EAD
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE I

Cálculo para Computação

Profa. Cláudia dos Santos

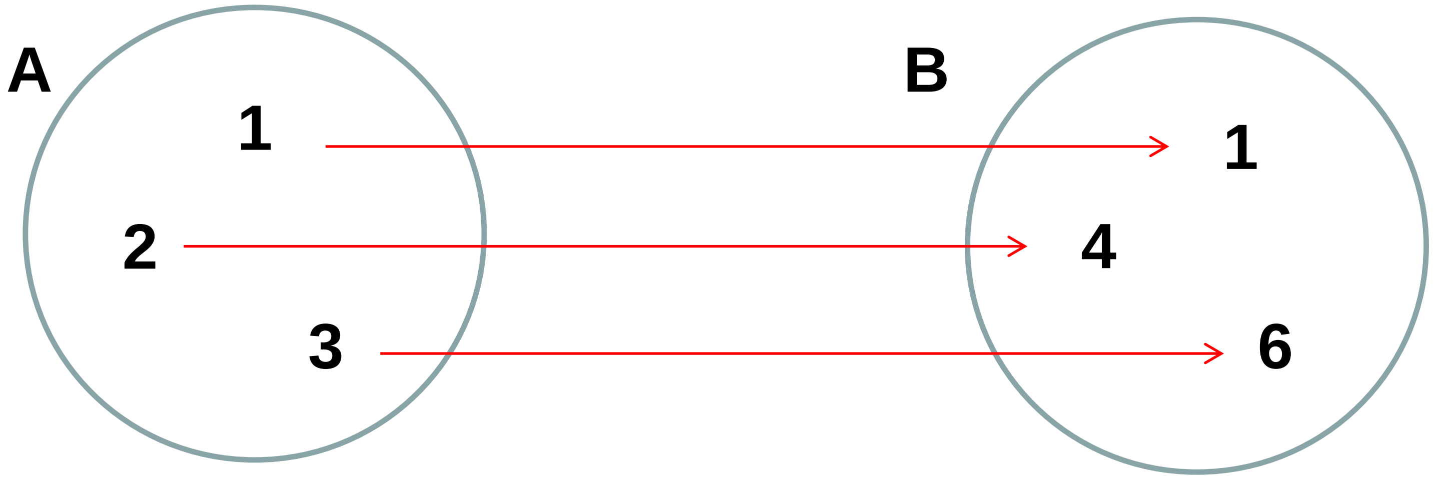
Conteúdo

- Funções e seus gráficos.
- Limites.
- Derivada.
- Derivadas de ordem superior.

Função – Definição

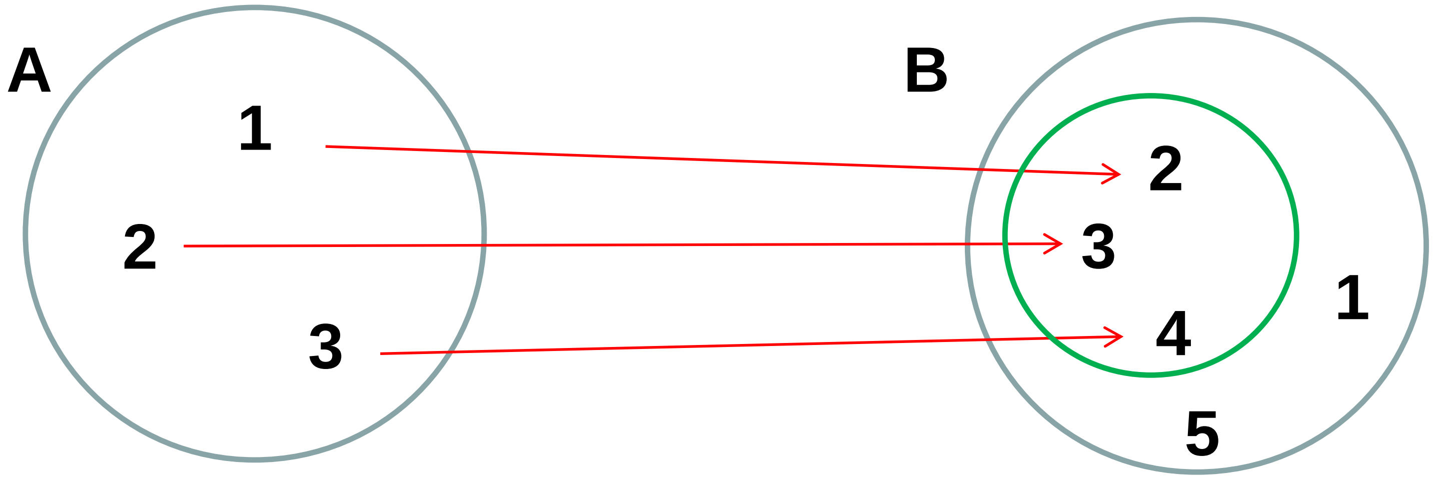
Função

- Definição: Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B.



Função – domínio, contradomínio e imagem

- Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {1, 2, 3, 4, 5}, vamos considerar f: $A \to B$ definida por f(x) = y = x + 1.
- O conjunto A é denominado domínio da função (D) e o conjunto B, contradomínio.
- O conjunto formado por {2, 3, 4}, que é um subconjunto de B, é chamado Imagem (Im) da função.



Funções do 1º grau

Função de 1º Grau

Forma Geral: $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$

Representação gráfica: Reta

Uma função possui pontos considerados essenciais para a composição correta de seu gráfico:

- Coeficiente linear da reta representado na função pela letra “b”, que indica por qual ponto numérico a reta intercepta o eixo das ordenadas (y).
- Coeficiente angular da reta representado na função pela letra “a”, que indica onde a reta corta o eixo da abscissa (x), determinando o grau de inclinação da reta.

Funções do 1º grau

Raiz ou zero da função é o valor de “ ” que anula a função, isto é:

- Algebricamente: o valor de x em que $f(x) = 0$.
- Geometricamente (graficamente): intersecção da reta com o eixo x.

- Crescimento/decrescimento da função

$$\begin{cases} a > 0 \rightarrow função\ crescente \\ a < 0 \rightarrow função\ decrescente \\ a = 0 \rightarrow função\ constante \end{cases}$$

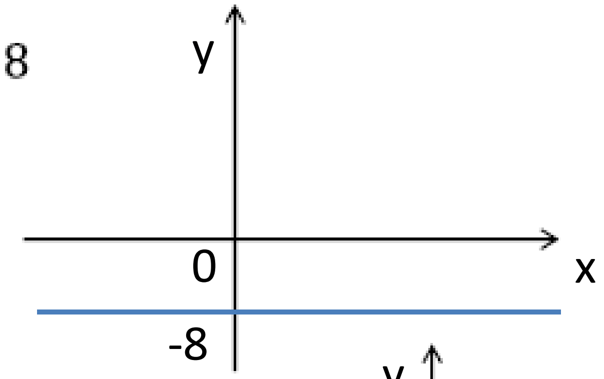
Função constante ($a = 0$)

- <u>Forma Geral</u>: $f(x) = b$ ou $y = b$

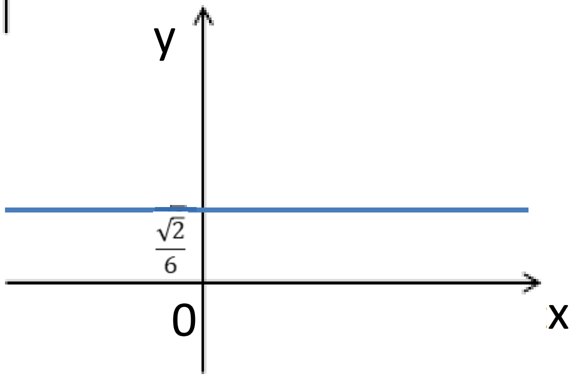
- <u>Representação gráfica</u>: Reta paralela ao eixo (no ponto indicado).

