



UNIDADE I

Matemática Discreta

Prof. Hugo Insua

Coleções – listas

Existem dois tipos de coleções:

- As ordenadas que chamamos de listas.
- As desordenadas que chamamos de conjuntos.
- Representamos as listas por parênteses e separamos seus elementos com vírgula.
 - Exemplificando (c, b, a) é a lista cujo primeiro objeto é a letra “c”, o segundo objeto é a letra “b” e o terceiro objeto é a letra “a”. Como as listas são coleções ordenadas, concluímos que a lista (c, b, a) é diferente da lista (a, b, c).

Coleções – listas

Comprimento de uma lista

- Chamamos de comprimento de lista a quantidade de objetos inseridos nela.
- Exemplo: A lista (1, 2, 3, 3) tem comprimento 4.
- Igualdade entre listas.

Podemos dizer que duas listas são iguais, se e somente se:

- I – Tiverem comprimentos iguais.
- II – Se os objetos nas referidas posições forem iguais.
- Exemplo: A lista (x, y) e a lista (1, 2) são iguais, se e somente se, $x = 1$ e $y = 2$.

Coleções – listas

Contagem de listas

- Para entender como efetuar a contagem de lista, observe o exemplo a seguir.

Seja o evento formar listas de dois objetos (comprimento 2). Quantas listas nessa condição podemos formar com os algarismos 0, 1 e 2 na primeira posição e com os algarismos 4, 5, 6 e 7 na segunda posição?

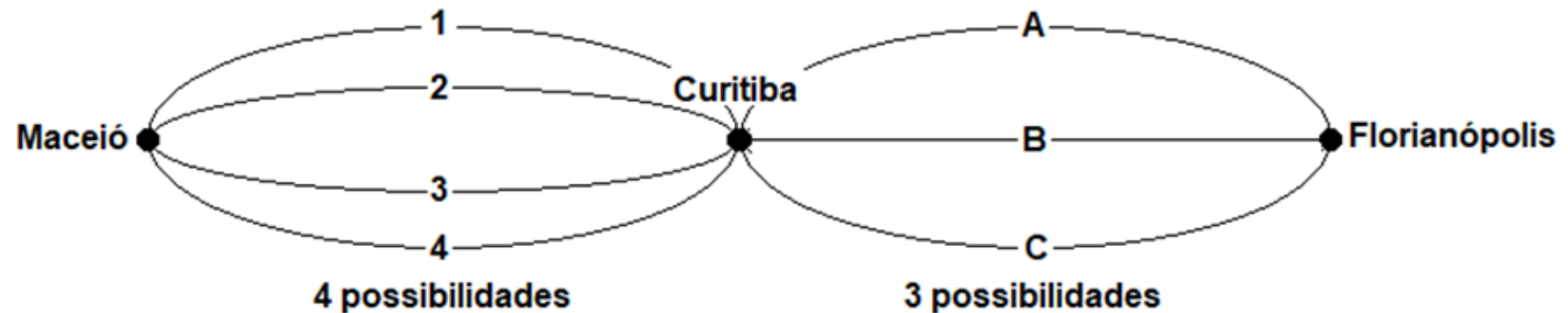
Coleções – listas

- Escreveremos todas as possibilidades por etapas, de modo a não repetir nem omitir nenhuma possibilidade.
- 1ª etapa – todas as listas iniciadas por 0: (0, 4) (0, 5) (0, 6) (0, 7).
- 2ª etapa – todas as listas iniciadas por 1: (1, 4) (1, 5) (1, 6) (1, 7).
- 3ª etapa – todas as listas iniciadas por 2: (2, 4) (2, 5) (2, 6) (2, 7).
- Observe que são 3 possibilidades para a 1ª posição e 4 possibilidades para a 2ª posição.
 - Logo, a quantidade de lista é dada por: $3 \cdot 4 = 12$ listas.

