Unidade II

5 MATRIZES

5.1 Motivação e definição

As matrizes são representadas por espécies de tabelas, em que vemos valores numéricos nas suas linhas e nas suas colunas.

Vejamos, por exemplo, a tabela a seguir, na qual temos as pontuações de cinco candidatos, Claudia, Lucila, Rafael, Tatiana e Tiago, a uma vaga de emprego em avaliações prévias de língua portuguesa, língua inglesa e raciocínio lógico. Essas pontuações podem variar de 0 a 100.

Tabela 7 – Pontuações de candidatos a uma vaga de emprego

	Língua portuguesa	Língua inglesa	Raciocínio lógico
Claudia	83	67	78
Lucila	64	71	75
Rafael	52	79	68
Tatiana	91	57	63
Tiago	87	92	69

Uma matriz que representa de modo completo as pontuações dadas na tabela 7, indicada por A, é a mostrada a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 83 & 67 & 78 \\ 64 & 71 & 75 \\ 52 & 79 & 68 \\ 91 & 57 & 63 \\ 87 & 92 & 69 \end{pmatrix}$$

Uma matriz que representa apenas as pontuações de Claudia, indicada por B, é a mostrada a seguir.

$$B = \begin{pmatrix} 83 & 67 & 78 \end{pmatrix}$$

Como a matriz B tem uma única linha, ela é classificada como matriz linha.

Uma matriz que representa apenas as pontuações dos candidatos em raciocínio lógico, indicada por C, é a mostrada a seguir.

$$C = \begin{pmatrix} 78 \\ 75 \\ 68 \\ 63 \\ 69 \end{pmatrix}$$

Como a matriz C tem uma única coluna, ela é classificada como matriz coluna.

De modo geral, podemos dizer que uma matriz de ordem mxn (em que lemos "eme por ene") é uma tabela de números reais dispostos em m linhas e n colunas. Cada um desses números é um elemento da matriz e é identificado pela sua posição, ou seja, pela linha e pela coluna que ocupa.

Por exemplo, a matriz A que escrevemos anteriormente tem ordem 5x3, pois apresenta 5 linhas e 3 colunas. Abaixo, mostramos essa matriz com a indicação explícita da sua ordem.

$$A = \begin{pmatrix} 83 & 67 & 78 \\ 64 & 71 & 75 \\ 52 & 79 & 68 \\ 91 & 57 & 63 \\ 87 & 92 & 69 \end{pmatrix}_{5x3}$$

Pela observação da matriz A, vemos que:

- o elemento da primeira linha e da primeira coluna da matriz A, representado por a_{11}, é o número 83;
- o elemento da primeira linha e da segunda coluna da matriz A, representado por a_{12}, é o número 67;
- o elemento da primeira linha e da terceira coluna da matriz A, representado por a_{13}, é o número 78;
- o elemento da segunda linha e da primeira coluna da matriz A, representado por a_{21}, é o número 64;
- o elemento da segunda linha e da segunda coluna da matriz A, representado por a_{22}, é o número 71;
- o elemento da segunda linha e da terceira coluna da matriz A, representado por a_{23}, é o número 75;
- e assim por diante.

Podemos generalizar o que dissemos do seguinte modo: um elemento qualquer de uma matriz A é indicado por a_{ij}, sendo i=1,2,3,...,m a linha que o elemento ocupa e j=1,2,3,...,n a coluna que o elemento ocupa. Os valores de i e de j para dado elemento a_{ij} são chamados de índices.

De maneira geral, temos a representação a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mxn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Veja que podemos ter qualquer número real como elemento de uma matriz, e não apenas números inteiros e positivos. Vejamos o exemplo da matriz D a seguir.

$$D = \begin{pmatrix} -1,3 & \pi & 5/6 \\ \sqrt{2} & 0 & 7 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Na matriz D, temos como elementos números:

- positivos, como o elemento $a_{13}=5/6$
- negativos, como o elemento $a_{11}=-1,3$
- inteiros, como o elemento $a_{23}=7$
- fracionários, como o elemento $a_{13}=5/6$
- irracionais, como o elemento $a_{12}=\pi$

5.2 Matriz nula ou matriz zero

Se todos os elementos de uma matriz são iguais a zero, ela é chamada de matriz nula ou matriz zero, como a matriz E de ordem 2x2 mostrada a seguir.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

5.3 Matriz linha

Como sugerido pela nomenclatura, uma matriz linha é formada por uma única linha, como a matriz L mostrada a seguir.

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}8 & 32 \end{pmatrix}_{1x3}$$

5.4 Matriz coluna

Como sugerido pela nomenclatura, uma matriz coluna é formada por uma única coluna, como a matriz C mostrada a seguir.

$$C = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1{,}3 \end{pmatrix}_{3x1}$$

5.5 Matriz quadrada

Se a quantidade m de linhas de uma matriz for igual à sua quantidade n de colunas, ou seja, se m=n, ela é chamada de matriz quadrada, como a matriz F de ordem 3x3 mostrada a seguir.

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 99 \\ 1{,}5 & 9 & -3 \\ 7{,}8 & 134 & 9{,}2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Observação

A matriz E reproduzida a seguir, além de ser uma matriz nula, é uma matriz quadrada.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

5.6 Diagonais de uma matriz quadrada

Para as matrizes quadradas, a diagonal principal é definida pelos elementos a_{ij} em que i=j. Por exemplo, em uma matriz de ordem 3x3, a diagonal principal é formada pelos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}. A seguir, temos os destaques dos elementos que constituem a diagonal principal da matriz F. Esses elementos estão envolvidos por círculos de contorno verde.

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 99 \\ 1{,}5 & 9 & -3 \\ 7{,}8 & 134 & 9{,}2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Os elementos da diagonal secundária da matriz F estão envolvidos por retângulos de contorno azul na representação a seguir.

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 99 \\ 1{,}5 & 9 & -3 \\ 7{,}8 & 134 & 9{,}2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

5.7 Matriz diagonal

Se todos os elementos de uma matriz quadrada são iguais a zero, com exceção de pelo menos um elemento da diagonal principal, ela é chamada de matriz diagonal, como as matrizes G e H mostradas a seguir.

$$G = \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & -3{,}44 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$H = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

5.8 Matriz identidade

Se todos os elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada forem iguais a 1 e todos os outros elementos forem iguais a 0, essa matriz é chamada de matriz identidade ou matriz unidade, como as matrizes I_2 e I_3 mostradas a seguir.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

5.9 Matriz transposta

Considere uma matriz J de ordem mxn. A matriz transposta de J, indicada por J^t, é uma matriz de ordem nxm cujas linhas são formadas pelas colunas de J e cujas colunas são formadas pelas linhas de J, ou seja, a matriz J^t resulta da troca ordenada das linhas pelas colunas de J, conforme exemplificado a seguir.

$$J = \begin{pmatrix} 9 & 13 & -7,5 \\ 5 & 68 & 132 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$J^t = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 13 & 68 \\ -7,5 & 132 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Observação

Veja que os elementos da primeira linha da matriz J são os elementos da primeira coluna da matriz transposta de J. Analogamente, os elementos da segunda linha da matriz J são os elementos da segunda coluna da matriz transposta de J.

5.10 Matriz oposta

Considere uma matriz J de ordem mxn. A matriz oposta de J, indicada por -J, é uma matriz de ordem mxn cujos elementos são os opostos dos elementos de J, conforme exemplificado a seguir.

$$J = \begin{pmatrix} 9 & 13 & -7,5 \\ 5 & 68 & 132 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$-J = \begin{pmatrix} -9 & -13 & 7,5 \\ -5 & -68 & -132 \end{pmatrix}_{2x3}$$

5.11 Igualdade de matrizes

Duas matrizes K e L, de mesma ordem, são iguais se os seus elementos de mesmo índice são iguais, conforme exemplificado a seguir.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 8 \\ 0{,}3 & 13 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 8 \\ 0{,}3 & 13 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Observação

Rigorosa e genericamente, duas matrizes $K=(k_{ij})mxn$ e $L=(l_{ij})mxn$ são iguais, ou seja, K=L, se $k_{ij}= l_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

5.12 Soma de matrizes

Somente podemos fazer a soma de duas matrizes A e B caso elas sejam de mesma ordem. Se essa condição for atendida, o resultado obtido é uma matriz C da mesma ordem das matrizes A e B.

De modo geral, podemos dizer que, se A e B são matrizes de mesma ordem mxn, então a matriz C, dada por C=A+B, será uma matriz de ordem mxn, em que cada elemento é o resultado da soma dos elementos correspondentes de A e de B.

Observação

Rigorosa e genericamente, a soma de duas matrizes $A=(a_{ij})mxn$ e $B=(b_{ij})mxn$ é a matriz $C=(c_{ij})mxn$ em que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Vejamos um exemplo de soma de matrizes. Para isso, considere as matrizes A e B mostradas a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 8 \\ 27{,}5 & 10 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 37 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}_{3x2}$$

A matriz C, que é a soma das matrizes A e B, é dada por:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 12+(-8) & -5+2 \\ 0+37 & 8+0 \\ 27,5+1 & 10+(-9) \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 37 & 8 \\ 28,5 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Podemos fazer essa soma de matrizes com o auxílio de recursos da planilha eletrônica do Excel. O passo a passo para isso está descrito a seguir.

Passo 1. Digite os elementos das matrizes A e B em células de uma planilha, como nas células B2, B3, B4, C2, C3, C4, E2, E3, E4, F2, F3 e F4 mostradas na figura 56.

