Unidade II

5 REGRA DA CADEIA PARA DERIVAR FUNÇÕES COMPOSTAS

Na unidade anterior, vimos regras de derivação para funções constantes, para funções envolvendo potências, para funções exponenciais, para funções logarítmicas e para funções seno e cosseno. Mas qual é o procedimento para derivar funções compostas, em que temos uma função de função? A função a seguir é um exemplo de função composta:

$$y(x) = \cos(2x)$$

Nesse exemplo de função composta, temos a função 2 como argumento da função cosseno. Primeiro, é calculada a derivada da função do argumento e, em seguida, a derivada da função externa.

Saiba mais

Para saber mais sobre funções compostas, visite o site:

INTRODUÇÃO à composição de funções. Khan Academy, 2022. Disponível em: https://bit.ly/3NHBYXP. Acesso em: 4 abr. 2022.

Para derivar funções compostas, fazemos uso de uma regra chamada de regra da cadeia, dada por:

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = g'(x)\,.\,f'(u)\big|_{u = g(x)}$$

A definição matemática da regra da cadeia pode parecer complicada, mas o que ela diz é que, para derivar uma função de função, devemos primeiro derivar a função do argumento (a função de dentro) e, depois, multiplicar essa derivada pela derivada da função de fora, colocando novamente o argumento que tínhamos originalmente.

Nos exemplos a seguir, vamos detalhar esse procedimento.

Exemplo de aplicação

Considere a função que demos como exemplo de função composta, $y(x) = \cos(2x)$, cujo gráfico é apresentado na figura 42. Note que a função 2x é argumento da função cosseno. Para derivar essa função, devemos usar a regra da cadeia.

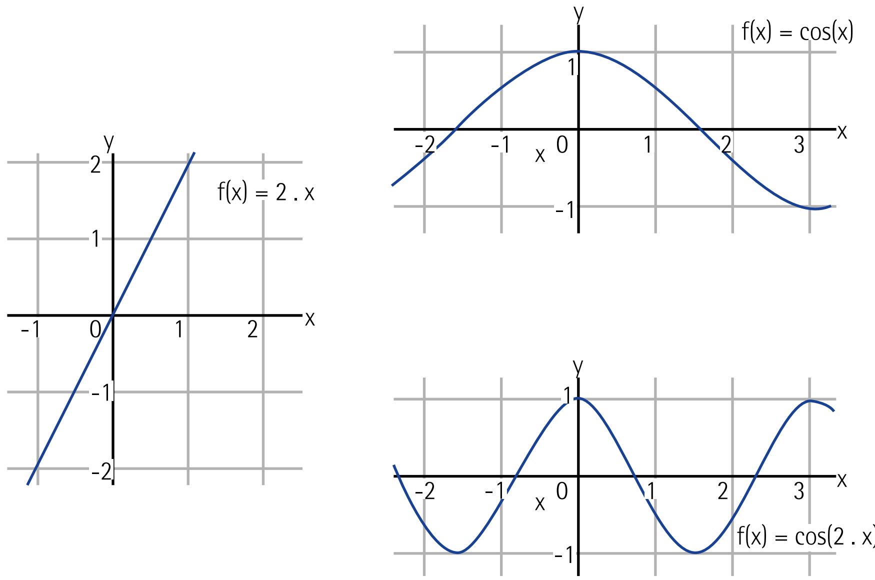

Figura 42 – Gráficos das funções y=2 . x, y=cos(x) e y=cos(2 . x)

Pela regra da cadeia, a derivada de uma função composta é a derivada da função do argumento multiplicada pela derivada da função externa, calculada no argumento original.

Como argumento, temos a função 2x, cuja derivada é igual a 2. Como função externa, temos a função cosseno, cuja derivada é -seno.

Logo, pela regra da cadeia, ficamos com:

$$y'(x) = \left[\cos(2x)\right]'$$

$$y'(x) = (2x)' . \left[\cos(u)\right]'_{u=2x}$$

Calculando as derivadas, chegamos a:

$$y'(x) = 2 . \left[-\text{sen}(u)\right]_{u=2x}$$

Substituindo o argumento original na derivada da função externa, temos:

$$y'(x) = -2 . \text{sen}(2x)$$

Logo, a derivada da função $y(x) = \cos(2x)$ é $y'(x) = -2 . \text{sen}(2x)$

Lembrete

Ao derivarmos uma função em forma de potência, o expoente "cai" multiplicando, e o novo expoente é o expoente anterior diminuído de uma unidade. Ou seja:

$$\left(x^{n}\right)' = n \, . \, x^{n-1}$$

Na igualdade, n é um número real.

Quanto às funções seno e cosseno, vimos que:

$$\left[\text{sen}(x)\right]' = \cos(x)$$

$$\left[\cos(x)\right]' = -\text{sen}(x)$$

Vimos ainda que a derivada de uma função exponencial de base e é ela mesma. Ou seja:

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Como outro exemplo de função composta, podemos usar $y(x) = e^{5 \, . \, x}$ (figura 43). Note que o argumento da função exponencial de base e é a função 5 . x.

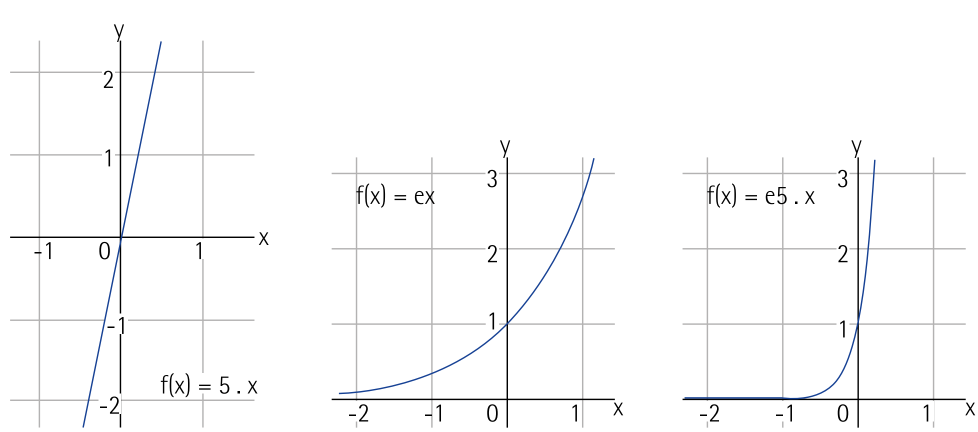

Figura 43 – Funções $f(x) = 5x$, $f(x) = e^{x}$ e $f(x) = e^{5 \, . \, x}$

Note que é equivalente indicar as funções como f(x) ou y(x).

Para derivar essa função, precisamos usar a regra da cadeia, como faremos a seguir:

$$y'(x) = \left(e^{5 \cdot x}\right)'$$

Lembramos que, pela regra da cadeia, a derivada da função composta é o produto da derivada da função do argumento pela derivada da função externa, calculada no argumento original.

Logo:

$$y'(x) = (5x)' \cdot \left(e^{u}\right)'_{u = 5 \cdot x}$$

Calculando as derivadas, ficamos com:

$$y'(x) = 5 \cdot e^{u} \,|_{u = 5 \cdot x}$$

Substituindo o argumento original na derivada da função externa, ou seja, fazendo u = 5 . x, temos:

$$y'(x) = 5 \cdot e^{5 \cdot x}$$

Concluímos que a derivada da função $y(x) = e^{5 \cdot x}$ é $y'(x) = 5 \cdot e^{5 \cdot x}$

Exemplo 2

Considere a função y(x) = cos(e^x), cujo gráfico está representado na figura 44. Veja que o gráfico da função tem um comportamento interessante, mas que não vai dificultar a operação de derivação. Para calcular sua derivada, precisamos usar a regra da cadeia.

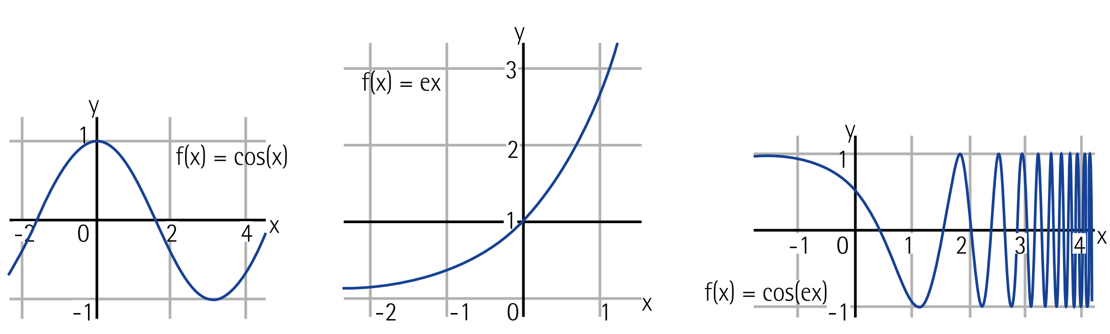

Figura 44 – Gráficos das funções f(x) = cos(x), f(x) = e^x e f(x) = cos(e^x)

Note que é equivalente indicar as funções como f(x) ou y(x).

Da regra da cadeia, temos:

$$y'(x) = \left[\cos\left(e^x\right)\right]'$$

$$y'(x) = \left(e^x\right)' \, . \, \left[\cos(u)\right]'_{u = e^x}$$

Calculando as derivadas, ficamos com:

$$y'(x) = e^x \, . \left[-\text{sen}(u)\right]_{u = e^x}$$

Substituindo o argumento original na derivada da função externa, temos:

$$y'(x) = -e^x . \, \text{sen}\left(e^x\right)$$

Logo, a derivada da função $y(x) = \cos(e^x)$ é $y'(x) = -e^x \, . \, \text{sen}(e^x)$

Exemplo 3

Considere a função y(x) = sen(cos(x)), cujo gráfico é dado na figura 45. Temos uma função seno, cujo argumento é outra função: neste caso, o argumento é a função cosseno. Logo, para derivar essa função, também precisamos usar a regra da cadeia.

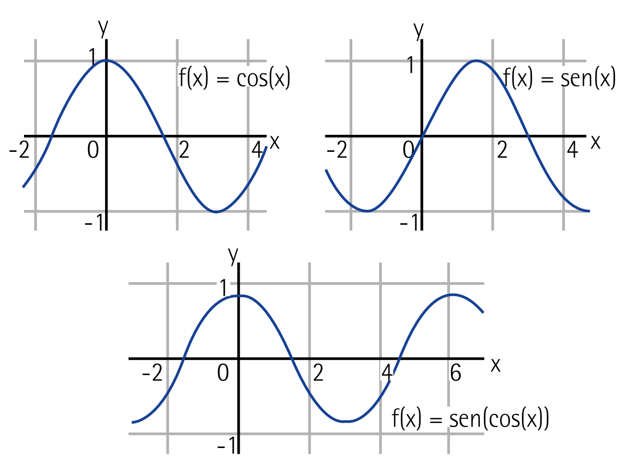

Figura 45 – Gráficos das funções y(x) = sen(x), y(x) = cos(x) e y(x) = sen[cos(x)]

Note que é equivalente indicar as funções como f(x) ou y(x).

Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$y'(x) = \left[\text{sen}\left(\cos(x)\right)\right]'$$

$$y'(x) = \left[\cos(x)\right]' . \left[\text{sen}(u)\right]'_{u = \cos(x)}$$

Calculando as derivadas, ficamos com:

$$y'(x) = -\text{sen}(x)\,.\,\cos(u)\,|_{u = \cos(x)}$$

Substituindo o argumento original na derivada da função externa, temos:

$$y'(x) = -\text{sen}(x)\,.\,\cos(\cos(x))$$

Concluímos que a derivada da função y(x) = sen(cos(x)) é a função y'(x) = -sen(x) . cos(cos(x))

Lembrete

Para derivar o produto de funções, usamos a regra do produto. Vimos também que, para derivar a divisão entre funções, usamos a regra do quociente.

Sejam duas funções deriváveis, f(x) e g(x). A regra do produto é dada por:

$$[f(x)\,.\,g(x)]' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$$

Já a regra do quociente é dada por:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Observação

Uma dúvida frequente sobre derivação é qual regra devemos usar. Devemos usar a regra do produto, a regra do quociente ou a regra da cadeia?

Usamos a regra do produto quando temos um produto de funções, a regra do quociente quando temos uma divisão entre funções e a regra da cadeia quando temos uma função composta, ou seja, função de função.

Podemos também ter o caso de usar mais de uma regra na derivação de uma função.

Na tabela a seguir, citamos algumas funções e o tipo de regra usada em sua derivação.

Tabela 7 – Funções e regras de derivação

Função	Regra de derivação
$y(x) = 5x \,.\, \text{sen}(x)$	Regra do produto
$y(x) = \dfrac{5x}{\text{sen}(x)}$	Regra do quociente
$y(x) = \text{sen}(5x)$	Regra da cadeia
$y(x) = 5 \,.\, e^{2x+1}$	Regra da cadeia
$y(x) = 5 \,.\, e^{x} \,.\, (2x + 1)$	Regra do produto
$y(x) = \dfrac{5 \,.\, e^{x}}{2x+1}$	Regra do quociente

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Como vimos, pode haver o caso de ser necessário aplicar mais de uma regra de derivação. Neste exemplo, vamos analisar um caso em que isso ocorre.

