline{\vee} q$ ", que se lê: "ou p ou q" ou "p ou q", mas não ambos; é verdadeira quando p e q possuem valores lógicos distintos; é falsa (F) quando p e q possuem valores lógicos idênticos, isto é, ou ambos verdadeiros ou ambos falsos.

O valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade (ALENCAR FILHO, 2002):

Quadro 6

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou seja,

$$V \underline{\vee} V = F, V \underline{\vee} F = V, F \underline{\vee} V = V, F \underline{\vee} F = F$$

e

$$V(p \underline{\vee} q) = V(p) \underline{\vee} V(q)$$

Representação da negação usando o diagrama de Venn

Note que ambos os conjuntos estão destacados, menos a intersecção, que é o que denota a exclusividade no caso.

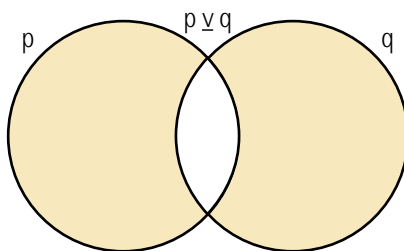


Figura 5

1.2.5 Condicional (\rightarrow)

A proposição condicional ou apenas **condicional** é uma proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é falso (F), no caso em que p é verdadeira e q é falsa e verdadeiro (V) nos demais casos (ALENCAR FILHO, 2002).



Lembrete

Condicional: 1. Dependente de condição; 2. Que envolve condição.

A notação da **condicional** de duas proposições p e q indica-se por " $p \rightarrow q$ ", que se lê também de duas maneiras:

p é condição suficiente para q

q é condição necessária para p

Na condicional " $p \rightarrow q$ ", diz-se que p é o antecedente e q o conseqüente. O símbolo " \rightarrow " é chamado símbolo da implicação.

O valor lógico da condicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(ALENCAR FILHO, 2002)

ou seja,

$$V \rightarrow V = V, V \rightarrow F = F, F \rightarrow V = V, F \rightarrow F = V$$

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$$

Portanto, uma condicional é verdadeira todas as vezes que o seu antecedente for uma proposição falsa.

Observação: em uma condicional, não há a necessidade de que o conseqüente seja uma consequência do antecedente. A condicional ou implicação é apenas uma relação entre duas proposições que não precisam ter relação real entre elas.

Por exemplo:

O Vaticano é um país \rightarrow A TV é nova.

O carro a álcool é mais barato \rightarrow O Amazonas é o maior Estado da federação.

Obviamente, não há relação entre as proposições em cada lado do símbolo de implicação.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Galois morreu em um duelo (V)} \\ q: 3 \text{ é um número real (V)} \end{array} \right. \\
 1. \frac{}{p \rightarrow q: \text{Se Galois morreu em um duelo, então } 3 \text{ é um número real (V)}} \\
 V(p \rightarrow q) = V(q) \rightarrow V \rightarrow V = V
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{O mês de dezembro tem 31 dias (V)} \\ q: \text{Marte é verde (F)} \end{array} \right. \\
 2. \frac{}{p \rightarrow q: \text{Se o mês de dezembro tem 31 dias, Marte é verde (F)}} \\
 V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Cabral escreveu a Odisseia (F)} \\ q: \text{Cantor criou a Teoria dos Conjuntos (V)} \end{array} \right. \\
 3. \frac{}{p \rightarrow q: \text{Se Cabral escreveu a Odisseia, então Cantor criou a teoria dos conjuntos (V)}} \\
 V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Salvador Dali nasceu na Bahia (F)} \\ q: \text{O ano tem seis meses (V)} \end{array} \right. \\
 4. \frac{}{p \rightarrow q: \text{Se Salvador Dali nasceu na Bahia, então o ano tem seis meses (V)}} \\
 V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V
 \end{array}$$

Representação da negação usando o diagrama de Venn

Neste caso, o conjunto relativo à proposição p está contido na proposição q , logo, quando ocorrer p , tem-se sempre q . Evidentemente, presumem-se aqui proposições verdadeiras.

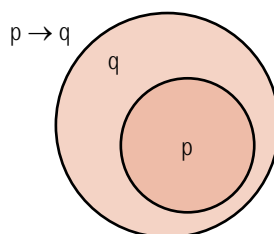


Figura 6

1.2.6 Bicondicional (\leftrightarrow)

A proposição bicondicional ou apenas bicondicional é uma proposição representada por "p se e somente se q", cujo valor lógico é verdadeiro (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e falso (F) nos demais casos.

A notação da bicondicional de duas proposições p e q indica-se por: $p \leftrightarrow q$, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) p é condição necessária e suficiente para q

(ii) q é condição necessária e suficiente para p

O valor lógico da bicondicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade (ALENCAR FILHO, 2002).

Quadro 7

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ou seja,

$$V \leftrightarrow V = V, V \leftrightarrow F = F, F \leftrightarrow V = F, F \leftrightarrow F = V$$

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$$

Portanto, uma bicondicional é verdadeira somente quando também o são as duas condicionais: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

Exemplos adaptados de Alencar Filho (2002):

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Rússia fica na Europa (V)} \\ q: \text{A grama é verde (V)} \end{array} \right. \\
 1. \frac{p \leftrightarrow q: \text{Rússia fica na Europa se e somente se a grama é verde (V)}}{V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Paris é a capital da França (V)} \\ q: \text{tg } \frac{\pi}{4} = 3 \text{ (F)} \end{array} \right. \\ 2. & \frac{p \leftrightarrow q: \text{Paris é a capital da França se e somente se } \text{tg } \frac{\pi}{4} = 3 \text{ (F)}}{V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} p: \text{Einstein descobriu o Brasil (F)} \\ q: \text{Tiradentes foi um mártir (V)} \end{array} \right. \\ 3. & \frac{p \leftrightarrow q: \text{Einstein descobriu o Brasil se e somente se Tiradentes foi um mártir (F)}}{q: V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} p: \text{A terra é quadrada (F)} \\ q: \sqrt{2} \text{ é um número racional (F)} \end{array} \right. \\ 4. & \frac{p \leftrightarrow q: \text{A terra é quadrada se e somente se } \sqrt{2} \text{ é um número racional (F)}}{V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V} \end{aligned}$$

Representação da negação usando o diagrama de Venn

Neste caso, o conjunto relativo à proposição p e proposição q é igual, logo, p está contido em q , e q está contido em p .

