Unidade II

5 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Já estudamos a natureza dos espaços vetoriais. Agora destacaremos a análise das correspondências entre os espaços vetoriais.

5.1 Aplicações entre conjuntos

Considere dois conjuntos não vazios denominados U e W e uma aplicação T que associa cada elemento de U a um único elemento de W. Seja u um elemento qualquer de U, representamos por T(u) (lê-se T de u) o elemento de W associado a u e o denominamos imagem de u por T.

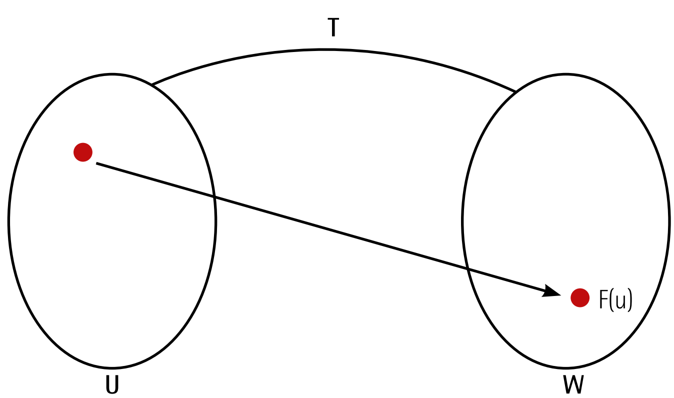

Figura 12

Representamos a aplicação T por T: U→W, onde o conjunto U é denominado domínio e o conjunto W, contradomínio da aplicação T.

Consideramos iguais as transformações R: U→V e S: U→V somente se R(u) = S(u) para qualquer $u \in V$.

Chamamos de injetora a aplicação T: A→B se elementos distintos de A têm imagens distintas.

$\forall a_1, a_2 \in A, T(a_1) = T(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

De outra forma, para $\forall a1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow T(a_1) \neq T(a_2)$

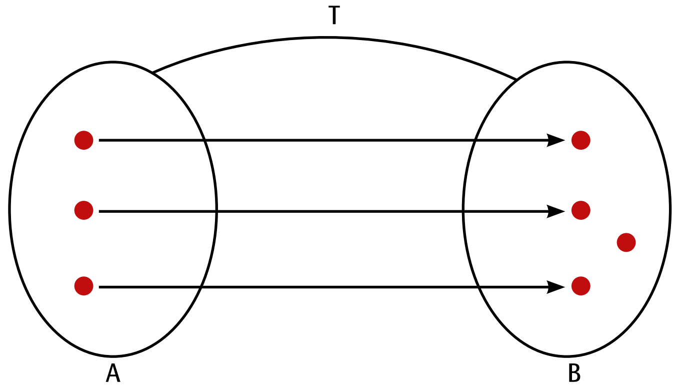

Figura 13

Note que há um elemento sobrando no contradomínio.

Chamamos de sobrejetora a aplicação T: A→B se cada b ∈ B é imagem de ao menos um a ∈ A; isso quer dizer que a função sobrejetora é aquela em que todos os elementos do contradomínio estão relacionados a elementos do domínio.

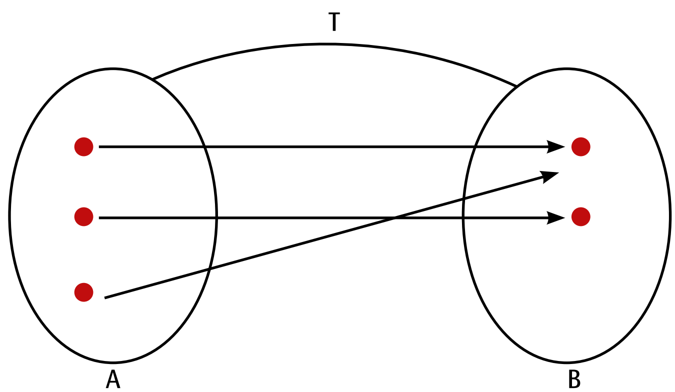

Figura 14

Observe que não há elementos sobrando no contradomínio, ou seja, a imagem de T é o próprio contradomínio. Em linguagem matemática, Im(T) = B.

Chamamos de bijetora a aplicação T: A→B se ela for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

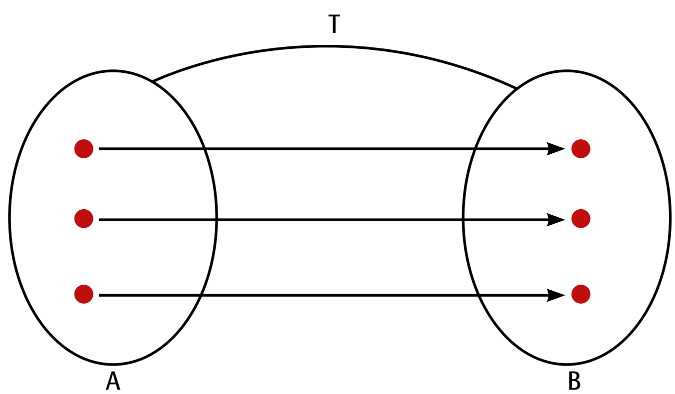

Figura 15

Portanto, uma função é bijetora quando possui contradomínio igual à imagem e, concomitantemente, cada elemento do domínio tem imagem distinta.

Observação

O termo matemático aplicação tem o mesmo significado dos termos matemáticos função e transformação.

5.2 Transformações lineares

Todos concordamos que a linha mais simples é a reta e que as retas mais simples são aquelas que passam pela origem do plano cartesiano, cuja equação é $y = ax$ ou $f(x) = ax$.

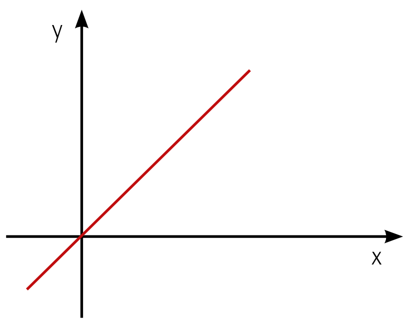

Figura 16

Lembrando que os espaços vetoriais são conjuntos de objetos matemáticos em que valem as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar. Vamos aplicar essas operações à função $f(x) = ax$ e examinar seu comportamento.

Sejam x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2$

$f(x_1) + f(x_2) = ax_1 + ax_2$

Logo $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Agora, sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax)$

$\alpha f(x) = \alpha(ax)$

Logo $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Como visto anteriormente, até agora estudamos os espaços vetoriais em si, sem nos preocuparmos com as relações entre eles.

Os objetos que conectam esses espaços vetoriais são as funções lineares, que, a partir de agora, chamaremos de transformações lineares.

Saiba mais

Para conhecer melhor os vetores, leia:

WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

5.2.1 Definição

Sejam U e V espaços vetoriais, chamaremos de transformação linear de U em V, denotada por $T: U \to V$, a aplicação que satisfaz as seguintes condições:

- Para $\forall\ a, b \in U \Rightarrow T(a + b) = T(a) + T(b)$
- Para $\forall\ a \in U$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha a) = \alpha T(a)$

5.2.2 Operador linear

Seja U = V uma transformação linear de $T: U \to U$, é chamada de operador linear.

Vejamos alguns exemplos de transformações lineares.

1) Seja $A: U \to V$ a transformação linear assim definida: $A(u) = 0$ (vetor nulo de V) para $\forall\ u \in U$. É transformação linear, pois:

- $A(u_1 + u_2) = 0 = 0 + 0 = A(u_1) + A(u_2)$
- $A(\alpha u) = 0 = \alpha 0 = \alpha A(u)$

$A: U \to V$ é chamada de transformação linear nula e U em V.

2) Seja $B: U \to U$ tal que $B(u) = u$ para $\forall\ u \in U$. É transformação linear, pois:

- $B(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = B(u_1) + B(u_2)$

- $B(\alpha u) = \alpha u = \alpha B(u)$

B é operador linear de U.