Considere a função $y(x) = x \,.\, \text{sen}(2x)$. Temos um produto de duas funções, pois x multiplica a função seno. Logo, devemos usar, inicialmente, a regra do produto.

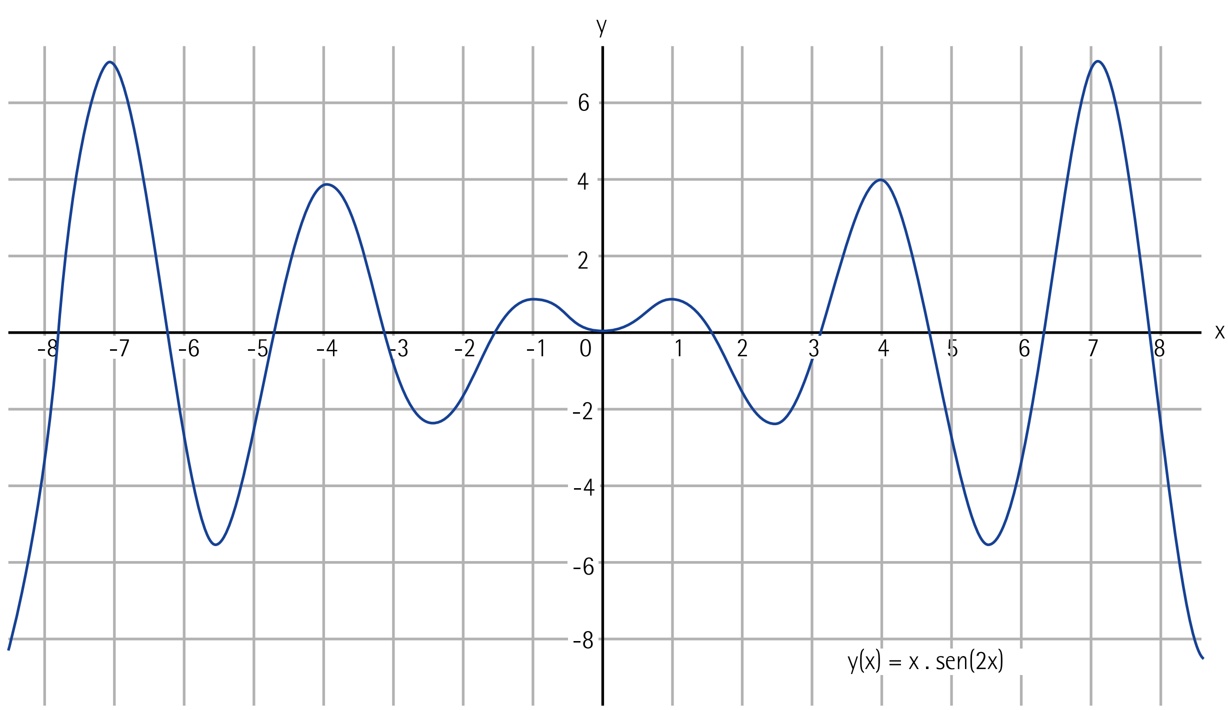

Figura 46 – Gráfico da função y(x) = x . sen(2x)

Aplicando a regra do produto, temos:

$$y'(x) = \left[x \,.\, \text{sen}(2x)\right]'$$

$$y'(x) = x' \,.\, \text{sen}(2x) + x \,.\, \left[\text{sen}(2x)\right]'$$

Vemos que a derivada de x, que está no primeiro termo, é de fácil resolução, mas, para calcular a derivada de sen(2x) do segundo termo, temos que usar a regra da cadeia, pois há uma função (2x) como argumento de outra função (seno).

Como a derivada de x, em relação a x, é igual a 1, temos:

$$y'(x) = 1 \,.\, \text{sen}(2x) + x \,.\, \left[\text{sen}(2x)\right]'$$

$$y'(x) = \text{sen}(2x) + x \,.\, \left[\text{sen}(2x)\right]'$$

Aplicando a regra da cadeia para calcular a derivada do segundo termo, temos:

$$y'(x) = \text{sen}(2x) + x \,.\, (2x)' \,.\, \left[\text{sen}(u)\right]'_{u\,=\,2x}$$

Calculando as derivadas, ficamos com:

$$y'(x) = \text{sen}(2x) + x \,.\, 2 \,.\, \cos(u)\,|_{u\,=\,2x}$$

Reorganizando os termos da multiplicação e substituindo o argumento original na derivada da função externa, chegamos a:

$$y'(x) = \text{sen}(2x) + 2x \,.\, \cos(2x)$$

Concluímos que a derivada da função y(x) = x . sen(2x) é a função y'(x) = sen(2x) + 2x . cos(2x)

Exemplo 2

Considere a função $y(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{x}$, cujo gráfico é dado na figura 47 a seguir.

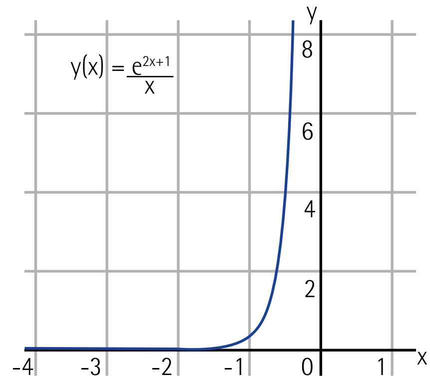

Figura 47 – Gráfico da função $y(x)=\frac{e^{2x+1}}{x}$

Note que temos uma divisão de funções. Logo, precisamos usar a regra do quociente para calcular a derivada:

$$y'(x)=\left(\frac{e^{2x+1}}{x}\right)'$$

$$y'(x)=\frac{\left(e^{2x+1}\right)'.x-e^{2x+1}.(x)'}{x^2}$$

Calculando as derivadas, vemos que precisamos usar a regra da cadeia para a derivada do primeiro termo, já que temos uma função (2x + 1) como argumento de outra função (a exponencial de base e). Aplicando a regra da cadeia para essa derivada, temos:

$$y'(x)=\frac{\left(e^{2x+1}\right)'.x-e^{2x+1}.1}{x^2}$$

$$y'(x)=\frac{(2x+1)'.\left(e^{u}\right)_{u=2x+1}.x-e^{2x+1}}{x^2}$$

$$y'(x)=\frac{2.\left(e^{u}\right)_{u=2x+1}.x-e^{2x+1}}{x^2}$$

Substituindo o argumento original na derivada da função externa, ficamos com:

$$y'(x)=\frac{2.e^{2x+1}.x-e^{2x+1}}{x^2}$$

Rearranjando a equação, ficamos com:

$$y'(x) = \frac{2x \,.\, e^{2x+1} - e^{2x+1}}{x^2}$$

Note que o fator e^{2x+1} aparece nos dois termos da soma do numerador da fração. Logo, podemos colocar esse fator em evidência, de forma que a equação fica:

$$y'(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2} \,.\, (2x - 1)$$

Concluímos que a derivada da função $y(x) = \frac{e^{2x+1}}{x}$ é a função $y'(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2} \,.\, (2x - 1)$

6 REGRA DE L'HOPITAL PARA CÁLCULO DE LIMITES

Na unidade anterior, vimos o conceito de limite e exemplificamos o cálculo de limites para algumas funções.

A regra de L'Hopital diz que, para duas funções f(x) e g(x) deriváveis, em que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ resulta em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, temos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = \frac{sen(x)}{x}$. Desejamos calcular o limite dessa função, quando x tende a zero. Note que, se substituíssemos x por zero, teríamos uma divisão por zero, o que não é definido. Além disso, nessa substituição, chegaríamos a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Podemos usar a regra de L'Hopital para fazer esse cálculo.

Assim, utilizando a regra de L'Hopital, chegamos a:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{[sen(x)]'}{x'}$$

Lembrando que a derivada de seno é cosseno e que a derivada de x, em relação a x, é igual a 1, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\cos(x)$$

Como cos(x) é uma função contínua, inclusive em x = 0, o limite é igual ao valor da função no ponto. Ou seja:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\cos(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$$

Concluímos que o limite da função $y(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ para x tendendo a zero é igual a 1.

Diferentemente da abordagem adotada na unidade anterior, quando estudamos funções, não necessitamos analisar o gráfico da função para calcular o limite nos casos em que se aplica a regra de L'Hopital.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x)=\frac{1-e^x}{\operatorname{sen}(x)}$. Desejamos calcular o limite dessa função para x tendendo a zero. Note que, se substituíssemos x por zero, teríamos uma divisão por zero, o que não é definido. Além disso, nessa substituição, chegaríamos a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Novamente, estamos calculando o limite de uma razão entre duas funções em que é possível usarmos a regra de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^x\right)'}{\left[\operatorname{sen}(x)\right]'}$$

Lembrando que a derivada da exponencial de base e é ela mesma, e que a derivada de seno é cosseno, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x}}{\operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{x}}{\cos(x)}$$

Podemos aqui usar o fato de que o limite da divisão de duas funções é a divisão dos limites de cada função, chegando a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x}}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}-e^{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)}$$

Como tanto a exponencial de base e quanto o cosseno são funções contínuas, inclusive para x = 0, o limite é igual às funções calculadas no ponto, de forma que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x}}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{-e^{0}}{\cos(0)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{-1}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{\operatorname{sen}(x)}=-1$$

Concluímos que o limite da função $y(x)=\frac{1-e^{x}}{\operatorname{sen}(x)}$ para x tendendo a zero é igual a -1.

Lembrete

Conforme vimos no estudo de funções exponenciais na unidade I, e^0 é igual a 1.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x)=\frac{\operatorname{sen}(5x-5)}{x-1}$. Desejamos calcular o limite dessa função quando x tende a 1.

Novamente temos o limite de uma razão entre duas funções e, quando calculamos a função para x = 1, chegamos a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para realizar o cálculo desse limite, podemos usar a regra de L'Hopital.

$$\lim_{x\to1}\frac{\text{sen}(5x-5)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left[\text{sen}(5x-5)\right]'}{(x-1)'}$$

Calculando as derivadas, vemos que, no numerador da fração, temos uma derivada de função composta; logo, devemos usar a regra da cadeia. Pela regra da cadeia e derivando a função do denominador, chegamos a:

$$\lim_{x\to1}\frac{\text{sen}(5x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(5x-5)'.\left[\text{sen}(u)\right]'_{u=5x-5}}{1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\text{sen}(5x-5)}{x-1}=\lim_{x\to1}5.\cos(u)_{u=5x-5}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\text{sen}(5x-5)}{x-1}=\lim_{x\to1}5.\cos(5x-5)$$

Como a função é contínua, inclusive em x=1, basta calcular o valor da função nesse ponto:

$$\lim_{x\to1}\frac{\text{sen}(5x-5)}{x-1}=5.\cos(5.1-5)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\text{sen}(5x+1)}{x-1}=5.\cos(0)=5.1=5$$

Concluímos que o limite da função $y(x)=\frac{\text{sen}(5x-5)}{x-1}$ para x tendendo a 1 é igual a 5.

7 CRESCIMENTO DE FUNÇÕES

7.1 Relação da derivada com o comportamento de uma função

7.1.1 Reta tangente

Na unidade anterior, ao estudarmos funções de 1º grau, vimos que o coeficiente angular indica se o gráfico da função é uma reta crescente ou uma reta decrescente. Aqui, vamos usar esse conceito para estudar o comportamento local de uma função.

Lembrete

Para uma função do 1º grau, de equação y = a . x + b, o coeficiente angular a indica o comportamento da função. Se o coeficiente angular a é positivo, o gráfico da função é uma reta crescente. Se o coeficiente angular a é negativo, o gráfico da função é uma reta decrescente.

Também na unidade anterior, quando tratamos de derivadas, vimos que a derivada de dada função em um ponto indica sua taxa de variação nesse ponto e está relacionada com a inclinação da reta tangente à função nesse ponto. Vamos explorar um pouco mais essa ideia.

Considere uma função f(x) derivável, de derivada f'(x). Sabemos que a equação de uma reta é do tipo y = a . x + b, em que a é o coeficiente angular e b o coeficiente linear. A reta tangente à função f(x), em um ponto x = p do seu domínio, tem coeficiente angular igual à derivada da função no ponto, ou seja, y'(p).

Logo, a equação da reta tangente à função f(x), no ponto x = p do seu domínio, tem equação:

$$y(x) = f'(p) \, . \, x + b$$

Nos exemplos a seguir, vamos explorar a determinação de equações de retas tangentes.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função de 2º grau $f(x) = x^2 - 1$. Desejamos determinar a equação da reta tangente à função em x = 1.

Vimos que a reta tangente tem coeficiente angular igual à derivada da função no ponto solicitado. Então, precisamos começar calculando a derivada da função:

$$f'(x) = \left(x^2 - 1\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas, e isso se estende também às subtrações, temos:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' - 1'$$

Lembrando que, para derivarmos potências, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o expoente anterior diminuído de uma unidade, e que a derivada de uma constante é igual a zero, temos:

$$f'(x) = 2\ .\ x^{2-1} - 0$$

$$f'(x) = 2\ .\ x$$

Essa é a derivada da função em qualquer ponto x. No entanto, desejamos a derivada no ponto específico x = 1. Logo, basta substituirmos esse valor na função:

$$f'(1) = 2\ .\ 1$$

$$f'(1) = 2$$

Assim, a derivada da função $f(x) = x^2 - 1$ em x = 1 é f'(1) = 2. Então, o coeficiente angular da reta tangente a essa função em x = 1 é igual a 2.

