# UNIDADE II

## Cálculo para Computação

Profa. Cláudia dos Santos

# Conteúdo

- Derivada de funções compostas.
- Regra de L'Hôpital para o cálculo de limites.
- Aplicação do uso das derivadas.
  - Máximos e mínimos.
    - Máximos e mínimos relativos.
    - Máximos e mínimos absolutos.

# Conteúdo

- Estudo do sinal da derivada.
  - Crescimento e decrescimento de uma função.
  - Concavidade de uma função.
  - Pontos críticos (máximo, mínimo, inflexão).
- Gráficos de funções.

# Derivada de funções compostas

Regra da cadeia:

$$[f(g(x))]' = g'(x).f'(u)_{u=g(x)}$$

Exemplos:

Calcular a derivada da função $y = cos2x$:

$$y' = (2x)'[\cos(u)]'_{u=2x}$$
$$y' = 2[-sen(u)]_{u=2x}$$
$$y' = -2sen(2x)$$

Calcular a derivada da função $y = e^{5x}$:

$$y' = (5x)'[e^u]'_{u=5x}$$
$$y' = 5[e^u]_{u=5x}$$
$$y' = 5e^{5x}$$

# Derivada de funções compostas

Regra da cadeia:

$$[f(g(x))]' = g'(x).f'(u)_{u=g(x)}$$

Exemplos:

Calcular a derivada da função $y = (x^2 - 4x)^3$:

$$y' = (x^2 - 4x)'[u^3]'_{u=x^2-4x}$$

$$y' = (2x - 4)3[u^2]_{u=x^2-4x}$$

$$y' = (2x - 4)3(x^2 - 4x)^2 = (6x - 4)(x^2 - 4x)^2$$

# Derivada de funções compostas

Na derivação, quando se deve usar a regra do produto, a regra da divisão ou a regra da cadeia?

- A regra do produto deve ser usada quando tivermos um produto de funções;
- A regra do quociente deve ser usada quando tivermos uma divisão entre as funções;
- A regra da cadeia deve ser usada quando tivermos uma função composta, ou seja, a função de função.

# Derivada de funções compostas

- Às vezes, pode ser necessária a utilização de mais de uma regra para calcular a derivada de uma função.

Exemplo:

Calcular a derivada da função $y = \frac{e^{2x+1}}{x}$

- Como temos uma divisão de funções, teremos que utilizar a regra do quociente para o cálculo da derivada.

Analisando o numerador, teremos que aplicar a regra da cadeia:

$$y' = \frac{(e^{2x+1})'x - (e^{2x+1})x'}{x^2}$$

$$y' = \frac{(2x+1)'(e^{u})_{u=2x+1}x - \left(e^{2x+1}\right)1}{x^2}$$

$$y' = \frac{(2)(e^{2x+1})x - \left(e^{2x+1}\right)1}{x^2} = \frac{2xe^{2x+1} - e^{2x+1}}{x^2} = \frac{e^{2x+1}(2x-1)}{x^2}$$

# Interatividade

Calculando a derivada da função $y = xsen2x$, obtemos a seguinte resposta:

a) $y' = sen2x + cos2x$.
b) $y' = 2xsen2x + cos2x$.
c) $y' = sen2x + 2xcos2x$.
d) $y' = 2sen2x + 2cos2x$.
e) $y' = sen2x + 2cos2x$.

# Resposta

Calculando a derivada da função $y = xsen2x$, obtemos a seguinte resposta:

a) $y' = sen(2x) + cos(2x)$.

b) $y' = 2xsen(2x) + cos(2x)$.

c) $y' = sen(2x) + 2xcos(2x)$.

d) $y' = 2sen(2x) + 2cos(2x)$.

e) $y' = sen(2x) + 2cos(2x)$.

$$y' = x'sen2x + x[sen2x]'$$

$$y' = 1sen(2x) + x[sen(2x)]'$$

$$y' = sen(2x) + x(2x)'[cos(u)]_{u=2x}$$

$$y' = sen(2x) + 2xcos(2x)$$

# Regra de L'Hôpital para o cálculo de limites

Indeterminação no cálculo de limites:

A indeterminação no cálculo de limites ocorre quando o cálculo do limite de uma função resultar nas seguintes situações:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{0}{0}$ | $0^0$ | $1^\infty$ | $\infty^0$ |
| $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ | $(+\infty)-(+\infty)$ | $(-\infty)+(+\infty)$ | $0\cdot(\pm\infty)$ |

- Nestes casos, teremos que lançar mão de artifícios algébricos para o cálculo do valor do limite ou utilizar a Regra de L'Hôpital.