3) Seja F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y, z) = (x, 2x - z)$ para $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. É uma transformação linear, pois:

Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

- $F(u_1 + u_2) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2)) = (x_1, 2x_1 - z_1) + (x_2, 2x_2 - z_2) = F(u_1) + F(u_2)$

- $F(\alpha u) = F(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, 2\alpha x - \alpha z) = \alpha(x, 2x - z) = \alpha F(u)$

Lembrete

Os espaços vetoriais são conjuntos de objetos matemáticos em que valem as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar.

5.2.3 Propriedades

Considere U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e seja T: $U \to V$ uma transformação linear. Para a transformação linear T, valem as propriedades:

I – $T(0_u) = 0_v$ (T leva o vetor nulo de U ao vetor nulo de V)

II – $T(-u) = -T(u)$

III – $T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2)$

IV – $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i)$, de outro modo:

$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 +, ...,+ \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) +, ...,+ \alpha_n T(u_n)$

Dessa forma, para verificarmos se uma transformação T: $A \to B$ é linear, primeiro observamos se o vetor nulo de A leva, pela transformação T, ao vetor nulo de B. Se sim, verificamos as duas condições da definição; se não, T não é linear.

Vejamos alguns exemplos.

- Verifique se as transformações a seguir são lineares.

a) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $T(x, y) = x + y - 4$ é linear.

Primeiro calculamos T(0,0)

$T(0, 0) = 0 + 0 - 4 = -4$, então, $T(0,0) \neq 0$, logo T não é transformação linear.

b) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x, x + y)$

$T(0, 0) = (2 . 0, 0 + 0) = (0,0)$

Como T(0, 0) resultou no vetor nulo, devemos verificar as duas condições da definição:

Sendo $u_1 = (x, y)$ e $u_2 = (r, s)$, temos:

$T(u_1 + u_2) = T(x + r, y + s) = (2x + 2r, x + r + y + s)$

$T(u_1) + T(u_2) = T(x, y) + T(r, s) =(2x, x + y) + (2r, r + s) = (2x + 2r, x + r + y + s)$

Logo $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

Sendo $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$T(\alpha u) = T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x, \alpha x + \alpha y)$

$\alpha T(u) = \alpha T(x, y) = \alpha\ (2x, x + y) = (2\alpha x, \alpha x + \alpha y)$

Logo $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Assim, T é transformação linear.

c) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, definida por $T(x, y, z) = (x^2, x + y, 2y + z, x + z)$

$T(0, 0, 0) = (0^2, 0 + 0, 2 . 0 + 0, 0 + 0) = (0, 0, 0, 0)$

Verificando as duas condições da definição:

Sejam $u_1 = (x, y, z)$ e $u_2 = (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$

$T(u_1 + u_2) = T(x + r, y + s, z + t) =$

$= ((x + r)^2, x + r + y + s, 2y + 2s + z + t, x + r + z + t)$

$T(u_1) + T(u_2) = T(x, y, z) + T(r, s, t) = (x^2, x + y, 2y + z, x + z) + (r^2, r + s, 2s + t, r + t) = (x^2 + r^2, x + y + r + s, 2y + 2s + z + t)$

Como $(x + r)^2 \neq x^2 + r^2$, portanto, $T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$, logo a transformação T não é linear.

d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x + 2y, x + y - z)$

$T(0, 0, 0) = (0 + 2 . 0, 0 + 0 - 0) = (0, 0)$

Verificando as duas condições da definição:

Sejam $u_1 = (x, y, z)$ e $u_2 = (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$

$T(u_1 + u_2) = T(x + r, y + s, z + t) = (x + r + 2(y + s), x + r + y + s - (z + t))$

$= (x + r + 2y + 2s, x + r + y + s - z - t)$

$T(u_1) + T(u_2) = T(x, y, z) + T(r, s, t) = (x + 2y, x + y - z) + (r + 2s, r + s - t) =$

$= (x + 2y + r + 2s, x + y - z + r + s - t) = (x + r + 2y + 2s, x + r + y + s - z - t)$

Portanto, $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

Sendo $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$T(\alpha u) = T(\alpha(x, y, z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + 2\alpha y, \alpha x + \alpha y - \alpha z)$

$\alpha T(u) = \alpha T(x, y, z) = \alpha(x + 2y, x + y - z) = (\alpha x + 2\alpha y, \alpha x + \alpha y - \alpha z)$

Portanto $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Satisfeitas as duas condições da definição, então a transformação T é linear.

- Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, linear dada por $T(x, y, z) = (x + 2y, x + y - z)$, determine a imagem dos vetores pela transformação

1) (1, 2, - 1)

Substituindo as coordenadas do vetor (1, 2, -1) na expressão de T, temos:

$T(1, 2, -1) = (1 + 2 . 2, 1 + 2 - (-1)) = (5, 4)$

2) (1, 0, 2)

Substituindo as coordenadas do vetor (1, 0, 2) na expressão de T, tem-se:

$T(1, 0, 2) = (1 + 2 . 0, 1 + 0 - 2) = (1, -1)$

3) (-1, 2, 0)

Substituindo as coordenadas do vetor (-1, 2, 0) na expressão de T, obtemos:

$T(-1, 2, 0) = (-1 + 2 . 2, -1 + 2 - 0) = (3, 1)$

- Sabendo que a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear, que $T(1, -1) = (2, 3)$, que $T(1, 1) = (-4, 1)$ e sendo $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$, determine $T(x, y)$ para $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução

Sejam $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$, temos:

$(1)\ (x, y) = \alpha(1, -1) + \beta(1,1) = (\alpha, -\alpha) + (\beta, \beta) = (\alpha + \beta, -\alpha + \beta)$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\alpha + \beta \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$x + y = 2\beta \Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{x+y}{2} \\ \alpha = \dfrac{x-y}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Aplicando T em (1) e usando a propriedade IV, temos:

$T(x, y) = T(\alpha(1, -1) + \beta(1,1))$

$T(x, y) = \alpha T(1, -1) + \beta T(1, 1)$

$T(x, y) = \alpha(2, 3) + \beta(-4, 1)$

$T(x, y) = (2\alpha, 3\alpha) + (-4\beta, \beta)$

$T(x, y) = (2\alpha - 4\beta, 3\alpha + \beta)$

$$T(x, y) = \left(2\left(\frac{x-y}{2}\right) - 4\left(\frac{x+y}{2}\right), 3\left(\frac{x-y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

$T(x, y) = (-x - 3y, 2x - y)$

4) Sabendo que T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é linear e T(1, 1, 1) = (-2, 1, 3, 2), T(0, 1, 1) = (1, 2, 3, -4), T(0, 0, 1) = (-1, 3, 6, 1), sendo B = $\{(1,1,1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$, determine T(x, y, z) para $\forall$ (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$.

(1) $(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\alpha = x$, $\beta = y - x$ e $\gamma = z - y$

Aplicando T em (1) e usando a propriedade IV, temos:

$T(x, y, z) = T(\alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1))$

$T(x, y, z) = \alpha T(1, 1, 1) + \beta T(0, 1, 1) + \gamma T(0, 0, 1)$

$T(x, y, z) = \alpha(-2, 1, 3, 2) + \beta(1, 2, 3, -4) + \gamma(-1, 3, 6, 1)$

$T(x, y, z) = x(-2, 1, 3, 2) + (y - x)(1, 2, 3, -4) + (z - y)(-1, 3, 6, 1)$

$T(x, y, z) = (-2x, x, 3x, 2x) + (y - x, 2(y - x), 3(y - x), -4(y - x)) + (-z + y, 3(z - y), 6(z - y), 1(z - y))$

$T(x, y, z) = (-2x + y - x - z + y, x + 2y - 2x + 3z - 3y, 3x + 3y - 3x + 6z - 6y, 2x - 4y + 4x + z - y)$

$T(x, y, z) = (-3x + 2y - z, -x - y + 3z, -3y + 6z, 6x - 5y + z)$

5.3 Núcleo e imagem

5.3.1 Núcleo

Sejam U e V espaços vetoriais e a transformação linear T: U→V.