Escrevendo a equação da reta tangente, ficamos com:

$$y(x) = f'(1)\ .\ x + b$$

$$y(x) = 2\ .\ x + b$$

Falta determinar o coeficiente linear b dessa equação. Isso é feito ao lembrarmos que a reta tangente e a função têm um ponto em comum, de abscissa x = 1.

Agora, calculamos o valor da função f(x) em x = 1:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f(1) = 1^2 - 1$$

$$f(1) = 1 - 1$$

$$f(x) = 0$$

O ponto em comum entre a função e a reta tem coordenadas x = 1 e y = 0. Substituindo esses valores de x e de y na equação da reta tangente, temos:

$$y(x) = 2.x + b$$

$$0 = 2.1 + b$$

$$0 = 2 + b$$

$$b = -2$$

Então, o coeficiente linear da reta tangente é b = -2 e a equação da reta tangente à função $f(x) = x^2 - 1$ em x = 1 é:

$$y(x) = 2 \,.\, x - 2$$

Podemos verificar se essa é realmente uma reta tangente à função esboçando o gráfico da função e da reta (figura 48).

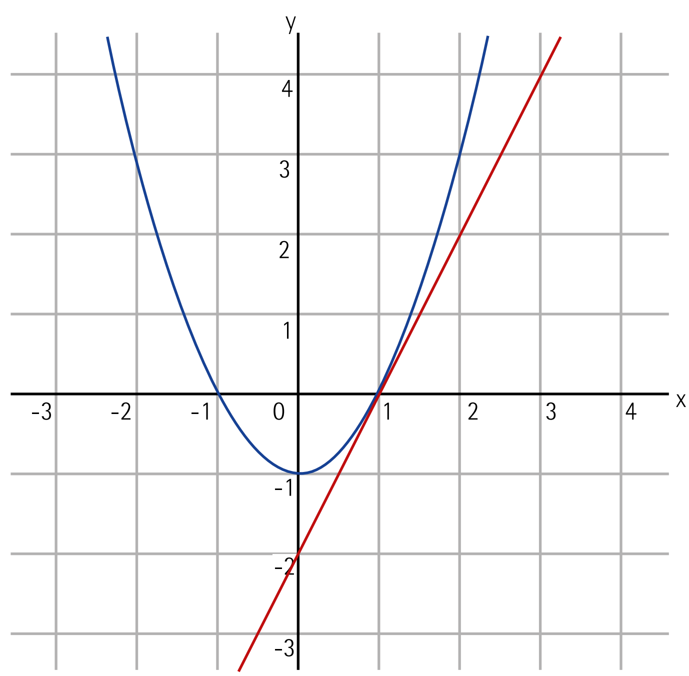

Figura 48 – Gráfico da função do 2º grau $f(x) = x^2 - 1$ e da reta $y(x) = 2 \,.\, x - 2$

Note que a reta tangente à função $f(x) = x^2 - 1$ em x = 1 é uma reta crescente: isso poderia ser estimado, pois a derivada da função no ponto é um número positivo.

Exemplo 2

Considere a função $f(x) = x^4 + 3x - 4$. Desejamos determinar a reta tangente a essa função em x = 0.

Sabemos que a inclinação da reta tangente é igual à derivada da função no ponto em questão; então, começamos derivando a função.

$$f'(x) = \left(x^4 + 3x - 4\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas, e isso também se estende às subtrações, ficamos com:

$$f'(x) = \left(x^4\right)' + (3x)' - 4'$$

Lembrando que constantes multiplicativas podem ser "retiradas" da derivada, ou seja, para c constante, (c . f)' = c . f', chegamos a:

$$f'(x) = \left(x^4\right)' + 3 \,.\, x' - 4'$$

Calculando as derivadas, temos:

$$f'(x) = 4 \,.\, x^{4-1} + 3 \,.\, x^{1-1} - 0$$

$$f'(x) = 4 \,.\, x^3 + 3 \,.\, x^0$$

$$f'(x) = 4 \,.\, x^3 + 3 \,.\, 1$$

$$f'(x) = 4 \,.\, x^3 + 3$$

Essa derivada aplica-se a qualquer valor de x, mas estamos interessados em x = 0. Calculando a derivada nesse ponto, temos:

$$f'(0) = 4 \,.\, 0^3 + 3$$

$$f'(0) = 0 + 3$$

$$f'(0) = 3$$

Logo, a derivada da função $f(x) = x^4 + 3x - 4$ em $x = 0$ é igual a 3, e esse é o valor do coeficiente angular da reta tangente da função nesse ponto.

Escrevendo a equação da reta tangente, temos:

$$y(x) = f'(p) . x + b$$

$$y(x) = 3 . x + b$$

Resta determinarmos o coeficiente linear b, o que é feito calculando-se o valor da função para x = 0 e substituindo esse valor na equação da reta tangente.

Calculando a função para x = 0, temos:

$$f(x) = x^4 + 3x - 4$$

$$f(0) = 0^4 + 3 . 0 - 4$$

$$f(0) = 0 + 0 - 4$$

$$f(0) = -4$$

Logo, a função e a reta tangente têm em comum o ponto x = 0 e y = -4. Substituindo esse ponto na equação da reta, ficamos com:

$$y(x) = 3 . x + b$$

$$-4 = 3 . 0 + b$$

$$b = -4$$

O coeficiente linear da reta tangente é b = -4 e a sua equação é:

$$y(x) = 3 . x - 4$$

Podemos analisar se essa reta é mesmo tangente à função esboçando os gráficos, como é feito na figura 49.

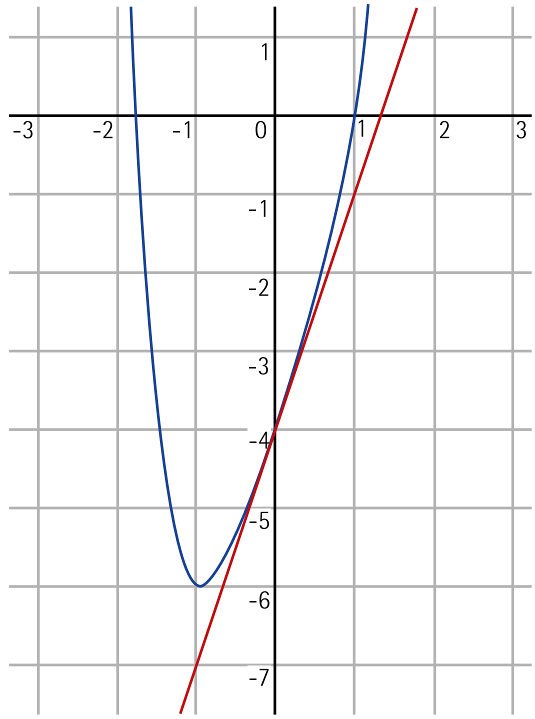

Figura 49 – Gráficos da função $f(x) = x^4 + 3x - 4$ e da reta $y(x) = x - 4$

Note que a reta é tangente à função em $x = 0$. Vemos que o comportamento da função $f(x) = x^4 + 3x - 4$ em $x = 0$ é crescente, pois a reta tangente nesse ponto também é crescente. Isso pode ser percebido nos cálculos, em que a derivada da função em $x = 0$ é positiva.

Exemplo 3

Considere a função $f(x) = 5 \,.\, \text{sen}(x)$. Desejamos a equação da reta tangente ao gráfico dessa função para $x = 1$.

Sabemos que a inclinação da reta tangente é igual à derivada da função no ponto em questão. Então, começamos calculando a derivada da função.

$$f'(x) = \left[5 \,.\, \text{sen}(x)\right]'$$

Como constantes multiplicativas podem ser "retiradas" da derivada, e lembrando que a derivada da função seno é a função cosseno, temos:

$$f'(x) = \left[5 \,.\, \text{sen}(x)\right]'$$

$$f'(x) = 5 \,.\, \left[\text{sen}(x)\right]'$$

$$f'(x) = 5 \,.\, \cos(x)$$

Calculando a derivada em x = 1, ficamos com:

$$f'(1) = 5 \,.\, \cos(1)$$

$$f'(1) = 5 \,.\, 0{,}540$$

$$f'(1) = 2{,}701$$

O coeficiente angular da reta tangente é 2,701. Aqui, usamos uma calculadora científica para fazer esses cálculos (em radianos). A equação da reta tangente é, portanto, dada por:

$$y(x) = f'(p) \,.\, x + b$$

$$y(x) = 2{,}701 \,.\, x + b$$

Determinamos o coeficiente linear b da reta tangente lembrando que o ponto de tangência é comum à reta e à função. Calculando o valor da função em x = 1, temos:

$$f(x) = 5 \,.\, \operatorname{sen}(x)$$

$$f(1) = 5 \,.\, \operatorname{sen}(1)$$

$$f(x) = 5 \,.\, 0{,}841$$

$$f(x) = 4{,}207$$

A reta tangente passa pelo ponto de coordenadas x = 1 e y = 4,207. Substituindo esses valores na equação da reta tangente, temos:

$$y(x) = 2{,}701 \,.\, x + b$$

$$4{,}207 = 2{,}701 \,.\, 1 + b$$

$$4{,}207 = 2{,}701 + b$$

$$b = 4{,}207 - 2{,}701$$

$$b = 1{,}505$$

Logo, a equação da reta tangente à função f(x) = 5 . sen(x) em x = 1 é:

$$y(x) = 2{,}701 . x + 1{,}505$$

Para verificarmos se essa é realmente a reta tangente à função, precisamos esboçar os gráficos, como é feito na figura 50.

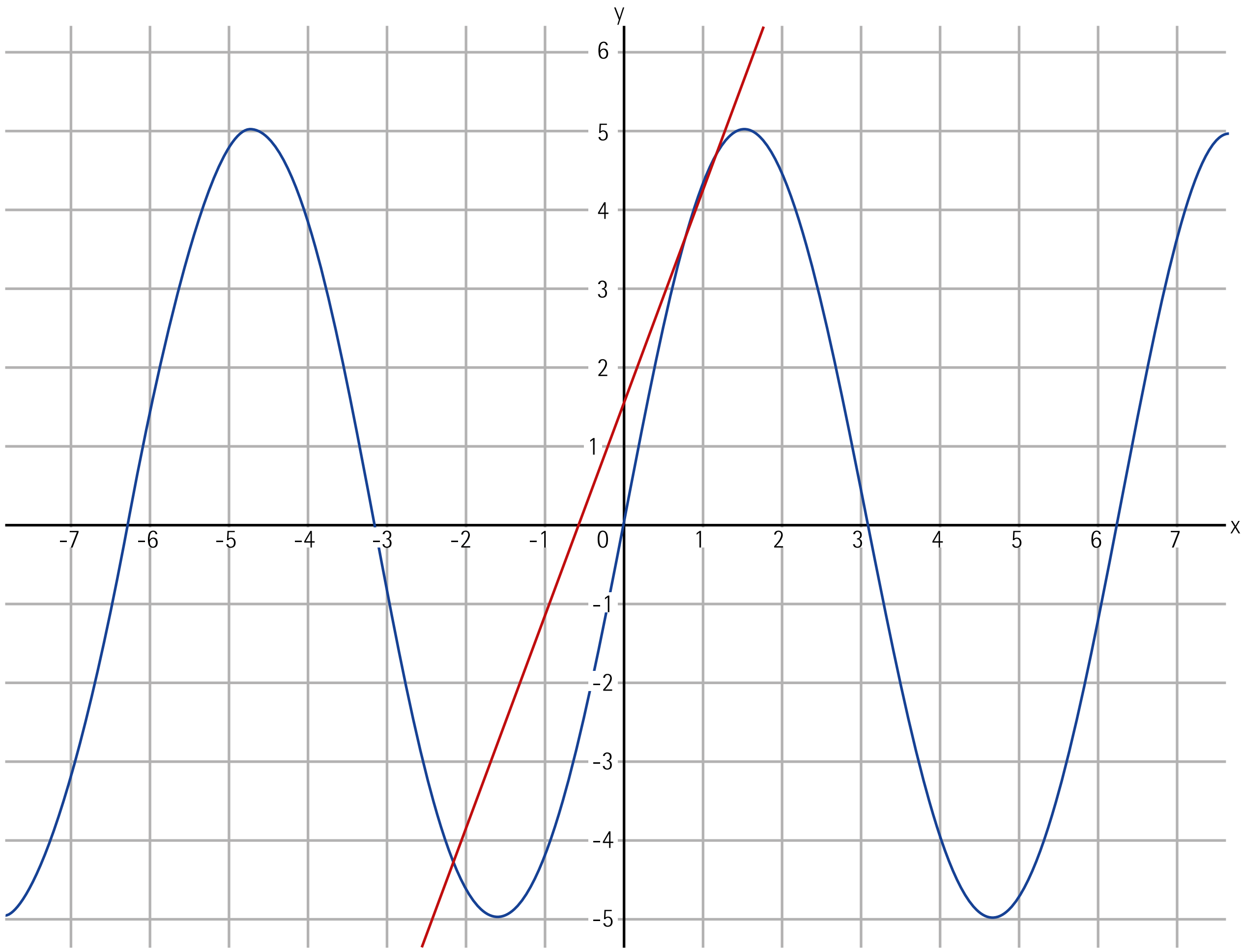

Figura 50 – Gráficos da função f(x) = 5 . sen(x) e da reta y(x) = 2,701 . x + 1,505

Note que a reta é tangente à função em x = 1. Novamente, vemos que a reta tangente à função no ponto é crescente. Logo, o comportamento local da função nesse ponto é crescente. Nos demais pontos do gráfico, a função alterna-se entre comportamentos crescentes e decrescentes, como esperado para uma função periódica do tipo seno.