Exemplos:

$a)\ y = -8$



$a)\ y = \frac{\sqrt{2}}{6}$



Função linear

Função linear (b = 0)

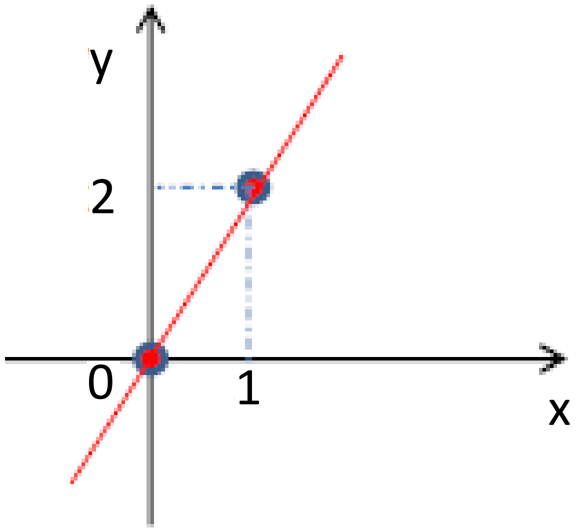
- Forma Geral: $f(x) = ax$ ou $y = ax$

- Representação gráfica: Reta que passa pela origem dos eixos (ponto (0, 0)).

Exemplo:

a) $y = 2x$

x	$y = 2x$
0	2(0)=0
1	2(1)=2



Função linear afim

- Função linear afim

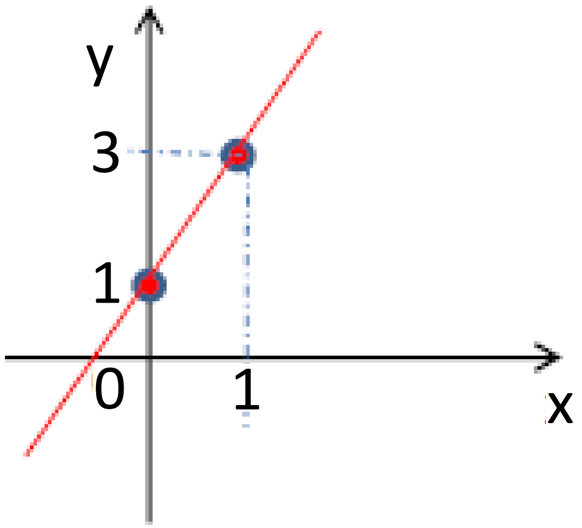
Forma Geral: $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$

Representação gráfica: Reta que passa pelo ponto (0, b).

Exemplo:

a) $y = 2x + 1$

x	$y = 2x+1$
0	2(0)+1=1
1	2(1)+1=3



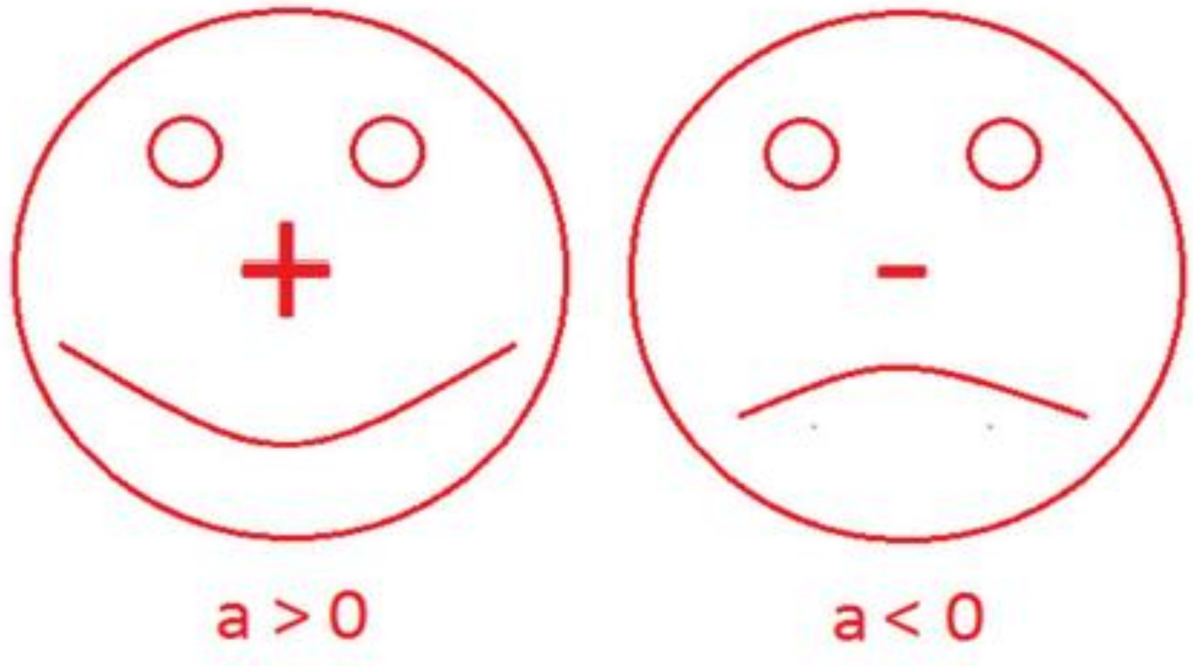
Funções do 2º grau

Função do 2º grau

- Forma Geral: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$

- Representação gráfica: Parábola

Concavidade da parábola:



Fonte: http://pratico-e-basico.blogspot.com/2015/11/funcao-do-2-grau.html

Funções do 2º grau

Uma função do 2º grau possui pontos considerados essenciais para a composição correta de seu gráfico.

- Raízes ($f(x)$ = 0)
- Vértice
- Cruzamento com eixo y (x = 0)

Funções do 2º grau

Cálculo das raízes de uma função do 2º grau

Para o cálculo das raízes, utilizaremos a fórmula de Baskhara.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \; (discriminante)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Funções do 2º grau

Para o cálculo do vértice, utilizaremos as seguintes fórmulas:

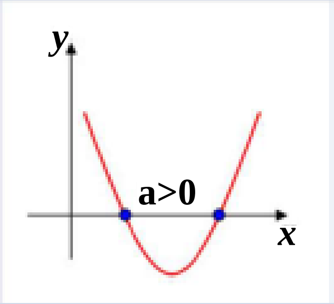
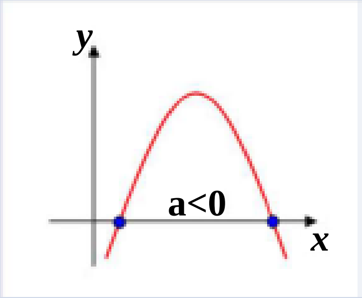
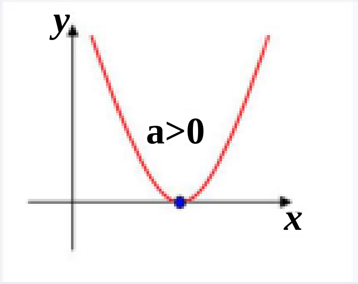
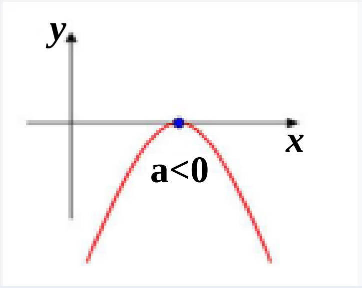
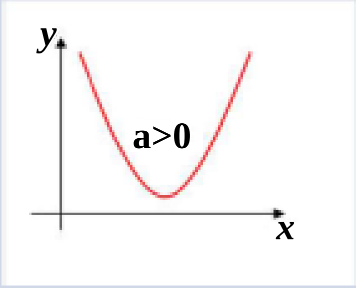
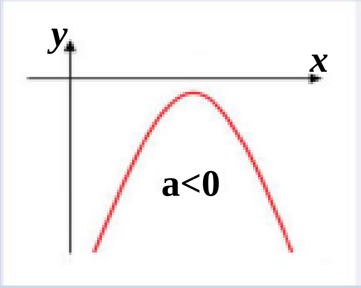
$x_V = \frac{-b}{2a}$ $\qquad$ $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$

Para determinar o cruzamento com o eixo y (x = 0)

- Em $x = 0 \longrightarrow y = c$

Funções do 2º grau

Características dos gráficos de uma função do 2º grau

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0 \quad x_1 \neq x_2$		
$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2$		
$\Delta < 0 \quad \nexists\, x_1 e\, x_2$		

Fonte: Livro-texto.