# Regra de L'Hôpital para o cálculo de limites

Se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tem uma forma indeterminada, então: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemplos:

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}!!$ $\quad lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = lim_{x \to 2}(x+2) = 4$

Pela Regra de L'Hôpital: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{1} = 4$

$\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 2} = \frac{0}{0}!!!$ $\quad \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t-3)}{t-2} = \quad \lim_{t \to 2}(t-3) = -1$

Pela Regra de L'Hôpital: $\lim_{t \to 2} \frac{2t-5}{1} = \lim_{t \to 2} \frac{-1}{1} = -1$

# Regra de L'Hôpital para o cálculo de limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$$

Pela Regra de L'Hôpital: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

Pela Regra de L'Hôpital: $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2}{1} = 27$

# Interatividade

O $\lim_{x \to 11} \frac{x-11}{x^2-121}$ vale:

a) 11.
b) $\frac{1}{11}$
c) $\frac{1}{22}$
d) 22.
e) 10.

# Resposta

O $\lim_{x \to 11} \frac{x-11}{x^2-121}$ vale:

a) 11.

b) $\frac{1}{11}$

c) $\frac{1}{22}$

d) 22.

e) 10.

$$\lim_{x \to 11} \frac{x-11}{x^2-121} = \lim_{x \to 11} \frac{1}{2x} = \frac{1}{22}$$

# Aplicação do uso das derivadas – Máximos e mínimos

Máximo e mínimos relativos:

- Um máximo relativo (máximo local) de uma função é um “pico”, o ponto de máximo do gráfico em relação a qualquer outro ponto no intervalo analisado;

- Um mínimo relativo (mínimo local) de uma função é um “fundo de vale”, o ponto de mínimo do gráfico em relação a qualquer outro ponto no intervalo analisado.