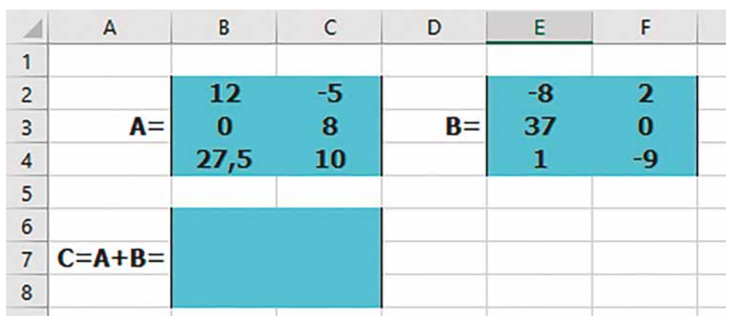

Figura 56 – Exemplo de soma de matrizes em planilha (parte 1)

Passo 2. Insira a fórmula =B2+E2 na célula B6 mostrada na figura 57.

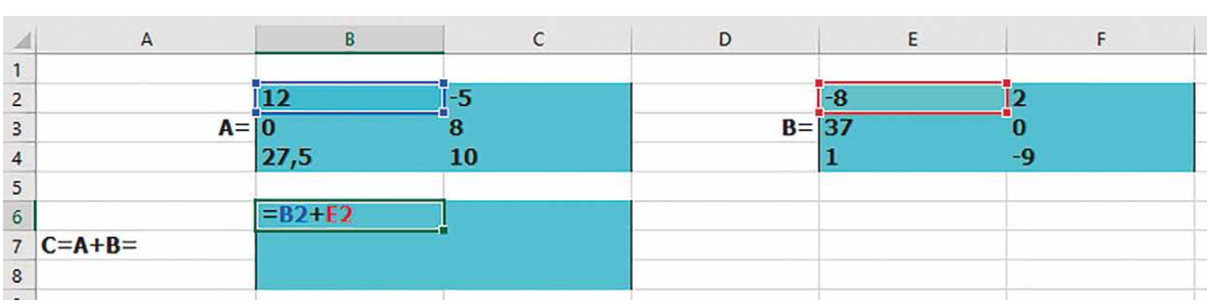

Figura 57 – Exemplo de soma de matrizes em planilha (parte 2)

Observação

Para inserirmos uma fórmula em uma célula de planilha do Excel no contexto aqui desenvolvido, iniciamos a digitação com o sinal de igual (=).

Passo 3. Copie a fórmula inserida na célula B6 para as células B7, B8, C6, C7 e C8 mostradas na figura 58.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		12	-5		-8	2
3	A=	0	8	B=	37	0
4		27,5	10		1	-9
5						
6		=B2+E2	=C2+F2			
7	C=A+B=	=B3+E3	=C3+F3			
8		=B4+E4	=C4+F4			

Figura 58 – Exemplo de soma de matrizes em planilha (parte 3)

A cópia da fórmula inserida em B6 para as outras células já atualiza os endereços de células no deslocamento de posições "para a direita e para baixo". No caso em estudo, os resultados numéricos vindos dessa atualização fornecem os elementos da matriz C=A+B, como podemos ver na figura 59.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		12	-5		-8	2
3	A=	0	8	B=	37	0
4		27,5	10		1	-9
5						
6		4	-3			
7	C=A+B=	37	8			
8		28,5	1			

Figura 59 – Exemplo de soma de matrizes em planilha (parte 4)

Observação

Um modo de copiarmos a fórmula de uma célula para a vizinha é clicarmos sobre a célula. Isso faz com que visualizemos um retângulo. Clicamos no canto inferior do retângulo e fazemos seu arraste até alcançarmos a quantidade necessária de células.

5.13 Multiplicação de matriz por escalar

Se A é uma matriz de ordem mxn e k é um escalar, então a matriz D, dada por D=k.A, é uma matriz de ordem mxn, em que cada elemento é o resultado da multiplicação do número k por cada elemento de D.

Lembrete

Um escalar, no sentido aqui utilizado, é um valor numérico.

Observação

Rigorosa e genericamente, a multiplicação de um escalar k por uma matriz $A=(a_{ij})mxn$ é a matriz D=k.A, com $D=(d_{ij})mxn$, em que $d_{ij}=k.a_{ij}$, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Lembrete

A multiplicação de um escalar por uma matriz pode ser escrita como o produto de um escalar por uma matriz.

Vejamos um exemplo de multiplicação de matriz por escalar. Para isso, considere a matriz A e o escalar k=5 mostrados a seguir.

$$A=\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 8 \\ 27{,}5 & 10 \end{pmatrix}_{3x2} \quad e \quad k=5$$

A matriz D=k.A é dada por:

$$D=k.A=5.\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 8 \\ 27{,}5 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5.12 & 5.(-5) \\ 5.0 & 5.8 \\ 5.27{,}5 & 5.10 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 60 & -25 \\ 0 & 40 \\ 137{,}5 & 50 \end{pmatrix}$$

Podemos fazer essa multiplicação de matriz por escalar com o auxílio de recursos da planilha eletrônica do Excel. O passo a passo para isso está descrito a seguir.

Passo 1. Digite os elementos da matriz A e o valor da constante k em células de uma planilha, como nas células B2, B3, B4, C2, C3 e C4 mostradas na figura 60.

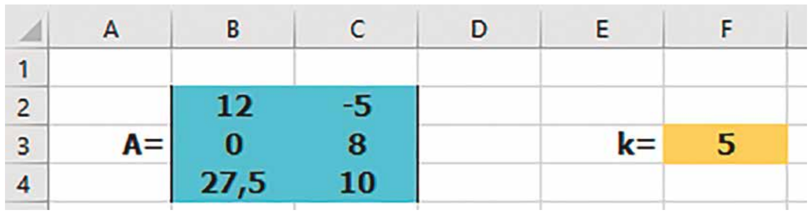

Figura 60 – Exemplo de caso de multiplicação de matriz por escalar feita em planilha (parte 1)

Observação

A indicação “k=” foi inserida na célula E3 e o valor atribuído a k foi inserido na célula F3. Ou seja, “k=5” não foi inserido em uma única célula da planilha eletrônica.

Passo 2. Insira a fórmula =$F$3*B2 na célula B6 mostrada na figura 61.

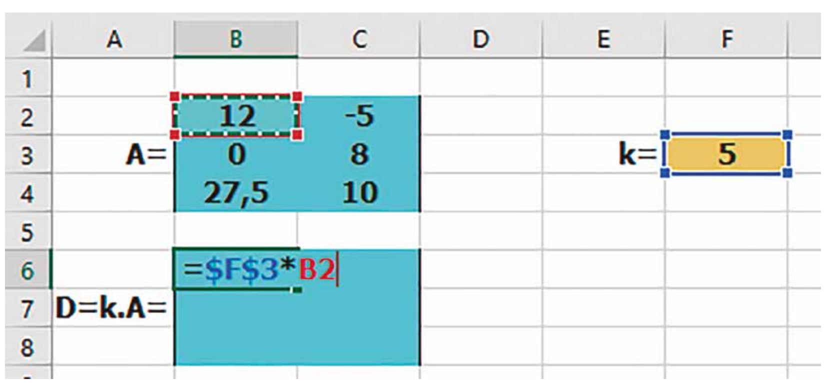

Figura 61 – Exemplo de caso de multiplicação de matriz por escalar feita em planilha (parte 2)

Observação

O operador que executa a multiplicação em planilha do Excel é o asterisco (*).

Passo 3. Copie a fórmula inserida na célula B6 para as células B7, B8, C6, C7 e C8 e obtenha a situação mostrada na figura 62.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		12	-5			
3	A=	0	8		k=	5
4		27,5	10			
5						
6		=$F$3*B2	=$F$3*C2			
7	D=k.A=	=$F$3*B3	=$F$3*C3			
8		=$F$3*B4	=$F$3*C4			

Figura 62 – Exemplo de caso de multiplicação de matriz por escalar feita em planilha (parte 3)

Vimos que, se copiamos uma fórmula em células de uma planilha eletrônica, há atualização “automática” das referências empregadas em virtude do deslocamento de posições “para a direita e para baixo”. No entanto, no exemplo em estudo, não queremos que isso aconteça com o escalar atribuído à célula F3, visto que as células vizinhas à célula F3 estão vazias e isso não retornaria os valores corretos para os elementos da matriz D=k.A. A fim de que esse problema não aconteça, podemos utilizar o recurso da referência absoluta, ou seja, digitamos o símbolo $ antes da linha e da coluna da referência que não desejamos deslocar (no caso, antes de F e antes de 3).

Assim, obtemos os elementos da matriz D=k.A, como podemos ver na figura 63.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		12	-5			
3	A=	0	8		k=	5
4		27,5	10			
5						
6		60	-25			
7	D=k.A=	0	40			
8		137,5	50			

Figura 63 – Exemplo de caso de multiplicação de matriz por escalar feita em planilha (parte 4)

Também podemos realizar a soma de matrizes que foram multiplicadas por escalares. Vejamos um exemplo. Para isso, considere as matrizes M e N.

$$M=\begin{pmatrix}-7 & 23\\ 12 & 0\end{pmatrix} \text{ e } N=\begin{pmatrix}100 & 10\\ -0{,}1 & -5\end{pmatrix}$$

A matriz P=8.M-2.N, ou P=8.M+(-2).N, é calculada como mostrado a seguir.

$$P = 8.M - 2.N = 8.M + (-2).N = 8.\begin{pmatrix} -7 & 23 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} + (-2).\begin{pmatrix} 100 & 10 \\ -0{,}1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P = 8.M - 2.N = \begin{pmatrix} 8.(-7) & 8.23 \\ 8.12 & 8.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-2).100 & (-2).10 \\ (-2).(-0{,}1) & (-2).(-5) \end{pmatrix}$$

$$P = 8.M - 2.N = \begin{pmatrix} -56 & 184 \\ 96 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200 & -20 \\ 0{,}2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$P = 8.M - 2.N = \begin{pmatrix} -56 + (-200) & 184 + (-20) \\ 96 + 0{,}2 & 0 + 10 \end{pmatrix}$$

$$P = 8.M - 2.N = \begin{pmatrix} -256 & 164 \\ 96{,}2 & 10 \end{pmatrix}$$

Podemos fazer o cálculo anterior com o auxílio de recursos da planilha eletrônica do Excel. O passo a passo para isso está descrito a seguir.

