UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA
Interativa

Matemática Discreta

Autor: Prof. Hugo Gava Insua
Colaboradoras: Profa. Vanessa dos Santos Lessa
Profa. Christiane Mazur Doi

Professor conteudista: Hugo Gava Insua

Graduado em Matemática pela Universidade Metodista de São Paulo (2000), mestre pela Universidade Paulista (UNIP) em Engenharia de Produção e Especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (2017). Atua como professor do curso de Ciência da Computação e Engenharia da Computação da UNIP, ministrando as disciplinas Matemática Discreta, Cálculo para Computação, Álgebra Linear, Estatística, Computação Gráfica, Processamento Digital de Imagem, Linguagens Formais e Autômatos e Aspectos Teóricos da Computação. Atuou como professor na Rede Oficial e Privada de Ensino Fundamental e Médio do Estado de São Paulo.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I59m Insua, Hugo Gava.

Matemática Discreta / Hugo Gava Insua. – São Paulo: Editora Sol, 2022.

184 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Análise Combinatória. 2. Conjuntos. 3. Indução. I. Título.

CDU 51

U516.16 – 22

Material Didático

Comissão editorial:
Profa. Dra. Christiane Mazur Doi
Profa. Dra. Angélica L. Carlini
Profa. Dra. Ronilda Ribeiro

Apoio:
Profa. Cláudia Regina Baptista
Profa. Deise Alcantara Carreiro

Projeto gráfico:
Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:
Aline Ricciardi
Jaci Albuquerque

Sumário

Matemática Discreta

Unidade II

APRESENTAÇÃO

Nesta disciplina, apresentaremos como funciona a matemática discreta, seu escopo da disciplina, sua importância para a ciência da computação, o conteúdo a ser estudado e os objetivos do curso.

O vocábulo "discreto", constante no nome da disciplina, diferentemente do significado habitualmente atribuído a ele, vem da palavra inglesa *discrete*, que, entre outros significados, significa distinto, diferente, descontínuo.

Dessa forma, podemos entender matemática discreta como ramo da matemática que se dedica ao estudo das grandezas descontínuas ou não infinitesimais, imprimindo esforços na resolução de problemas, em cujas funções, as imagens variam de forma descontínua, abrupta ou em saltos, ao contrário das imagens das funções cujo domínio são os números reais, que crescem ou decrescem de maneira contínua, suave e sem interrupções. Portanto os objetos de estudo, escopo da matemática discreta, são os números naturais, inteiros, grafos e as proposições da lógica.

A partir da segunda metade do século passado, as pesquisas em matemática discreta aumentaram consideravelmente, por consequência, entre outros fatores, da evolução dos computadores digitais que processam e armazenam dados em forma bits (a menor unidade de informação), que assumem os valores discretos 0 e 1. Essas pesquisas proporcionaram a descrição de objetos e problemas, do escopo da ciência da computação, em que podemos destacar o desenvolvimento de software, criptografia, linguagens de programação, entre outros.

Para o aluno estar preparado para responder aos desafios ensejados pela ciência da computação, estudaremos os princípios da contagem, análise combinatória, inclusão e exclusão, recursão e indução matemática.

INTRODUÇÃO

O presente livro-texto vai ser dividido em duas unidades com quatro tópicos cada.

Começaremos pelo estudo das listas, alicerce da análise combinatória e, juntamente à teoria dos conjuntos, é base para criação de autômatos finitos. Na sequência, estudaremos permutação, arranjo e combinação sem repetições e o binômio de Newton. Por fim, aprofundamos o estudo em análise combinatória.

Na unidade dois, nos dedicaremos ao estudo de conjuntos, recursão e indução matemática, três tópicos de importância da teoria da computação, visto que tais conceitos são amplamente utilizados no desenvolvimento de algoritmos.

Unidade I

1 COLEÇÕES

Podemos diferenciar dois tipos diferentes de coleções: as ordenadas, que chamamos de listas; e as desordenadas, que chamamos de conjunto. Neste tópico, estudaremos as listas; adiante, o estudo de conjuntos.

1.1 Listas

Representamos uma lista através de parênteses, onde os elementos são separados por vírgula. Exemplificando, (c, b, a) é a lista cujo primeiro objeto é a letra "c", o segundo objeto é a letra "b" e o terceiro objeto é a letra "c". Quando dizemos que uma lista é uma coleção cuja sequência dos objetos contidos nela é ordenada, significa que a ordem em que aparecem os elementos importa, ou seja, a lista (c, b, a) é diferente da lista (a, b, c).

1.1.1 Comprimento de uma lista

Chamamos de comprimento de lista a quantidade de objetos inseridos nela.

Exemplo: a lista (1, 2, 3, 3) tem comprimento 4.

1.1.2 Igualdade entre listas

Podemos dizer que duas listas são iguais, se e somente se:

- tiverem comprimentos iguais;
- os objetos nas referidas posições forem iguais.

Exemplo: a lista (x, y) e a lista (1, 2) são iguais, se e somente se, $x = 1$ e $y = 2$

Em qualquer assunto em que a matemática faça parte, também estão presentes as listas. Na geometria analítica, podemos citar que os pares ordenados (x, y) são listas de comprimento 2. Na aritmética, podemos dizer que o número 356 é a lista (3, 5, 6). Na computação, os identificadores em algoritmos são listas de comprimento máximo 40, no qual o primeiro objeto é uma letra e os demais objetos são dígitos, caracteres de sublinhado ou letras.

1.1.3 Lista vazia

Denominamos lista vazia aquela cujo comprimento é 0 e representamos ( ).

1.1.4 Contagem de listas

Para entender como efetuar a contagem de lista, observe o exemplo a seguir.

Se o evento formar listas de dois objetos (comprimento 2), quantas listas nessa condição podemos formar com os algarismos 0, 1 e 2 na primeira posição e com os algarismos 4, 5, 6 e 7 na segunda posição?

Escreveremos todas as possibilidades por etapas, de modo a não repetir nem omitir nenhuma possibilidade.

1ª etapa: todas as listas iniciadas por **0**: (**0**, 4) (**0**, 5) (**0**, 6) (**0**, 7)

2ª etapa: todas as listas iniciadas por **1**: (**1**, 4) (**1**, 5) (**1**, 6) (**1**, 7)

3ª etapa: todas as listas iniciadas por **2**: (**2**, 4) (**2**, 5) (**2**, 6) (**2**, 7)

Note que, para a primeira posição, temos 3 possibilidades (os algarismos 0, 1, 2) ou 3 etapas (linha iniciada 0, linha iniciada por 1 e linha iniciada por 2); e, para a segunda posição, temos 4 possibilidades (os algarismos 4, 5, 6 e 7). Há, portanto, $3 \cdot 4 = 12$ listas.

Generalizando, se o evento formar lista de dois objetos (comprimento 2), quantas listas nessa condição podemos formar com os números inteiros de 1 a m na primeira posição e com os inteiros de 1 a n na segunda posição?

1ª etapa: todas as listas iniciadas por **1**: (**1**, 1) (**1**, 2) ⋯ (**1**, n)

2ª etapa: todas as listas iniciadas por **2**: (**2**, 1) (**2**, 2) ⋯ (**2**, n)

⋮

mª etapa: todas as listas iniciadas por **m**: (**m**, 1) (**m**, 2) ⋯ (**m**, n)

Assim:

$$\begin{array}{l} (1, 1)(1, 2)\cdots(1, n) \\ (2, 1)(2, 2)\cdots(2, n) \\ \ \ \vdots \quad \ \vdots \quad \ \vdots \\ (m, 1)(m, 2)\cdots(m, n) \end{array}$$

Note que existe m linhas (etapas), e cada linha contém n listas. Portanto o número total de listas é dado por:

$$\underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n$$

É fácil perceber que, se o número de opções da primeira posição for igual ao número de opções da segunda posição, temos que o número total de listas é dado por n^2.

Assim, quantas listas diferentes de comprimento 2 podemos formar com os algarismos de 1 a 5 em que, nas duas posições, os números sejam distintos, ou seja, sem repetição?

1ª etapa: todas listas iniciadas por 1: ____ (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5)

2ª etapa: todas listas iniciadas por 2: (2, 1) ____ (2, 3) (2, 4) (2, 5)

3ª etapa: todas listas iniciadas por 3: (3, 1) (3, 2) ____ (3, 4) (3, 5)

4ª etapa: todas listas iniciadas por 4: (4, 1) (4, 2) (4, 3) ____ (4, 5)

5ª etapa: todas listas iniciadas por 5: (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) ____

Note que há 5 linhas (etapas) e, em cada linha, $5 - 1 = 4$ listas, logo, há $5 \cdot 4 = 20$

1.1.5 Princípio da multiplicação

Dadas as listas de 2 objetos em que há m opções para a primeira posição e para cada uma dessas opções, há outras n opções para a segunda posição. Logo, o número de listas é $m \cdot n$.

1.2 Princípio fundamental da contagem (princípio da multiplicação)

Vamos agora sair do universo das listas e ir para o nosso cotidiano. Veremos alguns exemplos de aplicações de listas e do princípio da multiplicação.

Exemplo 1. Imagine que uma pessoa vai realizar uma viagem de Maceió a Florianópolis passando por Curitiba. Há 4 rotas diferentes para Curitiba saindo de Maceió, e 3 rotas diferentes para Florianópolis saindo de Curitiba. Quantas são as possíveis maneiras de essa pessoa realizar a viagem de Maceió a Florianópolis?

Observe que:

À viagem de Maceió a Florianópolis denominamos "evento", composto de duas etapas sucessivas e independentes.

Resolução

1ª etapa: de Maceió a Curitiba, a pessoa tem 4 possiblidades, podendo optar pela rota 1, rota 2, rota 3 ou rota 4.

2ª etapa: de Curitiba a Florianópolis, a pessoa tem 3 possibilidades, podendo optar pela rota A, rota B ou rota C.

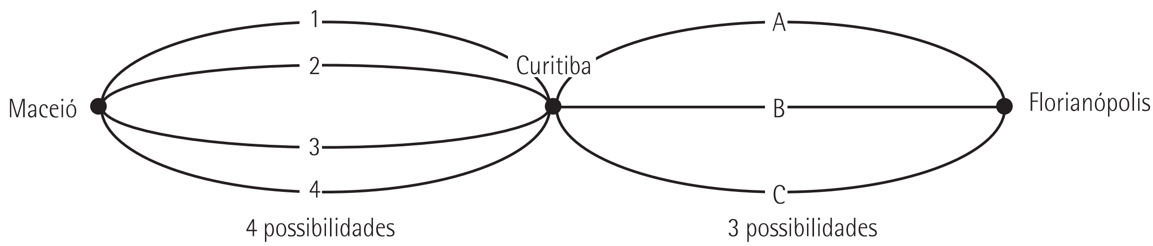


Figura 1

1A 1B 1C
2A 2B 2C
3A 3B 3C
4A 4B 4C

Total de possibilidades $4 \cdot 3 = 12$.

Caso você não tenha notado, nesse exemplo, foi pedido para formar lista de 2 objetos com os algarismos 1, 2, 3 e 4 na primeira posição, e com as letras A, B e C na segunda posição.

Exemplo 2. Uma moeda possui duas faces, cara (K) e coroa (C). Você faz 3 lançamentos dessa moeda. Qual o número de possibilidades de sequências de cara (K) e coroa (C)?

Observe que no "evento", 3 lançamentos de uma moeda é composto de 3 etapas sucessivas e independentes.

Resolução

1ª etapa: primeiro lançamento da moeda, 2 possibilidades de resultado.

2ª etapa: segundo lançamento da moeda, 2 possibilidades de resultado.

3ª etapa: terceiro lançamento da moeda, 2 possibilidades de resultado.

Como no primeiro exemplo, faremos um esquema para compreender melhor o problema.

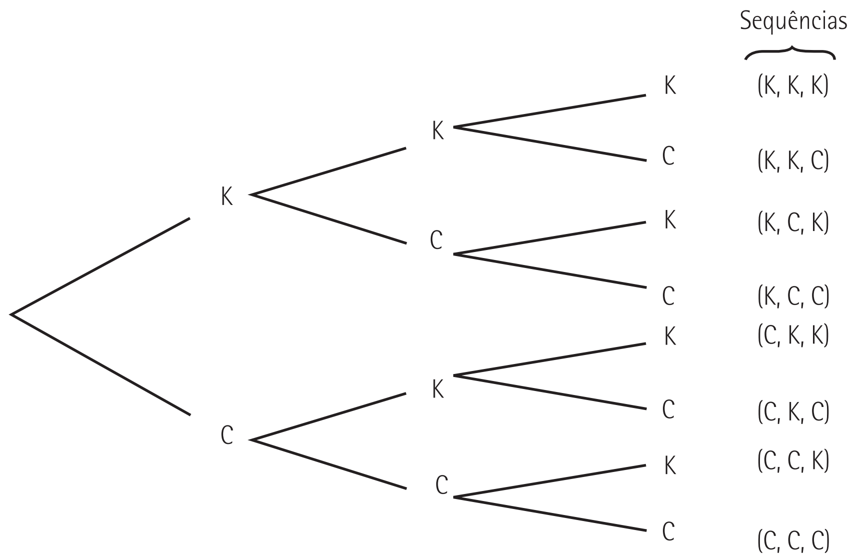


Figura 2

Executando a contagem das sequências, obtemos 8 possibilidades.

Podemos também obter a resposta sem descrever as sequências. Sendo duas possibilidades (K, C) para cada lançamento, temos:

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades

Nesse exemplo, foram solicitadas listas de comprimento 3 com as letras K e C, podendo ocupar qualquer uma das três posições.

Exemplo 3. Em um restaurante, há 2 opções de entradas (E), 3 opções de pratos principais (P) e 3 opções de sobremesas (S). Quantas e quais são as possibilidades de se fazer uma refeição nesse restaurante?

Resolução

Note que o "evento" comer no restaurante é composto de 3 etapas sucessivas e independentes.

1ª etapa: prato de entrada, 2 possibilidades de resultado.

2ª etapa: prato principal, 3 possibilidades de resultado.

3ª etapa: sobremesa, 3 possibilidades de resultado.

Para sabermos a quantidade total de possibilidades, basta multiplicar as possiblidades de cada etapa:

$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

Para saber quais são as possibilidades, montamos o esquema seguinte:

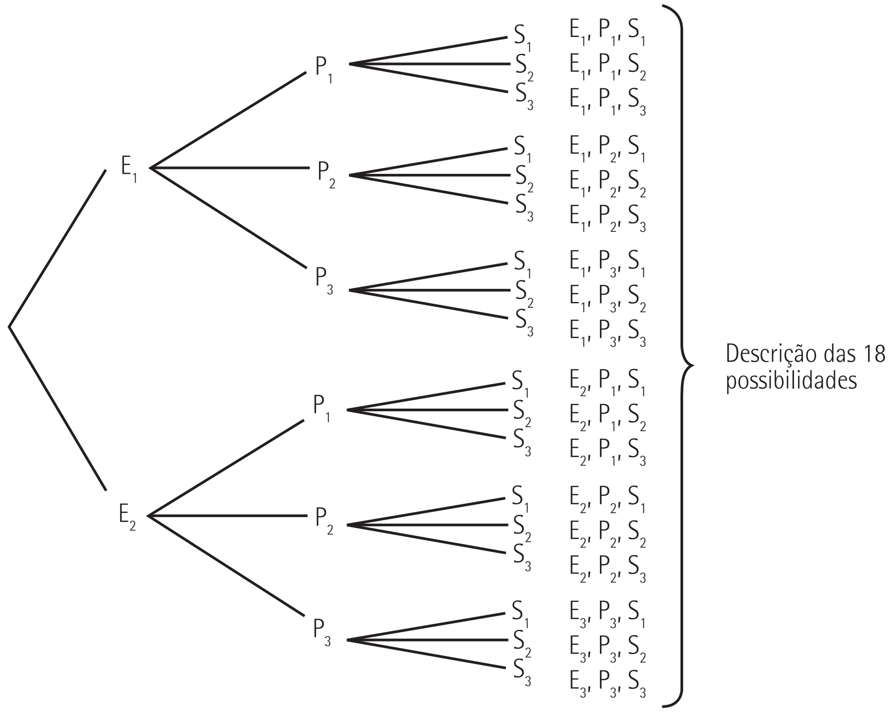


Figura 3

Por fim, nesse exemplo, foram pedidas listas de comprimento 3 com as 2 opções de entrada na primeira posição, as 3 opções de prato principal na segunda posição e as 3 opções de sobremesa na terceira posição.