Saiba mais

Quando calculamos funções trigonométricas de argumentos numéricos, esses argumentos estão em radianos, não em graus. Para entender como ajustar a calculadora para calcular em radianos, assista ao vídeo:

GRAUS e radianos na calculadora científica. Youtube por Prof. Izaias Neri. [s.l.], jul. 2015. 1 vídeo (2min57s). Disponível em: https://bit.ly/3tTE27c. Acesso em: 30 mar. 2022.

Exemplo de aplicação

Considere a função f(x) = cos(x). Desejamos saber a equação da reta tangente ao gráfico dessa função em x = 0.

Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em dado ponto é igual à derivada da função nesse ponto. Então, começamos calculando a derivada da função dada.

$$f'(x) = [\cos(x)]$$

Como a derivada da função cosseno é menos a função seno, temos:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

Calculando a derivada para x = 0, ficamos com:

$$f'(0) = -\operatorname{sen}(0)$$

$$f'(0) = 0$$

O coeficiente angular da reta tangente é, portanto, igual a zero. Inicialmente, vamos ignorar o fato de esse coeficiente ser nulo e substituí-lo na equação da reta tangente, como fizemos até agora. A equação da reta tangente é:

$$y(x) = f'(p) \,.\, x + b$$

$$y(x) = 0 \,.\, x + b$$

$$y(x) = b$$

Chegamos à conclusão de que a reta tangente é uma função constante. Logo, essa reta deve ter como gráfico uma linha horizontal.

O coeficiente linear b da equação da reta é determinado lembrando que a reta tangente e a função têm um ponto em comum em x = 0. Calculando o valor da função f(x) nesse ponto, temos:

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f(0) = \cos(0)$$

$$f(0) = 1$$

Concluímos que a reta tangente deve passar pelo ponto de coordenadas x = 0 e y = 1. Substituindo esses valores na equação da reta tangente, ficamos com:

$$y(x) = b$$

$$1 = b$$

$$b = 1$$

Logo, a equação da reta tangente à função f(x) = cos(x), em x = 0, é dada por:

$$y(x) = 1$$

Vemos que, nesse caso, estamos tratando de uma função constante.

Para verificar se essa reta é tangente à função no ponto solicitado, esboçamos os gráficos da função e da reta (figura 51).

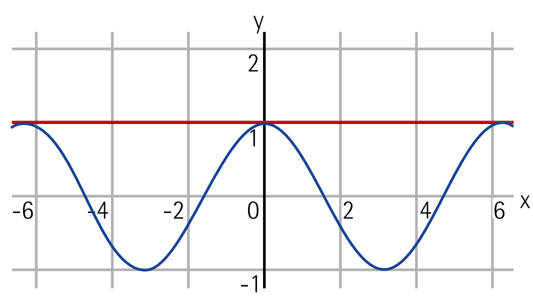

Figura 51 – Gráficos da função f(x) = cos(x), em azul, e da reta y(x) = 1, em vermelho

Note que a reta é tangente ao gráfico da função em x = 0. Nesse caso, a inclinação da reta tangente é nula, pois temos uma função constante. Isso quer dizer que, em x = 0, a função não tem comportamento crescente nem decrescente. Esse comportamento ficará mais claro quando explorarmos máximos e mínimos de funções mais adiante.

Quando desejamos analisar apenas o comportamento local de uma função, se ela é crescente ou decrescente localmente, não precisamos determinar a equação da reta tangente, como fizemos nesses exemplos. Trataremos desse caso a seguir.

7.1.2 Comportamento local de funções

Vimos que a inclinação da reta tangente a uma função f(x) em um ponto p é dada por f'(p). Logo, para determinarmos se uma função é crescente ou decrescente localmente, ou seja, nas vizinhanças do ponto p, basta analisarmos o sinal da derivada da função no ponto.

Tabela 8 – Comportamento local de uma função f(x) em um ponto x=p

$f'(p) > 0$	Localmente crescente
$f'(p) < 0$	Localmente decrescente

Nos exemplos a seguir, vamos analisar o comportamento local de algumas funções.

Lembrete

Quanto ao comportamento de funções, temos as possibilidades representadas na figura a seguir.

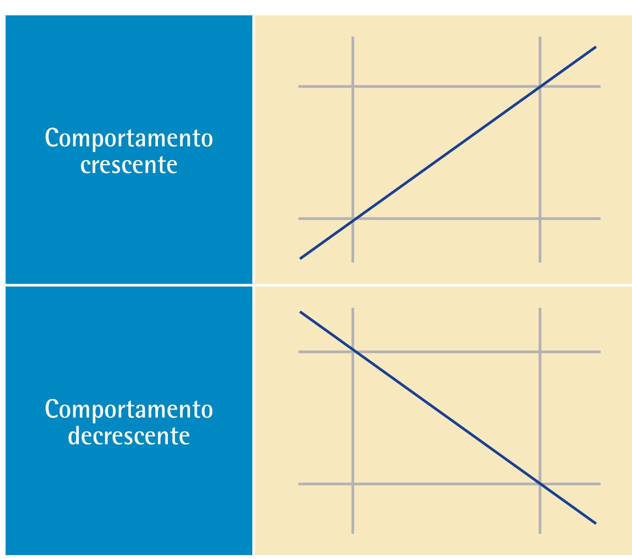

Figura 52 – Representações de comportamento crescente e de comportamento decrescente

Exemplo de aplicação

Considere a função f(x) = 3x + 1. Determine o comportamento local dessa função ao redor de x = 0.

Sabemos que estamos tratando de uma função do 1º grau e vemos que o coeficiente angular é a = 3, positivo. Logo, o comportamento da função é crescente para qualquer valor de x. Então, ao redor de x = 0, esperamos que a função tenha comportamento crescente. Mas vamos fazer a análise com base na derivada da função no ponto.

Para sabermos o comportamento local de uma função ao redor de dado ponto, precisamos analisar sua derivada nesse ponto.

Calculando a derivada da função, temos:

$$f'(x) = (3x + 1)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas e, ainda, como podemos "tirar" constantes multiplicativas das derivadas, temos:

$$f'(x) = (3\,.\,x)' + 1'$$

$$f'(x) = 3\,.\,x' + 1'$$

Lembrando que a derivada de uma constante é igual a zero e que a derivada de x, em relação a x, é igual a 1, temos:

$$f'(x) = 3\,.\,1 + 0$$

$$f'(x) = 3$$

Essa derivada é válida para qualquer ponto da função, mas, como ela é constante, ou seja, não depende de x, também é válida para x = 0. Assim:

$$f'(0) = 3$$

Como a derivada da função no ponto é positiva, a função é localmente crescente. Podemos verificar esse comportamento no gráfico a seguir (figura 53).

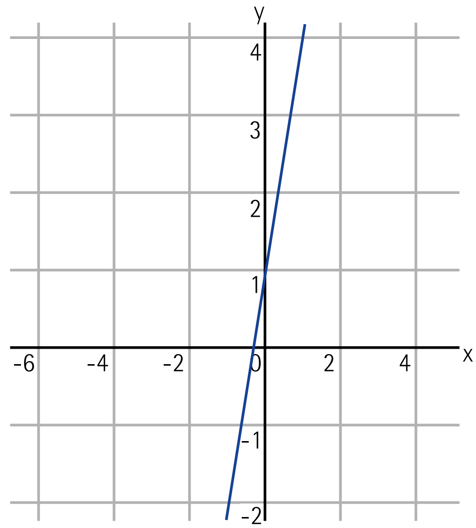

Figura 53 – Gráfico da função f(x) = 3x + 1

Note que a função tem comportamento estritamente crescente; logo, é também localmente crescente nas proximidades de x = 0.

Podemos aumentar o grau da função. No exemplo a seguir, analisamos o comportamento local de uma função do 2º grau.

Exemplo de aplicação

Considere a função $f(x) = 3x^2 - 1$. Determine o comportamento local da função em torno de x = 4.

Para obtermos informações sobre o comportamento local da função, devemos analisar sua derivada no ponto solicitado.

Calculando a derivada da função, temos:

$$f'(x) = \left(3x^2 - 1\right)'$$

Lembrando que a derivada da soma é a soma das derivadas e, ainda, que constantes multiplicativas podem ser "retiradas" de derivadas, temos:

$$f'(x) = \left(3x^2\right)' - (1)'$$

$$f'(x) = 3 \,.\, \left(x^2\right)' - (1)'$$

Quando derivamos potências, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o expoente anterior diminuído de uma unidade. Além disso, a derivada de uma constante é igual a zero. Logo:

$$f'(x) = 3\,.\,2\,.\,x^{2-1} - 0$$

$$f'(x) = 6\,.\,x$$

Calculando a derivada em x = 4, temos:

$f'(4) = 6\,.\,4$

$f'(4) = 24$

Como a derivada da função no ponto é positiva, a função $f(x) = 3x^2 - 1$ apresenta comportamento local crescente ao redor de x = 4. Isso pode ser confirmado esboçando-se o gráfico da função (figura 54).

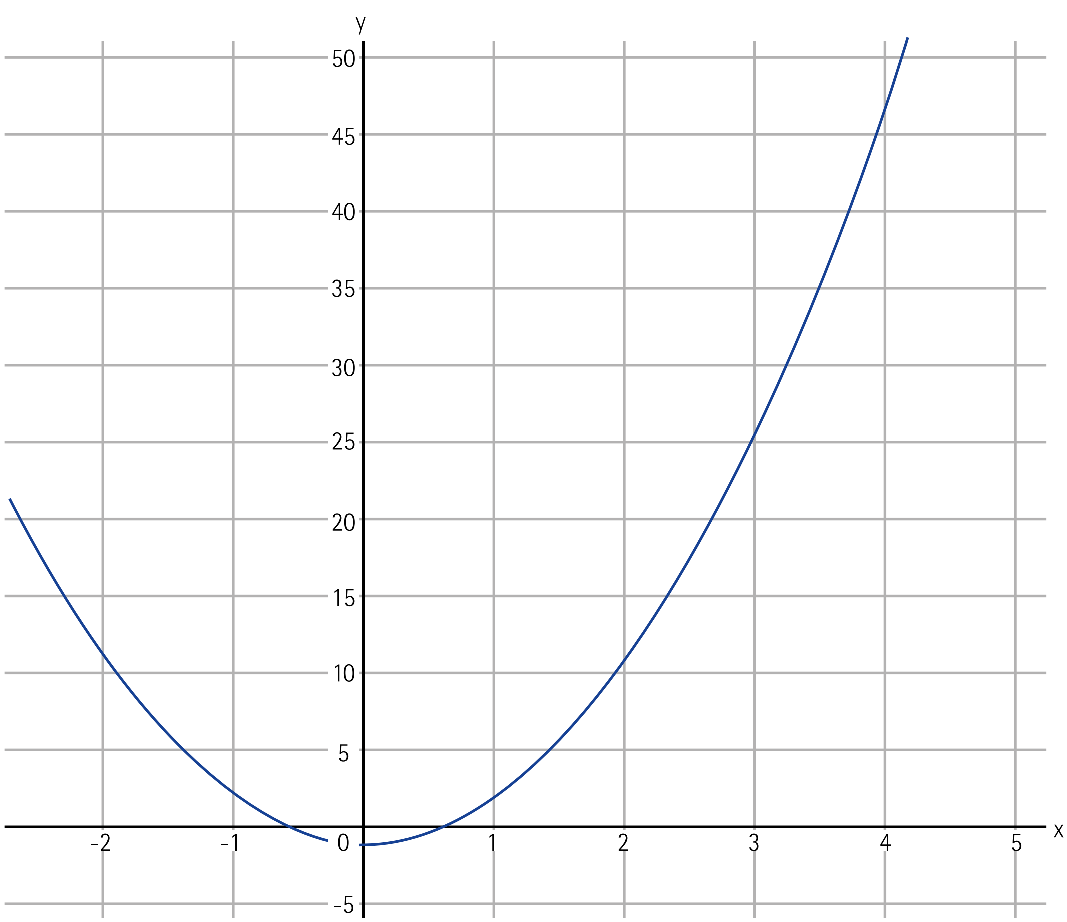

Figura 54 – Gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 1$

Note que o comportamento da função é localmente crescente ao redor de x = 4.

No exemplo a seguir, analisamos o comportamento local de uma função trigonométrica.

Exemplo de aplicação

Considere a função f(x) = 2 . cos(x) + 1. Determine o comportamento local da função em x = 2.