Passo 1. Digite os elementos das matrizes M e N em células de uma planilha, como nas células B1, B2, C1, C2, F1, F2, G1 e G2 mostradas na figura 64.

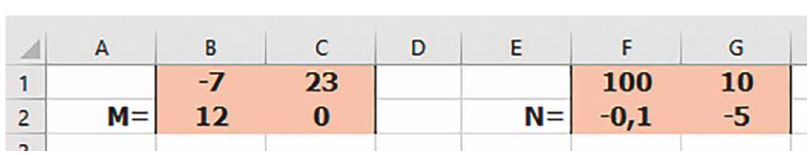

Figura 64 – Exemplo do cálculo de P=8.M-2.N feito em planilha (parte 1)

Passo 2. Insira a fórmula =8*B1-2*F1 na célula B5 mostrada na figura 65.

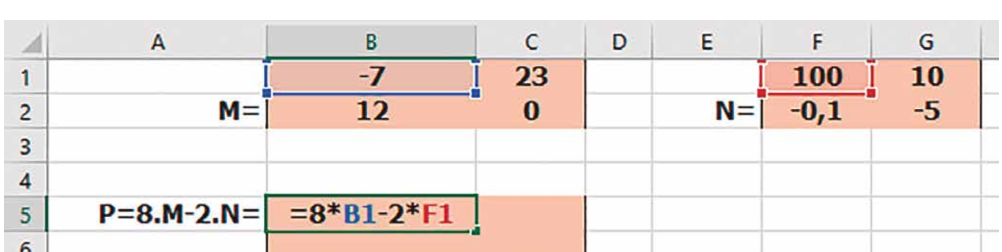

Figura 65 – Exemplo do cálculo de P=8.M-2.N feito em planilha (parte 2)

Passo 3. Copie a fórmula inserida na célula B5 para as células B6, C5 e C6 e obtenha a situação mostrada na figura 66.

	A	B	C	D	E	F	G
1		-7	23			100	10
2	M=	12	0		N=	-0,1	-5
3							
4							
5	P=8.M-2.N=	=8*B1-2*F1	=8*C1-2*G1				
6		=8*B2-2*F2	=8*C2-2*G2				

Figura 66 – Exemplo do cálculo de P=8.M-2.N feito em planilha (parte 3)

Se copiarmos uma fórmula em células de uma planilha eletrônica, haverá atualização "automática" das referências empregadas em virtude do deslocamento de posições "para a direita e para baixo". Assim, obtemos os elementos da matriz P=8.M-2.N, como podemos ver na figura 67.

	A	B	C	D	E	F	G
1		-7	23			100	10
2	M=	12	0		N=	-0,1	-5
3							
4							
5	-2.N=	-256	164				
6		96,2	10				

Figura 67 – Exemplo do cálculo de P=8.M-2.N feito em planilha (parte 4)

Exemplo de aplicação

Exemplo 9

Qual é a fórmula a ser inserida na célula B14 da planilha mostrada na figura 68, sendo T=-2.M+13.N?

	A	B	C	D	E	F	G
9							
10		31	98			45	7
11	M=	-8	12		N=	-3	-6
12							
13							
14	T=-2.M+13.N=						
15							

Figura 68 – Exemplo do cálculo de T=-2.M+13.N feito em planilha

Resolução

Para que seja calculado o elemento da 1ª linha e da 1ª coluna da matriz T, devemos inserir a fórmula =-2*B10+13*F10 na célula B14 mostrada na figura 68.

5.14 Multiplicação de matrizes

Somente podemos fazer a multiplicação de duas matrizes A e B caso a quantidade de colunas da matriz A seja igual à quantidade de linhas da matriz B. Se essa condição for atendida, o resultado obtido é uma matriz C que tem a mesma quantidade de linhas da matriz A e a mesma quantidade de colunas da matriz B.

De modo geral, podemos dizer que a multiplicação da matriz A de ordem mxn pela matriz B de ordem nxp resulta na matriz C=A.B de ordem mxp.

Os elementos da matriz C são dados por:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Lembrete

A multiplicação de duas matrizes pode ser escrita como o produto de duas matrizes.

Vejamos um exemplo de multiplicação de matrizes. Para isso, considere as matrizes R e S a seguir.

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 3 \\ 50 & 10 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Seja T=R.S a matriz resultante da multiplicação de R e S. Vemos que é possível executar tal operação, pois R tem 3 colunas e S tem 3 linhas, ou seja, o número de linhas de S é o número de colunas de R.

Veja que não poderíamos fazer U=S.R, pois S tem 1 coluna e R tem 2 linhas, ou seja, o número de linhas de R não é o número de colunas de S.

Voltemos à matriz T=R.S.

Efetuamos a multiplicação de matrizes do modo descrito a seguir.

Para obtermos o elemento da primeira linha e primeira coluna de T, multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha da primeira matriz (R) e o primeiro elemento da primeira coluna da segunda matriz (S), somamos esse resultado com o produto do segundo elemento da primeira linha da primeira matriz (R) pelo segundo elemento da primeira coluna da segunda matriz (S) e com o produto do terceiro elemento da primeira linha da primeira matriz (R) pelo terceiro elemento da primeira coluna da segunda matriz (S). Fazemos isso de modo sucessivo até terminarmos de calcular todos os elementos da matriz T, conforme mostrado a seguir.

$$T = R.S = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 3 \\ 50 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 12.25 + (-7).(-8) + 3.6 \\ 50.25 + 10.(-8) + 2.6 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 374 \\ 1182 \end{pmatrix}$$

Podemos fazer o cálculo anterior com o auxílio de recursos da planilha eletrônica do Excel. O passo a passo para isso está descrito a seguir.

Passo 1. Digite os elementos das matrizes R e S em células de uma planilha, como nas células B2, B3, C2, C3, D2, D3, G2, G3 e G4 mostradas na figura 69.

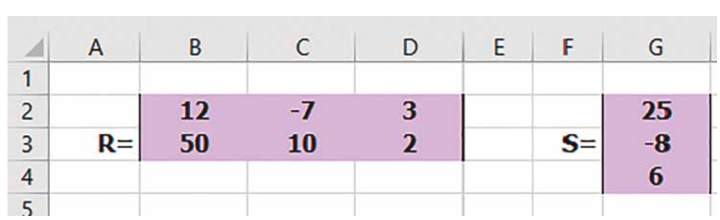

Figura 69 – Exemplo do cálculo de T=R.S feito em planilha (parte 1)

Passo 2. Conforme mostrado na figura 70, insira a fórmula =B2*G2+C2*G3+D2*G4 na célula B6.

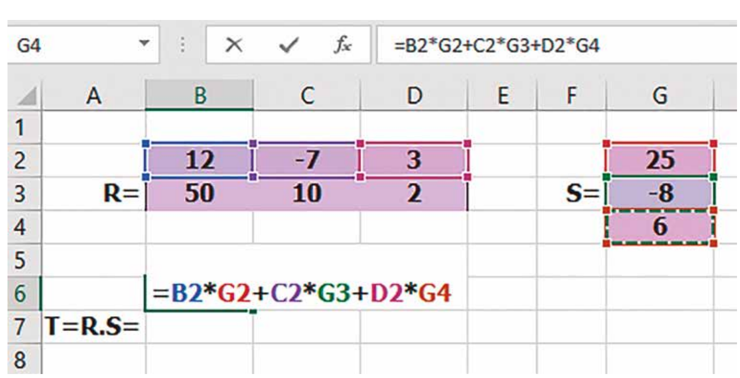

Figura 70 – Exemplo do cálculo de T=R.S feito em planilha (parte 2)

Passo 3. Conforme mostrado na figura 71, prossiga com a inserção de fórmula.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		12	-7	3			25
3	R=	50	10	2		S=	-8
4							6
5							
6		=B2*G2+C2*G3+D2*G4					
7	T=R.S=	=B3*G2+C3*G3+D3*G4					
8							

Figura 71 – Exemplo do cálculo de T=R.S feito em planilha (parte 3)

A figura 72 mostra o resultado da multiplicação de matrizes dada por T=R.S feita com o auxílio de planilha eletrônica.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		12	-7	3			25
3	R=	50	10	2		S=	-8
4							6
5							
6	T=R.S=	374					
7		1182					

Figura 72 – Exemplo do cálculo de T=R.S feito em planilha (parte 4)

Saiba mais

Para saber mais sobre como operar com matrizes no Excel, pesquise as "fórmulas matriciais". De modo particular, nas "fórmulas matriciais", há a MATRIZ.MULT, que retorna o resultado da multiplicação de duas matrizes.