Definimos como núcleo da transformação linear T, o subespaço vetorial de U, representado por N(T) e dado por:

$N(T) = \{u \in U / T(u) = 0v\}$

Outra notação usada para representar o núcleo de uma transformação linear é Ker T (abreviatura da palavra inglesa "Kernel").

Podemos visualizar melhor através do diagrama de Venn.

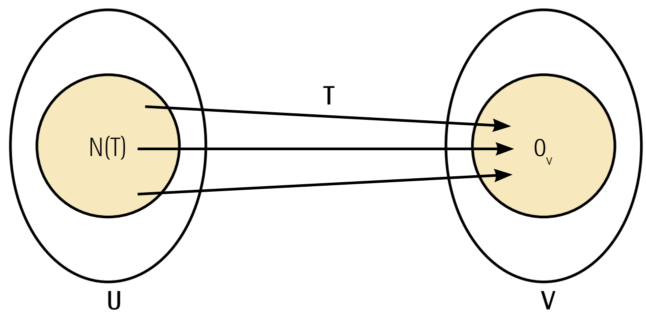

Figura 17

5.3.2 Propriedades

Considere a transformação linear $T: U \to V$

I – N(T) é subespaço de U

Demonstração:

(1) $N(T) \neq \varnothing$, pois $T(0u) = 0v \Rightarrow 0u \in N(T)$

(2) $\forall\ u_1, u_2 \in N(T)$ implica $u_1 + u_2 \in N(T)$

$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0v + 0v = 0v$, com $u_1 + u_2 \in N(T)$

(3) $\forall\ u \in N(T)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, assim temos $\alpha\, u \in N(T)$

$u \in N(T) \Rightarrow T(u) = 0v$

$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha 0v = 0v$, com $\alpha\, u \in N(T)$

Satisfeitas as três condições, temos que N(T) é subespaço vetorial de U.

II – $N(T) = \{0\} \Leftrightarrow T$ é injetora

Demonstração:

a) Se $N(T) = \{0\}$ e dados $u_1, u_2 \in N(T)$, temos que:

$T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow T(u_1) - T(u_2) = 0 \Rightarrow T(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$, logo T é injetora.

b) Seja $u \in N(T)$, então $T(u) = 0$. Porém, $T(0) = 0$, logo $T(u) = T(0)$.

Como T é injetora, temos que $u = 0$. Portanto, $N(T) = \{0\}$ se T é injetora.

5.3.3 Imagem

Definimos imagem da transformação linear $T: U \to V$ o conjunto denotado por:

$ImT = \{T(u) \in V / \ u \in U\}$

Observe a seguir o diagrama de Venn:

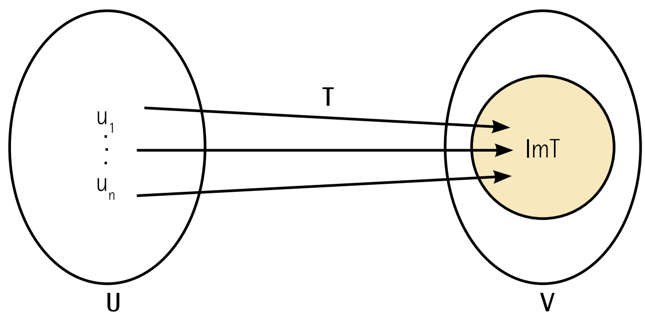

Figura 18

5.3.4 Propriedades

I – ImT é subespaço vetorial de V

Pelo diagrama de Venn, observamos que ImT é subespaço de V. Vamos provar:

(1) $ImT \neq \varnothing$ pois, $T(0u) = 0v \Rightarrow 0v \in ImT$

(2) $\forall\ v_1, v_2 \in ImT$, temos $v_1 + v_2 \in ImT$

$v_1 \in ImT \Rightarrow v_1 = T(u_1), u_1 \in U$

$v_2 \in ImT \Rightarrow v_2 = T(u_2), u_2 \in U$

$v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2), u_1, u_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in ImT$

(3) $\forall\ v \in ImT$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha v \in ImT$

$u \in ImT \Rightarrow v = T(u) = u \in U$

$\alpha v = \alpha T(u) = T(\alpha u)$, com $\alpha u \in U$ e $\alpha v \in ImT$

Satisfeitas as três condições, temos que ImT é subespaço vetorial de V.

II – $ImT = V \Leftrightarrow T$ é sobrejetora

III – Seja $T: U \to V$ linear, então:

$\dim \text{Im}T + \dim N(T) = \dim U$

Vejamos alguns exemplos:

1) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (0, x - y, 0)$, determine o núcleo de T.

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0, 0)\}$

$T(x, y) = (0, x - y, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$N(T) = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\}$

Observe a representação geométrica de N(T):

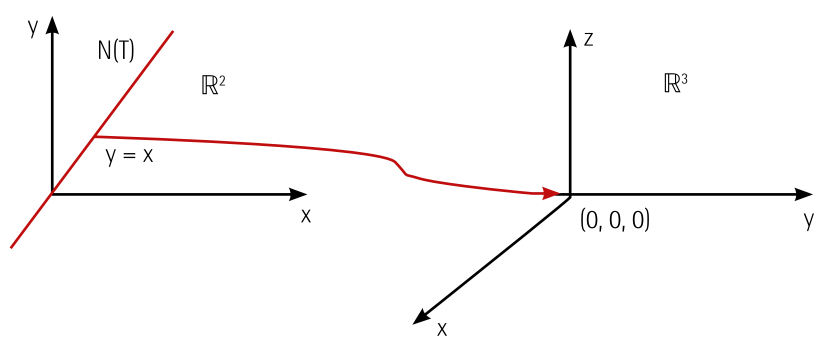

Figura 19

2) Sendo $T(x, y) = (2x, 2y)$ uma transformação linear, determine a imagem do segmento AB pela transformação linear T, $A = (0,1)$ e $B = (2,5)$.

$T(0,1) = (2 \,.\, 0, 2 \,.\, 1) = (0, 2)$

$T(2, 5) = (2 \,.\, 2, 2 \,.\, 5) = (4, 10)$

3) Determine o núcleo e a imagem das transformações lineares a seguir.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (y - 2x, y + 2x)$.

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0)\}$

$$T(x, y) = (y - 2x, y + 2x) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + 2x = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$2y = 0 \Rightarrow y = 0$, logo $x = 0$

$N(T) = \{(0, 0)\}$

$ImT = \{(y - 2x, y + 2x) \in \mathbb{R}^2\}$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (0, y - 3x, -y + 3x)$.

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0, 0)\}$

$T(x, y) = (0, y - 3x, -y + 3x) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y - 3x = 0 \\ -y + 3x = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $y = 3x$

$N(T) = \{(x, 3x) / x \in \mathbb{R}\}$

$ImT = \{(0, y - 3x, -y + 3x) \in \mathbb{R}^3\}$

c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z)$.