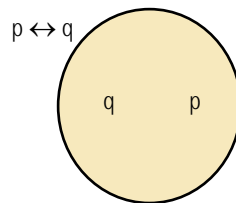


Figura 7

Diagramas de Venn são ilustrações utilizadas principalmente no ramo da matemática conhecido como teoria dos conjuntos. Esses diagramas são usados para mostrar graficamente agrupamento de elementos em conjuntos, representados cada um por um círculo ou uma oval. A posição relativa em termos desses círculos mostra a relação entre os conjuntos. Por exemplo, se os círculos dos conjuntos A e B se sobrepõem, é uma área comum a ambos os conjuntos que contém todos os elementos contidos em A e B . Se o círculo do conjunto A está dentro do círculo de outra B , é que todos os elementos de A também estão contidos em B . E se não houver nenhuma área em comum, é porque não há elementos em comum a A e B .

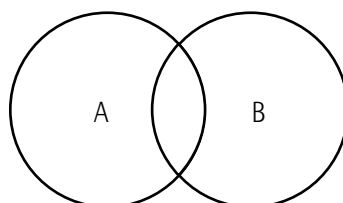


Figura 8

2 TRABALHANDO COM AS PROPOSIÇÕES

2.1 Construção da tabela-verdade

Tabela-verdade de uma proposição composta

Juntando várias proposições simples p , q , r, \dots , através dos conectivos lógicos, geram-se diversas proposições compostas, por exemplo:

$$P(p, q) = \sim p \wedge (p \leftrightarrow q)$$

$$Q(p, q) = (p \rightarrow \sim q) \vee q$$

$$R(p, q, r) = \sim(q \vee (p \leftrightarrow \sim r)) \vee (p \rightarrow \sim q \vee r)$$

Usando as tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais:

$$(a) \sim p, (b) p \wedge q, (c) p \vee q, (d) p \rightarrow q, (e) p \leftrightarrow q$$

é possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta.

A tabela-verdade mostrará exatamente os casos em que a proposição composta é verdadeira (V) ou falsa (F), já que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples componentes (ALENCAR FILHO, 2002).

O número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a formam. Assim, a tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

Construção da tabela-verdade de uma proposição composta

Para se construir uma tabela-verdade de uma proposição composta, podem-se seguir os seguintes procedimentos:

- encontra-se o número de linhas da tabela-verdade, que é igual a 2 elevado ao número de proposições simples componentes (2^n ; n número de proposições simples que formam a proposição composta);
- observa-se a precedência dos conectivos lógicos e subdivide-se a proposição composta em proposições menores, o mais próximo possível das tabelas-verdade das proposições fundamentais;
- colocam-se nas primeiras colunas as letras das proposições simples e criam-se as colunas necessárias em função das subdivisões criadas no item anterior, em que a última coluna é a expressão lógica sendo calculada. Observe-se que, em fórmulas lógicas complexas, podem-se utilizar colunas intermediárias, que são combinações das fórmulas fundamentais, porém mais simples que a sentença-alvo;

- d. preenchem-se as colunas referentes às proposições simples com todos os possíveis valores V e F;
- e. preenchem-se, por fim, as demais colunas com os valores lógicos calculados para cada subdivisão.

Exemplos adaptados de Alencar Filho (2002):

1. Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p,q) = \sim(p \wedge \sim q)$$

Forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q. Em seguida, criam-se colunas para subdivisões observadas em função das fórmulas fundamentais e, na última coluna, a fórmula que é o objetivo do cálculo.

Observando a fórmula, identifica-se primeiramente a negação " $\sim q$ ", depois a conjunção entre p e $\sim q$ e, por último, a sentença-alvo.

Quadro 8

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, os valores lógicos da proposição composta dada correspondente a todas as possíveis atribuições dos valores lógicos V e F às proposições simples componentes p e q (VV, VF, FV e FF) são V, F, V e V, isto é simbolicamente:

$$P(VV) = V, P(VF) = F, P(FV) = V, P(FF) = V$$

Ou seja:

$$P(VV, VF, FV, FF) = VFVV$$

Observe-se que a proposição $P(p,q)$ associa a cada um dos elementos de um conjunto $U = \{VV, VF, FV, FF\}$ um único elemento de um conjunto.

$\{V,F\}$, isto é, $P(p,q)$ é uma função de U em $\{V,F\}$.

$$P(p, q) : U \rightarrow \{V,F\},$$

cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:

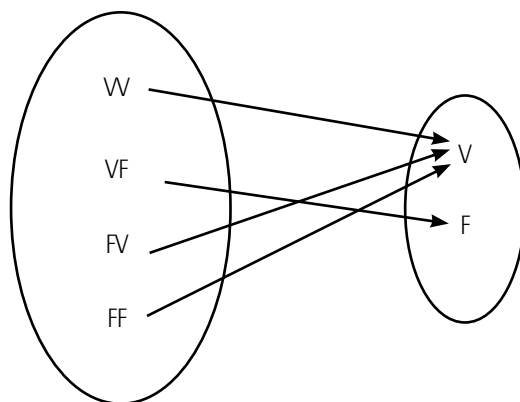


Figura 9



Lembrete

Sagital: 1. Que tem a forma de seta 2. Segundo o plano de simetria: corte sagital.

2. Construir a tabela-verdade da proposição

$$P(p, q) = \sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$$

Procede-se da mesma forma que no exemplo anterior. Nas primeiras colunas reservadas, as proposições simples; depois, criam-se as subdivisões para cada formula fundamental identificada, e a última coluna é a fórmula-alvo.

Quadro 9

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(q \leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

$$P(W) = F, P(VF) = V, P(FV) = V, P(FF) = V$$

Ou seja:

$$P(W, VF, FV, FF) = FVV$$

Observe-se que $P(p, q)$ outra coisa não é que uma função de $U = \{W, VF, FV, FF\}$, cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:

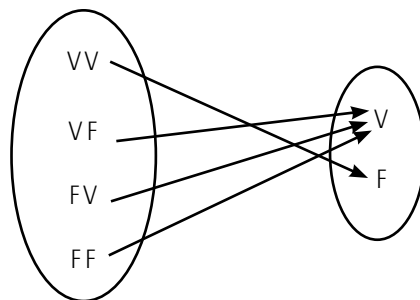


Figura 10

3. Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q, r) = p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$$

Analogamente aos itens anteriores:

Quadro 10

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Portanto:

$$P(VV) = F, P(VF) = V, P(FV) = F, P(VFF) = F$$

$$P(FW) = V, P(FVF) = V, P(FFV) = V, P(FFF) = F$$

Ou seja:

$$P(VV, VF, FV, VFF, FW, FVF, FFV, FFF) = FVFFVWF$$

Observe-se que a proposição $P(p, q, r)$ é uma função de $U = \{VV, VF, FV, VFF, FW, FVF, FFV, FFF\}$ em $\{V, F\}$, cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:

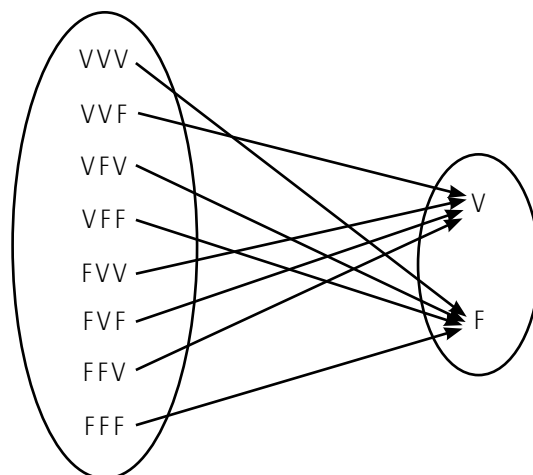


Figura 11

Valor lógico de uma proposição composta

Para toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$, sempre se pode determinar o seu valor lógico (V ou F) quando são dados ou conhecidos os valores lógicos respectivos das proposições simples componentes p, q, r, \dots . Neste caso, isso equivaleria a uma linha da tabela-verdade.

Exemplos:

1) (Alencar Filho, 2002 – adaptado) Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente V e F, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Resolução – Inicialmente, substituímos as proposições simples componentes pelos respectivos valores lógicos, e com o auxílio das tabelas-verdade das fórmulas fundamentais, damos início ao cálculo proposicional (ou sentencial):

Quadro 11

V(P)	Passo
$\sim(V \vee F) \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F$	Substituem-se as proposições componentes pelos valores fornecidos.
$\sim V \leftrightarrow F \wedge V$	Faz-se uma primeira simplificação, eliminando-se um nível e invertendo-se os sinais das negações.
$F \leftrightarrow F$	Procede-se a mais uma simplificação.
V	Finalmente, obtém-se o valor lógico da fórmula.

2. (Alencar Filho, 2002 – adaptado) Sejam as proposições $p: e = 3$ e $q: \ln e = 2 = 0$. Determinar o valor lógico (V ou F) da proposição, onde e é o número de Neper.

$$P(p, q) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$$

Resolução – As proposições componentes p e q são ambas falsas, pois são expressões matemáticas falsas, uma vez que o número de Neper é igual a 2,7182818284590452353602874.



Saiba mais

Recomenda-se a leitura da obra *e: A história de um número*, do autor Eli Maor e publicado pela editora Record. Nessa obra, passa-se pela história do cálculo diferencial e integral, motivo de verdadeira batalha intelectual entre Newton e Leibniz.

Portanto, $V(p) = F$ e $V(q) = F$

Logo, $V(P) = (F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F \wedge F) = V \rightarrow V = V$

3. (ALENCAR FILHO, 2002) Sabendo que $V(p) = V$, $V(q) = F$ e $V(r) = F$, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$P(p, q, r) = (q \leftrightarrow (r \rightarrow \sim p)) \vee ((\sim q \rightarrow p) \leftrightarrow r)$$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} V(P) &= (F \leftrightarrow (F \rightarrow \sim V)) \vee ((\sim F \rightarrow V) \leftrightarrow F) = \\ &= (F \leftrightarrow (F \rightarrow F)) \vee ((V \rightarrow V) \leftrightarrow F) = \\ &= (F \leftrightarrow V) \vee (V \leftrightarrow F) = F \vee F = F \end{aligned}$$

4. (ALENCAR FILHO, 2002) Sabendo que $V(r) = V$, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição: $p \rightarrow \sim q \vee r$.

Resolução – Como r é verdadeira (V), a disjunção $\sim q \vee r$ é verdadeira (V). Logo, a condicional dada é verdadeira (V), pois o seu consequente é verdadeiro (V).

5. (ALENCAR FILHO, 2002) Sabendo que $V(q) = V$, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

Resolução – Como q é verdadeira (V), então $\sim q$ é falsa (F). Logo, a condicional $\sim q \rightarrow \sim p$ é verdadeira (V), pois o seu antecedente é falso (F). Por consequência, a condicional dada é verdadeira (V), pois o seu consequente é verdadeiro (V).

6. (ALENCAR FILHO, 2002) Sabendo que as proposições $x = 0$ e $x = y$ são verdadeiras e que a proposição $y = z$ é falsa, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$X \neq 0 \vee x \neq y \rightarrow y \neq z$$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\sim V \vee \sim V \rightarrow \sim F = F \vee F \rightarrow V = F \rightarrow V = V$$

Uso de parênteses



Lembrete

Parêntese: 1. Frase intercalada em um período 2. Cada um dos sinais de pontuação () entre os quais se colocam as palavras de um parêntese. Plural: parênteses. A forma **parêntesis** (singular e plural) também é aceita.

Há necessidade de se usarem parênteses na simbolização das proposições para evitar qualquer tipo de ambiguidade. Assim, por exemplo, da expressão $p \wedge q \vee r$ pode-se obter duas proposições colocando-se os parênteses de forma adequada:

$$(i) (p \wedge q) \vee r$$

e

$$(ii) p \wedge (q \vee r)$$

Elas não têm o mesmo significado, pois em (i) o conectivo principal é " \vee "; na (ii), o conectivo principal é " \wedge ", isto é, (i) é uma disjunção e (ii) é uma conjunção.

Outro exemplo (ALENCAR FILHO, 2002) é a expressão $p \wedge q \rightarrow r \vee s$. Com o uso dos parênteses, obtêm-se as seguintes proposições:

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee s;$$

$$p \wedge ((q \rightarrow r) \vee s);$$

$$(p \wedge (q \rightarrow r)) \vee s;$$

$$p \wedge (q \rightarrow (r \vee s));$$

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s).$$

Desta forma, quaisquer duas delas nunca têm o mesmo significado.

Os parênteses devem evitar a ambiguidade; o excesso deixa a expressão mais difícil de ler, prejudicando a clareza da proposição. Entretanto, quando a ordem de precedência dos conectivos for clara, não haverá a necessidade do uso de parênteses.

Ordem de precedência dos conectivos

Os parênteses, bem como colchetes ou chaves, são considerados caracteres de pontuação para a lógica. Em fórmulas complexas e que apresentem uma grande quantidade de parênteses, pode-se eventualmente eliminar alguns de acordo com a regra de precedência a seguir.