Exemplo de aplicação

Exemplo 10

Calcule os elementos da matriz Z dada por Z=A.B-7.C, sendo A, B e C as matrizes a seguir.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -1 & 20 \\ 7 & 8 \\ 10 & -2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -5 & 31 \\ 23 & 33 \end{pmatrix}\ \text{e}\ C=\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 2 & 0 \\ 16 & -3 \\ 21 & 61 \\ 67 & 52 \end{pmatrix}$$

Resolução

Vamos, primeiramente, calcular a matriz T=A.B, conforme detalhado a seguir.

$$T = A\,.\,B = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -1 & 20 \\ 7 & 8 \\ 10 & -2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -5 & 31 \\ 23 & 33 \end{pmatrix}$$

$$T = A\,.\,B = \begin{pmatrix} 3.(-5)+15.23 & 3.31+15.33 \\ -1.(-5)+20.23 & (-1).31+20.33 \\ 7.(-5)+8.23 & 7.31+8.33 \\ 10(-5)+(-2).23 & 10.31+(-2).33 \\ 12.(-5)+6.23 & 12.31+6.33 \end{pmatrix}$$

$$T = A\,.\,B = \begin{pmatrix} -15+345 & 93+495 \\ 5+460 & -31+660 \\ -35+184 & 217+264 \\ -50-46 & 310-66 \\ -60+138 & 372+198 \end{pmatrix}$$

$$T = A\,.\,B = \begin{pmatrix} 330 & 588 \\ 465 & 629 \\ 149 & 481 \\ -96 & 244 \\ 78 & 570 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos calcular a matriz U=-7.C, conforme detalhado a seguir.

$$U = -7\,.\,C = -7\,.\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 2 & 0 \\ 16 & -3 \\ 21 & 61 \\ 67 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-7).(-9) & (-7).(-1) \\ (-7).2 & (-7).0 \\ (-7).16 & (-7).(-3) \\ (-7).21 & (-7).61 \\ (-7).67 & (-7).52 \end{pmatrix}$$

$$U=-7.C=\begin{pmatrix}63 & 7\\-14 & 0\\-112 & 21\\-147 & -427\\-469 & -364\end{pmatrix}$$

Como T=A.B e U=-7.C, podemos calcular Z=A.B-7.C=A.B+(-7.C)=T+U conforme mostrado a seguir.

$$Z=T+U=\begin{pmatrix}330 & 588\\465 & 629\\149 & 481\\-96 & 244\\285 & 570\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}63 & 7\\-14 & 0\\-112 & 21\\-147 & -427\\-469 & -364\end{pmatrix}$$

$$Z=T+U=\begin{pmatrix}330+63 & 588+7\\465+(-14) & 629+0\\149+(-112) & 481+21\\-96+(-147) & 244+(-427)\\285+(-469) & 570+(-364)\end{pmatrix}$$

$$Z=\begin{pmatrix}393 & 595\\451 & 629\\37 & 502\\-243 & -183\\-184 & 206\end{pmatrix}$$

5.15 Matriz inversa

A matriz inversa da matriz quadrada A, indicada por A^{-1}, se existir, é calculada por meio da seguinte igualdade:

$A.A^{-1} = I$

Na expressão, I é a matriz identidade, sendo que as matrizes quadradas A, A^{-1} e I têm a mesma ordem mxm.

Vale destacar que:

- nem toda matriz tem matriz inversa;
- somente matrizes quadradas podem ter matrizes inversas;
- a matriz inversa I^{-1} da matriz identidade I é a própria matriz identidade;
- a inversa da inversa da matriz A é a própria matriz A.

Lembrete

Matrizes quadradas podem ter inversas, mas não as têm necessariamente.

Tomemos como exemplo a matriz A a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A inversa de A é a matriz A^{-1} a seguir.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que o produto da matriz A pela matriz A^{-1} resulta na matriz identidade I, conforme calculado a seguir.

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 2.0+0.(-0,5)+1.1 & 2.(-0,5)+0.0,25+1.1 & 2.0,5+0.0,25+1.(-1) \\ 1.0+2.(-0,5)+1.1 & 1.(-0,5)+2.0,25+1.1 & 1.0,5+2.0,25+1.(-1) \\ 3.0+2.(-0,5)+1.1 & 3.(-0,5)+2.0,25+1.1 & 3.0,5+2.0,25+1.(-1) \end{pmatrix}$$

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix} 0+0+1 & -1+0+1 & 1+0-1 \\ 0-1+1 & -0,5+0,5+1 & 0,5+0,5-1 \\ 0-1+1 & -1,5+0,5+1 & 1,5+0,5-1 \end{pmatrix}$$

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

5.16 Determinante de uma matriz quadrada

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem mxm é um número, indicado por det A, que pode ser usado para acharmos a solução de um sistema de equações lineares, como será visto no capítulo 6.

Por exemplo, considere a matriz A de ordem 2x2 mostrada a seguir.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 13 & 81 \end{pmatrix} \text{ou } A=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 13 & 81 \end{bmatrix}$$

O determinante de A é representado por:

$$\det A=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 13 & 81 \end{vmatrix}$$

Vejamos como podemos calcular os determinantes de matrizes quadradas de várias ordens.

No caso de matrizes de ordem 1x1, que contêm um único elemento, o determinante é esse elemento.

Por exemplo, considere a matriz B de ordem 1x1 mostrada a seguir.

B = (93) ou B = [93]

O determinante de B é igual a 93, pois:

det B = |93| = 93

De modo geral, temos o que segue.

$A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$

No caso de matrizes de ordem 2x2, o determinante é obtido pelo resultado da multiplicação dos elementos da diagonal principal subtraído do resultado da multiplicação dos elementos da diagonal secundária.

Por exemplo, considere a matriz C de ordem 2x2 mostrada a seguir.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix} \text{ ou } C = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}$$

O determinante de C é igual a -200, pois:

$$\det\ C = \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{vmatrix} = 10.40 - (20.30) = 400 - 600 = -200$$

De modo geral, temos o que segue.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det A = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

No caso de matrizes de ordem 3x3, o determinante é obtido pela aplicação da chamada regra de Sarrus, apresentada na explicação que segue.

Por exemplo, considere a matriz D de ordem 3x3 mostrada a seguir.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ ou } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Pela regra de Sarrus, inicialmente, copiamos a primeira coluna e a segunda coluna da matriz D no lado direito da própria matriz D:

$$\left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

Apenas a título de destaque, podemos visualizar as cópias de colunas da matriz D na figura 73.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

Figura 73 – Destaque de cópias de colunas da matriz D

Agora, considere o esquema de referenciamento da figura 74.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

Figura 74 – Destaque de cópias de colunas da matriz D

Para calcularmos o determinante da matriz D, consideramos como positivos os produtos de elementos incluídos pelas linhas tracejadas pretas e como negativos os produtos de elementos incluídos pelas linhas tracejadas vermelhas da figura 74:

det D=(1.5.9+2.6.7+3.4.8)-(3.5.7+1.6.8+2.4.9)

det D=(45+84+96)-(105+48+72)

det D=(45+84+96)-(105+48+72)

det D=225-225

det D=0

De modo geral, temos o que segue.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = \left(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}\right) - \left(a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}\right)$$

Devemos lembrar que o esquema da figura 75 ajuda na realização do cálculo do determinante de uma matriz A de ordem 3x3.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & + & + & + \end{array}$$

Figura 75 – Esquema de apoio para a aplicação da regra de Sarrus

Exemplo de aplicação

Exemplo 11

Calcule o determinante da matriz M a seguir.

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 10 \\ -1 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Resolução

Pela regra de Sarrus, para determinarmos o valor do determinante da matriz M, copiamos a primeira coluna e a segunda coluna da matriz M no lado direito da própria matriz M:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 0 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 5 \\ -1 & 12 & 20 & -1 & 12 \end{array}\right.$$

Vejamos o esquema de referenciamento mostrado na figura 76.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 0 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 5 \\ -1 & 12 & 20 & -1 & 12 \end{array}\right.$$

Figura 76 – Esquema de apoio para a aplicação da regra de Sarrus: exemplo 11

det D=[7.5.20+0.10.(-1)+(-2).1.12]-[(-2).5.(-1)+7.10.12+0.1.20]

det D=(700+0-24)-(10+840+0)

det D=676-850

det D=-174

Observação

Para calcularmos o determinante de matrizes quadradas de ordem igual ou de ordem superior a 4, devemos utilizar o teorema de Laplace, o que não é escopo deste livro.

Saiba mais

Para verificar os cálculos de determinantes de matrizes quadradas de ordem n qualquer, visite o *site* indicado a seguir.

https://www.dcode.fr/matrix-determinant

6 SISTEMAS LINEARES

6.1 Definições

Antes de abordamos os sistemas lineares propriamente ditos, precisamos definir o que é uma equação linear. Vamos lá.

Equação linear é toda equação (igualdade) que pode ser escrita na forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$

Na equação linear, temos o seguinte:

- a_1, a_2, ..., a_n são os coeficientes;
- x_1, x_2, ..., x_n são as incógnitas;
- b é o termo independente.

As equações a seguir são exemplos de equações lineares:

- $2x_1 = 16$, com solução dada por $x_1=8$, pois $2.8=16$
- $3x_1 + 7x_2 = 58$, com solução dada por $x_1=-4$ e $x_2=10$, pois $3.(-4)+7.10=-12+70=58$
- $-0{,}5x_1 + 27x_2 + 6{,}7x_3 - 5{,}3x_4 = 56{,}61$, com solução dada por $x_1=20$, $x_2=0{,}3$, $x_3=2{,}8$ e $x_4=-7{,}5$, pois $-0{,}5.(20)+27.0{,}3+6{,}7.2{,}8-5{,}3.(-7{,}5)=-10+8{,}1+18{,}76+39{,}75=56{,}61$

Observação

Uma equação do tipo $2x_1^3 = 250$, cuja solução é x_1=-5, pois 2.(-5)³=2.(-125)=-250, não é uma equação linear, pois o expoente de x_1 não é 1.

Lembrete

Escrever $3x_1 + 7x_2 = 58$ é equivalente a escrever $3x_1^2 + 7x_2^1 = 58$

Denomina-se sistema linear de m equações e n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

No sistema linear acima, os coeficientes $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais.