Coleções – listas

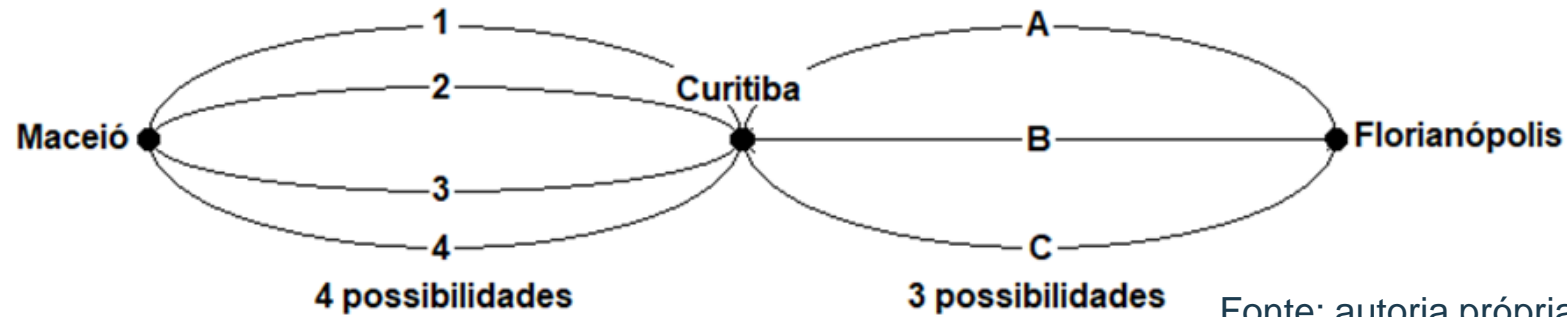
Princípio Fundamental da Contagem (Princípio da Multiplicação)

Imagine que uma pessoa vai realizar uma viagem de Maceió a Florianópolis passando por Curitiba. Há 4 rotas diferentes para Curitiba saindo de Maceió e 3 rotas diferentes para Florianópolis saindo de Curitiba. Quantas são as possíveis maneiras de essa pessoa realizar a viagem de Maceió a Florianópolis?



Fonte: autoria própria.

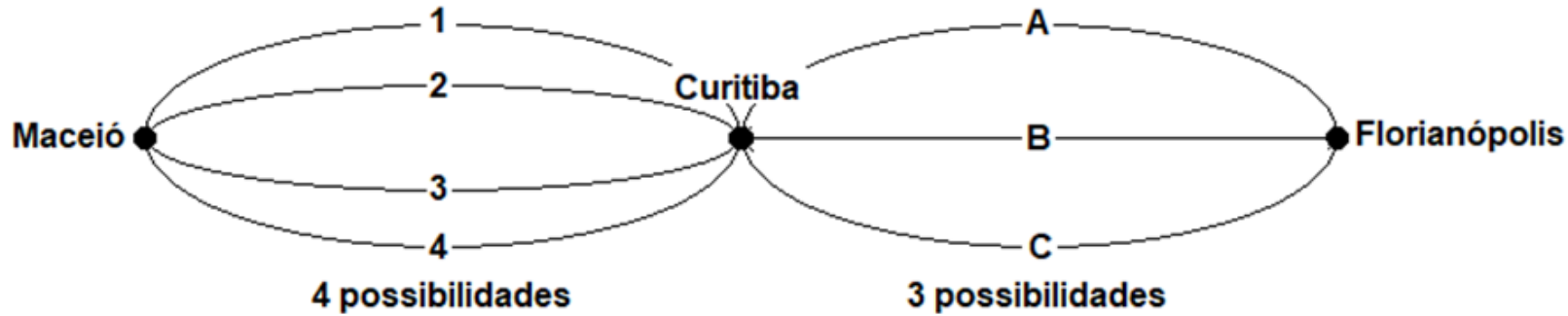
Coleções – listas



Fonte: autoria própria.

- A viagem de Maceió a Florianópolis denominamos “evento”, composto de duas etapas sucessivas e independentes.
- 1ª etapa – de Maceió a Curitiba, a pessoa tem 4 possibilidades, podendo optar pela rota 1, rota 2, rota 3 ou rota 4.
- 2ª etapa – de Curitiba a Florianópolis, a pessoa tem 3 possibilidades, podendo optar pela rota A, rota B ou rota C.

Coleções – listas



Fonte: autoria própria.

Assim, podemos formar as listas:

- (1,A); (1,B); (1,C); (2,A); (2,B); (2,C); (3,A); (3,B); (3,C); (4,A); (4,B); (4,C)
- Assim, temos 4 possibilidades para a 1ª posição e 3 possibilidades para a 2ª posição.
- Logo, há $4 \cdot 3 = 12$ maneiras.

Coleções – listas

Podemos definir o Princípio Fundamental da Contagem.

Se um evento possui duas ou mais etapas sucessivas e independentes de modo que o número de possibilidades da primeira etapa é m_1 , da segunda etapa é m_2 e da enésima etapa é m_n , então o número total de possibilidades de ocorrência do evento é dado por:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{n-1} \cdot m_n$$

Coleções – listas

- Fatorial.