(1) Maior precedência: \sim (mais "fraco")

(2) \wedge

(3) \vee

(4) \rightarrow

(5) Menor precedência: \leftrightarrow (mais "forte")

Optamos por utilizar essa ordem porque, aparentemente, é a mais aceita e por ser a mais próxima da aritmética convencional. Reforça-se que deve estar clara a precedência adotada para evitar sentenças lógicas dúbias.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

a. $\sim p \vee q$

Equivale a $(\sim p) \vee q$, assim, a negação aplica-se à proposição p e, por conseguinte, a proposição $\sim p \vee q$ é entendida como uma conjunção. Diz-se que o conectivo principal é a conjunção para essa sentença, que é o conectivo "mais forte".

b. $\sim p \vee q \rightarrow r \vee s$

Equivale a $((\sim p) \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$, isto é, resolve-se primeiro \wedge e \vee para depois resolver-se \rightarrow . Diz-se que o conectivo principal é a implicação (condicional) para essa sentença, que é o conectivo "mais forte".

c. $p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r$

É uma bicondicional e nunca uma condicional ou conjunção. Para convertê-la numa condicional, há que se usarem parênteses:

$p \rightarrow (q \leftrightarrow s \wedge r)$

e, analogamente, para convertê-la em conjunção:

$(p \rightarrow q \leftrightarrow s) \wedge s$

O consequente da condicional é uma bicondicional. Desejando-se converter esse consequente numa conjunção, escreve-se:

$$p \rightarrow ((q \leftrightarrow s) \wedge r)$$

Também são bicondicionais as três seguintes proposições:

$$p \wedge q \leftrightarrow r \vee s; p \rightarrow q \leftrightarrow r \wedge s; p \vee q \leftrightarrow \sim r \rightarrow s$$

Quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente repetido, suprimem-se os parênteses, fazendo-se a associação a partir da esquerda.

Segundo essas duas convenções, as quatro seguintes proposições:

$$((\sim(\sim(p \wedge q))) \vee (\sim p)) \text{ pode ser escrita } \sim\sim(p \wedge q) \vee \sim p$$

$$((p \vee (\sim q)) \wedge (r \wedge (\sim p))) \text{ pode ser escrita } (p \vee \sim q) \wedge (r \wedge \sim p)$$

$$(((p \vee (\sim q)) \wedge r) \wedge (\sim p)) \text{ pode ser escrita } (p \vee \sim q) \wedge r \wedge \sim p$$

$$((\sim p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim(p \vee r))) \text{ pode ser escrita } \sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim(p \vee r))$$

Atribui-se a John Napier a descoberta do número de Neper. É um número irracional e surge como limite, para valores muito grandes de n , da sucessão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Representa-se por e sendo $e = 2,7182818284590452353602874...$

2.2 Tautologia, contradição e contingência



Lembrete

Tautologia: 1. Vício de linguagem que consiste em dizer as mesmas ideias de formas diferentes.

Tautologia

De acordo com Alencar Filho (2002), tautologia é toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade resulta sempre na letra V (verdade), ou seja, é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ cujo valor lógico é sempre V (verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, \dots

Ainda segundo o autor, as tautologias são também denominadas proposições tautológicas ou proposições logicamente verdadeiras.

É imediato que as proposições $p \rightarrow p$ e $p \leftrightarrow p$ são tautológicas (princípio de identidade para as proposições).

Exemplos:

A proposição " $\sim(p \wedge \sim p)$ " (princípio da não contradição) é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

P	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Portanto, dizer que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro.

A proposição " $p \vee \sim p$ " (princípio do terceiro excluído) é tautológica, como imediatamente se vê pela tabela-verdade:

P	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Portanto, dizer que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.

A proposição " $p \vee \sim(p \wedge q)$ " é tautológica, conforme se vê pela tabela-verdade:

P	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

A proposição " $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ " é tautológica, conforme se mostra a sua tabela-verdade:

P	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$P \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

A proposição $p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$ é tautológica, conforme mostra a tabela-verdade:

p	q	$\sim q$	$q \wedge \sim q$	$p \vee (q \wedge \sim q)$	$p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V

A proposição " $p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$ " é tautológica, conforme se vê na tabela-verdade:

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim q \vee r$	$p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

(ALENCAR FILHO, 2002)

Princípio de substituição para as tautologias

Seja $P(p, q, r, \dots)$ uma tautologia e sejam $P_0(p, q, r, \dots), Q_0(p, q, r, \dots), R_0(p, q, r, \dots)$ proposições quaisquer.

Como o valor lógico de $P(p, q, r, \dots)$ é sempre V (verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r , é óbvio que, substituindo p por P_0 , q por Q_0 , por R_0 , na tautologia $P(p, q, r, \dots)$, a nova proposição $P(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ que assim se obtém também é uma tautologia. Logo, pode-se aplicar o seguinte princípio de substituição:

Se $P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia, então $P(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ também é uma tautologia, quaisquer que seja as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots (ALENCAR FILHO, 2002).

Observe que isto é uma afirmação muito forte.

Contradição



Lembrete

Contradição: 1. Ação de contradizer; afirmação em contrário ao que foi dito 2. Incoerência entre afirmações atuais e anteriores 3. Oposição entre duas proposições, das quais uma necessariamente exclui a outra.

A contradição é toda proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade é sempre a letra F (falso), ou seja, a contradição é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ cujo valor lógico é sempre F (falso), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, \dots

Como uma tautologia é sempre verdadeira (V), a negação de uma tautologia é sempre falsa (F), ou seja, é uma contradição e vice-versa.

Portanto, $P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia se e somente se $\sim P(p, q, r, \dots)$ é sempre uma contradição, e $P(p, q, r, \dots)$ é uma contradição se e somente se $\sim P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia.

As contradições são também denominadas proposições contraválidas ou proposições logicamente falsas.

Para as contradições, vale o princípio de substituição análogo ao que foi dado para as tautologias:

Se $P(p, q, r, \dots)$ é uma contradição, então $P(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ também é uma contradição, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots (ALENCAR FILHO, 2002).

Observe que isto é uma afirmação muito forte.

Exemplos:

A proposição " $p \wedge \sim p$ " é uma contradição, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Portanto, dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

A proposição " $p \leftrightarrow \sim p$ " é uma contradição, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \leftrightarrow \sim p$
V	F	F
F	V	F

A proposição " $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ " é uma contradição, conforme se vê pela tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

A proposição " $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ " é uma contradição, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F

(ALENCAR FILHO, 2002).

Contingência



Lembrete

Contingência: 1. Qualidade do que é contingente 2. Eventualidade 3. Fato possível mas incerto.

Encontramos em Alencar Filho (2002), que contingência são todas as proposições compostas em cuja última coluna da sua tabela-verdade figuram as letras V e F, cada uma pelo menos uma vez, ou seja, a contingência é toda a proposição composta que não é tautologia nem contradição.

As contingências são também denominadas proposições contingentes ou proposições indeterminadas.