$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

$T(x, y) = (0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Isolando z, temos $z = 2x + 3y$

$N(T) = \{(x, y, 2x + 3y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$ImT = \{(0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$

4) Determine uma base e a dimensão dos exemplos anteriores.

a) $T(x, y) = (y - 2x, y + 2x)$

Sabemos que imagem de T é $ImT = \{(y - 2x, y + 2x) \in \mathbb{R}^2\}$ e um sistema de geradores é:

$(y - 2x, y + 2x) = (y, y) + (-2x,2x) = y(1,1) + x(-2, 2)$

Logo $B = \{(1, 1), (-2, 2)\}$ gera ImT, assim resta provar que B é LI montando e escalonando a matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando a operação: $L_2 = L_2 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ é } L_I$$

Portanto, a base da ImT é $B = \{(1, 1), (-2, 2)\}$ e dim ImT = 2

b) $T(x, y) = (0, y - 3x, -y + 3x)$

Sabemos que imagem de T é $ImT = \{(0, y - 3x, -y + 3x) \in \mathbb{R}^3\}$ e um sistema de geradores é:

$(0, y - 3x, -y + 3x) = (0, y, -y) + (0, -3x, 3x)$

$(0, y - 3x, -y + 3x) = y(0, 1, -1) + x(0, -3, 3)$

Logo $S = \{(0, 1, -1), (0, -3, 3)\}$ gera ImT, assim resta provar que S é LI montando e escalonando a matriz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando a operação $L_2 = L_2 + 3L_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ é } L_D\text{, entretanto } \{(0, -1, 1)\} \text{ é } L_I$$

Portanto $B = \{(0, -1, 1)\}$ é base de ImT e dim ImT = 1.

c) $T(x, y) = (0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z)$

Sabemos que imagem de T é $ImT = \{(0, 2x + 3y - z, -2y - 3x + z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e um sistema de geradores é:

$\{(0, 2x + 3y - z, -2y - 3x + z) = (0, 2x, -3x) + (0, 3y, -2y) + (0, -z, z)$

$\{(0, 2x + 3y - z, -2y - 3x + z) = x(0, 2, -3) + y(0, 3, -2) + z(0, -1, 1)$

Logo $S = \{(0, 2, -3), (0, 3, -2), (0, -1, 1)\}$ gera ImT, assim resta provar que S é LI montando e escalonando a matriz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{aplicando a operação } L_2 = -3L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{permutando } L_2 \text{ com } L_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{é LD, mas } (0, 2, -3) \text{ e } (0, -1, 1) \text{ é LI}$$

Portanto $B = \{(0, 2, -3), (0, -1, 1)\}$ é base de ImT e dim ImT = 2

5) Determine o núcleo, a imagem, uma base e a dimensão do núcleo e da imagem das transformações a seguir.

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (0, y - x, 2x + 3y)$

N(T)

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0, 0)\}$

$T(x, y) = (x + y, y - x, 2x + 3y) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 0=0 \\ y-x=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $x = y = 0$

Logo $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$

Base de N(T) e dim N(T)

Como $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$, temos que $B = \varnothing$ é base e $\dim N(T) = 0$

ImT

$ImT = \{(0, y - x, 2x + 3y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$

Base de ImT e dim ImT

$(0, y - x, 2x + 3y) = (0, -x, 2x) + (0, y, 3y)$

$(x + y, y - x, 2x + 3y) = x(0, -1, 2) + y(0, 1, 3)$

Desse modo, $[(0, -1, 2), (0, 1, 3)] = ImT$, resta verificar se os geradores são LI montando e escalonando a matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como a matriz já está escalonada e não há linhas nulas, concluímos que os vetores são LI, portanto, $B = \{(0, -1, 2), (0, 1, 3)\}$ é base de ImT e dim ImT = 2.

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (z, x + y)$

N(T)

$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\}$

$T(x, y, z) = (z, x + y) = (0, 0)$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $x = -y$ e $z = 0$

Logo $N(T) = \{(x, -x, 0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

Base de N(T) e dim N(T)

$(x, -x, 0) = x(1, -1, 0)$

$B = \{(1, -1, 0)\}$ gera N(T) e é LI, então B é base de N(T) e dim N(T) = 1

ImT

$ImT = \{(z, x + y) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Base de ImT e dim ImT

$(z, x + y) = (z, 0) + (0, x) + (0, y)$

$(z, x + y) = z(1, 0) + x(0, 1) + y(0, 1)$

Desse modo, $[(1, 0), (0,1), (0,1)] = ImT$, assim resta verificar se os geradores são LI montando e escalonando a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando a operação $L_3 = -L_2 + L_3$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonada a matriz, concluímos que os vetores são LD, todavia os dois primeiros vetores são LI. Então $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e base de ImT e dim ImT = 2.

6 MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

6.1 Operações com transformações lineares

Sejam as transformações lineares $F: U \to V$ e $G: U \to V$, é possível realizar as seguintes operações:

I – Adição

$F + G: U \to V$, definida por $(F + G)(u) = F(u) + G(u), \forall\, u \to U$

II – Multiplicação por escalar

Sejam as transformações lineares $F: U \to V$ e $K \in \mathbb{R}$, definimos o produto F por K como:

$k\,F: U \to V$ dada por $(k\,F)(u) = k\,F(u),\ \forall\, u \to U$

III – Composição

Sejam as transformações lineares $F: U \to V$ e $G: V \to W$, chamamos de transformação composta de G com F, denotada por $G \circ F: U \to W$, definida por $(G \circ F)(u) = G(F(u)),\ \forall\, u \to U$.

Observação

$F + G$, $k\,F$ e $G \circ F$ são transformações lineares.

Vejamos um exemplo.

Sendo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(x, y) = (x - 2y, 2x + y)$, e $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $G(x, y) = (x, x - y)$, temos:

a) $F + G = (x - 2y + x, 2x + y + x - y) = (2x - 2y, 3x)$

b) $3F - 2G = 3(x - 2y, 2x + y) - 2(x, x - y) = (3x - 6y, 6x + 3y) - (2x, 2x - 2y) =$

$= (3x - 6y - 2x, 6x + 3y - 2x + 2y) = (x - 6y, 4x + 5y)$

c) $F \circ G = (x - 2(x - y), 2(x) + (x - y)) = (x - 2x + 2y, 2x + x - y) = (-x + 2y, 3x - y)$

d) $G \circ F = (x - 2y, x - 2y - (2x + y)) = (x - 2y, x - 2y - 2x - y) = (x - 2y, -x - 3y)$

6.2 Operador inversível

Sabemos que uma transformação linear $T: U \to U$ é um operador linear.

A transformação $T: U \to U$ também será chamada de operador inversível se existir T^{-1}, tal que:

$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (identidade)

O operador T é inversível somente se T for uma aplicação bijetora.

Demonstração:

Seja $T: U \to U$ um operador linear. Se $N(T) = \{0\}$, então T é inversível.

É verdade, pois:

Se $N(T) = \{0\}$ é injetora e $\dim N(T) = 0$

Sabendo que $\dim ImT + \dim N(T) = \dim U \Rightarrow \dim ImT = \dim U$

Como $ImT \subset U$, concluímos que $ImT = U$, portanto, T é sobrejetora.

Se T é injetora e sobrejetora, temos que T é bijetora, portanto, inversível.

Vejamos alguns exemplos.

1) Verifique se $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $F(x,y) = (x + 3y, x)$, é inversível. Em caso positivo, determine T^{-1}.

Como F é um operador linear, para que seja inversível, devemos verificar somente se F é injetora, ou seja, $N(F) = \{0\}$. Assim:

$N(F) = \{(x, y) \,/\, F(x, y) = (0, 0)\}$

$$F(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (x + 3y, x) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Portanto $N(F) = \{(0, 0)\}$, logo F é inversível.

Determinando F^{-1}

$$T^{-1}(a, b) = (x, y) \Rightarrow F(x, y) = (a, b) = (x + 3y, x) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = b,\ 3y = a - x \Rightarrow 3y = a - b \Rightarrow y = \frac{a-b}{3}$$

Portanto $T^{-1}(a, b) = \left(b, \dfrac{a-b}{3}\right)$

2) Verifique se $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (4x - 6y, 6x - 9y)$, é inversível. Em caso positivo, determine T^{-1}.

Como T é um operador linear, para que seja inversível, devemos verificar somente se T é injetora, ou seja, $N(T) = \{0\}$. Assim:

$N(T) = \{(x, y) \,/\, T(x, y) = (0,0)\}$

$$F(x, y) = (0,0) \Rightarrow (4x - 6y, 6x - 9y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3y}{2}$$

$N(T) = \left\{\left(\frac{3y}{2}, y\right)\right\} \neq \{0\}$, logo T não é inversível.