Se o conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfizer todas as equações do sistema, esse conjunto é chamado de solução do sistema linear.

Por exemplo, considere o sistema linear a seguir, formado por duas equações, cada uma formada por duas incógnitas.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases}$$

O conjunto (7,3) é solução do sistema linear acima, pois, se substituirmos x_1 por 7 e x_2 por 3, atendemos a ambas as equações, conforme mostrado a seguir.

$$\begin{cases} 3.7 - 5.3 = 21 - 15 = 6 \\ 7 + 5.3 = 7 + 15 = 22 \end{cases}$$

Como poderíamos ter determinado que a solução do sistema de equações em estudo é $(x_1,x_2)=(7,3)$?

Há duas possibilidades:

- fazermos o isolamento de uma das incógnitas em uma das equações e sua substituição na outra equação, o que pode ser chamado de "método da substituição";

- fazermos os ajustes de coeficientes para somarmos as equações, o que pode ser chamado de "método da adição".

Vamos resolver o sistema pelos dois métodos citados, mas, antes disso, vamos nomear as equações de equação I e equação II, conforme mostrado a seguir.

Equação I: $3x_1-5x_2=6$

Equação II: $x_1+5x_2=22$

Vemos que se trata de um sistema formado por duas equações (equação I e equação II) a duas incógnitas (x_1 e x_2).

Começamos com o "método da substituição". Vamos isolar a incógnita x_1 da equação II:

$x_1+5x_2=22 \Rightarrow x_1=22-5x_2$

Substituímos $x_1=22-5x_2$ na equação I:

$3x_1-5x_2=6 \Rightarrow 3.(22-5x_2)-5x_2=6$

$66-15x_2-5x_2=6 \Rightarrow -20x_2=6-66 \Rightarrow -20x_2=-60$

$$x_2=\frac{-60}{-20} \Rightarrow x_2=3$$

Agora, substituímos x_2 por 3 na equação II:

$x_1+5.3=22 \Rightarrow x_1+15=22 \Rightarrow x_1=22-15 \Rightarrow x_1=7$

Alternativamente, vamos resolver o sistema pelo "método da adição". Para isso, multiplicamos todos os termos da equação II por -3. Assim, obtemos a equação III:

Equação III: $(-3).x_1+(-3).5x_2=(-3).22$

Equação III: $-3x_1-15x_2=-66$

Montamos a adição da equação I e da equação III:

Equação I: $3x_1-5x_2=6$

Equação III: $-3x_1-15x_2=-66$

Ficamos com:

$3x_1 - 5x_2 = 6$

$$\frac{-3x_1 - 15x_2 = -66}{-20x_2 = -60}$$

$-20x_2 = -60$

$$x_2 = \frac{-60}{-20} \Rightarrow x_2 = 3$$

Se substituirmos x_2 por 3 em qualquer uma das equações, chegaremos a $x_1=7$.

Lembrete

Veja que $3x_1+(-3x_1)= 3x_1-3x_1=0$

Se os termos independentes de todas as equações que formam um sistema linear forem nulos, isto é, se $b_1 = b_2 = ... = b_n =0$, então o sistema é chamado de homogêneo.

6.2 Classificação dos sistemas lineares

De modo amplo, os sistemas lineares são classificados conforme segue.

- Sistema linear possível ou compatível: admite solução.
- Sistema linear impossível ou incompatível: não admite solução.

O exemplo que fizemos no item anterior, em que estudamos as equações $3x_1-5x_2=6$ e $x_1+5x_2=22$, refere-se a um sistema linear possível (ou compatível), formado por duas equações com duas incógnitas, cuja solução foi dada por $(x_1,x_2)=(7,3)$.

Vejamos, a seguir, um caso de sistema linear impossível (ou incompatível).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

Na primeira equação, é dito que a soma de dois números deve ser igual a 6. Na segunda equação, é dito que a soma de dois números deve ser igual a 10. Existem dois números que atendam, ao mesmo tempo, essas duas condições?

Não, as condições não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo. Logo, o sistema anterior não tem solução, pois trata-se de um sistema de duas equações a duas incógnitas impossível de ser resolvido.

Quanto ao número de soluções, os sistemas lineares possíveis (ou compatíveis) são classificados conforme segue.

- Sistema linear possível e determinado: admite uma única solução.
- Sistema linear possível e indeterminado: admite infinitas soluções.

Por exemplo, veja o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -34 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -17 \end{cases}$$

Vamos nomear as equações de equação I, equação II e equação III, conforme mostrado a seguir.

Equação I: $2x_1+5x_2-x_3=-34$

Equação II: $x_1-x_2+x_3=20$

Equação III: $3x_1+2x_2-x_3=-17$

Logo, temos um sistema de três equações (equações I, II e III) a três incógnitas (x_1, x_2 e x_3). Se substituirmos x_1 por 2, x_2 por -5 e x_3 por 13, atendemos às três equações, como pode ser verificado a seguir.

Equação I: $2x_1+5x_2-x_3=2.2+.5.(-5)-13=4-25-13=-34$

Equação II: $x_1-x_2+x_3=2-(-5)+13=2+5+13=20$

Equação III: $3x_1+2x_2-x_3=3.2+2.(-5)-13=6-10-13=-17$

Escrevemos que a solução do sistema é $(x_1,x_2,x_3)=(2,-5,13)$. Como essa é a única opção de trio de valores que satisfaz ao mesmo tempo as equações I, II e III, o sistema analisado é possível e determinado.

Agora, observe o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 = 36 \end{cases}$$

Vamos nomear as equações desse sistema de equação I e equação II, conforme mostrado a seguir.

Equação I: $x_1+x_2=12$

Equação II: $3x_1+3x_2=36$

Logo, temos um sistema de duas equações (equações I e II) a duas incógnitas (x_1 e x_2). Veja que não há uma solução única para esse sistema, conforme mostrado nas substituições do quadro a seguir.

Quadro 1 – Algumas soluções das equações I e II

x_1	x_2	Equação I	Equação II
0	12	$x_1+x_2=0+12=12$	$3x_1+3x_2=3.0+3.12=36$
1	11	$x_1+x_2=1+11=12$	$3x_1+3x_2=3.1+3.11=36$
5	7	$x_1+x_2=5+7=12$	$3x_1+3x_2=3.5+3.7=36$
-1	13	$x_1+x_2=-1+13=12$	$3x_1+3x_2=3.(-1)+3.13=36$
2,8	9,2	$x_1+x_2=2,8+9,2=12$	$3x_1+3x_2=3.2,8+3.9,2=36$
-35,7	47,7	$x_1+x_2=-35,7+47,7=12$	$3x_1+3x_2=3.(-35,7)+3.(47,7)=36$

Além das soluções indicadas no quadro, há outras inúmeras soluções para o sistema em análise, o que o caracteriza como um sistema possível e indeterminado.

Na realidade, veja que, se colocarmos 3 em evidência na equação II, ficamos com:

$$3x_1+3x_2=36 \Rightarrow 3.(x_1+x_2)=3.12 \Rightarrow (x_1+x_2)=\frac{3.12}{3} \Rightarrow x_1+x_2=12$$

Concluímos que, no sistema estudado anteriormente, classificado como um sistema possível e indeterminado, as equações I e II são equivalentes.

6.3 Expressão matricial de um sistema linear

Entre as variadas aplicações das matrizes está sua utilização para a resolução de um sistema de equações lineares.

Considere o sistema de equações lineares (sistema linear) mostrado a seguir.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Esse sistema pode ser representado com o uso de matrizes. Trata-se da expressão matricial do sistema linear, indicada a seguir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ am & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nessa representação, temos o que segue.

- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ am & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ é a matriz construída pelos coeficientes das incógnitas.

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a matriz coluna construída pelas incógnitas.

- $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ é a matriz coluna construída pelos termos independentes.

Verificamos que, se efetuamos a multiplicação das matrizes, obtemos o sistema de equações lineares original.

Vejamos um exemplo. Para isso, considere o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ 2x_1 + 10x_2 = 44 \end{cases}$$

Vamos representar esse sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Façamos a multiplicação do termo do lado esquerdo da equação:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + (-5)x_2 \\ 2x_1 + 10x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 + 10x_2 \end{pmatrix}$$

Assim, ficamos com:

$$\begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 + 10x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Para que duas matrizes sejam iguais, seus elementos de mesma posição devem ser iguais. Logo, no caso em estudo, temos que:

$3x_1 - 5x_2 = 6$ e $2x_1 + 10x_2 = 44$

As duas equações acima podem ser escritas na forma de um sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ 2x_1 + 10x_2 = 44 \end{cases}$$

Observação

Uma matriz pode ser representada das formas indicadas a seguir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

6.4 Resolução de sistemas lineares pela regra de Cramer

A regra de Cramer é um método usado na resolução de sistemas lineares que utiliza o cálculo de determinantes. Essa regra pode ser usada no caso de um sistema linear ter número de equações igual ao número de incógnitas e determinante diferente de zero.

Vamos começar nosso estudo com o caso de um sistema formado por duas equações a duas incógnitas, como o mostrado a seguir.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Com esse sistema, podemos elaborar as matrizes a seguir.

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes das incógnitas x_1 e x_2
- $A_{x_1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes b_1 e b_2

- $A_{x_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes b_1 e b_2

Os componentes da solução (x_1,x_2) do sistema são calculados por:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A} \text{ e } x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}$$

Lembrete

Como vimos no capítulo anterior:

- det A é o determinante da matriz A
- det Ax_1 é o determinante da matriz Ax_1
- det Ax_2 é o determinante da matriz Ax_2

Vejamos como a regra de Cramer é empregada para resolvermos o sistema de duas equações a duas incógnitas mostrado abaixo.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7 \\ x_1 + 5x_2 = -2 \end{cases}$$

Observação

Veja que a equação $2x_1 - x_2 = 7$ pode ser escrita como $2x_1 - 1x_2 = 7$. Logo, nessa equação, o coeficiente de x_2 é -1.

