UNIP UNIVERSIDADE PAULISTA

Interativa

Cálculo para Computação

Autora: Fabíola Mariana Aguiar Ribeiro
Colaboradoras: Profa. Vanessa Santos Lessa
Profa. Christiane Mazur Doi

Professora conteudista: Fabíola Mariana Aguiar Ribeiro

Bacharela em Física, com habilitação em Astronomia pela Universidade de São Paulo (USP-2001). Doutora em Astrofísica pela mesma instituição (2006). Realizou estágio de pós-doutoramento na USP no período de 2006 a 2008. Atualmente, ministra aulas na Universidade Paulista (UNIP) em disciplinas de física, cálculo e programação para o ciclo básico dos cursos de Engenharia. Faz parte da Comissão de Qualificação e Avaliação (CQA) desde 2009, colaborando com a elaboração e revisão de materiais didáticos e com a avaliação e compilação de resultados de avaliações internas e externas.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R484f Ribeiro, Fabíola Mariana Aguiar.

Cálculo para Computação / Fabíola Mariana Aguiar Ribeiro. – São Paulo: Editora Sol, 2022.

128 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Resistência elétrica. 2. Óptica. 3. Ondas. I. Título.

CDU 53

U515.28 – 22

Material Didático

Comissão editorial:
Profa. Dra. Christiane Mazur Doi
Profa. Dra. Angélica L. Carlini
Profa. Dra. Ronilda Ribeiro

Apoio:
Profa. Cláudia Regina Baptista
Profa. Deise Alcantara Carreiro

Projeto gráfico:
Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:
Bruna Baldez
Jaci Albuquerque

Sumário

Cálculo para Computação

Unidade II

APRESENTAÇÃO

Esta disciplina tem como objetivo geral apresentar ao estudante de ciência da computação os elementos básicos do estudo de funções. O estudo de funções e de seus gráficos é fundamental para compreendermos o comportamento de fenômenos modelados matematicamente. Como ferramentas para este estudo, abordaremos o conceito e o cálculo de limites de funções e faremos uma introdução ao cálculo diferencial.

Não temos a intenção de tratar desses assuntos com extremo rigor teórico, abordagem frequentemente encontrada nos livros de cálculo. O propósito é apresentar o conteúdo de forma prática e aplicada, com foco na resolução de exemplos.

Conhecer o comportamento de funções é importante para o aluno em diversas áreas do curso. Como exemplo de aplicação do estudo de funções em computação, temos o estudo de eficiência de algoritmos. A computação gráfica também é uma área que demanda conhecimentos sobre funções e seus comportamentos.

Além de transmitir conhecimentos sobre o estudo de funções, limites e cálculo diferencial, esta disciplina tem como objetivo, assim como os demais conteúdos de matemática do curso, aprimorar o raciocínio lógico.

INTRODUÇÃO

Neste livro-texto, apresentamos o conceito de funções que são essenciais para o aluno de ciência da computação. Limites e cálculo diferencial são ferramentas utilizadas para o estudo dessas funções.

O conteúdo é dividido em duas unidades. Na unidade I, iniciamos o estudo dos diversos tipos de função, suas características e seus gráficos. São abordadas funções constantes, funções do 1º e do 2º grau, função módulo (ou valor absoluto), funções exponenciais, funções logarítmicas e funções trigonométricas. Também é estudada a continuidade de funções.

Seguimos, então, para o estudo de limites, detalhando o conceito intuitivo de limites e as técnicas para o cálculo. Tratamos dos limites de funções contínuas, dos limites de funções com singularidade e dos limites de funções descontínuas. Abordamos também operações com limites. São apresentados diversos exemplos de cálculos de limites.

Na sequência, chegamos ao cálculo diferencial propriamente dito, estudando o conceito e a interpretação geométrica de derivada. É apresentada a definição de derivada a partir de limite. Também são expostas as técnicas de derivação para função constante, funções polinomiais, soma de funções, produto de uma constante por uma função, raízes, funções seno e cosseno, função exponencial de base e e função logaritmo neperiano. São descritas as regras do produto e do quociente e detalhados diversos exemplos de cálculo das derivadas.

Finalizamos a unidade I analisando as derivadas de ordem superior, situação em que derivamos mais de uma vez uma função.

Já na unidade II, discutimos a derivação de funções compostas, ou seja, as derivadas de funções de funções. Para calcular essas derivadas, é aplicada uma regra chamada regra da cadeia. São apresentados diversos exemplos de aplicação dessa regra.

Retomamos os limites estudando a regra de L'Hopital para o cálculo de limites de funções que levam a certas indeterminações. Apresentamos exemplos de cálculo de limites utilizando essa regra.

Partimos para o estudo de crescimento de funções, empregando as ferramentas de cálculo diferencial. Realizamos o estudo da determinação da reta tangente a uma função em dado ponto e o estudo do comportamento local de funções, identificando se a função é crescente ou decrescente em dada região. As ferramentas de cálculo são usadas para determinar os pontos extremos de uma função, ou seja, os pontos de máximo ou de mínimo dessa função (se existirem). Demonstramos diversos exemplos de determinação de reta tangente, de pontos de máximo e mínimo e de estudo do comportamento local de funções.

Por fim, abordamos o conceito e a determinação dos pontos de inflexão de uma função. Estudamos o conceito e determinamos a concavidade de funções, além do comportamento assintótico dos gráficos, calculando os limites assintóticos. Apresentamos exemplos de estudo de pontos de inflexão, de concavidade e de limites assintóticos. Assim, terminamos a unidade II aplicando todo o ferramental visto para a análise de gráficos de função.

Como em todo conteúdo de matemática aplicada, devemos focar principalmente no estudo dos exemplos e na realização de exercícios. Tente refazer os exemplos discutidos neste livro-texto, compreendendo o passo a passo antes de iniciar a resolução de exercícios.

Boa leitura e bons estudos!

Unidade I

1 FUNÇÕES E SEUS GRÁFICOS

Podemos definir **função** da seguinte forma: em dois conjuntos não vazios, função é a relação f que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B. Ao conjunto A, é dado o nome de **domínio** da função, indicado por D ou Dom. Ao conjunto B, é dado o nome de **imagem** da função, indicada por Im.

Matematicamente, expressamos a função f de A em B da seguinte maneira:

$f: A \to B$

A figura a seguir faz uma representação do conceito de função. Note que a função pode associar dois elementos distintos do domínio a um único elemento da imagem.

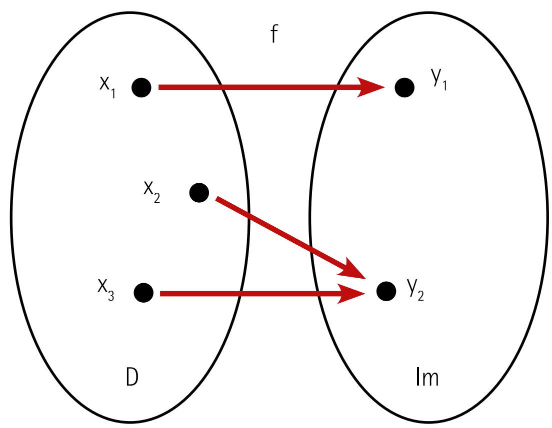

Figura 1 – Representação de uma função f

As funções matemáticas podem ser representadas como equações, o que é mais usual em disciplinas de exatas, ou ainda como tabelas ou gráficos. A equação a seguir mostra essa primeira forma de representação. Na sequência, fazemos sua representação nas formas de tabela e de gráfico.

$y(x) = 2 . x +1$

Note que, no caso, os valores do domínio da função estão associados à variável x, enquanto os valores da imagem da função estão associados à variável y(x).

Tabela 1 – Representação de alguns pontos da função y(x) = 2 . x + 1 na forma de tabela

x	y(x)
-1	-1
0	1
1	3

Para representar uma função na forma de tabela, escolhemos alguns valores de x e, em seguida, usamos a equação da função para calcular os valores de y(x).

Na figura a seguir, temos a representação gráfica de y(x) = 2 . x + 1.

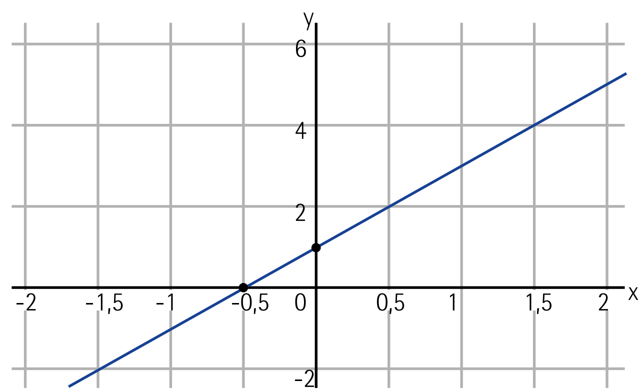

Figura 2 – Representação gráfica, em azul, da função y(x) = 2 . x + 1

Note que o gráfico da função y(x) = 2 . x + 1 pode ser construído a partir dos pontos da tabela 1.

Saiba mais

Uma ferramenta on-line para produzir gráficos é o Geogebra:

GEOGEBRA. *Calculadora*. [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3LppEJu. Acesso em: 31 mar. 2022.

Para mais detalhes sobre como construir gráficos de funções no Geogebra, assista ao vídeo:

GRÁFICO de funções - GeoGebra. Yotube por Alex Carcado. [s.l.], abr. 2017. 1 vídeo (28min25s). Disponível em: https://bit.ly/3uWgSMK. Acesso em: 31 mar. 2022.

Construir gráficos no Geogebra é simples: basta digitar a equação na parte superior esquerda e o gráfico é feito automaticamente (figura 3).

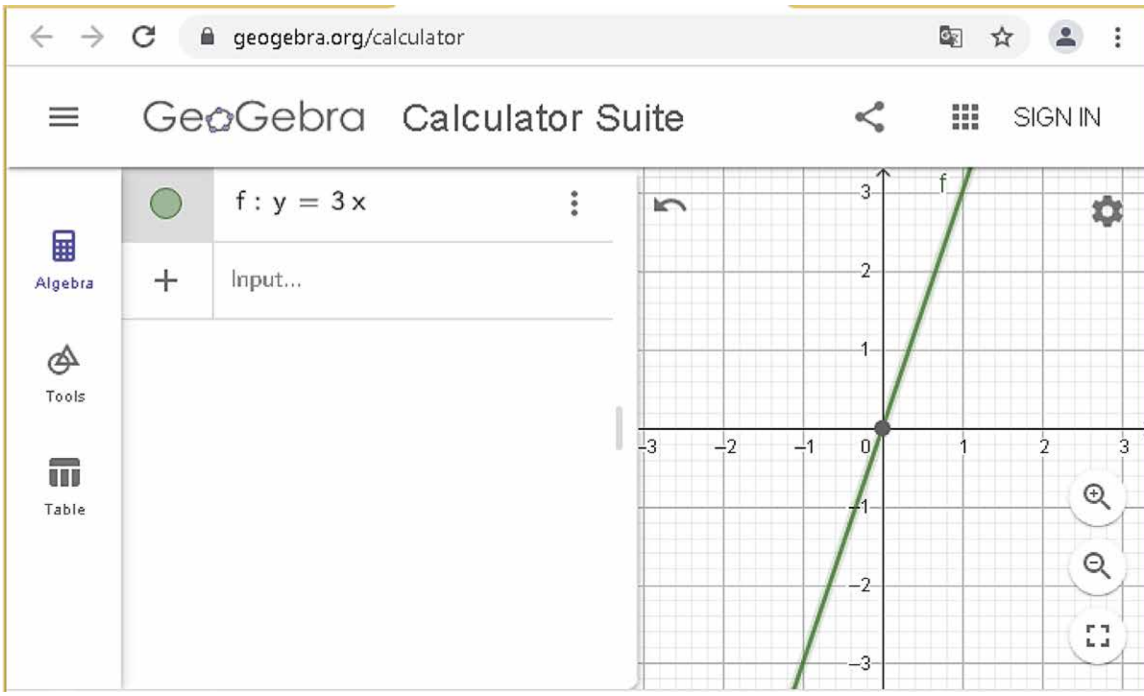

Figura 3 – Exemplo de uso da versão web do Geogebra. A função y = 3x foi digitada na parte superior esquerda e o gráfico foi mostrado automaticamente ao lado

1.1 Funções constantes

Funções constantes são aquelas que não variam, ou seja, independentemente do valor de x, elas assumem o mesmo valor. As equações de funções constantes são representadas da forma a seguir:

$y(x) = c$

Na equação, c é uma constante, ou seja, um número real.

Observação

O conjunto dos números reais inclui números positivos, números negativos, números racionais e números irracionais. Logo, 1, 0, -15, 7/2 e 3,14159... são exemplos de números reais.

Alguns exemplos de funções constantes são: $y(x) = 2$, $y(x) = 0$ e $y(x) = -3/4$.

O gráfico de funções constantes é uma linha horizontal. Na figura a seguir, temos o gráfico de uma função constante. Note que a função assume o mesmo valor, -5, independentemente do valor de x.

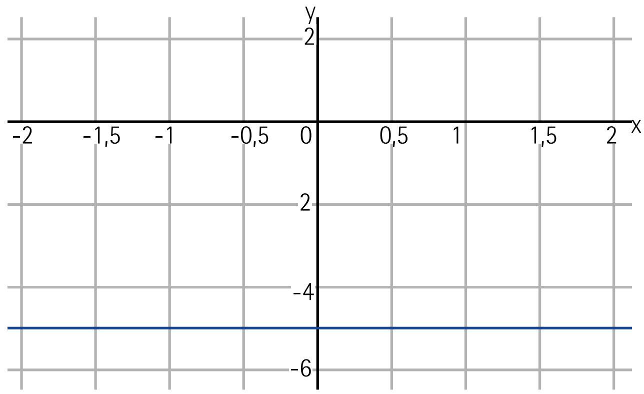

Figura 4 – Gráfico da função y(x) = -5 representado em azul

1.2 Funções do 1º grau

Funções do 1º grau são aquelas representadas por equações do tipo:

$y(x) = a \cdot x + b$

Na equação $y(x) = a \cdot x + b$, a e b são constantes, sendo a diferente de 0. Note que, nessa equação, a variável x está elevada à primeira potência.

Observação

Em matemática, não temos por hábito indicar a potência de valores elevados à primeira potência. Portanto, $x = x^1$.

Quando tratamos de funções do 1º grau, o coeficiente que multiplica a variável, no nosso caso o coeficiente a, é chamado coeficiente angular. Já o coeficiente que aparece somando (ou subtraindo), no nosso caso o coeficiente b, é chamado de coeficiente linear.

Para funções do 1º grau, o coeficiente angular deve ser diferente de zero, ou seja, $a \neq 0$; se não, teríamos uma função constante.

O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta, de forma que funções do 1º grau também são conhecidas como funções lineares.

O coeficiente angular relaciona-se com a inclinação do gráfico da função do 1º grau. Se o coeficiente angular é positivo, o gráfico é uma reta crescente (figura 5). Se o coeficiente angular é negativo, temos uma reta decrescente (figura 6).

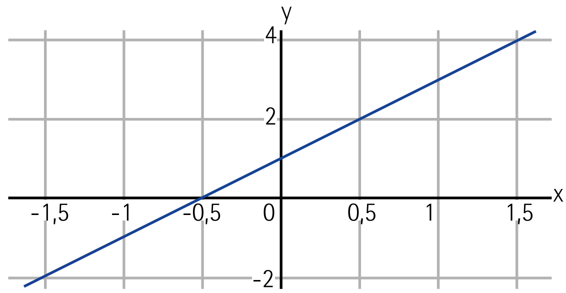

Figura 5 – Gráfico da função y(x) = 2 . x + 1; o coeficiente angular é igual a 2 e a função é crescente

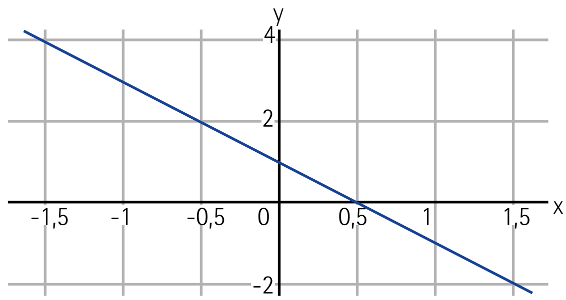

Figura 6 – Gráfico da função y(x) = -2 . x + 1; o coeficiente angular é igual a -2 e a função é decrescente

Quanto maior o valor do coeficiente angular, maior a inclinação da reta do gráfico (figura 7).