Funções do 2º grau

Exemplo: Construir o gráfico da função $y = x^2 - 5x + 6$

1º passo: achar as raízes da função ($y = 0$)

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Funções do 2º grau

2º passo: achar o vértice

$$x_v = \frac{-(-5)}{2(1)} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad y_v = \frac{-1}{4(1)} = -0{,}25$$

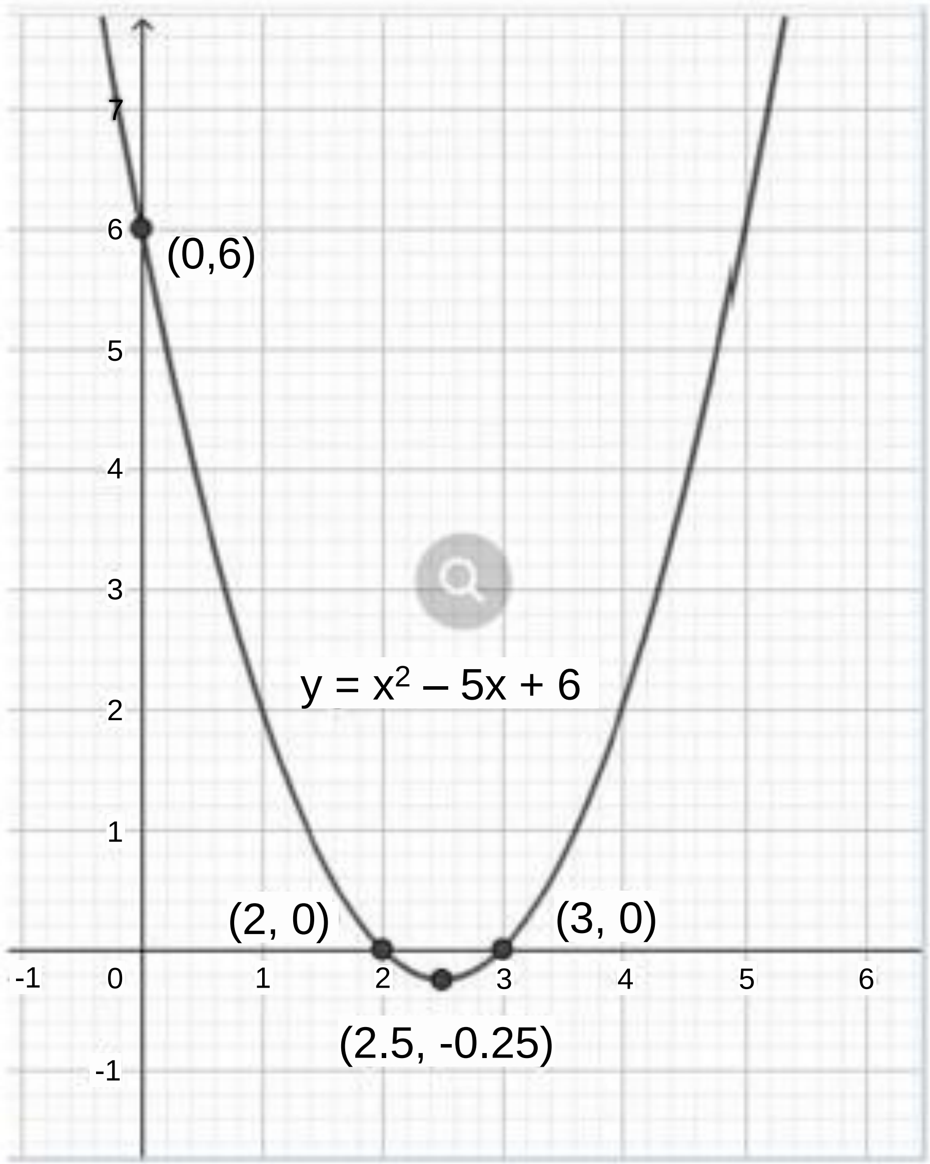
3º passo: achar o cruzamento com o eixo y ($x = 0$)

$x = 0 \rightarrow y = 6$

Funções do 2º grau

Gráfico:

x	y	
0	6	
2	0	Raiz
2,5	-0,25	Vértice
3	0	Raiz



Função módulo

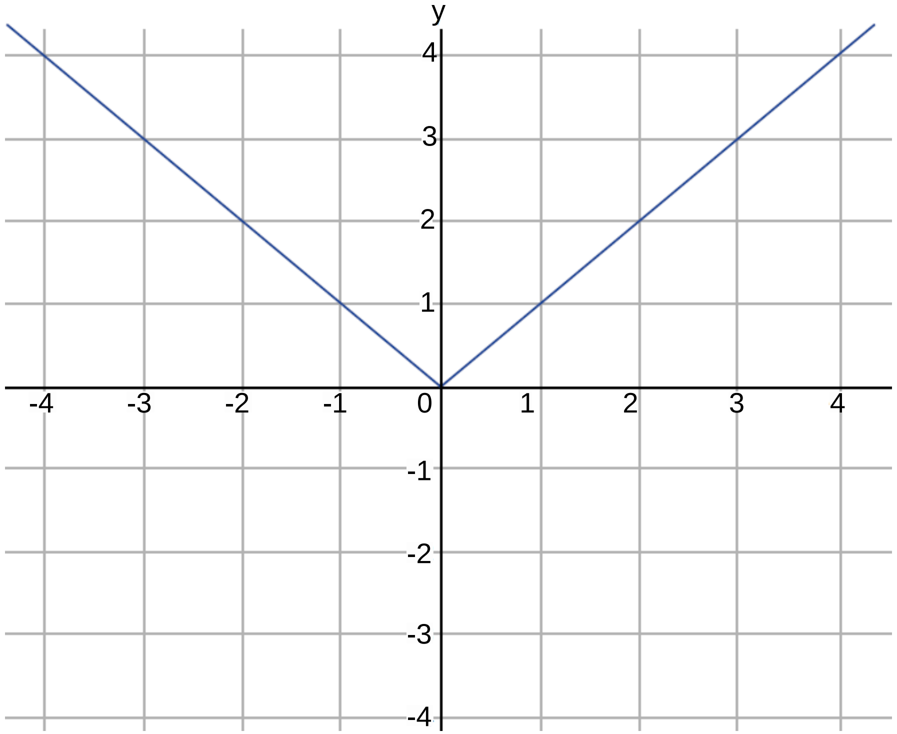
Função módulo ou valor absoluto

Forma Geral: $f(x) = |x|$ ou $y = |x|$

- O domínio da função módulo é o conjunto dos números Reais e a Imagem o conjunto [0,∞]

Representação gráfica: o gráfico desta função sempre estará acima do eixo x..

Exemplo: $y = |x|$



Fonte: Livro-texto.

x	$y = \|x\|$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

Função módulo

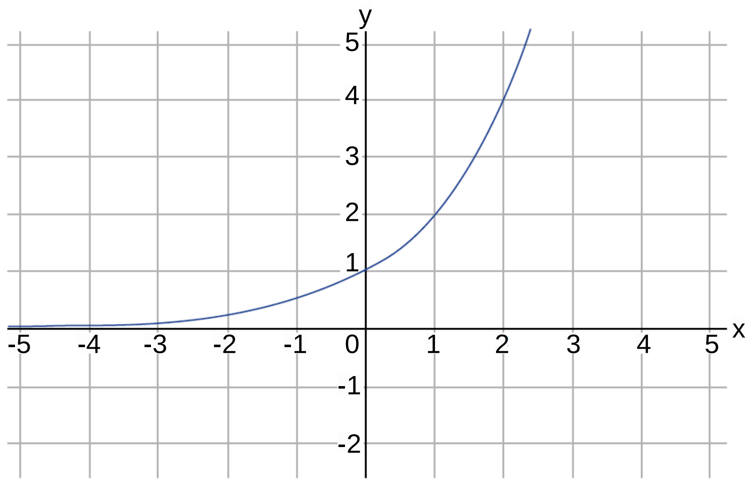
Função exponencial

<u>Forma Geral</u>: $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

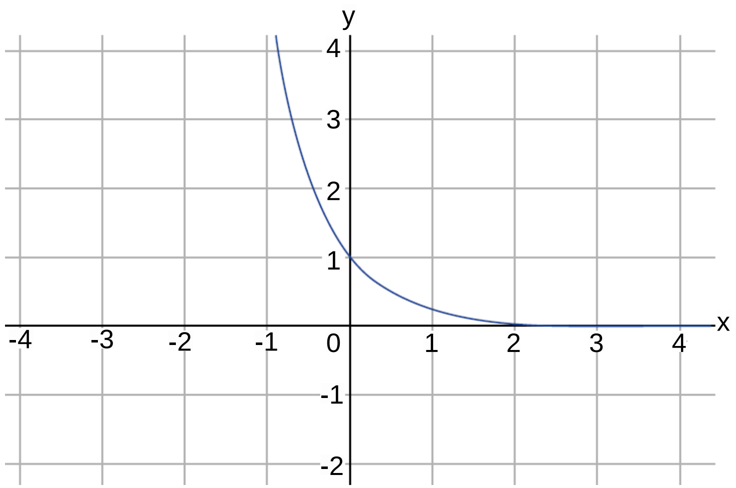
Representação gráfica:

- Quando $a > 1 \rightarrow curva\ crescente$. (exemplo 1).
- Quando $0 < a < 1 \rightarrow curva\ decrescente$. (exemplo 2).