6.3 Matriz de uma transformação linear

Consideremos os espaços vetoriais U e V sobre $\mathbb{R}$, cujas dimensões sejam, respectivamente, n e m.

Tomemos a transformação $T: U \to V$, a base $B = \{u_1, ..., u_n\}$ de U e a base $C = \{v_1, ..., v_n\}$ de V.

Sabemos que cada um dos vetores $T(u_1)$, ...$T(u_n)$ está em V, portanto, podem ser escritos como combinação linear da base C. Assim:

$T(u_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + ... + \alpha_{m1}v_m$

$T(u_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + ... + \alpha_{m2}v_m$

$T(u_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + ... + \alpha_{mn}v_m$

Onde é univocamente determinado cada coeficiente α_{ij}.

A matriz m x n sobre $\mathbb{R}$

$$(T)B,C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

formada pelos coeficientes da combinação linear anterior e dispostos em colunas, é a matriz da transformação linear T em relação às bases B e C.

Note que a primeira coluna é formada pelos coeficientes de $T(u_1)$, a segunda pelos coeficientes de $T(u_2)$ e a última, ou enésima coluna, pelos coeficientes de $T(u_n)$.

Algumas considerações:

a) Se U = V, ou seja, T é um operador linear e as bases B e C são iguais, então $(T)_{B,C} = (T)_{B,B}$, logo podemos escrever apenas $(T)_B$.

b) Se $T: U \to V$ é linear e o par de bases são as canônicas, escrevemos apenas (T).

Vejamos alguns exemplos.

1) Determine a matriz de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$ em relação às bases $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

$T(1, 0, 0) = (1, 1) = \alpha_{11}(1, 1) + \alpha_{21}(0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} = 1 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{11} = 1$ e $\alpha_{21} = 0$

$T(0, 1, 0) = (1, 0) = \alpha_{12}(1, 1) + \alpha_{22}(0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} = 0 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{12} = 1$ e $\alpha_{22} = -1$

$T(0, 0, 1) = (0, 1) = \alpha_{13}(1, 1) + \alpha_{23}(0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{13} = 0 \\ \alpha_{13} + \alpha_{23} = 1 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{13} = 0$ e $\alpha_{23} = 1$

$$(T)_{A,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (x, x - y, 2z)$ e $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $B = \{(-1, 0, 1), (0, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$, determine $(T)_{A,B}$; $(T)_{B,A}$; $(T)_A$.

$(T)_{A,B}$

$T(1, 1, 0) = (1, 0, 0) = \alpha_{11}(-1, 0, 1) + \alpha_{21}(0, -1, 0) + \alpha_{31}(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -1 \\ \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{31} = 0 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{21} = 0$ e $\alpha_{31} = 1$

$T(0, 1, 1) = (0, -1, 2) = \alpha_{12}(-1, 0, 1) + \alpha_{22}(0, -1, 0) + \alpha_{32}(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{22} = 1 \\ \alpha_{12} + \alpha_{32} = 2 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{22} = 1$ e $\alpha_{32} = 2$

$T(0, 0, 1) = (0, 0, 2) = \alpha_{13}(-1, 0, 1) + \alpha_{23}(0, -1, 0) + \alpha_{33}(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{13} = 0 \\ \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{13} + \alpha_{33} = 2 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} = 0$ e $\alpha_{33} = 2$

$$(T)_{A,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$(T)_{B,A}$

$T(-1, 0, 1) = (-1, -1, 2) = \alpha_{11}(1, 1, 0) + \alpha_{21}(0, 1, 1) + \alpha_{31}(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -1 \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} = -1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{31} = 2 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{21} = 0$ e $\alpha_{31} = 2$

$T(0, -1, 0) = (0, 1, 0) = \alpha_{12}(1, 1, 0) + \alpha_{22}(0, 1, 1) + \alpha_{32}(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} = 1 \\ \alpha_{22} + \alpha_{32} = 0 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{22} = 1$ e $\alpha_{32} = -1$

$T(0, 0, 1) = (0, 0, 2) = \alpha_{13}(1, 1, 0) + \alpha_{23}(0, 1, 1) + \alpha_{33}(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{13} = 0 \\ \alpha_{13} + \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{23} + \alpha_{33} = 2 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} = 0$ e $\alpha_{33} = 2$

$$(T)_{B,A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observação

Note que $(T)_{A,B}$ é diferente de $(T)_{B,A}$.

3) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, de modo que, sendo $A = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, tenha-se $M = (T)_{A,B}$

$T(1, 1) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 1, 1) = (1, 5, 3)$

$T(0, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 1, 1) = (0, 1, 0)$

Sendo A base de $\mathbb{R}^2$, podemos escrever os vetores $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores da base A. Assim, para $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}$, temos:

$(x, y) = a(1, 1) + b(0, 1)$

$$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \end{cases}$$

Logo $a = x$ e $b = y - x$

O resultado desse sistema será usado mais adiante.

$T(x, y) = T(a(1, 1) + b(0, 1))$

$T(x, y) = a\,T(1,1) + b\,T(0,1)$

$T(x, y) = a(1, 5, 3) + b(0, 1, 0)$

$T(x, y) = x(1, 5, 3) + (y - x)(0, 1, 0)$

$T(x, y) = (x, 5x, 3x) + (0, y - x, 0)$

$T(x, y) = (x, 4x + y, 3x)$

4) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de modo que, sendo $A = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, -1, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, tenha-se $M = (T)_{B,A}$.

$T(1, -1, 1) = 0(1, 1) + (-2)(0, 1) = (0, -2)$

$T(0, 1, 0) = 0(1, 1) + 2(0, 1) = (0, 2)$

$T(0, 1, 1) = -1(1, 1) + 3(0, 1) = (-1, 2)$

Sendo B base de $\mathbb{R}^3$, podemos escrever os vetores $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores da base B. Assim, para $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}$, temos:

$(x, y, z) = a(1, -1, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 1, 1)$

$(x, y, z) = (a, -a, a) + (0, b, 0) + (0, c, c)$

$(x, y, z) = (a, -a + b + c, a + c)$

$$\begin{cases} a = x \\ -a + b + c = y \\ a + c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 2x + y - z \\ c = z - x \end{cases}$$

$T(x, y, z) = T(a(1, -1, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 1, 1))$

$T(x, y, z) = a\,T(1, -1, 1) + b\,T(0, 1, 0) + c\,T(0, 1, 1)$

$T(x, y, z) = a(0, -2) + b(0, 2) + c(-1, 2)$

$T(x, y, z) = x(0, -2) + (2x + y - z)(0, 2) + (z - x)(-1, 2)$

$T(x, y, z) = (0, -2x) + (0, 4x + 2y - 2z) + (-z + x, 2z - 2x)$

$T(x, y, z) = (-z + x, 2y)$

5) Sejam T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{(1, -1),(1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, e sabendo que $F(1, -1) = (2, 3)$ e $F(1, 1) = (-4, 1)$, determine a transformação T.

Escrevemos $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores da base B:

$(x, y) = a(1, -1) + b(1, 1)$

$(x, y) = (a, -a) + (b, b)$

$(x, y) = (a + b, -a + b)$

$$\begin{cases} a + b = x \\ -a + b = y \end{cases}$$

$$a = \frac{x - y}{2},\ b = \frac{x + y}{2}$$

$T(x, y) = T(a(1, -1) + b(1, 1))$

$T(x, y) = a\,T(1, -1) + b\,T(1, 1)$

$$T(x, y) = \frac{x - y}{2}(2,3) + \frac{x + y}{2}(-4,1)$$

$$T(x, y) = \left(x - y, \frac{3x - 3y}{2} \right) + \left(-2x - 2y, \frac{x + y}{2} \right)$$

$$T(x, y) = \left(x - y - 2x - 2y, \frac{3x - 3y}{2} + \frac{x + y}{2} \right)$$

$$T(x, y) = (-x - 3y, 2x - y)$$

7 OPERADORES

Conforme a geometria analítica, vetor é um ente matemático que possui direção, sentido e intensidade, também chamada de módulo.