# Aplicação do uso das derivadas – Máximos e mínimos

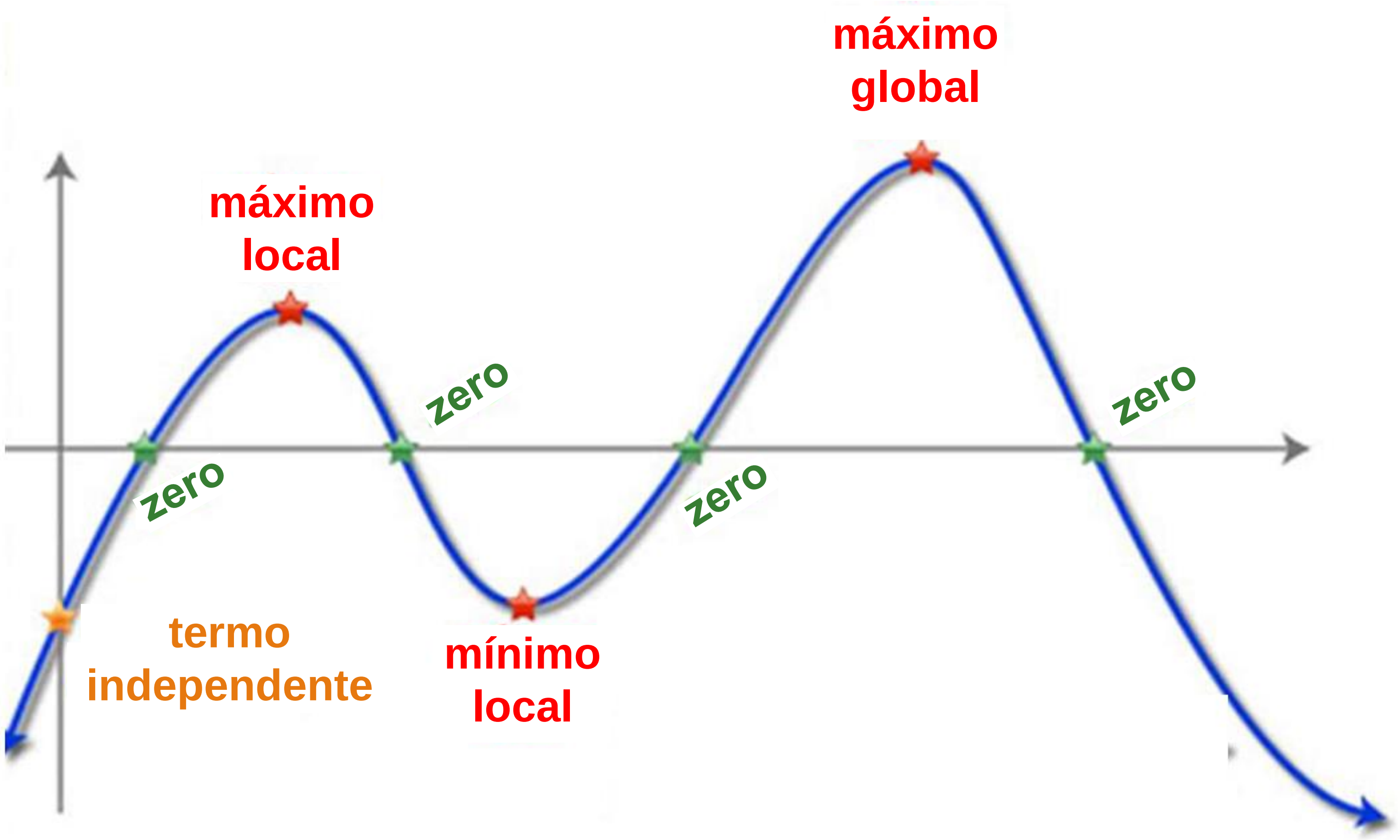
- Máximos e mínimos.
  - Máximo e mínimos absolutos.

- Um ponto de máximo absoluto (máximo global) de uma função é o ponto onde a função atinge o seu maior valor possível.

- Um ponto de mínimo absoluto (mínimo global) de uma função é o ponto onde a função atinge o seu menor valor possível.

# Aplicação do uso das derivadas – Máximos e mínimos

- Conhecendo-se os intervalos onde a função é crescente ou decrescente pode-se, facilmente, identificar os pontos de máximos e mínimos relativos.



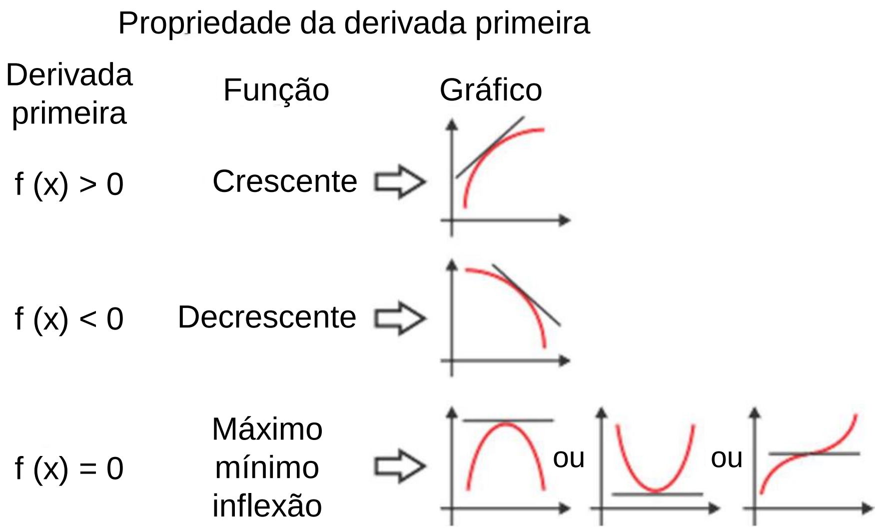

Fonte: profcardy.com

# Estudo do sinal da derivada

Crescimento/decrescimento de uma função:

- Pode-se reconhecer se uma função é crescente ou decrescente pelo sinal de sua primeira derivada;

- Quando a derivada é positiva, o coeficiente angular da tangente é positivo e a função é crescente; quando a derivada é negativa, o coeficiente angular da tangente é negativo e a função é decrescente.