Exemplo 1: y = 2^x



Exemplo 2: y = $0{,}2^x$



Fonte: Livro-texto.

Funções logarítmicas

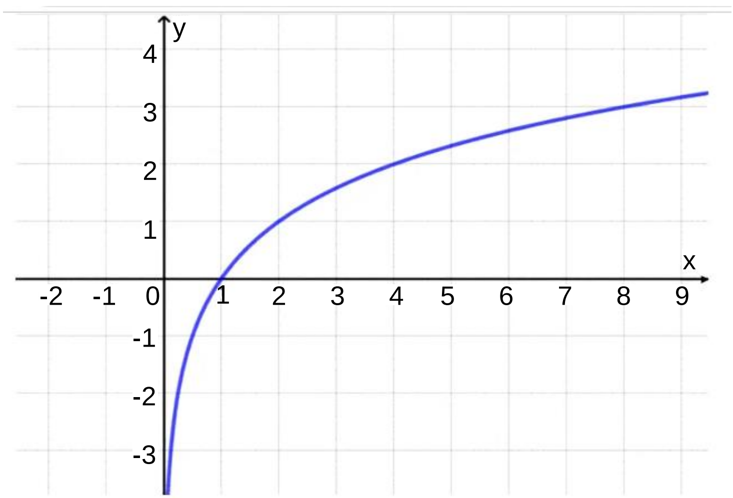
Função logarítmica (inverso da função exponencial)

<u>Forma Geral</u>: $f(x) = \log_a b$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$; em que: $a = base\ do\ logaritmo$

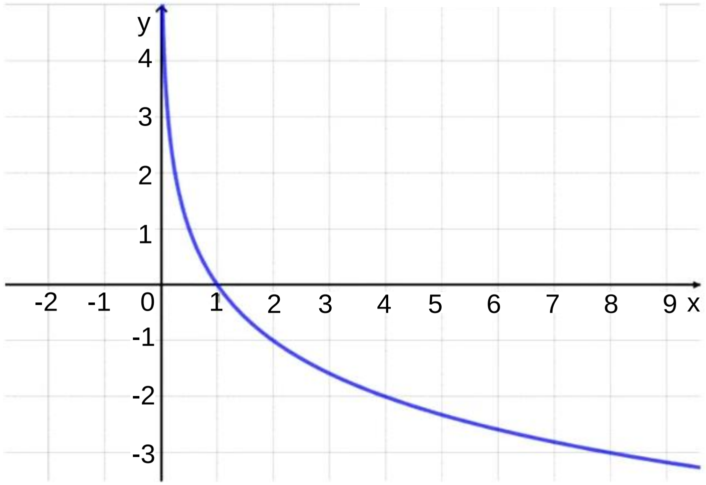
<u>Representação gráfica</u>:

- Quando $a > 1 \rightarrow curva\ crescente$. (exemplo 1).
- Quando $0 < a < 1 \rightarrow curva\ decrescente$. (exemplo 2).

Exemplo 1: $y = \log_2 x$



Exemplo 2: $y = \log_{1/2} x$



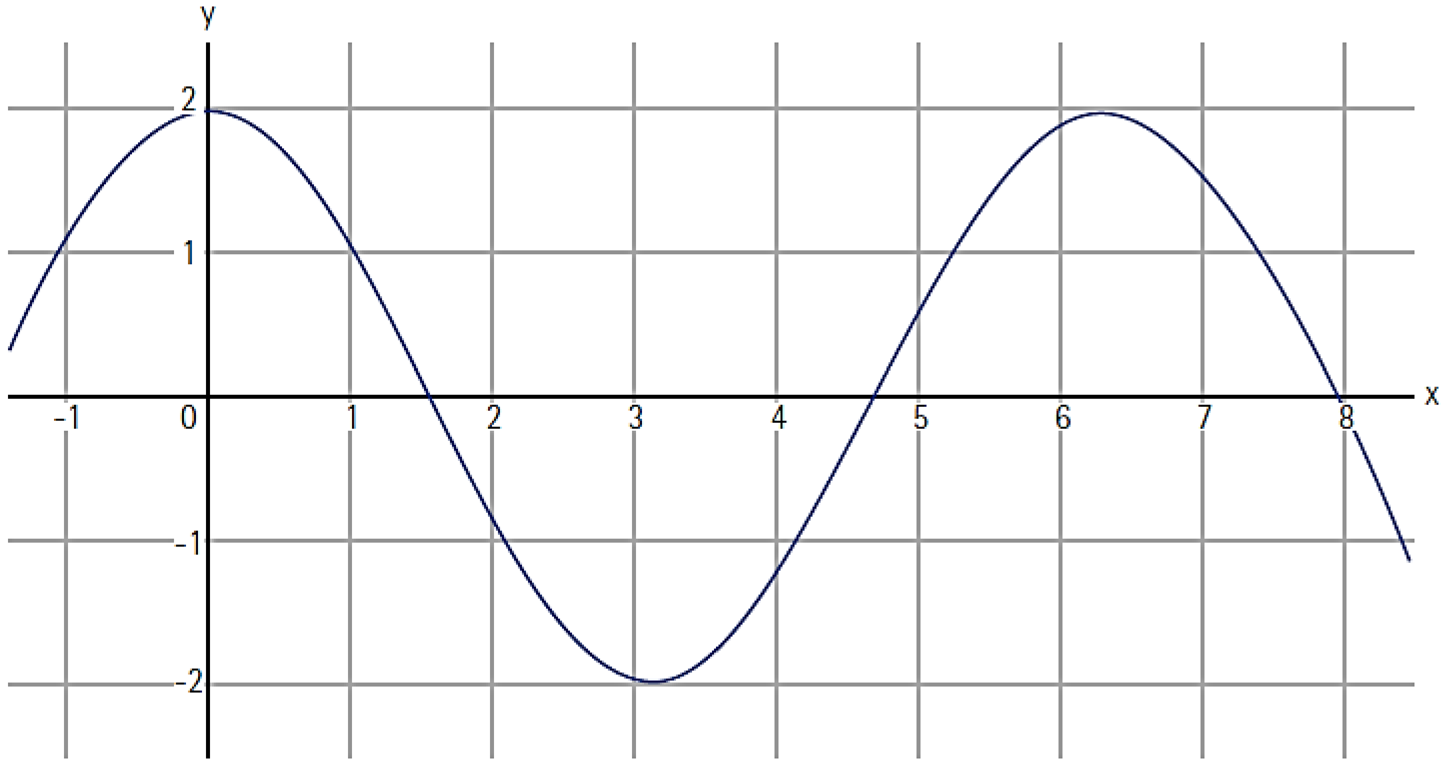
Fonte: Livro-texto.

Funções contínuas e descontínuas

Funções contínuas

- Uma função é contínua num intervalo aberto $]a, b[$ se for contínua em todos os pontos deste intervalo.
- Podemos dizer que uma função contínua é aquela cujo gráfico pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel.