De modo geral, podemos definir o princípio fundamental da contagem ou princípio da multiplicação, também, da seguinte forma: se um evento possui duas ou mais etapas sucessivas e independentes, de modo que o número de possibilidades da primeira etapa é m_1, da segunda etapa m_2 e da enésima etapa m_n, então o número total de possibilidades de ocorrência do evento é dado por $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{n-1} \cdot m_n$

Observação

Aos esquemas montados na resolução dos exemplos, damos o nome de árvore de possibilidades ou diagrama de árvore.

1.3 Fatorial

Quantas listas de 3 objetos (comprimento 3) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3 sem repeti-los?

Recorreremos à árvore de possibilidades.

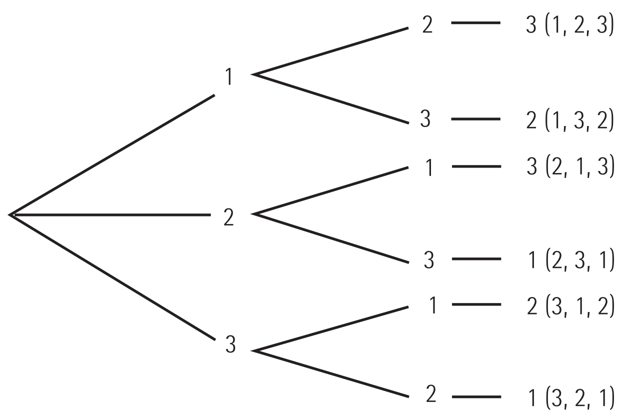


Figura 4

Observe que o problema é composto de 3 etapas com 3 possibilidades na primeira, 2 possibilidades na segunda e 1 possibilidade na terceira. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de lista sem repetição é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ listas.

Note que:

a) O valor do comprimento das listas é igual à quantidade de objetos disponíveis para formá-las.

b) Não foi permitida repetição.

c) As listas só diferem uma das outras pela posição dos objetos.

Assim, quando tivermos que calcular a quantidade de listas de comprimento n, extraída de um universo de n objetos, em que não são permitidas repetições, podemos utilizar a fórmula:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n!$

Ao símbolo n! denominamos fatorial de um número.

Vamos calcular 5!

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Observe que o fatorial de um número nada mais é que multiplicar esse número por todos seus antecessores maiores que 0.

Dois casos especiais da função fatorial:

1! = 1

0! = 1

Saiba mais

Para melhor entendimento sobre esses dois casos especiais de fatoriais, leia:

SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta*: uma introdução. São Paulo: Thomson, 2006. p. 45.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA I

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da matemática em fins do século XVII e em poucos anos, três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle* (escrito em 1654 e publicado em 1665), de Pascal; *Dissertatio de arte combinatória* (1666), de Leibniz; e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669), de Athanasius Kircher, e em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Na análise combinatória, estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações; e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

2.1 Permutação simples

A palavra **permutação** vem do latim ***permutare***, em que o prefixo ***per*** significa "completamente"; e o sufixo ***mutare***, "trocar". Dessa forma, podemos entender permutação, nos problemas de contagem, como a troca das posições de elementos de um conjunto, formando agrupamentos; e a permutação simples, como a formação de agrupamentos sem repetir elementos do conjunto. Observe os exemplos:

Exemplo 1. Quantos e quais números de 3 algarismos distintos (sem repeti-los em um mesmo número) podem ser formados com os algarismos 2, 3 e 5?

Resolução

Montando a árvore de possibilidade, temos:

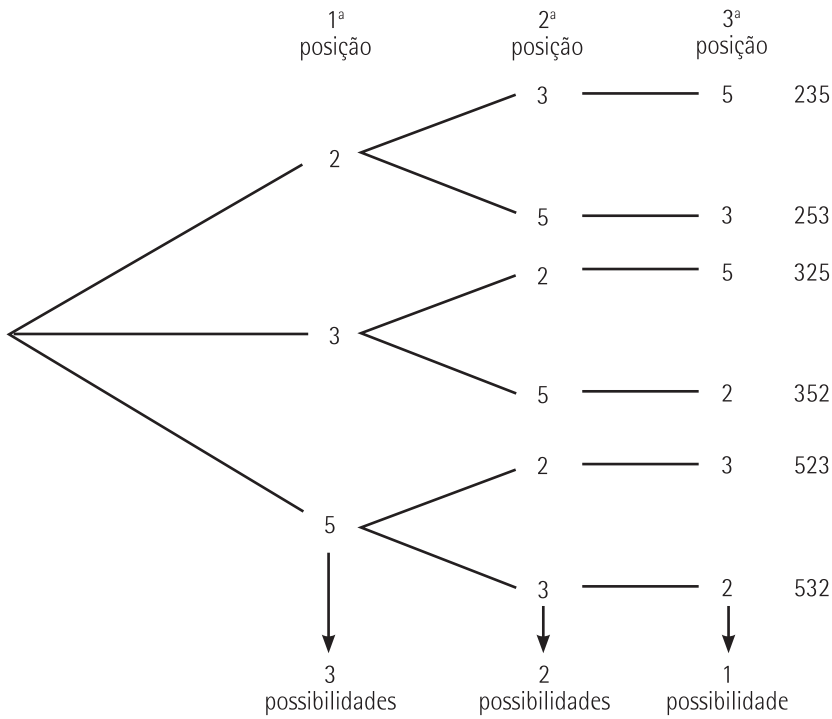


Figura 5

Pelo princípio fundamental da contagem, temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Note que os números formados 235, 253, 325, 352, 523 e 532 diferem-se pela ordem que o algarismo ocupa dentro do número, e que foram utilizados todos os elementos (os algarismos 2, 3 e 5) em cada agrupamento.

Lembrete

Podemos entender "posição" como sinônimo de "etapa"; e "agrupamento" como sinônimo de "lista".

Exemplo 2. Quantos e quais são os anagramas da palavra ROMA?

Resolução

Montando a árvore de possibilidades:

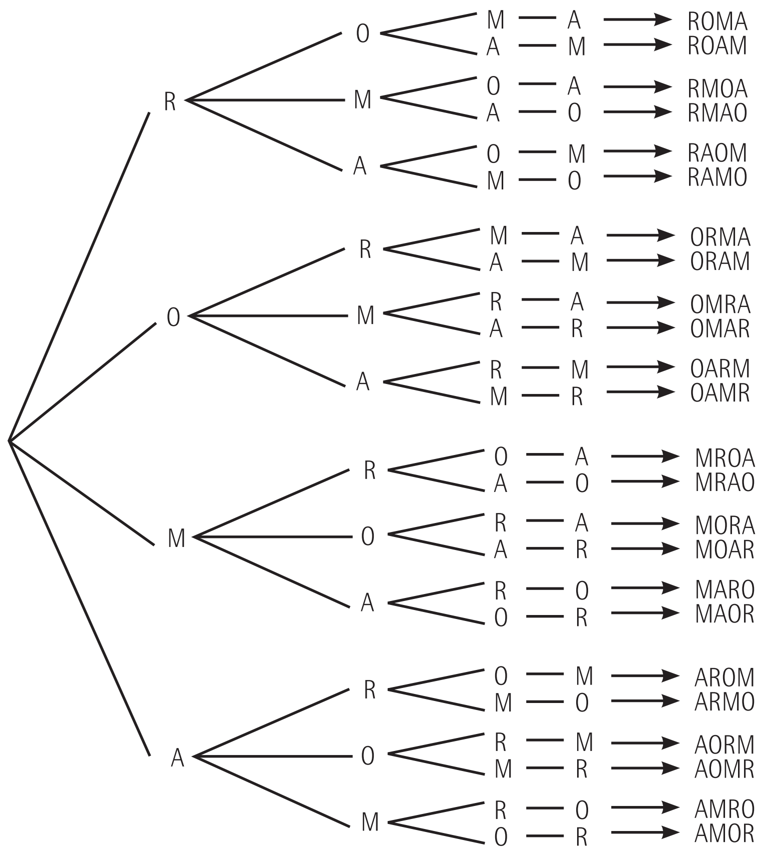


Figura 6

Analisando a árvore, temos 4 possibilidades para a 1ª posição, 3 possibilidades para a 2ª posição, 2 possibilidades para a 3ª posição e 1 possibilidade para a 4ª posição. Dessa forma, pelo princípio fundamental da contagem, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades.

Note que os anagramas formados diferem-se pela ordem que a letra ocupa dentro do anagrama e que foram utilizados todos os elementos (as letras R, O, M e A) em todos os agrupamentos.

Portanto, permutação simples são agrupamentos ordenados, sem repetição, em que são utilizados todos os "n" elementos em cada agrupamento denotada pela fórmula $P_n = n!$

2.2 Arranjo simples

Vimos que na permutação simples, usamos todos os elementos dados para formar e contar os agrupamentos. Veremos agora como contar e formar os agrupamentos gerados por uma parte dos elementos dados, ou, em outras palavras, sem utilizar todos os elementos.

Exemplo. Considerando os algarismos 1, 3, 5, 7, quantos e quais agrupamentos ordenados diferentes de dois algarismos distintos é possível formar com eles?

Resolução

Montando a árvore de possibilidades:

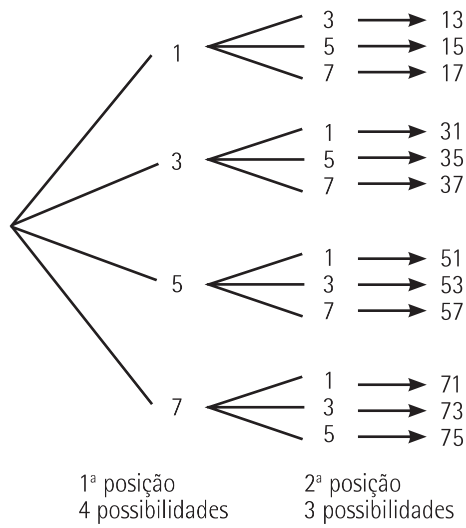


Figura 7

Na primeira posição, temos 4 possibilidades. Na segunda posição temos 3 possibilidades, totalizando, através do princípio fundamental da contagem, $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades. Assim, os agrupamentos formados são 13, 15, 17, 31, 35, 37, 51, 53, 57, 71, 73 e 75.

Perceba nesse exemplo que a quantidade de elementos dados para a formação dos agrupamentos são 4 (1, 3, 5 e 7), entretanto formamos agrupamentos de apenas 2 elementos que:

- diferem-se pela ordem (13 e 31, por exemplo);

- diferem-se pelos elementos que os compõem (15 e 73, por exemplo), ou seja, pela natureza dos elementos.

Podemos, assim, denominar os agrupamentos obtidos como arranjos simples de 4 elementos tomados 2 a 2 e denotamos por $A_{4,\,2}$.

Então, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5 e 7?

Já que os agrupamentos (números) formados devem ter 3 algarismos, temos, por exemplo:

1	3	5

Se invertermos a ordem desses algarismos, formamos um número diferente. Note também que somente vamos utilizar 3 algarismos dos 4 fornecidos para a formação dos agrupamentos, além de podermos formar agrupamentos onde os elementos que os compõem também se defiram (135 e 137 por exemplo). Assim, podemos calcular a quantidade de números de 3 algarismos distintos da seguinte forma:

4 algarismos para a primeira posição, 3 algarismos para a segunda posição e 2 algarismos para a terceira posição.

$\boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2}$ = 24 números distintos

Como nesse exemplo não foi solicitado discriminar os agrupamentos formados, não houve a necessidade de montar a árvore de possibilidades.

Vejamos agora com calcular o número de agrupamentos no caso geral de arranjos simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$. Assim:

Na primeira posição ou etapa, temos n possibilidades.

Na segunda posição ou etapa, temos $(n - 1)$ possibilidades.

Na terceira posição ou etapa, temos $(n - 2)$ possibilidades.

Na p-ésima posição ou etapa, temos $n - (p - 1)$ possibilidades.

Observe que $n - (p - 1) = (n - p + 1)$.

Aplicando o princípio fundamental da contagem:

$$\underbrace{A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot (n - p + 1)}_{\text{p fatores}}$$

Multiplicando a expressão anterior por $\dfrac{(n - p)!}{(n - p)!}$, temos:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Portanto, arranjo simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$, são os agrupamentos que se diferem pela ordem e pela natureza dos elementos que podem se formar com p dos n elementos dados a partir da fórmula

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Outra consideração importante é o cálculo de arranjos simples, onde n = p. Vejam:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-n)!} = A_{n,\,p} = \frac{n!}{(0)!} = A_{n,\,p} = \frac{n!}{1} = A_{n,\,p} = n!$$

Portanto $A_{n,\,n} = P_n$

Observação

Note, a seguir, que para a resolução de problemas envolvendo arranjos simples, podemos usar a fórmula ou o princípio fundamental da contagem.

Exemplo. Considere a palavra FORMIGA e responda às questões:

a) Quantos anagramas podemos formar?

$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ anagramas

b) Quantas "palavras" de 4 letras distintas podemos formar?

1ª maneira: sem usar a fórmula. Temos 7 possibilidades para a 1ª letra, 6 possibilidades para a 2ª letra, 5 possibilidades para a 3ª letra e 4 possibilidades para a 4ª letra. Assim:

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ palavras

2ª maneira: usando a fórmula:

$$A_{7,\,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{5040}{6} = 840$$

c) Quantas dessas palavras começam por A?

1ª maneira: sem usar a fórmula. Fixando A como 1ª letra, restam 6 possibilidades para a 2ª letra, 5 possibilidades para a 3ª letra e 4 possibilidades para a 4ª letra. Assim:

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ palavras

2ª maneira: usando a fórmula. Como fixamos a letra A como 1ª letra, arranjaremos as 6 letras que sobraram com as 3 letras restantes. Assim:

$$A_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{720}{6} = 120$$

d) Quantas terminam com MI?

1ª maneira: sem usar a fórmula. Fixando MI como 3ª letra e 4ª letras, restam 5 possibilidades para a 1ª letra e 4 possibilidades para a 2ª letra. Assim:

$5 \cdot 4 = 20$ palavras

2ª maneira: usando a fórmula. Como fixamos MI como as duas últimas letras, arranjaremos as 5 letras que sobraram com as 2 letras iniciais restantes. Assim:

$$A_{5,\,3} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20$$

e) Quantas contêm a letra G?