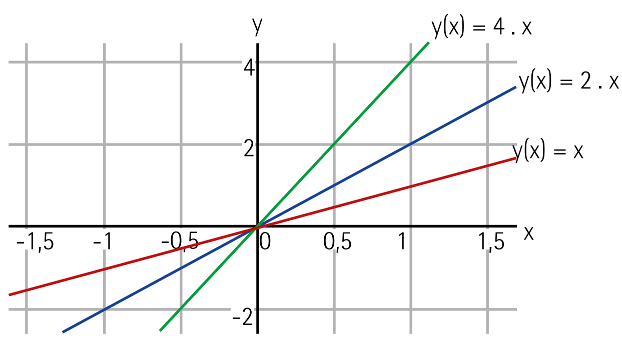

Figura 7 – Gráfico das funções y(x) = x, em vermelho; y(x) = 2 . x, em azul; e y(x) = 4 . x, em verde. Quanto maior é o coeficiente angular, mais inclinada é a reta do gráfico

No gráfico da figura 7, temos funções de diferentes coeficientes angulares, mas de mesmo coeficiente linear, no caso, b = 0. Essas retas cruzam-se em um mesmo ponto. Por isso, são chamadas de retas concorrentes.

O coeficiente linear dá o ponto de cruzamento da reta do gráfico da função com o eixo y (figura 8), de forma que o gráfico de uma função y(x) = 2x + 2 cruza o eixo y em y = +2.

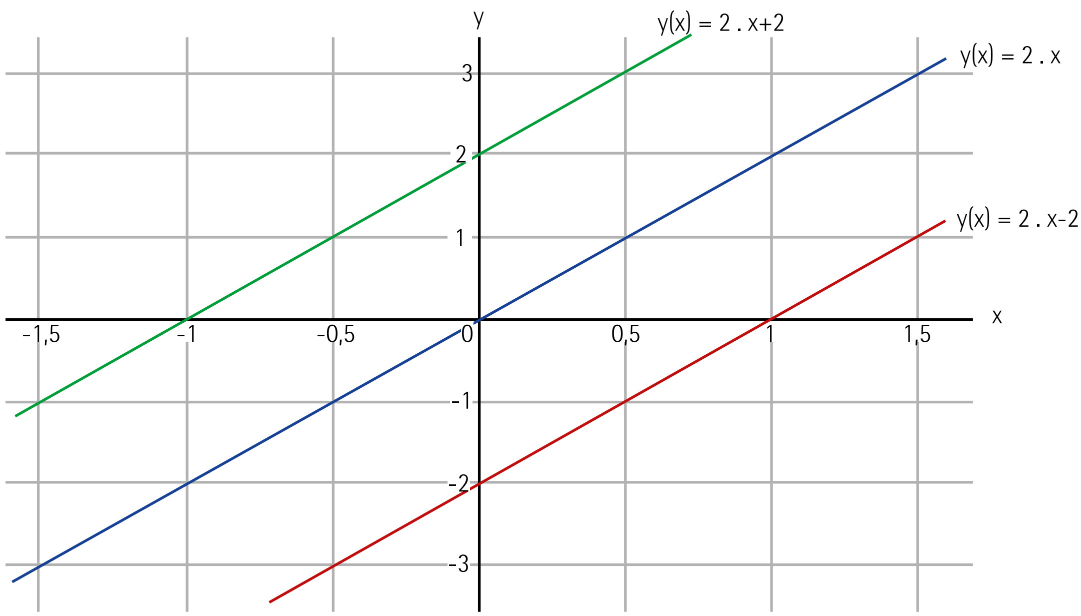

Figura 8 – Gráfico das funções $y(x) = 2 . x + 2$, em verde; $y(x) = 2 . x$, em azul; e $y(x) = 2 . x - 2$, em vermelho. O gráfico da função $y(x) = 2 . x + 2$ cruza o eixo y em $y = +2$; da função $y(x) = 2 . x$ cruza o eixo y em $y = 0$; e da função $y(x) = 2 . x - 2$ cruza o eixo y em $y = -2$

No gráfico da figura 8, temos funções de mesmo coeficiente angular, no caso, $a = 2$, mas de coeficientes lineares distintos, o que resulta em gráficos de retas paralelas. São ditas paralelas as retas de mesma inclinação, de forma que essas retas nunca se cruzam.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = 3 . x + 1$.

Trata-se de uma função do 1º grau, pois a variável está elevada à primeira potência. Considerando uma equação do tipo $y(x) = a . x + b$, vemos que o coeficiente angular da equação é $a = 3$ e o coeficiente linear é $b = 1$.

Como o coeficiente angular da equação é positivo, o gráfico é uma reta crescente. Analisando o coeficiente linear, concluímos que o gráfico cruza o eixo y em $y = 1$.

1.3 Funções do 2º grau

Funções do 2º grau são funções cuja maior potência da variável na equação é 2, ou seja, são dadas por equações do tipo:

$$y(x) = a . x^2 + b . x + c$$

Na equação, a, b e c são números reais, sendo a diferente de 0.

Os gráficos de funções do 2º grau são parábolas (figura 9).

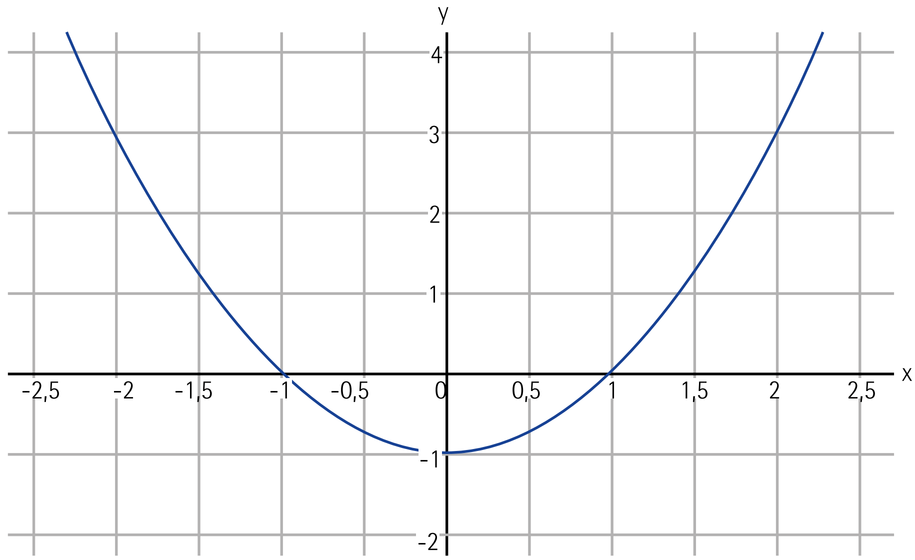

Figura 9 – Gráfico da função $y(x) = x^2 - 1$

O coeficiente que multiplica o termo quadrático da equação, no nosso caso, o coeficiente a, dá a concavidade da parábola. Se o coeficiente a é positivo, ou seja, se $a > 0$, a parábola tem concavidade para cima (figura 9). Se o coeficiente a é negativo, ou seja, se $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo (figura 10). Quando o coeficiente a é nulo, voltamos ao caso de função do 1º grau.

O coeficiente independente c dá o ponto de cruzamento do gráfico com o eixo y. Na figura 9, vemos que o gráfico cruza o eixo y em $y = -1$ e que o coeficiente c da equação da função $y(x) = x^2 -1$ é igual a -1. Já na figura 10, vemos que o gráfico cruza o eixo y em $y = 1$ e que o coeficiente x da função $y(x) = -x^2 +1$ é igual a +1.

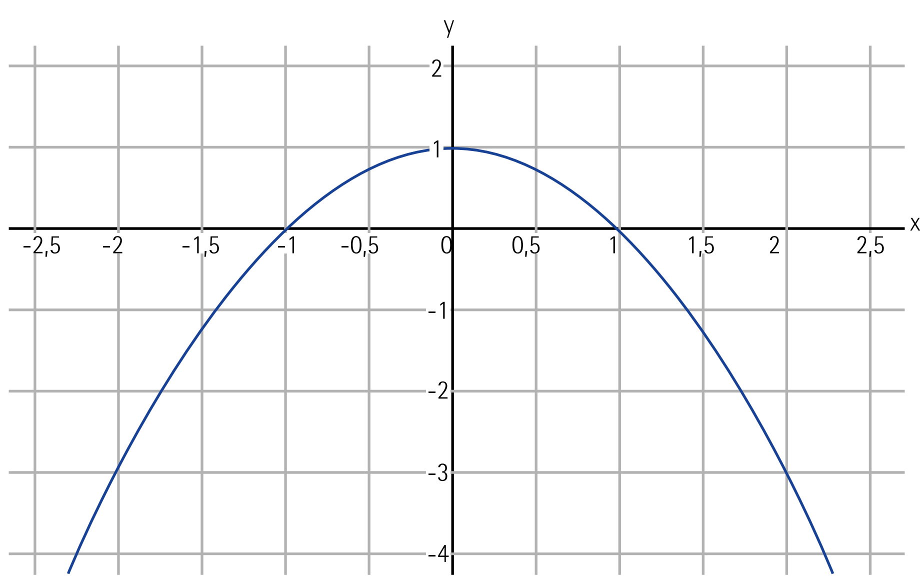

Figura 10 – Gráfico da função: o gráfico tem concavidade para baixo e o coeficiente é igual a -1

Note, na figura 10, que o gráfico da parábola cruza o eixo x em dois pontos distintos, em x = -1 e em x = 1. Os pontos onde o gráfico de uma função cruza o eixo y são chamados de raízes da função. As raízes de uma função do 2º grau são determinadas pela fórmula de Bhaskara, dada a seguir.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Na fórmula de Bhaskara, a e b são os coeficientes da equação do 2º grau. O sinal de $\pm$ indica que devemos fazer o cálculo com o sinal positivo e, separadamente, com o sinal negativo. O coeficiente Δ é chamado de discriminante e é calculado por:

$$\Delta = b^2 - 4 . a . c$$

Na igualdade, a, b e c são coeficientes da equação do 2º grau.

Na figura 10, a função apresenta duas raízes, mas nem sempre a função do 2º grau terá duas raízes. O número de raízes da função do 2º grau é dado pelo discriminante Δ, conforme esquematizado na tabela a seguir.

Tabela 2 – Número de raízes de uma função do 2º grau em função do discriminante Δ

$\Delta > 0$	Duas raízes reais e distintas
$\Delta = 0$	Uma única raiz real
$\Delta < 0$	Nenhuma raiz real

Na figura 11, temos um exemplo de função do 2º grau com uma única raiz real. Na figura 12, temos um exemplo de função do 2º grau sem raízes reais.

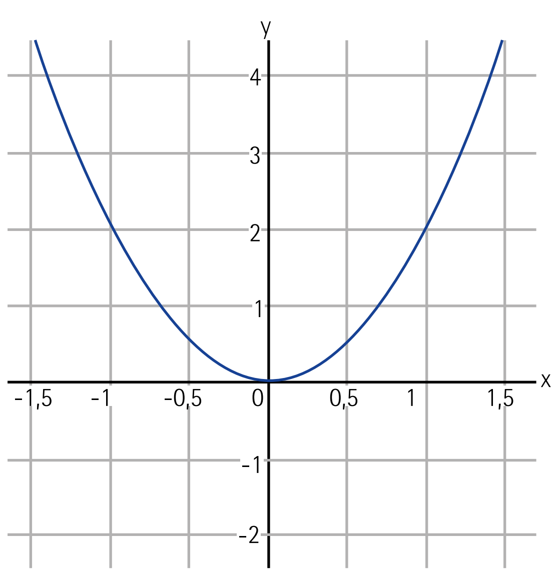

Figura 11 – Gráfico da função $y(x) = 2 . x^2$

Note que o gráfico cruza o eixo x apenas em x = 0; logo, a função tem x = 0 como única raiz real.

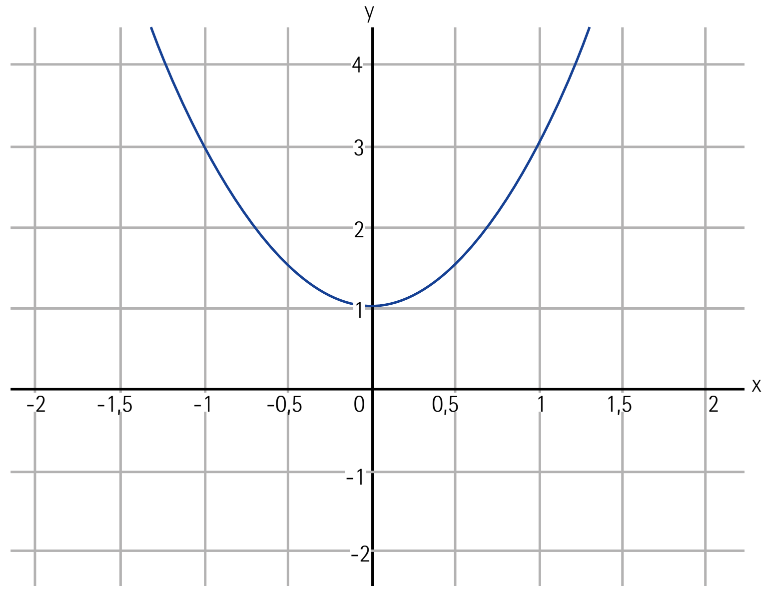

Figura 12 – Gráfico da função $y(x) = 2 . x^2 + 1$

Note que o gráfico não cruza o eixo x em nenhum ponto; logo, a função não tem raízes reais.

Saiba mais

Para ver a dedução da fórmula de Bhaskara, visite o site:

DEMONSTRAÇÃO da fórmula de Bhaskara. *Khan Academy*, 2022. Disponível em: https://bit.ly/36KLfxx. Acesso em: 31 mar. 2022.

Exemplo de aplicação

Considere a função do 2º grau dada por $y(x) = x^2 + 2x - 1$. Quantas raízes essa função tem?

A quantidade de raízes de uma função do 2º grau é dada pelo discriminante Δ, calculado por:

$\Delta = b^2 - 4 . a . c$

Precisamos primeiro identificar os coeficientes a, b e c da equação dada. Para uma equação do 2º grau, temos:

$$y = a.x^2 + b.x + c$$

Logo, o coeficiente a é o que multiplica o termo quadrático, o coeficiente b é o que multiplica o termo linear e o coeficiente c é o termo independente. Dessa forma, chegamos a:

a = 1

b = 2

c = -1

Calculamos então o discriminante Δ usando estes valores:

$$\Delta = b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-1)$$

$$\Delta = 4 + 4$$

$$\Delta = 8$$

Como $\Delta > 0$, temos duas raízes reais e distintas.

Podemos, ainda, usar a fórmula de Bhaskara e determinar essas raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \,.\, a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2 \,.\, 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2 \,.\, 2^2}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Logo, são raízes da equação $y(x) = x^2 + 2x - 1$:

$x = -1 - \sqrt{2}$ e $x = -1 + \sqrt{2}$

Vemos, ainda, que a equação $y(x) = x^2 + 2x - 1$ tem:

- coeficiente $a > 0$, o que implica um gráfico com concavidade para cima;
- coeficiente $c = -1$, o que implica um gráfico cruzando o eixo y em $y = -1$.

Na figura a seguir, temos o gráfico dessa função.