Exemplo: $y = 2cosx$



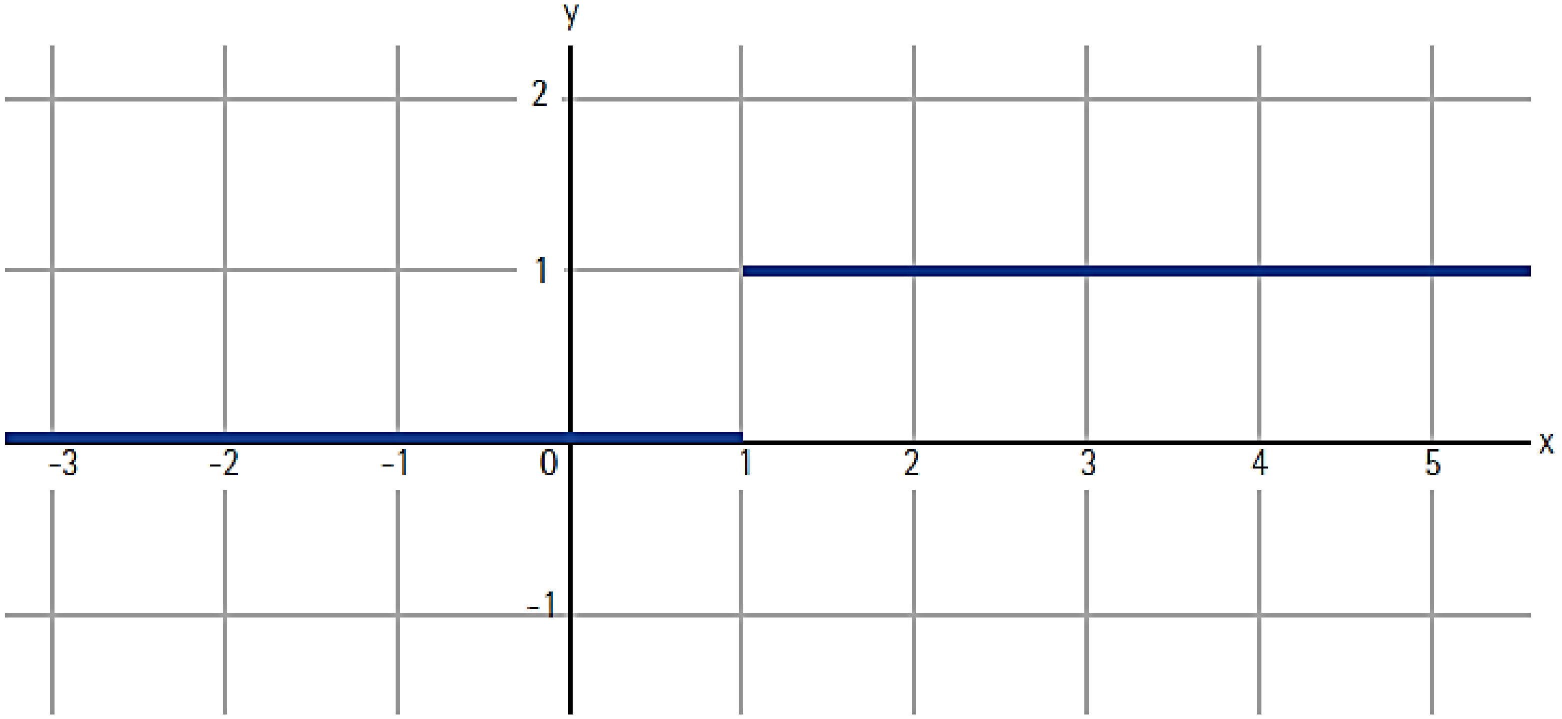
Fonte: Livro-texto.

Funções contínuas e descontínuas

Funções descontínuas

- Uma função é descontínua num intervalo aberto $]a, b[$ se houver um corte em algum ponto deste intervalo.
- Podemos dizer que função descontínua é aquela cujo gráfico apresenta uma quebra.

Exemplo: $\begin{cases} y = 1\ para\ x \geq 1 \\ y = 0\ para\ x < 1 \end{cases}$



Fonte: Livro-texto.

Interatividade

Quando correlacionamos as funções abaixo com a descrição de seus gráficos, obtemos os seguintes pares:

(a) $y = -2x - 1$

(b) $y = 4$

(c) $y = x^2 - 10x + 9$

(d) $y = 9x$

(e) $y = -x^2 - 5x + 6$

(f) $y = 3x - 1$

(I) reta crescente que passa pela origem do plano cartesiano.

(II) parábola com concavidade voltada para baixo.

(III) reta decrescente que passa pelo ponto P (0, -1).

(IV) reta paralela ao eixo Ox.

(V) parábola com concavidade voltada para cima.

(VI) reta crescente que passa pelo ponto P (0, -1).

a) I-a; II-e; III-d; IV-b; V-c; VI-f.
b) I-d; II-e; III-a; IV-b; V-c; VI-f.
c) I-d; II-c; III-a; IV-b; V-e; VI-f.
d) I-a; II-e; III-f; IV-b; V-c; VI-a.
e) I-b; II-e; III-a; IV-d; V-c; VI-f.

Resposta

Quando correlacionamos as funções abaixo com a descrição de seus gráficos, obtemos os seguintes pares:

(a) $y = -2x - 1$

(b) $y = 4$

(c) $y = x^2 - 10x + 9$

(d) $y = 9x$

(e) $y = -x^2 - 5x + 6$

(f) $y = 3x - 1$

(I) reta crescente que passa pela origem do plano cartesiano.

(II) parábola com concavidade voltada para baixo.

(III) reta decrescente que passa pelo ponto P (0, -1).

(IV) reta paralela ao eixo Ox.

(V) parábola com concavidade voltada para cima.

(VI) reta crescente que passa pelo ponto P (0, -1).

a) I-a; II-e; III-d; IV-b; V-c; VI-f.
b) I-d; II-e; III-a; IV-b; V-c; VI-f.
c) I-d; II-c; III-a; IV-b; V-e; VI-f.
d) I-a; II-e; III-f; IV-b; V-c; VI-a.
e) I-b; II-e; III-a; IV-d; V-c; VI-f.

Limite – Noção intuitiva

Limite

Analisaremos o comportamento de algumas funções:

$$y = 1 - \frac{1}{x}$$

O que acontece quando o valor de x tende ao infinito?

x	1	2	3	4	....	500	....	1000	....
y	0	1/2	2/3	3/4	....	0,998	....	0,999	....

x	-1	-2	-3	-4	....	-100	....	-500	....
y	2	3/2	4/3	5/4	....	1,01	....	1,002	....

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow ?\, 1$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow ?\, 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

Limite – Noção intuitiva

$y = x^2 + 3x - 2$

O que acontece quando o valor de x tende ao infinito?

x	1	2	3	4	....	100	....	10000	....
y	2	8	16	26	....	10298	....	102998	....

x	-1	-2	-3	-4	....	-100	....	-500	....
y	-4	-4	-2	2	....	9698	....	248498	....

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to ? +\infty$$

$$x \to -\infty \Rightarrow y \to ?\ +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^2 + 3x - 2\right) = +\infty$$

Limite – Noção intuitiva

- Analisando a função $y = \frac{x}{2} + 3$, o que acontece quando o valor de $x \to 4$?

x	5	4,5	4,1	4,01	4,001	....
y	5,5	5,25	5,05	5,005	5,005	....

x	3	3,5	3,9	3,99	3,999	....
y	4,5	4,75	4,95	4,995	4,9995	....

$$\lim_{x \to 4^+} \left(\frac{x}{2} + 3\right) = 5$$

$$\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{x}{2} + 3\right) = 5$$

Então: $\lim_{x \to 4} \left(\frac{x}{2} + 3\right) = 5$

- Noção intuitiva de limite: à medida que os valores de x estão mais próximos de 4 ($x \to 4$), os valores de y tornam-se cada vez mais próximos de 5.($y \to 5$).

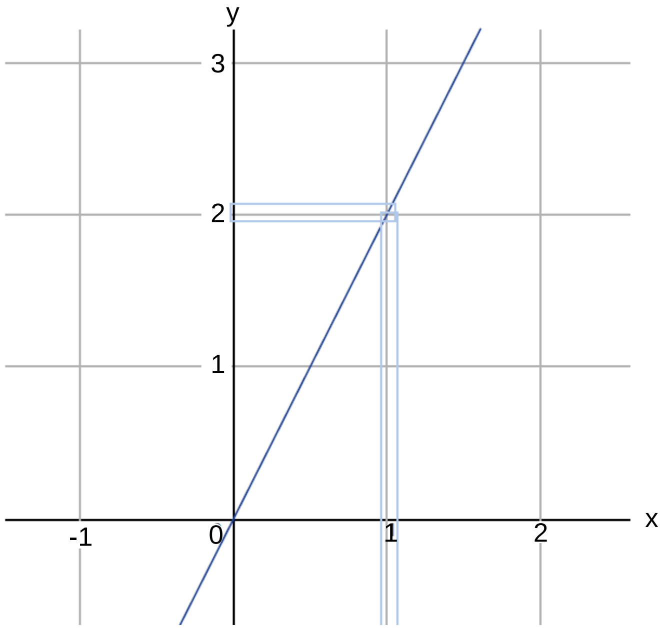
- Ou seja, pode-se observar que é possível tornar o valor de y tão próximo de 5 quanto desejarmos, desde que tornemos x suficientemente próximo de 4.