Vamos chamar de A a matriz dos coeficientes das incógnitas, de A_{x1} a matriz obtida a partir da matriz dos coeficientes, substituindo a primeira coluna (coeficientes de x_1) pelos termos independentes, e de A_{x2} a matriz obtida a partir da matriz dos coeficientes, substituindo a segunda coluna (coeficientes de x_2) pelos termos independentes.

Logo, temos o que segue.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes das incógnitas.
- $A_{x1} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes b_1 e b_2
- $A_{x2} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes b_1 e b_2

Os valores de x_1 e de x_2 que fornecem a solução para o sistema linear em estudo são dados pelas fórmulas a seguir, vindas da regra de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det A_{x1}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det A_{x2}}{\det A}$$

Como temos apenas matrizes quadradas de ordem 2, os determinantes de A, A_{x1} e A_{x2} são calculados conforme mostrado a seguir.

- det A=[2.5]-[1.(-1)]=10+1=11
- det A_{x1}=[7.5]-[(-1).(-2)]=35-2=33
- det A_{x2}=[2.(-2)]-[1.7]=-4-7=-11

$$x_1 = \frac{\det A_{x1}}{\det A} = \frac{33}{11} = 3$$

$$x_2 = \frac{\det A_{x2}}{\det A} = \frac{-11}{11} = -1$$

A resposta à qual chegamos é $(x_1,x_2)=(3,-1)$.

Podemos substituir os valores encontrados para x_1 e x_2 no sistema de equações lineares original a fim de verificarmos que a solução realmente está correta. Vejamos:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2.3 - (-1) = 6 + 1 = 7 \\ x_1 + 5x_2 = 3 + 5.(-1) = 3 - 5 = -2 \end{cases}$$

Exemplo de aplicação

Exemplo 12

Resolva o sistema de duas equações a duas incógnitas mostrado abaixo usando a regra de Cramer.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 = 7 \end{cases}$$

Resolução

Vamos chamar de A a matriz dos coeficientes das incógnitas, de A_{x1} a matriz obtida a partir da matriz dos coeficientes, substituindo a primeira coluna (coeficientes de x_1) pelos termos independentes, e de A_{x2} a matriz obtida a partir da matriz dos coeficientes, substituindo a segunda coluna (coeficientes de x_2) pelos termos independentes.

Logo, temos o que segue.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes das incógnitas.

- $A_{x1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes b_1 e b_2

- $A_{x2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes b_1 e b_2

Os valores de x_1 e de x_2 que fornecem a solução para o sistema linear em estudo são dados pelas fórmulas a seguir, vindas da regra de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det A_{x1}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det A_{x2}}{\det A}$$

Como temos apenas matrizes quadradas de ordem 2, os determinantes de A, A_{x1} e A_{x2} são calculados conforme mostrado a seguir.

- $\det A=2.(-3)-3.4=-6-12=-18$
- $\det A_{x1}=5.(-3)-3.7=-15-21=-36$
- $\det A_{x2}=2.7-5.4=14-20=-6$

$$x_1 = \frac{\det A_{x1}}{\det A} = \frac{-36}{-18} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det A_{x2}}{\det A} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

A resposta à qual chegamos é $(x_1, x_2) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$.

Podemos substituir os valores encontrados para x_1 e x_2 no sistema de equações lineares original a fim de verificarmos que a solução realmente está correta. Vejamos:

$$\begin{cases} 2(2)+3\left(\dfrac{1}{3}\right)=4+1=5 \\ 4(2)-3\left(\dfrac{1}{3}\right)=8-1=7 \end{cases}$$

Agora, vamos continuar nosso estudo com o caso de um sistema formado por três equações a três incógnitas, como o mostrado a seguir.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Com esse sistema, podemos elaborar as matrizes a seguir.

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$: matriz obtida a partir dos coeficientes das incógnitas x_1, x_2 e x_3

- $A_{x_1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes b_1, b_2 e b_3

- $A_{x_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes b_1, b_2 e b_3

- $A_{x_3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes b_1, b_2 e b_3

Os componentes da solução (x_1,x_2,x_3) do sistema são calculados por:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}$$

$$x_3 = \frac{\det A_{x_3}}{\det A}$$

Vejamos como a regra de Cramer é empregada para resolvermos o sistema de três equações a três incógnitas mostrado abaixo.

$$\begin{cases} -1x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 12 \end{cases}$$

Com esse sistema, podemos elaborar as matrizes a seguir.

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$: matriz obtida a partir dos coeficientes das incógnitas x_1, x_2 e x_3

- $Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -7 & -2 & 6 \\ 12 & 3 & -1 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes b_1, b_2 e b_3

- $Ax_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & 6 \\ 2 & 12 & -1 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes b_1, b_2 e b_3

- $Ax_3 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 12 \end{bmatrix}$: matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_3 pelos termos independentes b_1, b_2 e b_3

Precisamos calcular os determinantes dessas matrizes de ordem 3x3, o que foi ensinado no capítulo anterior com a apresentação da regra de Sarrus. Vamos ver esses cálculos detalhados a seguir.

Determinante da matriz A (det A)

Com base no esquema a seguir, calculamos det A.

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 5 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right.$$

det A=[(-1).(-2).(-1)+5.6.2+2.5.3]-[2.(-2).2+(-1).6.3+5.5.(-1)]

det A=(-2+60+30)-(-8-18-25)

det A=88+51

det A=139

Determinante da matriz A_{x1} (det A_{x1})

Com base no esquema a seguir, calculamos det A_{x1}

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ -7 & -2 & 6 & -7 & -2 \\ 12 & 3 & -1 & 12 & 3 \end{array}\right.$$

det A_{x1}=[3.(-2).(-1)+5.6.12+2.(-7).3]-[2.(-2).12+3.6.3+5.(-7).(-1)]

det A_{x1}=(6+360-42)-(-48+54+35)

det A_{x1}=324-41

det A_{x1}=283

Determinante da matriz A_{x2} (det A_{x2})

Com base no esquema a seguir, calculamos det A_{x2}

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 6 & 5 & -7 \\ 2 & 12 & -1 & 2 & 12 \end{array}\right.$$

det A_{x2}=[(-1).(-7).(-1)+3.6.2+2.5.12]-[2.(-7).2+(-1).6.12+3.5.(-1)]

$\det A_{x2}$=(-7+36+120)-(-28-72-15)

$\det A_{x2}$=149+115

$\det A_{x2}$=264

Determinante da matriz A_{x3} (det A_{x3})

Com base no esquema a seguir, calculamos det A_{x3}

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 5 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & -7 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 12 & 2 & 3 \end{array}\right.$$

$\det A_{x3}$=[(-1).(-2).(12)+5.(-7).2+3.5.3]-[3.(-2).2+(-1).(-7).3+5.5.12]

$\det A_{x3}$=(24-70+45)-(-12+21+300)

$\det A_{x3}$=-1-309

$\det A_{x3}$=-310

Os componentes da solução (x_1,x_2,x_3) do sistema são calculados por:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A} = \frac{283}{139}$$

$$x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A} = \frac{264}{139}$$

$$x_3 = \frac{\det A_{x_3}}{\det A} = \frac{-310}{139}$$

Saiba mais

Para resolver sistemas lineares pela regra de Cramer, visite o *site* indicado a seguir.

https://matrixcalc.org/pt/slu.html

Podemos fazer a discussão de um sistema linear usando a regra de Cramer. Para isso, considere o sistema linear a seguir, composto por n equações e n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Devemos lembrar que discutir o sistema é saber se ele é possível, impossível, determinado ou indeterminado.

Voltando à regra de Cramer, temos o que segue.

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \cdots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Nas igualdades acima:

- A é a matriz obtida a partir dos coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$
- A_{x1} é a matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$
- A_{x2} é a matriz dos coeficientes com substituição dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$
- e assim por diante.

Com isso, temos as classificações a seguir.

- Sistema possível e determinado: $\det A \neq 0$
- Sistema possível e indeterminado: $\det A = 0$ e $\det A_1 = \det A_2 = ... = \det A_n = 0$
- Sistema impossível (não tem solução): $\det A = 0$ e pelo menos um $\det A_n \neq 0$

Observação

É comum vermos as classificações "sistema possível e determinado", "sistema possível e indeterminado" e "sistema impossível" serem representadas, respectivamente, por SPD, SPI e SI.

6.5 Resolução de sistemas lineares pelo método do escalonamento

No método do escalonamento (ou método de Gauss), convertemos a matriz associada a determinado sistema linear de n equações a n incógnitas em uma matriz escalonada por meio da aplicação de uma série de operações algébricas que não alteram a solução do sistema.

Essas operações são conhecidas como operações elementares e podem ser descritas conforme segue.

- Somar os elementos de duas linhas da matriz.
- Multiplicar os elementos de uma linha da matriz por um número real diferente de zero.
- Somar os múltiplos dos elementos de uma linha com elementos de outra linha da matriz.
- Trocar posições de linhas da matriz.

