Unidade II

5 CONJUNTOS

Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos. Determinado objeto é, ou não é, elemento de um conjunto – um objeto não pode figurar em um conjunto mais de uma vez. Não há ordem para os elementos de um conjunto. O modo mais comum de especificar um conjunto é listando seus elementos entre chaves.

O conjunto $\{1, 3, \frac{1}{2}\}$, por exemplo, possui exatamente 3 elementos, os naturais 1 e 3 e o racional $\frac{1}{2}$. Não há nenhum outro objeto no conjunto. Os exemplos a seguir representam o mesmo conjunto.

$\{1, \frac{1}{2}, 3\}$, $\{1, 3, \frac{1}{2}\}$, $\{1, 1, 3, \frac{1}{2}\}$

Não importa a ordem em que os elementos são listados, mesmo repetindo algum desses elementos. O importante é saber quais os objetos que são elementos do conjunto e quais não são. Portanto, no exemplo dado, 3 objetos são elementos do conjunto e nenhum outro objeto é.

5.1 Pertinência de elemento sobre um conjunto

Um objeto que pertence a um conjunto é denominado elemento do conjunto.

A pertinência a um conjunto é denotada pelo símbolo $\in$. A notação $x \in A$ significa que o objeto x é elemento do conjunto A. Assim, por exemplo, $1 \in \{1, 3, \frac{1}{2}\}$ é verdadeiro, entretanto, $4 \in \{1, 3, \frac{1}{2}\}$ é falso. Na última hipótese, podemos escrever $4 \notin \{1, 3, \frac{1}{2}\}$; a notação $x \notin A$ significa que x não é elemento de A.

O símbolo $\in$ é lido como "pertence a", ou "é membro de", ou, ainda, "está em". Assim na sentença "Se $x \in \mathbb{N}$, então...". Isso significa o mesmo que "Se x é um natural, então...", ou "Se x pertence aos naturais, então..."

Cardinalidade, conjunto vazio, conjunto unitário e universo

Podemos representar, através das barras de valor absoluto, | |, com o nome do conjunto "dentro" das barras, a cardinalidade.

Cardinalidade significa dizer o tamanho do conjunto ou, ainda, a quantidade de elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto $A = \{5, 6, 7\}$ tem três elementos, logo $|A| = 3$.

Conjuntos finitos têm cardinalidade representada por um inteiro não negativo. Todavia, se tomarmos os conjuntos dos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, por exemplo, a cardinalidade é infinita.

O conjunto vazio não possui elementos, assim sua cardinalidade é zero, e, portanto, a afirmação $x \in \varnothing$ é falsa, qualquer que seja o objeto representado por x. Denotamos o conjunto vazio por $\{\ \}$ ou $\varnothing$, logo, $|\varnothing| = 0$. Podemos exemplificar como conjunto vazio, o conjunto dos números naturais menores que 0.

A notação $\{\varnothing\}$ não representa um conjunto vazio. Tal notação indica um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.

O conjunto unitário, como o nome sugere, é aquele que possui um único elemento, por exemplo, o conjunto dos números primos pares, tendo como único elemento $\{2\}$.

O conjunto universo, cuja notação é U, é o conjunto formado por todos os elementos com os quais estamos trabalhando num determinado assunto. Fixando o universo U, todos os elementos pertencem a U e todos os conjuntos são partes de U.

É muito importante fixar um universo, pois, por exemplo, o conjunto solução da equação $x + 5 = 2$ é $S = \varnothing$ no universo dos naturais, entretanto, no universo dos inteiros, o conjunto solução é $S = \{-3\}$.

5.2 Representação de conjuntos

Os conjuntos são nomeados por letras maiúsculas de nosso alfabeto, exceção para os conjuntos numéricos dos naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$), irracionais ($\mathbb{I}$), reais ($\mathbb{R}$) e complexos ($\mathbb{C}$), que possuem notação própria. Como dito, a maneira mais direta de representar um conjunto é listar seus elementos através de chaves, por exemplo, $P = \{2, 4, 6\}$, essa forma é denominada notação por extensão. Esse tipo de notação é apropriado para pequenos conjuntos. Podemos também representar conjuntos "por compreensão", cuja forma é {variável/condições}; assim, se quisermos representar o conjunto dos inteiros maiores que 5, faremos $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 5\}$. A leitura fica: "é elemento do conjunto todos os objetos x, tal que x é um número inteiro e x é maior que 5". A barra (/) significa "tal que".

Alguns cuidados são necessários na representação por extensão. A escolha por qual maneira representar o conjunto deve resultar em uma notação clara, não deixando margem a outras interpretações.

Por exemplo, é permitido representar um conjunto estabelecendo um padrão para seus elementos e utilizando pontos (...) para indicar que o padrão continua. Assim, o conjunto dos inteiros de 1 a 100 pode, por extensão, ser representado por $\{1, 2, 3, ..., 100\}$. Nesse caso, a notação é clara e não permite interpretação diversa. Todavia, para o conjunto representado por $\{3, 5, 7, ...\}$, há duas possíveis interpretações, podemos imaginar que se trata do conjunto dos inteiros ímpares maiores que 1 ou do conjunto dos números primos maiores que 2.

Por fim, podemos representar um conjunto por meio de um diagrama denominado diagrama de Venn, cuja representação é uma linha fechada circundando os elementos, ou a cardinalidade.

Conjunto A={1,2,3} representado no diagrama de Venn

Cardinalidade A=3

Figura 26

Veremos nos tópicos adiante a utilidade da notação de conjuntos pelo diagrama de Venn.

5.3 Igualdade e subconjuntos

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são iguais quando ambos possuem, exatamente, os mesmos elementos, por consequência, a mesma cardinalidade.

Sejam A e B conjuntos, afirmamos que $A = B$ se, e somente se:

- $x \in A$ então $x \in B$
- $x \in B$ então $x \in A$

Subconjuntos

Podemos agora definir subconjunto.

Sejam os conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B, se e somente se, todo elemento de A também for elemento de B. A notação $A \subseteq B$ significa que A é subconjunto de B.

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, podemos dizer que ele é subconjunto de $B = \{1, 2, 3, 4\}$. De acordo com a definição, podemos dizer que um conjunto C, qualquer, é subconjunto de si mesmo, pois $C \subseteq C$. Além disso, para qualquer conjunto C, temos $\varnothing \subseteq C$. Isso porque todo elemento de $\varnothing$ está em C – como não há elementos em $\varnothing$, não existem elementos de $\varnothing$ que não estejam em C. Esse é um exemplo útil de afirmação vazia. Podemos dizer que $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto. Esses são casos particulares da relação de inclusão que estudaremos mais profundamente a seguir.

O símbolo $\subseteq$ é a junção dos símbolos $\subset$ e $=$. O símbolo $\subset$, que significa "está contido", pode também ser usado para indicar um subconjunto, porém, no caso de dois conjuntos iguais, ele não poderá ser usado. Se $A \subset B$, dizemos que A é subconjunto próprio ou estrito.

5.4 Inclusão

A relação $A \subseteq B$ chama-se relação de inclusão, com os seguintes casos particulares:

- $A \subseteq A$, pois é notório que qualquer elemento de A pertence a A.
- $\varnothing \subseteq A$, todo elemento de $\varnothing$ está em A – como não há elementos em $\varnothing$, não existem elementos de $\varnothing$ que não estejam em A.

A relação de inclusão possui três propriedades.

Dados os conjuntos A, B e C quaisquer de um determinado universo U, temos:

- $A \subseteq A$ (propriedade reflexiva)
- Se $A \subseteq A$ e $B \subseteq A$, então $A = B$ (propriedade antissimétrica)
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ (propriedade transitiva)

A propriedade antissimétrica é sempre usada quando se quer provar que dois conjuntos são iguais. Para provar que $A = B$, basta provar que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.

A propriedade transitiva é fundamental nas deduções. Na lógica, ela é conhecida como uma forma de raciocínio, chamada de silogismo. Por exemplo:

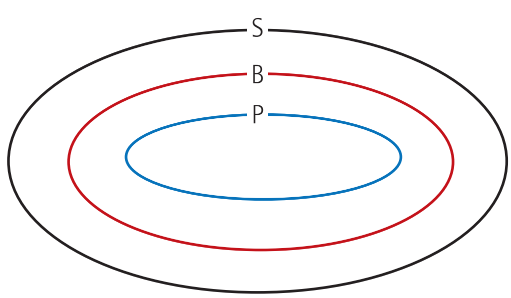


Figura 27

P – conjunto dos paulistas

B – conjunto dos brasileiros

S – conjuntos dos sul-americanos

Assim:

Todo paulista é brasileiro.

Todo brasileiro é sul-americano.

Então, todo paulista é sul-americano.

Se $P \subseteq B$ e $B \subseteq S$, então $P \subseteq S$

Relação de inclusão e implicação lógica

Vimos que uma propriedade pode ser expressa por um conjunto. Consideremos A o conjunto dos elementos de certo universo U que possuem a propriedade p; e B, o conjunto dos elementos desse mesmo universo que possuem a propriedade q. Quando dizemos:

$p \Rightarrow q$ (p implica q, ou p acarreta q), estamos dizendo que $A \subseteq B$

Por exemplo:

No universo dos números naturais, vamos considerar as propriedades

p: n é um número natural terminado em 3

q: n é um número natural ímpar

Então $A = \{3, 13, 23, 33, ...\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$

Vemos que $A \subseteq B$ então $p \Rightarrow q$

Vejamos mais um exemplo:

Consideramos no universo dos quadriláteros, as propriedades:

p: ser quadrilátero com quatro lados de mesma medida.

q: ser quadrilátero com os lados opostos paralelos.

Nesse caso, A é o conjunto dos losangos e B é o conjunto dos paralelogramos e, portanto, $A \subseteq B$. Logo, $p \Rightarrow q$, ou seja, ser losango implica ser paralelogramo, ou, ainda, se um quadrilátero é losango, então ele é paralelogramo.

Recíproca de uma implicação lógica e equivalência

Dada a implicação $p \Rightarrow q$, chamamos de sua recíproca a implicação $q \Rightarrow p$. Note que nem sempre a recíproca de uma implicação verdadeira é também verdadeira. No exemplo anterior, temos que $p \Rightarrow q$ é verdadeira, pois todo losango é um paralelogramo, mas sua recíproca $q \Rightarrow p$ é falsa, pois nem todo paralelogramo é losango. Quando a implicação $p \Rightarrow q$ e sua recíproca $q \Rightarrow p$ forem ambas verdadeiras, escrevemos $p \Leftrightarrow q$ e lemos:

p é equivalente a q ou p se e somente se q ou p é condição necessária e suficiente para q.

Outro caso:

p: a propriedade de um número natural x ser igual a 3 ($x = 3$)

q: a propriedade de o dobro desse x ser igual a 6 ($2x = 6$)

$p \Rightarrow q$, pois, se $x = 3$, multiplicando ambos os membros da igualdade por 2, obtemos $2x = 6$

$q \Rightarrow p$, pois, se $2x = 6$, dividindo ambos os membros da igualdade por 2, obtemos $x = 3$

Assim, $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ são verdadeiras. Logo, $p \Leftrightarrow q$ e podemos escrever $x = 3 \Leftrightarrow 2x = 6$

5.5 Conjunto das partes

Dado o conjunto $A = \{a, e, i\}$, é possível escrever todos os subconjuntos (ou todas as partes) de A. Esse conjunto formado por todos os subconjuntos de A é chamado de conjunto das partes de A e indicamos por P(A). Assim, temos:

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$

Observe que $\varnothing$, $\{a\}$, $\{e\}$, $\{i\}$, $\{a, e\}$, $\{a, i\}$, $\{e, i\}$, $\{a, e, i\}$ são todos elementos de P(A), logo a relação entre esses elementos e P(A) é de pertinência e não de inclusão, ou seja, devemos escrever, por exemplo, $\{a\} \in P(A)$ e não $\{a\} \subseteq P(A)$.

Contagem de subconjuntos

Tomemos novamente o conjunto $A = \{a, e, i\}$. Vimos que ele possui 3 elementos e 8 subconjuntos.

Note que cada elemento de A é, ou não é, objeto de um dos 8 subconjuntos.

Hipoteticamente, se pudéssemos perguntar, ordenadamente, a cada elemento a, e, i se eles pertencem a determinado subconjunto, as respostas possíveis seriam sim ou não. Assim, por exemplo, se obtivéssemos como resposta (sim, sim, não), o subconjunto seria $\{a, e\}$. Observe, portanto, que estamos lidando com contagem de listas (estudada na unidade I) de comprimento 3 onde cada elemento da lista é sim ou não.

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Podemos concluir que o método de contagem de lista nos fornece a solução geral para determinarmos a quantidade de subconjuntos de um conjunto.

Dado um conjunto finito A. O total de subconjuntos de A é $2^{|A|}$

Observação

Conjunto das partes que denotamos por P(A) é o mesmo que conjunto potência que denotamos 2^A.

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 1. Complete cada expressão com o símbolo de $\in$ (pertence) ou $\subseteq$ (contido).

a) 2___$\{1, 2, 3\}$

Resolução

Como estamos relacionando o objeto 2 com o conjunto $\{1, 2, 3\}$, só é possível estabelecer relação de pertinência, logo, devemos completar com o símbolo $\in$.

b) $\{2\}$___$\{1, 2, 3\}$

Resolução

Como estamos relacionando o conjunto $\{2\}$ com o conjunto $\{1, 2, 3\}$, só é possível estabelecer relação de inclusão, logo, devemos completar com o símbolo $\subseteq$.

c) $\{2\}$___$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Resolução

Como estamos relacionando o objeto $\{2\}$ com o conjunto da parte $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, só é possível estabelecer relação de pertinência, logo, devemos completar com o símbolo $\in$.

d) $\varnothing$___$\{1, 2, 3\}$

Resolução

Como estamos relacionando o conjunto vazio com o conjunto $\{1, 2, 3\}$, só é possível estabelecer relação de inclusão, logo, devemos completar com o símbolo $\subseteq$.

e) $\mathbb{N}$___$\mathbb{Z}$

Resolução

Como estamos relacionando o conjunto dos naturais com o conjunto dos inteiros, só é possível estabelecer relação de inclusão, logo, devemos completar com o símbolo $\subseteq$.

f) $\{2\}$ ___ $\mathbb{Z}$

Resolução

Como estamos relacionando o conjunto $\{2\}$ com o conjunto dos inteiros, só é possível estabelecer relação de inclusão, logo, devemos completar com o símbolo $\subseteq$.

g) $\{2\}$___$2^{\mathbb{Z}}$

Resolução

Como estamos relacionando o objeto $\{2\}$ com o conjunto potência dos inteiros, só é possível estabelecer relação de pertinência, logo, devemos completar com o símbolo $\in$.

Exemplo 2. Escreva os seguintes conjuntos relacionando seus elementos entre chaves.

a) $\{x \in \mathbb{N} \ / \ x \leq 10 \text{ e } 3|x\}$

Resolução

Esse é o conjunto formado pelos números naturais, tal que esses elementos são menores ou iguais a 10 e divisíveis por 3.

Resposta: $\{0, 3, 6, 9\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ é primo e } 2|x\}$

Resolução

Esse conjunto é formado por números inteiros, tal que esses inteiros sejam primos e divisíveis por 2.

Resposta: $\{2\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 = 4\}$

Resolução

Esse é o conjunto formado por números inteiros, tal que os quadrados desses números resultem em 4.

Resposta: $\{-2, 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 5\}$

Resolução

Esse é o conjunto formado por números inteiros, tal que os quadrados desses números resultem em 5.

Resposta: $\varnothing$

e) $2^{\varnothing}$

Resolução

Esse é o conjunto potência do conjunto vazio, sabendo que o conjunto vazio tem 0 elementos e que a quantidade de subconjuntos é dada por $2^{|\varnothing|} = 2^0 = 1$. Portanto o único elemento do conjunto potência é:

Resposta: $\{\varnothing\}$

f) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 10|x \text{ e } 100|x\}$

Resolução

Esse é o conjunto formado por números inteiros, tal que esses números sejam divisíveis por 10 e por 100. Logo, os elementos desse conjunto são todos os números terminados em 00 e o próprio 0.

Resposta: $\{0, 100, 200, 300, 400, ...\}$

Exemplo 3. Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$

Resolução

Esse é o conjunto dos números naturais cujos elementos estão entre 0 e 10, inclusive 0 e 10. Assim, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Resposta: cardinalidade = 11

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |\, x \leq 10 \,|\}$

Resolução

Esse é o conjunto dos inteiros cujo valor absoluto é menor ou igual a 10. Assim $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Resposta: cardinalidade = 11

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \in \varnothing\}$

Resolução

Esse é o conjunto dos inteiros cujos elementos pertencem ao conjunto vazio. Como o conjunto vazio tem 0 elementos, então:

Resposta: cardinalidade = 0

d) $\{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

Resolução

Esse conjunto é formado por 2 elementos que são subconjuntos de um certo conjunto.

Resposta: cardinalidade = 2

5.6 Complementar de um conjunto

Tomemos o conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e o conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, dizemos que o complementar de A em relação a U é o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, ou seja, os elementos de U que não pertencem a A.