Observe o vetor $\vec{v} = (x, y)$ da figura a seguir:

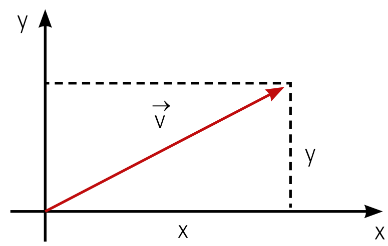

Figura 20

Para determinarmos seu módulo, basta aplicar o teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

7.1 Operador ortogonal

Seja a transformação linear $T: U \to U$, operador linear, se $|T(u)| = |u|$, então a transformação T é ortogonal.

Vejamos alguns exemplos.

1) Determine se os operadores lineares a seguir são ortogonais.

a) $T(x, y) = (x, -2x)$

$$|T(u)| = \sqrt{x^2+(-2x)^2} = \sqrt{x^2+4x^2}$$

$$|u| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Como $|T(u)| \neq |u|$, logo o operador linear T não é ortogonal.

b) $T(x, y) = (-x, y)$

$$|T(u)| = \sqrt{(-x)^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|u| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Como |T(u)| = |u|, logo o operador linear T é ortogonal.

c) T(x, y, z) = (x, x - y, z)

$$|T(u)|=\sqrt{x^2+(x-y)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(x^2-2xy+y^2)+z^2}=\sqrt{2x^2-2xy+y^2+z^2}$$

$$|u|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Como |T(u)| ≠ |u|, logo o operador linear T não é ortogonal.

7.2 Operador simétrico

Seja a transformação linear T: U → U, operador linear, e uma base B formada por vetores ortogonais e unitários (base ortonormal). Dizemos que T é simétrico se a matriz em relação à base B for simétrica. Um exemplo de base ortonormal é a base canônica.

Observação

Um vetor é unitário se o valor de seu módulo é 1.

Vejamos alguns exemplos.

1) Dado os operadores lineares a seguir, verifique se são simétricos.

a) T(x, y, z) = (2x + y, x - y, z)

Vamos determinar a matriz canônica de T.

T(1, 0, 0) = (2, 1, 0)

T(0, 1, 0) = (1, -1, 0)

T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)

Como a matriz é canônica, não é preciso fazer a combinação linear.

$$(T)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como (T) é simétrica, logo o operador T é simétrico.

b) $T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, z)$

Vamos determinar a matriz canônica de T:

$T(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$

$T(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$

$T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

Como a matriz é canônica, não é preciso fazer a combinação linear.

$$(T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como (T) não é simétrica, logo o operador T não é simétrico.

Lembrete

Conforme a geometria analítica, vetor é um ente matemático que possui direção, sentido e intensidade, também chamada de módulo.

7.3 Determinantes

Determinante nada mais é do que um número real associado a uma matriz quadrada.

Nessa condição, dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, a representação do determinante, desta matriz, é dada por:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para encontrarmos o valor do determinante, temos que considerar a ordem da matriz.

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 1

Dada a matriz quadrada $A = (a_{11})$, por definição, seu determinante será o próprio elemento a_{11}. Assim:

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

Vejamos alguns exemplos.

1) Dadas as matrizes A = (3) e B = (5), determine:

a) o determinante de A

$\det A = |3| = 3$

b) o determinante de B

$\det B = |5| = 5$

c) detA + detB

$\det A + \det B = |3| + |5| = 3 + 5 = 8$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2

Seja a matriz quadrada de ordem 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, designamos como determinante de A o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Logo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{12} \,.\, a_{21}$$

Vejamos alguns exemplos.

1) Qual o valor da determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$?

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \,.\, 6 - (-2 \,.\, 3) = 6 + 6 = 12$$

2) Determine o valor de x na equação $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x+6 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x+1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5(x + 3) - 2(x + 6) = 0$

$\Rightarrow 5x + 15 - 2x - 12 = 0$

$\Rightarrow 3x = -3$

$\Rightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

3) Determine o valor de x na inequação $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \geq -2x$

$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \geq -2x \Rightarrow x \,.\, 2x - 3 \,.\, 4 = -2x$

$\Rightarrow 2x^2 - 12 \geq -2x$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

Resolvendo a equação:

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 100$

$\Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -3$

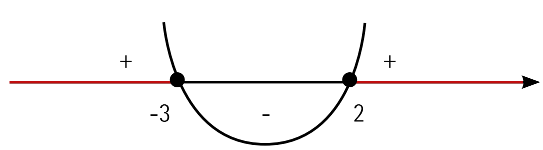

Figura 21

$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$

Regra de Sarrus

Utilizamos a regra de Sarrus para calcular o determinante da matriz de ordem 3.

Dada a matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Reescrevemos os elementos da matriz e repetindo os elementos da 1ª e da 2ª coluna à direita. Assim:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\boxed{- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +}$$

Efetuamos a multiplicação dos elementos seguindo os traços diagonais associando a cada produto o sinal de + e de - respectivo. Dessa forma, obtemos:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Vejamos alguns exemplos.

1. Calcule o valor dos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 4 \end{array}$

$3 . 0 . 1 + 1 . 3 . 1 + (-2) . 5 . 4 - 1 . 5 . 1 - [3 . 3 . (-4)] - (-2 . 0 . 1) = 3 - 40 - 5 + 36 = -6$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 5 \end{array}$

$1 . 2 . 4 + 1 . 0 . 0 + 1 . 2 . 5 - 1 . 2 . 4 - 1 . 0 . 5 - 1 . 2 . 0 = 8 + 10 - 8 = 10$

Menor complementar

O menor complementar, denotado por D_{ij}, ou menor principal, relativo a cada elemento a_{ij} de uma matriz quadrada A de ordem n, é o determinante associado à matriz quadrada de ordem n-1, obtida a partir de A eliminando-se a linha e a coluna de cada elemento a_{ij} de A.

Desse modo, é possível concluir que cada elemento da matriz A possui um menor complementar.

Vejamos alguns exemplos.

1) Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine D_{11}, D_{12} e D_{33}.

D_{11}

Eliminando a linha e coluna do elemento $a_{11} = 1$, resta:

$$D_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

D_{12}

Eliminando a linha e coluna do elemento $a_{12} = 2$, resta:

$$D_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2$$

D_{33}

Eliminando a linha e coluna do elemento $a_{33} = 1$, resta:

$$D_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4$$

2) Dada a matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, determine D_{11}, D_{22}, D_{33} e D_{43}.

D_{11}

Eliminando a linha e coluna do elemento $b_{11} = 1$, resta:

$$D_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 . 1 . 3 + 2 . 2 . 1 + 1 . 4 . 4 - 2 . 4 . 3 - 3 . 2 . 4 - 1 . 1 . 1 =$$

$= 9 + 4 +16 - 24 - 24 - 1 = -20$

D_{22}

Eliminando a linha e coluna do elemento $b_{22} = 3$, resta:

$$D_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 . 1 . 3 + 3 . 2 . 2 + 4 . 3 . 4 - 3 . 3 . 3 - 1 . 2 . 4 - 4 . 1 . 2 =$$

$= 3 + 12 + 48 - 27 - 8 - 8 = 20$

D_{33}

Eliminando a linha e coluna do elemento $b_{33} = 1$, resta:

$$D_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 . 3 . 3 + 2 . 1 . 2 + 4 . 4 . 1 - 2 . 4 . 3 - 1 . 1 . 1 - 4 . 3 . 2 =$$

$= 9 + 4 + 16 - 24 - 1 - 24 = -20$

D_{43}

Eliminando a linha e coluna do elemento $b_{44} = 3$, resta:

$$D_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 . 3 . 2 + 2 . 1 . 3 + 4 . 4 . 4 - 2 . 4 . 2 - 1 . 1 . 4 - 4 . 3 . 3 =$$

$= 6 + 6 + 64 - 16 - 4 - 36 = 20$

Cofator

Define-se cofator de um elemento a_{ij} de uma matriz A o número real obtido pelo produto de $(-1)^{i+j}$ com o menor complementar de a_{ij}.