Para determinarmos o comportamento local de uma função ao redor de dado ponto, devemos analisar a sua derivada nesse ponto.

Começamos calculando a derivada da função:

$$f'(x) = [2 \,.\, \cos(x) + 1]'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas e, ainda, lembrando que constantes multiplicativas podem ser "retiradas" das derivadas, temos:

$$f'(x) = [2 \,.\, \cos(x)]' + 1'$$

$$f'(x) = 2 \,.\, [\cos(x)]' + 1'$$

Lembrando que a derivada do cosseno é menos seno e que a derivada de uma constante é igual a zero, temos:

$$f'(x) = -2 \,.\, \mathrm{sen}(x) + 0$$

$$f'(x) = -2 \,.\, \mathrm{sen}(x)$$

Calculando a derivada da função no ponto solicitado, x = 2, temos:

$$f'(2) = -2 \,.\, \mathrm{sen}(2)$$

Para calcular sen(2), precisamos de uma calculadora científica configurada para fazer cálculos em radianos. Usando a calculadora, temos:

$$f'(2) = -2 \,.\, 0{,}909$$

$$f'(2) = -1{,}818$$

Como a derivada da função no ponto solicitado é negativa, a função f(x) = 2 . cos(x) + 1 tem comportamento localmente decrescente ao redor de x = 2. Na figura a seguir, é esboçado o gráfico dessa função com o objetivo de verificarmos esse comportamento.

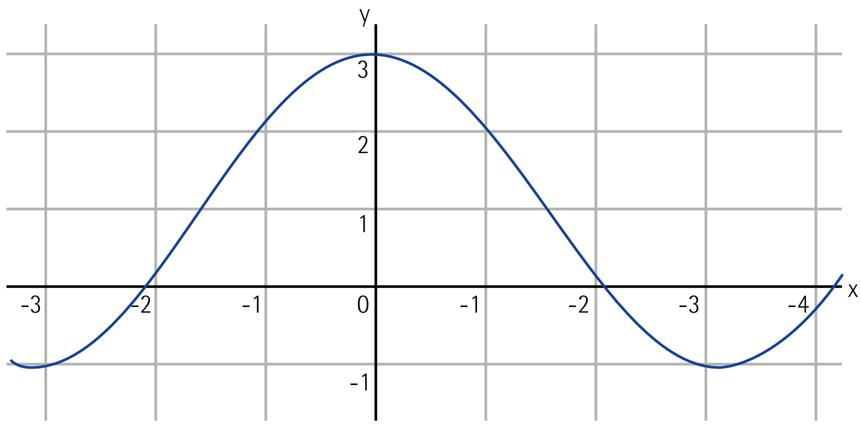

Figura 55 – Gráfico da função f(x) = 2 . cos(x) + 1

Note que a função tem comportamento localmente decrescente ao redor de x = 2.

E o que acontece quando a derivada da função no ponto não é positiva nem negativa, mas nula? Vamos tratar desse caso a seguir.

7.2 Máximos e mínimos de funções

Vimos que a derivada de uma função f(x) derivável em dado ponto p é igual à inclinação da reta tangente à função nesse ponto.

Definimos como pontos de máximo ou de mínimo os valores extremos de uma função. Esses pontos extremos podem ser:

- globais, quando não existem pontos extremos além deles;
- locais, quando existem pontos extremos além deles.

Nos pontos extremos de uma função, a reta tangente é uma função constante, com gráfico dado por uma reta horizontal (figura 56). O coeficiente angular de uma função constante é igual a zero. Logo, a derivada de uma função f(x) em um ponto extremo é igual a zero.

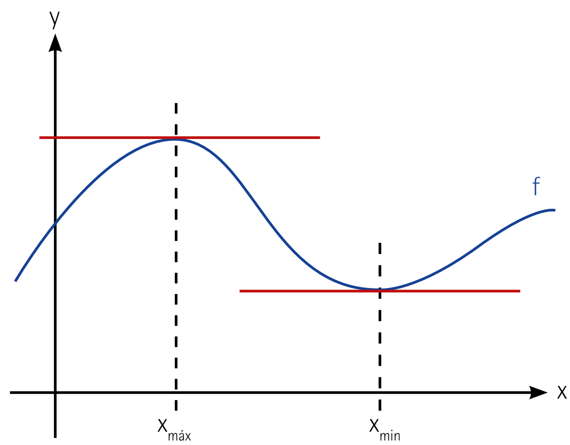

Figura 56 – Retas tangentes (em vermelho) a uma função f (em azul) nos pontos de máximo e mínimo

Usando esse conceito, quando desejamos os pontos extremos de uma função, sejam eles de máximo ou de mínimo, basta encontrarmos os pontos para os quais a derivada da função é igual a zero.

Para sabermos se um ponto extremo é de máximo ou de mínimo, devemos analisar os valores da função em sua vizinhança:

- se os valores vizinhos são inferiores ao do ponto extremo, ele é um máximo;
- se os valores vizinhos são superiores ao do ponto extremo, ele é um mínimo.

Nos exemplos a seguir, vamos detalhar a determinação de máximos e de mínimos de algumas funções.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = x^2 + 2x$. Determine o valor de *x* para o qual a função tem um ponto extremo.

Para determinarmos o ponto extremo de uma função, calculamos sua derivada e igualamos a zero.

Derivando a função, temos:

$$y'(x) = \left(x^2 + 2x\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas e lembrando que podemos "retirar" constantes multiplicativas da derivada, temos:

$$y'(x) = \left(x^2\right)' + 2x'$$

Lembrando que, na derivada de potências, o expoente "cai" multiplicando, e o novo expoente é o antigo expoente diminuído de uma unidade, e que a derivada de x, em relação a x, é igual a 1, temos:

$$y'(x) = 2x^{2-1} + 2.1$$

$$y'(x) = 2x + 2$$

Para determinarmos o ponto extremo, igualamos essa derivada a zero e calculamos o valor de x:

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -\frac{2}{2}$$

$$x = -1$$

O valor de *x* para o qual a função $y(x) = x^2 + 2x$ apresenta um extremo é $x = -1$. Esse resultado pode ser confirmado pelo gráfico da função (figura 57).

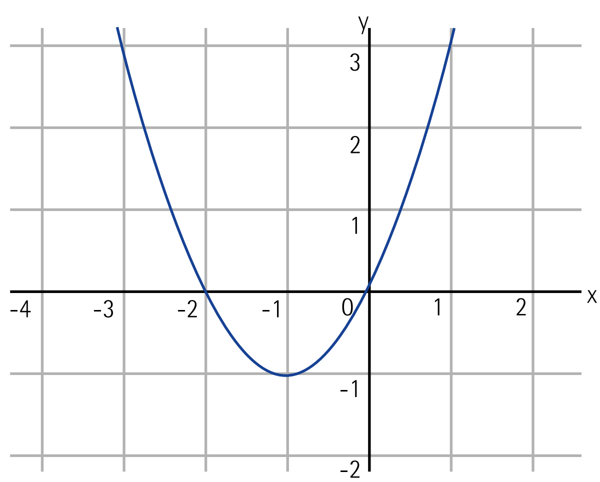

Figura 57 – Gráfico da função $y(x) = x^2 + 2x$

Note que a função tem um mínimo em $x = -1$. Podemos verificar se o ponto que encontramos é ponto de máximo ou ponto de mínimo analisando a concavidade da parábola. O gráfico da função $y(x) = x^2 + 2x$ é uma parábola com concavidade para cima; logo, o ponto extremo é um ponto de mínimo. Para parábolas com concavidade para baixo, o ponto extremo é um ponto de máximo.

Lembrete

Funções do 2º grau têm equações do tipo $y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ e o coeficiente a determina a concavidade do gráfico da função. Quando o coeficiente a é positivo, o gráfico da função é uma parábola com concavidade para cima. Quando o coeficiente a é negativo, o gráfico da função é uma parábola com concavidade para baixo.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = -5x^2 + 3$. Determine o ponto extremo da função e se esse ponto é um máximo ou um mínimo.

A função $y(x) = -5x^2 + 3$ é uma função do 2º grau, cujo gráfico é uma parábola com concavidade para baixo. Logo, o ponto extremo que vamos determinar é um ponto de máximo.

Para determinar o ponto de máximo, devemos derivar a função e igualar essa derivada a zero. Derivando a função, temos:

$$y'(x) = \left(-5x^2 + 3\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas e, ainda, lembrando que constantes multiplicativas podem ser "retiradas" da derivada, temos:

$$y'(x) = -5 \,.\left(x^2\right)' + 3'$$

Derivando a potência e lembrando que a derivada de uma constante é igual a zero, temos:

$$y'(x) = -5 \,.\, 2 \,.\, x^{2-1} + 0$$

$$y'(x) = -10.x$$

Igualando essa derivada a zero para encontrar o ponto extremo, temos:

$$-10 \,.\, x = 0$$

$$x = -\frac{0}{10}$$

$$x = 0$$

O ponto extremo da função ocorre em x = 0. Como foi solicitado o ponto, e não apenas o valor de x, devemos dar como resposta um par (x, y). Calculando o valor da função para x = 0, temos:

$$y(0) = -5 \,.\, 0^2 + 3$$

$$y(0) = 0 + 3$$

$$y(0) = 3$$

O ponto extremo da função, que, como vimos, é um ponto de máximo, tem coordenadas x = 0 e y = 3. Logo, é o ponto (0, 3). Podemos verificar se esse é realmente um ponto de máximo da função analisando o seu gráfico, dado na figura 58.

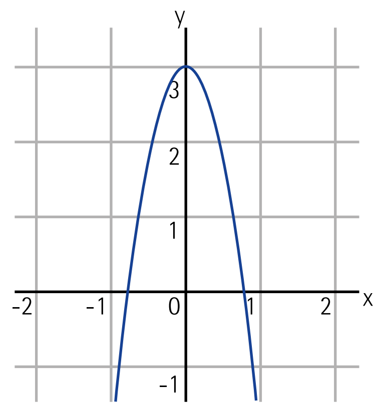

Figura 58 – Gráfico da função $y(x) = -5x^2 + 3$

Note que a função tem um ponto de máximo em (0, 3).

Observação

Podemos representar um ponto a partir de suas coordenadas. Em um plano cartesiano xy, um ponto de coordenadas x e y é representado pelo par (x, y). A primeira coordenada do par é sempre a coordenada x, e a segunda coordenada é sempre a coordenada y.

Nesses dois exemplos anteriores, as funções tinham apenas um ponto extremo, mas podemos ter mais de um ponto extremo numa mesma função? Como é o cálculo nesse caso? É o que veremos nos próximos exemplos.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função $y(x) = x^4 - 3x^2$. Determine para quais valores de x temos pontos extremos nessa função.

Novamente, para calcular extremos de uma função, derivamos a função e igualamos essa derivada a zero. Derivando a função, temos:

$$y'(x) = \left(x^4 - 3x^2\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas e, ainda, como podemos "tirar" constantes multiplicativas da derivada, temos:

$$y'(x) = \left(x^4\right)' - 3\left(x^2\right)'$$

Lembrando que, ao derivarmos potências, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o expoente anterior diminuído de uma unidade, temos:

$$y'(x) = 4x^3 - 3.2.x$$

$$y'(x) = 4x^3 - 6.x$$

Igualando essa derivada a zero para obtermos os pontos extremos, ficamos com:

$$4x^3 - 6x = 0$$

Como temos x comum aos dois termos (lembre-se de que $x^3 = x \,.\, x^2$), podemos colocá-lo em evidência:

$$(4x^2 - 6)\, x = 0$$

Essa equação fornece duas possibilidades: ou x é igual a zero ou o termo entre parênteses é igual a zero.

A primeira possibilidade já dá o primeiro valor de x onde temos um extremo da função, em $x = 0$.

Analisando a segunda possibilidade, ficamos com:

$$4x^2 - 6 = 0$$

$$4x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Temos, então, mais outros dois valores de x onde há extremos da função, em $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ e em $x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Chegamos a três valores de x que correspondem a extremos da função $y(x) = x^4 - 3x^2$

$$x = 0$$

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Podemos verificar se esses valores de x correspondem a extremos da função analisando o gráfico da função (figura 59).

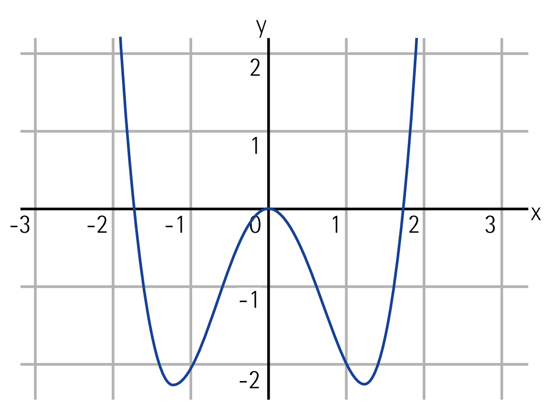

Figura 59 – Gráfico da função $y(x) = x^4 - 3x^2$

Note que temos pontos extremos em x = 0, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $x=+\sqrt{\frac{3}{2}}$, e que $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ é aproximadamente igual a 1,2.

Exemplo 2

Considere a função $y(x) = x^3 - 3x^2$. Determine os pontos extremos dessa função.