Generalizando, podemos dizer que o complementar de um conjunto A qualquer em relação a um universo U é os elementos de U que não pertencem a A. Denota-se o complementar de A em relação a U por $\complement_U^A$, ou A^C, ou $\overline{A}$.

Logo $\overline{A} = \{ x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \}$

Propriedades

- $\left(A^C\right)^C = A$ para todo $A \subseteq U$ (o complementar do complementar de um conjunto A é o próprio conjunto A).
- Se $A \subseteq B$, então $A^C \supseteq B^C$ (se A está contido em B então o complementar de B está contido no complementar de A).

Exemplo. Dados $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $C=\{2, 4\}$, determine:

a) A^C

Resolução

O complementar de A em relação a U, é o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem a A. Logo:

$A^C = \{1, 3, 5, 7, 9\} = B$

Resposta: o complementar de A em relação a U é o conjunto $A^C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) B^C

Resolução

O complementar de B em relação a U é o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem a B. Logo:

$B^C = \{0, 2, 4, 6, 8\} = A$

Resposta: o complementar de B em relação a U é o conjunto $B^C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) C^C

Resolução

O complementar de C em relação a U é o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem a C. Logo:

$C^C = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Resposta: o complementar de C em relação a U é o conjunto $C^C = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $\complement_A^C$

Resolução

O complementar de C em relação a A é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a C. Logo:

$\complement_A^C = \{1, 3, 5, 7, 9\} = B$

Resposta: o complementar de C em relação a A é o conjunto $\complement_A^C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

5.7 Contrapositiva

Anteriormente, foi mostrado que se p é a propriedade que define o conjunto A, e q a propriedade que define o conjunto B, dizer que $A \subseteq B$ é o mesmo que $p \Rightarrow q$.

Imaginemos agora a negação de p e q, denotadas, respectivamente por p' e q'. Se um objeto x goza a propriedade p, significa que x não goza da propriedade p', a mesma relação vale para q em relação a q'.

Portanto, a equivalência $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$ ocorre da seguinte forma:

$p \Rightarrow q$, se e somente se $q' \Rightarrow p'$

A implicação $q' \Rightarrow p'$ denomina-se contrapositiva da implicação $p \Rightarrow q$.

Exemplo 1. Consideremos o universo U o conjunto dos quadriláteros convexos; p, a propriedade de um quadrilátero x ser losango; e q a propriedade de ser um paralelogramo. Assim, p' é a propriedade que tem um quadrilátero convexo de não ser um losango e q' a de não ser um paralelogramo. Logo:

- $p \Rightarrow q$: Se x é um losango, então x é um paralelogramo.
- $q' \Rightarrow p'$: Se x não é um paralelogramo, então x não é um losango.

As afirmações I e II são equivalentes, logo $p \Rightarrow q \Leftrightarrow q' \Rightarrow p'$

Exemplo 2. Escreva a contrapositiva da implicação $p \Rightarrow q$ em que:

p: número natural maior que 2 primo

q: número natural maior que 2 ímpar

$p \Rightarrow q$: se um número natural maior que 2 é primo, então ele é ímpar

Resolução

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é a negação de q que implica a negação p, ou seja, $q' \Rightarrow p'$. Assim:

p': número natural maior que 2 não primo

q': número natural maior que 2 par

Logo:

Resposta: $q' \Rightarrow p'$: Se um número maior que 2 é par, então ele não é primo.

5.8 Operações

União

Sejam A e B conjuntos, chamamos de A união B e denotamos por $A \cup B$, o conjunto formado pelos elementos de A, ou elementos de B, ou a ambos os conjuntos.

Dado o conjunto $A = \{10, 20, 30\}$ e o conjunto $B = \{15, 20, 25, 30\}$, a união do conjunto A com o conjunto B é $A \cup B = \{10, 15, 20, 25, 30\}$. Assim podemos escrever:

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Em outras palavras, dizemos que $A \cup B$ é formado pelos elementos de A mais os elementos de B.

Nos diagramas, a união $A \cup B$ está colorida.

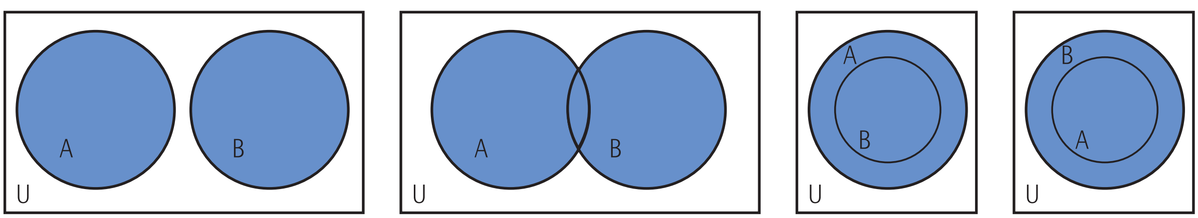


Figura 28

Intersecção

Sejam os conjuntos A e B, chamamos de A intersecção B e denotamos por $A \cap B$ o conjunto formado pelos elementos de A e pelos elementos de B.

Dados o conjunto $A = \{10, 20, 30\}$ e o conjunto $B = \{15, 20, 25, 30\}$, a intersecção do conjunto A com o conjunto B é $A \cap B = \{20, 30\}$. Assim podemos escrever:

$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$

Em outras palavras, dizemos que $A \cap B$ é formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B simultaneamente.

Nos diagramas, a união $A \cap B$ está colorida.

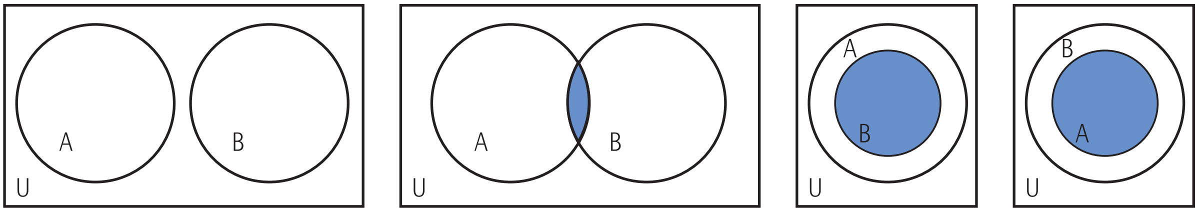


Figura 29

Sejam os conjuntos A, B e C, valem as propriedades:

- $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

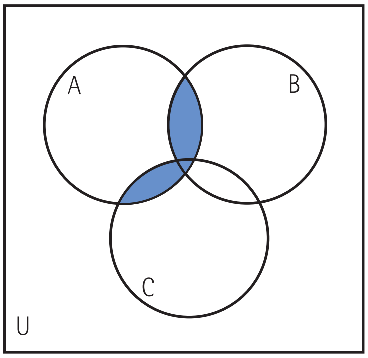
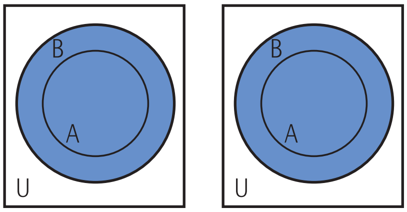


Figura 30

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$



$A \cup B = B$ $A \cap B = A$

Figura 31

- $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$

$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

- Leis de Morgan

Dados A e B de um universo U, tem-se

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (O complementar da união é igual à intersecção dos complementares.)

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (O complementar da intersecção é igual à união dos complementares)

Diferença

Sejam A e B conjuntos, chamamos A menos B e denotamos por A – B o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B.

Dados o conjunto $A = \{10, 20, 30\}$ e o conjunto $B = \{15, 20, 25, 30\}$, a diferença do conjunto A com o conjunto B é $A - B = \{10\}$. Assim, podemos escrever:

$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$

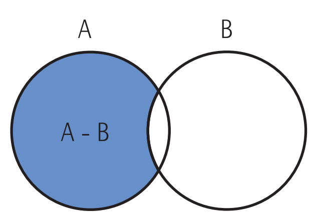


Figura 32

Produto cartesiano

Sejam os conjuntos A e B. O produto cartesiano de A e B, denotado por A x B, é o conjunto de todos os pares ordenados (lista de dois elementos) formados tomando-se um elemento de A juntamente com um elemento de B de todas as maneiras possíveis. Assim:

$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ e } b \in B\}$

Exemplo 1. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Determine o que segue:

a) A x B

Resolução

Na primeira posição do par ordenado, devem conter somente elementos de A, enquanto na segunda posição, somente elementos de B. Assim:

A x B = {(0, 3), (0, 4), (0, 5), (1,3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)}

b) B x A

Resolução

Na primeira posição do par ordenado, devem conter somente elementos de B, enquanto na segunda posição, somente elementos de A. Assim:

B x A = {(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (5, 0), (5, 1), (5, 2)}

Exemplo 2. Dados os conjuntos A={0, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, B={2, 4, 5, 6, 9} e C={0, 3, 6, 9, 10}, determine:

a) A – B

Resolução

A diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B. Logo:

A – B = {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8} – {2, 4, 5, 6, 9} = {0, 3, 7, 8}

Resposta: A – B = {0, 3, 7, 8}

b) B – A

Resolução

A diferença entre B e A é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A. Logo:

B – A = {2, 4, 5, 6, 9} – {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8} = {2, 9}

Resposta: B – A = {2, 9}

c) B – C

Resolução

A diferença entre B e C é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A. Logo:

B – C = {2, 4, 5, 6, 9} – {0, 3, 6, 9, 10} = {2, 4, 5}

Resposta: $B - C = \{2, 4, 5\}$

d) $C - B$

Resolução

A diferença entre C e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a C, mas não pertencem a B. Logo:

$C - B = \{0, 3, 6, 9, 10\} - \{2, 4, 5, 6, 9\} = \{0, 3, 10\}$

Resposta: $C - B = \{0, 3, 10\}$

e) $A \cup (B \cap C)$

Resolução

Vamos calcular primeiro a intersecção entre B e C. Sabendo que a intersecção entre B e C é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e a C simultaneamente, temos:

$B \cap C = \{2, 4, 5, 6, 9\} \cap \{0, 3, 6, 9, 10\} = \{6, 9\}$

A união de A com $B \cap C$ é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de $B \cap C$. Logo:

$A \cup (B \cap C) = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{6, 9\} = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Resposta: $A \cup (B \cap C) = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

f) $B \cup (A \cap C)$

Resolução

Vamos calcular primeiro a intersecção entre A e C. Sabendo que a intersecção entre A e C é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a C simultaneamente, temos:

$A \cap C = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{0, 3, 6, 9, 10\} = \{0, 3, 6\}$

A união de B com $A \cap C$ é o conjunto formado pelos elementos de B mais os elementos de $A \cap C$. Logo:

$B \cup (A \cap C) = \{2, 4, 5, 6, 9\} \cup \{0, 3, 6\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

Resposta: $B \cup (A \cap C) = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

g) $A \cap (B \cup C)$

Resolução

Vamos calcular primeiro a união entre B e C. Sabendo que a união entre B e C é conjunto formado pelos elementos que pertencem a B mais os elementos que pertencem a C, temos:

$B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 9\} \cup \{0, 3, 6, 9, 10\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

A intersecção entre A e $B \cup C$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a $B \cup C$ simultaneamente. Logo:

$A \cap (B \cup C) = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\} = \{0, 3, 4, 5, 6\}$

Resposta: $A \cap (B \cup C) = \{0, 3, 4, 5, 6\}$

h) $B \cap (A \cup C)$

Resolução

Vamos calcular primeiro a união entre A e C. Sabendo que a união entre A e C é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A mais os elementos que pertencem a B, temos:

$A \cup C = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{0, 3, 6, 9, 10\} = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

A intersecção entre B e $A \cup C$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e a $A \cup C$ simultaneamente. Logo:

$B \cap (A \cup C) = \{2, 4, 5, 6, 9\} \cap \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{4, 5, 6, 9\}$

Resposta: $B \cap (A \cup C) = \{4, 5, 6, 9\}$

5.9 Cardinalidade da união de conjuntos

Considere os conjuntos $A=\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B=\{2, 4, 5, 6, 9\}$ e $C=\{0, 3, 6, 9, 10\}$.

Quanto à cardinalidade desses conjuntos, temos:

$|A|=7$

$|B|=5$

$|C|=5$

Observe:

$A \cap B = \{4, 5, 6\}$, logo, $|A \cap B| = 3$

$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, logo, $|A \cup B| = 9$.

Note que a cardinalidade de $|A \cup B| \neq |A| + |B|$, pois entre os dois conjuntos, há 3 elementos em comum.

Para dois conjuntos finitos, de modo geral, podemos afirmar que:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Inserindo cada uma das cardinalidades no diagrama de Venn, temos:

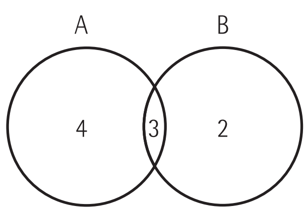


Figura 33

Aplicando o mesmo raciocínio, vamos determinar uma expressão que indique a cardinalidade de $(A \cup B \cup C)$

Vimos que:

$|A|=7$

$|B|=5$

$|C|=5$

Observe:

$A \cap B = \{4, 5, 6\}$, logo, $|A \cap B| = 3$

$A \cap C = \{0, 3, 6\}$, logo, $|A \cap C| = 3$

$B \cap C = \{6, 9\}$, logo, $|B \cap C| = 2$

$A \cap B \cap C = \{6\}$, logo, $|A \cap B \cap C| = 1$

$A \cup B \cup C = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, logo, $|A \cup B \cup C| = 10$

Assim de modo geral para três conjuntos, temos:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$10 = 7 + 5 + 5 - 3 - 3 - 2 + 1$

Exemplo 1. Um pesquisador de opinião pública entrevistou 35 eleitores, todos apoiando o referendo 1, o referendo 2 ou ambos; descobriu que 14 eleitores apoiam o referendo 1; e 26 apoiam o referendo 2. Quantos eleitores apoiam ambos?

Resolução

Nesse exemplo, temos dois conjuntos:

A: conjunto dos eleitores que apoiam o referendo 1.

B: conjunto dos eleitores que apoiam o referendo 2.

Como o entrevistador tomou a opinião de 35 eleitores, logo, concluímos que a cardinalidade da união de A com B é: $|A \cup B| = 35$.

Como 14 eleitores apoiam o referendo 1, logo, $|A| = 14$

Como 26 eleitores apoiam o referendo 2, logo, $|B| = 26$

A pergunta do problema é saber quantos eleitores apoiam os dois referendos, logo, o que se quer descobrir é $|A \cap B|$. Assim, temos:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$35 = 14 + 26 - |A \cap B|$

$|A \cap B| = 14 + 26 - 35$

$|A \cap B| = 5$

Resposta: 5 eleitores apoiam os referendos 1 e 2.

Exemplo 2. Um grupo de estudantes está planejando encomendar pizzas. Se 13 comem linguiça calabresa, 10 comem salame italiano, 12 comem queijo extra, 4 comem tanto calabresa quanto salame, 5 comem tanto salame quanto queijo extra, 7 comem tanto linguiça calabresa quanto queijo extra e 3 comem de tudo, quantos estudantes há no grupo?

Resolução

Nesse exemplo, temos três conjuntos:

A: conjunto dos estudantes que comem pizza de calabresa

B: conjunto dos estudantes que comem pizza de salame

C: conjunto de estudantes que comem pizza de queijo

Se 13 estudantes comem pizza de calabresa, logo, $|A| = 13$

Se 10 estudantes comem pizza de salame, logo, $|B| = 10$

Se 12 estudantes comem pizza de queijo, logo, $|C| = 12$

Se 4 estudantes comem pizza de calabresa ou salame, logo, $|A \cap B| = 4$

Se 5 estudantes comem pizza de salame ou queijo, logo, $|B \cap C| = 5$

Se 7 estudantes comem pizza de calabresa ou queijo, logo, $|A \cap C| = 7$

Se 3 estudantes comem todas as pizzas, logo, $|A \cap B \cap C| = 3$

A pergunta do problema é saber quantos estudantes há no grupo, logo, o que se quer descobrir é $|A \cup B \cup C|$. Assim temos:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 13 + 10 + 12 - 4 - 7 - 5 + 3$$

$$|A \cup B \cup C| = 22$$

Resposta: 22 estudantes fazem parte do grupo.

Outra maneira de se resolver esse exercício é através do diagrama de Venn. Acompanhe:

1º passo: anotamos no diagrama $|A \cap B \cap C| = 3$.

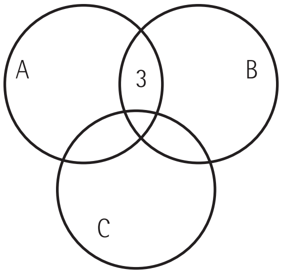


Figura 34

2º passo: anotamos no diagrama $|A \cap B| = 4$. Todavia, no espaço destinado a $|A \cap B|$ no diagrama, já foi anotado 3 elementos, logo, $4 - 3 = 1$.

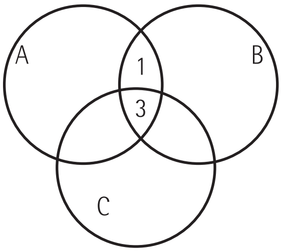


Figura 35

3º passo: anotamos no diagrama $|A \cap C| = 7$. Todavia, no espaço destinado a $|A \cap C|$ no diagrama, já foi anotado 3 elementos, logo $7 - 3 = 4$.