Denotamos cofator como:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}$

De maneira geral, para uma matriz quadrada de ordem 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, temos:

$A_{11} = (-1)^{1+1} . D_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$A_{32} = (-1)^{3+2} . D_{32} = (-1)^{3+2} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

Assim, podemos determinar o cofator para cada elemento a_{ij} da matriz A.

Vejamos alguns exemplos.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, determine A_{11}, A_{23}, A_{31}.

$A_{11} = (-1)^{1+1} . D_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = -14$

$A_{23} = (-1)^{2+3} . D_{23} = (-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{23} = -14$

$A_{31} = (-1)^{3+1} . D_{31} = (-1)^{3+1} . \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{31} = 28$

Teorema de Laplace

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, sabemos que o determinante de A, obtido através da regra de Sarrus é o número real definido por:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Tomemos da expressão anterior os elementos da primeira linha da matriz A, ou seja, a_{11}, a_{12} e a_{13} e os colocamos em evidência:

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Reescrevendo:

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Onde $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ são, respectivamente, os cofatores de a_{11}, a_{12} e a_{13}.

Portanto:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Podemos aplicar o mesmo raciocínio para qualquer outra linha ou coluna da matriz A. No caso de escolhermos a primeira coluna temos:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

Observando as expressões anteriores podemos enunciar o Teorema de Laplace como o determinante de uma matriz quadrada de ordem n é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos seus respetivos cofatores.

Em linguagem matemática:

$\det A = \sum aij \,.\, A_{ij}$, fixado i ou j

Vejamos alguns exemplos.

Calcule, através do teorema de Laplace, o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ da seguinte maneira:

a) Utilizando os elementos da 1ª linha

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . D_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = 14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} . D_{12} = (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{12} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} . D_{13} = (-1)^{1+3} . \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = -17$$

Logo:

$\det A = 2 . 14 + 0 . (-5) + 6 . (-17) = 28 + 0 - 102 = -74$

b) Utilizando os elementos da 1ª coluna

$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . D_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = 14$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} . D_{21} = (-1)^{2+1} . \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{21} = 30$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} . D_{31} = (-1)^{3+1} . \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{31} = -24$$

Logo:

$\det A = 2 . 14 + (-1) . 30 + 3 . (-24) = 28 - 30 - 72 = -74$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem n > 3

Vimos que, para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem menores que 3, há dispositivos práticos particulares que agilizam a obtenção do resultado.

Todavia, quando a ordem da matriz é superior a 3, esses dispositivos práticos não são aplicáveis. Portanto, nesses casos, podemos dispor do teorema de Laplace, que possibilita o cálculo de qualquer determinante, seja qual for a ordem da matriz quadrada.

Seja a matriz quadrada de ordem n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

então

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum a_{ij} \,.\, A_{ij}, \text{ fixado i ou j}$$

Para o cálculo de determinantes utilizando Laplace, convém escolher a linha ou coluna com a maior quantidade de zeros, pois, se temos que operar $\sum a_{ij} \,.\, A_{ij}$, quanto maior for a quantidade de aij's iguais a zero, menos operações teremos que realizar.

Vejamos alguns exemplos.

1) Calcule o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

$$a_{11}A_{11} = 2 \,.\, (-1)^{1+1} \,.\, D_{11} = 2 \,.\, (-1)^{1+1} \,.\, \begin{vmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 34$$

$$a_{12}A_{12} = 4 \,.\, (-1)^{1+2} \,.\, D_{12} = 4 \,.\, (-1)^{1+2} \,.\, \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -36$$

$$a_{13}A_{13} = 1 \,.\, (-1)^{1+3} \,.\, D_{13} = 1 \,.\, (-1)^{1+3} \,.\, \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 15$$

$$a_{14}A_{14} = 0 \,.\, (-1)^{1+4} \,.\, D_{14} = 0 \,.\, (-1)^{1+4} \,.\, \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo:

$\det A = 34 - 36 + 15 + 0 = 13$

Perceba que não era necessário efetuar os cálculos de $a_{14}A_{14}$, visto que o elemento $a_{14} = 0$.

2) Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Note que a fila que possui a maior quantidade de zeros é a 2ª linha, assim, é ela que vamos escolher para calcular o determinante.

$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} + a_{25}A_{25}$

Como a_{21}, a_{22}, a_{23} e a_{25} são iguais a zero, então:

$\det A = a_{24}A_{24}$

$$a_{24}A_{24} = 2 \,.\, (-1)^{2+4} \,.\, D_{14} = 2 \,.\, (-1)^{2+4} \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{24}A_{24} = 2 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Chamemos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ de det B, logo

$a_{24}A_{24} = 2 \,.\, \det B$

Note que agora é a 2ª coluna de det B que contém a maior quantidade de zeros, assim:

$\det B = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$

Como somente a_{32} não é nulo, então:

$$\det B = a_{32}A_{32} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Desse modo,

$\det A = a_{24}A_{24} = 2 \cdot \det B = 2 \cdot 3 = 6$

7.3.1 Propriedades

Serão apresentadas a seguir as propriedades dos determinantes, que servirão como ferramentas para facilitar o cálculo dos determinantes. Todas as propriedades destacadas serão aceitas sem demonstração.

1ª – Linhas ou colunas nulas

Se os elementos de uma fila de uma matriz quadrada A forem iguais a zero, então seu determinante é nulo, ou seja, det A = 0.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2ª – Linhas ou colunas iguais

Se os elementos de duas filas de uma matriz quadrada A forem iguais, então seu determinante é nulo, ou seja, det A = 0.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (1ª e 3ª linhas iguais)}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (2ª e 3ª colunas iguais)}$$

3ª – Linhas ou colunas proporcionais

Se duas filas de uma matriz quadrada A forem proporcionais, então seu determinante será nulo, ou seja, det A = 0.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ (2ª linha é o triplo da 1ª linha)}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ (3ª coluna é o dobro da 1ª coluna)}$$

4ª – Linha ou coluna multiplicadas por uma constante

Se uma fila de uma matriz quadrada é multiplicada por um número real k, então seu determinante é multiplicado por k.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{12} \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{4} & 3 \\ 1 & \mathbf{2} & 3 \\ 1 & \mathbf{5} & 3 \end{vmatrix} \text{ e } \det B = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{8} & 3 \\ 1 & \mathbf{4} & 3 \\ 1 & \mathbf{10} & 3 \end{vmatrix}$$

Assim, $\det A = \frac{1}{2} \det B$ ou $\det B = 2 . \det A$

5ª – Matriz multiplicada por uma constante

Se um número real k multiplica uma matriz quadrada A de ordem n, então o determinante de A fica multiplicado por k_n. Assim:

$\det(kA_n) = k_n \cdot \det A_n$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$3A = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det 3A = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 108 - 18 = 90 = 3^2 \cdot 10$$

6ª – Determinante da matriz transposta

O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua matriz transposta A^t. Assim:

$\det A = \det A^t$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \det A^t = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

7ª – Permutação de linhas ou colunas paralelas

Se trocarmos de posição duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, então o determinante dessa nova matriz será o oposto da matriz original.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \text{ e } \det A' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \text{ e } \det A' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

8ª – Determinante de uma matriz triangular

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 \\ 4 & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 9\ (3 \cdot 3)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 2\ (1 \cdot 2 \cdot 1)$$

9ª – Teorema de Binet

Seja AB o produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem, então det (AB) = det A . det B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 7$$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 27 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow \det AB = \det A \,.\, \det B = -14$$

10ª – Teorema de Jacobi

Seja A uma matriz quadrada, se multiplicarmos todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) por um mesmo número e somarmos os resultados dos elementos aos seus correspondentes de outra fila (linha ou coluna), resultará na matriz B. Dessa forma, afirmamos que det A = det B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -2$$

Se multiplicarmos a 1ª linha por 3 e somarmos os resultados à 2ª linha, obtemos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = -2$$

7.3.2 Determinante de um operador linear

Considere o operador linear $T: U \to V$. Sabemos que a matriz associada a T depende da base escolhida em V. Todavia, todas as matrizes que se associam a um mesmo operador linear T possui o mesmo determinante. Desse modo, define-se determinante de T o determinante da matriz associada a T em relação a uma base qualquer.