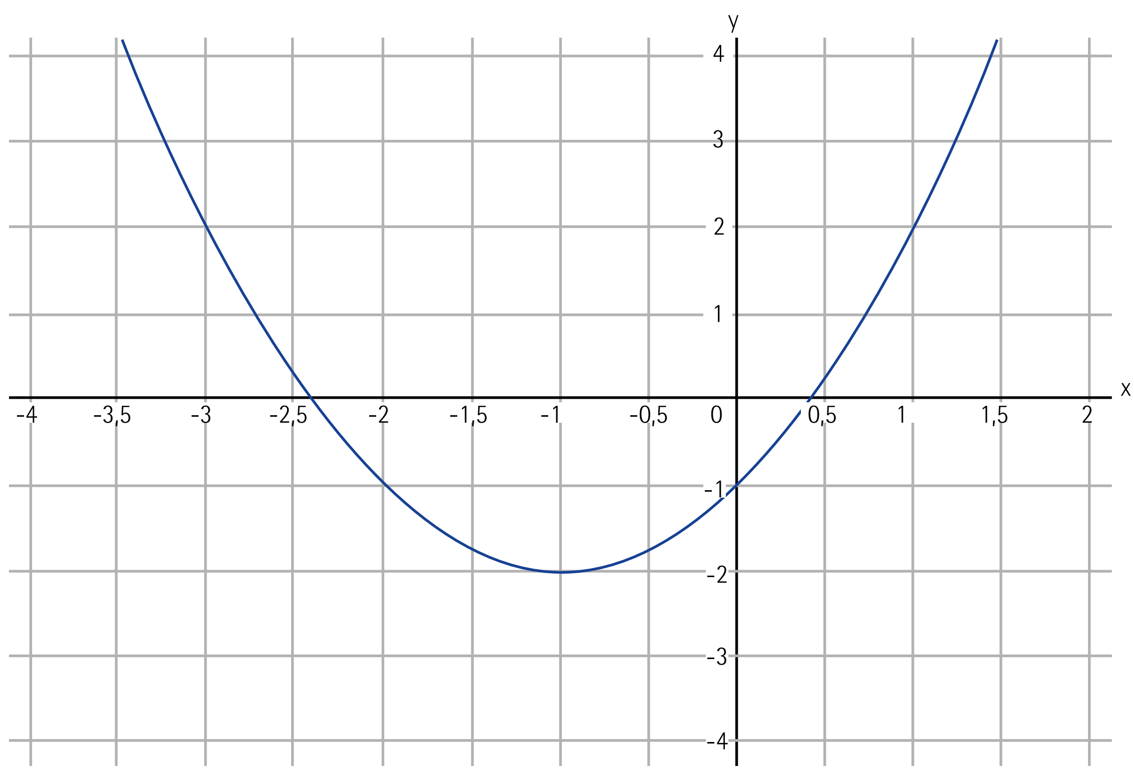

Figura 13 – Gráfico da função $y(x) = x^2 + 2x - 1$

O gráfico da figura 13 tem concavidade para cima, cruza o eixo y em $x = -1$ e tem duas raízes reais e distintas.

1.4 Função módulo ou valor absoluto

A função módulo ou valor absoluto de um número retorna esse mesmo valor sempre com sinal positivo. A função módulo é indicada da seguinte forma:

$y(x) = |x|$

Por exemplo, o módulo de 5 é calculado por $|5| = 5$. Já o módulo de -5 é calculado por $|-5| = 5$.

O fato de a função módulo retornar sempre valores positivos implica que o gráfico da função se localiza na parte superior do eixo x, onde os valores de y são positivos. Na figura a seguir, temos o gráfico da função $f(x) = |x|$.

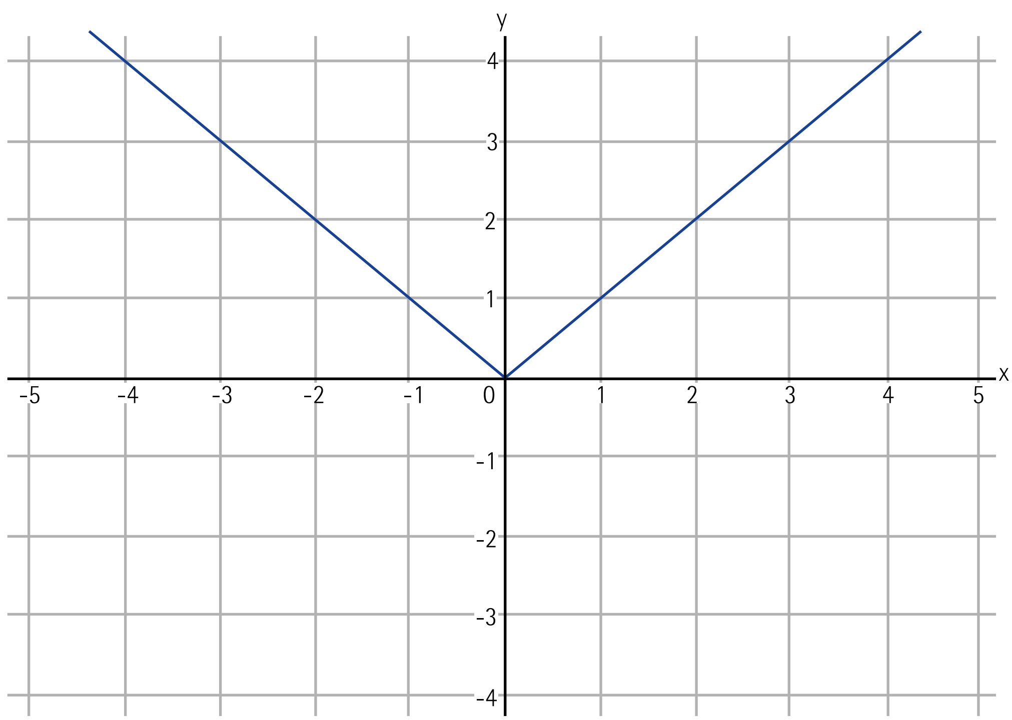

Figura 14 – Gráfico da função y(x) = |x|

Note que o gráfico da função $y(x) = |x|$ é formado por trechos lineares. É semelhante ao gráfico da função $y(x) = |x|$, mas com a parte de imagens negativas rebatida para a parte superior do gráfico.

Lembrete

Uma função linear é aquela cujo gráfico é uma reta. Funções do 1º grau, de equação $y(x) = a . x + b$, são funções lineares.

Observação

Em programação, usa-se bastante a função módulo. Em linguagens de programação como C ou Python, a função módulo é dada por:

ABS()

1.5 Funções exponenciais

Funções exponenciais são funções cuja variável está em um expoente e são dadas por equações do tipo:

$$y(x) = a^x$$

Na expressão, a é um número real, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

O gráfico da função exponencial apresenta comportamento distinto conforme o valor da constante a. Quando a é maior que 1, ou seja, $a > 1$, o gráfico da função exponencial é uma curva crescente (figura 15). Já quando a está entre 0 e 1, ou seja, $0 < a < 1$, o gráfico da função exponencial é uma curva decrescente (figura 16).

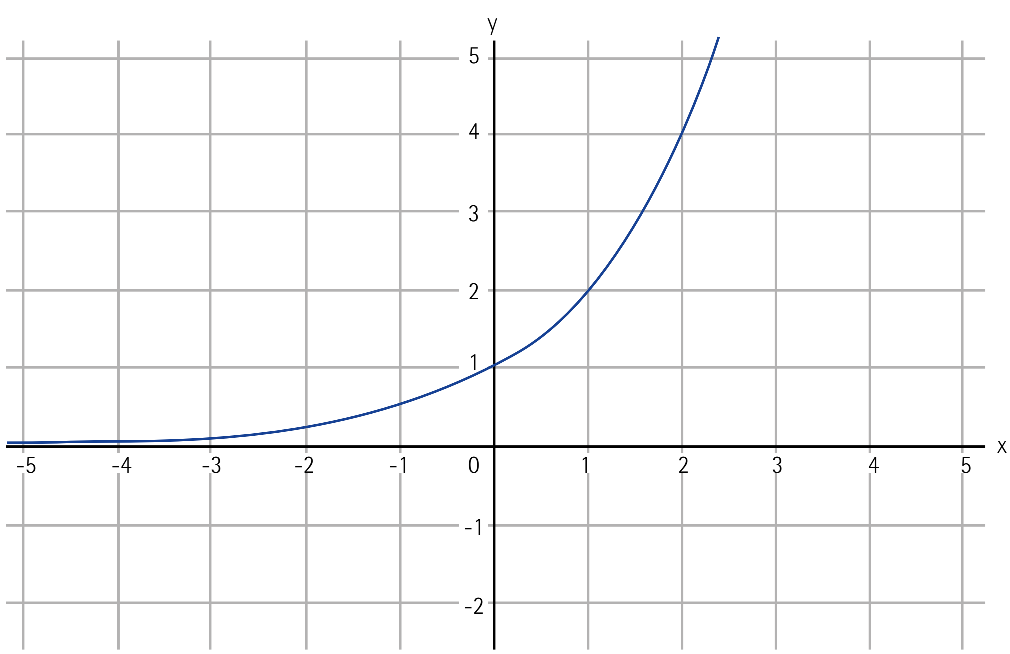

Figura 15 – Gráfico da função $y(x) = 2^x$

Note que o coeficiente a é maior que 1 e temos uma curva crescente. Repare ainda que a curva se encontra acima do eixo x.

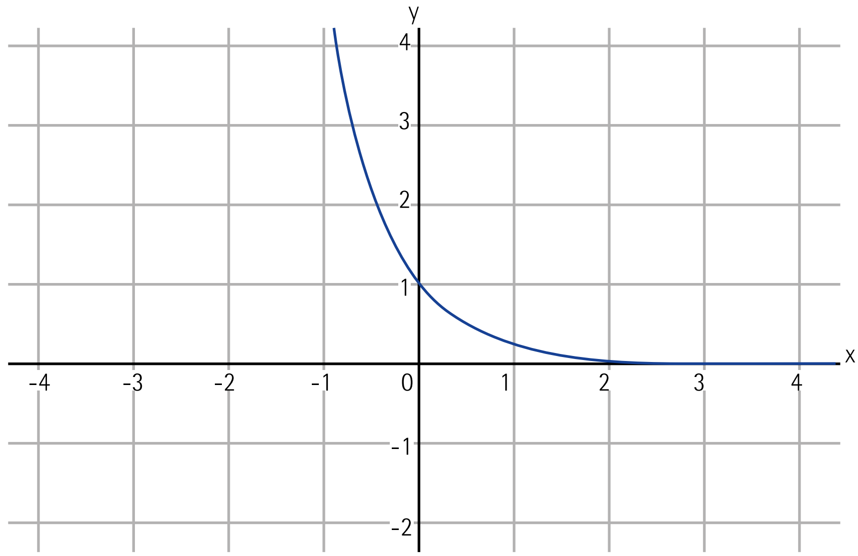

Figura 16 – Gráfico da função $y(x) = 0{,}2^x$

Note que o coeficiente a está entre 0 e 1 e temos uma curva decrescente. Repare ainda que a curva também se encontra acima do eixo x.

Um exemplo de função exponencial bastante usada na matemática é a função exponencial de base e, onde e é um número irracional de valor 2,71 aproximadamente. A exponencial de base e é dada pela equação:

$$y(x) = e^x$$

Saiba mais

Para saber mais sobre o número e, também conhecido como número de Euler, leia:

VIEIRA, N. S. M.; BATISTA, S. C. F.; AZEVEDO, C. L. V. R. *O número de Euler "e".* [e-Book Kindle]. [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3wNBHwa. Acesso em: 30 mar. 2022.

Como o número e, de valor aproximado de 2,71, é maior que 1, o gráfico da função $y(x) = e^x$ é uma curva crescente (figura 17).

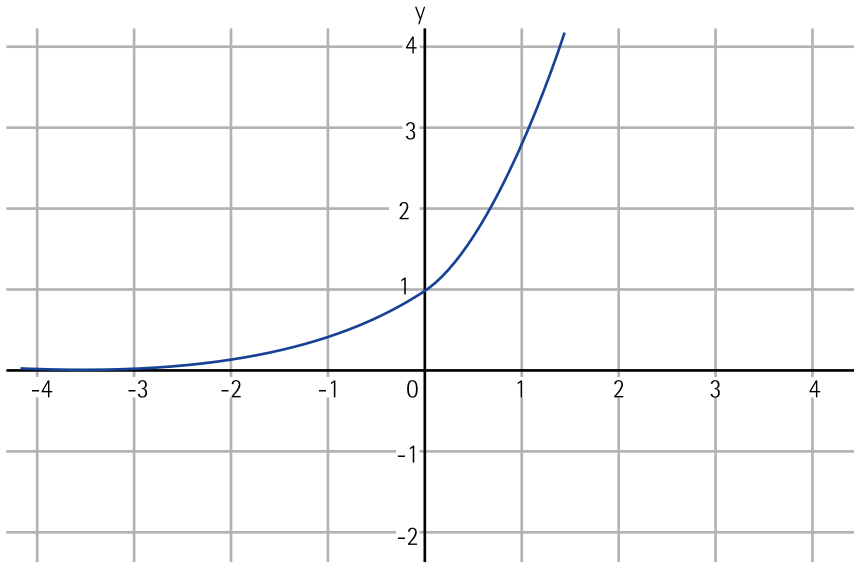

Figura 17 – Gráfico da função $y(x) = e^x$

Note que o coeficiente a é maior que 1 e temos uma curva crescente. Repare ainda que a curva também se encontra acima do eixo x.

Para funções exponenciais, temos o comportamento sintetizado na tabela a seguir.

Tabela 3 – Comportamento de funções do tipo $y(x) = a^x$ em função da base a

$0 < a < 1$	Função decrescente
$a > 1$	Função crescente

Note que todos os gráficos de funções exponenciais que apresentamos (figuras 15, 16 e 17) cruzam o eixo y em y = 1. Como o eixo y está localizado em x = 0, quando calculamos a exponencial de zero, independentemente da base, o resultado é sempre 1, ou seja:

$$y(x=0)=a^0=1$$

Observação

Em planilhas eletrônicas e em linguagens de programação, não temos a possibilidade de representar a função exponencial de base e por e^x. O cálculo da função exponencial em planilhas eletrônicas e linguagens de programação como C e Python é feito pela seguinte função:

EXP( )

1.6 Funções logarítmicas

A função logarítmica, indicada por log, é o inverso da função exponencial, ou seja:

$$\log_a(b) = x \leftrightarrow a^x = b$$

Na função, temos $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Em $\log_a(b)$, a é chamado de base do logaritmo. É frequente trabalharmos com logaritmos de base 10, indicados por:

$$\log_{10}(b)$$

No caso dos logaritmos de base 10, é comum omitirmos a base na escrita da equação, de forma que é subentendido que a base é 10.

$$\log_{10}(b) = \log(b)$$

Outra base frequente em logaritmos é o número e. O logaritmo de base e é expresso como ln e é chamado de logaritmo neperiano:

$$\log_e(b) = \ln(b)$$

Lembrete

Lembre-se de que e é um número irracional, de valor de aproximadamente 2,71.

Quanto ao gráfico de funções logarítmicas, temos comportamentos distintos, dependendo de a base do logaritmo estar no intervalo $0 < a < 1$ (figura 18) ou no intervalo $a > 1$ (figura 19).

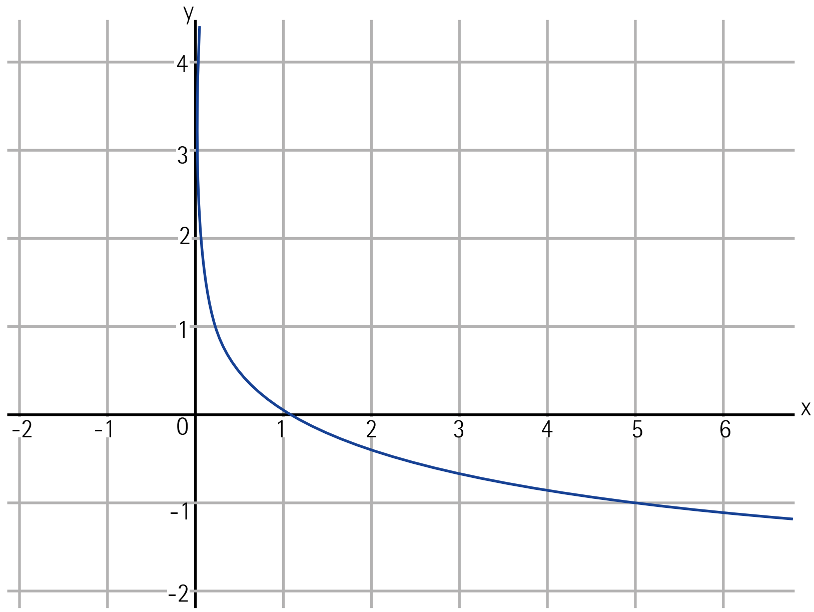

Figura 18 – Gráfico da função $y(x) = \log_{0,2}(x)$

Note que, nesse caso, temos uma função decrescente.