Cálculo de limites

Funções contínuas

Exemplo: Qual o limite da função $f(x) = 2x$, quando $x \to 1$?

- Não podemos apenas substituir o valor $x = 1$ na função, pois queremos calcular o valor de $f(x)$ para valores próximos de $x = 1$, não o valor no ponto $x = 1$.
- Se avaliarmos o gráfico desta função, verificamos que quando $x \to 1$, $y \to 2$.
- Neste caso, o limite coincidiu com o valor da função no ponto $x = 1$ e isso só ocorreu porque a função $f(x) = 2x$ é contínua em $x = 1$.



Fonte: Livro-texto

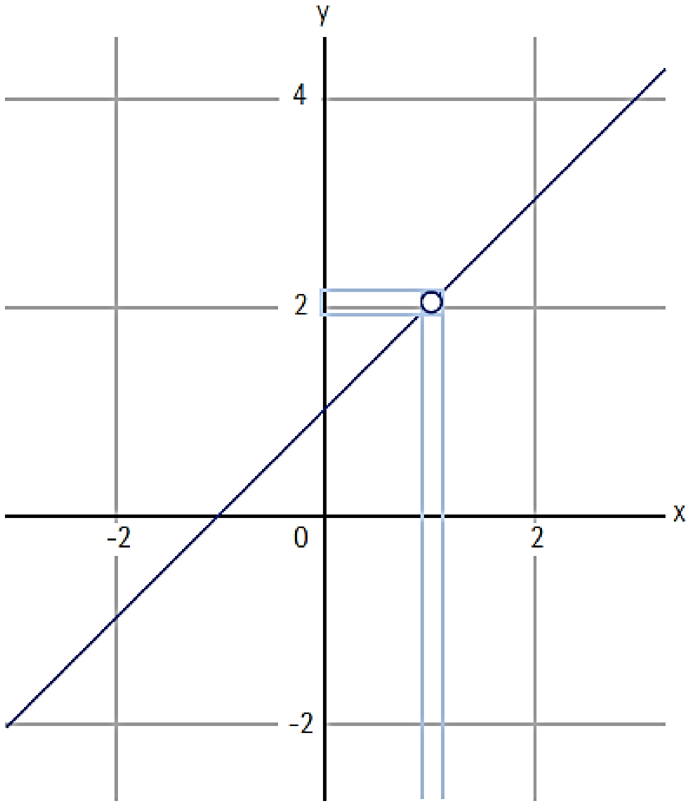
Cálculo de limites

Funções com singularidade

Exemplo: Qual o limite da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, quando $x \to 1$?

- Não podemos apenas substituir o valor $x = 1$ na função, pois x pode assumir qualquer valor, exceto 1, pois resultaria em uma divisão por zero.
- Dizemos que esta função tem uma singularidade em $x = 1$.

- Veja o gráfico desta função:



Fonte: Livro-texto

Cálculo de limites

Então como fazemos para calcular este limite sem ter que analisar o gráfico da função?

Teremos que reescrever a função de outra forma.

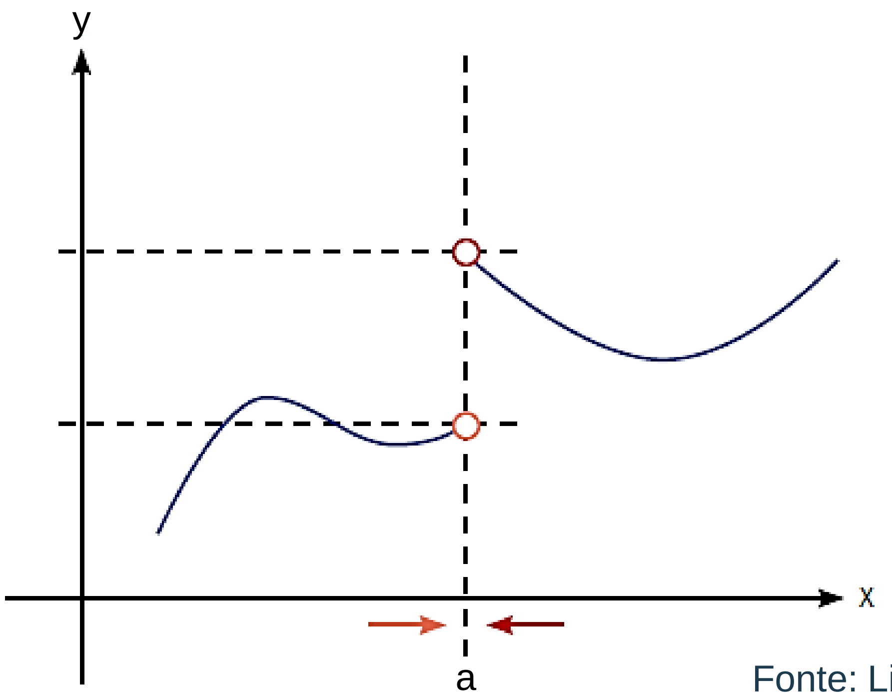
$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

Cálculo de limites

Funções descontínuas – limites laterais

Como avaliar o limite de funções cujo valor da função é um antes da descontinuidade e outro valor depois?

- Neste caso, teremos que avaliar o limite lateral da função se aproximando de “a” pela sua direita $\left(\lim_{x \to a^+} f(x)\right)$ e pela sua esquerda $\left(\lim_{x \to a^-} f(x)\right)$.