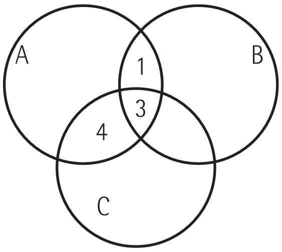


Figura 36

4º passo: anotamos no diagrama $|B \cap C| = 7$. Todavia, no espaço destinado a $|B \cap C|$ no diagrama, já foi anotado 3 elementos, logo $5 - 3 = 2$.

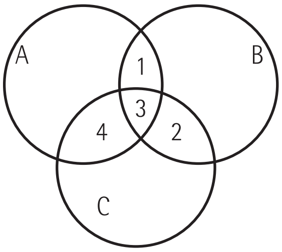


Figura 37

5º passo: anotamos no diagrama $|A|=13$. Todavia, no espaço destinado a $|A|$ no diagrama, já foi anotado $4 + 3 + 1 = 8$ elementos, logo $13 - 8 = 5$.

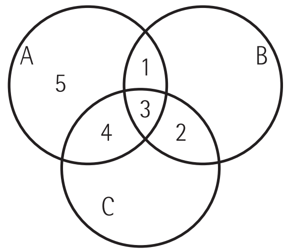


Figura 38

6º passo: anotamos no diagrama $|B|=10$. Todavia, no espaço destinado a $|B|$ no diagrama, já foi anotado $3 + 2 + 1 = 6$ elementos, logo $10 - 6 = 4$.

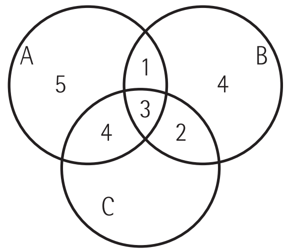


Figura 39

7º passo: anotamos no diagrama $|C|=12$. Todavia, no espaço destinado a $|C|$ no diagrama, já foi anotado $4 + 3 + 2 = 9$ elementos, logo $12 - 9 = 3$.

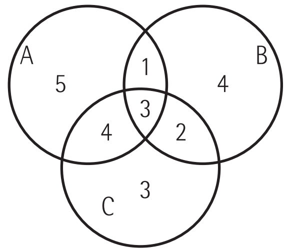


Figura 40

8º passo: preenchido o diagrama, para encontrar a solução $|A \cup B \cup C|$, basta somar os números inseridos nele, assim:

$5 + 4 + 3 + 1 + 4 + 2 + 3 = 22$

Resposta: 22 estudantes fazem parte do grupo.

Lembrete

O modo de resolução dos problemas de cardinalidade pode ser através das fórmulas ou pelo diagrama de Venn.

6 RELAÇÕES

As relações sempre estiveram intrinsecamente ligadas à matemática. De modo geral, uma relação é a comparação entre dois objetos que estão relacionados por alguma regra. Assim, para o conjunto dos inteiros, **maior que** ($>$) é uma relação. Alguns pares de números, como (5, 2), satisfazem a relação maior que, pois $5>2$, mas outros pares não satisfazem, como, por exemplo, (3, 6), pois $3<6$.

Podemos estabelecer outros tipos de relações para os inteiros, como **menor que, divisibilidade**, **igualdade**, entre outras. As relações não são inerentes ao objeto número, podemos estabelecer a relação **está contido em** ($\subseteq$) para um par de conjuntos, ou se dois triângulos são **congruentes**. Aqui, vamos estudar as relações em si mesmas, ou seja, o que é uma relação.

6.1 Conceito

Uma relação R é um conjunto de pares ordenados.

Lembrando que um par ordenado é uma lista de dois elementos, parece que esse conceito não tem muito a ver com as relações $>$, $<$, $=$ $\subseteq$. Mas vejamos:

Se x e y estão relacionados por R, então escrevemos xRy, caso contrário, colocamos um traço inclinado sobre o símbolo R, como nos símbolos $\neq \notin$. Assim, podemos entender a definição conjunto de pares ordenados como uma listagem completa de todos os pares de objetos que satisfazem a relação.

Tomemos a relação $R = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$, por exemplo. Ela quer dizer que sobre uma determinada regra, 3 está relacionado com 1, 3 está relacionado com 2 e 3 está relacionado com 4 e, para quaisquer outros objetos, x e y, x não está relacionado com y. Assim, podemos escrever:

$(3, 1) \in R$, $(3, 2) \in R$, $(3, 4) \in R$, $(8, 7) \notin R$

Isto quer dizer que os pares ordenados (3, 1), (3, 2) e (3, 4) estão relacionados por R, mas o par ordenado (8, 7) não está. Podemos representar essas relações como segue:

3R1, 3R2, 3R4, $8 \not R 7$. Logo:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Podemos também representar a relação **menor ou igual que** no conjunto dos números inteiros, assim:

$\{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } y - x \in \mathbb{N}\}$

Logo, (x, y) está na relação desde que y – x seja um número inteiro não negativo, o que equivale dizer que $x \leq y$.

Vamos ampliar nossa definição de relação:

Seja R uma relação e sejam os conjuntos A e B. Dizemos que R é uma relação sobre A desde que $R \subseteq A \times A$; e dizemos que R é uma relação de A para B se $R \subseteq A \times B$.

Vamos destacar dois pontos importantes:

- Uma relação R é um conjunto de pares ordenados (x, y); incluímos um par ordenado em R apenas quando (x, y) satisfaz a relação R. Qualquer conjunto de pares ordenados constitui uma relação, e uma relação não precisa ser especificada por uma regra geral.

- Sendo as relações conjuntos de pares ordenados, podemos escrever em xRy ou $(x, y) \in R$, mas dá-se preferência a xRy.

Exemplo 1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Sejam:

$R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$S=\{(1, 2), (3, 2)\}$

$T=\{(1, 4), (1, 5), (4, 7)\}$

$U=\{(4, 4), (5, 2), (6, 2), (7, 3)\}$

$V=\{(1, 7), (7, 1)\}$

Resolução

Todos os conjuntos são relações.

R é uma relação sobre A. Note que é a relação de igualdade em A.

S é uma relação sobre A. Note que não houve ocorrência do elemento 4.

T é uma relação de A para B. Note que não houve ocorrência dos elementos 2 e 3 de A e do elemento 6 de B.

U é uma relação de B para A.

V é uma relação, mas não é relação de A para B nem de B para A.

6.2 Relação inversa

Seja R uma relação. A inversa de R, denotada por R^{-1}, é a relação formada invertendo a ordem de todos os pares ordenados.

Matematicamente:

$R^{-1} = \{(x, y) \,/\, (y, x) \in R\}$

Se R é uma relação sobre A, R^{-1} também o é. Se R é uma relação de A para B, então R^{-1} é uma relação de B para A.

Por exemplo, seja a relação $R = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (7, 8)\}$, determine R^{-1}.

Resolução

Basta inverter os pares ordenados, assim:

$R^{-1} = \{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (8, 7)\}$

6.3 Propriedades

Seja R uma relação definida em um conjunto A.

- Se, para todo $x \in A$, temos xRx, então R é **reflexiva**.
- Se, para todo $x \in A$, temos $x\not{R}x$, então R é **antirreflexiva**.
- Se, para todo $x, y \in A$, temos $xRy \Rightarrow yRx$, então R é **simétrica**.
- Se, para todo $x, y \in A$, temos $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$, então R é **antissimétrica**.
- Se, para todo $x, z \in A$, temos $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$, então R é **transitiva**.

Exemplo 1. Consideremos a relação = (igualdade) sobre os inteiros. Ela é reflexiva (qualquer inteiro é igual a si mesmo), simétrica (se x = y, então y = x) e transitiva (se x = y e y = z, então x = z).

A relação de igualdade também é antissimétrica, mas não é um bom exemplo. Entretanto a relação de igualdade não é antirreflexiva, o que acarretaria $x \neq x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2. Consideremos a relação ≤ (menor ou igual que) sobre os inteiros. Note que ≤ é reflexiva porque, para qualquer inteiro x, é verdade que $x \leq x$. É também transitiva, pois $x \leq y$ e $y \leq z$ implicam em $x \leq z$.

A relação ≤ não é simétrica, pois implicaria $x \leq y \Rightarrow y \leq x$.

E isto é falso; por exemplo, $4 \leq 5$ mas $5 \nleq 4$.

Entretanto, ≤ é antissimétrica: Se sabemos que $x \leq y$ e $y \leq x$, devemos ter $x = y$.

Finalmente, ≤ não é antirreflexiva; por exemplo, $6 \leq 6$.

Exemplo 3. Consideremos a relação < (estritamente menor que) sobre os inteiros. Observe que < é antirreflexiva, pois $5 < 5$ é falso. Não é simétrica, pois $x < y$ não implica $y < x$, por exemplo $3 < 4$ mas $4 \nleq 3$.

A relação < é antissimétrica, mas verifica a condição por vacuidade. A propriedade afirma:

$x<y$ e $y<x$, então $x = y$

Veja que é impossível ter simultaneamente $x<y$ e $y<x$, de modo que a hipótese dessa afirmação jamais será satisfeita. Assim, ela é verdadeira. Por fim, < é transitiva.

Exemplo 4. Consideremos a relação | (divide) sobre os números naturais. Observe que | é antissimétrica, pois, se x e y são números naturais com $x \mid y$ e $y \mid x$, então $x = y$.

Entretanto a relação | sobre os números inteiros não é antissimétrica. Por exemplo, $3|-3$ e $-3|3$, mas $3 \neq -3$.

Note que | não é simétrica, $3|9$ mas 9 não divide 3.

As propriedades das relações dependem de seu contexto.

A relação | sobre inteiros é diferente da relação | quando restrita aos números naturais. Esse exemplo mostra que uma relação pode não ser nem simétrica nem antissimétrica.

Os termos das propriedades, tais como reflexiva, são atributos de uma relação R definida em um conjunto A.

Exemplo 5. Consideremos a relação R = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}, R é reflexiva?

Esta pergunta não possui resposta definitiva. Se considerarmos R como uma relação no conjunto {1, 2, 3}, então a resposta é sim. Todavia, se consideramos R uma relação sobre os inteiros, nesse contexto, a resposta é não. Pode-se apenas dizer que uma relação R é reflexiva se nos for dado o conjunto A sobre o qual R é uma relação.

6.4 Relação de equivalência

Como o próprio nome sugere, essa relação tem a ver com aquelas que possuem forte semelhança. Por exemplo, a relação de = (igualdade) e a relação de $\cong$ (congruente). Assim, triângulos são congruentes quando têm, exatamente, a mesma forma. Triângulos congruentes não são iguais, mas, em certo sentido, funcionam como se fossem.

Isso ocorre porque das cinco propriedades listadas, a relação $\subseteq$ é reflexiva, simétrica e transitiva, mas não antissimétrica e nem antirreflexiva. Todas as relações que são reflexivas, simétricas e transitivas recebem o nome de relação de equivalência.

Por exemplo, consideremos que a relação **tem o mesmo tamanho que** sobre conjuntos finitos. Para conjuntos finitos de inteiros A e B, ARB se e somente se |A| = |B|. Observe que R é reflexiva, simétrica e transitiva e, dessa forma, é uma relação de equivalência. Isso não quer dizer que A = B, mas que A e B compartilham de uma mesma propriedade: a cardinalidade. Assim, se considerarmos A = {1, 2, 3} e B={4,5,6}, temos que A $\neq$ B, mas |A| = |B|.

6.5 Congruência módulo n

Seja n um inteiro positivo. Dizemos que os inteiros x e y são congruentes módulo n e denotamos por $x \equiv y \pmod{n}$, se n|(x-y), ou seja, $x \equiv y \pmod{n}$ se e somente se x e y diferem por um múltiplo de n.

Exemplo 1. Analise a relação de congruência módulo 5 para os números seguintes:

$3 \equiv 13 \pmod{5}$ porque 3 – 13 = -10 é múltiplo de 5.

$4 \equiv 4 \pmod{5}$ porque 4 – 4 = 0 é múltiplo de 5.

$16 \not\equiv 3 \pmod{5}$ porque 16 – 3 = 13 não é múltiplo de 5.

De modo geral, abreviamos a palavra módulo para mod. Se o inteiro n é conhecido e permanece inalterado durante a discussão, podemos omitir o (mod n) à direita. Costuma-se também abreviar (mod n) para apenas (n).

O caso mais simples dessa definição ocorre quando n = 1. Nele, temos $x \equiv y$ se e somente se x – y é divisível por 1, mas ocorre que todos os inteiros são divisíveis por 1, de modo que dois inteiros quaisquer são congruentes (mod 1).

Exemplo 2. Analise a relação de congruência módulo 2 para os números seguintes:

$3 \equiv 15 \pmod 2$ porque $3 - 15 = -12$ é múltiplo de 2

$0 \equiv 14 \pmod 2$ porque $0 - 14 = -14$ é múltiplo de 2

$3 \equiv 3 \pmod 2$ porque $3 - 3 = 0$ é múltiplo de 2

$3 \not\equiv 12 \pmod 2$ porque $3 - 12 = -9$ não é múltiplo de 2

$-1 \not\equiv 0 \pmod 2$ porque $-1 - 0 = -1$ não é múltiplo de 2

Observe que dois números são congruentes módulo 2 se e somente se ambos são pares ou ambos são ímpares.

Logo, a relação de congruência (mod n) é uma relação de equivalência nos conjuntos dos números inteiros.

6.6 Classe de equivalência

Vimos que dois números são congruentes mod 2 se ambos forem pares ou ambos forem ímpares.

Temos duas classes de números, pares e ímpares, ou seja, dois números pares quaisquer são congruentes mod 2 e dois números ímpares são congruentes mod 2. Observe que as duas classes, pares e ímpares, não têm elementos em comum, ou seja, são classes disjuntas, e, tomadas em conjunto, contêm todos os inteiros.

Vimos também a relação R, **tem o mesmo tamanho que** sobre subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ e R é uma relação de equivalência. Perceba que podemos classificar os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ de acordo com sua cardinalidade.

Portanto há apenas um subconjunto finito de $\in \mathbb{Z}$ que tem cardinalidade 0, a saber, o conjunto vazio, $\varnothing$. O único conjunto relacionado com $\varnothing$ pela R é próprio $\varnothing$. Na sequência, aparecem subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ que tem cardinalidade 1. Assim:

$..., \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\},\{2\}, ...$

Esses subconjuntos estão todos relacionados, entre si, pela R, mas não estão relacionados com outros conjuntos.

Temos também os subconjuntos de cardinalidade 2, que estão todos relacionados, entre si, pela R mas não estão relacionados com outros conjuntos.

Portanto, note que estamos decompondo conjuntos de acordo com uma relação de equivalência. Essa decomposição é denotada por classe de equivalência, cuja definição é:

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e seja $a \in A$. A classe de equivalência de a, denotada por [a], é o conjunto de todos os elementos de A relacionados com a pela R, assim:

$[a] = \{x \in A \,/\, xRa\}$

Por exemplo, vamos determinar a classe de equivalência sobre a relação de congruência módulo 3:

$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/ a \equiv b \pmod 3\}$ para o subconjunto finito de $\mathbb{Z}$,$\{1, 6, 10\}$.

Resolução

$[1] = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, xR1\} = x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 \equiv x \pmod 3$, ou seja, queremos todos os inteiros que se diferem de 1 por um múltiplo de 3. Obviamente que esse conjunto é infinito, mas podemos representar por:

-5 pois, $-5 - 1 = -6$

-2 pois, $-2 - 1 = -3$

1 pois, $1 - 1 = 0$

4 pois, $4 - 1 = 3$

7 pois, $7 - 1 = 6$

Dessa forma, a classe de equivalência de 1 é $\{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

$[2] = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, xR2\} = x \in \mathbb{Z} \,/\, 2 \equiv x \pmod 3$, ou seja, queremos todos os inteiros que se diferem de 2 por um múltiplo de 3. Obviamente que esse conjunto é infinito, mas podemos representar por:

-7, pois $-7 - 2 = -9$

-4, pois: $-4 - 2 = -6$

2, pois: $2 - 2 = 0$

5, pois: $5 - 2 = 3$

8, pois: $8 - 2 = 6$

Dessa forma, a classe de equivalência de 2 é $\{..., -7, -4, 2, 5, 8, ...\}$

$[10] = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR10\} = x \in \mathbb{Z} \mid 10 \equiv x \pmod 3$, ou seja, queremos todos os inteiros que se diferem de 10 por um múltiplo de 3. Obviamente que esse conjunto é infinito, mas podemos representar por:

4, pois: $-4 - 10 = -6$

7, pois: $7 - 10 = -3$

10, pois: $10 - 10 = 0$

13, pois: $13 - 10 = 3$

16, pois: $16 - 10 = 6$

Dessa forma, a classe de equivalência de 1 é $\{..., 4, 7, 10, 13, 16, ...\}$

7 RECURSÃO II

7.1 Conceito

Imagine a realização de uma sequência de procedimentos (algoritmo). Se em cada procedimento, a partir do segundo, for necessária a repetição do anterior, estamos tratando de recursão. Um procedimento que se utiliza da recursão é dito recursivo.

O conceito é usado na definição de sequências, funções, conjuntos e na implementação de algoritmos.