Quantas listas de 3 objetos (comprimento 3) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3 sem repeti-los?

- 1ª etapa – todas as listas iniciadas por 1: (1,2,3) (1,3,2).
 - 2ª etapa – todas as listas iniciadas por 2: (2,1,3) (2,3,1).
 - 3ª etapa – todas as listas iniciadas por 3: (3,1,2) (3,2,1).
-
- O problema é composto por 3 etapas com 3 possibilidades na 1ª posição, 2 possibilidades na 2ª posição e 1 possibilidade na 3ª posição. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de lista sem repetição é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ listas.

Coleções – listas

Note que:

- O valor do comprimento das listas é igual à quantidade de objetos disponíveis para formá-las.
- Não foi permitida repetição.
- As listas só se diferem umas das outras pela posição dos objetos.
- Dessa forma, quando tivermos que calcular a quantidade de listas de comprimento n , extraída de um universo de n objetos, em que não são permitidas repetições, podemos utilizar a fórmula $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - n + 1) = n!$
- O símbolo $n!$ denominamos fatorial de um número.

Coleções – listas

Podemos então definir o fatorial de um número como:

- A multiplicação desse número por todos seus antecessores maiores que 0.

Exemplo

- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Observações

- $1! = 1$
- $0! = 1$

Interatividade

Em um restaurante, é oferecido ao cliente montar seu prato comercial podendo escolher uma opção entre: 2 tipos de arroz (parboilizado ou integral), 2 tipos de feijão (carioca ou preto), 3 tipos de carne (bovina, suína ou de frango) e 2 tipos de acompanhamento (ovo ou batata frita). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?

- a) 9.
- b) 12.
- c) 15.
- d) 21.
- e) 24.

Resposta

Em um restaurante, é oferecido ao cliente montar seu prato comercial podendo escolher uma opção entre: 2 tipos de arroz (parboilizado ou integral), 2 tipos de feijão (carioca ou preto), 3 tipos de carne (bovina, suína ou de frango) e 2 tipos de acompanhamento (ovo ou batata frita). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?

- a) 9.
- b) 12.
- c) 15.
- d) 21.
- e) 24.

Análise Combinatória I – Permutação Simples

- Na análise combinatória, estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos se distinguem, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações; e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

Análise Combinatória I – Permutação Simples

- Podemos entender permutação simples como a troca de posições de objetos, formando agrupamentos distintos.

Exemplo – Quais e quantos números de 3 algarismos distintos (sem repeti-los em um mesmo número) podem ser formados com os algarismos 2, 3 e 5?

Análise Combinatória I – Permutação Simples

Seguindo as instruções do problema, podemos formar os agrupamentos:

- $P = \{(235), (253), (325), (352), (523), (532)\}$

Observe que:

- Cada número é uma lista. O número 532, por exemplo, é a lista (5,3,2).
- O valor do comprimento das listas é igual à quantidade de objetos disponíveis para formá-las.
- Não há repetição e as listas só se diferem umas das outras pela posição (ordem) dos objetos.
- Assim, vemos que o problema em questão envolve o conceito de fatorial. Logo $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Análise Combinatória I – Permutação Simples

Concluindo, definimos permutação simples como:

- Agrupamentos ordenados, sem repetição, em que são utilizados todos os “n” elementos em cada agrupamento denotado pela fórmula:

$$P_n = n!$$

Análise Combinatória I – Arranjo Simples

Quais e quantos números de 2 algarismos distintos (sem repeti-los em um mesmo número) podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5 e 7?

- $P = \{(13), (15), (17), (31), (35), (37), (51), (53), (57), (71), (73), (75)\}$

Observe que:

- Cada número é uma lista. O número 17, por exemplo, é a lista (1,7).
- O valor do comprimento das listas é menor que a quantidade de objetos disponíveis para formá-las.
 - Não há repetição e as listas se diferem umas das outras pela posição (ordem) dos objetos (15 e 51) e pela natureza (13 e 75).

Análise Combinatória I – Arranjo Simples

- Assim, para o cálculo de quantos números podemos formar, usamos o princípio fundamental da contagem.
 - 1ª etapa – números iniciados com 1 – (13), (15), (17)
 - 2ª etapa – números iniciados com 3 – (31), (35), (37)
 - 3ª etapa – números iniciados com 5 – (51), (53), (57)
 - 4ª etapa – números iniciados com 7 – (71), (73), (75)
- Portanto, temos 4 possibilidades para a primeira posição (números iniciados por 1, 3, 5 e 7), restando 3 possibilidades para compor a segunda posição.
- Logo, $4 \cdot 3 = 12$ agrupamentos.