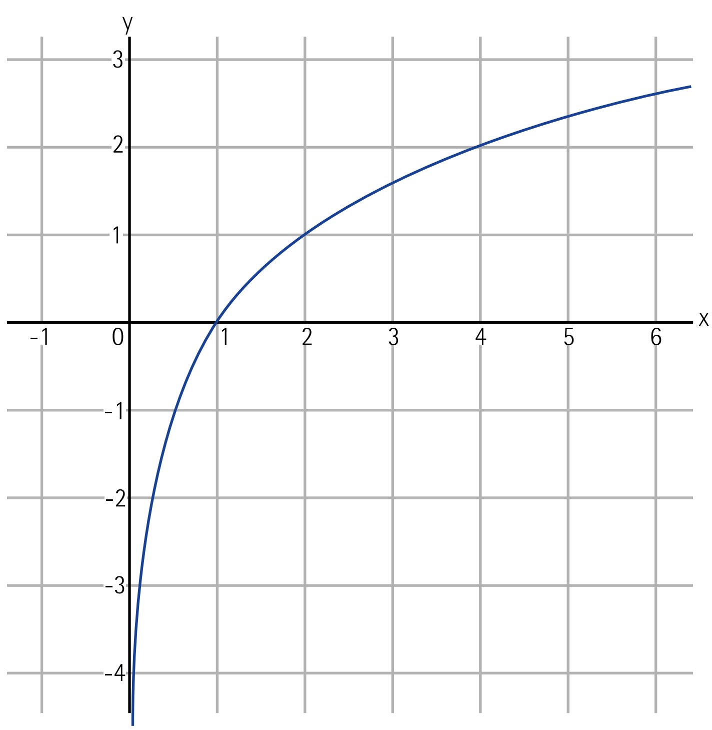

Figura 19 – Gráfico da função $y(x) = \log_{0,2}(x)$

Note que, nesse caso, temos uma função crescente.

Então, para funções logarítmicas, temos o comportamento sintetizado na tabela a seguir.

Tabela 4 – Comportamento de funções do tipo $y(x) = \log_{0,2}(b)$ em função da base a

0 < a < 1	Função decrescente
a > 1	Função crescente

O logaritmo neperiano tem como gráfico uma função crescente, pois sua base é e~2,17, valor superior a 1.

Observação

Tanto em planilhas eletrônicas quanto em linguagens de programação como C ou Python o logaritmo neperiano é calculado pela função:

LN( )

1.7 Funções trigonométricas

As principais funções trigonométricas são as funções seno, cosseno e tangente. As funções trigonométricas podem ser definidas a partir de um triângulo retângulo (figura 20).

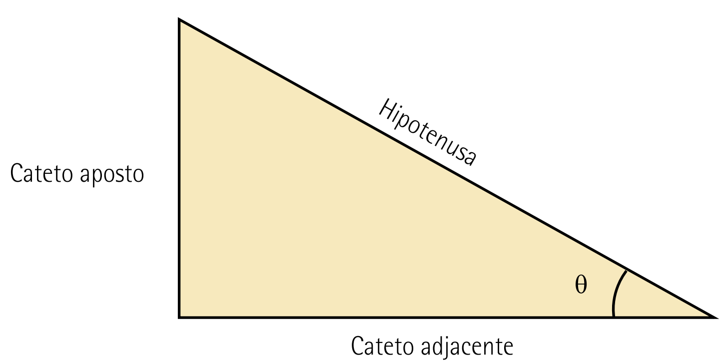

Figura 20 – Triângulo retângulo com os catetos e a hipotenusa identificados

Com base no triângulo retângulo e no comprimento dos seus lados, definimos as seguintes relações trigonométricas:

$$\text{sen}(\theta)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\theta)=\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(\theta)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Podemos também definir as funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico, que nada mais é que uma circunferência de raio 1 centrada na origem de um plano cartesiano.

Na circunferência trigonométrica:

- o cosseno de um ângulo θ é definido como a projeção de um segmento com inclinação igual a esse ângulo sobre o eixo x (figura 21);
- o seno de um ângulo θ é definido como a projeção desse mesmo segmento sobre o eixo y (figura 21).

Note que, quando aumentamos o ângulo, os valores de seno e de cosseno variam, mas sempre limitados entre -1 e +1, e, a cada volta, se repetem.

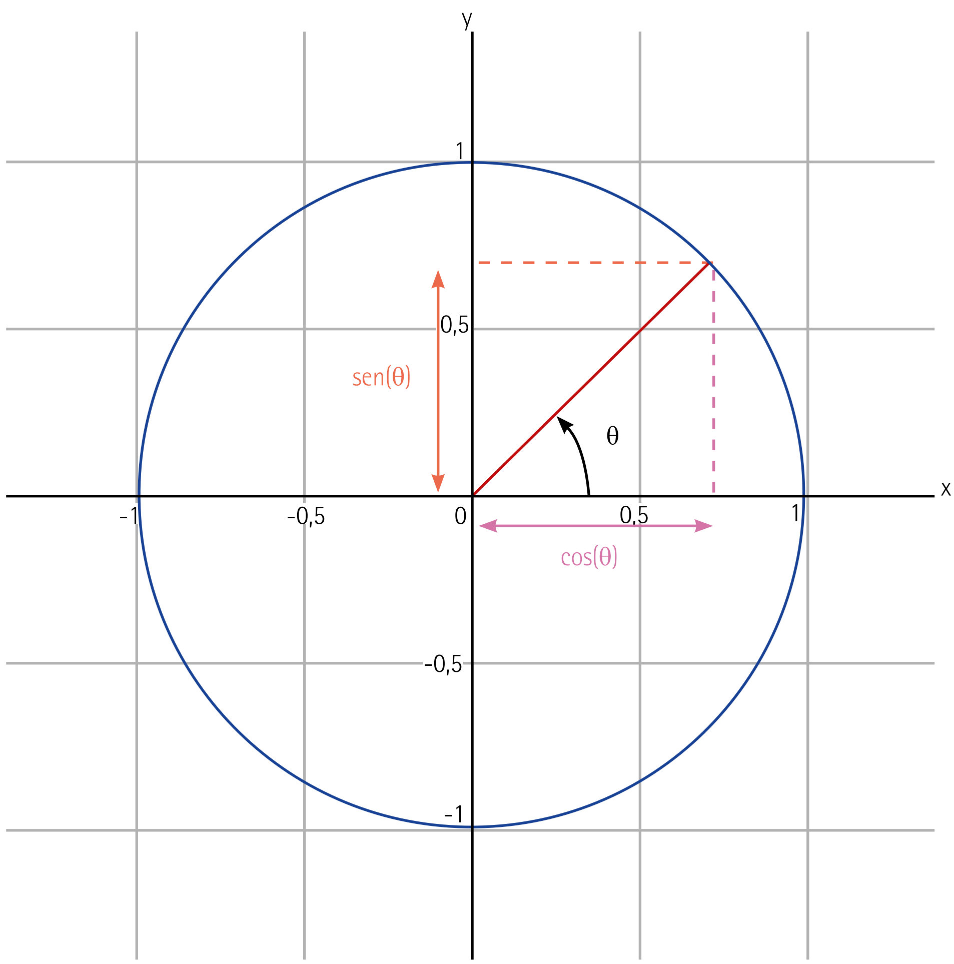

Figura 21 – Seno e cosseno de um ângulo na circunferência trigonométrica

Fazendo as projeções do segmento inclinado de um ângulo θ, e variando esse ângulo, chegamos aos valores de seno e de cosseno da tabela a seguir.

Tabela 5 – Valores de seno e cosseno em função do ângulo θ

θ (º)	sen (θ)	cos (θ)
0	0	1
90	1	0
180	0	-1
270	-1	0
360	0	1

Podemos, a partir desses valores, construir os gráficos das funções seno (figura 22) e cosseno (figura 23).

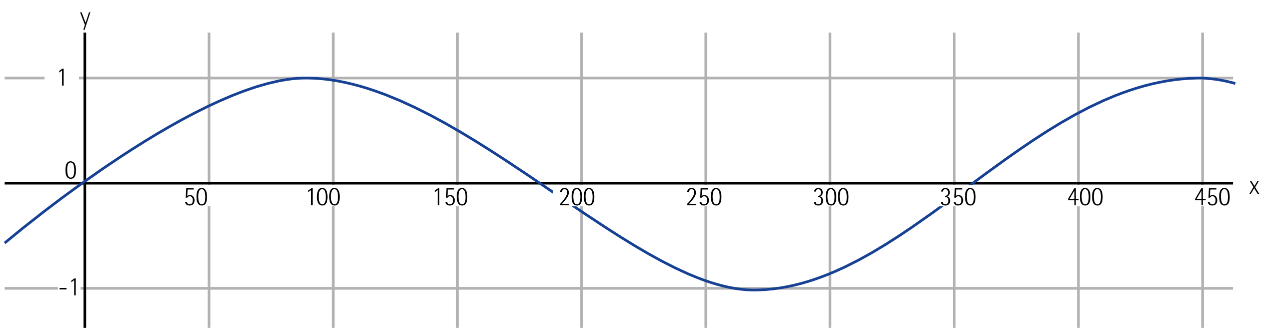

Figura 22 – Gráfico da função y(x) = sen (x); os valores de x estão expressos em graus

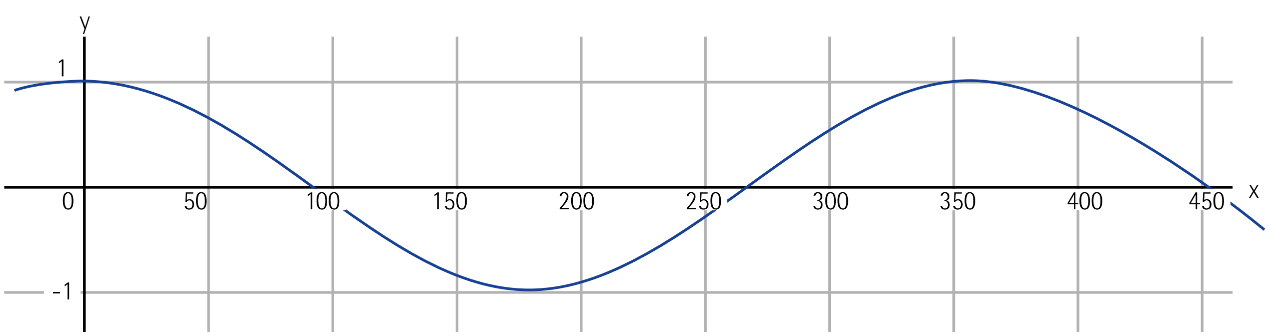

Figura 23 – Gráfico da função y(x) = cos (x); os valores de x estão expressos em graus

Note que as funções seno e cosseno são periódicas, ou seja, voltam a se repetir após um intervalo de 360º. As funções seno e cosseno estão também limitadas entre os valores -1 e +1 na direção do eixo y.

O gráfico da função tangente é dado na figura 24.

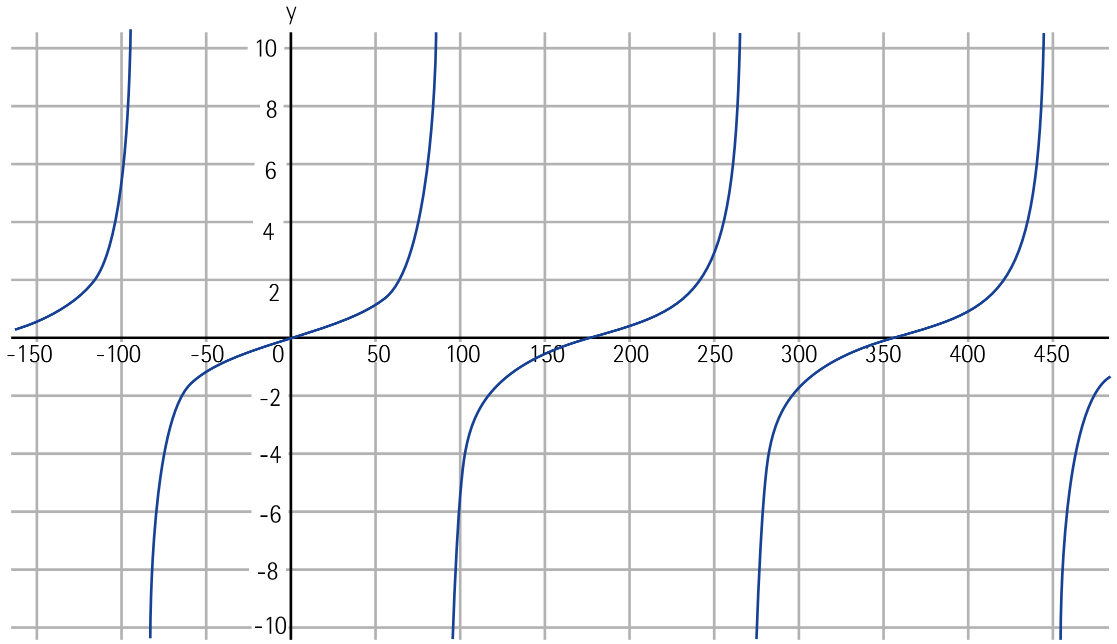

Figura 24 – Gráfico da função y(x) = tan(x); os valores de x estão expressos em graus

Note que o gráfico da função y(x) = tan(x) é periódico, mas não é limitado. Esse gráfico é descontínuo, ou seja, não pode ser representado por uma única linha. Essa descontinuidade aparece em x = 90º, x = 270º e x = 450º na figura 24.

A função tangente pode ser determinada a partir da relação:

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Note que esse cálculo pode nos trazer problemas quando o cosseno assume o valor zero, pois estaríamos fazendo uma divisão por zero, o que não tem definição. Isso não inviabiliza o cálculo, como veremos a seguir quando tratarmos de limites.

1.8 Funções contínuas e descontínuas

Vimos vários tipos de funções, suas equações, suas características e seus gráficos.

As funções podem ainda ser classificadas em contínuas e descontínuas, classificação que será importante no momento que tratarmos de limites e de derivadas.

Considere uma função f(x). Podemos calcular essa função em um valor a qualquer, como em um valor $a+\delta$ muito próximo de a. Dizemos que f(x) é uma função contínua quando $f(a) \sim f(a+\delta)$ para δ pequeno e para qualquer ponto a onde calculemos a função, ou seja, quando a função apresenta valores similares quando calculada em um ponto qualquer e em um ponto muito próximo desse primeiro ponto.

Podemos dizer que a função contínua não apresenta “quebras”. Na figura a seguir, temos um exemplo de função contínua.