7.2 Funções recursivas

São funções que utilizam processos recursivos. Uma função é dita recursiva quando dentro dela é feita uma ou mais chamadas a ela mesma. Assim função recursiva é uma função definida em termos de si mesma.

Exemplo 1. Uma função é definida para qualquer número natural da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x=0 \text{ - 1ª condição} \\ x \cdot f(x-1), \text{ se } x>0 \text{ - 2ª condição} \end{cases}$$

Determine para essa função a imagem para $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$ e $x = 5$. Qual propriedade matemática essa função representa?

Resolução

Executando o cálculo das imagens pela definição da função, temos:

Para $x = 0$

Como $x = 0$, utilizaremos a 1ª condição, logo: $f(0) = 1$

Para $x = 1$

Como $x>0$, utilizaremos a 2ª condição, logo: $f(1) = 1 \cdot f(1 - 1) = 1 \cdot 1 = 1$

Para $x = 2$

Como $x>0$, utilizaremos a 2ª condição, logo: $f(2) = 2 \cdot f(2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2$

Para $x = 3$

Como $x>0$, utilizaremos a 2ª condição, logo: $f(3) = 3 \cdot f(3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$

Para $x = 4$

Como $x>0$, utilizaremos a 2ª condição, logo: $f(4) = 4 \cdot f(4 - 1) = 4 \cdot 6 = 24$

Para $x = 5$

Como $x>0$, utilizaremos a 2ª condição, logo: $f(5) = 5 \cdot f(5 - 1) = 5 \cdot 24 = 120$

Observado a sequência dos valores obtidos, chega-se à conclusão que essa função fornece o fatorial do número natural x. Então $f(x) = x!$ Se utilizar essa função $f(x)$ para um algoritmo que determine o fatorial de um número, teremos um algoritmo recursivo.

Exemplo 2. A Torre de Hanói é um jogo composto por uma base com três pinos. Em um dos pinos, estão inseridos discos com diâmetros distintos entre si e dispostos em ordem decrescente da base ao topo. O objetivo do jogo é mover todos os discos para qualquer outro pino, podendo utilizar os pinos restantes como apoio, de modo que um disco com diâmetro maior jamais fique sobre outro disco de diâmetro menor. A dificuldade do jogo varia conforme a quantidade de discos. A versão mais fácil do jogo contém três discos.

Escreva uma função recursiva para determinar o menor número de movimentos para resolver o "quebra-cabeça" da Torre de Hanói.

Resolução

Devemos começar pelo caso mais simples:

1 disco

Nesse caso, é notório que um único movimento é necessário, logo:

f(1) = 1 movimento.

2 discos

Aqui, são necessários 3 movimentos, conforme figura.

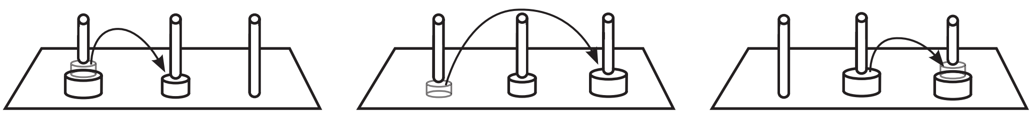


Figura 41

Então f(2) = 3 movimentos

3 discos

Nesse caso, há 7 movimentos para resolver o quebra-cabeça.

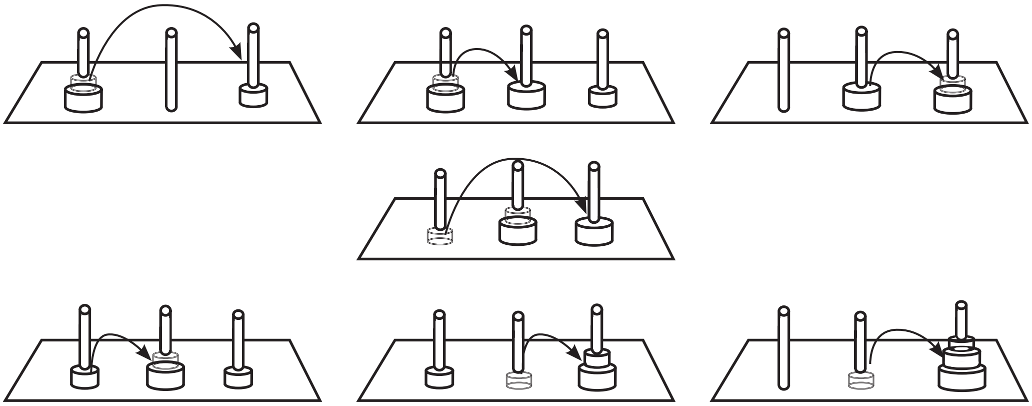


Figura 42

Logo, f(3) = 7 movimentos

Para determinarmos uma função recursiva, nomeamos os eixos em I, II e III da esquerda para a direita e que no jogo se mova a pilha de discos de I para III. Primeiramente, observamos, através da figura, que, para 1 disco (n = 1), o número de movimentos é 1. De fato, para mover um disco do eixo I para o eixo III, basta apenas um único movimento. Para 2 discos (n = 2), temos que mover o disco menor para o eixo auxiliar central, mover o disco maior para o eixo III e, finalmente, mover o disco menor sobre o disco maior, totalizando 3 movimentos.

Seja, portanto, x_n o número de movimentos para mudar uma torre de n discos do eixo I para o eixo III. É possível expressar x_n em função de x_{n-1}. Se temos n discos no eixo I, sabemos que precisamos mover n – 1 discos para o eixo central usando x_{n-1} movimentos. Depois, movemos o disco maior para o eixo III e, logo após, procedemos a movimentação dos n−1 discos do eixo central para sua posição final usando novamente os x_{n-1} movimentos. Portanto, movemos os n discos usando $2 \cdot x_{n-1} + 1$ movimentos. Assim, chegamos à seguinte função recursiva:

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n=1 \\ 2 \cdot f(n-1)+1, \text{ se } n>1 \end{cases}$$

Logo:

$f(1) = 1$

$f(2) = 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$f(3) = 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$f(4) = 2 \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$\vdots$

$f(n) = 2 \cdot f(n - 1) + 1$

Note que nos resultados da menor quantidade de movimento para resolver a Torre de Hanói observamos a sequência de resultados: 1; 3; 7; 15; 31; 63; . . . Esses valores coincidem com a expressão $(2^x - 1)$ movimentos, em que x é a quantidade de discos. Todavia a função $f(x) = 2^x - 1$ não é recursiva e é denominada forma fechada da função.

7.3 Sequências recursivas

Toda sequência cuja lei de formação de seus termos tem uma definição recursiva é denominada sequência recursiva.

Uma sequência recursiva clássica é a sequência de Fibonacci.

Vejamos o seguinte exemplo.

A sequência de Fibonacci tem origem no seguinte problema: num pátio fechado, coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos e que os coelhos não morrem ao fim de 6 meses, quantos casais de coelhos estão no pátio? Escreva o termo geral da sequência de Fibonacci na forma recursiva.

Resolução

Observe a figura seguinte, em que cada quadrilátero representa um casal de coelhos:

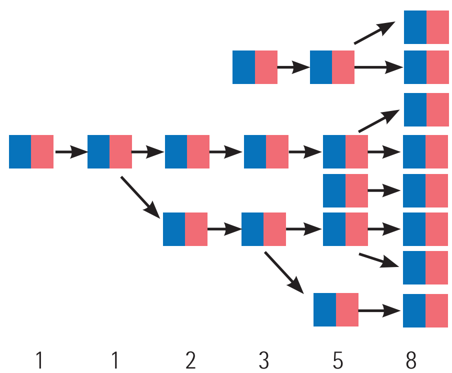


Figura 43

Chamando os termos da sequência da a_1; a_2; a_3 ..., temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$; o casal inicial deu origem ao novo casal

$a_4 = 3$; o casal inicial deu origem a 1 novo casal

$a_5 = 5$; o casal nascido em a_3 começa a reproduzir

$a_6 = 8$; os casais nascidos em a_4 começam a reproduzir

No fim 6 meses, teremos 8 casais. Para escrever o termo geral da sequência, observamos que cada termo, a partir do 2º, é a soma de dois anteriores:

$a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 + a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, ..., $a_n = n_{a-2} + n_{a-1}$

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \\ 1, \text{ se } n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

Estudaremos a seguir as partições de um conjunto. Para melhor fixação do conceito, vamos relembrar o conjunto das partes:

O conjunto das partes, que denotamos por P(A), é o conjunto dos subconjuntos, também denominado conjunto potência, cuja quantidade de elementos é dada por $2^{|A|}$.

7.4 Partições de um conjunto

Seja A um conjunto não vazio. Define-se como partição de A, e representa-se por part(A), qualquer subconjunto do conjunto das partes de A, que satisfaz, simultaneamente, às seguintes condições:

- Nenhum dos elementos de part(A) é o conjunto vazio.
- A interseção de quaisquer dos elementos de part(A) é o conjunto vazio.
- A união de todos os elementos de part(A) é igual ao conjunto A.

Exemplo 1. Considere o conjunto $A = \{\{1; 2\}; \{4; 6\}; \{3; 5\}\}$. Esse conjunto pode ser considerado partições de um conjunto B? Justifique.

Resolução

Sim, pois foram satisfeitas as 3 condições de partição de um conjunto, que são:

- Nenhum dos elementos de A é o conjunto vazio.
- A interseção de quaisquer dois elementos de A é o conjunto vazio.
- A união de todos os elementos de partição é o conjunto $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Exemplo 2. Considere o conjunto $A = \{\{1; 2\}; \{4; 6\}; \{3; 4\}\}$. Esse conjunto pode ser considerado partições de um conjunto B? Justifique.

Resolução

- Não, pois não foi satisfeita a condição II de partição de um conjunto:
- A interseção de quaisquer dois elementos da partição é o conjunto vazio. Observa-se que $\{4; 6\} \cap \{3; 4\} = \{4\}$

Lembrete

Note que a partição de um conjunto é um tipo de classe de equivalência.

7.5 Conjuntos recursivos

Um conjunto é recursivo quando um elemento depende de um ou de mais elementos anteriores.

Exemplo. Um conjunto S é definido recursivamente por:

$$S=\begin{cases} \{x/\ x \in S\} \\ 2 \in S \\ \text{Se } x \in S\text{, então } x + 7 \in S \end{cases}$$

Quais são os elementos do conjunto S?

Resolução

1º elemento de S é 2

2º elemento é $2 + 7 = 9$

3º elemento é $9 + 7 = 16$

Aplicando o mesmo raciocínio, obtemos os demais elementos.

Assim:

$S = \{2, 9, 16, ...\}$

Saiba mais

Para saber mais sobre o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, leia:

CHAQUIAM, M. *Ensaios temáticos*: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017. p. 81.

8 INDUÇÃO MATEMÁTICA

A palavra indução, cotidianamente, é usada como significado de forma de raciocínio que leva à conclusão de certo caso com base na observação da regularidade de uma ocorrência. Por exemplo, o princípio geral de que o Sol nasce no leste decorre por indução do fato de que todo nascer do Sol sempre ocorreu no leste. Obviamente que isso não prova que o Sol nascerá amanhã no leste. Na matemática, o significado de indução é muito diferente.

A seguir é apresentada uma alternativa de prova, através do teorema ou da do princípio da indução matemática, ou, ainda, simplesmente, indução. Mas antes precisamos conhecer o princípio da boa ordem.

8.1 Princípio da boa ordem

Definição:

Dizemos que um subconjunto $S \subseteq \mathbb{Z}$ é **limitado inferiormente** se existir $c \in \mathbb{Z}$, tal que $c \leq x$ para todo $x \in S$. Dizemos que $a \in S$ é um **menor elemento** de S se $a \leq x$ para todo $x \in S$.

Vamos agora ver o que significa os termos **limitado inferiormente** e **menor elemento**.

Na definição, temos duas afirmações usando os elementos $c \in \mathbb{Z}$ e $a \in S$:

1ª afirmação: $c \leq x$ para todo $x \in S \Rightarrow$ esta afirmação definiu S limitado inferiormente.

2ª afirmação: $a \leq x$ para todo $x \in S \Rightarrow$ esta afirmação definiu o menor elemento de S.

Considere um conjunto não vazio $S = \{3, 4, 10\}$:

S é subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja, $S \subseteq \mathbb{Z}$.

Tomemos um número c, conforme 1ª afirmação, ou seja, podemos tomar o número 1, por exemplo. Assim:

$1 \in \mathbb{Z}$ e 1 é menor que qualquer elemento de S, isso quer dizer que existe pelo menos um elemento de $\mathbb{Z}$ menor que qualquer elemento de S, logo afirmamos que S é limitado inferiormente.

Tomemos um número a, conforme 2ª afirmação, ou seja, devemos tomar o número 3, pois:

$3 \in S$ e 3 é menor ou igual a qualquer elemento de S. Logo, 3 é o menor elemento de S.

Concluímos, portanto, que se um subconjunto $S \subseteq \mathbb{Z}$ for limitado inferiormente por um elemento c e c também pertencer a S, logo, c é o menor elemento de S.

Em outras palavras, definimos o princípio da boa ordem como um subconjunto de $\mathbb{Z}$, quando limitado inferiormente, tem obrigatoriamente um menor elemento.

Observação

O menor elemento de um subconjunto sempre é único.

O princípio da boa ordem é uma característica inerente ao conjunto dos inteiros.

Note que esse princípio não vale, por exemplo, para os números racionais ($\mathbb{Q}$). Se tomarmos um subconjunto $S \subseteq \mathbb{Q}$, tal que $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$, ou seja, todos os números racionais compreendidos entre 0 e 1. Apesar de limitado inferiormente por 0, é impossível encontrar um menor elemento dentro desse intervalo.

Vejamos agora algumas propriedades do conjunto dos inteiros que são consequências do princípio da boa ordem.

1ª propriedade: não existe inteiro n tal que $0 < n < 1$

Para demonstração dessa propriedade, faremos a prova **por contradição**, ou seja, consideraremos que exista um inteiro n tal que $0 < n < 1$.

Demonstração

Existe um conjunto $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 1\} \neq \varnothing$

S é limitado inferiormente por 0.

Pelo princípio da boa ordem, existe um elemento $a \in S$ que é o menor elemento de S

$0 < a < 1$, multiplicando a desigualdade por a, temos: $0 < a^2 < a$

Percebe-se, então, que $a^2 \in S$ e que $a^2 < a$, isso é uma contradição, visto que a é o menor elemento, logo $S = \varnothing$.

2ª propriedade: dado $n \in \mathbb{Z}$, não existe um inteiro m, tal que $n < m < n + 1$

Demonstração

Também por contradição, suponhamos que exista um $m \in \mathbb{Z}$, tal que $n < m < n + 1$.

Somando o oposto de n a desigualdade, obtemos: $0 < m - n < 1$.

Isso é contradição, pois, pela 1ª propriedade, não existe inteiro entre 0 e 1 e acabamos de demostrar que se existe um inteiro entre n e seu sucessor, então existe um inteiro entre 0 e 1.

3ª propriedade: dados $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a \cdot b = 1$, então $a = b = \pm 1$

Demonstração

Se $a \cdot b = 1$, então $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Supondo $a > 0$

Se $a \cdot b = 1 > 0$, então $b > 0$.

Logo, $a \geq 1$ e $b \geq 1$

Isso implica que $1 = a \cdot b \geq a \geq 1$.

Concluímos, portanto que $a = 1$. Se $a = 1$, então, $1 = 1 \cdot b = b$.

Aplicando raciocínio análogo, podemos demonstrar que a e $b = -1$.

4ª propriedade: dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot b > a$

Demonstração

Como $b \neq 0$, então $|b| \geq 1$, logo:

$(|a| + 1) \cdot |b| \geq |a| + 1 > |a| > a$

Se $b > 0$, então $n = |a| + 1$.

Se $b < 0$, então $n = -(|a| + 1)$.

Como o conjunto dos números naturais é subconjunto dos inteiros, logo, o princípio da boa ordem vale para ele.

Dessa forma, podemos definir, para os naturais, o princípio da boa ordem da seguinte maneira:

Todo conjunto não vazio de números naturais contém um elemento mínimo.

8.2 Primeiro princípio da indução

A principal consequência do princípio da boa ordem é o 1º princípio da indução matemática. Assim:

Sendo P uma propriedade, k e n inteiros positivos, temos:

I – $P(1)$ é verdade.

II – Para qualquer k, se $P(k)$ é verdade logo $P(k + 1)$ é verdade.

Então $P(n)$ é verdade para todo inteiro positivo n.

Exemplo 1. Provar usando o primeiro princípio da indução matemática que:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2n - 1) = n^2$

Resolução

O primeiro passo é provar a veracidade do item I. P(1) é verdade.

O número 1 é base da indução. Substituindo $n = 1$ temos:

$P(1): 1 = 1^2$ é verdadeiro.

Agora vamos o item II. Para $\forall$ k, se P(k) é verdade, então P(k + 1) é verdade. $P(k): 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2k - 1) = k^2$

$P(k + 1): 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k+ 1)^2$. Temos que provar que esta expressão é verdadeira.

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1)}_{k^2} + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

$k^2 + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$

$k^2 + [2k + 2 - 1] = (k + 1)^2$

$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

$(k + 1)^2 = (k + 1)^2$ é verdadeiro, então $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2n - 1) = n^2$ é verdade.