Exemplos:

A proposição " $p \rightarrow \sim p$ " é uma contingência, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \rightarrow \sim p$
V	F	F
F	V	V

A proposição " $p \vee q \rightarrow p$ " é uma contingência, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

A proposição " $x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$ " é uma contingência, conforme mostra a sua tabela-verdade:

$x = 3$	$x = y$	$x \neq 3$	$x \neq y$	$x \neq y \rightarrow x \neq 3$	$x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

(ALENCAR FILHO, 2002).

Augustus De Morgan (Madura, Índia, 27 de junho de 1806 – Londres, 18 de março de 1871) foi um matemático e lógico britânico. Formulou as Leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática.

As seguintes tautologias são conhecidas como as Leis de De Morgan:

$$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

Essas leis são muito usadas em eletrônica digital e em programas de computador.

Quadro 12

Conectivo	Nome	Exemplo
\sim	Negação	$\sim p$: João não é jogador de futebol
\wedge	Conjunção	$p \wedge q$: João é alto e Maria é alta
\vee	Disjunção	$p \vee q$: João é alto ou Maria é alta
$\underline{\vee}$	Disjunção exclusiva	$p \underline{\vee} q$: João é alto ou João é baixo
\rightarrow	Condicional	$p \rightarrow q$: Se João é alto, então Maria é alta
\leftrightarrow	Bicondicional	$p \leftrightarrow q$: João é Alto se e somente se Maria é alta

Quadro 13

Fórmula	Tabelas-verdade – Fórmulas fundamentais																	
$\sim p$	<table><tr><th>p</th><th>$\sim p$</th></tr><tr><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td></tr></table>			p	$\sim p$	V	F	F	V									
p	$\sim p$																	
V	F																	
F	V																	
$p \wedge q$	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \wedge q$</th></tr><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	p	q	$p \wedge q$	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	F		
p	q	$p \wedge q$																
V	V	V																
V	F	F																
F	V	F																
F	F	F																
$p \vee q$	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \vee q$</th></tr><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	p	q	$p \vee q$	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	F	F		
p	q	$p \vee q$																
V	V	V																
V	F	V																
F	V	V																
F	F	F																
$p \underline{\vee} q$	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \underline{\vee} q$</th></tr><tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	p	q	$p \underline{\vee} q$	V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F		
p	q	$p \underline{\vee} q$																
V	V	F																
V	F	V																
F	V	V																
F	F	F																
$p \rightarrow q$	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \rightarrow q$</th></tr><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr></table>	p	q	$p \rightarrow q$	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V		
p	q	$p \rightarrow q$																
V	V	V																
V	F	F																
F	V	V																
F	F	V																
$p \leftrightarrow q$	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \leftrightarrow q$</th></tr><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr></table>	p	q	$p \leftrightarrow q$	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	V		
p	q	$p \leftrightarrow q$																
V	V	V																
V	F	F																
F	V	F																
F	F	V																

3 OPERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE PROPOSIÇÕES

3.1 Implicação lógica

3.1.1 Definição

Uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica logicamente uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$ se $Q(p, q, r, \dots)$ é verdadeira todas as vezes que $P(p, q, r, \dots)$ for verdadeira.

Verifica-se facilmente a implicação observando-se a última coluna nas linhas da tabela-verdade da proposição P , quando elas apresentarem valor verdadeiro. Se, na linha correspondente da tabela-verdade de Q , obtém-se também o valor verdadeiro, conclui-se que " P implica Q ".

A notação de que a proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica a proposição $Q(p, q, r, \dots)$ por:

$$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

3.1.2 Propriedades da implicação lógica

A implicação lógica tem as propriedades reflexiva e transitiva:

Reflexiva: $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow P(p, q, r, \dots)$

Transitiva: Se $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ e

$Q(p, q, r, \dots) \Rightarrow R(p, q, r, \dots)$, então

$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow R(p, q, r, \dots)$

Exemplos:

1. A tabela-verdade da proposição $(p \vee q) \wedge \sim p$:

Quadro 14

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Essa proposição é verdadeira somente na linha 3 e, nessa mesma linha, a proposição "q" também é verdadeira.

Logo, tem-se uma implicação lógica:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$

2. A tabela-verdade das proposições: $p \wedge q$, $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ é:

Quadro 15

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira somente na linha 1 e, nessa linha, as proposições $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ também são verdadeiras. Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições.

Em símbolos:

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q \text{ e } p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

3. A tabela-verdade da proposição $(p \rightarrow q) \wedge p$ é:

Quadro 16

t	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Essa proposição é verdadeira somente na linha 1 e, nesta linha, a proposição q também é verdadeira.

Em símbolos:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

4. A tabela-verdade das proposições $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e $\sim p$ são:

Quadro 17

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

A proposição $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ é verdadeira somente na linha 4, e nesta linha, a proposição $\sim p$ também é verdadeira.

Em símbolos:

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

3.1.3 Tautologias e implicação lógica

A proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, isto é: $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$

Se e somente se a condicional:

$P(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica

Portanto, a toda implicação lógica corresponde uma condicional tautológica e vice-versa (ALENCAR FILHO, 2002).

Daí, se $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$, então, também se tem:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Rightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

Quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots



Observação

Observação: os símbolos \rightarrow e \Rightarrow são distintos, pois o primeiro é de operação lógica (aplicado, por exemplo, às proposições p e q , dá a nova proposição $p \rightarrow q$), enquanto o segundo é de relação, estabelece que a condicional $P(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

1. A condicional $p \wedge \sim p \rightarrow q$ é tautológica, pois a última coluna da sua tabela-verdade apresenta somente valores verdadeiros.

Quadro 18

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. A proposição $(p \leftrightarrow q) \wedge p$ implica a proposição q, pois a condicional $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é tautológica, conforme se vê pela tabela-verdade:

Quadro 19

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

3.2 Equivalência lógica

3.2.1 Definição

Diz-se que duas ou mais proposições são logicamente equivalentes quando suas proposições possuem a mesma tabela-verdade. De maneira mais formal, tem-se:

Uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$ se as tabelas-verdade dessas duas proposições são idênticas (ALENCAR FILHO, 2002).

A notação para uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ ser equivalente a uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$ é dada por:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

3.2.2 Propriedades da equivalência lógica

A equivalência lógica tem as seguintes propriedades: é reflexiva, simétrica e transitiva.

Em símbolos:

Reflexiva: $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \dots)$

Simétrica: Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$

$Q(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \dots)$

Transitiva: Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$

$Q(p, q, r) \Leftrightarrow R(p, q, r, \dots)$

$P(p, q, r) \Leftrightarrow R(p, q, r, \dots)$

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

1. As proposições $\sim\sim p$ e p são equivalentes, isto é, $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ (regra da dupla negação). É o que demonstra a tabela-verdade:

Quadro 20

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

Notam-se as colunas destacadas, logo, a dupla negação equivale à afirmação.