Fonte: xdocs.com.br

# Estudo do sinal da derivada

Logo:

- Se $f'(x) > 0 \; em \; [a,b] \rightarrow$ função é crescente em $[a,b]$;
- Se $f'(x) < 0 \; em \; [a,b] \rightarrow$ função é decrescente em $[a,b]$.

Pontos críticos (máximos ou mínimos):

- No ponto crítico, $f'(x) = 0$ ou $f'(x) = indefinida$;
- Todas as vezes em que uma função inverte o seu crescimento, um ponto de máximo ($PM$) ou de mínimo ($Pm$) é identificado.

# Estudo do sinal da derivada

Concavidade de uma função:

Pode-se reconhecer a concavidade de uma função pelo sinal de sua segunda derivada:

Se $f''(x) > 0$ $em$ $[a,b] \rightarrow$ a curva tem a concavidade voltada para cima (CVC) em $[a,b]$;

Se $f''(x) < 0$ $em$ $[a,b] \rightarrow$ a curva tem a concavidade voltada para baixo (CVB) em $[a,b]$.

Ponto crítico (ponto de inflexão):

- Todas as vezes em que uma função tem a sua concavidade invertida um ponto de inflexão (PI) é identificado.

# Gráficos de funções

Exemplo: construir o gráfico da função seguinte, localizando os possíveis pontos críticos:

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 14x + 10$$

<u>Passo a passo</u>:

Calcular a primeira derivada:

- Analisar os sinais da primeira derivada;
- Conclusão: em que intervalos a função cresce/decresce e identificar o(s) ponto(s) crítico(s): mínimo(s) e/ou máximo(s).

Calcular a segunda derivada:

- Analisar os sinais da segunda derivada;
- Conclusão: em que intervalos a função tem CVC/CVB e identificar o(s) ponto(s) crítico(s): inflexão;
- Esboçar o gráfico.

# Gráficos de funções

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 14x + 10$$

Cálculo da primeira derivada:

$$y' = \frac{3x^2}{3} - \frac{18x}{2} + 14 = x^2 - 9x + 14$$

Análise dos sinais da primeira derivada:

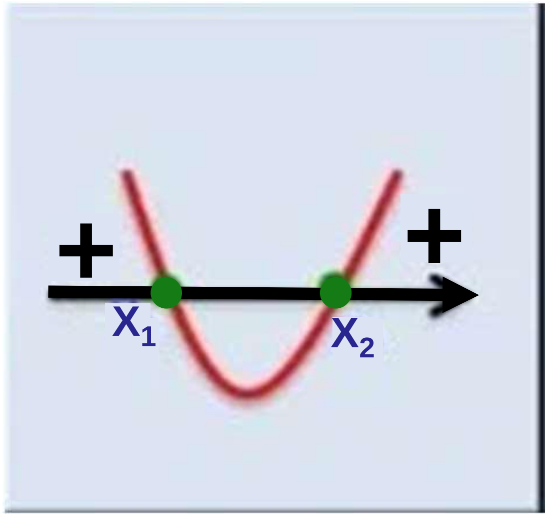
Raízes da função (primeira derivada):