Exemplo 2. Provar usando o primeiro princípio da indução matemática que:

$n^2 > n + 1$ para $n \geq 2$

Resolução

Nesse caso, o valor de partida é 2, pois a expressão é válida para $n \geq 2$, então devemos provar que P(2) é verdade. O valor 2 é base da indução.

$P(2): 2^2 > 2 + 1$ é verdadeiro.

Para $\forall$ k, se P(k) é verdade, então P(k + 1) é verdade.

$P(k): k^2 > k + 1$

$P(k + 1): (k + 1)^2 > (k + 1) + 1$(Temos que provar que essa expressão é verdadeira)

$k^2 + 2k + 1 > k + 2$

$k(k + 2) + 1 > k + 2$ é verdadeiro então: $P(n): n^2 > n + 1$ para $n \geq 2$ é verdade.

Podemos escrever esse princípio da seguinte forma:

Sejam $S \subseteq \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{Z}$ tais que:

- $a \in S$
- para todo $n \in S$ tem-se $n + 1 \in S$

Então $\{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x \geq a \} \subseteq S$

8.3 Segundo princípio da indução

Sendo P uma propriedade, k, r, e n inteiros positivos o 2º princípio da indução matemática afirma:

P(1) é verdade.

Para qualquer k, se P(r) é verdade para $1 \leq r \leq k$, logo, P(k + 1) é verdade. Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Exemplo. Provar pelo 2º princípio da indução matemática que para qualquer valor igual ou superior a 8, este pode ser escrito na forma de soma cuja parcelas sejam 3 e 5.

Resolução

Nesse caso, o valor 8 é base da indução. Base da indução: P(8) = 3 + 5 (verdade).

Pelo primeiro princípio, o próximo k seria necessariamente 8 + 3 = 11, ou seja, P(k+1) = 11 e não se conseguiria provar para P(9) e P(10).

São necessários, então, outros casos anteriores a P(k+1) e a partir daí usar o segundo princípio para provar que P(9) = 3 + 3 + 3 e P(10) = 5 + 5.

A hipótese de indução agora é que, para qualquer r, $8 \leq r \leq k$, P(r) é verdadeira, isto e P(r) é a sentença que resulta da soma de valores iguais a 3 e(ou) 5. Queremos provar também que k+1 também pode ser representado por somas de parcelas 3 e 5.

Temos que $k + 1 \geq 11$, pois já vimos P(r) para 8, 9 e 10.

Como $(k + 1) - 3 \geq 11 - 3$ (para usarmos a hipótese).

Então $(k - 2) \geq 8$.

Pela hipótese, para qualquer r, $8 \leq r \leq k$, P(r) é verdadeira. Dai P(k - 2) é verdadeira, ou seja, pode ser escrita como uma soma de valores iguais a 3 e(ou) 5.

É rápida a verificação, pois: $(k-2) + 3 = k+1$ (o elemento seguinte a k).

8.4 Exercícios resolvidos e comentados

Exercício 1. Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$ e $C = \{2, 3, 5, 7, 8\}$, então o conjunto $(A \cap C) - B$ é:

A) $\{1, 3, 5, 8\}$

B) $\{2, 3, 4, 6, 8\}$

C) $\{3\}$

D) $\{3, 8\}$

E) $\varnothing$

Resolução

Primeiramente, descobriremos os elementos do conjunto $(A \cap C)$. Lembrando que a intersecção entre dois conjuntos A e B, é formada pelos elementos que pertencem a A e a B simultaneamente. Assim:

$(A \cap C) = \{1, 3, 4, 7, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7, 8\} = \{3, 7, 8\}$

Agora fazemos a diferença entre $(A \cap C)$ e B. Lembrando que a diferença entre dois conjuntos A e B quaisquer, é formada pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B. Assim:

$(A \cap C) - B = \{3, 7, 8\} - \{2, 4, 6, 7\} = \{3, 8\}$

Pelo diagrama de Venn, o conjunto $(A \cap C) - B$ está representado pela área hachurada.

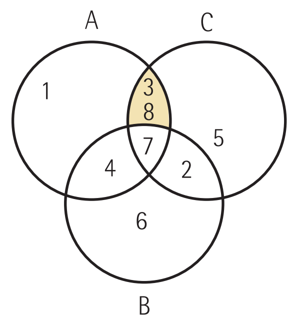


Figura 44

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 2. (Vunesp-SP) Se $A = \{x \in \mathbb{N} \; / \; x = 4n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* \; / \; \frac{20}{x} = n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ então o número de elementos de $A \cap B$ é

A) 3

B) 2

C) 1

D) 0

E) Impossível determinar

Resolução

Considerando o universo $\mathbb{N}$, temos:

O conjunto A é o conjunto dos múltiplos de 4, logo, $A=\{0, 4, 8, 12, 16, 20 ...\}$

O conjunto B é conjunto dos divisores de 20, logo, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Portanto:

$A \cap B=\{4, 20\}$

Logo a cardinalidade $|A \cap B|=2$

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 3. (Fatec-SP) Se $A=\{x \,/\, x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 1\}$ e $B=\{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ x^2 < 16\}$, então $(A \cup B) - (A \cap B)$ é o conjunto:

A) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

B) $\{-2, -1, 2, 3\}$

C) $\{-3, -2, -1, 0\}$

D) $\{0, 1, 2, 3\}$

E) $\{0, 1\}$

Resolução

O conjunto A é formado por todos os inteiros entre -3 e 1, incluindo, nesse intervalo, somente o número 1, logo, $A=\{-2, -1, 0, 1\}$.

O conjunto B é formado por todos os naturais cujo quadrado é menor que 16, $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

Determinando o conjunto $A \cup B$ que é formado pelos elementos que pertencem a A ou pertencem a B, temos:

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1\} \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Determinando o conjunto $A \cap B$ que é formado pelos elementos que pertencem a A e pertencem a B, temos:

$A \cap B = \{-2, -1, 0, 1\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1\}$

Logo o conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$ que é formado pelos elementos que pertencem a $A \cup B$ e não pertencem a $A \cap B$ é

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} - \{0, 1\} = \{-2, -1, 2, 3\}$

Pelo diagrama de Venn, o conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$ está representado pela área hachurada.

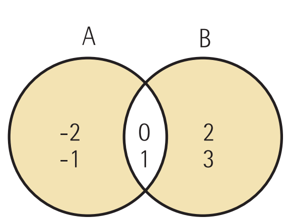


Figura 45

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 4. (Acafe-SC) Se M={1, 2, 3, 4, 5} e N são conjuntos tais que $M \cup N$={1, 2, 3, 4, 5} e $M \cap N$={1, 2, 3}, então o conjunto N é:

A) vazio

B) impossível ser determinado

C) {4, 5}

D) {1, 2, 3}

E) {1, 2, 3, 4, 5}

Resolução

Se a união entre M e N é exatamente igual a M, significa que:

I – N é vazio ou

II – Todos os elementos de N também são elementos de M

No caso I, a intersecção $M \cap N = \varnothing$. Assim se $M \cap N \neq \varnothing$, então, pela proposição II, a intersecção entre M e N resulta no conjunto N.

Logo N ={1, 2, 3}

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 5. (PUC-RS) Se A, B e $A \cap B$ são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente, então o número de elementos de $A \cup B$ é:

A) 10

B) 70

C) 85

D) 110

E) 170

Resolução

Sabendo que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, temos:

$|A \cup B|=90+50-30$

$|A \cup B|=110$

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 6. Seja A um conjunto que goza da seguinte propriedade: x é um número natural par. A representação de A é:

A) $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x=2n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$

B) $A= \{x \in \mathbb{N} \ / \ x=2n+1, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$

C) $A=\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x=2n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$

D) $A=\{x \in \mathbb{N} \ / \ x=2n, \text{ com } n \in \mathbb{Z}\}$

E) $A=\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x=2n+1, \text{ com } n \in \mathbb{Z}\}$

Resolução

Para o conjunto A, de acordo com sua propriedade, devemos considerar como universo o conjunto $\mathbb{N}$, descartando todas as alternativas onde aparece $\mathbb{Z}$. Se os elementos que formam A são pares, logo, são múltiplos de 2, representados genericamente por 2n. Assim o conjunto A é formado por todo número natural de forma 2n.

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 7. Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de TV que habitualmente assistem, obteve-se o resultado seguinte: 280 pessoas assistem o canal A, 250 assistem o canal B e 70 assistem outros canais distintos de A e B. O número de pessoas que assistem A e não assistem B é:

A) 30

B) 150

C) 180

D) 210

E) 580

Resolução

Designando por conjunto A: as pessoas que assistem o canal A.

Designando por conjunto B: as pessoas que assistem ao canal B.

Designando por C: as pessoas que assistem outros canais distintos de A.

Temos:

$|A \cup B \cup C| = 500$

$|A| = 280$

$|B| = 250$

$|C| = 70$

O que se pede, é o conjunto A-B, representada pela parte hachurada no diagrama de Venn.

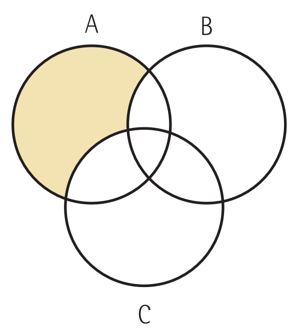


Figura 46

Portanto, precisamos excluir todas as intersecções, representada na parte hachurada no diagrama seguinte.

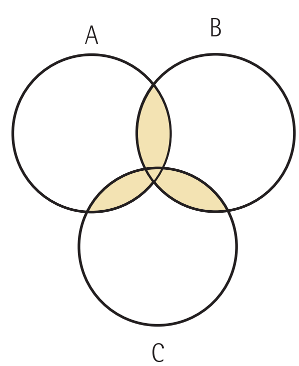


Figura 47

Assim:

(280 + 250 + 70) – 500 = 100 pessoas

Logo a quantidade de pessoas que assistem ao canal A e não assistem ao B é de:

280 - 100 = 180 pessoas

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 8. Suponhamos que numa equipe de 10 estudantes, 6 usam óculos e 8 usam relógio. O número de estudantes que usa, ao mesmo tempo, óculos e relógio é:

A) exatamente 6.

B) exatamente 2.

C) no máximo 6.

D) no máximo 5.

E) exatamente 4.

Resolução

Designando por conjunto A: os estudantes que usam óculos.

Designando por conjunto B: os estudantes que usam relógio.

São dados:

$|A \cup B| = 10$

$|A|=6$

$|B|=8$

Pede-se $|A \cap B|$.

Assim:

$|A \cup B|=|A|+|B| - |A \cap B|$.

$10 = 6 + 8 - |A \cap B|$

$|A \cap B| = 14 - 10$

$|A \cap B| = 4$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 9. Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Dez alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira questão e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

A) 6

B) 5

C) 4

D) 3

E) 2

Resolução

Aqui temos três conjuntos:

Conjunto U: formado pelos alunos que responderam as questões.

Conjunto A: formado pelos alunos que acertaram a primeira questão.

Conjunto B: formado pelos alunos que acertaram a segunda questão.

Pelo diagrama de Venn, temos:

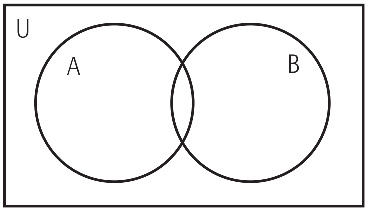


Figura 48

Agora, preencheremos o diagrama, iniciando pelos 10 alunos que acertaram as duas questões:

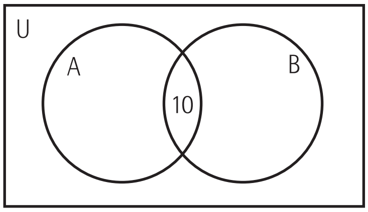


Figura 49

O próximo passo é inserir a quantidade restante de alunos que acertaram somente a primeira questão, ou seja, 25 - 10 =15, e a quantidade restante de alunos que acertaram a segunda questão, ou seja, 20 - 10=10:

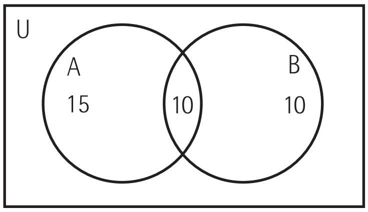


Figura 50

Note que somando a quantidade de alunos que acertaram, exclusivamente, a primeira questão (15), a quantidade de alunos que acertaram as duas questões (10) e a quantidade de alunos que acertaram, exclusivamente, a segunda questão (10), temos 15 + 10 + 10 = 35.

Se temos ao todo 40 alunos, devemos inserir em U a quantidade de 40 – 35 = 5 alunos.

Portanto o diagrama fica da seguinte forma:

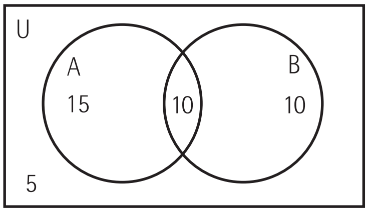


Figura 51

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 10. Numa pesquisa feita com 1.000 famílias para verificar a audiência dos programas de televisão, os seguintes resultados foram encontrados: 510 famílias assistem ao programa A, 305 assistem ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B, 60 assistem aos programas B e C, 25 assistem a A e C, e 10 famílias assistem aos 3 programas. Quantas famílias não assistem a nenhum desses programas?

A) 26

B) 54

C) 43

D) 39

E) 25

Resolução

Nesse exercício, temos 4 conjuntos:

U: conjunto formado pelo total de famílias pesquisadas

A: conjunto das famílias que assistem ao programa A

B: conjunto das famílias que assistem ao programa B

C: conjunto das famílias que assistem ao programa C

Resolvendo através do diagrama de Venn, devemos seguir as etapas:

Iniciar pela intersecção $A \cap B \cap C$ inserindo 10 pessoas

Inserir 25 – 10 = 15 famílias na intersecção $A \cap C$.

Inserir 60 – 10 = 50 famílias na intersecção $B \cap C$.

Inserir 180 – 10 = 170 famílias na intersecção $A \cap B$.

Inserir 510 – 170 – 15 – 10 = 315 famílias em A.

Inserir 305 – 170 - 50 – 10 = 75 famílias em B.

Inserir 386 – 10 – 15 – 50 = 311 famílias em C.

Assim, o total de famílias que não assiste nenhum dos programas é

1000 – 315 – 75 – 311 – 170 – 50 – 15 – 10 = 54

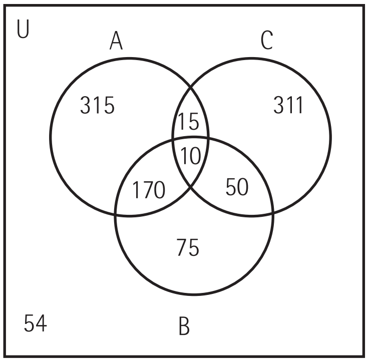


Figura 52

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 11. Numa pesquisa feita com 1.000 famílias para verificar a audiência dos programas de televisão, os seguintes resultados foram encontrados: 510 famílias assistem ao programa A, 305 assistem ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B, 60 assistem aos programas B e C, 25 assistem a A e C, e 10 famílias assistem aos 3 programas. Quantas famílias assistem exclusivamente ao programa A?

A) 261

B) 540

C) 431

D) 315

E) 252

Resolução

Nesse exercício, temos 4 conjuntos:

U: conjunto formado pelo total de famílias pesquisadas

A: conjunto das famílias que assistem ao programa A

B: conjunto das famílias que assistem ao programa B

C: conjunto das famílias que assistem ao programa C

Resolvendo através do diagrama de Venn, devemos seguir as seguintes etapas:

Iniciar pela intersecção A ∩ B ∩ C inserindo 10 pessoas.

Inserir 25 – 10 = 15 famílias na intersecção A ∩ C.

Inserir 60 – 10 = 50 famílias na intersecção B ∩ C.

Inserir 180 – 10 = 170 famílias na intersecção A ∩ B.

Inserir 510 – 170 – 15 – 10 = 315 famílias em A.

Inserir 305 – 170 - 50 – 10 = 75 famílias em B.

Inserir 386 – 10 – 15 – 50 = 311 famílias em C.

Assim, o total de famílias que assistem somente ao programa A é

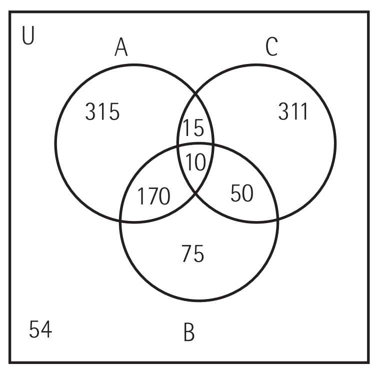


Figura 53

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 12. Numa pesquisa feita com 1.000 famílias para se verificar a audiência dos programas de televisão, os seguintes resultados foram encontrados: 510 famílias assistem ao programa A, 305 assistem ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B, 60 assistem aos programas B e C, 25 assistem a A e C e 10 famílias assistem aos 3 programas. Quantas famílias não assistem nem o programa A e nem o programa B?