Análise Combinatória I – Arranjo Simples

Definimos arranjo simples de n elementos tomados p a p , com $n \geq p$. Como os agrupamentos que se diferem pela ordem e pela natureza dos elementos que podem se formar com p dos n elementos dados obtidos a partir do princípio fundamental da contagem ou partir da fórmula:

- $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Para o exemplo dado anteriormente:

- $A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$

Análise Combinatória I – Combinação Simples

Os alunos Alice (A), Breno (B), Cauã (C), Danilo (D) e Elza (E) pretendem formar, entre eles, uma comissão de 2 pessoas. De quantas maneiras possíveis essa comissão pode ser formada?

Vamos determinar as comissões:

- $\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{A,E\}, \{B,A\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{B,E\}, \{C,A\}, \{C,B\}, \{C,D\}, \{C,E\}, \{D,A\}, \{D,B\}, \{D,C\}, \{D,E\}, \{E,A\}, \{E,B\}, \{E,C\}, \{E,D\}$

Observe que a comissão formada por $\{A,B\}$ é a mesma comissão que $\{B,A\}$. Podendo-se, assim, aplicar esse raciocínio para os demais alunos. Retirando as comissões repetidas:

- $\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{A,E\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{B,E\}, \{C,D\}, \{C,E\}, \{D,E\}.$

Análise Combinatória I – Combinação Simples

- Repare que, no exemplo, a ordem de cada agrupamento não importa, portanto, em combinação, deixamos de formar listas e passamos a formar conjuntos.
- O que difere os agrupamentos é a natureza dos elementos, ou seja, as comissões $\{A,B\}$ e $\{D,E\}$ são formadas por alunos diferentes.
- Note também que a quantidade de elementos em cada agrupamento é menor que a quantidade de objetos disponíveis para formá-los, ou seja, formamos agrupamentos de 2 alunos de 5 alunos que tinham disponíveis.

Análise Combinatória I – Combinação Simples

Portanto:

- Combinação simples de n elementos tomados p a p , com $n \geq p$. São todos os subconjuntos de p elementos formados a partir dos n elementos dados.

Denota-se por $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações simples de n elementos tomados p a p obtidos pela fórmula:

- $$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Análise Combinatória I – Combinação Simples

Para o exemplo dado, temos:

- $n = 5$ (alunos disponíveis)
- $p = 2$ (quantidade de alunos por comissão)
- $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = \frac{120}{12} = 10$

Interatividade

Quantos são os anagramas que podemos formar com o nome Mirna?

- a) 2.
- b) 6.
- c) 24.
- d) 120.
- e) 25.

Resposta

Quantos são os anagramas que podemos formar com o nome Mirna?

- a) 2.
- b) 6.
- c) 24.
- d) 120.
- e) 25.

Binômio de Newton

Como já sabemos, o número binomial $\binom{n}{p}$, denotado por binomial de n sobre p , é dado por:

- $\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ com $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$

Binômio de Newton

Provavelmente, o desenvolvimento de alguns binômios é conhecido como, por exemplo:

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Binômio de Newton

Podemos desenvolver esses binômios por combinações simples:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 =$
- $= \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 =$
- $= \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$

Binômio de Newton

- Desenvolveremos agora uma fórmula para calcular um binômio de Newton genérico, ou seja, $(a + b)^n$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.
- $$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

Binômio de Newton – Fórmula do termo geral

Vimos que:

$$\blacksquare (a + b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^n b^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b^1}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2} a^{n-2} b^2}_{T_3} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{T_{k+1}} + \underbrace{\binom{n}{n} a^0 b^n}_{T_{n+1}}$$

$$1^\circ \text{ termo } T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0} a^n b^0$$

$$2^\circ \text{ termo } T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1} a^{n-1} b^1$$

$$3^\circ \text{ termo } T_3 = T_{2+1} = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$(k+1)\text{-}\text{ésimo termo } T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Binômio de Newton – Fórmula do termo geral

- Determinar o 4º termo no desenvolvimento de $(x + 3)^5$.
- Para o 4º termo, temos $k + 1 = 4 \Rightarrow k = 3$ e $\begin{cases} n = 5 \\ a = x \\ b = 3 \end{cases}$
- $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- $T_{3+1} = \binom{5}{3} x^{5-3} 3^3$
- $T_4 = 10 \cdot 27x^2 = 270x^2$

Interatividade

O desenvolvimento do binômio de Newton $(x + y)^5$ é:

- a) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$
- b) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^0 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^4.$
- c) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^2 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^3.$
- d) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^3 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^2.$
- e) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^4 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y.$

Resposta

O desenvolvimento do binômio de Newton $(x + y)^5$ é:

- a) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$
- b) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^0 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^4.$
- c) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^2 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^3.$
- d) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^3 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^2.$
- e) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^4 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y.$

Análise Combinatória II – Permutação com repetição

- Considere a palavra Ovo.