Fonte: Livro-texto

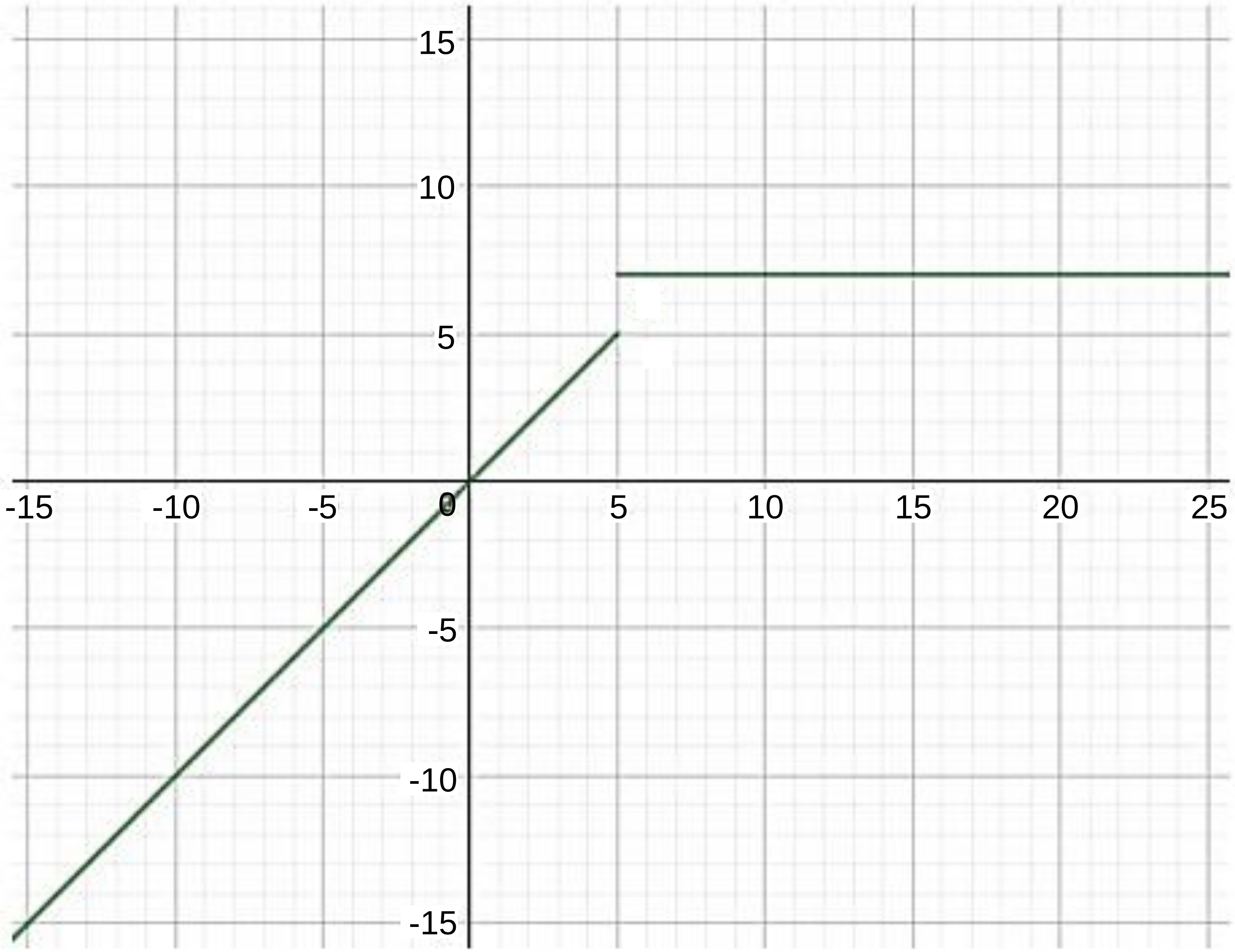
Cálculo de limites

Exemplo:

$$\begin{cases} f(x) = y, se\ x < 5 \\ f(x) = 7, se\ x > 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 5^-} y = 5$$

$$\lim_{x \to 5^+} 7 = 7$$



Operações com limites

- As operações matemáticas utilizando limites podem ser feitas se as seguintes propriedades forem observadas:

1) Se são a, m e n são números Reais, então: $\lim_{x \to a}(mx + n) = ma + n$

   Exemplo: $\lim_{x \to 3}(4x - 1) = 4(3) - 1 = 11$

2) Se c é um número Real: $\lim_{x \to a} c = c$

   Exemplo: $\lim_{x \to 1} 7 = 7$

3) $\lim_{x \to a} x = a$

   Exemplo: $\lim_{x \to 1} x = 1$

Operações com limites

4) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existem e c é um número qualquer:

a) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to a}[f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x).\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Operações com limites

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad com\ g(x) \neq 0$

e) $\lim\limits_{x \to a} (f(x)^n) = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$ desde que $n\ inteiro\ e\ n > 0$

Interatividade

Considerando que existam, qual o valor dos limites nas seguintes situações, respectivamente?

1. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x+2}{x^2-6x+5} \right)$

2. $\lim_{x \to -9} \left(\frac{x^2-81}{x+9} \right)$

a) $^{3}/_{2}$; 0
b) $^{-8}/_{3}$; 0
c) $^{-8}/_{3}$; -18
d) $^{-3}/_{2}$; -18
e) $^{8}/_{3}$; 18

Resposta

1. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x+2}{x^2-6x+5}\right) = \frac{3(2)+2}{2^2-6(2)+5} = \frac{6+2}{4-12+5} = \frac{-8}{3}$

2. $\lim_{x\to -9}\left(\frac{x^2-81}{x+9}\right) = \frac{(-9)^2-81}{-9+9} = \frac{0}{0}$!!!

$$\lim_{x\to -9}\left(\frac{(x-9)\cancel{(x+9)}}{\cancel{(x+9)}}\right) = \lim_{x\to -9}(x-9) = -9-9 = -18$$

a) $^{3}/_{2}$; 0

b) $^{-8}/_{3}$; 0

c) $^{-8}/_{3}$; -18

d) $^{-3}/_{2}$; -18

e) $^{8}/_{3}$; 18

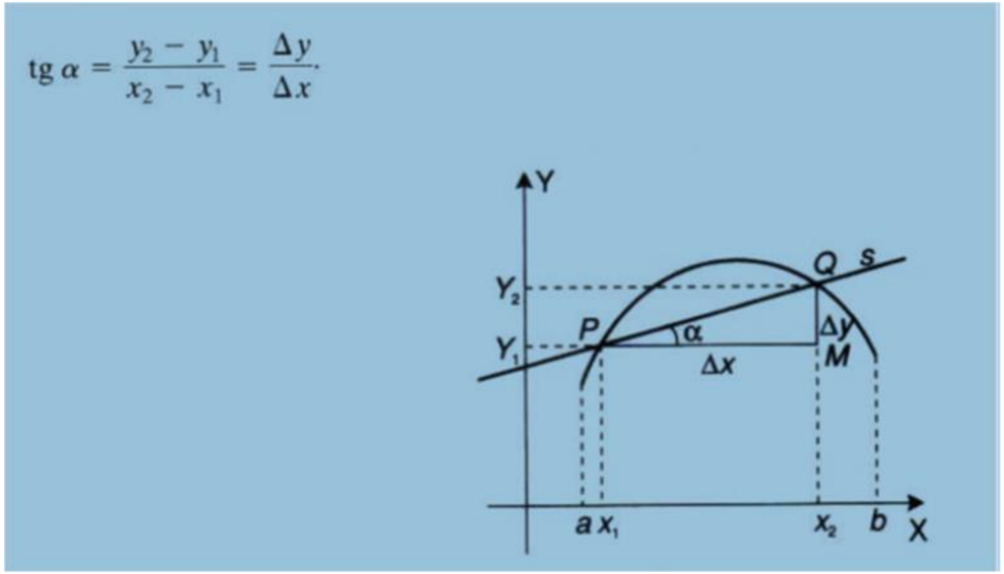
Derivada - Conceito e interpretação geométrica

Tangente

- Da geometria, tangente é a reta que toca uma curva sem cortá-la, compartilhando um único ponto com ela.
- Da trigonometria, tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo.

Equação da reta tangente:

- Seja $f(x)$ uma curva definida em um intervalo [a, b].
- Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva.
- Seja a reta secante "s" que passa pelos pontos P e Q da curva.



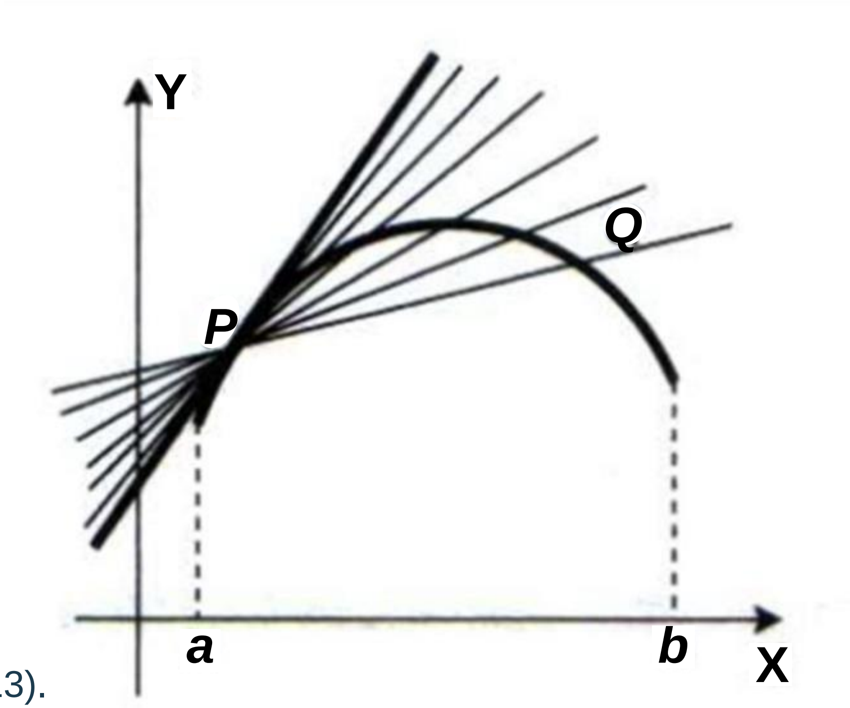
Derivada - Conceito e interpretação geométrica

- Se mantivermos P fixo e movermos Q sobre a curva em direção a P, a inclinação de “s” variará à medida que Q for se aproximando mais de P, ou seja, o coeficiente angular da reta secante através dos pontos P e Q se aproximará gradualmente do coeficiente angular da reta tangente a P conforme $x_2\ se\ aproximar\ de\ x_1$.
- Esse valor limite é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P.