A) 261

B) 540

C) 431

D) 315

E) 365

Resolução

Nesse exercício, temos 4 conjuntos:

U: conjunto formado pelo total de famílias pesquisadas

A: conjunto das famílias que assistem ao programa A

B: conjunto das famílias que assistem ao programa B

C: conjunto das famílias que assistem ao programa C

Resolvendo através do diagrama de Venn, devemos seguir as seguintes etapas:

Iniciar pela intersecção $A \cap B \cap C$ inserindo 10 pessoas.

Inserir 25 – 10 = 15 famílias na intersecção $A \cap C$.

Inserir 60 – 10 = 50 famílias na intersecção $B \cap C$.

Inserir 180 – 10 = 170 famílias na intersecção $A \cap B$.

Inserir 510 – 170 – 15 – 10 = 315 famílias em A.

Inserir 305 – 170 - 50 – 10 = 75 famílias em B.

Inserir 386 – 10 – 15 – 50 = 311 famílias em C.

Assim, o total de famílias que não assistem nem ao programa A nem ao programa B é formado pelas famílias que assistem, com exclusividade, o programa C mais as pessoas que não assistem nenhum dos programas:

311 + 54 = 365 famílias

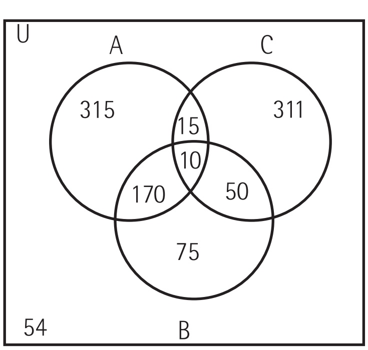


Figura 54

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 13. Dos 180 funcionários que trabalham no escritório de uma empresa, precisamente: 108 falam inglês; 68 falam espanhol; 32 não falam inglês nem espanhol. Quantos funcionários desse escritório falam as duas línguas: inglês e espanhol?

A) 176

B) 140

C) 100

D) 36

E) 28

Resolução

Nesse exercício, devemos tomar o cuidado de não nos enganarmos quanto à quantidade de conjuntos. Dessa forma:

Designando por conjunto P: as pessoas que não falam inglês nem espanhol, portanto consideraremos que eles falem, tão somente, o português.

Designando por conjunto I: as pessoas que falam inglês.

Designando por E: as pessoas que façam espanhol.

Dessa forma, temos:

$|P \cup I \cup E| = 180$

$|P| = 32$

$|I| = 108$

$|E| = 68$

Note que a intersecção de P com os demais conjuntos é vazia, visto que as pessoas só falam português. Assim a única intersecção a se considerar $E \cap I$.

$|P \cap I| = 0$

$|P \cap E| = 0$

$|E \cap I| = ?$

$|P \cap E \cap I| = |E \cap I| \; |P \cap I| - |P \cap E| - |E \cap I| + |P \cap E \cap I|$

Utilizando a fórmula para 3 conjuntos:

$$|P \cup I \cup E| = |P| + |I| + |E| - \underbrace{|P \cap I| - |P \cap E| - |E \cap I| + |P \cap E \cap I|}_{x}$$

$180 = 32 + 108 + 68 - x$

$x = 208 - 180$

$x = 28$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 14. Definimos recursivamente a seguinte função:

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n=1 \\ f(n-1) + n^2, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

Então o valor de f(4) é:

A) 15

B) 30

C) 48

D) 127

E) 144

Resolução

$f(1) = 1$

$f(2) = f(2-1) + 2^2 = f(1) + 4 = 1 + 4 = 5$

$f(3) = f(3-1) + 3^2 = f(2) + 9 = 5 + 9 = 14$

$f(4) = f(4-1) + 4^2 = f(3) + 16 = 14 + 16 = 30$

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 15. Dado o conjunto A para um determinado universo U e a relação de igualdade, podemos afirmar que:

A) A é subconjunto de A, aRa e R é reflexiva, transitiva e simétrica.

B) A não é subconjunto de A, aRa e R é reflexiva, transitiva e simétrica

C) A é subconjunto de A, aRa e R é somente antirreflexiva.

D) A não é subconjunto de A, aRa e R é somente antissimétrica.

E) A é subconjunto de A, aRa e R é antirreflexiva e antissimétrica.

Resolução

Se todo conjunto é subconjunto de si mesmo, então A é subconjunto de A.

Se para todo $a \in A$, temos aRa, então R é reflexiva.

Se para todo $a, b \in A$, temos $aRb \Rightarrow bRa$, então R é simétrica.

Se para todo a,b e $c \in A$, temos $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$, então R é transitiva.

A relação de igualdade não é antirreflexiva.

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 16. Definimos recursivamente a seguinte função:

$$f(n)=\begin{cases} 2, \text{ se } n=1 \\ 2 \cdot f(n-1), \text{ se } n>1 \text{ e } n \in N \end{cases}$$

Qual número não pertence a imagem desta função?

A) 8

B) 256

C) 1024

D) 63

E) 4

Resolução

A melhor maneira de resolvermos esse exercício é determinar a forma fechada da função. Para isso, usaremos um método composto por 3 etapas: expandir, conjecturar e verificar.

Expandir a função:

Expandiremos a função de f(n) até f(1) assim

$f(n) = 2 \cdot f(n-1) = 2 \cdot 2 \cdot f(n-2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot f(n-3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot f(n-4) = \cdots$

Conjecturando a possível forma fechada.

$f(n) = 2 \cdot f(n-1) = 2^2 \cdot f(n-2) = 2^3 \cdot f(n-3) = 2^4 \cdot f(n-4) = \cdots = 2^{n-1} \cdot f[n - (n-1)]$

$f(n) = 2^{n-1} \cdot f(1)$

$f(n) = 2^{n-1} \cdot 2$

$f(n) = 2^n$

Verificando função $f(n) = 2^n$

Verificaremos através de indução matemática se

$$2^n = f(n) = \begin{cases} 2, \text{ se } n=1 \\ 2 \cdot f(n-1), \text{ se } n>1 \text{ e } n \in N \end{cases}$$

Base:

$n = 1 \Rightarrow 2^1 = 2$ (verdade)

Hipótese de indução:

$f(k) = 2^k$ (supor verdadeiro)

Passo indutivo:

Provar que $f(k+1) = 2^{k+1}$

$f(k+1) = 2 \cdot f(k+1-1) = 2 \cdot f(k) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

Assim, a forma fechada $f(n) = 2^n$ foi verificada verdadeira.

De posse da forma fechada, verifica-se facilmente que a imagem da função é formada por potências de 2.

Dessa forma, temos que, $8 = 2^3$, $256 = 2^8$, $1024 = 2^{10}$ e $4 = 2^2$. Logo, entre as alternativas, a única que não exprime uma potência de 2 é a alternativa D.

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 17. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sobre a relação de congruência módulo 2, podemos afirmar que:

A) $1 \equiv 2$

B) $2 \equiv 3$

C) $3 \equiv 4$

D) $5 \equiv 3$

E) $5 \equiv 6$

Resolução

A $x \equiv y \pmod{n}$ se dá quando x e y diferem por um múltiplo de n.

$1 \not\equiv 2$, pois $1 - 2 = -1$ não é múltiplo de 2

$2 \not\equiv 3$, pois $2 - 3 = -1$ não é múltiplo de 2

$3 \not\equiv 4$, pois $3 - 4 = -1$ não é múltiplo de 2

$5 \equiv 3$, pois $5 - 3 = 2$ é múltiplo de 2

$5 \not\equiv 6$, pois $5 - 6 = 1$ não é múltiplo de 2

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 18. Seja $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\}$ e considere a relação $R = \{(x,y) \in A \times A \mid x^2 + 2x = y^2 + 2x\}$. O conjunto [2] é:

A) $[2] = \{2,4\}$

B) $[2] = \{1,-3\}$

C) $[2] = \{-1,3\}$

D) $[2] = \{-2,4\}$

E) $[2] = \{2,-4\}$

Resolução

O conjunto A é formado pelos elementos $A = \{-5, -4, -3, -2, ..., 2, 3, 4, 5\}$ e é pedida a classe de equivalência do elemento 2. Assim:

$[2] = \{\, x \in R \;/\; 2Rx\} = \{\, x \in R \;/\; 2^2 + 2 \cdot 2 = x^2 + 2x\}$

$2^2 + 2 \cdot 2 = x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac =$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$x' = 2$ e $x'' = -4$

Perceba que 2 e $-4 \in R$, logo $[2] = \{2,-4\}$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 19. Quais são as classes de equivalência de 0 e de 1 para a congruência módulo 4 em $\mathbb{Z}$?

A) $[0] = \{..., -6, -1, 0, 4, 8, ...\}$ e $[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$

B) $[0] = \{..., -8, -4, 0, 1, 6, ...\}$ e $[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$

C) $[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$ e $[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$

D) $[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$ e $[1] = \{..., -5, -2, 1, 5, 9, ...\}$

E) $[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$ e $[1] = \{..., -7, -3, 1, 2, 5, ...\}$

Resolução

A classe de equivalência de 0 contém todos os inteiros x de forma que $x \equiv 0 \pmod 4$, ou seja, todos os números inteiros que, subtraídos de 0, resultam em um múltiplo de 4.

$-8 - 0 = -8$, é múltiplo de 4.

$-4 - 0 = -4$, é múltiplo de 4.

$0 - 0 = 0$, é múltiplo de 4.

$4 - 0 = 4$, é múltiplo de 4.

$8 - 0 = 8$, é múltiplo de 4.

Assim, $[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$

A classe de equivalência de 1 contém todos os inteiros x de forma que $x \equiv 1 \pmod 4$, ou seja, todos os números inteiros que, subtraídos de 1, resultam em um múltiplo de 4.

$-7 - 1 = -8$, é múltiplo de 4.

$-3 - 1 = -4$, é múltiplo de 4.

$1 - 1 = 0$, é múltiplo de 4.

$5 - 1 = 4$, é múltiplo de 4.

$9 - 1 = 8$, é múltiplo de 4.

Assim, $[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 20. Uma função é definida recursivamente por:

$f(1) = 1$

$f(2) = 1$

$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$, se $n>2$.

Qual número não pertence à imagem dessa função?

A) 8

B) 55

C) 89

D) 377

E) 370

Resolução

Se olharmos atentamente a essa função recursiva, notamos que os dois primeiros elementos do conjunto imagem é o número 1, e os demais são o resultado da soma com seu antecessor. Essa sequência de números é bem conhecida, denominada sequência de Fibonacci.

Ao contrário do exercício anterior, para essa função, não vale a pena determinar a forma fechada, sendo mais fácil calcular elemento por elemento.

Como curiosidade, a forma fechada da função é:

$$f(n)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Então vamos aos cálculos!

$f(1) = 1$

$f(2) = 1$

$f(3) = f(3 - 1) + f(3 - 2) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2$

$f(4) = f(4 - 1) + f(4 - 2) = f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(5) = f(5 - 1) + f(5 - 2) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5$

$f(6) = f(6 - 1) + f(6 - 2) = f(5) + f(4) = 5 + 3 = 8$

$f(7) = f(7 - 1) + f(7 - 2) = f(6) + f(5) = 8 + 5 = 13$

f(8) = f(8 – 1) + f(8 – 2) = f(7) + f(6) = 13 + 8 = 21

f(9) = f(9 – 1) + f(9 – 2) = f(8) + f(7) = 21 + 13 = 34

f(10) = f(10 – 1) + f(10 – 2) = f(9) + f(8) = 34 + 21 = 55

f(11) = f(11 – 1) + f(11 – 2) = f(10) + f(9) = 55 + 34 = 89

f(12) = f(12 – 1) + f(12 – 2) = f(11) + f(10) = 89 + 55 = 144

f(13) = f(13 – 1) + f(13 – 2) = f(12) + f(11) = 144 + 89= 233

f(14) = f(14 – 1) + f(14 – 2) = f(13) + f(12) = 233 + 144 = 377

Resposta correta: alternativa E.

Saiba mais

Há diferentes técnicas para determinar a forma fechada de uma função recursiva. Consulte:

GERSTING, J. L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*: matemática discreta e suas aplicações. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

CARDOSO, D. M.; SZYMANSKI, J.; ROSTAMI, M. *Matemática discreta*: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos. Lisboa: Escolar Editora, 2009.

Exercício 21. Uma função é definida recursivamente por:

f(1) = 1

f(2) = 1

f(n) = f(n - 1) + f(n - 2) , se n>2.

Qual é o valor de f(8) + f(13)?

A) 4.867

B) 512

C) 87

D) 254

E) 325

Resolução

Aproveitando o exercício anterior, temos que:

$f(8) = f(8 - 1) + f(8 - 2) = f(7) + f(6) = 13 + 8 = 21$

$f(13) = f(13 - 1) + f(13 - 2) = f(12) + f(11) = 144 + 89 = 233$

Logo $f(98) + f(13) = 21 + 233 = 254$

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 22. Uma função é definida recursivamente por:

$f(0) = 0$

$f(n) = 2n + f(n-1) \quad , \text{se } n > 0$

Qual é o valor de $f(3) + f(5)$?

A) 8

B) 12

C) 16

D) 20

E) 32

Resolução

$f(0) = 0$

$f(1) = 2 \cdot 1 + f(1 - 1) = 2 + f(0) = 2 + 0 = 2$

$f(2) = 2 \cdot 2 + f(2 - 1) = 4 + f(1) = 4 + 2 = 6$

$f(3) = 2 \cdot 3 + f(3 - 1) = 6 + f(2) = 6 + 6 = 12$

$f(4) = 2 \cdot 4 + f(4 - 1) = 8 + f(3) = 8 + 12 = 20$

$f(5) = 2 \cdot 5 + f(5 - 1) = 10 + f(4) = 10 + 20 = 30$

Logo, $f(3) + f(5) = 12 + 20 = 32$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 23. Um investidor aplicou em certo ano (t = 0) R$ 600,00 em uma aplicação que rende 10% de juros sobre o valor existente no momento da remuneração. Uma definição recursiva para a função Q(t) = quantia no n-ésimo ano é dada por:

A) $Q(0) = 0$ e $Q(t) = 2.Q(t)$

B) $Q(0) = 600$ e $Q(t) = 0{,}1.Q(t - 1)$

C) $Q(0) = 600$ e $Q(t) = Q(t) + 10.Q(t)$

D) $Q(0) = 600$ e $Q(t) = Q(t - 1) + 0{,}1.Q(t - 1)$

E) $Q(0) = 0$ e $Q(t) = 10.Q(t)$

Resolução

A quantia Q no ano t = 0 é a primeira aplicação, denominada Q(0) = 600.

A partir daí, o dinheiro rende 10% ao ano, ou seja, devemos somar ao capital aplicado, 0,1 dessa quantia, a cada ano. Assim, temos a sequência:

$Q(0) = 600$

$Q(1) = Q(0) + 0{,}1Q(0) = 600 + 0{,}1 \cdot 600 = 660$

$Q(2) = Q(1) + 0{,}1Q(1) = 660 + 0{,}1 \cdot 660 = 726$

$Q(3) = Q(2) + 0{,}1Q(2) = 726 + 0{,}1 \cdot 726 = 798{,}6$

$Q(4) = Q(3) + 0{,}1Q(3) = 798{,}6 + 0{,}1 \cdot 798{,}6 = 878{,}46$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$Q(t) = Q(t - 1) + 0{,}1Q(t - 1)$

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 24. É partição de um conjunto quando são atendidas as seguintes condições: nenhum dos elementos da partição é o conjunto vazio, a interseção de quaisquer dois elementos da partição é o conjunto vazio e a união de todos os elementos de partição é o conjunto. Assinale a opção que é uma partição do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

A) $\{\{1, 2\}; \{4, 6\}; \{3, 4\}; \{5\}\}$

B) $\{\varnothing; \{1, 2\}; \{4, 6\}; \{3, 4\}\}$

C) $\{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{5\}\}$

D) $\{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{5\}; \{1,5\}\}$

E) $\{\{1, 2\}; \{4, 6\}; \{3, 5\}\}$

Resolução

Pela primeira condição, podemos descartar a alternativa B, pois contém o conjunto vazio.

Pela segunda condição descartamos as alternativas A, pois $\{4;\ 6\}\cap\{3;\ 4\} \neq \varnothing$ e (d), pois $\{5\}\ \}\cap\{1,5\}\neq \varnothing$.

Pela terceira condição, descartamos a alternativa C, pois $\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{5\}\neq A$

Quanto à alternativa E, ela satisfaz as três condições, veja:

1ª condição: $\varnothing \notin \{\{1; 2\}; \{4; 6\}; \{3; 5\}\}$

2ª condição: $\{1, 2\}\cap\{4, 6\} = \varnothing$; $\{1, 2\}\cap\{3, 5\} = \varnothing$; $\{4, 6\}\cap\{3, 5\} = \varnothing$

3ª condição: $\{1, 2\}\cup\{4, 6\}\cup\{3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 25. O conjunto $\{\{1\}; \{2, 3\}; \{4\}\}$ é uma partição do conjunto B. É correto afirmar que:

A) O conjunto B possui 3 elementos.

B) O conjunto $B = \{1; \{2, 3\}; 4\}$

C) O conjunto $\{\{1\}; \{2, 3\}; \{4\}\}$ não pode ser partição de B, pois está faltando o conjunto vazio.

D) O conjunto $\{\{1\}; \{2, 3\}; \{4\}\}$ não pode ser partição de B, pois não constam todas as combinações com os seus elementos.