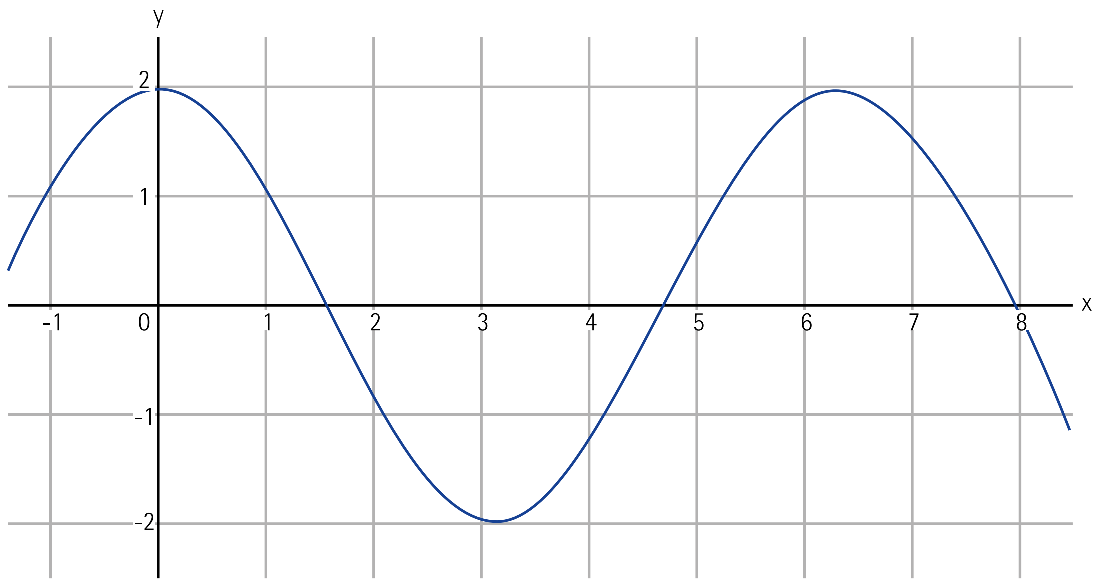

Figura 25 – Função f(x) = 2 . cos(x) como exemplo de função contínua

De forma análoga, dizemos que uma função é descontínua em a, ou não contínua em a, se, para dado valor a, a função tem valor distinto da função calculada para a+δ, com δ pequeno. Podemos dizer que a função descontínua apresenta “quebra”. Na figura a seguir, temos um exemplo de uma função descontínua.

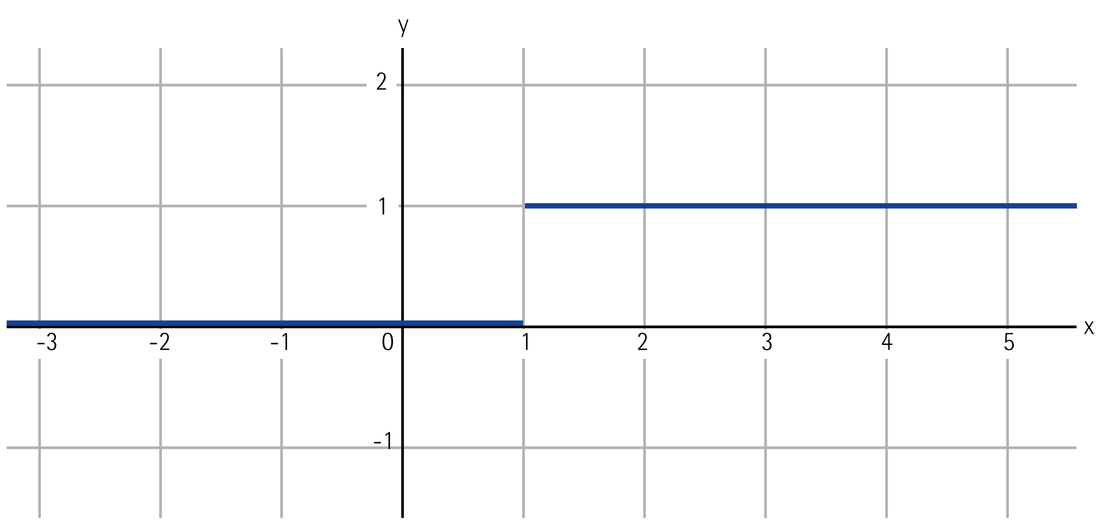

Figura 26 – Função $f(x)=\begin{cases}1 \text{ para } x>=1\\ 0 \text{ para } x<1\end{cases}$ como exemplo de função descontínua em x = 1

A função exemplificada na figura 26 é descontínua em $x = 1$, mas contínua para valores de x diferentes de 1.

A função tangente que vimos na figura 24 é um exemplo de função descontínua, enquanto a função de 2º grau da figura 13 e a função módulo da figura 14 são exemplos de funções contínuas.

2 LIMITES

2.1 Noção intuitiva de limite

O conceito de limite permite que estimemos o valor de uma função f(x) não para um valor exato, mas para um valor que se aproxima dele. Por exemplo, sabemos que a matemática não permite que realizemos divisões por zero, mas podemos calcular divisões por valores que se aproximam muito de zero.

Indicamos o limite da função f(x), quando x tende a um valor a, por:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Lemos a indicação anterior como limite de f(x) com x tendendo a a.

2.2 Cálculo de limites

Nos tópicos a seguir, veremos alguns exemplos práticos de cálculos de limites de funções.

2.2.1 Limites de funções contínuas

Exemplo de aplicação

Como um primeiro exemplo de cálculo de limite, considere a função $f(x) = 2x$. Queremos calcular o limite dessa função para x tendendo a 1.

Como estamos tratando de limites, não podemos apenas substituir o valor $x = 1$ na função, pois não queremos calcular f(x) para $x = 1$, mas para valores muito próximos de $x = 1$.

Começamos analisando o gráfico da função.

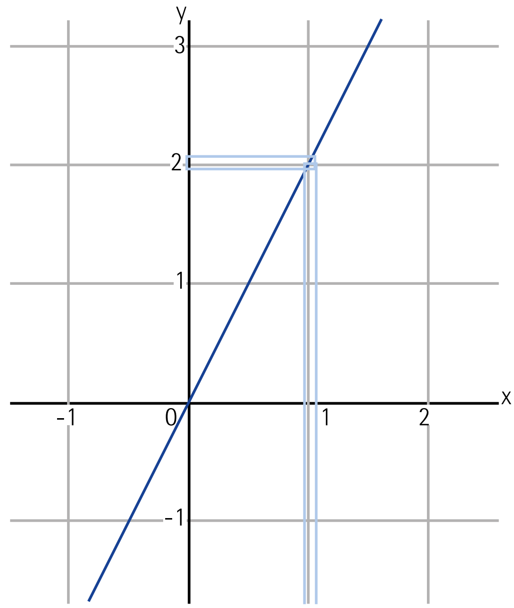

Figura 27 – Gráfico da função f(x) = 2x

Queremos calcular o limite dessa função para x tendendo a 1, ou seja, para os valores indicados no intervalo vertical em azul claro.

Note que, quando x se aproxima de x = 1, o valor da função se aproxima de 2. Logo:

$$\lim_{x \to 1} (2 \,.\, x) = 2$$

Nesse momento, vemos que o limite coincidiu com o valor da função calculada no ponto, f(2) = 2 . 1 = 2, e isso ocorre apenas porque a função em estudo, f(x) = 2x, é contínua em x = 1.

Observação

No exemplo anterior, calculamos o valor de uma função f(x) para dado valor de x. Isso é calculado substituindo-se o valor de x dado na função.

Por exemplo, considere a função f(x) = 3 . x + 1. Para calcularmos o valor da função em x = 2, basta inserir 2 no lugar de x na função e fazer o cálculo.

$$f(2) = 3 \,.\, 2 + 1$$

$$f(2) = 6 + 1$$

$$f(2) = 7$$

Logo, para funções contínuas, o limite da função para x tendendo a um valor a é igual à função calculada no valor a, ou seja:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = x^2 + 5x - 2$. Queremos calcular o limite dessa função para x tendendo a zero, ou seja:

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 5x - 2$$

Vemos que estamos tratando de uma função do 2º grau, que não apresenta problemas de descontinuidade, como podemos visualizar no gráfico da figura a seguir.

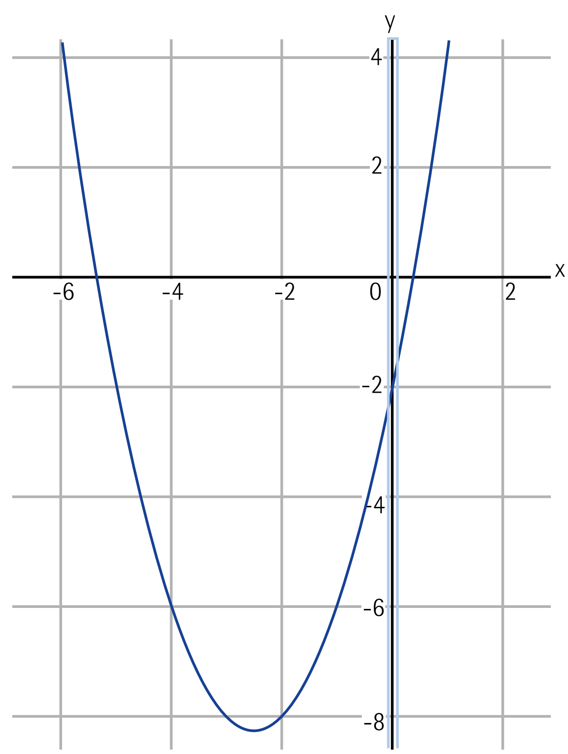

Figura 28 – Gráfico da função $y(x) = x^2 + 5x - 2$

Vemos que a função é contínua, inclusive em x = 0.

Como a função é contínua em x = 2, o limite para x tendendo a esse valor é igual ao valor da função no ponto. Logo, podemos fazer:

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 5x - 2 = y(2)$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 5x - 2 = (2)^2 + 5 \, . \, (2) - 2$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 5x - 2 = 4 + 10 - 2$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 5x - 2 = 12$$

Portanto, o limite de $y(x) = x^2 + 5x - 2$ para x tendendo a 2 é igual a 12.

2.2.2 Limites de funções com singularidade

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função $y(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Queremos calcular o limite dessa função quando x tende a 1, ou seja, quando $x \to 1$. Note que, se apenas substituirmos x = 1 na função, teremos um problema, pois não podemos fazer divisões por zero. Logo, não podemos usar essa abordagem.

A função $y(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ pode ser calculada para qualquer valor de x, exceto para x = 1, onde a função não está definida (justamente porque teríamos uma divisão por zero). Dizemos que essa função tem uma singularidade em x = 1.

Construindo o gráfico da função, temos a figura a seguir.

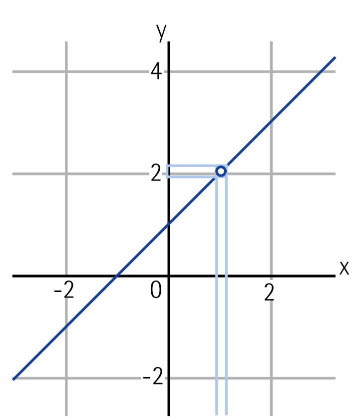

Figura 29 – Gráfico da função $y(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ com uma singularidade em x = 1

O cálculo desse limite pode ser feito analisando o gráfico. Vemos que, quando x se aproxima de 1, o valor da função se aproxima de 2. Logo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Exemplo 2

Considere a função $y(x) = \frac{x^2 + x}{x}$. Desejamos calcular o limite dessa função para x tendendo a 0 ($x \to 0$).

Note que, se simplesmente substituirmos x = 0 na função, teremos uma divisão por zero, o que não pode ser calculado. Logo, temos uma função com uma singularidade em x = 0.

Essa função é interessante, pois podemos escrever:

$$y(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

Como x aparece em todos os termos do numerador, podemos colocá-lo em evidência:

$$y(x) = \frac{x \,.\, (x+1)}{x}$$

Só podemos cancelar x na equação se x for diferente de zero (não podemos dividir por zero e não queremos esse risco). Logo:

$$y(x) = x + 1, x \neq 0$$

O gráfico da função é, portanto, um gráfico linear e crescente, que cruza o eixo y em y = +1. O gráfico tem uma singularidade em x = 0.

O valor do limite será o valor calculado da função quando nos aproximamos de x = 0 (mas nunca chegamos a x = 0). Logo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0} (x + 1) = (1) + 1 = 2$$

Concluímos que o limite de $y(x) = \frac{x^2 + x}{x}$ com x tendendo a 0 é igual a 2.

2.2.3 Limites de funções descontínuas – limites laterais

Vimos exemplos de cálculo de limites de funções contínuas e de funções descontínuas com singularidade.

Temos funções descontínuas em que o valor da função é um antes da descontinuidade e outro depois da descontinuidade, o que precisa ser verificado quando calculamos limites.

Considere uma função f(x), descontínua em a, em que $f(a-\delta) \neq f(a+\delta)$ para δ pequeno, ou seja, os valores da função são diferentes antes e depois da descontinuidade. Nesse caso, temos que considerar o limite se aproximando de a pela sua esquerda e pela sua direita.

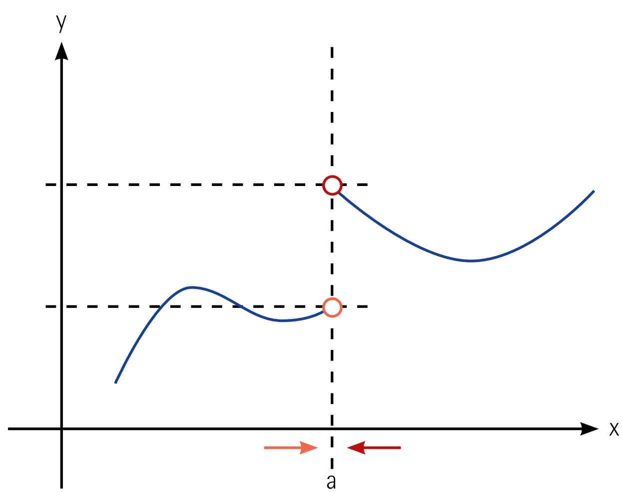

Figura 30 – Limites laterais para uma função descontínua

Note que os valores dos limites da função são diferentes quando nos aproximamos da descontinuidade pela esquerda (em laranja) e quando nos aproximamos da descontinuidade pela direita (em vermelho).

O limite lateral de uma função f(x) quando x tende a um valor a pela esquerda, ou seja, partindo do lado dos valores negativos do eixo x, é indicado por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Já o limite quando x tende ao valor a pela direita, ou seja, partindo do lado positivo do eixo x, é indicado por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função f(x) representada pelo gráfico da figura a seguir.

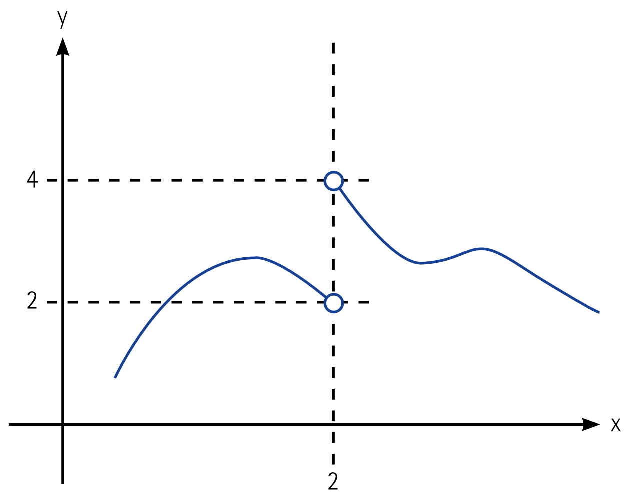

Figura 31 – Exemplo de função descontínua em x = 2

Podemos, a partir da figura, estimar os limites laterais da função, quando x tende ao valor onde ocorre a descontinuidade, ou seja, quando *x* tende a 2.

Vemos que, quando x tende a 2 pela direita, nos aproximamos de x = 2 a partir da parte direita da função. Nesse caso, o valor da função se aproxima de 4 (figura 32).