Para determinar os pontos extremos, derivamos a função e igualamos essa derivada a zero. Calculando a derivada da função, temos:

$$y'(x)=\left(x^3-3x^2\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas e como podemos "tirar" as constantes multiplicativas das derivadas, chegamos a:

$$y'(x)=\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'$$

Ao derivarmos potências, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o expoente anterior diminuído de uma unidade. Então:

$$y'(x)=3x^2-3\,.\,2\,.\,x$$

$$y'(x)=3x^2-6\,.\,x$$

Igualamos essa derivada a zero para obtermos os pontos extremos:

$$3x^2-6\,.\,x=0$$

Como temos x comum aos dois termos, podemos colocá-lo em evidência:

$$(3x-6)\,.\,x=0$$

Com isso, temos duas possibilidades: ou x = 0 ou o termo entre parênteses é igual a zero.

A primeira possibilidade já dá a coordenada x do primeiro extremo, em x = 0.

Analisando a segunda possibilidade, temos:

$$3x-6=0$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

Logo, o segundo extremo ocorre para x = 2.

Como foram solicitados os pontos extremos, não apenas os valores de x, precisamos calcular o valor da função nesses pontos.

Para x = 0, ficamos com:

$$y(0) = 0^3 - 3 \,.\, 0^2$$

$$y(0) = 0$$

Logo, o primeiro extremo tem coordenadas x = 0 e y = 0, sendo, portanto, o ponto (0, 0).

Para x = 2, ficamos com:

$$y(2) = 2^3 - 3 \,.\, 2^2$$

$$y(2) = 8 - 3 \,.\, 4$$

$$y(2) = 8 - 12$$

$$y(2) = -4$$

Logo, o segundo extremo tem coordenadas x = 2 e y = -4, sendo, portanto, o ponto (2, -4).

Concluímos que os pontos extremos da função $y(x) = x^3 - 3x^2$ são (0, 0) e (2, -4). Para verificar se esses pontos são realmente extremos da função, devemos analisar o seu gráfico, apresentado na figura a seguir.

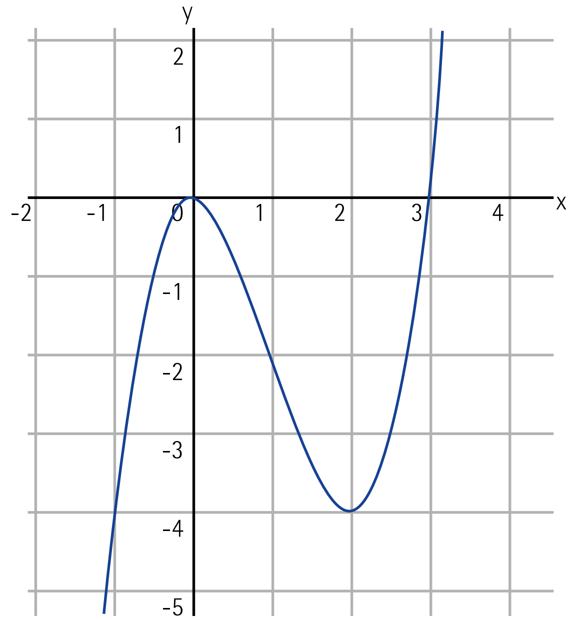

Figura 60 – Gráfico da função $y(x) = x^3 - 3x^2$

Note que a função tem como pontos extremos (0, 0) e (2, -4).

8 GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Quando tratamos de máximos e de mínimos de funções, chegamos a ver alguns exemplos com funções não elementares, ou seja, funções que não são funções de 1º nem do 2º grau, exponenciais ou trigonométricas. Vimos também como encontrar pontos de máximo e de mínimo de funções, além de como descobrir se a função é localmente crescente ou decrescente.

Lembrete

Aprendemos que, em pontos extremos, sejam eles de máximo ou de mínimo, a derivada da função é igual a zero.

Também aprendemos que: uma função é localmente crescente na vizinhança de um ponto se, nesse ponto, sua derivada é positiva; e uma função é localmente decrescente na vizinhança de um ponto se, nesse ponto, sua derivada é negativa.

Além de pontos de máximo e de mínimo e da informação sobre o comportamento local de funções, pontos de inflexão são fundamentais para esboçarmos gráficos de funções.

8.1 Pontos de inflexão

Chamamos de ponto de inflexão o ponto onde dada função muda a sua curvatura. Na figura a seguir, temos um exemplo de ponto de inflexão no gráfico da função $y(x) = x^3 + 1$.

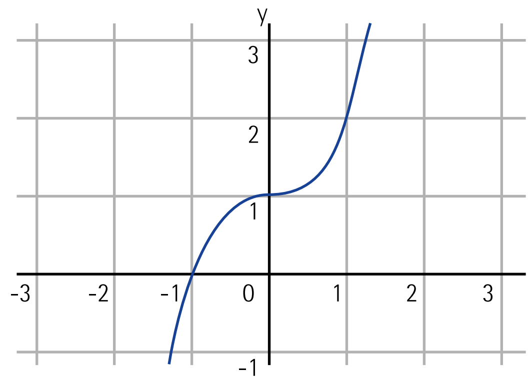

Figura 61 – Gráfico da função $y(x) = x^3 + 1$, com ponto de inflexão em $x = 0$

Note que, no ponto de inflexão, a função muda de curvatura.

Agora, considere uma função f(x) diferenciável duas vezes. Dizemos que um ponto c é ponto de inflexão de f(x) quando:

$$f''(c) = 0$$

Então, para estudarmos os pontos de inflexão de uma função, devemos obter a derivada de segunda ordem da função e igualar essa derivada a zero.

Nos exemplos a seguir, detalharemos o estudo dos pontos de inflexão de funções.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = x^3$. Determine seu ponto de inflexão.

O ponto de inflexão da função é obtido derivando-a duas vezes e igualando essa derivada a zero.

Calculando a derivada da função y(x), temos:

$$y'(x) = \left[x^3\right]'$$

Quando derivamos potências, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o expoente anterior diminuído de uma unidade. Logo:

$$y'(x) = 3 \, . \, x^2$$

Calculando a segunda derivada, temos:

$$y'(x) = \left[3 \,.\, x^2\right]'$$

Lembrando que 3 é uma constante multiplicativa, que pode ser "retirada" da derivada, ficamos com:

$$y''(x) = 3 \,.\, \left[x^2\right]'$$

$$y''(x) = 3 \,.\, 2 \,.\, x$$

$$y''(x) = 6 \,.\, x$$

O ponto de inflexão é obtido igualando-se a segunda derivada da função a zero. Assim:

$$6x = 0$$

$$x = \frac{0}{6}$$

$$x = 0$$

Concluímos que o ponto de inflexão da função $y(x) = x^3$ ocorre na abscissa $x = 0$. Calculando o valor da função em $x = 0$, temos:

$$y(0) = 0^3$$

$$y(0) = 0$$

Então, o ponto de inflexão da função $y(x) = x^3$ ocorre no ponto de coordenadas $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, no ponto (0, 0). Para verificarmos se isso está correto, podemos analisar o gráfico da função (figura 62).

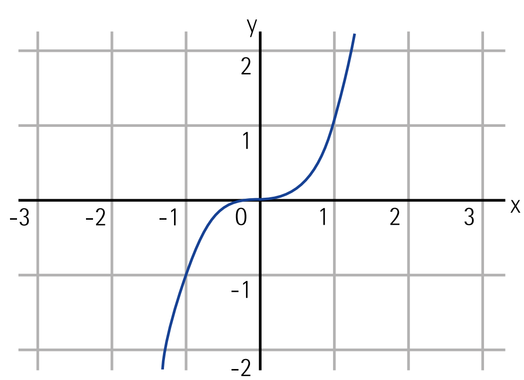

Figura 62 – Gráfico da função $y(x) = x^3$, com ponto de inflexão em (0, 0)

Observação

O ponto (0, 0) também é chamado de origem dos eixos coordenados.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = x^5 + 3x^2$. Determine o valor de x no ponto de inflexão dessa função.

Vimos que, no ponto de inflexão, a derivada de segunda ordem da função é igual a zero. Calculando, então, a derivada da função y(x), temos:

$$y'(x) = \left[x^5 + 3 \,.\, x^2\right]'$$

Lembrando que a derivada da soma é a soma das derivadas, temos:

$$y'(x) = \left[x^5\right]' + \left[3 \,.\, x^2\right]'$$

Como já sabemos, quando derivamos potências, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o expoente anterior diminuído de uma unidade. Além disso, as constantes multiplicativas podem ser "retiradas" das derivadas. Logo:

$$y'(x) = 5 \,.\, x^4 + 3 \,.\, 2 \,.\, x$$

$$y'(x) = 5 \,.\, x^4 + 6 \,.\, x$$

Calculando novamente a derivada, ficamos com:

$$y''(x) = \left[5 \,.\, x^4 + 6 \,.\, x\right]'$$

$$y''(x) = 5 \,.\left[x^4\right]' + 6 \,.\, [x]'$$

Lembrando que a derivada de x, em relação a x, é igual a 1, temos:

$$y''(x) = 5 \,.\, 4 \,.\, x^3 + 6$$

$$y''(x) = 20 \,.\, x^3 + 6$$

Igualando a derivada de segunda ordem a zero para obtermos o ponto de inflexão, temos:

$$20\,.\,x^3 + 6 = 0$$

$$20\,.\,x^3 = -6$$

$$x^3 = -\frac{6}{20}$$

$$x^3 = -\frac{3}{10}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{10}}$$

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3}{10}}$$

Então, o ponto de inflexão da função $y(x) = x^5 + 3x^2$ ocorre na abscissa $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{10}}$. Calculando esse valor, temos x ~ -0,67. Podemos verificar se esse valor está correto analisando o gráfico da função, apresentado na figura a seguir.

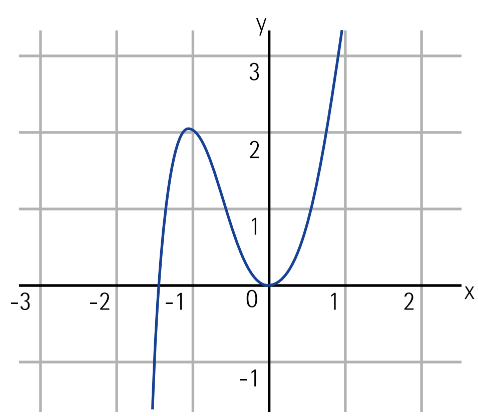

Figura 63 – Gráfico da função $y(x) = x^5 + 3x^2$. A função tem ponto de inflexão em x~ -0,67

8.2 Concavidade

Com informações dos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão de funções, podemos analisar o crescimento e a concavidade de tais funções.

Os pontos de máximo e de mínimo são os pontos onde a função altera seu regime de crescimento. Já os pontos de inflexão são os pontos onde a função altera sua concavidade.

Considere uma função f(x) diferenciável duas vezes. Nesse caso, temos o seguinte:

- a concavidade da função em dada região é para cima se $f''(x)$ é positiva;
- a concavidade é para baixo se $f''(x)$ é negativa.

Isso está resumido na tabela a seguir.

Tabela 9 – Concavidade de funções

$f''(x) > 0$	Concavidade para cima
$f''(x) < 0$	Concavidade para baixo

Nos exemplos a seguir, vamos detalhar o estudo da concavidade de funções.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função $y(x) = x^5$. Estude a concavidade dessa função.

Para estudar a concavidade, precisamos primeiro determinar os pontos de inflexão da função. Os pontos de inflexão são determinados derivando-se a função duas vezes e igualando a derivada de segunda ordem a zero.

Calculando a derivada da função, temos:

$$y'(x) = \left[x^5\right]'$$

$$y'(x) = 5 \,.\, x^4$$

Derivando novamente, temos:

$$y''(x) = \left[5 \,.\, x^4\right]'$$

Como 5 é uma constante multiplicativa, ficamos com:

$$y''(x) = 5 \,.\, \left[x^4\right]'$$

$$y''(x) = 5 \,.\, 4 \,.\, x^3$$

$$y''(x) = 20 \,.\, x^3$$

Igualando a segunda derivada da função a zero, temos:

$$20\,.\,x^3 = 0$$

$$x^3 = \frac{0}{20}$$

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

Logo, o ponto de inflexão tem abscissa x = 0.

Para estudarmos a concavidade da função, vamos analisar o sinal da segunda derivada da função para um valor de x menor do que a abscissa do ponto de inflexão e para outro valor de x maior do que a abscissa do ponto de inflexão. Para facilitar os cálculos, vamos escolher x = -1 e x = 1 (lembrando que o ponto de inflexão é em x = 0).

Calculando a segunda derivada para x = -1, ficamos com:

$$y''(-1) = 20\,.\,(-1)^3$$

$$y''(-1) = 20\,.\,(-1)$$

$$y''(-1) = -20$$

Como y(-1) é negativo, a função nessa região tem concavidade para baixo.

Calculando a segunda derivada para x = 1, ficamos com:

$$y''(1) = 20\,.\,(1)^3$$

$$y''(1) = 20\,.\,1$$

$$y''(1) = 20$$

Como y(1) é positivo, a função nessa região tem concavidade para cima.

Nossas conclusões podem ser verificadas analisando o gráfico da função, apresentado na figura 64.