Vejamos como essas operações são processadas por meio de um exemplo. Para isso, considere o sistema linear a seguir, formado por três equações a três incógnitas.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 1x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 49 \\ -5x_1 + 10x_2 - 2x_3 = -77 \end{cases}$$

Com os coeficientes e com os termos independentes desse sistema, podemos elaborar a matriz a seguir.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -20 \\ 3 & -2 & 5 & 49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por ½, a fim de ficarmos com o elemento da 1ª linha e 1ª coluna igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 2.\frac{1}{2} & 4.\frac{1}{2} & -1.\frac{1}{2} & -20.\frac{1}{2} \\ 3 & -2 & 5 & 49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 3 & -2 & 5 & 49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix}$$

Lembrete

A multiplicação de 2 por 1/2 resulta em 1, pois:

$$2.\frac{1}{2}=\frac{2}{2}.1=1.1=1$$

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por -3 e somamos tais elementos aos elementos da 2ª linha, a fim de ficarmos com o elemento da 2ª linha e 1ª coluna igual a 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ -3+3 & -6-2 & 3/2+5 & 30+49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ 0 & -8 & 13/2 & 79 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 2ª linha por -1/8, a fim de ficarmos com o elemento da 2ª linha e 2ª coluna igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ 0 & -8.-1/8 & 13/2.-1/8 & 79.-1/8 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ 0 & 1 & -13/16 & -79/8 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por 5 e somamos tais elementos aos elementos da 3ª linha, a fim de ficarmos com o elemento da 3ª linha e 1ª coluna igual a 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ 0 & 1 & -13/16 & -79/8 \\ 5-5 & 10+10 & -5/2-2 & -50-77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ 0 & 1 & -13/16 & -79/8 \\ 0 & 20 & -9/2 & -127 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 2ª linha por -20 e somamos tais elementos aos elementos da 3ª linha, a fim de ficarmos com o elemento da 3ª linha e 2ª coluna igual a 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{16} & -\frac{79}{8} \\ 0 & -20+20 & \frac{260}{16}-\frac{9}{2} & \frac{1580}{8}-127 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{16} & -\frac{79}{8} \\ 0 & 0 & \frac{188}{16} & \frac{564}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{16} & -\frac{79}{8} \\ 0 & 0 & \frac{47}{4} & \frac{282}{4} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 3ª linha por 4/47, a fim de ficarmos com o elemento da 3ª linha e 3ª coluna igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{16} & -\frac{79}{8} \\ 0 & 0 & \frac{4}{47}.\frac{47}{4} & \frac{4}{47}.\frac{282}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{16} & -\frac{79}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Agora, com base na última matriz, voltamos à forma de sistema:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -10 \\ 0x_1 + 1x_2 - \frac{13}{16}x_3 = -\frac{79}{8} \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 6 \end{cases}$$

Começamos com a terceira equação:

$1x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 6$

Conhecendo o valor de x_3 ($x_3=6$), determinamos o valor de x_2 resolvendo a 2ª equação:

$$1x_2 - \frac{13}{16}x_3 = -\frac{79}{8}$$

$$x_2 - \frac{13}{16}.6 = -\frac{79}{8} \Rightarrow x_2 - \frac{39}{8} = -\frac{79}{8}$$

$$x_2 - \frac{79}{8} + \frac{39}{8} \Rightarrow x_2 = -\frac{40}{8} \Rightarrow x_2 = -5$$

Lembrete

A multiplicação de 13/16 por 6 resulta em 39/8, pois:

$$\frac{13}{16}.6=13.\frac{6}{16}=13.\frac{2.3}{2.8}=13.\frac{3}{8}=\frac{13.3}{8}=\frac{39}{8}$$

Conhecendo os valores de x_2 e de x_3 (x_2=-5 e x_3=6), determinamos o valor de x_1 resolvendo a 1ª equação:

$$1x_1+2x_2-\frac{1}{2}x_3=-10$$

$$1x_1+2(-5)-\frac{1}{2}.6=-10$$

x_1-10-3=-10 $\Rightarrow$ x_1=10+3-10 $\Rightarrow$ x_1=3

Logo, a solução do sistema de equações é (x_1,x_2,x_3)=(3,-5,6).

Observação

Queremos verificar se (x_1,x_2,x_3)=(3,-5,6) realmente é solução do sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-1x_3=-20 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=49 \\ -5x_1+10x_2-2x_3=-77 \end{cases}$$

Para isso, fazemos os cálculos mostrados a seguir.

$$\begin{cases} 2.3+4.(-5)-1.6=6-20-6=-20 \\ 3.3-2.(-5)+5.6=9+10+30=49 \\ -5.3+10.(-5)-2.6=-15-50-12=-77 \end{cases}$$

Veja que o objetivo do escalonamento é chegarmos a sistemas com as configurações mostradas a seguir, o que facilita os cálculos das incógnitas.

$$\begin{cases} 1x_1 + k_1x_2 = k_2 \\ 0x_1 + 1x_2 = k_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + k_1x_2 + k_2x_3 = k_3 \\ 0x_1 + 1x_2 + k_4x_3 = k_5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = k_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + k_1x_2 + k_2x_3 + k_3x_4 = k_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + k_5x_3 + k_6x_4 = k_7 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + k_8x_4 = k_9 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = k_{10} \end{cases}$$

Saiba mais

Para resolver sistemas lineares pelo método do escalonamento (método de Gauss), visite o *site* indicado a seguir.

https://matrixcalc.org/pt/slu.html

Exemplo de aplicação

Exemplo 13

Resolva o sistema de três equações a três incógnitas mostrado abaixo usando o método do escalonamento (método de Gauss).

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 5 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

Resolução

Com os coeficientes e com os termos independentes desse sistema, podemos elaborar a matriz a seguir.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por 1/3, a fim de ficarmos com o elemento da 1ª linha e 1ª coluna igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 3.\,1/3 & 2.\,1/3 & -1.\,1/3 & 5.\,1/3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por -2 e somamos tais elementos aos elementos da 2ª linha, a fim de ficarmos com o elemento da 2ª linha e 1ª coluna igual a 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ -2+2 & -4/3+1 & 2/3-1 & -10/3+3 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 2ª linha por -3, a fim de ficarmos com o elemento da 2ª linha e 2ª coluna igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & -3.\left(-1/3\right) & -3.\left(-1/3\right) & -3.\left(-1/3\right) \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por -5 e somamos tais elementos aos elementos da 3ª linha, a fim de ficarmos com o elemento da 3ª linha e 1ª coluna igual a 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -5+5 & -10/3-2 & 5/3+2 & -25/3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -16/3 & 11/3 & -46/3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 2ª linha por 16/3 e somamos tais elementos aos elementos da 3ª linha, a fim de ficarmos com o elemento da 3ª linha e 2ª coluna igual a 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 16/3 - 16/3 & 16/3 + 11/3 & 16/3 - 46/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos todos os elementos da 3ª linha por 1/9, a fim de ficarmos com o elemento da 3ª linha e 3ª coluna igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9.\left(1/9\right) & -10.\left(1/9\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10/9 \end{pmatrix}$$

Agora, com base na última matriz, voltamos à forma de sistema:

$$\begin{cases} 1x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = \frac{-10}{9} \end{cases}$$

Começamos com a terceira equação:

$$1x_3 = \frac{-10}{9} \Rightarrow x_3 = \frac{-10}{9}$$

Conhecendo o valor de x_3 (x_3=-10/9), determinamos o valor de x_2 resolvendo a 2ª equação:

$$1x_2 + 1x_3 = 1 \Rightarrow x_2 - \frac{10}{9} = 1$$

$$x_2 = 1 + \frac{10}{9} = \frac{9+10}{9}$$

$$x_2 = \frac{19}{9}$$

Conhecendo os valores de x_2 e de x_3 (x_2=19/9 e x_3=-10/9), determinamos o valor de x_1 resolvendo a 1ª equação:

$$1x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3=\frac{5}{3}$$

$$x_1+\frac{2}{3}.\frac{19}{9}-\frac{1}{3}.\left(\frac{-10}{9}\right)=\frac{5}{3}$$

$$x_1+\frac{38}{27}+\frac{10}{27}=\frac{5}{3}\Rightarrow x_1+\frac{48}{27}=\frac{5}{3}$$

$$x_1=\frac{5}{3}-\frac{48}{27}=\frac{45-48}{27}=\frac{-3}{27}$$

$$x_1=\frac{-1}{9}$$

Logo, a solução do sistema de equações é $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{-1}{9},\frac{19}{9},\frac{-10}{9}\right)$.

Se substituirmos essa solução do sistema original de equações, conferiremos que ela é correta:

$$\begin{cases} 3.\left(\frac{-1}{9}\right)+2.\left(\frac{19}{9}\right)-1.\left(\frac{-10}{9}\right)=\frac{-3}{9}+\frac{38}{9}+\frac{10}{9}=\frac{45}{9}=5 \\ 2.\left(\frac{-1}{9}\right)+1.\left(\frac{19}{9}\right)-1.\left(\frac{-10}{9}\right)=\frac{-2}{9}+\frac{19}{9}+\frac{10}{9}=\frac{27}{9}=3 \\ 5.\left(\frac{-1}{9}\right)-2.\left(\frac{19}{9}\right)+2.\left(\frac{-10}{9}\right)=\frac{-5}{9}-\frac{38}{9}-\frac{20}{9}=-\frac{63}{9}=-7 \end{cases}$$

Resumo

Na unidade II, abordamos os seguintes tópicos: matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Conceituamos matrizes em geral, matriz nula, matriz linha, matriz coluna, matriz quadrada, matriz diagonal, matriz identidade, matriz transposta, matriz oposta e igualdade de matrizes. Além disso, definimos soma de matrizes, multiplicação de matriz por escalar e multiplicação de matrizes.

A soma de duas matrizes ocorre pela soma dos elementos de posições equivalentes dessas duas matrizes. Por isso, apenas podemos somar duas matrizes de mesma ordem.