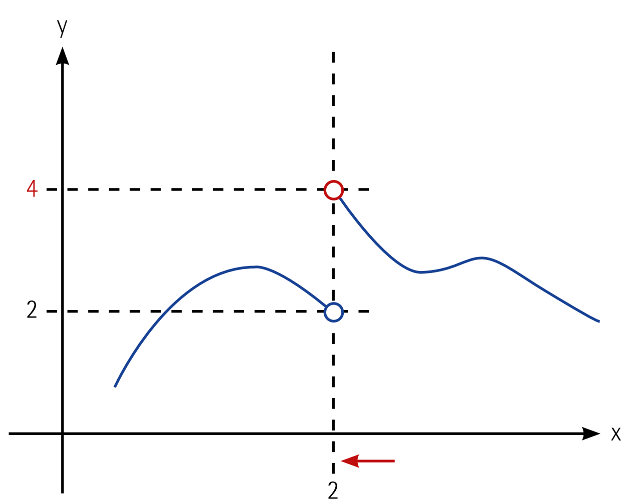

Figura 32 – Limite lateral da função quando nos aproximamos da descontinuidade pela direita

Logo:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

De forma similar, quando nos aproximamos da descontinuidade a partir do lado esquerdo, vemos que o valor da função se aproxima de 2 (figura 33).

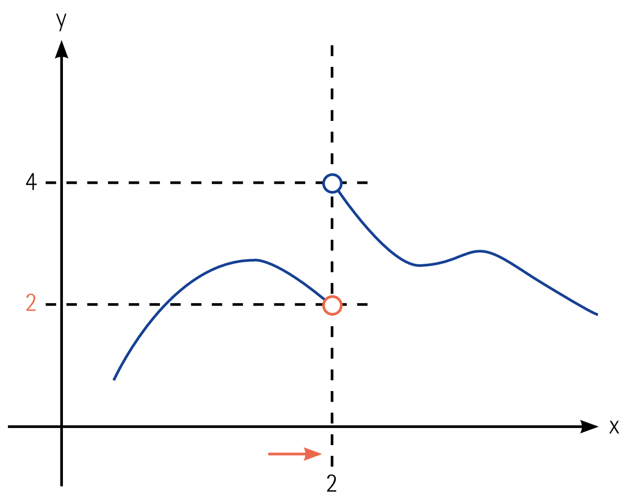

Figura 33 – Limite lateral da função quando nos aproximamos da descontinuidade pela esquerda

Logo:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

Então:

- o limite da função dada no gráfico quando x tende a 2 pela esquerda é igual a 2;
- o limite da função dada no gráfico quando x tende a 2 pela direita é igual a 4.

Exemplo 2

Um exemplo de função descontínua é a função de Heaviside, dada por:

$$h(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 1/2,\ x = 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$$

Note que:

- para valores de x superiores a zero, a função vale 1;
- para valores de x inferiores a zero, a função vale zero;
- para $x = 0$, a função vale $\frac{1}{2}$.

O gráfico da função de Heaviside é dado a seguir.

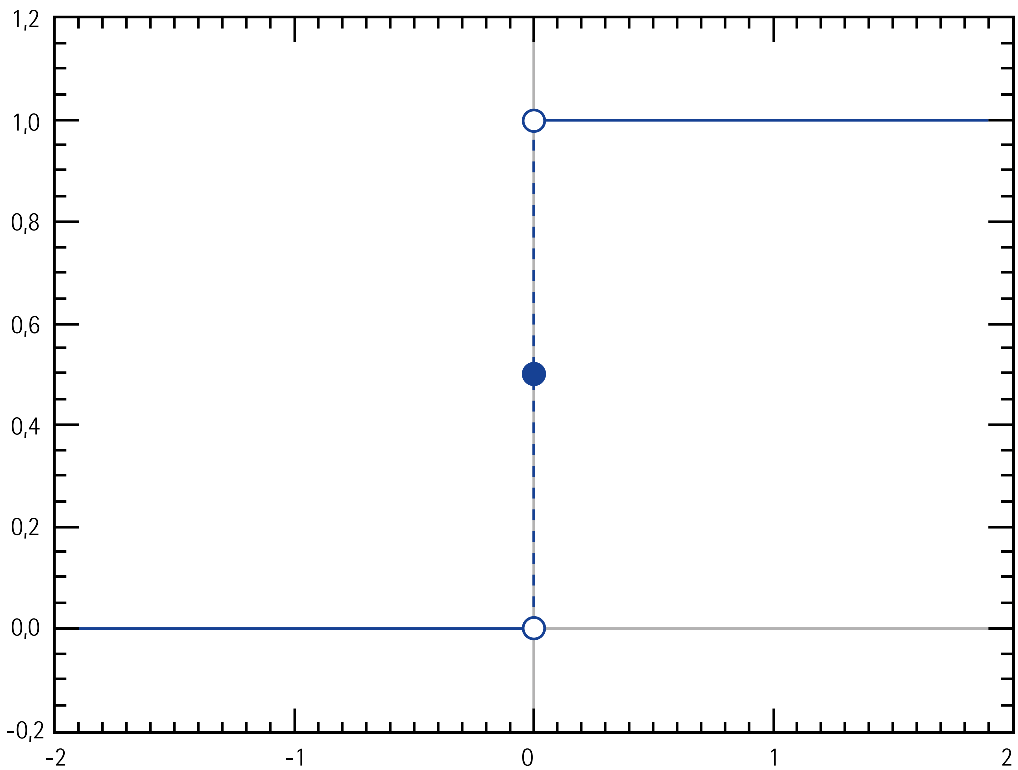

Figura 34 – Função de Heaviside

Disponível em: https://bit.ly/3NydK27. Acesso em: 29 mar. 2022.

Podemos, a partir do gráfico, visualizar de forma mais clara a função de Heaviside e calcular os limites laterais em torno da descontinuidade.

Vemos que a descontinuidade se encontra em $x = 0$. Quando nos aproximamos da descontinuidade pelo lado direito, a função tende a 1. Logo:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$$

Quando nos aproximamos da descontinuidade pelo lado esquerdo, vemos que a função tende a 0. Logo:

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0$$

Uma característica da função de Heaviside é que o valor da função na descontinuidade é o valor médio dos limites laterais, ou seja, igual a ½.

Saiba mais

Para saber mais sobre a função de Heaviside, visite o site:

MATEMÁTICA SIMPLIFICADA. *Função de Heaviside ou degrau unitário*. 27 jul. 2021. Disponível em: https://bit.ly/3Du7qns. Acesso em: 31 mar. 2022.

2.3 Operações com limites

Podemos fazer operações matemáticas com limites observando as propriedades a seguir.

Considere duas funções, chamadas de f(x) e g(x).

O limite da soma das funções f(x) e g(x) pode ser escrito como a soma dos limites, ou seja:

$$\lim\left[f(x)+g(x)\right]=\lim f(x)+\lim g(x)$$

O mesmo se aplica ao limite do produto das funções f(x) e g(x), que pode ser escrito como um produto de limites:

$$\lim\left[f(x).g(x)\right]=\lim f(x)\ .\lim g(x)$$

De forma equivalente, o limite da divisão das funções f(x) e g(x) pode ser escrito como uma divisão dos limites, ou seja:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

Aqui, só temos que tomar cuidado para não cairmos em uma divisão por zero, ou seja, limg(x) deve ser diferente de zero.

Podemos estender isso para o cálculo de uma função h(x) de um limite, de forma que:

$$h(\lim f(x)) = \lim h(f(x))$$

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função $y(x) = 2x + \text{sen}(x)$. Podemos calcular o limite dessa função quando x tende a 0 usando as propriedades de operações com limites. Vimos que o limite da soma pode ser escrito como uma soma de limites. Logo:

$$\lim_{x \to 0} [2x + \text{sen}(x)] = \lim_{x \to 0} 2x + \lim_{x \to 0} \text{sen}(x)$$

Como estamos tratando de funções contínuas, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Então:

$$\lim_{x \to 0} [2x + \text{sen}(x)] = 2 \,.\, 0 + \text{sen}(0)$$

$$\lim_{x \to 0} [2x + \text{sen}(x)] = 0$$

Concluímos que o limite da função $y(x) = 2x + \text{sen}(x)$ para x tendendo a 0 é igual a 0.

Exemplo 2

Considere a função $y(x) = \dfrac{\cos(x)}{x+1}$. Podemos calcular o limite dessa função quando x tende a zero.

Lembrando que o limite da divisão de funções pode ser escrito como a divisão dos limites, ficamos com:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \cos(x)}{\lim\limits_{x \to 0} x+1}$$

Como ambas as funções são contínuas, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Então:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x+1} = \frac{\cos(0)}{0+1}$$

Como cosseno de 0 é igual a 1, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x+1} = \frac{1}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x+1} = 1$$

Concluímos que o limite da função $y(x) = \frac{\cos(x)}{x+1}$ para x tendendo a zero é igual a 1.

3 DERIVADA

3.1 Conceito e interpretação geométrica da derivada

Considere uma função f(x) contínua e derivável (ou seja, a derivada da função existe em todos os pontos). Indicamos a derivada da função f(x) por:

$$[f(x)]' \text{ ou } f'(x)$$

É importante dizer em relação a qual variável estamos calculando a derivada, embora, no caso de funções de uma única variável, não reste dúvidas sobre isso. Nessa perspectiva, a derivada da função f(x) em relação à variável x também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{df(x)}{dx}$$

Essa última representação de derivada é mais utilizada em física.

A derivada de uma função representa a sua taxa de variação, de forma que, quanto maior for a derivada em um ponto, maior será a sua taxa de variação naquele ponto. Assim, podemos usar derivadas para avaliar a taxa de crescimento ou de decrescimento de funções, aplicação que detalharemos mais adiante.

Quando desejamos conhecer a equação de uma reta tangente a uma função em dado ponto do seu domínio, usamos o fato de a inclinação dessa reta ser igual à derivada da função no ponto (figura 35).

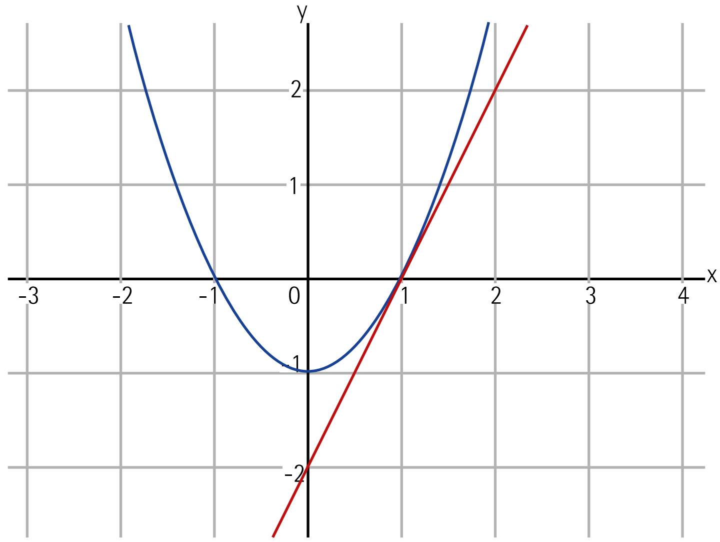

Figura 35 – Gráfico de uma parábola, em azul, e de sua reta tangente no ponto x = 1, em vermelho

Lembrete

Podemos escrever uma equação de reta como $y(x) = a \,.\, x + b$, em que o coeficiente a é chamado de coeficiente angular e dá a inclinação da reta. Se a reta é crescente, o coeficiente angular é positivo. Se a reta é decrescente, o coeficiente angular é negativo.

Podemos definir derivada como um limite. Assim, a derivada de uma função f(x) em um ponto $x = p$ é definida como:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

No dia a dia, não costumamos calcular derivadas a partir da definição usando limite. Rotineiramente, para calcular a derivada de funções, usamos algumas regras de derivação, que serão detalhadas a seguir.

3.2 Regras de derivação

Nos tópicos a seguir, apresentaremos as regras de derivação para a função constante, para funções polinomiais, para o caso de soma de funções e de produto de uma constante por uma função, para raízes, para funções seno e cosseno, para a função exponencial de base e e para a função logaritmo neperiano. Trataremos também da regra do produto, utilizada quando derivamos produtos de funções, e da regra do quociente, aplicada quando derivamos divisão de funções.

3.2.1 Função constante

Se a derivada representa a taxa de variação, a derivada de uma constante é igual a zero, pois uma função constante não varia.

Considerando c uma constante, isto é, um número real, temos o seguinte:

$$[c]' = \frac{dc}{dx} = 0$$

Dessa forma, considere a função constante y(x) = 2. A sua derivada é calculada como:

$$y'(x) = (2)' = 0$$

3.2.2 Funções polinomiais

São funções polinomiais aquelas que podem ser escritas como uma soma de potências. Ou seja, as funções polinomiais são da seguinte forma:

$$y(x) = a \,.\, x^n + b \,.\, x^{n-1} + ... + f \,.\, x^2 + g \,.\, x + h$$

Na expressão, a, b, ... f, g e h são constantes e n é um número inteiro.

Então, equações do 1º grau e do 2º grau são exemplos de funções polinomiais.

Lembrete

Funções do 1º grau são funções do tipo y(x) = a . x + b, enquanto funções do 2º grau são funções do tipo y(x) = a . x^2 + b . x + c. Note que o maior expoente define o grau da função.

Vamos considerar uma função polinomial de um único termo dada por:

$$y(x) = x^n$$

Na expressão, n é um número real.

A derivada dessa função é dada por:

$$y'(x) = \left[x^n\right]' = n \,.\, x^{n-1}$$

Então, para derivarmos um termo de uma função polinomial, basta que o expoente "caia" multiplicando e que o novo expoente seja o expoente anterior diminuído de uma unidade.

Considerando a função $y(x) = x^3$. A sua derivada é calculada por:

$$y'(x) = \left[x^3\right]'$$

$$y'(x) = 3 \,.\, x^{3-1}$$

$$y'(x) = 3 \,.\, x^2$$

Logo, a derivada de $y(x) = x^3$ é $y'(x) = 3x^2$

O procedimento de derivação é o mesmo independentemente do número que temos na potência da função, como veremos no exemplo a seguir.

Considerando a função $y(x) = x^{127}$. A sua derivada é calculada por:

$$y'(x) = \left[x^{127}\right]'$$

$$y'(x) = 127 \,.\, x^{127-1}$$

$$y'(x) = 127 \,.\, x^{126}$$

Logo, a derivada de $y(x) = x^{127}$ é $y'(x) = 127 \,.\, x^{126}$

3.2.3 Soma de funções

A derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas das funções.

Considere duas funções, f(x) e g(x), contínuas e deriváveis. A derivada da soma dessas funções é dada por:

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

No exemplo a seguir, calculamos a derivada de soma de funções.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = x^5 + x$. Podemos calcular a sua derivada lembrando que a derivada da soma é a soma das derivadas e vendo que $y(x)$ é a soma das funções x^5 e x. Assim, ficamos com:

$$y'(x) = \left[x^5 + x\right]'$$

$$y'(x) = \left[x^5\right]' + [x]'$$

Calculando as derivadas, temos:

$$y'(x) = 5 \,.\, x^{5-1} + 1 \,.\, x^{1-1}$$

$$y'(x) = 5 \,.\, x^4 + 1 \,.\, x^0$$

$$y'(x) = 5 \,.\, x^4 + 1$$

Logo, a derivada da função $y(x) = x^5 + x$ é $y'(x) = 5 \,.\, x^4 + 1$

Observação

Qualquer número elevado à potência zero é igual a 1, ou seja, $x^0 = 1$.

3.2.4 Produto de uma constante por uma função

A derivada do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela derivada da função.

Considere uma função $f(x)$, contínua e derivável, e uma constante c, lembrando que a constante pode ser qualquer número real. A derivada do produto da constante pela função é dada por:

$$\left[c \,.\, f(x)\right]' = c \,.\, f'(x)$$

Vejamos o exemplo a seguir, em que calculamos derivadas do produto de uma constante por uma função.