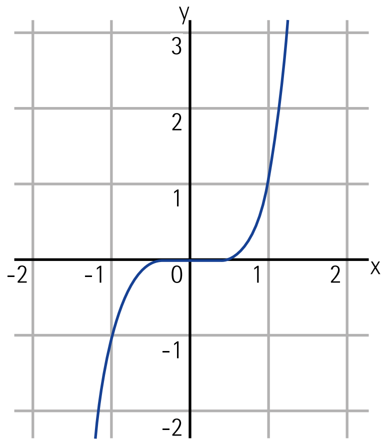

Figura 64 – Gráfico da função $y(x) = x^5$

Note que a função tem ponto de inflexão em x = 0, concavidade para baixo para x < 0 e concavidade para cima para x > 0.

Exemplo 2

Considere a função $y(x) = x^3 - x^2 - x$. Estude a concavidade dessa função.

Para estudar a concavidade, devemos primeiro determinar os pontos de inflexão, igualando a segunda derivada a zero. Depois, estudamos a concavidade analisando o sinal da segunda derivada para pontos acima e abaixo dos pontos de inflexão.

Derivando a função, temos:

$$y'(x) = \left(x^3 - x^2 - x\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas, temos:

$$y'(x) = \left(x^3\right)' - \left(x^2\right)' - (x)'$$

$$y'(x) = 3 \,.\, x^2 - 2 \,.\, x - 1$$

Derivando novamente, temos:

$$y''(x) = \left(3 \,.\, x^2 - 2 \,.\, x - 1\right)'$$

Lembrando que constantes multiplicativas "saem" da derivada e que a derivada de uma constante é igual a zero, ficamos com:

$$y''(x) = 3\left(x^2\right)' - 2.(x)' - (1)'$$

$$y''(x) = 3.2.x - 2.1 - 0$$

$$y''(x) = 6.x - 2$$

Igualando a segunda derivada a zero, ficamos com:

$$6x - 2 = 0$$

$$6x = 2$$

$$x = \frac{2}{6}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Logo, o ponto de inflexão da função ocorre em $x = \frac{1}{3}$.

Para analisarmos a concavidade da função, vamos analisar o sinal da segunda derivada para um ponto acima e para outro ponto abaixo desse ponto de inflexão. Para facilitar os cálculos, vamos considerar x = 0 e x = 1.

Substituindo x = 0 na derivada de segunda ordem da função, temos:

$$y''(0) = 6 . 0 - 2$$

$$y''(0) = 0 - 2$$

$$y''(0) = -2$$

Como y''(0) é negativa, a função tem concavidade para baixo nessa região.

Substituindo x = 1 na derivada de segunda ordem da função, temos:

$$y''(1) = 6\ .\ 1 - 2$$

$$y''(1) = 6 - 2$$

$$y''(1) = 4$$

Como y''(0) é positiva, a função tem concavidade para cima nessa região.

Podemos conferir se nossas conclusões estão corretas analisando o gráfico da função (figura 65).

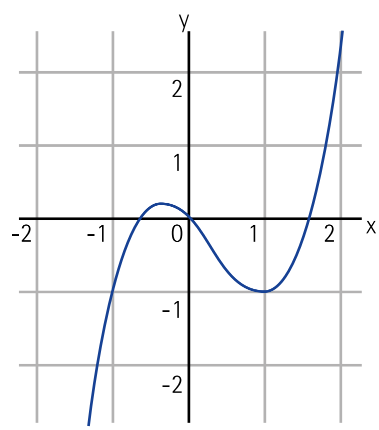

Figura 65 – Gráfico da função $y(x) = x^3 - x^2 - x$

Note que a função tem ponto de inflexão em $x = \frac{1}{3}$, concavidade para baixo abaixo do ponto de inflexão e concavidade para cima acima do ponto de inflexão.

A partir do estudo do regime de crescimento e da concavidade de uma função, podemos esboçar o seu gráfico. Contudo, para esboçar o gráfico de uma função, precisamos estudar os seus limites para valores de x "muito grandes e cada vez maiores", tanto para o lado de x negativo quanto para x positivo. Esses valores "muito grandes e cada vez maiores" são representados por ∞ (infinito).

8.3 Limites assintóticos

Vimos como determinar pontos de máximo, de mínimo e de inflexão de uma função, bem como estudar o comportamento quanto ao crescimento, ao decrescimento e à concavidade dessa função. E quanto aos extremos da função? Ela se aproxima de zero para valores de x muito grandes ou ela aumenta indefinidamente? As respostas a essas questões são encontradas quando estudamos os limites da função no infinito, tanto do lado positivo do eixo x (quando x tende a +∞) quanto do lado negativo (-∞).

Nos exemplos a seguir, vamos calcular os limites em -∞ e +∞ das funções que usamos de exemplo ao estudarmos a concavidade de funções.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = x^5$. Estime o comportamento dessa função para valores extremos de x, calculando seu limite para x tendendo a -∞ e para x tendendo a +∞.

Calculando o limite para +∞, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} x^5$$

Nesse caso, temos um número muito grande elevado à quinta potência, o que faz com que esse número fique maior ainda. Logo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$$

Para valores muito grandes de x positivo, a função tende a valores muito grandes de y.

Calculando o limite para -∞, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} x^5$$

Nesse caso, temos um número negativo muito grande elevado à quinta potência, o que faz com que esse número fique maior ainda; porém, como estamos elevando um número negativo a uma potência ímpar, o sinal negativo se mantém. Logo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^5 = -\infty$$

Para valores muito grandes de x, pelo lado negativo, a função tende a valores muito grandes de y, mas negativos.

Esse comportamento pode ser verificado nos extremos do gráfico da figura 64.

Para a função que vimos no segundo exemplo, temos o comportamento no infinito detalhado a seguir.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = x^3 - x^2 - x$. Estime o comportamento da função para valores extremos de x, calculando seu limite para x tendendo a $-\infty$ e para x tendendo a $+\infty$.

Aqui, o termo dominante é o de maior grau, já que o crescimento de x^3 é maior que o crescimento das funções x^2 e x. Então, para analisar o comportamento da função no infinito, podemos analisar o comportamento do termo de maior grau.

Para x tendendo a $+\infty$, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - x^2 - x = +\infty$$

Para x tendendo a $-\infty$, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - x^2 - x = -\infty$$

Assim, esperamos que, quando *x* aumente para o lado positivo, o gráfico também cresça, e que, quando x aumente para valores negativos, o gráfico também aumente para valores negativos. Esse comportamento é verificado nos extremos do gráfico da figura 65.

Saiba mais

Nos exemplos anteriores, aplicamos o fato de que, quando calculamos potências ímpares de números negativos, o resultado é negativo. Essas funções são exemplos de funções ímpares. Quando o expoente é par, temos funções pares. Para saber mais sobre funções pares e ímpares, visite o site:

FUNÇÕES pares e ímpares: gráficos. *Khan Academy*, 2022. Disponível em: https://bit.ly/35Jrg1D. Acesso em: 5 abr. 2022.

Com as ferramentas vistas neste tópico, complementadas pelo conteúdo do restante do livro-texto, temos condições de esboçar o gráfico de qualquer função.

Resumo

Começamos a unidade II vendo como derivar funções compostas, ou seja, uma função de função, usando a regra da cadeia:

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = g'(x) \,.\, f'(u)\big|_{u = g(x)}$$

Portanto, a derivada da função composta é a derivada da função do argumento multiplicada pela derivada da função externa, calculada no argumento original.

Vimos, na sequência, a regra de L'Hopital, que diz que, para duas funções f(x) e g(x) deriváveis, em que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ resulta em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, temos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Estudamos os máximos e os mínimos de funções. Vimos que, nos pontos de máximo ou de mínimo, a derivada da função é igual a zero. A partir dos pontos de máximo e de mínimo, analisamos o comportamento local de uma função, identificando se ela é localmente crescente ou localmente decrescente. A condição para termos uma função localmente crescente é que sua derivada naquele ponto seja positiva. E a condição para termos uma função localmente decrescente é que sua derivada naquele ponto seja negativa.

Observamos os pontos de inflexão de uma função. A segunda derivada da função nos pontos de inflexão é igual a zero. A partir dos pontos de inflexão, estudamos a concavidade de funções. Dizemos que uma função tem concavidade para cima em dada região se a segunda derivada dessa função em um ponto da região é positiva. Dizemos que uma função tem concavidade para baixo em dada região se a segunda derivada dessa função em um ponto da região é negativa.

Podemos resumir a questão de pontos de máximo, pontos de mínimo, pontos de inflexão, de comportamento local e de concavidade em uma tabela.

Tabela 10 – Comportamento de funções

$f'(x) = 0$	Ponto de máximo ou de mínimo
$f'(x) > 0$	Comportamento local crescente
$f'(x) < 0$	Comportamento local decrescente
$f''(x) = 0$	Ponto de inflexão
$f''(x) > 0$	Concavidade local para cima
$f''(x) < 0$	Concavidade local para baixo

Por fim, vimos que é necessário analisar o limite assintótico das funções, ou seja, para x tendendo a $-\infty$ e a $+\infty$, para esboçarmos seus gráficos.

Exercícios

Questão 1. Em relação ao cálculo de derivadas, avalie as afirmativas.

I – A derivada de primeira ordem de $y = \frac{2}{x^4}$ é $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$

II – As derivadas de primeira ordem e de terceira ordem de $f(x) = e^{-x}$ são iguais.

III – A função $y = |x-3|$ não tem derivada em $x = 3$.

É correto o que se afirma em:

A) I, II e III.

B) II e III, apenas.

C) I e III, apenas.

D) II, apenas.

E) III, apenas.

Resposta correta: alternativa B.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa incorreta.

Justificativa: a derivada de primeira ordem de $y = \frac{2}{x^4}$ é $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{x^5}$

Vejamos:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{x^4}\right)' = 2\left(x^{-4}\right)' = 2\left(-4x^{-4-1}\right) = -8x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$$

II – Afirmativa correta.

Justificativa: vejamos as derivadas até terceira ordem de $f(x) = e^{-x}$:

$$f'(x) = \left(e^{-x}\right)' = (-x)'e^{-x} = (-1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$$

$$f''(x) = \left(-e^{-x}\right)' = -(-x)'e^{-x} = -(-1)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^{-x}$$

$$f'''(x) = \left(e^{-x}\right)' = (-x)'e^{-x} = (-1)e^{-x} \Rightarrow f'''(x) = -e^{-x}$$

Vemos que

$$f'(x) = f'''(x) = -e^{-x}$$

III – Afirmativa correta.

Justificativa: na figura a seguir, vemos o gráfico de $y = |x - 3|$.

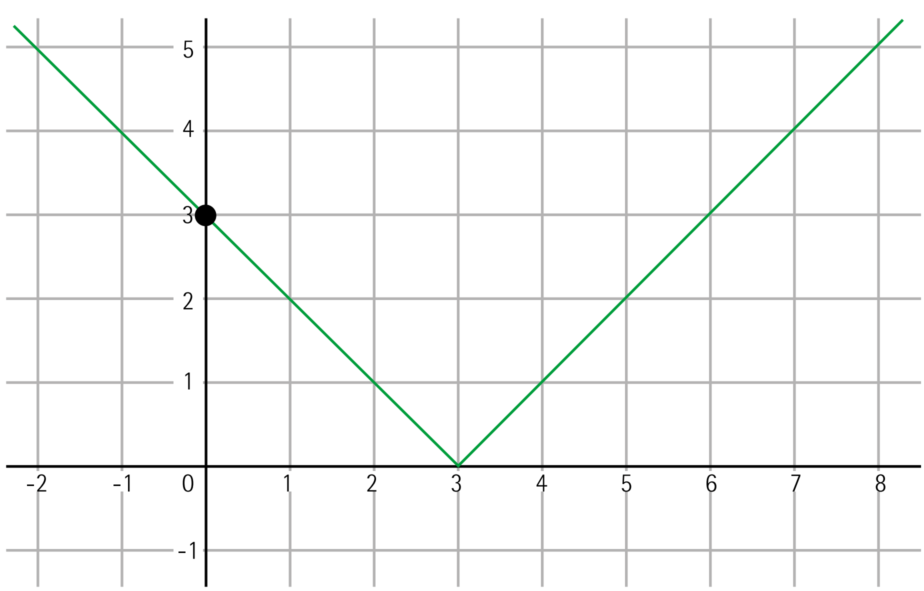

Figura 66

Vemos que esse gráfico forma um "bico" em $x = 3$, ou seja, não admite reta tangente em $x = 3$. Logo, a função $y = |x - 3|$ não tem derivada em $x = 3$.

Questão 2. Em relação à função $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, avalie a afirmativas.

I – A função $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ é decrescente em $0 < x < \frac{8}{3}$

II – A função $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ tem concavidade voltada para baixo em $x < \frac{4}{3}$

III – O ponto $m = \left(\frac{8}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ é ponto de mínimo de $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$

É correto o que se afirma em:

A) I, II e III.

B) II e III, apenas.

C) I e III, apenas.

D) II, apenas.

E) III, apenas.

Resposta correta: alternativa A.

Análise da questão

Vamos fazer o esboço do gráfico da função usando os passos a seguir. Com isso, analisaremos as afirmativas propostas no enunciado.