Também podemos somar matrizes com o auxílio das ferramentas do Excel. Para isso, preenchemos a fórmula relativa a tal cálculo em uma das células da planilha e copiamos a fórmula para as demais células envolvidas. Vale notar que, nesse procedimento, o próprio programa de planilha atualiza as referências da fórmula. Se não quisermos que isso aconteça, precisamos utilizar a referência absoluta nas fórmulas. A referência absoluta é realizada pela inserção do símbolo $ antes da coluna e/ou da linha na fórmula digitada na planilha. Esse tipo de referência absoluta faz com que os endereços de linha e/ou de coluna não sejam atualizados quando copiamos fórmulas de uma célula para outra.

A multiplicação de uma matriz por um escalar ocorre pela multiplicação de cada elemento da matriz pelo escalar.

Já a multiplicação de duas matrizes não é feita por meio de um cálculo direto. Cada elemento da matriz resultante da multiplicação é a soma dos produtos dos elementos da linha da primeira matriz pelos elementos da coluna correspondente da segunda matriz. Esse procedimento de cálculo dificulta o uso da cópia da fórmula de uma célula para a outra. No entanto, mostramos que, com o uso da referência absoluta $, essa situação pode ser resolvida.

Prosseguimos nossos estudos com explicações dos procedimentos realizados para os cálculos de determinantes de matrizes de ordens 1x1, 2x2 e 3x3.

Finalizamos a unidade com definições e classificações de sistemas lineares. Além disso, expusemos duas técnicas para a resolução de sistemas lineares: a regra de Cramer e o método do escalonamento (método de Gauss).

Exercícios

Questão 1. Considere as matrizes A, B e C dadas a seguir.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 10\\ 7 & 8\\ 2 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 50\\ 20 & 0\end{pmatrix}\ \text{e}\ C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 10 & 8\\ 16 & 12\\ 26 & 13\\ 69 & 11\end{pmatrix}$$

O elemento localizado na 5ª linha e 1ª coluna da matriz Z=A.B+8.C é igual a:

A) -7

B) 58

C) 663

D) 267

E) 446

Resposta correta: alternativa C.

Análise da questão

Vamos, primeiramente, calcular a matriz T=A.B, conforme detalhado a seguir.

$$T=A\,.\,B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 10\\ 7 & 8\\ 2 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3 & 50\\ 20 & 0\end{pmatrix}$$

$$T=A\,.\,B=\begin{pmatrix}1.(-3)+1.20 & 1.50+1.0\\ 0.(-3)+10.20 & 0.50+10.0\\ 7.(-3)+8.20 & 7.50+8.0\\ 2.(-3)+(-2).20 & 2.50+(-2).0\\ 3.(-3)+6.20 & 3.50+6.0\end{pmatrix}$$

$$T = A\,.\,B = \begin{pmatrix} -3+20 & 50+0 \\ 0+200 & 0+0 \\ -21+160 & 350+0 \\ -6-40 & 100+0 \\ -9+120 & 150+0 \end{pmatrix}$$

$$T = A\,.\,B = \begin{pmatrix} 17 & 50 \\ 200 & 0 \\ 139 & 350 \\ -46 & 100 \\ 111 & 150 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos calcular a matriz U=8.C, conforme detalhado a seguir.

$$U = 8\,.\,C = 8\,.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 8 \\ 16 & 12 \\ 26 & 13 \\ 69 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.1 & 8.1 \\ 8.10 & 8.8 \\ 8.16 & 8.12 \\ 8.26 & 8.13 \\ 8.69 & 8.11 \end{pmatrix}$$

$$U = 8\,.\,C = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 80 & 64 \\ 128 & 96 \\ 208 & 104 \\ 552 & 88 \end{pmatrix}$$

Como T=A.B e U=8.C, podemos calcular Z=A.B+8.C=T+U conforme detalhado a seguir.

$$Z = T + U = \begin{pmatrix} 17 & 50 \\ 200 & 0 \\ 139 & 350 \\ -46 & 100 \\ 111 & 150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 80 & 64 \\ 128 & 96 \\ 208 & 104 \\ 552 & 88 \end{pmatrix}$$

$$Z = T + U = \begin{pmatrix} 17+8 & 50+8 \\ 200+80 & 0+64 \\ 139+128 & 350+96 \\ -46+208 & 100+104 \\ 111+552 & 150+88 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 25 & 58 \\ 280 & 64 \\ 267 & 446 \\ 162 & 204 \\ 663 & 238 \end{pmatrix}$$

Vemos que o elemento localizado na 5ª linha e 1ª coluna da matriz Z é igual a 663.

Questão 2. (Enade 2008) Considere o sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

Analise as afirmativas seguintes relativas à resolução desse sistema de equações lineares.

I – O sistema não tem solução.

PORQUE

II – O determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero.

A respeito dessas afirmativas, assinale a opção correta:

A) As duas afirmativas são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira.

B) As duas afirmativas são proposições verdadeiras, e a segunda não é uma justificativa correta da primeira.

C) A primeira afirmativa é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa.

D) A primeira afirmativa é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira.

E) Ambas as afirmativas são proposições falsas.

Resposta correta: alternativa B.

Análise da questão

Para fazermos o que se pede na questão, temos que utilizar a teoria de discussão de um sistema linear. Como o sistema é formado por três equações e três incógnitas, ele gera matrizes quadradas, cujos determinantes podem ser calculados pela aplicação da regra de Cramer.

Primeiramente, obtemos o determinante dos coeficientes (det A):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 6 - 8 - 6 - 6 = 0$$

$$\det A = 0$$

Como segunda etapa, calculamos o determinante da matriz obtido a partir da matriz dos coeficientes, substituindo a primeira coluna (coeficientes de x) pelos termos independentes.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 10 + 12 - 16 - 6 - 10 = -2$$

$$\det A_x = -2$$

$$\det A_x \neq 0$$

Como terceira etapa, calculamos o determinante da matriz obtido a partir da matriz dos coeficientes, substituindo a segunda coluna (coeficientes de y) pelos termos independentes.

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6 + 10 - 8 - 10 - 12 = 2$$

$$\det A_y = 2$$

$$\det A_y \neq 0$$

Como quarta etapa, calculamos o determinante da matriz obtido a partir da matriz dos coeficientes, substituindo a terceira coluna (coeficientes de z) pelos termos independentes.

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 + 6 - 10 - 12 - 6 = 0$$

$$\det A_z = 0$$

Discutindo o sistema, concluímos que, como det A = 0, ele poderia ser possível e indeterminado ou impossível.

Para verificar sua real classificação, tivemos que fazer o determinante dos coeficientes, substituindo cada coluna pelos termos independentes. Como det A = 0 e pelo menos um $A_n \neq 0$, o sistema é impossível (não tem solução). Para o sistema ser impossível, deve-se ter det A = 0 e pelo menos um $A_n \neq 0$. Então, as duas afirmativas são verdadeiras, não sendo a segunda uma justificativa correta da primeira.

Análise das alternativas

A) Alternativa incorreta.

Justificativa: de acordo com a resolução completa mostrada anteriormente e considerando a discussão do sistema, as duas afirmativas são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira. É, na verdade, uma justificativa incompleta; logo, incorreta.

B) Alternativa correta.

Justificativa: de acordo com a resolução completa mostrada anteriormente e considerando a discussão do sistema, as duas afirmativas são proposições verdadeiras, e a segunda não é uma justificativa correta da primeira. Para o sistema ser considerado impossível, devemos ter det A = 0 e pelo menos um det $A_n \neq 0$.

C) Alternativa incorreta.

Justificativa: a segunda afirmativa não é falsa (det A = 0).

D) Alternativa incorreta.

Justificativa: a primeira afirmativa não é falsa, pois o sistema é impossível.

E) Alternativa incorreta.

Justificativa: ambas as afirmativas são proposições verdadeiras, pois o sistema é impossível e det A = 0.

FIGURAS E ILUSTRAÇÕES

Figura 7

DOI, C. M.; LAURICELLA, A. L. M. *Como visualizar e resolver limites*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2016. p. 18.

REFERÊNCIAS

Textuais

ALMEIDA, C. M. V. B.; DOI, C. M. *Explicando matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2018.

BORTOLOSSI, H. J. *Pré-cálculo*. [s.d.]. Disponível em: http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2016.1/gma00116/arquivos/gma00116-slides-03.pdf. Acesso em: 25 out. 2020.

CAIUSCA, A. Função linear. *Guia estudo*. 11 jun. 2019. Disponível em: https://www.guiaestudo.com.br/funcao-linear. Acesso em: 27 out. 2020.

DOI, C. M.; LAURICELLA, A. L. M. *Como visualizar e resolver limites*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2016.

GOLDSTEIN, L. J. *et al. Matemática aplicada*. Tradução: Claus Ivo Doering. 12. ed. Rio Grande do Sul: Bookman, 2012.

GRÁFICOS de funções. [s.d.]. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/func/grgr.htm. Acesso em: 26 out. 2020.

GUIDORIZZI, H. *Um curso de cálculo*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. v. 1.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. *Cálculo*: um curso moderno e suas aplicações. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. 7. ed. São Paulo: LTC, 2002.

JORDON. Retas paralelas. *Saber matemática*. [s.d.]. Disponível em: https://sabermatematica.com.br/retas-paralelas.html. Acesso em: 27 out. 2020.

LIMA, D. M.; GONZALEZ, L. E. F. *Matemática aplicada à informática*. Rio Grande do Sul: Bookman, 2015.

MCFEDRIES, P. *Fórmulas e funções com Microsoft Excel*. Tradução: Flávio Morgado. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.

Sites

https://matrixcalc.org/pt/slu.html

https://www.dcode.fr/matrix-determinant

Exercícios

Unidade II – Questão 2: INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade) 2008*: Matemática. Questão 23. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/Enade2008_RNP/MATEMATICA.pdf. Acesso em: 8 dez. 2020.

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000