Escrevendo todas as possibilidades de mudança de posição das letras, temos:

- {Ovo, ovO, vOo, voO, oOv, Oov}
- Note que os anagramas Ovo e ovO representam a mesma palavra, assim como vOo e voO e oOv e Oov.
- Das 6 palavras, metade é repetida e precisa ser excluída.

Análise Combinatória II – Permutação com repetição

- Sabendo que a palavra Ovo tem 3 letras e a permutação de 3 objetos é dada por $P_3 = 3! = 6$
- Sabendo que a letra “o” se repete 2 vezes e que $2! = 2$

Temos que a permutação com repetição da palavra Ovo é:

- $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$

Análise Combinatória II – Permutação com repetição

- A palavra banana tem 6 letras e 3 repetições da letra “a” e 2 repetições da letra “n”.

Os anagramas de banana são dados por:

- $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{6 \cdot 2} = 60$

De modo geral, as permutações com repetição são dadas por:

$$P_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}, \text{ em que:}$$

- “n” é o total de objetos disponíveis para permutação.
- “a”, “b”, “c”,... é a quantidade de repetição de cada objeto.

Análise Combinatória II – Combinação com elementos repetidos

- Equações lineares com soluções inteiras não negativas.
- Determine quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação linear $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

x_1	x_2	x_3	Representação
1	2	1	/+//+/
2	0	2	//++//

Análise Combinatória II – Combinação com elementos repetidos

- Note que a representação de cada soma equivale a uma permutação com repetição, ou a um anagrama da “palavra” ++////. Portanto, se calcularmos as permutações com 4 repetições do símbolo / e 2 repetições do símbolo +, obteremos 15 como resposta.
- $P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$

De forma geral, temos:

$$P_{n+p-1}^{p, n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}, \text{ em que:}$$

- n = quantidade de incógnitas da equação
- p = repetições do símbolo /

Análise Combinatória II – Combinação com elementos repetidos

De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferecem em 3 sabores diferentes?

Chamando de x_1 a quantidade de sorvetes comprados do sabor 1; x_2 , a quantidade de sorvetes comprados do sabor 2 e x_3 , a quantidade de sorvetes comprados do sabor 3, podemos montar a seguinte equação linear:

- $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
- $P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$

Análise Combinatória II – Combinação com elementos repetidos

Vejamos outra forma de resolver esse problema:

- Se considerarmos que podemos assumir os sabores dos sorvetes como um conjunto de 3 elementos e que serão comprados 4 sorvetes, serão formados agrupamentos não ordenados (a ordem dos sabores não comprados não importa) e que, pelo menos, um sabor vai se repetir, assim, temos uma combinação com repetição de 3 elementos tomados 4 a 4.
- $CR_{3,4} = P_6^{4,2} = C_{6,4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$

Análise Combinatória II – Combinação com elementos repetidos

- Seja a equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, teríamos p símbolos $/$ e $n - 1$ símbolos $+$, logo, a quantidade de soluções da equação será igual à quantidade de permutações dos símbolos $/$ e $+$. Resultando, assim, em uma permutação com repetição em que o número de elementos é $p + n - 1$, sendo que, desses elementos, dois se repetem p e $n - 1$ vezes, daí:
- $$P_{n+p-1}^{p, n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{(p+n-1)!}{p!(p+n-1-p)!} = C_{p+n-1, p} = CR_{n, p}$$

Interatividade

Uma doceria oferece 4 tipos de doces. Qual é o número de maneiras pelas quais um cliente pode comprar 6 desses doces?

- a) 78.
- b) 96.
- c) 35.
- d) 84.
- e) 63.

Resposta

Uma doceria oferece 4 tipos de doces. Qual é o número de maneiras pelas quais um cliente pode comprar 6 desses doces?

a) 78.

b) 96.

c) 35.

d) 84.

e) 63.

ATÉ A PRÓXIMA!