2. As proposições $\sim p \rightarrow p$ e p são equivalentes, isto é, $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$ é o que demonstra a tabela:

Quadro 21

p	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F

3. A condicional $p \rightarrow q$ e a disjunção $\sim p \vee q$ têm tabelas-verdade idênticas:

Quadro 22

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Por consequência, as duas proposições são equivalentes: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

4. As condicionais $p \rightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$ são equivalentes, isto é $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$. É o que demonstra a tabela.

Quadro 23

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

5. A bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a conjunção $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ têm tabelas-verdade idênticas:

Quadro 24

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Por consequência, as duas proposições são equivalentes:

$$P \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

3.2.3 Tautologias e equivalência lógica

A proposição $P(p, q, r, \dots)$ é equivalente à proposição $Q(p, q, r, \dots)$, isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

Se e somente se a bicondicional:

$P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica (ALENCAR FILHO, 2002).

Logo, toda a equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica e vice-versa.

Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$, então também se tem:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Leftrightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

Quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots



Observação

Os símbolos \leftrightarrow e \Leftrightarrow são distintos, pois o primeiro é de operação lógica (aplicado, por exemplo, às proposições p e q , dá a nova proposição $p \leftrightarrow q$), enquanto o segundo é de relação (estabelece que a bicondicional $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica (ALENCAR FILHO, 2002).

3.2.4 Proposições associadas a uma condicional

Dada a condicional $p \rightarrow q$, chamam-se proposições associadas a $p \rightarrow q$ as três seguintes proposições condicionais que contêm p e q :

a) **Proposição recíproca** de $p \rightarrow q$: $q \rightarrow p$

b) **Proposição contrária** de $p \rightarrow q$: $\sim p \rightarrow \sim q$

c) **Proposição contrapositiva** de $p \rightarrow q$: $\sim q \rightarrow \sim p$

As tabelas-verdade dessas quatro proposições são:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

E demonstram duas importantes propriedades:

A condicional $p \rightarrow q$ e a sua contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$ são equivalentes, ou seja:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

A recíproca $q \rightarrow p$ e a contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ da condicional $p \rightarrow q$ são equivalentes, ou seja:

$$q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$$

As mesmas tabelas-verdade também demonstram que a condicional $p \rightarrow q$ e a sua recíproca $q \rightarrow p$ ou a sua contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ não são equivalentes.

A contrária de $p \rightarrow q$ também é denominada a inversa de $p \rightarrow q$, e a contrapositiva de $p \rightarrow q$ é a contrária da recíproca de $p \rightarrow q$, por isso também é denominada contrarrecíproca de $p \rightarrow q$. Também se diz que $p \rightarrow q$ é a direta em relação às associadas (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplos adaptados de Alencar Filho (2002):

1. Seja a condicional relativa a um quadrilátero Q:

$p \rightarrow q$: se Q é quadrado, então Q é retângulo

A recíproca dessa proposição é:

$q \rightarrow p$: se Q é retângulo, então é quadrado.

Aqui, a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas a sua recíproca $q \rightarrow p$ é falsa.

2 A contrapositiva da condicional:

$p \rightarrow q$: Se João é professor, então é miserável.

$\sim q \rightarrow \sim p$: Se João não é miserável, então não é professor.

3. Encontre a positiva da condicional "Se x é maior que zero, então x não é negativo".

O primeiro passo é inferir as proposições básicas e a elas atribuir uma letra das variáveis proposicionais. Logo, representando por p a proposição "x é maior que zero" e por q a proposição "x é negativo", note que em q não foi usada a negação. A condicional na forma simbólica fica:

$$p \rightarrow \sim q$$

Daí que a sua contrapositiva é:

$$\sim \sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$$

Isso é, em linguagem corrente: "Se x é negativo, então x não é maior que zero".

4. Seja demonstrada a proposição condicional:

$p \rightarrow q$: se x^2 é ímpar, então x é ímpar.

A contrapositiva dessa condicional é:

$\sim q \rightarrow \sim p$: se x é par, então x^2 é par.

3.3 Negação conjunta de duas proposições

A conjunção de duas proposições p e q negadas é a proposição "não p e não q ". Esse tipo de negação é denominado de negação conjunta (ALENCAR FILHO, 2002).

Em símbolos:

$$\sim p \wedge \sim q$$

A negação conjunta de duas proposições p e q também se indica pela notação $p \downarrow q$, em que é apresentada uma seta para baixo. Note que o sentido da seta é contrário ao vértice do símbolo de conjunção, ou seja, seta para baixo, o vértice para cima.

Em símbolos:

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Como a proposição " $\sim p \wedge \sim q$ " é verdadeira somente no caso em que p e q são ambas falsas, então a tabela-verdade de " $p \downarrow q$ " é a seguinte:

Quadro 25

P	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3.4 Negação disjunta de duas proposições

A negação disjunta de duas proposições p e q é a proposição "não p ou não q ", isto é, simbolicamente " $\sim p \vee \sim q$ " (ALENCAR FILHO, 2002).

A negação disjunta de duas proposições p e q também se indica pela notação " $p \uparrow q$ ". Note que o sentido da seta é contrário ao vértice do símbolo de disjunção, ou seja, seta para cima, o vértice para baixo.

Em símbolos:

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Como a proposição " $\sim p \vee \sim q$ " é falsa somente no caso em que p e q são ambas verdadeiras, então a tabela-verdade de " $p \uparrow q$ " é a seguinte :

Quadro 26

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Os símbolos " \downarrow " e " \uparrow " são conhecidos como conectivos de Scheffer.

4 PROPRIEDADES DAS PROPOSIÇÕES E FUNDAMENTOS DA DEDUÇÃO

4.1 Propriedades das principais proposições

A seguir, serão apresentadas as propriedades relacionadas às proposições. A demonstração destas será realizada por meio das tabelas-verdade.

4.1.1 Propriedades da conjunção

Sejam p , q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples, cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso (ALENCAR FILHO, 2002).

1. Idempotente: $p \wedge p \Leftrightarrow p$.

Para demonstrar a equivalência dessas duas proposições, verifica-se que as tabelas-verdade das proposições $p \wedge p$ e $p \wedge p \leftrightarrow p$ são idênticas, ou seja, a bicondicional $p \wedge p \leftrightarrow p$ é **tautológica**:

Quadro 27

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

2. Identidade: $p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$.

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge t$ e p , $p \wedge c$ e c são idênticas respectivamente, ou seja, as bicondicionais $p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$ são tautológicas:

Quadro 28

p	t	c	$p \wedge t$	$p \wedge c$	$p \wedge t \Leftrightarrow p$	$p \wedge c \Leftrightarrow c$
V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V

3. Associativa: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.

Quadro 29

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ é tautológica.