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Delta = 81 - 56 = 25$$

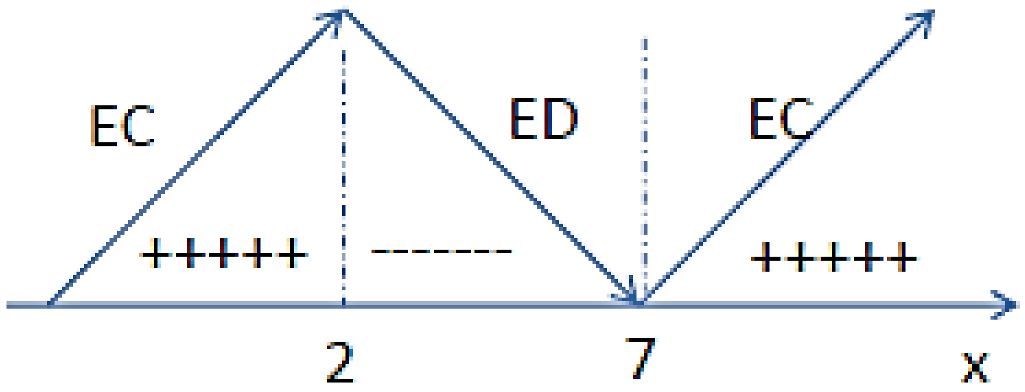
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{25}}{2(1)}$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 7$$



# Gráficos de funções

Conclusão:




$x = 2$ é $PM$

$x = 7$ é $Pm$

# Gráficos de funções

Cálculo da segunda derivada:

$$y' = x^2 - 9x + 14$$

$$y'' = 2x - 9$$

Análise dos sinais da segunda derivada:

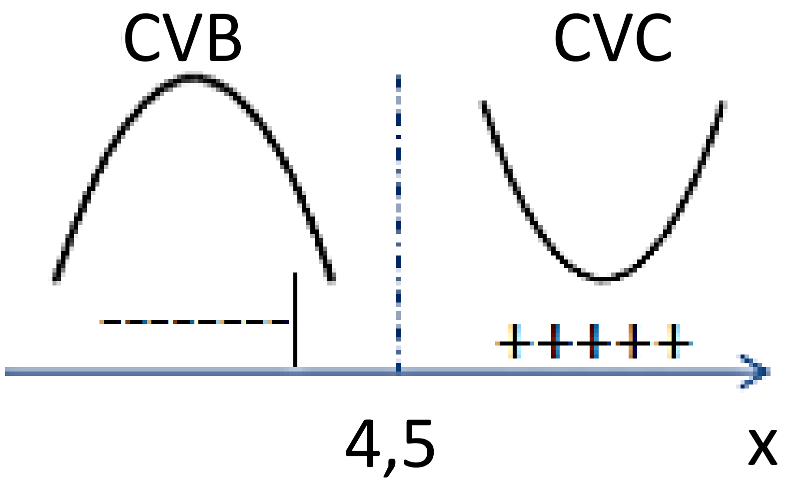
Raízes da função (segunda derivada):

$$2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

# Gráficos de funções

Conclusão:




$x$ = 4,5 é $PI$

# Gráficos de funções

Sugestões para a construção do gráfico:

- Colocar no gráfico todos os pontos críticos encontrados;