Considere a função $y(x) = 3 . x^2$. A derivada dessa função é calculada por:

$$y'(x) = \left(3 . x^2\right)'$$

$$y'(x) = 3 . \left(x^2\right)'$$

$$y'(x) = 3 . \left(2.x^{2-1}\right)$$

$$y'(x) = 6 . x$$

Logo, a derivada de $y(x) = 3x^2$ é $y'(x) = 6 . x$

Podemos usar mais de uma regra de derivação em um cálculo, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = 2.x^8 + 4.x + 3$. A derivada dessa função é calculada por:

$$y'(x) = \left(2 . x^8 + 4 . x + 3\right)'$$

A soma da derivada é a derivada da soma:

$$y'(x) = \left(2 . x^8\right)' + (4 . x)' + (3)'$$

Uma constante multiplicativa "sai" da derivada, e a derivada de uma constante é igual a zero:

$$y'(x) = 2 . \left(x^8\right)' + 4 . (x)' + 0$$

Calculamos, então, as derivadas das potências:

$$y'(x) = 2 . \left(8 . x^{8-1}\right) + 4 . \left(1 . x^{1-1}\right) + 0$$

$$y'(x) = 2 . \left(8.x^7\right) + 4 . \left(1 . x^0\right) + 0$$

Como qualquer número elevado a zero é igual a 1, ficamos com:

$$y'(x) = 16 \,.\, x^7 + 4$$

Logo, a derivada da função $y(x) = 2 \,.\, x^8 + 4 \,.\, x + 3$ é $y'(x) = 16 \,.\, x^7 + 4$

3.2.5 Raízes

Para calcular a derivada de raízes, devemos escrever a raiz como um expoente fracionário, usando a seguinte propriedade:

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

Com isso, basta derivar a função de expoente fracionário como derivamos funções polinomiais.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = \sqrt{x}$. Para calcular a sua derivada, precisamos, inicialmente, escrever a raiz como uma potência fracionária. Note que o argumento da raiz está elevado à primeira potência e que o índice da raiz quadrada é igual a 2. Ou seja:

$$y(x) = \sqrt{x}$$

$$y(x) = \sqrt[2]{x^1}$$

Logo:

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Calculando a derivada, ficamos com:

$$y'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)'$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} \,.\, x^{\frac{1}{2} - 1}$$

No expoente, temos:

$$\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=-\frac{1}{2}$$

Logo:

$$y'(x)=\frac{1}{2}\,.\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'(x)=\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Escrevendo novamente o expoente fracionário como uma raiz, temos:

$$y'(x)=\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Logo, a derivada de $y(x)=\sqrt{x}$ é $y'(x)=\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}}$

Observação

No exemplo que acabamos de estudar e no próximo, é utilizada a seguinte propriedade de potência:

$$x^{-a}=\frac{1}{x^{a}}$$

No tipo de caso em estudo, o procedimento será sempre o mesmo, independentemente do índice da raiz e do expoente do argumento, como detalhamos no exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x)=\sqrt[5]{x^2}$. Para calcular a sua derivada, precisamos primeiro escrever a raiz como uma potência fracionária:

$$y(x)=\sqrt[5]{x^2}$$

Logo:

$$y(x) = x^{\frac{2}{5}}$$

Calculando a derivada, ficamos com:

$$y'(x) = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)'$$

$$y'(x) = \frac{2}{5} . x^{\frac{2}{5}-1}$$

Calculando o expoente, temos:

$$\frac{2}{5} - 1 = \frac{2}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{3}{5}$$

Logo:

$$y'(x) = \frac{2}{5} . x^{-\frac{3}{5}}$$

$$y'(x) = \frac{2}{5} . \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}$$

Escrevendo novamente o expoente fracionário como uma raiz, temos:

$$y'(x) = \frac{2}{5} . \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$$

Logo, a derivada de $y(x) = \sqrt[5]{x^2}$ é $y'(x) = \frac{2}{5} . \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

3.2.6 Seno e cosseno

As derivadas das funções seno e cosseno são dadas na tabela a seguir.

Tabela 6 – Derivadas das funções seno e cosseno

Função	Derivada
y(x) = sen(x)	y'(x) = cos(x)
y(x) = cos(x)	y'(x) = -sen(x)

Nos exemplos a seguir, mostraremos os cálculos das derivadas de funções seno e cosseno, lembrando que podemos combinar mais de uma regra de derivação nos cálculos.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função $y(x)=5\ .\ \cos(x)$. A derivada dessa função é calculada por:

$$y'(x)=\left[5\ .\ \cos(x)\right]'$$

Note que a função cosseno é multiplicada pela constante, 5, que pode ser "tirada" da derivada:

$$y'(x)=5\ .\ \left[\cos(x)\right]'$$

Da tabela anterior, vemos que a derivada do cosseno é menos seno. Logo:

$$y'(x)=-5\ .\ \text{sen}(x)$$

A derivada da função $y(x)=5\ .\ \cos(x)$ é, portanto, $y'(x)=-5\ .\ \text{sen}(x)$.

Exemplo 2

Considere a função $y(x)=3\ .\ \text{sen}(x)+2$. A derivada dessa função é calculada por:

$$y'(x)=\left[3\ .\ \text{sen}(x)+2\right]'$$

Temos que a derivada da soma é a soma das derivadas. Logo:

$$y'(x)=\left[3\ .\ \text{sen}(x)\right]'+\left[2\right]'$$

Vemos que a função seno é multiplicada por uma constante. Então, podemos "tirar" essa constante da derivada:

$$y'(x) = 3\,.\,\left[\operatorname{sen}(x)\right]' + [2]'$$

Da tabela anterior, vemos que a derivada de seno é cosseno. Lembrando que a derivada de uma constante é igual a zero, temos:

$$y'(x) = 3\,.\,\cos(x) + 0$$

$$y'(x) = 3\,.\,\cos(x)$$

Logo, a derivada de $y(x) = 3\,.\,\operatorname{sen}(x) + 2$ é $y'(x) = 3\,.\,\cos(x)$

3.2.7 Função exponencial de base e

A derivada da função exponencial de base e é igual à própria função exponencial de base e.

Considere a função exponencial de base e $y(x) = e^x$. A sua derivada é dada por:

$$y'(x) = \left(e^x\right)'$$

$$y'(x) = e^x$$

No exemplo a seguir, calculamos uma derivada desse tipo.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = 3\,.\,e^x + 5$. A sua derivada é dada por:

$$y'(x) = \left(3\,.\,e^x + 5\right)$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas, ficamos com:

$$y'(x) = \left[3\,.\,e^x\right]' + [5]'$$

Passando a constante multiplicativa 3 “para fora” da primeira derivada e lembrando que a derivada de uma constante é igual a zero, temos:

$$y'(x) = 3 \,.\, \left[e^x\right]' + 0$$

Como a derivada da exponencial de base e é ela própria, chegamos a:

$$y'(x) = 3 \,.\, e^x$$

Logo, a derivada da função $y(x) = 3 \,.\, e^x + 5$ é $y'(x) = 3 \,.\, e^x$

3.2.8 Função logaritmo neperiano

A derivada da função logaritmo neperiano, dada por $y(x) = \ln(x)$, é igual à função $\frac{1}{x}$. Ou seja:

$$y'(x) = \left[\ln(x)\right]'$$

$$y'(x) = \frac{1}{x}$$

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x) = 2 \,.\, \ln(x)$. A derivada dessa função é dada por:

$$y'(x) = \left[2 \,.\, \ln(x)\right]'$$

Note que temos uma multiplicação de função por constante na derivada. Então, podemos “tirar” a constante multiplicativa da derivada:

$$y'(x) = 2 \,.\, \left[\ln(x)\right]'$$

Como a derivada do logaritmo neperiano é $\frac{1}{x}$, temos:

$$y'(x) = 2 \,.\, \frac{1}{x}$$

$$y'(x) = \frac{2}{x}$$

Logo, a derivada da função $y(x) = 2 \,.\, \ln(x)$ é $y'(x) = \frac{2}{x}$

3.2.9 Regra do produto

Quando derivamos um produto de funções, devemos aplicar a regra do produto.

Considere duas funções f(x) e g(x), contínuas e deriváveis. A derivada do produto dessas duas funções é dada por:

$$\left[f(x).g(x)\right]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

A seguir, veremos dois exemplos de aplicação da regra do produto.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função y(x) = x . sen(x). Para calcular sua derivada, precisamos usar a regra do produto, já que essa função é o produto da função x pela função sen(x).

Aplicando a regra do produto, ainda sem calcular as derivadas, temos o seguinte:

$$y'(x) = \left[x\ .\ \mathrm{sen}(x)\right]'$$

$$y'(x) = x'\ .\ \mathrm{sen}(x) + x\ .\ \left[\mathrm{sen}(x)\right]'$$

Agora, calculamos as derivadas. Para isso, lembramos que $x' = 1$ e que $\left[\mathrm{sen}(x)\right]' = \cos(x)$:

$$y'(x) = 1\ .\ \mathrm{sen}(x) + x\ .\ \cos(x)$$

$$y'(x) = \mathrm{sen}(x) + x\ .\ \cos(x)$$

Logo, a derivada da função $y(x) = x\ .\ \mathrm{sen}(x)$ é $y'(x) = \mathrm{sen}(x) + x\ .\ \cos(x)$

Exemplo 2

Considere a função y(x) = e^x . x^5. Temos novamente o produto de duas funções, da função exponencial de base e e da função x^5. Então, precisamos aplicar a regra do produto para calcular sua derivada.

Aplicando a regra do produto, sem calcular ainda as derivadas, temos:

$$y'(x) = (e^x .\ x^5)'$$

$$y'(x) = \left[e^x\right]' .\ x^5 + e^x .\ \left[x^5\right]'$$

Lembrando que a derivada da função exponencial de base e é a própria exponencial de base e e que, ao derivarmos a potência, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o anterior reduzido de uma unidade, ficamos com:

$$y'(x) = e^x . x^5 + e^x . 5 . x^{5-1}$$

$$y'(x) = e^x . x^5 + 5 . e^x . x^4$$

Note que a exponencial de base e aparece nos dois termos da soma. Então, podemos colocá-la em evidência:

$$y'(x) = e^x . \left(x^5 + 5 . x^4\right)$$

Logo, a derivada da função $y(x) = e^x . x^5$ é $y'(x) = e^x . \left(x^5 + 5 . x^4\right)$

Saiba mais

Para ver um detalhamento sobre como colocar termos comuns em evidência em equações, visite o site:

MATEMÁTICA DIDÁTICA. *Colocando fatores comuns em evidência*. [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3Lw9QVu. Acesso em: 31 mar. 2022.

3.2.10 Regra do quociente

Quando calculamos a derivada de uma divisão de funções, devemos usar a regra do quociente.

Considere duas funções f(x) e g(x), contínuas e deriváveis. A derivada do quociente dessas duas funções é dada por:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) . g(x) - f(x) . g'(x)}{g^2(x)}$$

Note que, enquanto na regra do produto tínhamos apenas o desenvolvimento de uma soma, na regra do quociente temos o desenvolvimento de uma subtração e ainda fazemos sua divisão pelo quadrado da função do denominador.

A seguir, veremos dois exemplos de aplicação da regra do quociente.

Exemplo de aplicação

Considere a função $y(x)=\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$. Para calcular sua derivada, precisamos usar a regra do quociente, já que temos uma divisão das funções sen(x) e x.

Aplicando a regra do quociente, sem calcular ainda as derivadas, temos:

$$y'(x)=\left[\frac{\text{sen}(x)}{x}\right]'$$

$$y'(x)=\frac{[\text{sen}(x)]'\,.\,x-\text{sen}(x)\,.\,x'}{x^2}$$

Lembrando que a derivada de seno é igual ao cosseno e que a derivada de x é igual a 1, temos:

$$y'(x)=\frac{\cos(x)\,.\,x-\text{sen}(x)\,.\,1}{x^2}$$

$$y'(x)=\frac{x\,.\,\cos(x)-\text{sen}(x)}{x^2}$$

Logo, a derivada da função $y(x)=\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$ é $y'(x)=\dfrac{x\,.\,\cos(x)-\text{sen}(x)}{x^2}$

Lembrete

Sobre as derivadas das funções seno e cosseno, vimos que:

$$y(x)=\text{sen}(x)\rightarrow y'(x)=\cos(x)$$

$$y'(x)=\cos(x)\rightarrow y(x)=-\text{sen}(x)$$

Exemplo de aplicação

Quando falamos de derivação de funções trigonométricas, tratamos das derivadas da função seno e da função cosseno, mas não tratamos da derivada da função tangente. Para derivar a função tangente, basta lembrar que podemos escrevê-la como:

$$\tan(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Agora, aplicamos a regra do quociente:

$$y(x) = \tan(x)$$

$$y(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Derivando, chegamos a:

$$y'(x) = \left[\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right]'$$

Aplicando a regra do quociente, ainda sem calcular as derivadas, temos:

$$y'(x) = \frac{[\mathrm{sen}(x)]' \,.\, \cos(x) - \mathrm{sen}(x) \,.\, [\cos(x)]'}{\cos^2(x)}$$

Note que a representação $\cos^2(x)$ é equivalente à representação $[\cos(x)]^2$. Lembrando que a derivada da função seno é a função cosseno e que a derivada da função cosseno é menos a função seno, temos:

$$y'(x) = \frac{\cos(x) \,.\, \cos(x) - \mathrm{sen}(x) \,.\, [-\mathrm{sen}(x)]}{\cos^2(x)}$$

Aqui, $\cos(x) \,.\, \cos(x) = \cos^2(x)$ e $\mathrm{sen}(x) \,.\, \mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}^2(x)$. Lembrando que, quando temos um fator negativo vezes outro fator negativo, o resultado é positivo, chegamos a:

$$y'(x) = \frac{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Lembrando que $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$, chegamos a:

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Logo, a derivada da função $y(x) = \tan(x)$ é $y'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Saiba mais

Para saber mais sobre a função tangente, acesse:

A FUNÇÃO tangente. Youtube por Portal da matemática OBMEP. [s.l.], jun. 2017. 1 vídeo (10min25s). Disponível em: https://bit.ly/3JaHfU7. Acesso em: 31 mar. 2022.

Ainda, para saber o motivo de $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$, leia:

DEMONSTRAÇÃO da identidade trigonométrica fundamental. *Khan Academy*, 2022. Disponível em: https://bit.ly/3DzvcPe. Acesso em: 31 mar. 2022.

4 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Podemos derivar funções mais de uma vez, o que nos leva às chamadas derivadas de ordem superior.

Considere a função f(x), contínua e derivável. Sua derivada pode ser indicada por f'(x). Ao derivarmos pela segunda vez a função f(x), teremos a derivada de segunda ordem de f(x), indicada por f''(x). Da mesma forma, se derivarmos a função pela terceira vez, teremos f'''(x).

Usando a notação diferencial para a derivada de segunda ordem de f(x), temos o seguinte:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right] = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

Note que a derivada de segunda ordem é indicada com o índice 2 no diferencial e na variável de derivação. Dessa forma, a derivada de terceira ordem é indicada por:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]\right\} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right] = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

Observação

Em derivadas de ordem superior, na notação diferencial, os números não são expoentes de potência, mas uma indicação da ordem da derivada.

Então, para calcular derivadas de ordem superior, basta derivar mais de uma vez.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a função $y(x) = x^5 + 3 \,.\, x^2$. Calcule $f''(x)$.

Aqui, devemos calcular a derivada de segunda ordem da função dada. Então, basta derivar uma primeira vez e derivar novamente o resultado obtido.

Calculando a derivada de primeira ordem, temos:

$$f'(x) = \left(x^5 + 3 \,.\, x^2\right)'$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas e constantes multiplicativas podem "sair" da derivada, ficamos com:

$$f'(x) = \left(x^5\right)' + 3 \,.\, \left(x^2\right)'$$

Lembrando que, ao derivarmos potências, o expoente "cai" multiplicando e o novo expoente é o antigo diminuído de uma unidade, chegamos a:

$$f'(x) = 5 \,.\, x^{5-1} + 3 \,.\, 2 \,.\, x^{2-1}$$

$$f'(x) = 5 \,.\, x^4 + 6 \,.\, x^1$$

$$f'(x) = 5 \,.\, x^4 + 6 \,.\, x$$

Derivando novamente, pois queremos a derivada de segunda ordem $f''(x)$, ficamos com:

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'$$

$$f''(x) = \left(5 \,.\, x^4 + 6 \,.\, x\right)'$$

Usando as mesmas propriedades da primeira derivada, obtemos:

$$f''(x) = 5.\left(x^4\right)' + 6.(x)'$$

$$f''(x) = 5.4.x^{4-1} + 6.1.x^{1-1}$$

$$f''(x) = 20.x^3 + 6.x^0$$

$$f''(x) = 20.x^3 + 6.1$$

$$f''(x) = 20.x^3 + 6$$

Veja que usamos o fato de que qualquer número elevado a zero é igual a 1, ou seja, $x^0 = 1$.