1ª maneira: sem usar a fórmula. Fixando G como 1ª letra, restam 6 possibilidades para a 2ª letra, 5 possibilidades para a 3ª letra e 4 possibilidades para a 4ª letra. Assim:

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ palavras com G na 1ª posição

O mesmo vale para a letra G nas 2ª, 3ª e 4ª posições. Logo, temos $4 \cdot 120 = 480$ palavras que contêm a letra G.

2ª maneira: usando a fórmula. Fixando a letra G como 1ª letra, arranjaremos as 6 letras que sobraram com as 3 letras restantes. Assim:

$$A_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{720}{6} = 120$$

Valendo o mesmo para as demais posições, temos $4 \cdot A_{6,\,3} = 4 \cdot 20 = 480$

f) Quantas não contêm a letra G?

1ª maneira: sem usar a fórmula. Eliminando a letra G, temos agora 6 possibilidades para a 1ª letra, 5 possibilidades para 2ª letra, 4 possibilidades para 3ª letra e 3 possibilidades para a 4ª letra. Assim:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ palavras sem a letra G

2ª maneira: usando a fórmula. Eliminando a letra G, restaram 6 letras que arranjaremos com as 4 posições. Assim:

$$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Considerando o raciocínio, quantos números ímpares de 4 algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Temos um total de 8 algarismos e os números (agrupamentos) que formaremos devem ter 4 algarismos. Além disso, para que os números formados sejam ímpares, devem terminar em 1, 3, 5 e 7. Assim:

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{3 posições}}\ \underline{\ 1\ } \Rightarrow A_{7,3}$$

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 3\ } \Rightarrow A_{7,3}$$

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 5\ } \Rightarrow A_{7,3}$$

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 7\ } \Rightarrow A_{7,3}$$

$$4 \cdot A_{7,3}$$

Devemos considerar também que os números terminados em 1, 3, 5 e 7 não podem ser iniciados com 0. Assim:

$$\underline{\ 0\ }\ \underbrace{\_\_\ \_\_}_{\text{2 posições}}\ \underline{\ 1\ } \Rightarrow A_{6,2}$$

$$\underline{\ 0\ }\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 3\ } \Rightarrow A_{6,2}$$

$$\underline{\ 0\ }\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 5\ } \Rightarrow A_{6,2}$$

$$\underline{\ 0\ }\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 7\ } \Rightarrow A_{6,2}$$

$$4 \cdot A_{6,2}$$

Logo, o total de números é:

$$4 \cdot A_{7,3} - 4 \cdot A_{6,2} =$$

$$= 4 \cdot \frac{7!}{4!} - 4 \cdot \frac{6!}{4!} = 4 \cdot 210 - 4 \cdot 30 = 840 - 120 = 720$$

Vamos, agora, resolver sem utilizar a fórmula do arranjo.

Fixando o algarismo 1 na 4ª posição, restam 7 algarismos para 1ª posição, 6 algarismos para a 2ª posição e 5 algarismos para a 3ª posição. Assim:

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ agrupamentos finalizados com 1

Aplicando o mesmo raciocínio, percebemos que temos a mesma quantidade de agrupamentos finalizados com os algarismos 3, 5 e 7, logo, $4 \cdot 210 = 840$. Excluindo todos os números (agrupamentos) inicializados com 0 e finalizados com 1, restam 6 algarismos na 2ª posição e 5 algarismos na 3ª posição. Assim:

$6 \cdot 5 = 30$ agrupamentos inicializados com 0 e finalizados com 1.

Aplicando o mesmo raciocínio, percebemos que temos a mesma quantidade de agrupamentos inicializados com 0 e finalizados com os algarismos 3, 5 e 7, logo, $4 \cdot 30 = 120$.

Dessa forma, o total de números ímpares é $840 - 120 = 720$.

Exemplo. De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar-se em um banco de 2 lugares?

Resolução

Percebam que nos interessa formar agrupamentos de 2 elementos retirados de um universo de 6 elementos e que a ordem das posições das pessoas sentadas e, ainda, quais pessoas se sentaram importa para formar os agrupamentos, assim, temos um problema de arranjo simples.

Vejamos a resolução sem utilizar a fórmula:

Na 1ª posição do banco, podemos dispor de 6 pessoas, para a 2ª posição, restaram 5 pessoas, que podemos dispor, assim:

$6 \cdot 5 = 30$ maneiras diferentes

Utilizando a fórmula:

$$A_{6,2} = \frac{6!}{4!} = \frac{720}{24} = 30$$

2.3 Combinação simples

Em todos os problemas de contagem vistos até esse momento, os agrupamentos formados eram listas. No entanto, em se falando de combinações simples, a ideia associada é formar subconjuntos. Assim podemos entender combinação simples como um tipo de agrupamento, sem repetição, onde a ordem dos elementos que os compõem não importa, o que diferencia um agrupamento do outro é a natureza dos elementos.

Para que possamos nos aprofundar no conceito de combinação simples, analisaremos os exemplos a seguir.

Exemplo 1. Os alunos Ana (A), Bruno (B), Carlos (C), Daniel (D) e Elisa (E) pretendem formar, entre eles, uma comissão de 2 pessoas. De quantas maneiras possíveis essa comissão pode ser formada?

Resolução

Temos o conjunto dos alunos $\{A, B, C, D, E\}$, determinaremos todas as duplas possíveis e excluiremos as repetidas:

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}$

$\{B, A\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}$

$\{C, A\}, \{C, B\}, \{C, D\}, \{C, E\}$

$\{D, A\}, \{D, B\}, \{D, C\}, \{D, E\}$

$\{E, A\}, \{E, B\}, \{E, C\}, \{E, D\}$

Note, por exemplo, que a comissão formada por Ana e Bruno $\{A, B\}$ é a mesma que Bruno e Ana $\{B, A\}$, logo, a ordem dos elementos não importa. Portanto as comissões possíveis são:

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$.

A esses 10 subconjuntos, chamamos de combinação simples de 5 elementos tomados 2 a 2 e denotamos por $C_{5,\,2} = 10$.

Exemplo 2. Os alunos Ana (A), Bruno (B), Carlos (C), Daniel (D) e Elisa (E) pretendem formar, entre eles, uma comissão de 3 pessoas. De quantas maneiras possíveis essa comissão pode ser formada?

Resolução

Dado o conjunto de 5 elementos (alunos) $\{A, B, C, D, E\}$, as comissões (subconjuntos de 3 elementos) são:

{A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, D, E}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, D, E}, {C, D, E}, portanto $C_{5,\,3}=10$

Façamos agora algumas comparações entre combinação simples, arranjo simples e permutação simples.

Calculamos o arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3:

$$A_{5,\,3}=\frac{5!}{(5-3)!}=A_{5,\,3}=\frac{5!}{(2)!}=A_{5,\,3}=\frac{120}{2}=A_{5,\,3}=60$$

Calculamos a permutação de cada combinação simples. Como são 10 combinações simples, temos:

$C_{5,\,3}\cdot P_3 = 10\cdot 3! = 10\cdot 6 = 60$

Logo percebemos que:

$A_{5,\,3} = P_3 \cdot C_{5,\,3}$

A partir dessas comparações, obtemos em função de arranjo e permutações, o número de combinação simples de 5 elementos tomados 3 a 3:

$$A_{5,\,3}=P_3\cdot C_{5,\,3}\Rightarrow C_{5,\,3}=\frac{A_{5,\,3}}{P_3}=\frac{60}{6}=10$$

Fórmula das combinações simples:

$$C_{n,\,p}=\frac{A_{n,\,p}}{p!}=\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Portanto, combinação simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$, são todos os subconjuntos de p elementos formados a partir dos n elementos dados.

Denota-se por $C_{n,\,p}$ ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações simples de n elementos tomados p a p obtidos através da fórmula:

$$C_{n,\,p}=\frac{A_{n,\,p}}{p!}\ \text{ou}\ C_{n,\,p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Vocês devem ter percebido através dos exemplos dados que $C_{5,\,2} = C_{5,\,3} = 10$. Isso se deve a uma propriedade das combinações. Vejam:

$$\underbrace{C_{5,\,2} = C_{5,\,3}}_{2+3=5}$$

De modo geral, afirmamos:

$$C_{n,\,p} = C_{n,\,n\,-\,p}$$

Observe que essa propriedade, conhecida como **igualdade de combinações complementares**, pode ajudar na simplificação dos cálculos.

3 BINÔMIO DE NEWTON

Vimos no estudo de combinação simples que podemos representar a combinação $C_{n,\,p}$ como $\binom{n}{p}$. A essa última forma de representação, damos o nome de número binomial.

3.1 Números binomiais

Como já sabemos, o número binomial $\binom{n}{p}$, denotado por binomial de n sobre p é dado por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,\,p} \text{ com } n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p$$

Na representação de um número binomial, denominamos n de numerador e p de denominador.

Como consequência da definição, temos:

- $\binom{n}{0} = 1$, para $\forall\ n \in \mathbb{N}$
- $\binom{n}{1} = n$, para $\forall\ n \in \mathbb{N}$
- $\binom{n}{n} = 1$, para $\forall\ n \in \mathbb{N}$

3.2 Números binomiais complementares

Seja a propriedade que vimos anteriormente, conhecida como igualdade de combinações complementares, em que $C_{n,\,p} = C_{n,\,n-p}$, podemos concluir que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Assim, por exemplo, são números binomiais complementares:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} \text{ pois } 4 + 2 = 6$$

$$\binom{8}{2} = \binom{8}{6} \text{ pois } 2 + 6 = 8$$

3.3 Triângulo de Pascal ou aritmético

Os números binomiais podem ser escritos em um quadro triangular, assim:

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & \text{Coluna 0} & \text{Coluna 1} & \text{Coluna 2} & \text{Coluna 3} & \text{Coluna 4} & \text{Coluna 5} & \ldots & \text{Coluna n} \\
\text{Linha 0} & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
\text{Linha 1} & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
\text{Linha 2} & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
\text{Linha 3} & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
\text{Linha 4} & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
\text{Linha 5} & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\text{Linha n} & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Figura 8

Observando o triângulo de Pascal, é possível perceber que:

- nas linhas estão dispostos os binomiais de mesmo numerador;
- nas colunas estão dispostos os binomiais de mesmo denominador.

Se calcularmos o valor de cada um dos binomiais, obtemos:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

3.3.1 Propriedades

I – Na primeira coluna, todos os elementos são iguais a 1, pois $\binom{n}{0} = 1$.

II – Em todas as linhas, o último elemento é igual a 1, pois $\binom{n}{n} = 1$.

III – Os elementos equidistantes dos extremos, em cada linha, são iguais.

$$1 \quad \mathbf{4} \quad 6 \quad \mathbf{4} \quad 1$$

IV – Cada binomial de uma determinada linha é igual à soma de dois binomiais da linha anterior.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\qquad
\boxed{\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}}$$

Figura 9

No caso anterior, temos 4+6=10. Assim, podemos considerar que o número 10 está na linha **n** e que os números 4 e 6 estão na linha anterior **(n – 1)**. Consideremos também que os números 10 e 6 estão na coluna **p** e que o número 4 está na coluna anterior **(p – 1)**. Logo:

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p} \Rightarrow \text{relação de Stiffel}$$

Exemplo. Sendo $\binom{x}{y}$ = m e $\binom{x}{y+1}$ = n, utilizando a relação de Stiffel, determine o valor de $\binom{x+1}{y+1}$.

Resolução

$$\binom{x}{y}+\binom{x}{y+1}=\binom{x+1}{y+1} = m + n$$

Agora que o triângulo aritmético e suas propriedades foram apresentados, é interessante saber que esse triângulo também é conhecido como triângulo de Tartaglia ou triângulo Yang-Hui e que ele já era conhecido dos matemáticos desde há muito tempo.

Há registros do triângulo aritmético e de seus coeficientes que podem ser encontrados, ainda que de maneira incipiente, em obras indianas datadas de, pelo menos, 300 a.C. e chinesas de 250 d.C.

Na China, o principal matemático associado ao triângulo aritmético foi Yang-Hui, que por volta de 1250 de nossa era, escreveu *Uma análise detalhada dos métodos do livro Nove capítulos* e *Alfa e ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos*. Outra importante referência chinesa ao triângulo aritmético é o livro *Precioso espelho dos quatro elementos*, escrito em 1303 por Chu Shih-Chieh. Essa obra traz figuras de triângulos com até nove linhas; entretanto, como dito anteriormente, o triângulo aritmético ficou conhecido na China por triângulo de Yang-Hui.

Po volta de 1150, na Pérsia, o matemático Omar Khayyam (1048-1122), que também se dedicava à poesia e à astronomia, descreveu o triângulo aritmético, por volta de 1150, com o trabalho *Tratado de demonstrações de problemas de álgebra*.

Apenas quinze anos depois de Yang-Hui, ou seja, 1265, Nasir Al-Din al-Tusi faz uma clara referência ao triângulo aritmético, com um arranjo semelhante ao dos coeficientes de Yang-Hui.

Um século antes de Pascal, na Europa, alguns matemáticos trabalharam com o triângulo aritmético. O mais antigo que se conhece foi o matemático alemão Apianus (Petrus Apianus, 1495-1552), que, em 1527, publicou um livro, *Rechnung*, que significa "cálculo", cuja capa trazia um desenho do triângulo aritmético. Mas, em 1544, através da obra *Arithmetica integra*, o alemão Stifel (Michael Stifel, 1487-1567) se tornou, na Alemanha, o principal divulgador do triângulo.

Na Itália, o principal estudioso do triângulo aritmético foi Tartaglia (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1559), que dedicou a esse assunto muitas páginas de seu extenso livro *General tratato di numeri et misure*, de 1556. Essa obra pode ser considerada como o tratado de aritmética mais influente até então escrito. Devido à importância de sua obra, Tartaglia reivindicou, para si, a criação do triângulo aritmético, tanto que em alguns países, o triângulo aritmético é denominado de Triângulo de Tartaglia.

O matemático francês Bleise Pascal era amigo de um praticante de jogos de azar conhecido pela alcunha de Cavaleiro de Méré e, em 1654, Méré lhe escreveu uma carta solicitando que resolvesse alguns problemas matemáticos de probabilidade envolvendo jogo de dados. Na realidade, Méré queria saber quantos lançamentos de dois dados lhe dariam uma chance favorável de obter duplo 6.

Para resolver o problema, Pascal procurou outro famoso matemático, chamado Fermat, e descobriu que a solução para obter chances favoráveis de ocorrer um duplo 6 passava pela enumeração combinatorial das possibilidades de ocorrência disso. Assim, Pascal redescobriu e aperfeiçoou uma interpretação combinatória e probabilística do triângulo aritmético, a mesma que Tartaglia já havia descoberto e estudado.

Pascal, interessado no triângulo aritmético, dedicou-se por um ano escrevendo a obra *Traité du triangle arithmétique*, que foi publicada só postumamente, em 1665. Em 1739, o matemático inglês De Moivre publicou um trabalho em que usou a denominação *Triangulum arthmeticum pascalianum* para o triângulo aritmético. Dada a repercussão que esse trabalho teve na época, isso acabou tornando consagrada a denominação "triângulo de Pascal" na Inglaterra, França e mais em alguns países europeus.

3.4 Fórmula do binômio de Newton

Considere uma potência da forma $(a + b)^n$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Expressões desse tipo são denominadas de binômio de Newton. Provavelmente, o desenvolvimento de alguns binômios é conhecido do aluno, como, por exemplo:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Todos esses exemplos foram vistos no ensino fundamental. Entretanto, quando o expoente assume valores maiores do que esses, já conhecidos, efetuar as devidas multiplicações pode se tornar uma tarefa muito trabalhosa.