4. Comutativa: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$ são idênticas, ou seja, a bicondicional $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ é tautológica:

Quadro 30

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

4.1.2 Propriedades da disjunção

Sejam p , q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples, cujos valores lógicos respectivos são V (verdadeiro) e F (falso) (ALENCAR FILHO, 2002).

1. Idempotente: $p \vee p \Leftrightarrow p$.

As tabelas-verdade das proposições $p \vee p$ e p são idênticas, ou seja, a bicondicional $p \vee p \Leftrightarrow p$ é tautológica.

Quadro 31

p	$p \vee p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

3. Identidade: $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$.

As tabelas-verdade das proposições $p \vee t$ e t , $p \vee c$ e c são idênticas respectivamente, ou seja, as bicondicionais $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$ são tautológicas:

Quadro 32

p	t	c	$p \vee t$	$p \vee c$	$p \vee t \Leftrightarrow t$	$p \vee c \Leftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

3. Associativa: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

As tabelas-verdade das proposições $(p \vee q) \vee r$ e $p \vee (q \vee r)$ são idênticas. Logo, a bicondicional $(p \vee q) \vee \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é tautológica.

Quadro 33

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

4. Comutativa: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.

As tabelas-verdade das proposições $p \vee q$ e $q \vee p$ são idênticas, ou seja, a bicondicional $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ é tautológica:

Quadro 34

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

4.1.3 Propriedades da conjunção e da disjunção

Sejam p , q e r proposições simples quaisquer.

1. Distributivas:

a. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

b. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são idênticas:

Quadro 35

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Logo, a bicondicional $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é tautológica.

Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

Quadro 36

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Logo, a bicondicional $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é tautológica.

2. Absorção:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \text{ e } p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p.$$

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p são respectivamente idênticas, ou seja, a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ é tautológica:

Quadro 37

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p , ou seja, a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ é tautológica:

Quadro 38

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

3. Regras de De Morgan:

Essas propriedades são muito utilizadas nos mais diversos ramos da computação, logo, são muito importantes.

a. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$;

b. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

As tabelas-verdade das proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são idênticas:

Quadro 39

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Logo, a bicondicional $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é tautológica.

Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$:

Quadro 40

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Logo, a bicondicional $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ é tautológica.

As regras de De Morgan mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação:

$p \vee q \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$;

$p \wedge q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$.

4.1.4 Negação da condicional

Como $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, negando-se a condicional, tem-se:

$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

O pode ser verificado pela tabela-verdade das proposições $\sim(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \sim q$, que são idênticas:

Quadro 41

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

4.1.5 Negação da bicondicional

Sabendo-se que $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ e $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$, que foram examinados nos tópicos anteriores, e aplicando-se a negação da condicional, obtém-se de forma análoga a negação da condicional:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$$

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \wedge \sim p)$$

Portanto:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ não possui a propriedade idempotente, pois é imediato que não são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow p$ e p , mas possui as propriedades comutativa e associativa (ALENCAR FILHO, 2002).

4.2 Método dedutivo

As implicações e equivalências foram demonstradas usando-se as tabelas-verdade. Essa abordagem é perfeitamente válida, porém, quando as sentenças lógicas tornam-se mais complexas, seu uso torna-se inviável. Neste tópico, as demonstrações das implicações e equivalências serão realizadas por um método mais eficiente, denominado método dedutivo. Nele, usar-se-á com frequência as propriedades das proposições estudadas anteriormente (ALENCAR FILHO, 2002).

Para auxílio nas demonstrações, serão realizadas as seguintes suposições: serão dadas as proposições simples p , q , r , a proposição t sempre é verdadeira e a proposição c é sempre falsa. Elas serão substituídas, respectivamente, por proposições compostas P , Q , R , T (tautologia) e C (contradição) quando for o caso.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

1. Demonstrar as implicações:

a. $c \Rightarrow p$

b. $p \Rightarrow t$

onde p é uma proposição qualquer, c e t são proposições cujos valores lógicos respectivos são F e V .

Demonstração:

Sabe-se, do exposto no tópico sobre implicações, que $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são proposições equivalentes, e que uma implicação é verdadeira se a condicional é tautológica, logo, se provamos que a condicional referente à implicação é tautológica, provamos então que a proposição é válida.

Da equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ e do fato que $V(c) = F$ e $V(t) = V$, seguem-se:

a. $c \rightarrow p \Leftrightarrow \sim c \vee p \Leftrightarrow t \vee p \Leftrightarrow t$;

b. $p \rightarrow t \Leftrightarrow \sim p \vee t \Leftrightarrow t$.

As tabelas-verdade de $c \rightarrow p$ e $p \rightarrow t$ mostram que essas condicionais são tautológicas:

Quadro 42

p	c	t	$c \rightarrow p$	$p \rightarrow t$
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

Porém, a meta aqui é não usar o artifício da tabela-verdade para demonstrar a proposição.

2. Demonstrar a implicação: $p \wedge q \Rightarrow p$ (simplificação):

Demonstração:

Parte-se da equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, depois, usa-se a propriedade de De Morgan que afirma que a negação de uma conjunção é a disjunção das negações e, por fim, pela comutação da disjunção, prova-se a tautologia T.

$$p \wedge q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee p \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow T \vee \sim q \Leftrightarrow T$$

3. Demonstrar a implicação: $p \Rightarrow p \vee q$ (adição).

Demonstração:

Se a condicional for tautológica, prova-se a implicação. Para isso, usa-se a equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ aplicada à proposição que se deseja demonstrar, a partir da qual se chega a uma expressão com duas disjunções, sobre as quais se aplica a propriedade distributiva, de onde obtém-se a tautologia.

$$p \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T$$

4. Demonstrar a implicação $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (*modus ponens*).

Demonstração:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow C \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q \Rightarrow q$$

5. Demonstrar a implicação $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (*modus tollens*).

Demonstração:

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim q) \\ (\sim p \wedge \sim q) \vee C \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

6. Demonstrar a implicação $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (silogismo disjuntivo).

Demonstração:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow C \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow q \wedge \sim p \Rightarrow q$$

7. Demonstrar a implicação $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Demonstração:

$$p \wedge q \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \Leftrightarrow T \vee T \Leftrightarrow T$$

8. Demonstrar a implicação $p \Rightarrow q \rightarrow p$.

Demonstração:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee p) \Leftrightarrow (\sim q \vee p) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow T \vee \sim q \Leftrightarrow T$$

9. Demonstrar a implicação $p \Rightarrow \sim p \rightarrow q$.

Demonstração:

$$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim \sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T$$