Inclinação da reta tangente:

$$\lim_{Q\to P}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta_x)-f(x_1)}{\Delta x}$$



Fonte: Adaptado de: Stewart (2013).

Derivada - Conceito e interpretação geométrica

Derivada de uma função em um ponto:

- A derivada de uma função no ponto x_1, denotada por $f'(x)$ é definida pelo limite $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta_x) - f(x_1)}{\Delta x}$ quando o limite existir. Representa sua taxa de variação.

- Mas este limite é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$.

- Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ um ponto x_1 representa a inclinação da curva neste ponto.

Outras notações:

$D_x f(x)$ (lê-se derivada $f(x)$ em relação a x).

$D_x y$ (lê-se derivada de y em relação a x).

$\frac{dy}{dx}$ (lê-se derivada de y em relação a x).

Derivadas

Regras de derivação

1. Função constante: $y = k \rightarrow y' = 0$ $k = nº\ Real$

Exemplos:

$a.\ y = 7 \rightarrow y' = 0$

$b.\ y = -\frac{1}{3} \rightarrow y' = 0$

$c.\ y = \sqrt{3} \rightarrow y' = 0$

2. $y = ax \rightarrow y' = a$ $a = nº\ Real$

Exemplos:

$a.\ y = 2x \rightarrow y' = 2$

$b.\ y = -1{,}7x \rightarrow y' = -1{,}7$

Derivadas

3. $y = ax^n \rightarrow y' = anx^{n-1}$ $\quad a, n = nºs\ Reais$

Exemplos:

$a.\ y = 3x^2 \rightarrow y' = 3(2)x^{2-1} = 6x$

$a = 3$

$n = 2$

$b.\ y = -9x^3 \rightarrow y' = -9(3)x^{3-1} = -27x^2$

$a = -9$

$n = 3$

Derivadas

4. $y = e^u \to y' = e^u u' \qquad u = função$

Exemplos:

$a.\ y = e^{5x}$

$u = 5x \qquad u' = 5$

$y = e^{5x} \to y' = e^{5x}(5) = 5e^{5x}$

$b.\ \ y = e^{1x^1} \to y' = e^x$

Derivadas

5. $y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

Exemplos:

$a.\ \ y = \ln 3x^3$

$u = 3x^3 \qquad u' = 9x^2$

$$y = \ln 3x^3 \rightarrow y' = \frac{9x^2}{3x^3} = \frac{3}{x}$$

$b.\ \ y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$

Derivadas

6. $y = \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \dfrac{u'}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}}$

Exemplo:

$a.\ \ y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

$n = 3 \quad u = x^2 - 1 \qquad u' = 2x$

$$y' = \frac{2x}{3(\sqrt[3]{x^2 - 1})^2}$$

7. $y = sen\, x \rightarrow y' = \cos x$

8. $y = \cos x \rightarrow y' = -senx$

Interatividade

Calculando as derivadas das seguintes funções, obteremos, respectivamente.

1. $y = e^{-3x}$
2. $y = 4x^3$
3. $y = \sqrt[4]{2x}$
4. $y = ln8x^2$
5. $y = \sqrt{2}$

a) $3e^{-3x}; 12x^2; \frac{1}{2(\sqrt[4]{2x})^3}; \frac{16}{x}; 0$

b) $-3e^{-3x}; 12x^2; \frac{1}{2(\sqrt[4]{2x})^3}; \frac{16}{x}; 0$

c) $-3e^{-3x}; 12x^2; \frac{1}{2(\sqrt[4]{2x})^3}; \frac{2}{x}; 0$

d) $3e^{-3x}; 12x^2; \frac{1}{2(\sqrt[4]{2x})^3}; \frac{2}{x}; 0$

e) $-3e^{-3x}; 12x^2; \frac{1}{4(\sqrt[4]{2x})^3}; \frac{16}{x}; 0$

Resposta

1. $y = e^{-3x}$

$u = -3x \rightarrow u' = -3$

$y' = e^{-3x}(-3) = -3e^{-3x}$

2. $y = 4x^3 \rightarrow y' = 12x^2$

3. $y = \sqrt[4]{2x}$

$n = 4 \quad u = 2x \rightarrow u' = 2$

$$y' = \frac{2}{4(\sqrt[4]{2x})^3} = \frac{1}{2(\sqrt[4]{2x})^3}$$

Resposta

4. $y = ln8x^2$

$u = 8x^2 \rightarrow u' = 16x$

$$y' = \frac{16x}{8x^2} = \frac{2}{x}$$

5. $y = \sqrt{2} \rightarrow y' = 0$

Alternativa correta: c) $-3e^{-3x}; 12x^2; \frac{1}{2(\sqrt[4]{2x})^3}; \frac{2}{x}; 0$

Derivadas

Adição / subtração

$$y = u \pm v \pm w \pm z \rightarrow y' = u' \pm v' \pm w' \pm z'$$

Exemplos:

$$a.\ \ y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \rightarrow y' = 15x^2 - 4x + 3$$

$$b.\ \ y = 8x^2 + e^x + lnx + \log_2 x \rightarrow y' = 16x + e^x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\,ln2}$$

Derivadas

Multiplicação

$$y = kv \to y' = kv' \quad k = nº\ real$$

Exemplo:

$a.\ \ y = 8\ lnx$

$k = 8 \quad v = lnx \quad v' = \frac{1}{x}$

$$y = 8\ lnx \to y' = 8 \times \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$$

$$y = uv \to y' = u'v + uv' \quad u, v = funções$$

Exemplo:

$a.\ \ y = 8xlnx$

$u = 8x \quad u' = 8$

$v = lnx \quad v' = \frac{1}{x}$

$$y = 8xlnx \to y' = 8lnx + 8x \times \frac{1}{x} = 8\ lnx + 8$$

Derivadas

Divisão

$$y = \frac{k}{v} \rightarrow y' = \frac{-kv'}{v^2}$$

Exemplo:

$a.\ \ y = \frac{3}{e^x}$

$k = 3 \qquad v = e^x \qquad v' = e^x$

$$y = \frac{3}{e^x} \rightarrow y' = \frac{-3e^x}{(e^x)^2} = \frac{-3}{e^x}$$

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemplo:

$a.\ \ y = \frac{3x}{e^x}$

$u = 3x \qquad u' = 3 \qquad y = \frac{3x}{e^x} \rightarrow y' = \frac{3e^x - 3xe^x}{(e^x)^2} = \frac{3 - 3x}{e^x}$

$v = e^x \qquad v' = e^x$

Derivadas de ordem superior

- Uma função pode ser derivada mais de uma vez, o que resulta nas chamadas derivadas de ordem superior.
- Considere a função $f(x)$ contínua e derivável.
- Sua primeira derivada será indicada por $f'(x)$ ou y';
- Sua segunda derivada será indicada por $f''(x)$ ou y'';
- Sua terceira derivada será indicada por $f'''(x)$ ou y''';
- Sua quarta derivada será indicada por $f^{(4)}(x)$ ou $y^{(4)}$;
- Sua n-ésima derivada será indicada por $f^{(n)}(x)$ ou $y^{(n)}$.
    - Exemplo: Considerando $y = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 7$, calcular as quatro primeiras derivadas.
        - $y' = 12x^2 + 6x - 2$
        - $y'' = 24x + 6$
        - $y''' = 24$
        - $y^{(4)} = 0$

Interatividade

As três primeiras derivadas da função $y = ln2x$ são:

a) $y' = \frac{1}{x}; y'' = \frac{-1}{x^2}; y''' = \frac{2}{x^3}$

b) $y' = \frac{2}{x}; y'' = \frac{-2}{x^2}; y''' = \frac{4}{x^3}$

c) $y' = \frac{1}{x}; y'' = \frac{1}{x^2}; y''' = \frac{-2}{x^3}$

d) $y' = \frac{2}{x}; y'' = \frac{2}{x^2}; y''' = \frac{-4}{x^3}$

e) $y' = \frac{1}{x}; y'' = \frac{1}{x^2}; y''' = \frac{-2}{x^3}$

Resposta

$$y = ln2x$$

$$u = 2x \rightarrow u' = 2$$

$$y' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{-1(1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{-(-1)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Alternativa correta: a) $y' = \frac{1}{x}; y'' = \frac{-1}{x^2}; y''' = \frac{2}{x^3}$

Referências

- STEWART, James. *Cálculo*. Vol. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ATÉ A PRÓXIMA!