Logo, a derivada de segunda ordem da função $y(x) = x^5 + 3 . x^2$ é igual a $f''(x) = 20 . x^3 + 6$

Exemplo 2

Considere a função $f(x) = \cos(x)$. Calcule $f'''(x)$.

Nesse caso, é pedida a derivada de terceira ordem da função; então, devemos derivá-la três vezes.

Calculando a derivada de primeira ordem, temos:

$$f'(x) = \left[\cos(x)\right]'$$

$$f'(x) = -\text{sen}(x)$$

Calculando a derivada de segunda ordem, temos:

$$f''(x) = \left[-\text{sen}(x)\right]'$$

$$f''(x) = -1.\left[\text{sen}(x)\right]'$$

$$f''(x) = -1.\cos(x)$$

$$f''(x) = -\cos(x)$$

Calculando finalmente a derivada de terceira ordem, temos:

$$f'''(x) = \left[-\cos(x)\right]'$$

$$f'''(x) = -1 \,.\, \left[\cos(x)\right]'$$

$$f'''(x) = -1 \,.\, \left[-\text{sen}(x)\right]$$

Como a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo, temos:

$$f'''(x) = \text{sen}(x)$$

Logo, a derivada da função $f(x) = \cos(x)$ é $f'''(x) = \text{sen}(x)$

Lembrete

A derivada da função seno é a função cosseno, já a derivada da função cosseno é igual à função menos seno.

Uma das aplicações de derivadas de ordem superior é o estudo da concavidade de funções, como veremos mais adiante.

Resumo

Começamos a unidade I estudando funções, analisando suas equações, seus gráficos e suas características.

Vimos que o gráfico de uma função constante, de equação $y = a$, é uma linha horizontal.

Observamos que os gráficos de funções lineares, de equação $y = a . x + b$, são retas cujas inclinações se relacionam com o coeficiente angular a. Se o coeficiente angular a da equação da reta é positivo, temos uma reta crescente. Se o coeficiente angular a é negativo, temos uma reta decrescente.

Verificamos que funções de 2º grau, dadas por equações do tipo $y = a . x^2 + b . x + c$, têm parábolas como gráficos. Se o coeficiente a é positivo, o gráfico é uma parábola com concavidade para cima. Se o coeficiente a é negativo, a parábola tem concavidade para baixo.

Analisamos também os gráficos de funções exponenciais e de funções logarítmicas, além dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Depois de estudar funções, estudamos limites. Vimos que o limite de uma função $y = f(x)$ quando x tende a a é o cálculo dessa função, não para um valor de x exato, mas para valores próximos desse valor. Aprendemos como estimar os limites a partir do gráfico das funções.

Concluímos que, para funções contínuas, o limite de uma função f(x) para x tendendo a a é igual à função calculada no ponto, ou seja,f(a).

Para fazer operações com limites, vimos as seguintes propriedades:

- a soma de limites de funções é igual ao limite da soma das funções;
- o produto de limites de funções é igual ao limite do produto das funções;
- a razão entre dois limites de funções é igual ao limite da razão das funções;
- uma função calculada sobre um limite de uma segunda função é igual ao limite da função calculada sobre a segunda função.

Seguimos então para o estudo de derivadas. A derivada é associada à taxa de variação de uma função. A derivada de uma função em dado ponto é igual ao coeficiente angular da reta tangente à função nesse ponto.

Ensinamos algumas regras de derivação:

- a derivada de uma constante é igual a zero;
- a derivada da função seno é a função cosseno;
- a derivada da função cosseno é menos a função seno;
- a derivada da função exponencial é ela mesma;
- a derivada da função logaritmo de x é igual à função $\frac{1}{x}$.

Vimos também as propriedades de derivadas:

- a derivada da soma de funções é a soma das derivadas das funções;
- a derivada do produto de uma constante por uma função é a constante multiplicada pela derivada da função.

Quando tratamos de derivada do produto e da divisão de funções, vimos a regra do produto e a regra do quociente, dadas por:

$$\left[f(x)\,.\,g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) - g'(x)}{g^2(x)}$$

Consideramos uma função polinomial de um único termo dada por:

$$y(x) = x^n$$

Na expressão, n é um número real. Vimos que a derivada dessa função é dada por:

$$y'(x) = \left[x^n\right]' = n\,.\,x^{n-1}$$

Finalizamos a unidade estudando as derivadas de ordem superior, em que derivamos novamente o resultado obtido de uma derivada. Para calcularmos uma derivada de segunda ordem, indicada por f''(x), basta derivar uma primeira vez e derivar novamente o resultado.

Exercícios

Questão 1. Observe os gráficos das figuras a seguir.

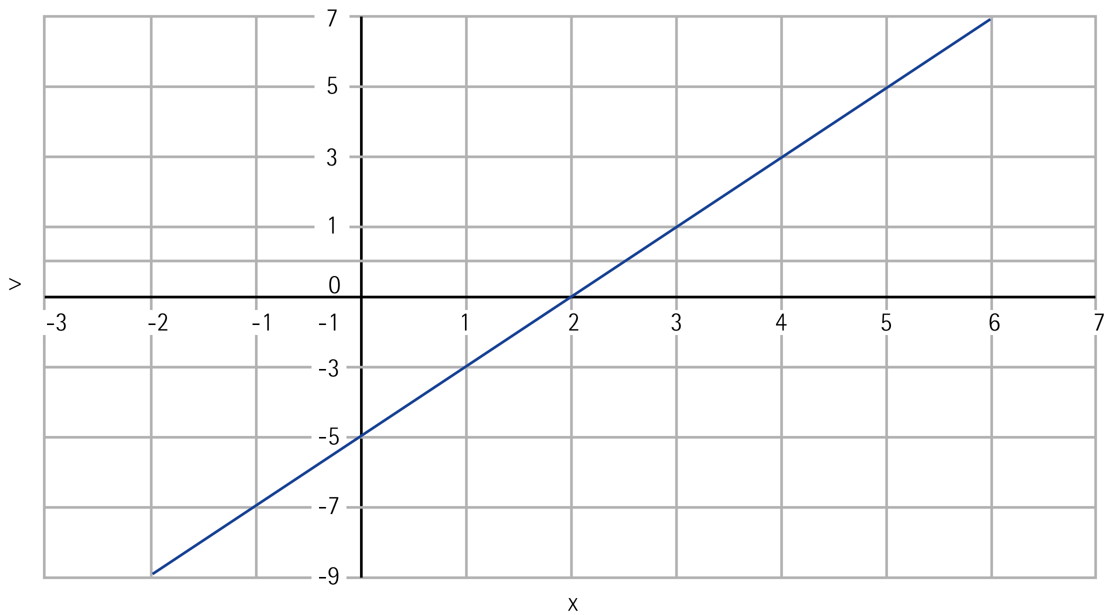

Figura 36

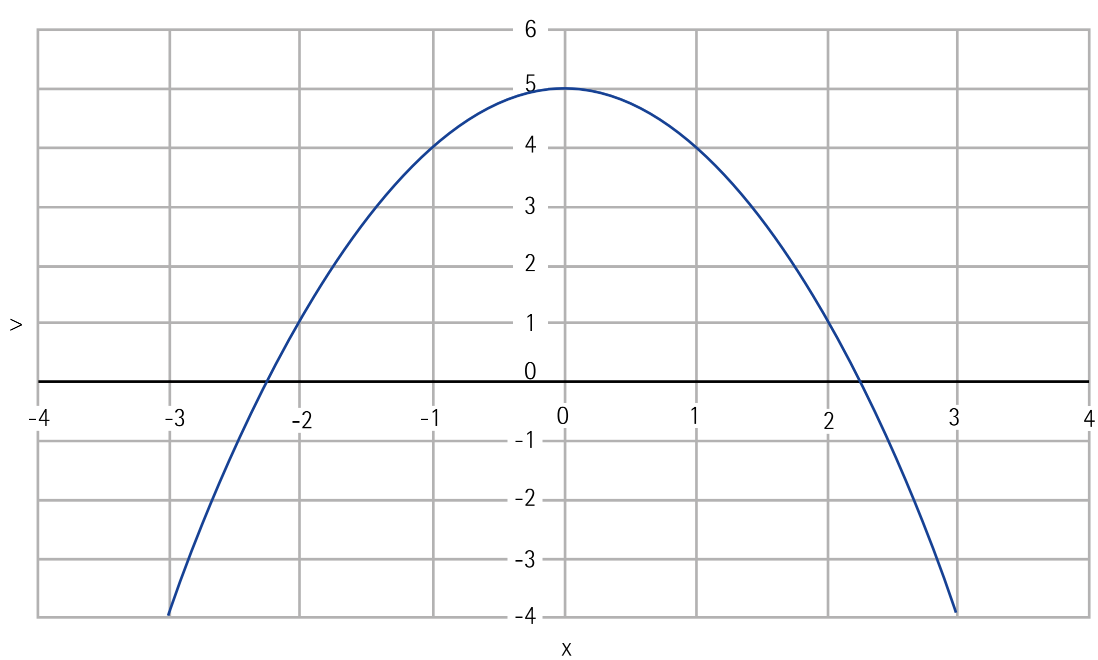

Figura 37

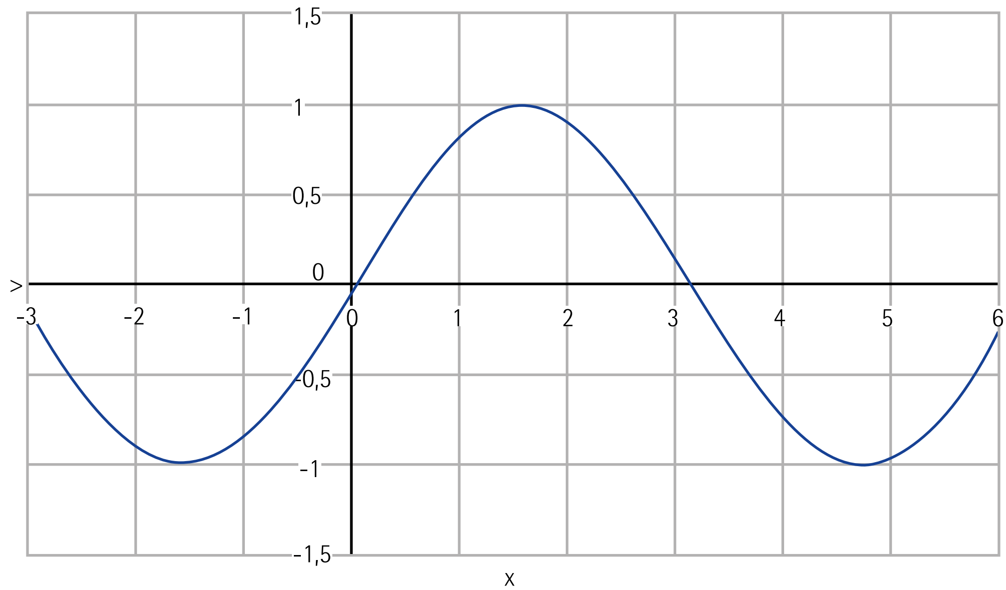

Figura 38

Com base na observação e nos seus conhecimentos, avalie as afirmativas.

I – Na figura 36, temos o gráfico da função f(x) = 2 x - 5.

II – Na figura 37, temos o gráfico da função f(x) = x 2 + 5.

III – Na figura 38, temos o gráfico da função f(x) = cos x.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I e III, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa A.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa correta.

Justificativa: na figura 36, temos uma reta inclinada para a direita. Logo, trata-se de uma função do 1º grau com coeficiente angular $a > 0$.

Vemos que a reta cruza o eixo vertical em $y = -5$. Logo, o coeficiente linear b da função do 1º grau vale - 5.

A equação geral de uma reta é $y = ax + b$. No caso, temos $y = ax - 5$.

Na figura 36, podemos visualizar, por exemplo, o ponto $P = (x, y) = (6, 7)$ da reta.

Se fizermos $x = 6$ e $y = 7$ em $y = ax - 5$, calcularemos o coeficiente angular a da função do 1º grau, que resultará em $a = 2$, conforme mostrado a seguir.

$7 = a \cdot 6 - 5 \rightarrow 7 + 5 = a \cdot 6 \rightarrow 12/6 = a \rightarrow a = 2$

Logo, na figura 36, temos o gráfico da função $y = 2x - 5$ ou $f(x) = 2x - 5$

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: o gráfico da função $f(x) = x2 + 5$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, visto que o coeficiente de x2 é 1, ou seja, é um número maior que 0.

Na figura 37, temos uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, essa figura somente poderia refletir o gráfico de uma parábola em que o coeficiente a de $f(x) = ax\ 2 + bx + c$ fosse um número menor que 0.

III – Afirmativa incorreta.

Justificativa: na figura 38, temos o gráfico de uma função periódica com imagens variando entre - 1 e 1. Tal figura pode refletir o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, que passa pela origem, visto que $\text{sen } 0 = 0$. Logo, não se trata do gráfico de $f(x) = \cos x$, que não passa pela origem, visto que $\cos 0 = 1$.

Questão 2. Observe os gráficos das figuras a seguir.

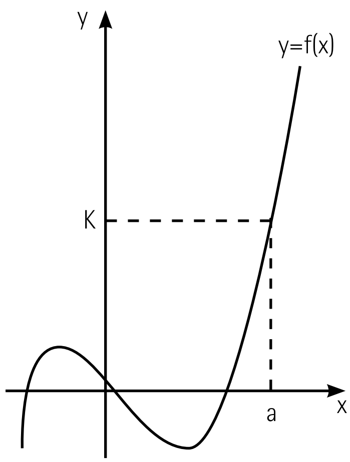

Figura 39

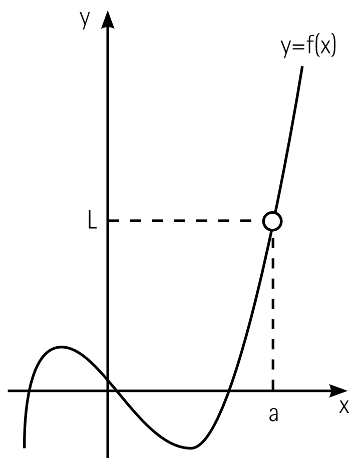

Figura 40

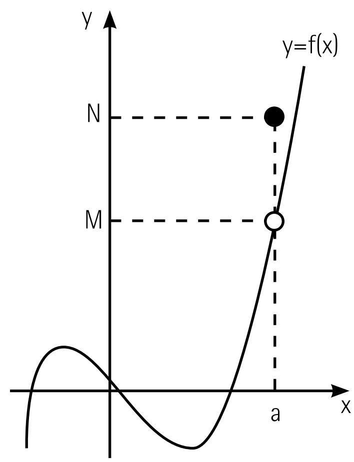

Figura 41

Adaptadas de: DOI, C. M.; LAURICELLA, A. L. M. *Como visualizar e resolver limites*: 100 exercícios detalhadamente resolvidos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2016. p. 39.

Com base na observação e nos seus conhecimentos, avalie as afirmativas.

I – Na figura 39, vemos que o limite de $y = f(x)$ quando x tende a a é $f(a) = K$.

II – Na figura 40, vemos que a imagem de $x = a$ é $f(a) = L$.

III – Na figura 41, vemos que o limite de $y = f(x)$ quando x tende a a é N, sendo que $f(a) = M$.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I e III, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa A.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa correta.

Justificativa: na figura 39, vemos que $\lim_{x \to a} f(x) = K = f(a)$, sendo que a pertence ao domínio de y = f(x).

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: na figura 40, vemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sendo que a não pertence ao domínio de y = f(x) e não existe f(a).

III – Afirmativa incorreta.

Justificativa: na figura 41, vemos que $\lim_{x \to a} f(x) = M \neq f(a)$, sendo que a pertence ao domínio de y = f(x) e f(a) = N.