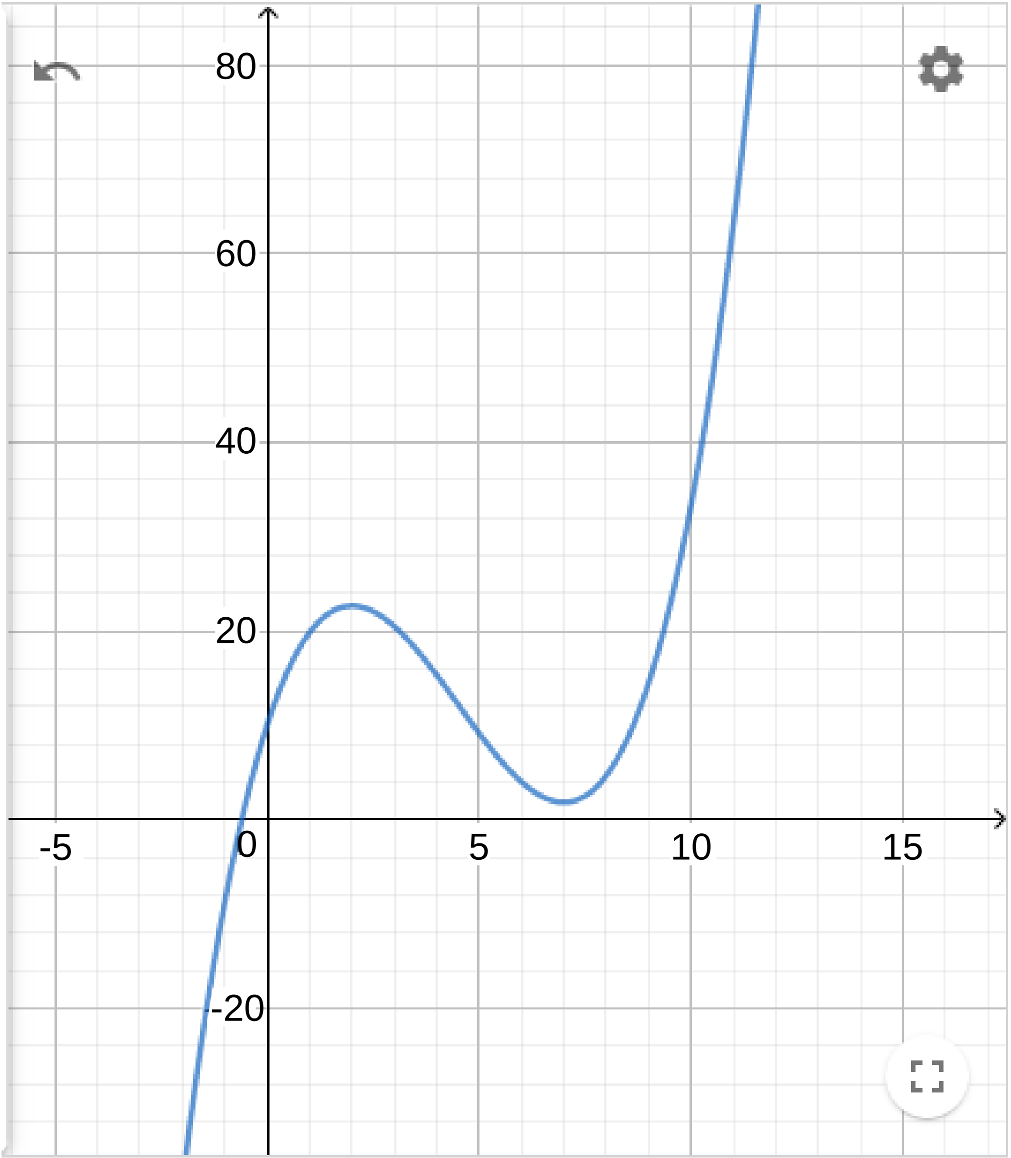
- Sempre atribuir, pelo menos, mais dois pontos além dos pontos críticos (um de valor menor do que todos os valores encontrados e outro de valor maior que todos os valores encontrados);

- Substituir na função “original” os valores da variável encontrados e calcular os valores de $y$.

# Gráficos de funções

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 14x + 10$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 2 | 22,6 |
| 4,5 | 12,25 |
| 7 | 1,83 |
| 8 | 4,67 |



# Interatividade

Uma pedra é atirada pra cima do telhado de um edifício de 80 metros. A altura (em metros) da pedra, em qualquer instante (em segundos), medida a partir do solo, é dada por:

$$h(t) = -16t^2 + 64t + 80 \quad (t \geq 0)$$

Qual é a altura máxima atingida pela pedra?

a) 144 metros.

b) 80 metros.

c) 208 metros.

d) 100 metros.

e) 16 metros.