E) O conjunto B possui 16 subconjuntos ou 16 partes.

Resolução

Se $\{\{1\}; \{2, 3\}; \{4\}\}$ é uma partição, logo a união de seus elementos forma o conjunto B. Assim:

$B = \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

O conjunto B tem 4 elementos, portanto, descartamos a alternativa A.

$B = \{1, 2, 3, 4\}$ que é diferente de $\{1; \{2, 3\}; 4\}$, portanto, descartamos a alternativa B.

Para ser partição, nenhum dos elementos pode ser o conjunto vazio, portanto descartamos a alternativa C.

Inexiste condição estabelecendo que para ser partição deva ocorrer todas as combinações possíveis do conjunto, portanto descartamos a alternativa D.

A quantidade de subconjuntos de B é dada pela expressão $2^{|B|} = 2^4 = 16$. Logo a alternativa E é a correta.

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 26. Se $C=\{\{1,3,9\},\{2,4,7\},\{5\},\{6,8\},\{10\}\}$ é uma partição, o conjunto X que deu origem à partição C é:

A) $X=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

B) $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

C) $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

D) $X=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

E) $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

Resolução

Se $C=\{\{1, 3, 9\},\{2, 4, 7\}, \{5\},\{6, 8\}, \{10\}\}$ é uma partição, logo, a união de seus elementos forma o conjunto X. Assim:

$X = \{1, 3, 9\} \cup \{2, 4, 7\} \cup \{5\} \cup \{6, 8\} \cup \{10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 27. Definimos recursivamente um conjunto numérico S de números naturais da seguinte forma:

$$S = \begin{cases} \{x \,/\, x \in S\} \\ 0 \in S \\ \text{Se } x \in S\text{, então } 2x \in S \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A) $S = \mathbb{N}$

B) S é um conjunto unitário

C) S é o conjunto vazio

D) $0 \in S$ e $2 \in S$

E) Todos os múltiplos de 2 pertencem à S

Resolução

Vamos determinar os elementos do conjunto S.

1º elemento é 0

2º elemento é $2 \cdot 0 = 0$

Perceba que não é possível obter outros valores diferentes de 0, logo, $S = \{0\}$, ou seja, S é um conjunto unitário.

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 28. Definimos recursivamente um conjunto numérico S de números naturais da seguinte forma:

$$S = \begin{cases} \{x \,/\, x \in S\} \\ 1 \in S \\ \text{Se } x \in S\text{, então } 2x \in S \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A) $S = \mathbb{N}$

B) S é um conjunto unitário

C) S é o conjunto vazio

D) Todos os valores 2^{n-1} com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ pertencem à S

E) Todos os múltiplos de 2 pertencem à S

Resolução

Vamos determinar os elementos de S

1º elemento é 1

2º elemento é $2 \cdot 1 = 2$

3º elemento é $2 \cdot 2 = 4$

4º elemento é $2 \cdot 4 = 8$

5º elemento é $2 \cdot 8 = 16$

Perceba que $S = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$, ou seja, S é formado por todas as potências de 2 com expoente natural.

Logo, todos os valores 2^{n-1} com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ pertencem à S

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 29. Definimos recursivamente um conjunto numérico S de números naturais da seguinte forma:

$$S = \begin{cases} \{x \,/\, x \in S\} \\ 0 \in S \\ \text{Se } x \in S, \text{ então } x + 1 \in S \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A) $S = \mathbb{N}$

B) S é um conjunto unitário

C) S é conjunto dos positivos pares

D) S é conjunto dos positivos ímpares

E) S é o conjunto dos números primos

Resolução

Vamos determinar os elementos de S

1º elemento é 0

2º elemento é 0 + 1 = 1

3º elemento é 1 + 1 = 2

4º elemento é 2 + 1 = 3

5º elemento é 3 + 1 = 4

Perceba que $S = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, ou seja, S é próprio conjunto dos números naturais.

Logo, $S = \mathbb{N}$

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 30. Definimos recursivamente um conjunto numérico S de números naturais da seguinte forma:

$$S = \begin{cases} \{x \,/\, x \in S\} \\ 2 \in S \\ \text{Se } x \in S\text{, então } x + 2 \in S \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A) $S = \mathbb{N}^*$

B) S é um conjunto unitário

C) S é conjunto dos positivos pares

D) S é conjunto dos positivos ímpares

E) S é o conjunto dos números primos

Resolução

Vamos determinar os elementos de S

1º elemento é 2

2º elemento é 2 + 2 = 4

3º elemento é 4 + 2 = 6

4º elemento é 6 + 2 = 8

5º elemento é 8 + 2 = 10

Perceba que S = {2, 4, 6, 8, 10, ...}, ou seja, S é conjunto dos naturais positivos e pares.

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 31. Um conjunto S é definido recursivamente por:

- $1 \in S$
- Se $x \in S$, então $(x + 6) \in S$
- Se $x \in S$, então $(x + 9) \in S$

Não pertence ao conjunto S o elemento de valor igual:

A) 7

B) 8

C) 10

D) 13

E) 16

Resolução

Vamos determinar os elementos de S

1º elemento é 1

2^o elemento é 1 + 6 = 7

3^o elemento é 1 + 9 = 10

4^o elemento é 7 + 6 = 13

5^o elemento é 7 + 9 = 16

6^o elemento é 10 + 6 = 16

7^o elemento é 10 + 9 = 19

Logo, o elemento $8 \notin S$

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 32. Desejamos provar: para todo número natural n maior ou igual a 1, a soma:

$4 + 10 + 16 + 22 + ... + (6n - 2)$

A expressão que verifica o passo inicial do 1^o princípio da indução, ou seja, P(1) é igual a:

A) $n(3n+1)$

B) $n^2 + 2$

C) $3n - 1$

D) $\frac{n+2}{2}$

E) $n + 1$

Resolução

Substituiremos n por 1 na expressão $6n - 2$:

$6 \cdot 1 - 2 = 4$

Agora substituímos n por 1 em cada uma das alternativas, aquela que resultar em 4 será a expressão que verifica o passo inicial do 1^o princípio da indução matemática:

$n(3n+1) = 1(3 \cdot 1 + 1) = 4$

$n^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$

$3n - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

$$\frac{n+2}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

$n + 1 = 1 + 1 = 2$

Logo, a expressão que verifica o passo inicial do 1º princípio da indução matemática é n(3n+1).

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 33. Podemos provar que, para todo número natural n maior ou igual a 1, vale a igualdade $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n.(n+1) / 2$.

Se tomarmos como hipótese da indução a expressão $1 + 2 + 3 + 4 + ... + k = k.(k+1) / 2$, o próximo passo será provar a seguinte tese:

A) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (2k+1) = (2k+1) \cdot (2k+2) / 2$

B) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k+1) = (k+1) \cdot (k+2) / 2$

C) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + 2 \cdot (k+1) = (k+1) \cdot (k+2) / 2$

D) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k+1) = [k \cdot (k+1) / 2] + 1$

E) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + 2 \cdot (k+1) = [k \cdot (k+1) + 1] / 2$

Resolução

Devemos nos lembrar que:

Sendo P uma propriedade, k e n inteiros positivos devemos:

- Verificar a veracidade para P(1) que é base da indução.
- Supor verdade para P(k) que é a hipótese da indução.
- Provar que P é verdadeira para P(k+1), que a tese.

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Assim, esse exercício pede a expressão que prova ser verdadeira a propriedade P para P(k+1). Portanto:

Hipótese da indução: $P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + ...+ k = k \cdot (k+1) / 2$

Tese: $P(k+1) = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k}_{k \cdot (k+1)/2} + (k+1) = (k+1) \cdot (k+2) / 2$

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + \left(k+1\right) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

Colocando a expressão no mesmo denominador:

$$\frac{k \cdot \left(k+1\right) + 2 \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

Colocando (k+1) em evidência no 1º membro da expressão:

$$\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

Como o 1º membro é igual ao 2ºmembro, provamos a tese para P(k+1)

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 34. Usando o princípio da indução finita (PIF), podemos provar que para todo n maior ou igual a 1 vale a igualdade $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n+1)$. Se tomarmos como hipótese da indução a expressão $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k = k(k+1)$, o próximo passo será provar a seguinte tese:

A) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k + 1 = k(k+1)$

B) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k + 2(k+1) = k(k+1) + 1$

C) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k + 2(k+1) = 2k(2k+1)$

D) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k + (k+1) = (k+1)(k+2)$

E) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$

Resolução

Como no exemplo anterior, devemos provar a tese para P(k+1), assim:

Hipótese da indução: $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k = k(k+1)$

Tese: $\underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k}_{k(k+1)} + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$

$k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$

Colocando (k+1) em evidência, temos:

$(k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)$

Como o 1º e o 2º membros da expressão são iguais, provamos a tese para P(k+1).

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 35. Podemos provar que para todo n maior ou igual a 1, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. A expressão que verifica o passo inicial do 1º princípio da indução, ou seja, P(1) é a expressão:

A) $n^3 / (n + 1)^2$

B) $n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) / 6$

C) $2n^2 + 3n$

D) $n(n + 2) / 2$

E) $(n + 1) \cdot (n + 2)$

Resolução

Devemos substituir o valor 1 na expressão n^2:

$n^2 = 1^2 = 1$

Substituindo 1 em cada uma das alternativas, devemos obter um valor igual ao obtido em n^2:

$n^3 / (n + 1)^2 = 1^3 / (1 + 1)^2 = 1 / 4 = 0{,}25$

$n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) / 6 = 1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) / 6 = 2 \cdot 3 / 6 = 1$

$2n^2 + 3n = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$

$n(n + 2) / 2 = 1 \cdot (1 + 2) / 2 = 3 / 2 = 1{,}5$

$(n + 1) \cdot (n + 2) = (1 + 1) \cdot (1 + 2) = 2 \cdot 3 = 6$

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 36. Podemos provar a desigualdade $n^2 > n + 1$ para $n \in \mathbb{N}$. O menor valor de n que podemos utilizar como base da indução é:

A) n = 0

B) n = 1

C) n = 2

D) n = 3

E) n = 4

Resolução

Devemos calcular um P(n) de modo que a desigualdade seja verdadeira, além de que n deve ser mínimo. Logo, devemos testar a partir de 0. Assim:

$P(0) = 0^2 > 0 + 1 \Rightarrow 0 > 1$ (falso)

$P(1) = 1^2 > 1 + 1 \Rightarrow 1 > 2$ (falso)

$P(2) = 2^2 > 2 + 1 \Rightarrow 4 > 3$ (verdadeiro)

Portanto, devemos utilizar na base de indução P(2)

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 37. Podemos provar que, para todo número natural n maior ou igual a 1, vale a desigualdade $n < 2^n$. Se tomarmos como hipótese da indução a expressão $k < 2^k$, o próximo passo será provar a seguinte tese:

A) $k < 2^{k-1}$

B) $1 < 2^k$

C) $(k + 1) < 2^{k+1}$

D) $k < 2^k+1$

E) $k+1 < 2^k + 1$

Resolução

Base da indução: $P(1) = 1 < 2^1$ (verdadeiro)

Hipótese da indução: $P(k) \Rightarrow k < 2^k$ (supor verdadeiro)
Tese: provar $P(k+1)$

Logo, a expressão que devemos provar é $k + 1 < 2^{k+1}$

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 38. Se queremos provar que certa proposição P(n) vale para todo número natural n, devemos inicialmente provar:

A) que se P(k) é válida, então P(2k + 1) é válida.

B) que se P(k+1) é válida, então P(k) é válida.

C) a hipótese da indução P(k), para um número k arbitrário.

D) que existe um número m para o qual não vale P(m).

E) a base da indução, ou seja, P(0).

Resolução

Imagine que os números naturais sejam uma escada infinitamente alta, que se inicia no degrau zero. Como saberemos que seremos capazes de chegar a um degrau arbitrariamente alto? Podemos inicialmente fazer algumas conjecturas sobre nossa capacidade de subir a escada:

I – Conseguimos alcançar o primeiro degrau.

II – Uma vez chegado ao primeiro degrau, seremos capazes de chegar ao próximo degrau.

III – Então você é capaz de subir tão alto quanto quiser.

Veja que a conjectura I é a base de indução, a conjectura II é a hipótese de indução e a conjectura III é a tese que queremos provar.

Assim, se queremos provar certa proposição P(n) para todo número natural, devemos iniciar pela base de indução (o degrau zero), ou seja, P(0).

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 39. Suponha que P(n) seja certa propriedade dos números naturais. Se mostrarmos que:

I – A propriedade é válida para o número zero.

II – Supondo que a propriedade é válida para um número arbitrário k, então a propriedade é válida para o número k+1.

Podemos concluir que:

A) Existe um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ que satisfaz a propriedade.

B) A propriedade é válida para todos os números pares.

C) A propriedade é válida para todos os números naturais.

D) Todo subconjunto dos números naturais possui máximo.

E) Não há informações suficientes para se utilizar indução.

Resolução

Na indução matemática, quando estabelecemos a base de indução para P(0) e conseguimos validar essa propriedade para P(k+1), supondo válida para P(k), significa que essa propriedade vale para todo o conjunto dos naturais.

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 40. Considerando que dispomos de n retas num plano, de tal modo que não existe um par de retas paralelas e não existem três retas que se intersectem num ponto, o número de regiões do plano definidas por essas retas é:

A) $1 + \binom{n+1}{2}$

B) $1 + \binom{n-1}{2}$

C) $1 - \binom{n+1}{2}$

D) $1 - \binom{n-1}{2}$

E) $1 + \binom{n}{2}$

Resolução

Denotando por a_n o número de regiões do plano definidas pelas n retas, podemos concluir que $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$. Ao traçarmos a reta n, de acordo com as hipóteses, intersectamos todas as n – 1 retas já traçadas e dividimos as n regiões do plano, definidas pelas n – 1 retas, em duas partes (note-se que os pontos de intersecção da n-ésima reta com cada uma das retas restantes são pontos da fronteira das n regiões criadas pelas n – 1 retas. Como consequência, depois de traçada a n-ésima reta, além das a_{n-1} regiões, passam a existir mais n, ou seja, a equação recursiva:

$a_n = a_{n-1} + n$, com $n \geq 1$

Repetindo a igualdade para os valores de 1 até n obtém-se:

$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + n - 1 + n = ... = a_0 + 1 + 2 + ... + n$

Uma vez que $1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$, conclui-se finalmente que

$a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$

Façamos agora, a prova formal da expressão $a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$.

Em primeiro lugar, é imediato que a expressão se verifica para n = 1 e n = 2. Assumindo que $a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$ se verifica para n – 1, tendo em conta a igualdade $a_n = a_{n-1} + n$, podemos concluir que $an = a_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n+1}{2}$.