Como veremos adiante, podemos dispor de combinação simples para o desenvolvimento de binômios de Newton. Assim:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2$

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 =$

$= \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$

- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 =$

$= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 =$

$= \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$

Desenvolveremos agora uma fórmula para calcular um binômio de Newton genérico, ou seja, $(a + b)^n$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Perceba, pelos exemplos, que cada parcela do desenvolvimento do binômio de Newton é escrita na forma:

$\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$ com $p = 0, 1, 2, ..., n$

Assim obtemos o desenvolvimento de um binômio de Newton genérico:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

Note que:

- O desenvolvimento de $(a + b)^n$ tem $(n + 1)$ termos.

- Os expoentes de “a” iniciam em “n” e, de 1 em 1, vão diminuindo até 0.

- Os expoentes de “b” iniciam em 0 e vão aumentando de 1 em 1, até “n”.

- Os coeficientes binomiais $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ dos termos do desenvolvimento são uma linha do triângulo de Pascal.

Lembrete

O número $\binom{n}{p}$ é chamado de número binomial de n sobre p

com $n \geq p$ e que $\binom{n}{p} = C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemplo. Efetue o desenvolvimento dos binômios de Newton:

a) $(x + y)^5$

b) $(a - 2)^6$

Resolução

a) $(x + y)^5 = \binom{5}{0}x^{5-0}y^0 + \binom{5}{1}x^{5-1}y^1 + \binom{5}{2}x^{5-2}y^2 + \binom{5}{3}x^{n-3}y^3 + \binom{5}{4}a^{5-4}b^4 + \binom{5}{5}a^{5-5}b^5$

$\binom{5}{0}x^5y^0 + \binom{5}{1}x^4y^1 + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5$

$\binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y^1 + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}b^5$

Agora calculamos os números binomiais:

$\binom{5}{0}=1$, $\binom{5}{1}=5$, $\binom{5}{2}=10$, $\binom{5}{3}=10$, $\binom{5}{4}=5$ e $\binom{5}{5}=1$

Assim:

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5a^1b^4 + b^5$

b) $(a-2)^6 = \binom{6}{0}a^6(-2)^0 + \binom{6}{1}a^5(-2)^1 + \binom{6}{2}a^4(-2)^2 + \binom{6}{3}a^3(-2)^3 + \binom{6}{4}a^2(-2)^4 + \binom{6}{5}a^1(-2)^5 + \binom{6}{6}a^0(-2)^6$

$\binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}(-2)a^5 + \binom{6}{2}4a^4 + \binom{6}{3}(-8)a^3 + \binom{6}{4}16a^2 + \binom{6}{5}(-32)a + \binom{6}{6}64$

Calculando os números binomiais

$$\binom{6}{0}=1,\ \binom{6}{1}=6,\ \binom{6}{2}=15,\ \binom{6}{3}=20,\ \binom{6}{4}=15,\ \binom{6}{5}=6 \text{ e } \binom{6}{6}=1$$

Assim:

$$(a-2)^6 = a^6 + 6(-2)a^5 + 15\cdot 4a^4 + 20\,(-8)a^3 + 15\cdot 16a^2 + 6(-32)a + 64$$

$$(a-2)^6 = a^6 - 12a^5 + 60a^4 - 160a^3 + 240a^2 - 192a + 64$$

3.5 Fórmula do termo geral

Vimos que no desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$, temos:

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n b^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{T_3} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}_{T_{k+1}} + \underbrace{\binom{n}{n}a^{n-n}b^n}_{T_{n+1}}$$

1º termo $T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0}a^n b^0$

2º termo $T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1}a^{n-1}b^1$

3º termo $T_3 = T_{2+1} = \binom{n}{2}a^{n-2}b^2$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

(k+1)-ésimo termo $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Logo, um termo qualquer é dado por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Exemplo 1. Determinar o 4º termo no desenvolvimento de $(x + 3)^5$

Resolução

Para o 4º termo, temos $k + 1 = 4 \Rightarrow k = 3$ e $\begin{cases} n = 5 \\ a = x \\ b = 3 \end{cases}$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$T_{3+1} = \binom{5}{3} x^{5-3} \cdot 3^3$$

$$T_4 = \binom{5}{3} 27x^2$$

$$T_4 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 27x^2$$

$$T_4 = 10 \cdot 27x^2 = 270x^2$$

Resposta: O 4º termo é $T_4 = 270x^2$

Exemplo 2. Determinar o termo independente de x no desenvolvimento $(x - 3)^4$

Resolução

Temos:

$$\begin{cases} n = 4 \\ a = x \\ b = -3 \end{cases}$$

O termo geral é dado por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$T_{k+1} = \binom{4}{k} x^{4-k} \cdot (-3)^k$$

O termo independente de x é o que contém x^0, logo:

$4 - k = 0 \Rightarrow k = 4$

Substituindo k = 4 no termo geral, temos:

$$T_{k+1} = \binom{4}{k} x^{4-k} \cdot (-3)^k$$

$$T_{4+1} = \binom{4}{4} x^{4-4} \cdot (-3)^4$$

$$T_5 = 1 \cdot x^0 \cdot (-81)$$

$$T_5 = -81$$

Resposta: o termo independente é $T_5 = -81$

Exemplo 3. Calcule o termo médio ou central do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{x}{5} + \frac{10y}{x}\right)^6$.

Resolução

O desenvolvimento desse binômio tem 7 termos:

$1^o, 2^o, 3^o, \underbrace{4^o}_{\text{termo médio}}, 5^o, 6^o, 7^o$

Assim devemos encontrar o 4^o termo.

Para o 4^o termo, temos $k + 1 = 4 \Rightarrow k = 3$ e $\begin{cases} n = 6 \\ a = \dfrac{x}{5} \\ b = \dfrac{10y}{x} \end{cases}$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$T_{3+1} = \binom{6}{3}\left(\frac{x}{5}\right)^{6-3} \cdot \left(\frac{10y}{x}\right)^3$$

$$T_4 = \binom{6}{3}\left(\frac{x}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{10y}{x}\right)^3$$

$$T_4 = 20 \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{10y}{x}\right)^3$$

$$T_4 = 20 \cdot \frac{x^3}{125} \cdot \frac{1000y^3}{x^3}$$

$$T_4 = 20 \cdot 8y^3$$

$$T_4 = 160y^3$$

Resposta: o termo médio é $T_4 = 160y^3$

4 ANÁLISE COMBINATÓRIA II

Até o momento, trabalhamos com problemas de contagem considerando listas e conjuntos com elementos distintos. A partir de agora, veremos como contar agrupamentos com elementos repetidos.

4.1 Permutação com repetição

A restrição mais importante, em se tratando de permutações simples, quanto aos elementos permutados, é a condição de que esses elementos sejam todos diferentes entre si. Essa condição é imposta para que nos agrupamentos não haja repetições. Na prática, nem sempre é possível que inexistam repetições entre elementos das coleções, dessa forma, foi preciso desenvolver maneiras de contagem utilizando elementos repetidos.

É notório, no caso de permutação de elementos repetidos, que algum desses agrupamentos obtidos sejam iguais e, por consequência, necessitem ser excluídos. Veremos a seguir, através de exemplos, como obter uma fórmula para permutações com repetição.

Quantos e quais são os anagramas da palavra LAMA?

Note que temos um único elemento repetido (letra A), que se repete 2 vezes.

Montando a árvore de possibilidades:

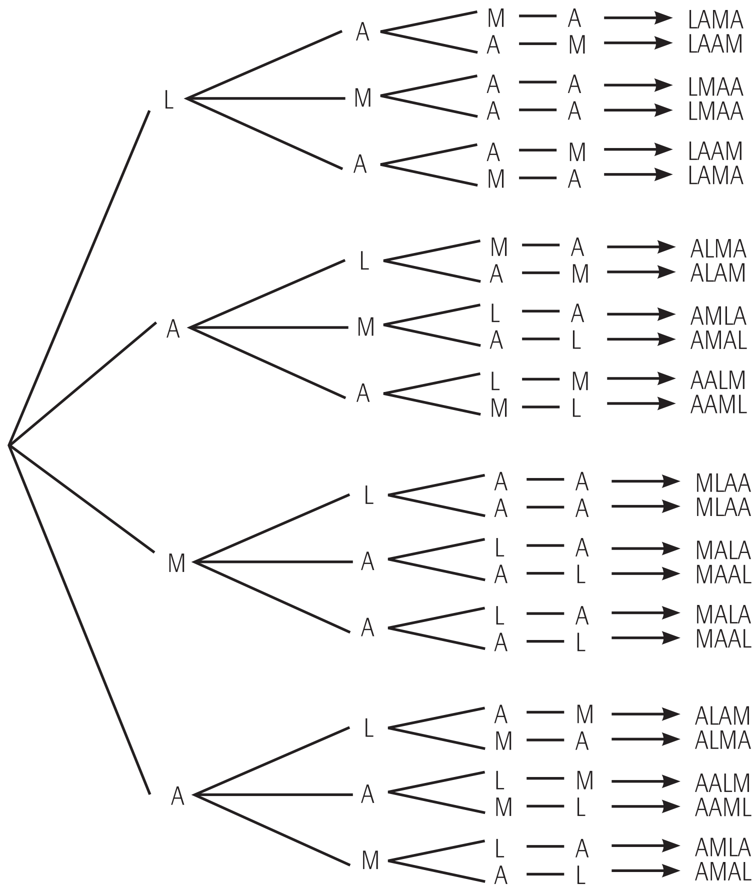


Figura 10

Analisando a árvore de possibilidades, é possível notar que dos 24 anagramas, apenas 12 são diferentes entre si, ou seja, somente metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ do total de anagramas é válida.

Assim, a palavra LAMA, com um único elemento que se repete 2 vezes, tem 12 anagramas válidos (não repetidos), assim:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Quantos números distintos podemos formar com os algarismos (1, 1, 1, 4)?

Aqui temos um único algarismo (1), que se repete 3 vezes.

Montando a árvore de possibilidades:

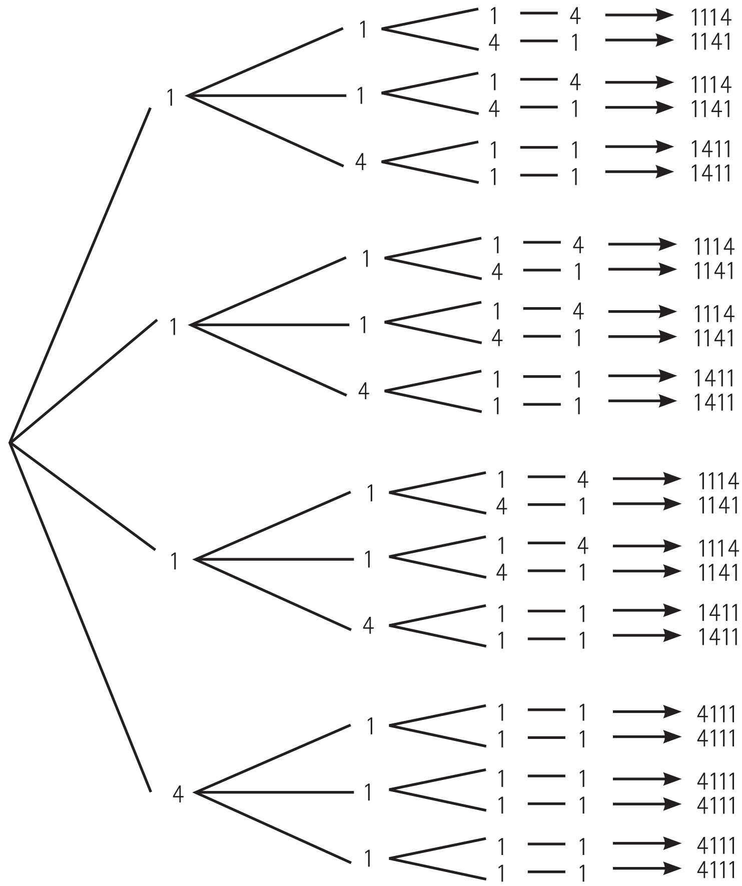


Figura 11

Analisando a árvore de possibilidades, notamos que dos 24 números formados, apenas 4 não se repetem, ou seja, apenas $\left(\frac{1}{6}\right)$ do total dos números serão contados.

Assim, com os algarismos (1, 1, 1, 4), podemos formar 4 números distintos:

$$P_4^3=\frac{4!}{6}=\frac{4!}{3!}=4$$

Veja, portanto, que a quantidade de permutações de n elementos, com um único elemento que se repete α vezes, é dada por:

$$P_n^{\alpha}=\frac{n!}{\alpha!}$$

E no caso de termos mais de um elemento que repete?

Quantos anagramas tem a palavra BANANA?

Note que a palavra BANANA tem 6 letras, que a letra A se repete 3 vezes e a letra N se repete 2 vezes.

Pelos exemplos dados e supondo que só a letra N se repita 2 vezes, teríamos metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ dos anagramas válidos, todavia, considerando também as 3 repetições da letra A, temos $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{12}\right) = \left(\frac{1}{2!3!}\right)$ de anagramas válidos, assim:

$$P_6^{2,\,3} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{720}{12} = 60$$

Seguindo esse raciocínio, podemos afirmar que a permutação de n elementos dos quais um elemento se repete α vezes, outro elemento se repete β vezes, ..., e outro elemento γ vezes, de modo que $\alpha + \beta + \ldots + \gamma = n$ é dado por:

$$P_n^{\alpha,\,\beta,\ldots\,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\cdot\ldots\cdot\gamma!}$$

Apresentada a fórmula para o cálculo de permutações com repetições, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Resolução

A palavra MATEMÁTICA tem 10 letras, logo n = 10

A letra M repete 2 vezes, logo $\alpha = 2!$

A letra A repete 3 vezes, logo $\beta = 3!$

A letra T repete 2 vezes, logo $\gamma = 2!$

As letras E e I repetem 1 vez cada uma.

Assim:

$$P_{10}^{2,\,3,\,2,\,1,\,1} = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{3.628.800}{24} = 151.200$$

Resposta: a palavra MATEMÁTICA tem 151.200 anagramas.

Exemplo 2. Quantos anagramas da palavra ARARAQUARA começam com a letra Q?

A palavra ARARAQUARA tem 10 letras, logo n = 10.

A letra R repete 3 vezes, logo $\alpha = 3!$

A letra A repete 5 vezes, logo $\beta = 5!$

As letras Q e U repetem 1 vez cada uma.

Entretanto, estamos interessados nos anagramas que se iniciam pela letra Q, assim, fixamos Q como primeira letra e fazemos:

$$Q\ \underbrace{\text{ARARAUARA}}_{P_9^{4,\,3}}$$

$$1 \cdot P_9^{5,\,3,\,1} = \frac{9!}{5!3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

E como estamos interessados nos anagramas que se iniciam pela letra A, fixamos uma letra A como primeira letra e fazemos:

$$A\ \underbrace{\text{ARARAQUAR}}_{P_9^{4,\,3}}$$

$$1 \cdot P_9^{4,\,3,\,1,\,1} = \frac{9!}{4!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 2520$$

4.2 Permutação circular

Vamos agora imaginar que queremos dispor 5 pessoas $\{A, B, C, D, E\}$ em uma mesa circular.