10. Demonstrar a implicação: $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$.

Demonstração:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \wedge r \rightarrow q) \\ \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge r) \vee q \\ \Leftrightarrow (\sim \sim p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \vee q) \\ \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q) \vee \sim r \\ \Leftrightarrow T \vee \sim r \Leftrightarrow T$$

4.3 Redução do número de conectivos

São cinco conectivos fundamentais (\sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow). Ver-se-á que é possível que três deles podem ser expressos em termos de apenas dois dos seguintes pares:

1. \sim e \vee

2. \sim e \wedge

3. \sim e \rightarrow

Demonstração:

1. \wedge , \rightarrow e \leftrightarrow pode ser escrito em função de \sim e \vee :

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim \sim p \wedge \sim \sim q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)$$

2. \vee , \rightarrow e \leftrightarrow pode ser escrito em função de \sim e \wedge :

$$p \vee q \Leftrightarrow \sim \sim p \vee \sim \sim q \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim p \wedge q)$$

3. \wedge , \vee e \leftrightarrow pode ser escrito em função de \sim e \rightarrow :

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \rightarrow \sim q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \sim \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim ((p \rightarrow q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p))$$

4.4 Forma normal das proposições

Uma proposição está na forma normal (FN) se e somente se a proposição contém apenas os conectivos \sim , \wedge e \vee .

Exemplos:

As proposições a seguir estão na FN:

a. $\sim p \wedge \sim q$

b. $\sim(\sim p \vee \sim q)$

c. $(p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$

Observação: Toda proposição pode ser levada para uma FN equivalente pela eliminação dos conectivos \rightarrow e \leftrightarrow , se existirem, isto é, pela substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

4.5 Princípio de dualidade

Seja P uma proposição que só contém os conectivos \sim , \wedge e \vee . A proposição que resulta de P trocando cada símbolo \wedge por \vee e cada símbolo \vee por \wedge chama-se dual de P. Assim, por exemplo, a dual de $\sim((p \wedge q) \vee \sim r)$ é $\sim((p \vee q) \wedge \sim r)$.

Princípio de dualidade: se P e Q são proposições equivalentes que só contêm os conectivos \sim , \wedge e \vee , então as suas duais respectivas P_1 e Q_1 também são equivalentes.

Assim, por exemplo, da equivalência $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ deduz-se, pelo princípio de dualidade, a equivalência $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

Analogamente, a partir de $(p \wedge \sim p) \vee q \Leftrightarrow q$ deduz-se, pelo princípio de dualidade: $(p \vee \sim p) \wedge q \Leftrightarrow q$ (ALENCAR FILHO, 2002).

Quadro 43

Tipos de triângulos			
Triângulo	equilátero (3 lados iguais)	isósceles (2 lados iguais)	escaleno (todos os lados diferentes)
Acutângulo ângulos internos $< 90^\circ$			
Retângulo 1 ângulo $= 90^\circ$			
Obtusângulo 1 ângulo $> 90^\circ$			



Resumo

Nesta unidade, apresentamos os conceitos básicos sobre proposições e a lógica proposicional. Introduzimos o conceito de valor lógico e apresentamos os principais conectivos. Verificamos os dois tipos básicos de proposição, as proposições simples e proposições compostas. Também apresentamos os conceitos de tabelas-verdade, a notação para a representação de valores lógicos e a simbologia usada para unir proposições.

Em um segundo momento, estudamos de maneira mais abrangente os conectivos e sua respectiva simbologia: negação, conjunção, disjunção inclusiva e exclusiva, condicional e bicondicional. As tabelas-verdade das fórmulas fundamentais foram também exploradas como procedimento de análise para a lógica. Para tanto, destacamos os procedimentos para a construção de uma tabela-verdade para uma proposição composta.

Realizamos os cálculos do valor lógico de uma proposição. Apresentamos a precedência de conectivos, assim como as proposições tautológicas, contraditórias e contingentes.

Os aspectos mais avançados da lógica proposicional também foram abordados, entre eles, o que é uma equivalência. Além disso, estudamos o que é recíproca, contrária e contrapositiva, e a relação entre tautologia e implicação.

Finalmente, demonstramos o método dedutivo e verificamos que o uso das propriedades das proposições é fundamental nesse método.



Exercícios

Questão 1. (ICMS, 1997, adaptado) Se Rodrigo mentiu, então ele é culpado. Logo:

- A) Rodrigo é culpado.
- B) Se Rodrigo não mentiu então ele não é culpado.
- C) Rodrigo mentiu.
- D) Se Rodrigo não é culpado, então ele não mentiu.
- E) Se Rodrigo é culpado, então ele mentiu.

Resposta correta: alternativa D.

Análise das alternativas

Se Rodrigo mentiu, então ele é culpado:

- Se p então q ou $p \rightarrow q$.
- Onde o p é antecedente e condição suficiente para que ocorra q .
- Onde o q é consequente e condição necessária para que ocorra p .
- Dado que $p \rightarrow q$, posso afirmar que $\sim p \rightarrow \sim q$.

Analisando as alternativas, tome cuidado com a alternativa B, pois ao negar o antecedente (negando a condição suficiente) nada sei sobre o consequente (nada posso afirmar quanto à condição necessária). Já a alternativa D, é a verificação lógica, pois ao negar a condição necessária (o consequente) eu nego a condição suficiente (o antecedente).

Há a possibilidade de engano com a alternativa E, ou seja, se Rodrigo é culpado então ele mentiu. Veja que esta afirmação pode ser representada por $q \rightarrow p$. Na tabela verdade é possível comprovar que (Se Rodrigo mentiu, então ele é culpado: $p \rightarrow q$) e (Se Rodrigo é culpado, então ele mentiu: $q \rightarrow p$) não são equivalentes lógicas. Observe:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Observe que as proposições $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ não apresentam os mesmos valores lógicos, ou seja, afirmar uma não quer dizer afirmar a outra. Sendo assim:

A) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela verdade construída.

B) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela verdade construída.

C) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela verdade construída.

D) Alternativa correta.

Justificativa: Condiz com a análise inicial

E) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela verdade construída.

Questão 2. (SAE-PE/2008) Leonardo disse a Fernanda: - Eu jogo futebol ou você não joga golfe. Fernanda retrucou: - isso não é verdade.

Sabendo que Fernanda falou a verdade, é correto afirmar que:

A) Leonardo joga futebol e Fernanda joga golfe.

B) Leonardo joga futebol e Fernanda não joga golfe.

C) Leonardo não joga futebol e Fernanda joga golfe.

D) Leonardo não joga futebol e Fernanda não joga golfe.

E) Leonardo não joga futebol ou Fernanda joga golfe.

Resolução desta questão na Plataforma.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.