Passo 1. Derivada de 1ª ordem de y = f(x)

A derivada de $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ é $f'(x) = 3x^2 - 8x$, conforme mostrado a seguir.

$$f'(x) = \left(x^3 - 4x^2 + 5\right)' = \left(x^3\right)' - 4\left(x^2\right)' + (5)' = \left(3x^2\right) - 4\left(2x^1\right) + (0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

Passo 2. Raízes de $y' = f'(x)$

Para acharmos as raízes de $y' = f'(x)$, fazemos $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x = 0$$

Para resolvermos $3x^2 - 8x = 0$, podemos fatorar a expressão, colocando x em evidência.

$$3x^2 - 8x = x(3x - 8) = 0$$

Como temos um produto, para que o resultado seja zero, ou o primeiro fator é zero ou o segundo fator é zero. Assim:

$$x = 0$$

$$3x - 8 = 0 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

Logo, as raízes de $y' = f'(x)$ são $x = 0$ e $x = \frac{8}{3}$

Passo 3. Estudo do sinal de $y' = f'(x)$ e análise da variação de $y = f(x)$

No caso, $f'(x) = 3x^2 - 8x$ é uma função do 2º grau de raízes $x = 0$ e $x = \frac{8}{3}$. Trata-se de uma parábola de concavidade voltada para cima, visto que o coeficiente do termo em x^2 é positivo.

Logo, temos o estudo de sinal a seguir.

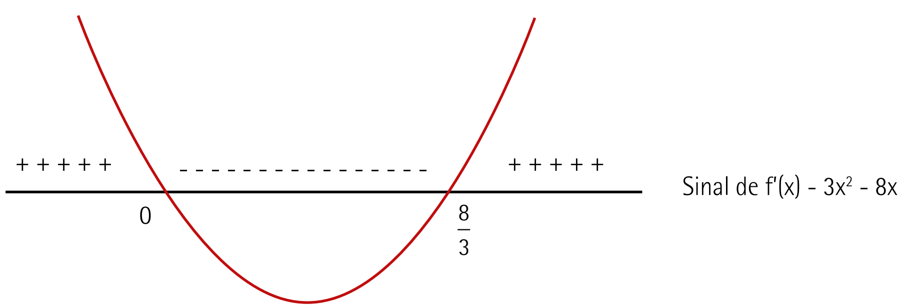

Figura 67

Assim, concluímos o que segue.

- Como $y' = f'(x) > 0$ em $x < 0$ e em $x > \frac{8}{3}$, vemos que $y = f(x)$ é crescente em $x < 0$ e em $x > \frac{8}{3}$.
- Como $y' = f'(x) < 0$ em $0 < x < \frac{8}{3}$, vemos que $y = f(x)$ é decrescente em $0 < x < \frac{8}{3}$.

Passo 4. Derivada de 2ª ordem de $y = f(x)$

A derivada de 2ª ordem de $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ é $f''(x) = 6x - 8$, conforme mostrado a seguir.

$$f''(x) = \left(3x^2 - 8x\right)' = 3\left(x^2\right) - 8\left(x\right)' = 3(2x) - 8(1)$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

Passo 5. Raiz de $y'' = f''(x)$

Para acharmos a raiz de $y'' = f''(x)$, fazemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0$$

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{6} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Passo 6. Estudo do sinal de $y'' = f''(x)$ e análise da concavidade de $y = f(x)$

No caso, $f''(x) = 6x - 8$ é uma função do 1º grau de raiz $x = \frac{4}{3}$. Trata-se de uma reta inclinada para a direita, visto que o coeficiente angular é positivo.

Logo, temos o estudo de sinal a seguir.

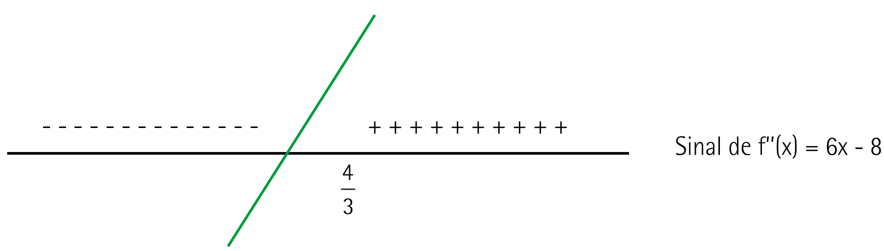

Figura 68

Assim, concluímos o que segue.

- Como $y'' = f''(x) < 0$ em $x < \frac{4}{3}$, vemos que $y = f(x)$ tem concavidade voltada para baixo em $x < \frac{4}{3}$.
- Como $y'' = f''(x) > 0$ em $x > \frac{4}{3}$, vemos que $y = f(x)$ tem concavidade voltada para cima em $x > \frac{4}{3}$.

Passo 7. Pontos críticos de $y = f(x)$

Os pontos críticos de $y = f(x)$, se existirem, são determinados por $f'(x) = 0$.

No caso, como calculado no passo 2, tais pontos têm abscissas $x = 0$ e $x = \frac{8}{3}$.

As derivadas de 2ª ordem nesses pontos são:

$$f''(0) = 6(0) - 8 = -8$$

$$f''\left(\frac{8}{3}\right) = 6\left(\frac{8}{3}\right) - 8 = \frac{48-24}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Assim, concluímos o que segue.

- Como $f'(0) = 0$ e $f''(0) < 0$, x = 0 é abscissa de ponto de máximo de $y = f(x)$.
- Como $f'\left(\frac{8}{3}\right) = 0$ e $f''\left(\frac{8}{3}\right) > 0$, $x = \frac{8}{3}$ é abscissa de ponto de mínimo de $y = f(x)$.

Se substituirmos x por 0 em $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, obteremos:

$$y = f(0) = (0)^3 - 4(0)^2 + 5 = 5$$

Logo, M = (0,5) é ponto de máximo de $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$

Se substituirmos x por $\frac{8}{3}$ em $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, obteremos:

$$y = f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 5 = \frac{512}{27} - \frac{256}{9} + 5 = \frac{512 - 768 + 135}{27} = -\frac{121}{27}$$

Logo, $m = \left(\frac{8}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ é ponto de máximo de $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$

Passo 8. Esboço do gráfico de $y = f(x)$

Com as informações obtidas nos passos anteriores, podemos esboçar o gráfico de $y = f(x)$, mostrado na figura a seguir.

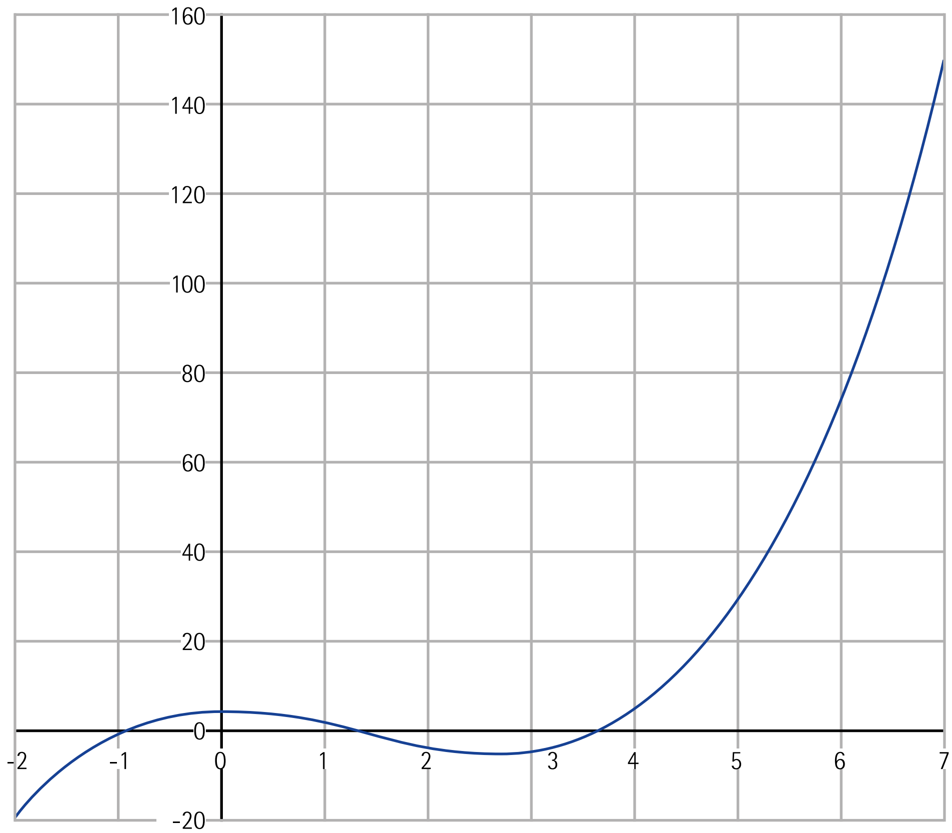

Figura 69 – Gráfico de $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$

REFERÊNCIAS

Audiovisuais

GRÁFICO de funções - GeoGebra. Yotube por Alex Carcado. [s.l.], abr. 2017. 1 vídeo (28min25s). Disponível em: https://bit.ly/3uWgSMK. Acesso em: 31 mar. 2022.

GRAUS e radianos na calculadora científica. Youtube por Prof. Izaias Neri. [s.l.], jul. 2015. 1 vídeo (2min57s). Disponível em: https://bit.ly/3tTE27c. Acesso em: 30 mar. 2022.

A FUNÇÃO tangente. Youtube por Portal da matemática OBMEP. [s.l.], jun. 2017. 1 vídeo (10min25s). Disponível em: https://bit.ly/3JaHfU7. Acesso em: 31 mar. 2022.

Textuais

ADAMI, A. M.; DORNELLES, A. A. F.; LORANDIL, M. M. *Pré-cálculo*. São Paulo: Bookman, 2015.

ADAMS, C.; ROGAWSKI, J. *Cálculo*: volume 1. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*: volume 1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

AXLER, S. *Pré-cálculo*: uma preparação para o cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BARBOSA, A. C. C. *Cálculo diferencial e integral de funções de uma variável com Python*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2020.

BOULOS, P.; ABBUD, Z. I. *Cálculo diferencial e integral*: volume 1, com pré-cálculo. São Paulo: Pearson Universidades, 1999.

CAMARGO, I.; BOULOS, P. *Geometria analítica*: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2004.

DEMANA, F. D. *et al. Pré-cálculo*: gráfico, numérico e algébrico. 2. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2013.

DEMONSTRAÇÃO da fórmula de Bhaskara. *Khan Academy*, 2022. Disponível em: https://bit.ly/36KLfxx. Acesso em: 31 mar. 2022.

DEMONSTRAÇÃO da identidade trigonométrica fundamental. *Khan Academy*, 2022. Disponível em: https://bit.ly/3DzvcPe. Acesso em: 31 mar. 2022.

FUNÇÕES pares e ímpares: gráficos. *Khan Academy*, 2022. Disponível em: https://bit.ly/35Jrg1D. Acesso em: 5 abr. 2022.

INTRODUÇÃO à composição de funções. *Khan Academy*, 2022. Disponível em: https://bit.ly/3NHBYXP. Acesso em: 4 abr. 2022.

DOI, C. M. *Como aplicar derivadas e integrais*: 105 exemplos detalhadamente explicados. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2021.

DOI, C. M. *Como visualizar e resolver limites*: 100 exercícios detalhadamente explicados. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2016.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*: funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2016.

GEOGEBRA. *Calculadora*. [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3LppEJu. Acesso em: 31 mar. 2022.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. *Matemática fundamental*: 2º grau. Volume único. São Paulo: FTD, 1994.

GOMES, F. M. *Pré-c*álculo: operações, equações, funções e sequências. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*: volume 1. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HOFFMANN, L. D. *Cálculo, um curso moderno e suas aplicações*. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Habra, 1994.

MACEDO, R. S. *Pré-cálculo*: conceitos essenciais para estudantes na área de exatas. [e-Book Kindle]. 2020.

MATEMÁTICA DIDÁTICA. *Colocando fatores comuns em evidência*. [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3Lw9QVu. Acesso em: 31 mar. 2022.

MATEMÁTICA SIMPLIFICADA. *Função de Heaviside ou degrau unitário*. 27 jul. 2021. Disponível em: https://bit.ly/3Du7qns. Acesso em: 31 mar. 2022.

MONTEIRO, N. *Guia passo a passo para o cálculo de limites (cálculo diferencial e integral)*. [e-Book Kindle]. 2021.

PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*. Moscou: Mir, 1977.

RYAN, M. *Cálculo para leigos*. Rio de Janeiro: Alta Books, 2014.

SAFIER, F. *Pré-cálculo*. Coleção Schaum. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2011.

SILVA, S. M.; SILVA, E. M.; SILVA, E. M. *Matemática básica para cursos superiores*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Pearson Universidades, 1996. v. 1.

STEWART, J. *Cálculo*. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. v. 1.

THOMAS, G. B.; GIORDANO, W. H. *Cálculo*: volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

VIEIRA, N. S. M.; BATISTA, S. C. F.; AZEVEDO, C. L. V. R. *O número de Euler "e"*. [e-Book Kindle]. [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3wNBHwa. Acesso em: 30 mar. 2022.

UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA
Interativa

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000