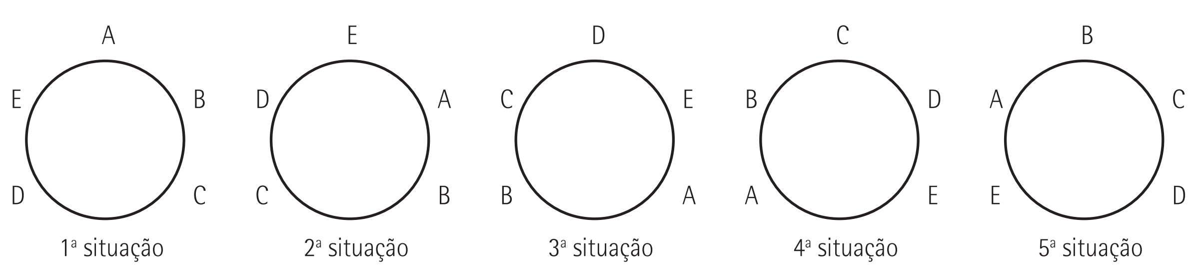


Figura 12

Observe na figura que, em todas as situações, se fôssemos a pessoa A, à direita, veríamos E e, à esquerda, B. Do mesmo modo, se fôssemos a pessoa C, veríamos B à direita e D à esquerda. Portanto, nenhuma dessas situações representa um novo agrupamento, pois cada situação, a partir da primeira, é apenas uma rotação no sentido horário da situação anterior.

Portanto, para obtermos novos agrupamentos, devemos:

- fixar um dos elementos em uma posição determinada;
- adotar um sentido;
- permutar os demais elementos, em relação ao elemento fixado, de todas as maneiras possíveis.

Dessa forma, tendo 5 pessoas ($n = 5$) para dispor em uma mesa circular, fixamos a pessoa A conforme a figura seguinte:

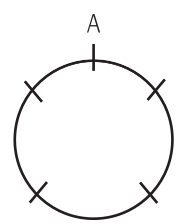


Figura 13

e, no sentido horário, permutamos as outras 4 pessoas restantes:

$(n - 1)! = (5 - 1)! = 4! = 24$ maneiras diferentes

Logo, a permutação circular de n elementos é dado por:

$$PC_n = (n - 1)!$$

Exemplo. A equipe que administra uma empresa é formada por 5 pessoas: o presidente, o vice-presidente e três diretores. Numa reunião, essa equipe ocupará uma mesa circular.

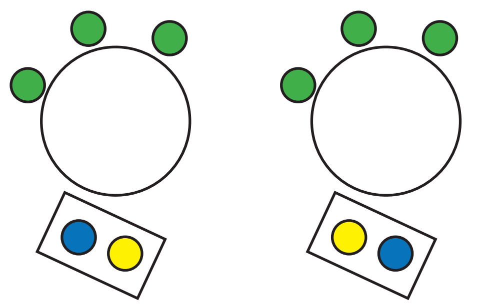
a) De quantos modos diferentes a equipe pode se sentar em torno da mesa de maneira que o presidente e o vice fiquem juntos?

b) De quantos modos diferentes a equipe pode se sentar em torno da mesa de maneira que o presidente e o vice fiquem separados?

Resolução

a) Há duas formas de podermos resolver esse item:

1ª forma – Como presidente e vice devem ficar juntos, trataremos como se fossem um único elemento. Assim, consideraremos 4 pessoas que compõem a equipe. Devemos considerar também que presidente e vice podem permutar entre si as posições, ou seja, o presidente à esquerda do vice e o vice à esquerda do presidente, conforme figura:



Presidente e vice Vice e presidente

Figura 14

$$\underbrace{\underbrace{PC_4}_{\text{permutação circular de 4 pessoas}}}_{(4-1)!} \cdot \underbrace{\underbrace{P_2}_{\text{permutação das posições do pai e da mãe}}}_{2!}$$

$= 3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$ disposições diferentes

2ª forma – Considerando que pai e mãe têm de ficar juntos, eles somente podem permutar entre si as posições, ou seja, 2!. Restando aos filhos também permutar entre si, ou seja, 3!. Logo:

$2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$ disposições diferentes.

b) Para solucionarmos essa questão, devemos pensar em qualquer configuração como a da figura seguinte, ou seja, pai e mãe separados.

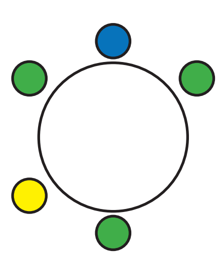


Figura 15

Note que o caso de presidente e vice separados é o contrário de presidente e vice juntos. Assim as permutações circulares, em que presidente e vice estão juntos (PC_{junto}), somadas às permutações circulares, em que presidente e vice estão separados ($PC_{separado}$), resultam no total de permutações circulares (PC_5). Portanto:

$PC_{junto} + PC_{separado} = PC_5$

$PC_{separado} = PC_5 - PC_{junto}$

$PC_{separado} = (5 - 1)! - 12 = 24 - 12 = 12$ disposições diferentes.

4.3 Equação lineares com soluções inteiras não negativas

Uma equação linear é todo polinômio escrito na forma:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + ... + a_n x_n = p$

Os elementos $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ são coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, ... , x_n$ e o termo p é o termo independente (valor numérico da equação linear).

O termo p pode assumir qualquer valor real, caso p assuma valor igual a zero, a equação linear será homogênea.

Em nosso estudo, por se tratar de métodos de contagem, só nos interessa contabilizar a quantidade de soluções inteiras e não negativas das equações lineares.

Observe a equação linear $x_1 + x_2 = 3$. Facilmente determinamos as soluções inteiras e não negativas que ela terá, sem recorrer a nenhum algoritmo de resolução. Veja a tabela:

Tabela 1

x_1	x_2	$x_1 + x_2$	
0	3	0 + 3	3
1	2	1 + 2	3
2	1	2 + 1	3
3	0	3 + 0	3

Portanto o conjunto das soluções inteiras e não negativas da equação linear $x_1 + x_2 = 3$ é $S=\{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$. Logo, ela possui 4 soluções.

Agora, veremos alguns outros exemplos a fim de estabelecer uma maneira de determinar a quantidade de soluções inteiras e não negativas de uma equação linear.

Exemplo 1. Determine quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação linear $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

Resolução

Essa equação, apesar de mais complexa que a primeira, também não requer muito esforço para determinar as possíveis soluções pedidas no enunciado. As soluções existentes são todas as somas possíveis, de inteiros não negativos, entre as três parcelas (x_1, x_2 e x_3) que resultam em 4. Como são apenas 15 o total de somas possíveis, podemos colocar os resultados conforme tabela seguinte.

Tabela 2

x_1	x_2	x_3	$x_1+x_2+x_3$	
0	0	4	0 + 0 + 4	4
0	1	3	0 + 1 + 3	4
0	2	2	0 + 2 + 2	4
0	3	1	0 + 3 + 1	4
0	4	0	0 + 4 + 0	4
1	0	3	1 + 0 + 3	4
1	1	2	1 + 1 + 2	4
1	2	1	1 + 2 + 1	4
1	3	0	1 + 3 + 0	4
2	0	2	2 + 0 + 2	4
2	1	1	2 + 1 + 1	4
2	2	0	2 + 2 + 0	4
3	0	1	3 + 0 + 1	4
3	1	0	3 + 1 + 0	4
4	0	0	4 + 0 + 0	4

Para resolver problemas desse tipo, representaremos o valor de cada parcela pelo símbolo /. Supondo que $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$, a representação será // + / + /, ou seja, duas barras para x_1, uma barra para x_2 e uma barra para x_3. O símbolo + é usado para separar as quantidades relativas a cada parcela.

Entretanto, se $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 2$, a representação será //++//, ou seja, duas barras para x_1, nenhuma barra para x_2 e duas barras para x_3

Podemos agora montar uma tabela com a representação de todas as somas possíveis através dos símbolos / e +:

Tabela 3

x_1	x_2	x_3	Representação
0	0	4	++////
0	1	3	+/+///
0	2	2	+//+//
0	3	1	+///+/
0	4	0	+////+
1	0	3	/++///
1	1	2	/+/+//
1	2	1	/+//+/
1	3	0	/+///+
2	0	2	//++//
2	1	1	//+/+/
2	2	0	//+//+
3	0	1	///++/
3	1	0	///+/+
4	0	0	////++

Note que a representação de cada soma equivale a uma permutação com repetição, ou um anagrama da "palavra" ++////. Portanto, se calcularmos as permutações com 4 repetições do símbolo / e 2 repetições do símbolo +, obteremos 15 como resposta.

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$$

Resposta: há 15 soluções inteiras e não negativas para equação $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

Considerações importantes:

- A quantidade de símbolos + é uma unidade a menos que a quantidade de parcelas, ou seja, na soma $x_1 + x_2 + x_3$ temos 3 parcelas (x_1, x_2 e x_3) e 3 – 1 = 2 símbolos +.
- O resultado da soma $x_1 + x_2 + x_3$ é igual à quantidade de símbolos /, ou seja, 4.
- A quantidade de elementos permutados é igual à quantidade de símbolos / somada à quantidade de símbolos +, ou seja, 4 + (3 – 1) = 6.

Exemplo 2. Determine quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação linear $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

Resolução

A representação das somas através dos símbolos / e +, como visto no exemplo anterior, terá 10 símbolos / e (4 – 1) = 3 símbolos +. Logo, a quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ será a permutação da "palavra" //////////+++ com 10 repetições do símbolo / e 3 repetições do símbolo +.

$$P_{13}^{10,\,3} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286$$

Resposta: há 286 soluções inteiras e não negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=10$.

Nos próximos exemplos, teremos um caso um pouco diferente. Acompanhe.

Exemplo 3. Determine quantas são as soluções inteiras e positivas da equação linear $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.

Resolução

Nesse exemplo, o enunciado não pede as soluções inteiras e **não negativas**, mas, sim as soluções inteiras e **positivas**. Isso quer dizer que as incógnitas x_1, x_2 e x_3 não podem ser nulas. Assim, para garantir que as incógnitas não sejam 0, aplicaremos a técnica de mudança de variável. Desse modo, assumiremos que $x_1 = a + 1$, $x_2 = b + 1$ e $x_3 = c + 1$

Assim:

$a + 1 + b + 1 + c + 1 = 10$

$a + b + c = 10 - 3$

$a + b + c = 7$

Portanto, a representação das somas através dos símbolos / e +, para a equação $a + b + c = 7$, tem 7 símbolos / e (3 – 1) = 2 símbolos +. Logo, a quantidade de soluções inteiras e positivas é a permutação da "palavra" ///////++ com 7 repetições do símbolo / e 2 repetições do símbolo +.

$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

Resposta: há 36 soluções inteiras e positivas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.

Exemplo 4. Determine quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação linear $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23$ de modo que exatamente duas incógnitas sejam iguais a zero.

Resolução

Note nesse exemplo que exatamente duas das cinco incógnitas são zero. Isso quer dizer que posso combinar entre as 5 incógnitas, 2 delas, visto que a ordem não importa. Desse modo:

$$C_{5,2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{120}{12}=10$$

Portanto existem 10 maneiras de que duas incógnitas sejam nulas.

Se exatamente duas incógnitas são nulas, as três restantes devem ser estritamente positivas, fato que leva a aplicar a técnica da mudança de variável.

Reescrevendo a equação com as 3 incógnitas positivas, temos:

$a + 1 + b + 1 + c + 1 = 23$

$a + b + c = 23 - 3$

$a + b + c = 20$

Portanto, a representação das somas através dos símbolos / e +, para a equação $a + b + c = 20$, tem 20 símbolos / e $(3 - 1) = 2$ símbolos +.

$$P_{22}^{20,2}=\frac{22!}{20!2!}=\frac{22\cdot 21}{2}=231$$

Dessa forma, temos 231 soluções para cada uma das combinações calculadas anteriormente. Assim, devemos fazer:

$10 \cdot 231 = 2310$

Resposta: há 2.310 soluções inteiras e não negativas onde duas incógnitas valham exatamente 0.

Podemos agora generalizar uma fórmula para determinar as soluções inteiras e não negativas de uma equação linear.

Seja a equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$, a quantidade de soluções inteiras e não negativas é dada por:

$$P_{n+p-1}^{p,\, n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

pois $P_{n+p-1}^{p,\, n-1}$ será o número de anagramas da "palavra" $\overbrace{\underbrace{///.../}_{p \text{ vezes}} \quad \underbrace{+++...+}_{(n-1) \text{ vezes}}}^{(p+n-1) \text{ "letras"}}$

4.3.1 Combinação com elementos repetidos

Retomando os exemplos anteriores, veremos como aplicá-los em situações mais concretas e mostrar que no campo da análise combinatória há problemas que equivalem a encontrar a quantidade de soluções inteiras e não negativas de uma equação linear.

Exemplo 1. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferecem em 3 sabores diferentes?

Resolução

Chamando de x_1 a quantidade de sorvetes comprados do sabor 1, x_2 a quantidade de sorvetes comprados do sabor 2 e x_3 a quantidade de sorvetes comprados do sabor 3, podemos montar a seguinte equação linear:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

Vimos no exemplo anterior que a quantidade de soluções inteiras e não negativas para essa equação é dada por:

$$P_{n+p-1}^{p,\, n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$$

Assim, com base na equação $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, temos a permutação com repetição de $p + n - 1 = 6$ elementos, com $p = 4$ repetições de / e $n - 1 = 2$ repetições de +.

Vejamos outra forma de resolver esse problema.

Se considerarmos que podemos assumir os sabores dos sorvetes como um conjunto de 3 elementos e que serão comprados 4 sorvetes, são formados agrupamentos não ordenados (a ordem dos sabores não comprados não importa) e que pelo menos um sabor vai se repetir, assim, temos uma combinação com repetição de 3 elementos tomados 4 a 4.

$$CR_{3,4} = P_6^{4,2} = C_{6,4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$$

De forma geral, podemos propor:

Seja a equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$, teríamos p símbolos / e n – 1 símbolos +, logo, a quantidade de soluções da equação será igual à quantidade de permutações dos símbolos / e +. Resultando, assim, em uma permutação com repetição onde o número de elementos é p + n – 1 sendo que desses elementos, dois se repetem p e n – 1 vezes, daí:

$$P_{n+p-1}^{p,\, n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{(p+n-1)!}{p!(p+n-1-p)!} = C_{p+n-1,p} = CR_{n,\, p}$$

Exemplo 2. Uma doceria oferece 4 tipos de doces. Qual é o número de maneiras pelas quais um cliente pode comprar 6 desses doces?

Resolução

Nesse caso, a ordem da compra dos doces não é importante, o que faz com que esse seja um problema de combinação. Além disso, se há 4 tipos de doce e serão comprados 6, obrigatoriamente, haverá repetição de doces. Aplicando a fórmula, temos que:

$n = 4$

$p = 6$

$CR_{n,\, p} = C_{p+n-1,\, p}$

$CR_{4,\, 6} = C_{6+4-1,\, 6} = C_{9,\, 6}$

$$C_{9,6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$$

Outra forma de resolver é determinando as soluções inteiras e não negativas da equação linear $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Nesse caso, temos de efetuar a permutação com repetição da "palavra" //////+++. Assim:

$$P_9^{6,\, 3} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

Resposta: há 84 maneiras de comprar 6 doces de 4 diferentes tipos.

Exemplo de aplicação

(UEL-2004) Numa competição internacional, um país obteve, no total, 10 medalhas entre as de ouro, prata e bronze. Sabendo-se que esse país recebeu pelo menos uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze, quantas são as possibilidades de composição do quadro de medalhas do país?