# Resposta

Uma pedra é atirada pra cima do telhado de um edifício de 80 metros. A altura (em metros) da pedra, em qualquer instante (em segundos), medida a partir do solo, é dada por:

$$h(t) = -16t^2 + 64t + 80 \quad (t \geq 0)$$

Qual é a altura máxima atingida pela pedra?

a) 144 metros.
b) 80 metros.
c) 208 metros.
d) 100 metros.
e) 16 metros.

$$h'(t) = -32t + 64$$

$$-32t + 64 = 0$$

$$t = \frac{-64}{-32} = 2\,seg$$

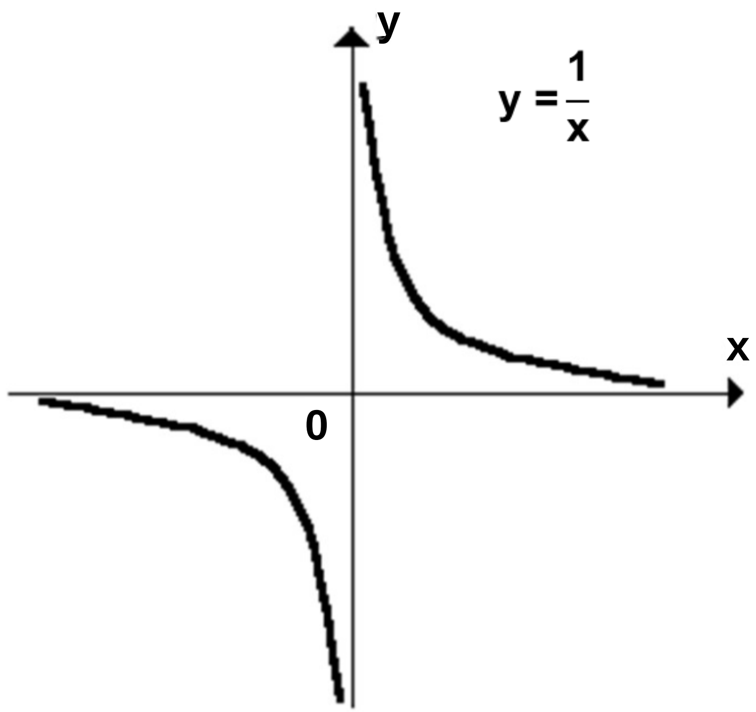
$$h(2) = -16(2)^2 + 64(2) + 80$$

$$h_{max} = 144\,metros$$

# Limites assintóticos

- Quando quisermos saber o comportamento de uma função em seus extremos, devemos observar os limites das funções no infinito.
- Começaremos estudando os valores de uma função $f(x)$, quando $x$ toma os valores arbitrariamente grandes e positivos $x \longrightarrow +\infty$, ou, então, arbitrariamente grandes e negativos $x \longrightarrow -\infty$. O nosso primeiro objetivo será de ver se, em cada um desses limites, os valores de $f(x)$ tendem a se aproximar de algum valor específico.

Vejamos um exemplo bem simples: $f(x) = \frac{1}{x}$



# Limites assintóticos

Observando o gráfico da função podemos notar que:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida em que $x$ aumenta $y$ tende para zero e o limite é zero;

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida em que $x$ diminui $y$ tende para zero e o limite é zero;

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, ou seja, à medida em que $x$ se aproxima de zero pela direita, $y$ tende para o infinito e o limite é infinito;

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, ou seja, à medida em que $x$ se aproxima de zero pela esquerda, $y$ tende para menos infinito e o limite é menos infinito.

# Limites assintóticos

Função polinomial:

Seja a função: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Então, teremos: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

Exemplos:

$$\lim_{x \to \infty} \left(2x^2 - 3x + 6\right) = \lim_{x \to \infty} \left(2x^2\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 3x + 6\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = -\infty$$

# Limites assintóticos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

- Obs.: ao se trabalhar com os limites no infinito de funções racionais, é muito útil dividir o numerador e o denominador pela variável independente elevada a maior potência que apareça na fração.

Exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 3}{2x^5 + 7x^3} = \lim_{x \to \infty} = \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{3x^2}{x^5} + \frac{3}{x^5}}{\frac{2x^5}{x^5} + \frac{7x^3}{x^5}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^5}}{2 + \frac{7}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

# Interatividade

O valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{x-1}$ é:

a) $+\infty$.
b) $-\infty$.
c) 1.
d) 0.
e) $\pm\infty$.

# Resposta

O valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{x-1}$ é:

a) $+\infty$.

b) $-\infty$.

c) 1.

d) 0.

e) $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-0}{1-0} = 1$$

ATÉ A PRÓXIMA!