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 41. Podemos provar, através de indução, a divisibilidade por determinado número. A expressão que prova que $5^n + 2 \cdot 11^n$ é divisível por 3 é:

A) $5 \cdot (5^{k+1} + 2 \cdot 11^k) + 6 \cdot 2 \cdot 11^k$

B) $5 \cdot (5^k + 2 \cdot 11^{k+1}) + 6 \cdot 2 \cdot 11^k$

C) $5 \cdot (5^k + 2 \cdot 11^k) + 6 \cdot 2 \cdot 11^{k+1}$

D) $5 \cdot (5^{k+1} + 2 \cdot 11^{k+1}) + 6 \cdot 2 \cdot 11^{k+1}$

E) $5 \cdot (5^k + 2 \cdot 11^k) + 6 \cdot 2 \cdot 11^k$

Resolução

Primeiramente estabelecemos nossa base de indução, ou seja, provar que 3 divide $5^n + 2 \cdot 11^n$ para $n = 1$. Assim:

$5^1 + 2 \cdot 11^1 = 5 + 22 = 27$ (27 é divisível por 3)

Na sequência, nossa hipótese de indução é supor que a expressão $5^n + 2 \cdot 11^n$ é divisível por 3 para uma certo $n = k$. Assim:

$5^k + 2 \cdot 11^k$ é divisível por 3

Agora vem a prova que é mostrar que 3 divide a expressão para o sucessor de k, ou seja, k + 1. Assim:

$5^{k+1} + 2 \cdot 11^{k+1}$

Através de manipulações algébricas na expressão $5^{k+1} + 2 \cdot 11^{k+1}$, precisamos que "apareça" nossa hipótese de indução (HI). Dessa forma, podemos escrever 5^{k+1} e 11^{k+1} como produto de potência de mesma base:

$5 \cdot 5^k + 2 \cdot 11 \cdot 11^k$

Note que agora temos a soma de dois produtos e assim podemos escrever:

$5 \cdot (5^k + 2 \cdot 11^k) + 6 \cdot 2 \cdot 11^k$

$$5 \cdot \underbrace{\left(5^k + 2 \cdot 11^k\right)}_{\text{divisível por } 3 (\text{H.I})} + \underbrace{6 \cdot 2 \cdot 11^k}_{\text{divisível por } 3}$$

Logo provamos que 3 divide a expressão $5^n + 2 \cdot 11^n$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 42. A expressão que prova ser verdadeira a soma $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ é:

A) $(k+1)! - 1$

B) $(k+3)! - 1$

C) $(k+2)! - 1$

D) $(k-2)! - 1$

E) $(k-1)! - 1$

Resolução

Usaremos o 1º princípio de indução para resolver esse exercício. Desse modo, devemos estabelecer a base da indução (n =1), supor a hipótese de indução para determinado n=k e, por fim, validar a hipótese de indução para o sucessor de k, ou seja, n=k+1. Assim:

Base: para n=1

$1\cdot 1! = 2! - 1 \Rightarrow 1=1$ validado

Hipótese de indução: para n = k

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k! = (k+1)! - 1$

Prova: n = k + 1

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k! +(k+1)\cdot(k+1)!= (k+1 + 1)! - 1$

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k! +(k+1)\cdot(k+1)!= (k+2)! - 1$

Substituindo $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k!$ por $(k+1)! - 1$

$(k+1)! - 1+(k+1)\cdot(k+1)!= (k+2)! - 1$

Colocando (k+1)! em evidência no 1º membro da equação:

$(k+1)!\cdot(1 + k+1) - 1 = (k+2)! - 1$

$(k+1)!\cdot(k+2) - 1 = (k+2)! - 1$

$(k+2)! - 1 = (k+2)! - 1$ (validado)

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 43. Podemos provar que para todo n maior ou igual a 1, a soma

$$1^1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

é verdadeira. A expressão que verifica o passo final do 1º princípio da indução, ou seja, P(k+1) é a expressão:

A) $\dfrac{(k-1)\cdot(k-2)(2k-3)}{6}$

B) $\dfrac{(k+1)\cdot(k+2)(2k+3)}{6}$

C) $\dfrac{(k+1)\cdot(k+2)(2k-3)}{6}$

D) $\dfrac{(k+1)\cdot(k-2)(2k+3)}{6}$

E) $\dfrac{(k-1)\cdot(k+2)(2k+3)}{6}$

Resolução

Base: n=1

$$1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$$

$$1=\frac{2\cdot3}{6}$$

1=1 validado

Hipótese de indução: n = k

$$1^1+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

Provar para n = k +1

$$1^1+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k+1\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

Substituindo $1^1+2^2+3^2+\cdots+k^2$ por $\dfrac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$

$$\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k+1\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

Igualando o denominador no 1º membro:

$$\frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)+6 \cdot (k+1)^2}{6}=\frac{k+1 \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

Colocando (k+1) em evidência

$$\frac{(k+1)[k \cdot (2k+1)+6 \cdot (k+1)]}{6}=\frac{k+1 \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

Aplicando a propriedade distributiva dentro dos colchetes:

$$\frac{(k+1)[\ 2k^2+k\ +6k+6]}{6}=\frac{k+1 \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[\ 2k^2+3k+4k+6]}{6}=\frac{k+1 \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[\ k(2k+3)\ +2(2k+3)]}{6}=\frac{k+1 \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1) \cdot (k+2)(2k+3)}{6}=\frac{k+1 \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

Resposta correta: alternativa B.

Resumo

Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos.

Um objeto que pertence a um conjunto é denominado elemento do conjunto.

A pertinência a um conjunto é denotada pelo símbolo $\in$. A notação $x \in A$, significa que o objeto x é elemento do conjunto A.

Exemplo:

$2 \in \{1, 2, 3\}$

Os conjuntos são nomeados por letras maiúsculas de nosso alfabeto e os representamos:

Por extensão: listando seus elementos através de chaves, por exemplo, $P = \{2, 4, 6\}$

Por compreensão: a forma é {variável/ condições}, assim, se quisermos representar o conjunto dos inteiros maiores que 5, faremos:

$\{x \,/\, x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 5\}$

Pelo diagrama de Venn: a representação é uma linha fechada circundando os elementos, ou a cardinalidade.

Conjunto A={1,2,3} representado no diagrama de Venn

Cardinalidade A=3

Figura 55

Sobre as relações sobre conjuntos, dois conjuntos são iguais quando ambos possuem, exatamente, os mesmos elementos.

Sejam os conjuntos A e B. Dizemos que A é subconjunto de B, se e somente se todo elemento de A também é elemento de B. A notação $A \subseteq B$ significa que A é subconjunto de B.

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ podemos dizer que ele é subconjunto de $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

A relação $A \subseteq B$ chama-se relação de inclusão, com os seguintes casos particulares:

I – $A \subseteq A$, pois notório que qualquer elemento de A pertence a A.

II – $\varnothing \subseteq A$, todo elemento de $\varnothing$ está em A – como não há elementos em $\varnothing$, não existem elementos de $\varnothing$ que não estejam em A.

A relação de inclusão possui três propriedades.

Dados os conjuntos A, B e C quaisquer de um determinado universo U, temos:

I – $A \subseteq A$ (propriedade reflexiva)

II – Se $A \subseteq A$ e $B \subseteq A$, então $A = B$ (propriedade antissimétrica)

III – Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ (propriedade transitiva)

Sobre o conjunto das partes, dado um conjunto A, se formamos outro conjunto P(A), cujos elementos são todos os possíveis subconjuntos de A, então P(A) é o conjunto das partes. Exemplo:

$A = \{a, e, i\}$

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$

A cardinalidade de P(A) é dada pela expressão $2^{|A|}$

O complementar de um conjunto A qualquer em relação a um universo U é os elementos de U que não pertencem a A. Denota-se o completar de A em relação a U por $\complement_U^A$, ou $A^{\complement}$, ou $\overline{A}$.

Logo $\overline{A} = \{ x / x \in U \text{ e } x \notin A \}$

Propriedades:

- $\left(A^{C}\right)^{C} = A$ para todo $A \subseteq U$ (o complementar do complementar de um conjunto A é o próprio conjunto A).
- Se $A \subseteq B$, então $A^{C} \supseteq B^{C}$ (se A está contido em B então o complementar de B está contido no complementar de A).

Exemplo:

Seja $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A =\{1, 2, 3, 4\}$

Logo $\overline{A} =\{5, 6, 7, 8, 9\}$

Sobre contrapositiva, se p é a propriedade que define o conjunto A e q a propriedade que define o conjunto B, dizer que $A \subseteq B$ é o mesmo que $p \Rightarrow q$.

Seja a negação de p e q, denotadas, respectivamente por p' e q'. Se um objeto x goza a propriedade p, significa que x não goza da propriedade p', a mesma relação vale para q em relação a q'.

Portanto, a equivalência $A \subseteq B \Leftrightarrow B^{C} \subseteq A^{C}$ da seguinte forma:

$p \Rightarrow q$, se e somente se $q' \Rightarrow p'$

A implicação $q' \Rightarrow p'$ denomina-se contrapositiva da implicação $p \Rightarrow q$.

Sobre a operação da união, sejam A e B conjuntos, chamamos de A união B e denotamos por $A \cup B$, o conjunto formado pelos elementos de A, ou elementos de B, ou a ambos os conjuntos.

Dado o conjunto $A = \{10, 20, 30\}$ e o conjunto $B =\{15, 20, 25, 30\}$, a união do conjunto A com o conjunto B é $A \cup B = \{10, 15, 20, 25, 30\}$. Assim podemos escrever:

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Sobre a intersecção, sejam os conjuntos A e B, chamamos de A intersecção B e denotamos por $A \cap B$, o conjunto formado pelos elementos de A e pelos elementos de B.

Dado o conjunto $A = \{10, 20, 30\}$ e o conjunto $B = \{15, 20, 25, 30\}$, a intersecção do conjunto A com o conjunto B é $A \cap B = \{20, 30\}$. Assim podemos escrever:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Sobre a operação da diferença, sejam A e B conjuntos, chamamos A menos B e denotamos por A – B o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B.

Dado o conjunto $A = \{10, 20, 30\}$ e o conjunto $B = \{15, 20, 25, 30\}$, a diferença do conjunto A com o conjunto B é $A - B = \{10\}$. Assim podemos escrever:

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Sobre a operação do produto cartesiano, sejam os conjuntos A e B. O produto cartesiano de A e B, denotado por A x B, é o conjunto de todos os pares ordenados (lista de dois elementos) formados tomando-se um elemento de A juntamente com um elemento de B de todas as maneiras possíveis. Assim:

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

Exemplo

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$

$A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (1,3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

Sobre a cardinalidade da união de conjuntos, para dois conjuntos finitos, temos:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Para três conjuntos finitos temos:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Sobre relações, seja R uma relação e sejam os conjuntos A e B. Dizemos que R é uma relação sobre A desde que $R \subseteq A \times A$; e dizemos que R é uma relação de A para B se $R \subseteq A \times B$.

Sobre relação inversa, seja R uma relação. A inversa de R, denotada por R^{-1}, é a relação formada invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados.

Matematicamente:

$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$

Sobre propriedades:

- Se, para todo $x \in A$, temos xRx, então R é **reflexiva**.
- Se, para todo $x \in A$, temos xRx, então R é **antirreflexiva**.
- Se, para todo $x, y \in A$, temos $xRy \Rightarrow yRx$, então R é **simétrica**.
- Se, para todo $x, y \in A$, temos $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$, então R é **antissimétrica**.
- Se, para todo $x, z \in A$, temos $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$, então R é **transitiva**.

Sobre relação de equivalência, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de equivalência se R for: reflexiva, simétrica e transitiva.

Sobre congruência módulo n, seja n um inteiro positivo. Dizemos que os inteiros x e y são congruentes módulo n e denotamos por $x \equiv y \pmod{n}$, se $n|(x-y)$, ou seja, $x \equiv y \pmod{n}$ se e somente se x e y diferem por um múltiplo de n.

Sobre classe de equivalência, seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e seja $a \in A$. A classe de equivalência de a, denotada por [a], é o conjunto de todos os elementos de A relacionados por R, assim:

$[a] = \{ x \in A / xRa\}$

Sobre recursão, imagine a realização de uma sequência de procedimentos (algoritmo). Se em cada procedimento, a partir do segundo, for necessário a repetição do procedimento anterior, estamos tratando de recursão. Um procedimento que se utiliza da recursão é dito recursivo.

O conceito é usado na definição de sequências, funções, conjuntos e na implementação de algoritmos.

Sobre funções recursivas, são funções que utilizam processos recursivos. Uma função é dita recursiva quando dentro dela é feita uma ou mais chamadas a ela mesma. Assim função recursiva é uma função que é definida em termos de si mesma.

Exemplo de função recursiva.

$$f(x)=\begin{cases} 1,\ \text{se } x=0 \text{ - } 1^{a} \text{ condição} \\ x\cdot f(x-1),\ \text{se } x>0 \text{ - } 2^{a} \text{ condição} \end{cases}$$

Sobre sequências recursivas, toda sequência cuja lei de formação de seus termos tem uma definição recursiva é denominada sequência recursiva.

Exemplo de função recursiva (sequência de Fibonacci)

$$a_n=\begin{cases} 1,\ \text{se } n = 1 \\ 1,\ \text{se } n = 2 \\ a_{n-2}+a_{n-1},\ \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Sobre partições de um conjunto, seja A um conjunto não vazio. Define-se como partição de A, e representa-se por part(A), qualquer subconjunto do conjunto das partes de A, que satisfaz simultaneamente, às seguintes condições:

- Nenhum dos elementos de part(A) é o conjunto vazio.
- A interseção de quaisquer dos elementos de part(A) é o conjunto vazio.
- A união de todos os elementos de part(A) é igual ao conjunto A.

Exemplo:

Conjunto A = $\{1; 2; 3; 4; 5\}$

part(A) = $\{\{1; 2\}; \{4; 6\}; \{3; 5\}\}$.

Sobre conjuntos recursivos, um conjunto é recursivo quando um elemento depende de um ou de mais elementos anteriores.

Exemplo de conjunto recursivo

$$S=\begin{cases} \{x/\ x \in S\} \\ 2 \in S \\ \text{Se } x \in S, \text{ então } x + 7 \in S \end{cases}$$

Sobre indução matemática, é um meio de prova que tem como base o princípio da boa ordem, que afirma todo conjunto não vazio de números naturais contém um elemento mínimo.

Sobre primeiro princípio da indução matemática, a principal consequência do princípio da boa ordem é o 1º princípio da indução matemática. Assim:

Sendo P uma propriedade, k e n inteiros positivos, temos:

- P(1) é verdade.
- Para qualquer k, se P(k) é verdade logo P(k + 1) é verdade.

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Segundo princípio da indução matemática, sendo P uma propriedade, k, r, e n inteiros positivos o 2º princípio da indução matemática afirma:

P(1) é verdade.

Para qualquer k, se P(r) é verdade para $1 \leq r \leq k$, logo, P(k + 1) é verdade. Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Exercício

Questão 1. Considere os conjuntos a seguir.

$A=\{15,20,25\}$

$B=\{1,2,3\}$

$C=\{-1,0,1\}$

Em relação a esses conjuntos, avalie as afirmativas.

I – O conjunto D formado pela união dos conjuntos A, B e C, ou seja, $D = A \cup B \cup C$, é dado por $D=\{-1, 0, 1, 1, 2, 3, 15, 20, 25\}$.

II – O conjunto E cujos elementos são o dobro dos valores dos elementos do conjunto A tem o dobro do número de elementos do conjunto A.

III – O conjunto F expresso por $A \cup B \cap C$ é dado por $F=\{1\}$.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) I e II, apenas.

C) II e III, apenas.

D) III, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa D.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa incorreta.

Justificativa: para determinarmos o conjunto D, consideramos todos os elementos dos conjuntos A, B e C. Logo, ficamos com: $D=A \cup B \cup C=\{-1, 0, 1, 2, 3, 15, 20, 25\}$.

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: o conjunto E é dado por $E=\{30, 40, 50\}$. Vemos que o conjunto E e o conjunto A têm o mesmo número de elementos.

III – Afirmativa correta.

Justificativa: vamos fazer $A \cup B \cap C$ nas duas etapas mostradas a seguir.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 15, 20, 25\}$

$A \cup B \cap C = F = \{1\}$.

Questão 2. Avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

I – A igualdade $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, sendo n um número natural, é válida.

porque

II – Pelo princípio da indução finita (PIF), provamos que a igualdade é válida para n=1 e, para todo k natural, a igualdade é válida para k e para k+1.

Assinale a alternativa correta.

A) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II justifica a I.

B) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II não justifica a I.

C) As asserções I e II são falsas.

D) A asserção I é verdadeira, e a II é falsa.

E) A asserção I é falsa, e a II é verdadeira.

Resposta correta: alternativa A.

Análise da questão

Tomemos a igualdade $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Para n=1, temos: $1=1^2$.

Para n=k, temos: $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$.

Para n=k+1, temos o que segue.

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+(2k+2-1)=k^2+2k+1$$

Sabemos que a função do segundo grau $y=ax^2+bx+c$ pode ser fatorada como segue, sendo x_1 e x_2 as raízes da função.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Façamos essa fatoração para o trinômio k^2+2k-1. Primeiramente, precisamos resolver a seguinte equação:

$$k^2+2k+1=1k^2+2k+1=0$$

Nesse caso, temos o que segue.

$$k=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2.1}=-1$$

Logo, podemos escrever a seguinte fatoração:

$$k^2+2k+1=1(k-(-1))(k-(-1))=(k+1).(k+1)=(k+1)^2$$

Concluímos que, para n=k+1, temos o que segue.

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+(2k+2-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

Logo, provamos que a igualdade $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, sendo n um número natural, é válida porque, pelo princípio da indução finita (PIF), essa igualdade é válida para n=1 e, para todo k natural, também é válida para k e para k+1.

REFERÊNCIAS

Textuais

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blüche/Edusp, 1974.

CARDOSO, D. M.; SZYMANSKI, J.; ROSTAMI, M. *Matemática discreta*: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos. Lisboa: Escolar Editora, 2009.

CASTRUCCI, B. *Elementos da teoria de conjuntos*. São Paulo: GEEM, 1970.

CHAQUIAM, M. *Ensaios temáticos*: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

DANTE, L. R. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2010. (Novo Ensino Médio)

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. Álgebra *moderna*. São Paulo: Atual, 1979.

GERSTING, J. L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*: matemática discreta e suas aplicações. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *Matemática completa*: ensino médio. São Paulo: FTD, 2002.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete mathematics*: a foundation for computer science. 2. ed. Massachusetts: Addison – Wesley, 2011.

LENTIN, A.; RIVAUD, J. Álgebra *moderna*. 2. ed. Paris: Grafiplás, 1969.

LIMA, E. L. *A Matemática do ensino médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Coleção do Professor de Matemática. (v. 2).

LIPSCHUTZ, S. LIPSON, M. *Matemática discreta*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Teoria e problemas de matemática discreta*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

MENEZES, P. B. *Matemática discreta para computação*. Porto Alegre: Bookman, 2013.

MORGADO, A. C. *et al. Análise combinatória e probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro, 1991.

MUNSIGNATTI JUNIOR, M. Combinatória: números de soluções inteiras e não negativas de uma equação. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 28, n. 73, 2010.

PITOMBEIRA, J. B. Princípio da casa dos pombos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 8, p. 21-28, 1986.

ROSEN, K. H. *Matemática discreta e suas aplicações*. 6. ed. São Paulo: Mc Graw Hill, 2009.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta*: uma introdução. São Paulo: Thomson, 2006.

STEIN, C.; DRYSDALE, R. L.; BORGAT, K. *Matemática discreta para ciência da computação*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2004, Recife, Anais [...]. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

Interativa

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000