Resolução

Esse exemplo é uma aplicação do exemplo 3 dado anteriormente.

Sendo x_1 o número de medalhas de ouro, x_2 o de prata e x_3 o de bronze, temos a quantidade de soluções inteiras e não negativas dada pela equação linear:

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$

Note, porém, que no enunciado é dito "que esse país recebeu pelo menos uma medalha de cada tipo", isso significa que não é para calcular a quantidade de soluções inteiras e não negativas (soluções que incluem 0), mas, sim, a quantidade de soluções inteiras e positivas (soluções que excluem 0).

Para garantirmos que a quantidade de medalhas de cada tipo não seja nula, faremos uma mudança nas variáveis. Dessa forma, denominaremos $x_1 = a + 1$, $x_2 = b + 1$ e $x_3 = c + 1$

Portanto:

$a + 1 + b + 1 + c + 1 = 10$

$a + b + c = 10 - 3$

$a + b + c = 7$

A representação de todas as somas possíveis é a permutação com repetição da "palavra" |||||||++.

$$P_{n+p-1}^{p,\, n-1} = P_9^{7,\, 2} = \frac{9!}{7!(3-1)!} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$$

Ou ainda a combinação com repetição de n = 3 elementos tomados 7 a 7. Assim:

$CR_{n,\, p} = C_{p+n-1,\, p}$

$$CR_{3,\, 7} = C_{9,7} = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$$

Resposta: há 36 possibilidades de compor o quadro de medalhas de forma que o país receba, pelo menos, uma medalha de cada tipo.

4.4 Princípio da casa dos pombos

Também conhecido em alguns países (na Rússia, por exemplo) como princípio de Dirichlet, em homenagem ao matemático Lejeune Dirichlet, o primeiro a usar esse método para resolver problemas não triviais. Outros matemáticos que se destacaram por usarem essa ideia para resolver diversos problemas foram os húngaros Erdös e Szekeres. Sua versão mais simples é a seguinte:

"Se em n casas, são postos n + 1 pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo."

Exemplo 1. Quantas pessoas precisam estar presentes em uma sala para garantir que 2 delas tenham o primeiro nome começando com a mesma letra?

Resolução

Como o alfabeto possui 26 letras, para garantir que 2 pessoas tenham o primeiro nome começando pela mesma letra, é necessário que haja:

(26 + 1) = 27 pessoas

Exemplo 2. Sabendo que em um baralho há ao todo 52 cartas, excluindo os coringas, divididas em 4 naipes (ouro, copa, espada e paus), com 13 cartas de cada. Responda:

a) Quantas cartas devemos retirar do baralho para garantir que 2 sejam do mesmo naipe?

b) Quantas cartas devemos retirar do baralho para garantir 2 cartas de mesmo valor?

c) Quantas cartas devemos retirar do baralho para garantir 2 reis?

Resolução

a) Vamos supor que consigamos, em retiradas sucessivas, tirar cartas de naipes diferentes. Como o baralho possui 4 naipes, a partir da 5ª retirada, o naipe, obrigatoriamente vai se repetir, assim:

(4 + 1)= 5 cartas

b) Em um baralho de 52 cartas, temos 1 carta de mesmo valor para cada naipe, por exemplo, 1 dama de copas, 1 dama de ouros, 1 dama de espadas e 1 dama de paus. Assim, como cada naipe tem 13 cartas, então:

(13 + 1) = 14 cartas

c) Tendo o baralho 52 cartas com 4 reis, existem 48 cartas que não são reis. Portanto, só poderemos garantir que apareça o primeiro rei após retirar (48 + 1) = 49 cartas. Logo, garantiremos o segundo rei após retirar:

(49 + 1) = 50 cartas

Como cada naipe tem 13 cartas, é necessário retirar:

(13 + 1) = 14 cartas para garantir duas cartas de mesmo naipe.

Saiba mais

Para saber sobre os aspectos histórico e origens da análise combinatória, leia:

BOYER, C. B. História da Matemática. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blüche/Edusp, 1974.

4.5 Exercícios resolvidos e comentados

Exercício 1. Os telefones fixos, no Estado de São Paulo, são formados por 8 algarismos. A quantidade máxima de linhas telefônicas que podem ser instaladas, sabendo que os numerais telefônicos não podem iniciar com zero, é:

A) 7.000.000.000

B) 8.000.000.000

C) 9.000.000.000

D) 10.000.000.000

E) 11.000.000.000

Resolução

Considere o evento "formar um numeral telefônico". Note que deveremos cumprir 8 etapas sucessivas e independentes para que o evento ocorra. Representaremos cada uma das 8 etapas pelos quadriláteros a seguir. Para formar os numerais telefônicos, dispomos de 10 algarismos, que são os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Veja que para a 1ª etapa, temos 9 possibilidades de escolha, pois podemos escolher 9 entre os 10 algarismos disponíveis, já que o numeral telefônico não pode iniciar por zero. Para as demais etapas, não existem restrições, logo há 10 possibilidades para cada uma delas. Assim, pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos:

9	10	10	10	10	10	10	10

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9.000.000.000$ de linhas telefônicas.

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 2. (FGV-SP, adaptada) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. A quantidade de maneiras que essa pessoa poderá realizar o pedido é:

A) 120

B) 24

C) 720

D) 36

E) 48

Resolução

Considere o evento "comer no restaurante". Note que deveremos cumprir 4 etapas sucessivas e independentes:

1ª etapa: 2 possibilidades de comer uma salada

2ª etapa: 4 possibilidades de comer um prato de carne

3ª etapa: 5 possibilidades de tomar uma bebida

4ª etapa: 3 possibilidades de comer uma sobremesa, para que o evento ocorra.

Representaremos cada uma das 4 etapas através de cada quadrilátero a seguir.

2	4	5	3

Assim pelo PFC, temos:

$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 120$ possibilidades de comer no restaurante

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 3. Cinco times de futebol (Corinthians, Palmeiras, Flamengo, Grêmio e Atlético Mineiro) estão no mesmo grupo de um torneio em que só se classificam para a próxima fase os três primeiros colocados de cada grupo. As possibilidades de classificação para esse grupo são:

A) 12

B) 60

C) 24

D) 36

E) 48

Resolução

Considere o evento "se classificar para a próxima fase". Note que deveremos cumprir 3 etapas sucessivas e independentes:

1ª etapa: 5 possiblidades de se classificar em 1º lugar.

2ª etapa: 4 possibilidades de se classificar em 1º lugar.

3ª etapa: 3 possibilidades de se classificar em 1º lugar.

Representaremos cada uma das 3 etapas através de cada quadrilátero seguinte.

5	4	3

Assim pelo PFC, temos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilidades diferentes de classificação

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 4. Existem 4 estradas ligando as cidades A e B, 5 estradas ligando as cidades B e C e 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas formas diferentes uma pessoa pode fazer a viagem da cidade A até D, passando pelas cidades B e C.

A) 48

B) 12

C) 60

D) 120

E) 24

Resolução

Há 4 maneiras diferentes de ir de A até B.

Há 5 maneiras de ir de B até C

Há 3 maneiras de ir de C até D

Logo, pelo princípio fundamental da contagem temos:

$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 5. Assinale a alternativa que contém a quantidade de números de 3 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 sem repeti-los e de modo que comecem com 1:

A) 24

B) 36

C) 48

D) 60

E) 72

Resolução

Observe que temos 10 elementos para formar agrupamentos de 3 elementos e que a ordem dos algarismos forma novos agrupamentos. Logo, temos um arranjo simples.

Teremos 3 posições para a formação dos números.

Na 1ª posição tem que estar o número 1, portanto temos 1 possibilidade.

Na 2ª posição, há 9 possibilidades, pois o 1 não pode repetir.

Na 3ª posição temos 8 possibilidades, logo:

1	9	8

$1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ números que iniciam com 1.

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 6. Assinale a alternativa que contém a quantidade de números de 3 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 sem repeti-los e de modo que sejam divisíveis por 5:

A) 144

B) 128

C) 120

D) 136

E) 64

Resolução

Teremos 3 posições para a formação dos números e para serem divisíveis por 5, eles devem terminar em 0 ou 5. Calcularemos separadamente:

Terminados em 0

Na 1ª posição, temos 9 possibilidades, pois não pode iniciar por 0.

Na 2ª posição, há 8 possibilidades, pois não pode ter o 0 nem o número colocado na 1ª posição.

Na 3ª posição, temos o 0, portanto 1 possibilidade, logo:

9	8	1

$9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$ números que terminam em 0.

Terminados em 5

Na 1ª posição, teremos 8 possibilidades, pois não pode iniciar por 0 ou 5.

Na 2ª posição, há 8 possibilidades, pois não podem o número 5 nem o número colocado na 1ª posição.

Na 3ª posição, temos o 5, portanto 1 possibilidade, logo:

8	8	1

$8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$ números que terminam em 5.

Logo 72 + 64 = 136 números divisíveis por 5

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 7. Uma prova teste consiste em 8 questões, cada uma com 5 alternativas possíveis. Um aluno pretende "chutar" todas as questões. De quantas maneiras distintas isso pode ser feito?

A) 40

B) 5^8

C) 8^5

D) 40.320

E) 120

Resolução

O problema consiste em 8 etapas independentes e sucessivas.

Na 1ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Na 2ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Na 3ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Na 4ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Na 5ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Na 6ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Na 7ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Na 8ª etapa, há 5 possibilidades de escolha das alternativas.

Logo, temos

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 8. Assinale a alternativa que contém a quantidade de números de 3 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 sem repeti-los e de modo que comecem por 2 e terminem com 5:

A) 8

B) 10

C) 12

D) 13

E) 15

Na 1ª posição, teremos o número 2, portanto 1 possibilidade.

Na 2ª posição, há 8 possibilidades, pois não podem o número 2 nem o número 5.

Na 3ª posição, temos o 5, portanto 1 possibilidade, logo:

1	8	1

$1 \cdot 8 \cdot 1 = 8$ números que começam com 2 e terminam em 5.

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 9. A alternativa que contém a quantidade de números compreendidos entre 2.000 e 3.000, formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem que ocorra repetição de algarismos.

A) 120

B) 210

C) 504

D) 336

E) 264

Resolução

Observe que temos 9 elementos para formar agrupamentos distintos de 4 elementos e que a ordem dos algarismos forma novos agrupamentos. Temos então um problema de arranjo simples.

Resolveremos esta questão de duas maneiras: não utilizando a fórmula do arranjo e utilizando a fórmula.

Sem utilizar a fórmula, vamos formar agrupamentos de 4 elementos distintos iniciados por 2. Assim:

Na 1ª posição, teremos o número 2, portanto 1 possibilidade.

Na 2ª posição, há 8 possibilidades, pois o número 2 já apareceu.

Na 3ª posição, há 7 possibilidades, pois não conta o número 2 e o elemento colocado na 2ª posição.

Na 4ª posição, há 6 possibilidades, pois não conta o número 2 e os elementos colocados nas 2ª e 3ª posições.

1	8	7	6

$1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ números distintos entre 2.000 e 3.000.

Utilizando a fórmula

Vamos formar agrupamentos de 4 elementos distintos iniciados por 2. Logo, restam 8 elementos para dispor nas 3 posições restantes, assim:

$$\boxed{2}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{A_{8,\,3}}$$

$$A_{n,\,p} = A_{8,3} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$$

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 10. Cinco meninos e uma menina utilizam um banco de cinco lugares. Assinale a alternativa que contém quantidade de maneiras distintas em que podem sentar-se de modo que a menina nunca fique em pé:

A) 120

B) 600

C) 504

D) 720

E) 864

Resolução

Observe que temos 6 pessoas e formaremos agrupamentos ordenados de 5 pessoas.

Observe a figura.

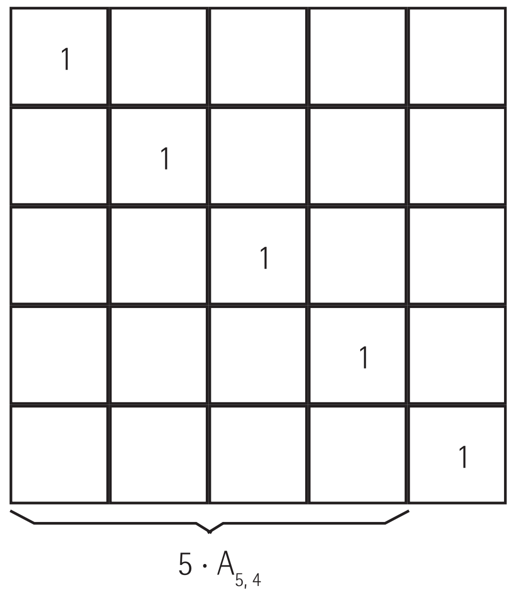


Figura 16

Cada linha representa os cinco lugares e as possíveis posições que a menina se sentará. Assim, para cada linha, temos um arranjo de 5 meninos tomados 4 a 4.

$$5 \cdot A_{5,4} = 5 \cdot \left[\frac{5!}{(5-4)!}\right] = 5 \cdot \left(\frac{5!}{1!}\right) = 5 \cdot 120 = 600$$

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 11. (Fuvest-SP, adaptada) Assinale a alternativa que contém a quantidade de números múltiplos de três, com quatro algarismos distintos que se podem formar com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 9.

A) 12

B) 60

C) 54

D) 72

E) 86

Resolução

Temos 5 elementos para formar números de 4 algarismos distintos. Logo a ordem importa, tratando-se de um arranjo simples.

Para os números formados serem múltiplos de 3, devemos ter que a soma de todos os quatro algarismos seja uma múltiplo de 3, por exemplo 2.436, 2 + 4 + 3 + 6 = 15 (múltiplo de 3).

Verificando os algarismos dados, nota-se facilmente que, para ser múltiplo de 3, os algarismos 2 e 4 devem fazer parte de todos os agrupamentos.

Assim, teremos 4 posições para colocar o algarismo dois e 3 posições para alocar o algarismo quatro, portanto temos $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades de agrupar os algarismos 2 e 4.

Sobraram então os algarismos 3, 6 e 9 para agrupá-los nas duas posições restantes, o que resulta em uma $A_{3,2}$.

Assim:

$$12 \cdot A_{3,2} = 12 \cdot \left[\frac{3!}{(3-2)!}\right] = 12 \cdot \left(\frac{3!}{1!}\right) = 12 \cdot 6 = 72$$

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 12. (Faap-SP, adaptada) Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VESTIBULAR, em que as letras VES, nesta ordem, permaneçam juntas?

A) 40.320

B) 5.040

C) 5.760

D) 72

E) 86

Resolução

Este é um problema de permutação simples, pois das 10 letras da palavra VESTIBULAR, usaremos todas para formar os anagramas. Todavia, o exercício exige que as letras VES permaneçam, nesta ordem juntas, portanto podemos considerá-las como uma única letra. Assim a palavra VESTIBULAR passa a ter apenas 8 letras. Logo, a quantidade de permutações simples Pn é:

$P_8 = 8! = 40320$

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 13. Uma senha deve ser constituída por 2 letras escolhidas entre a, b, c, d, seguidas por 3 algarismos escolhidos entre os números 1, 2, 3, 4 ou 5. O número de senhas possíveis nos casos em que são permitidas repetições de símbolos e no caso de não serem permitidas repetições de símbolos, são dadas, respectivamente, por:

A) 1.728 e 1.258

B) 23 e 19

C) 1.256 e 864

D) 32.000 e 1.286

E) 2.000 e 720

Resolução

Com repetição

Nas duas primeiras posições, são inseridas as letras, sendo permitida a repetição, temos 4 possibilidades de escolha para cada posição. Nas três últimas posições, são inseridos os algarismos, sendo permitida a repetição, temos 5 possibilidades de escolha para cada posição.

$4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2000$ possibilidades

Sem repetição

Nas duas primeiras posições, são inseridas as letras, não sendo permitida a repetição, temos 4 possibilidades de escolha para a primeira posição e 3 possibilidades para a segunda posição. Nas três últimas posições, são inseridos os algarismos, não sendo permitida a repetição, temos 5 possibilidades de escolha para a primeira posição, 4 possibilidades para a segunda posição, 3 possibilidades para a terceira posição.

$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 720$ possibilidades

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 14. (EFE, adaptada) O número de permutações que podem ser feitas com as letras da palavra CAPÍTULO, de forma que não fiquem juntas duas vogais e duas consoantes?

A) 2.304

B) 782

C) 1.152

D) 576

E) 264

Resolução

A palavra CAPÍTULO tem 8 letras, sendo 4 vogais (V) e 4 consoantes (C). Como duas vogais e duas consoantes não podem ficar juntas, os anagramas têm os seguintes formatos:

Começando por consoante: _C_ _V_ _C_ _V_ _C_ _V_ _C_ _V_

Começando por vogal: _V_ _C_ _V_ _C_ _V_ _C_ _V_ _C_

O cálculo do total de anagramas iniciados por consoantes é feito da seguinte maneira:

4 consoantes na 1ª posição, 4 vogais na 2ª posição, 3 consoantes na 3ª posição, 3 vogais na 4ª posição, 2 consoantes na 5ª posição, 2 vogais na 6ª posição, 1 consoante na 7ª posição e 1 vogal na 8ª posição. Assim:

_4_ _4_ _3_ _3_ _2_ _2_ _1_ _1_ $= 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 576$

Como o cálculo dos anagramas iniciados por vogal é feito da mesma maneira, temos:

$576 \cdot 2 = 1152$ anagramas onde duas vogais e duas consoantes não estão juntas.

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 15. Quantos números podemos obter se fizermos o produto de três números escolhidos entre os números 2, 3, 5 e 7?

A) 18

B) 35

C) 12

D) 8

E) 4

Resolução

Trata-se de um problema de combinação simples, pois, sendo a multiplicação uma operação que goza da propriedade comutativa, não há diferença entre o produto $2 \cdot 3 \cdot 5$ e $5 \cdot 3 \cdot 2$, por exemplo. Portanto a ordem não é relevante. Assim tomaremos 3 números em um conjunto de 4 elementos. Assim

$$C_{4,\,3} = \frac{4!}{3!\left(4-3\right)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 16. (FEI-SP, adaptada) Formados e dispostos em ordem crescente, os números que se obtêm, permutando-se os algarismos 2, 3, 4, 8 e 9, que lugar ocupa o número 43.892?

A) 70º

B) 43º

C) 101º

D) 62º

E) 58º

Resolução

Colocando em ordem crescente as permutações obtidas dos 5 algarismos:

2					$\Rightarrow P_4 = 4! = 24$
3					$\Rightarrow P_4 = 4! = 24$
4	2				$\Rightarrow P_3 = 3! = 6$
4	3	2			$\Rightarrow P_2 = 2! = 2$
4	3	8	2		$\Rightarrow P_1 = \underline{1! = 1}$ +
4	3	8	9	2	$\Rightarrow$ 58º 57

Figura 17

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 17. Sobre uma reta, marcam-se 8 pontos e sobre uma outra reta, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 quaisquer desses pontos?

A) 210

B) 220

C) 310

D) 320

E) 250

Resolução

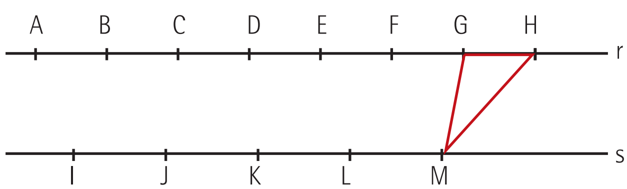


Figura 18

No esquema anterior, percebe-se que o triângulo MHG é o mesmo que o triângulo HMG, portanto a ordem dos vértices não importa, tratando-se, assim, de um problema de combinação simples.

Tem-se no total 13 pontos que deverão ser unidos 3 a 3, logo podemos formar $C_{13,\,3}$ triângulos. Entretanto, temos:

Na reta r $\Rightarrow C_{8,\,3} \Rightarrow$ os pontos estão alinhados e, assim, não formam triângulos.

Na reta s $\Rightarrow C_{5,\,3} \Rightarrow$ os pontos estão alinhados e, assim, não formam triângulos.

Logo, o total de triângulos é dado por:

$C_{13,\,3} - C_{8,\,3} - C_{5,\,3}$

$$\left(\frac{13!}{3!10!}\right)-\left(\frac{8!}{3!5!}\right)-\left(\frac{5!}{3!2!}\right) = 286 - 56 - 10 = 220 \text{ triângulos}$$

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 18. Quantas diagonais tem um pentágono convexo?

A) 1

B) 2

C) 10

D) 3

E) 5

Resolução

A quantidade de segmentos que unem dois vértices é

$$C_{5,\,2}=\frac{5!}{2!\,3!}=10$$

Note que se inclui, entre esses 10 segmentos que unem dois vértices, além das diagonais, os 5 lados do pentágono.

Então:

$C_{5,\,2} - 5 = 10 - 5 = 5$ diagonais

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 19. De quantos modos diferentes, um jogador de truco pode receber as 3 cartas que lhe cabem, sabendo que, neste jogo, o baralho contém apenas 40 cartas?

A) 9.880

B) 2.202

C) 7.500

D) 3.330

E) 656

Resolução

Perceba que a ordem que o jogador recebe as cartas não importa, logo temos uma combinação simples.

$$C_{40,\,3}=\frac{40!}{3!\,37!}=9880 \text{ maneiras diferentes}$$

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 20. A partir de um grupo com 10 pessoas, entre elas Igor, queremos formar uma comissão com 4 pessoas. Quantas comissões distintas existem se Igor não deve fazer parte de nenhuma comissão?

A) 126

B) 327

C) 39

D) 120

E) 210

Resolução

As comissões se diferem pelas pessoas que fazem parte dela e não pela ordem como são escolhidas, portanto é um problema de combinação simples.

Das 10 pessoas, tiramos Igor, restando 9 pessoas para combinarmos 4 a 4. Assim

$$C_{9,\,4}=\frac{9!}{4!(9-4)!}=\frac{9!}{4!5!}=126 \text{ comissões}$$

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 21. De quantas maneiras podemos colocar 9 bolas em 3 caixas, de modo que fiquem 2 bolas na primeira caixa, 3 bolas na segunda caixa e 4 bolas na terceira?

A) 5.670

B) 5.040

C) 2.520

D) 1.260

E) 630

Resolução

Há $C_{9,\,2}$ modos de escolher as 2 bolas que ficarão na primeira caixa. Para cada modo há $C_{7,\,3}$ possibilidades de escolher as 3 bolas que ficarão na segunda caixa e há $C_{4,\,4}$ maneiras de colocar as 4 bolas na terceira urna. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, há $C_{9,\,2} \cdot C_{7,\,3} \cdot C_{4,\,4}$

maneiras diferentes de colocar 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 4 bolas na terceira caixa.

$$C_{9,\,2} \cdot C_{7,\,3} \cdot C_{4,\,4} = \frac{9!}{2!\,7!} \cdot \frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{4!}{4!\,0!} = 1260 \text{ modos}$$

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 22. Quantos são os anagramas da palavra ANANÁ?

A) 5

B) 10

C) 15

D) 25

E) 30

Resolução

Nesse caso, há 3 repetições da letra A e 2 repetições da letra N, totalizando 5 letras. Logo, temos um problema de permutação com repetição.

$$P_5^{3,\,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ anagramas}$$

Resposta correta: alternativa B.

Exercício 23. A partir de um grupo com 10 pessoas, entre elas Pedro e Paulo, queremos formar uma comissão com 4 pessoas. Quantas comissões distintas existem se Pedro e Paulo (ambos) devem fazer parte de todas as comissões?

A) 20

B) 210

C) 28

D) 126

E) 45

Resolução

A ordem dos elementos que forma as comissões não importa, logo o problema é de combinação simples.

Como Pedro e Paulo devem fazer parte das comissões, das 10 pessoas que tinha no conjunto restam apenas 8. Portanto devemos combinar essas 8 pessoas com duas vagas restantes, de Pedro e Paulo, assim:

$$C_{8,\,2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28 \text{ comissões}$$

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 24. Quantos anagramas da palavra COMODORO começam com a letra C?

A) 5

B) 50

C) 210

D) 250

E) 300

Resolução

Temos 8 letras no total, com 4 repetições da letra O.

Fixando C na primeira posição, restam 7 posições para as demais letras, assim:

$$P_7^{4,\,1,\,1,\,1} = \frac{7!}{4!} = 210 \text{ anagramas}$$

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 25. As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podemos criar com as letras A e B e os algarismos pares, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

A) 210

B) 315

C) 1.500

D) 960

E) 5.024

Resolução

Se as placas são formadas por 3 letras e 4 algarismos respectivamente, teremos ao todo 7 posições, conforme esquema seguinte:

As três primeiras posições para as letras;
As quatro últimas posições para os algarismos.

___ ___ ___ - ___ ___ ___ ___

As placas, obrigatoriamente terão somente as letras A e B em qualquer uma das três primeiras posições. Podendo repetir

Os algarismos possíveis são 0, 2, 4, 6 e 8, ocupando, sem repetição, as quatro últimas posições. Assim:

$\underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ }$ = 960 placas

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 26. Um chaveiro foi contratado para fazer cópias das chaves de 10 salas; entretanto ele não as etiquetou, e viu-se obrigado a repor as chaves por tentativas. Quantas tentativas, no máximo, deve fazer?

A) 45

B) 110

C) 15

D) 34

E) 62

Resolução

Se o problema pede o máximo de tentativas, devemos pensar na pior das hipóteses, ou seja, para cada chave, ela só abriu a última porta testada. Dessa forma, o raciocínio e o seguinte: a primeira chave, na pior da hipótese, precisa ser testada em 9 portas, pois na décima porta, o chaveiro terá a certeza de que servirá. A segunda chave, por consequência, precisa ser testada em 8 portas, e assim por diante.

Observe a tabela seguinte:

Tabela 4

Chave	Portas a testar	Tentativas acumuladas
1ª	9	9
2ª	8	17
3ª	7	24
4ª	6	30
5ª	5	35
6ª	4	39
7ª	3	42
8ª	2	44
9ª	1	45

Observe que foram testadas 9 chaves, pois a última chave, o chaveiro tem certeza em que porta ela servirá, logo, não precisa ser testada.

O máximo de tentativas é 45.

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 27. Quantos anagramas da palavra COMODORO começam com a letra O?

A) 55

B) 110

C) 150

E) 210

E) 840

Resolução

Fixamos uma das letras O na 1ª posição e fazemos:

O $\underbrace{\text{COMODOR}}_{P_7^{3,1,1,1,1}}$

$$P_7^{3,1,1,1} = \frac{7!}{3!} = 840 \text{ anagramas}$$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 28. De quantas formas 5 casais fixos podem se sentar em uma mesa com 5 bancos de 2 assentos cada um, sentando cada casal em um banco?

A) 768

B) 384

C) 48

D) 96

E) 192

Resolução

Podemos considerar cada casal como uma única pessoa, visto que eles estarão sempre juntos. Assim, vamos começar sentando os 4 casais na roda gigante, o que pode ser feito de $PC_5 = (5-1)! = 4! = 24$ formas.

Como em cada banco há dois assentos, então cada casal pode se sentar de duas maneiras distintas.

Logo, o total de maneiras com que 5 casais podem sentar-se nessa roda gigante é dado por $4! \cdot 2^5 = 768$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 29. De quantos modos podemos pintar as faces de uma pirâmide de base quadrangular regular usando 5 cores diferentes, sendo cada face pintada de uma cor?

A) 5

B) 15

C) 30

D) 60

E) 120

Resolução

Na figura seguinte, vemos duas imagens da pirâmide: uma visão de frente e uma visão de cima. Na imagem da direita, podemos observar que a base da pirâmide é um quadrado e suas faces laterais são triângulos.

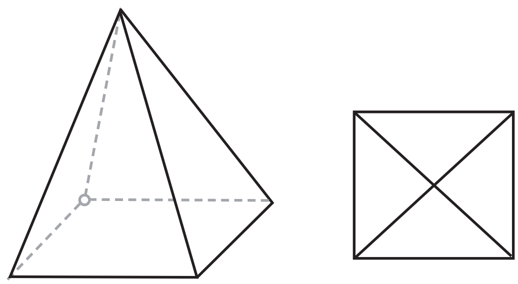


Figura 19

Para colorir a pirâmide, escolheremos primeiro uma cor para a base, o que podemos fazer de 5 maneiras.

Sobraram, então, 4 cores para colorir as faces laterais; assim, o total de maneiras de colorirmos as faces é dada por:

$PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$

Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, há $5 \cdot 6 = 30$ formas de colorir a pirâmide com 5 cores distintas.

Resposta correta: alternativa C.

Exercício 30. De quantas maneiras podemos colorir as faces de um tronco de uma pirâmide cujas bases são quadrangulares e regulares, usando 6 cores diferentes?

A) 90

B) 360

C) 30

D) 180

E) 120

Resolução

Na figura seguinte, é apresentado o desenho de um tronco de pirâmide cujas bases são quadrados regulares. Observe que as bases superior e inferior têm dimensões distintas, logo, a ordem importa.

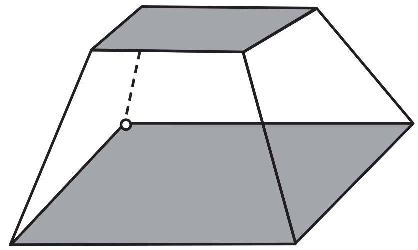


Figura 20

Podemos escolher uma das 6 cores para colorir a face superior, sobrando 5 cores para colorir a face inferior. Dessa forma, pelo princípio fundamental da contagem, há $6 \cdot 5 = 30$ formas de colorir as bases inferior e superior da pirâmide.

Sobram 4 cores distintas para colorir as faces laterais; assim, o total de maneiras para colorir tais faces é uma permutação circular de 4 elementos, ou seja, $PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$.

Portanto, o princípio multiplicativo garante que podemos colorir as faces do prisma pentagonal de $30 \cdot 6 = 180$ maneiras distintas.

Resposta correta: alternativa D.

Exercício 31. De quantos modos podemos colorir as faces de um prisma cujas bases são quadradas, usando 6 cores diferentes?

A) 90

B) 360

C) 30

D) 180

E) 120

Resolução

Na figura seguinte, está representado o desenho de um prisma, cujas bases são quadradas. Observe que aqui as duas bases são iguais.

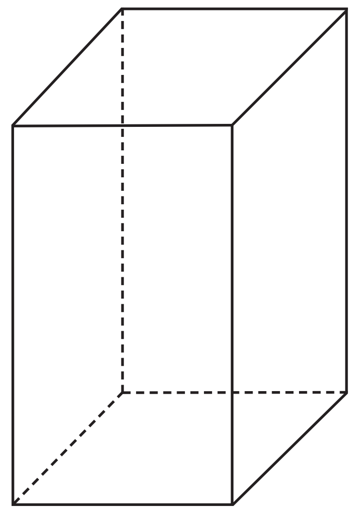


Figura 21

Como as bases são iguais, a ordem que escolhemos as duas cores para pintar é irrelevante. Assim temos:

$$C_{6,\,2}=\frac{6!}{2!\,4!}=15$$

Sobram 4 cores distintas para colorir as faces laterais, e o total de maneiras de colorir essas faces é P4 = (4–1)! = 3! = 6.

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, podemos colorir o paralelepípedo de 15 · 6 = 90 modos distintos.

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 32. Com 4 cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar 5 vasos idênticos, pintando cada vaso de uma única cor?

A) 12

B) 24

C) 28

D) 36

E) 56

Resolução

Esse exercício pode ser resolvido determinando a quantidade de soluções não negativas de uma equação linear ou por combinação com repetição.

Chamando de x_1, a quantidade de vasos pintados da cor 1, x_2 a quantidade de vasos pintados da cor 2, x_3 a quantidade de vasos pintados da cor 3 e x_4 a quantidade de vasos pintados da cor 4, podemos montar a seguinte equação linear:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

Assim teremos:

5 símbolos /: /////

3 símbolos +: +++

Portanto, a solução do problema é o cálculo dos anagramas da "palavra" /////+++, ou seja, a quantidade de permutações dos 8 símbolos (/////+++) com 5 repetições do símbolo / e 3 repetições do símbolo +. Assim:

$$P_8^{5,\,3} = \frac{8!}{5!\,3!} = 8 \cdot 7 = 56 \text{ maneiras}$$

Outra maneira, é considerarmos que podemos assumir as cores como um conjunto de 4 elementos e que serão pintados 5, significa dizer que são formados agrupamentos não ordenados (a ordem dos vasos pintados não importa) e que pelo menos uma cor vai se repetir, assim temos uma combinação com repetição de 4 elementos tomados 5 a 5.

$$CR_{4,\,5} = P_8^{5,\,3} = C_{8,\,5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56 \text{ maneiras}$$

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 33. (PUC-RJ, adaptada) Em uma sorveteria, há sorvetes dos sabores morango, chocolate, creme e flocos. De quantas maneiras podemos montar uma casquinha com duas bolas nessa sorveteria?

A) 10

B) 15

C) 20

D) 12

E) 24

Designando de x_1, a bola sabor morango, x_2 a bola sabor chocolate, x_3 a bola sabor creme e x_4 a bola sabor flocos, podemos montar a seguinte equação linear:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ bolas de sorvete.

Assim, teremos:

2 símbolos /: //

3 símbolos +: +++

Portanto, a solução do problema será o cálculo dos anagramas da "palavra" //+++, ou seja, a quantidade de permutações dos 5 símbolos (//+++) com 2 repetições do símbolo / e 3 repetições do símbolo +. Assim:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ maneiras}$$

Outra maneira é considerar que podemos assumir cada bola dos sabores como um conjunto de 4 elementos, onde são escolhidas 2 bolas. Isso significa dizer que são formados agrupamentos não ordenados (a ordem das bolas dos sabores escolhidos não importa) e que pode haver repetição de bola de mesmo sabor, assim temos uma combinação com repetição de 4 elementos tomados 2 a 2.

$$CR_{4,2} = P_5^{2,3} = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10 \text{ maneiras}$$

Resposta correta: alternativa A.

Exercício 34. (FCC-2019/Prefeitura de Manaus) As peças de um jogo estão todas dentro de um saco opaco. Elas vêm em 4 formatos diferentes e cada peça está numerada com um número entre os seguintes: 1, 2, 3, 4 ou 5. A menor quantidade de peças que devem ser retiradas aleatoriamente do saco para garantir que se tenha, após a retirada, pelo menos 4 peças de um mesmo formato e 3 peças com a mesma numeração é:

A) 15

B) 10

C) 24

D) 18

E) 13

Resolução

Se temos 4 formatos diferentes numerados de 1 a 5, significa que o jogo possui 20 peças. Considerando que os formatos das peças são retangular, circular, triangular e pentagonal, temos:

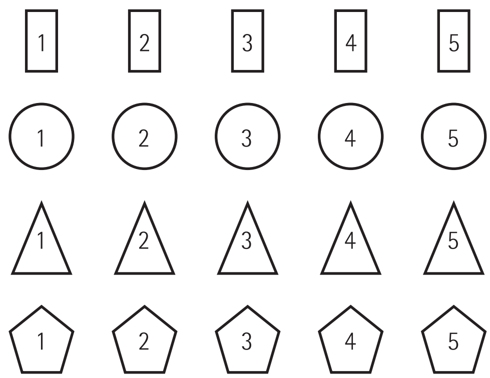


Figura 22

Analisando a figura, para garantirmos 4 peças do mesmo formato, devemos imaginar o pior cenário, ou seja, sempre que possível, retirar peças diferentes. Dessa maneira, supondo que retiramos todas as peças da 1ª coluna, depois todas as peças da 2ª coluna e, por fim, todas as peças da 3ª coluna. Perceba que qualquer outra peça que for retirada, garantiremos 4 peças de mesmo formato. Assim, retiramos 12 peças das três primeiras colunas mais uma. Logo, pelo princípio da casa dos pombos:

$(12 + 1) = 13$ peças

Agora, para garantirmos 3 peças com a mesma numeração, também devemos imaginar o pior cenário, ou seja, sempre que possível, retirar peças com numerais diferentes. Dessa maneira, supondo que retiramos todos os retângulos da 1ª linha e todos os círculos da 2ª linha, qualquer peça que retirarmos na sequência garante 3 peças com a mesma numeração. Assim, retiramos 10 peças das duas primeiras linhas mais uma. Logo, pelo princípio da casa dos pombos:

$(10 + 1) = 11$ peças

Note que o exercício pede 4 peças diferentes e 3 peças com a mesma numeração, logo, a resposta é 13 peças.

Resposta correta: alternativa E.

Exercício 35. (FCC-2018/Detran-MA) Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, é correto afirmar que, necessariamente:

A) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.

B) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.

C) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.

D) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.

E) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

Resolução

O que isso tem a ver com o princípio da casa dos pombos? Vamos lá. Imagine que há 10 casas de pombos e devemos distribuir 25 pombos entre as casas. Ora, certamente alguma casa será obrigada a abrigar mais de 2 pombos. Por quê?

Imagine que distribuindo os pombos igualmente entre as casas, os 10 primeiros pombos ficarão em casas diferentes.

Em seguida, vamos alocar mais 10 pombos: 1 em cada casa.

Assim, já temos 2 pombos em cada casa.

Ainda temos 5 pombos: obrigatoriamente eles deverão ocupar casas que já são ocupadas por 2 pombos. Portanto, em alguma casa haverá mais de 2 pombos.

No caso, temos que distribuir 25 caminhões entre 10 fiscais. Vamos analisar as alternativas.

A) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.

Supondo que tentássemos distribuir de maneira igualitária os caminhões entre os fiscais, de tal modo que cada um fiscalize poucos caminhões, seríamos obrigados a colocar pelo menos um fiscal com mais de 2 caminhões. Isso porque a quantidade de caminhões é maior que o dobro da quantidade de fiscais.

Perceba a analogia com as casas de pombos. Essa alternativa é verdadeira.

B) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.

Nada impede que um só fiscal fiscalize todos os 25 caminhões (e os outros 9 fiscalizem nenhum). Portanto, a alternativa b está errada.

C) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.

Vimos que podemos, por exemplo, colocar todos os 25 caminhões para apenas um fiscal. Dessa forma, teríamos 9 fiscais que não receberão caminhões para fiscalizar. A alternativa está errada.

D) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.

Falso. Já vimos que pelo menos um fiscal será obrigado a fiscalizar mais de 2 caminhões.

E) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

Falso. Vimos que é possível alocar os 25 caminhões para um único fiscal. Nenhuma informação do texto descarta essa possibilidade.

Resposta correta: alternativa A.

Resumo

Há dois tipos diferentes de coleções: as ordenadas, que chamamos de listas; e as desordenadas, que chamamos de conjunto.

Representamos uma lista através de parênteses, em que os elementos são separados por vírgula. Chamamos de comprimento de lista a quantidade de objetos inseridos nela.

Duas listas são iguais, se e somente se tiverem comprimentos iguais; se os objetos nas referidas posições forem iguais. Denominamos lista vazia aquela cujo comprimento é 0 e representamos ( ).

Utilizamos o princípio fundamental da contagem, que estabelece se um evento possui duas ou mais etapas sucessivas e independentes, de modo que o número de possibilidades da primeira etapa é m_1, da segunda etapa m_2 e da enésima etapa m_n, então o número total de possibilidades de ocorrência do evento é dado por $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{n-1} \cdot m_n$

O fatorial é representado da seguinte forma:

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot (n - n + 1)$

Na análise combinatória, a permutação simples são agrupamentos ordenados, sem repetição, onde são utilizados todos os "n" elementos em cada agrupamento denotada pela fórmula $P_n = n!$

O arranjo simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$ são os agrupamentos que se diferem entre si pela ordem e pela natureza dos elementos que se podem formar com p dos n elementos dados a partir da fórmula:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Na combinação simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$, são todos os subconjuntos de p elementos formados a partir dos n elementos dados.

Denota-se por Cn, p ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações simples de n elementos tomados p a p obtidos através da fórmula:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

No tópico binômio de Newton, abordamos os números binomiais.

O número binomial $\binom{n}{p}$, denotado por binomial de n sobre p é dado por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\left(n-p\right)!} = C_{n,\,p} \text{ com } n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p$$

Como consequência da definição, temos:

$$\binom{n}{0} = 1, \text{ para } \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{1} = n, \text{ para } \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{n} = 1, \text{ para } \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Em números binomiais complementares, temos:

Se $C_{n,\,p} = C_{n,\,n-p}$, podemos concluir que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Vimos o triângulo de Pascal, em que os números binomiais podem ser escritos em um quadro triangular, assim:

$$\begin{array}{lccccccc}
 & \text{Coluna 0} & \text{Coluna 1} & \text{Coluna 2} & \text{Coluna 3} & \text{Coluna 4} & \text{Coluna 5} \; \ldots & \text{Coluna n} \\
\text{Linha 0} & \binom{0}{0} & & & & & & \\
\text{Linha 1} & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\text{Linha 2} & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\text{Linha 3} & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\text{Linha 4} & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\text{Linha 5} & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\text{Linha n} & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Figura 23

Como propriedades, temos:

Na primeira coluna, todos os elementos são iguais a 1, pois $\binom{n}{0} = 1$

Em todas as linhas, o último elemento é igual a 1, pois $\binom{n}{n} = 1$

Os elementos equidistantes dos extremos, em cada linha, são iguais:

1 **4** 6 **4** 1

Cada binomial de uma determinada linha é igual à soma de dois binomiais da linha anterior.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\qquad
\boxed{\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}}$$

Figura 24

Logo:

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p} \Rightarrow \text{ relação de Stiffel}$$

A seguir, a fórmula do Binômio de Newton:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

A seguir, a fórmula do termo geral:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Depois abordamos o tópico análise combinatória II. A permutação com repetição compreende a permutação de n elementos dos quais um elemento se repete α vezes, outro elemento se repete β vezes, ..., e outro elemento γ vezes, de modo que $\alpha + \beta + ... + \gamma$ é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,...\gamma}=\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdot...\cdot\gamma!}$$

A permutação circular é representada da forma a seguir

$$PC_n=(n-1)!$$

Depois vimos as equações lineares com soluções inteiras e não negativas. Equação linear é todo polinômio escrito na forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + ... + a_n x_n = p$$

Cuja solução é dada por:

$$P_{n+p-1}^{p,\, n-1}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Depois, abordamos a combinação com elementos repetidos:

$$CR_{n,\, p}=P_{n+p-1}^{p,\, n-1}=C_{p+n-1,\, p}$$

Também vimos o princípio das casas dos pombos: se em n casas são postos n + 1 pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo.

Exercício

Questão 1. Imagine que você, aluno(a) do curso de ciência da computação, seja convidado(a) para participar de um ciclo de palestras em que profissionais da área irão compartilhar experiências. Esse ciclo de palestras ocorrerá em uma sala na qual existem 5 modos diferentes de entrada (E1, E2, E3, E4 e E5) e 3 modos diferentes de saída (S1, S2 e S3), conforme ilustra a figura seguinte.

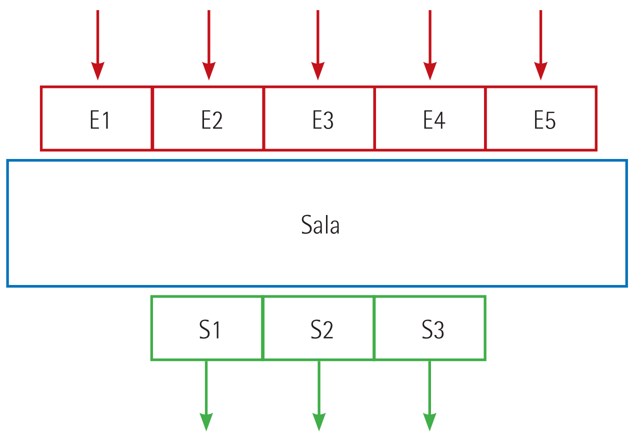


Figura 25 – Esquema de sala com 5 entradas e 3 saídas distintas

Assinale a alternativa que mostra corretamente a quantidade de possibilidades distintas de combinações de entrada e saída da sala.

A) 2

B) 8

C) 9

D) 15

E) 25

Resposta correta: alternativa D.

Análise da questão

Temos 5 opções distintas de entrada (E1, E2, E3, E4 e E5) e 3 opções distintas de saída (S1, S2 e S3). Logo, há 15 combinações distintas de entrada e saída, valor que é dado pelo resultado do produto 5x3.

Esquematicamente, temos o que se mostra a seguir.

Tabela 5

Primeira etapa (escolha da entrada)	Segunda etapa (escolha da saída)
5 possibilidades: E1, E2, E3, E4 e E5	3 possibilidades: S1, S2 e S3

Conforme dito, temos 5x3=15 possibilidades de combinações de entradas e saídas.

Questão 2. Imagine que você, aluno(a) do curso de ciência da computação, tenha de fazer uma avaliação sobre matemática discreta. Essa avaliação é composta de 8 testes, sendo cada teste formado por 5 alternativas (alternativas A, B, C, D e E), conforme mostrado a seguir.

Tabela 6

	A	B	C	D	E
Teste 1					
Teste 2					
Teste 3					
Teste 4					
Teste 5					
Teste 6					
Teste 7					
Teste 8					

Assinale a alternativa que mostra corretamente a quantidade de possibilidades distintas de gabaritos para a avaliação em foco.

A) 5

B) 25

C) 40

D) 32.768

E) 390.625

Resposta correta: alternativa E.

Análise da questão

Aqui, temos um experimento dado pela contagem dos gabaritos possíveis para uma avaliação composta de 8 testes, sendo cada teste formado por 5 alternativas.

Cada etapa desse experimento, que é a resposta dada ao teste, tem 5 possibilidades de ocorrência (alternativas A, B, C, D ou E).

Logo, a quantidade Q de modos diferentes com que o experimento pode ser feito é dada pela multiplicação dos modos diferentes com que cada etapa pode ocorrer. Logo:

$Q = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 390.625$

Concluímos que há 390.625 gabaritos possíveis para uma prova composta de 8 testes, sendo cada teste formado por 5 alternativas.