Vejamos alguns exemplos.

Calcule o determinante dos operadores lineares a seguir.

a) $T(x, y) = (x, 2x)$

Cálculo da matriz associada a T em relação à base canônica:

$T(1, 0) = (1, 2)$

$T(0, 1) = (0, 0)$

$$(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det T = \det (T)_C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) $T(x, y, z) = (x - z, 2x - y, z)$

$T(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$

$T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$

$T(0, 0, 1) = (-1, 0, 1)$

$$(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det T = \det (T)_C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

7.3.3 Determinante da composição

Considere dois operadores de um mesmo espaço vetorial, U e V. O determinante da operação U o V é igual ao produto dos determinantes de U e de V.

$\det U \circ V = \det U \cdot \det V$

Vejamos o exemplo.

Sendo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $F(x, y) = (x - 2y, 2x + y)$, e $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $G(x, y) = (x, x - y)$, determine F o G, det F, det G e det F o G.

F o G

F o G = (x - 2(x - y), 2(x) + (x - y)) = (x - 2x + 2y, 2x + x - y) = (-x + 2y, 3x - y)

det F

Cálculo da matriz canônica de F:

F(1, 0) = (1, 2)

F(0, 1) = (-2, 1)

$$(F)_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

det G

Cálculo da matriz canônica de F:

G(1, 0) = (1, 1)

G(0, 1) = (0, -1)

$$(G)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

det F o G

Cálculo da matriz canônica de F o G:

F o G(1, 0) = (-1, 3)

F o G(0, 1) = (2, -1)

$$(F \circ G)_C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det G = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

Comparando os resultados, vemos que det F o G = -5 é igual det F. det G = 5 . -1

7.4 Formas bilineares

Sejam os espaços vetoriais de dimensão finita designados por U e V, tal que U = V. A função F, definida por $F: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, é uma forma bilinear se for linear em cada coordenada, ou ainda somente se:

- $F(av_1 + bv_2, w) = aF(v_1, w) + bF(v_2, w)$ (1ª coordenada)
- $F(v, aw_1 + bw_2) = aF(v, w_1) + bF(v, w_2)$ (2ª coordenada)

Vejamos alguns exemplos.

Verifique se as aplicações a seguir são bilineares.

a) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F((x, y) = -2x \cdot 2y$

Verificando a 1ª coordenada

$F(ax_1 + bx_2, y) = -2(ax_1 + bx_2)2y = -4ax_1y - 4bx_2y$

$aF(x_1, y) + bF(x_2, y) = a \cdot (-2x_1 \cdot 2y) + b \cdot (-2x_2 \cdot 2y) = -4ax_1y - 4bx_2y$

Comparando os resultados, temos que $F(ax_1 + bx_2, y) = aF(x_1, y) + bF(x_2, y)$

Verificando a 2ª coordenada

$F(x, ay_1 + by_2) = -2x \cdot 2(ay_1 + by_2) = -4x(ay_1 + by_2) = -4axy_1 - 4bxy_2$

$aF(x, y_1) + bF(x, y_2) = a \cdot (-2x \cdot 2y_1) + b \cdot (-2x \cdot 2y_2) = -4axy_1 - 4bxy_2$

Comparando os resultados, temos que $F(x, ay_1 + by_2) = aF(x, y_1) + bF(x, y_2)$

Logo a aplicação F é bilinear.

b) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 \cdot x_2 + 3$

Verificando a 1ª coordenada

Tomemos $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_3, y_3)$ e $v = (x_2, y_2)$

$F(au_1 + bu_2, v) = F((a(x_1, y_1) + b(x_3, y_3), (x_2, y_2)) =$

$= F((ax_1, ay_1) + (bx_3, by_3), (x_2, y_2)) = F((ax_1 + bx_{3,} ay_1 + by_3), (x_2, y_2)) =$

$= (ax_1 + bx_{3,} ay_1 + by_3)\ x_2 +3 = (ax_1x_2 + bx_3x_2) + 3$

$aF(u_1, v) + bF(u_2, v) = aF((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + bF((x_3, y_3), (x_2, y_2)) =$

$= a(x_1x_2 + 3) + b(x_3x_2 + 3) = (ax_1x_2 + 3a) + (bx_3x_2 + 3b) =$

$= ax_1x_2 + bx_3x_2 + 3a + 3b$

Comparando os resultados, temos que $F(au_1 + bu_2, v) \neq aF(u_1, v) + bF(u_2, v)$, logo F não é bilinear.

7.5 Produto interno

Um conceito importante quando estudamos os vetores na geometria analítica é de produto escalar. Esse conceito associa a um par de vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ um número real.

Dessa forma, o produto interno nada mais é que a generalização do conceito de produto escalar. Vejamos.

Definimos produto interno como a transformação aplicada em um espaço vetorial V, de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, que transforma cada par ordenado de V em um número real.

Representamos o produto interno sobre V o número real u, v, que obedece às seguintes condições:

- $u, v = v, u$
- $u, v + w = u, v + u, w$
- $\alpha u, v = \alpha u, v$
- $-u, u \geq 0$, e $u, u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Para o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, onde temos $u = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $v = (b_1, b_2, ..., b_n)$, o produto interno de u por v, também chamado de produto interno usual, é dado por $u, v \sum = a_i \,.\, b_i$

Para o espaço vetorial Pn, dos polinômios de grau n, o produto interno é dado por f, g = $\int$f(t) . g(t)dt, sendo f(t) e g(t) polinômios quaisquer.

Vejamos os exemplos.

1) Dados os vetores u = (2, 3) e v = (1, 4) de $\mathbb{R}^2$, determine o produto interno usual u, v, u, u e v, v.

u, v = 2 . 1 + 3 . 4 = 14

u, u = 2 . 2 + 3 . 3 = 13

v, v = 1 . 1 + 4 . 4 = 17

2) Dados os vetores u = (1, 2, 3) e v = (3, 2, -1) de $\mathbb{R}^3$, determine o produto interno usual u, v, u, u e v, v.

u, v = 1 . 3 + 2 . 2 + 3 . (-1) = 4

u, u = 1 . 1 + 2 . 2 + 3 . 3 = 14

v, v = 3 . 3 + 2 . 2 + (-1) . (-1) = 14

3) Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Sendo u = (1, 3) e v = (-1, 1) em $\mathbb{R}^2$, determine um vetor w deste espaço, tal que u, w = -3 e v, w = 7.

Tomamos w = (x, y), assim temos:

$$\begin{cases} u, w = x + 3y = -3 \\ v, w = -x + y = 7 \end{cases}$$

Solucionando o sistema:

x = -6 e y = 1

Logo w = (-6, 1)

7.5.1 Norma

Seja V um espaço vetorial V munido de produto interno e o vetor u$\rightarrow$ V, o número real indicado por ||u|| e chamado de norma de u é dado por

$$||u|| = \sqrt{u, u}$$

Vejamos alguns exemplos.

Sendo u = (-1, 3, 2) e v = (1, 0, -1), determine o valor de:

a) ||u||

$$||u|| = \sqrt{u, u} = \sqrt{-1.(-1) + 3.3 + 2.2} = \sqrt{14}$$

b) ||v||

$$||v|| = \sqrt{v, v} = \sqrt{1.1 + 0.0 + (-1).(-1)} = \sqrt{2}$$

c) ||2u||

||2u|| = (-2, 6, 4)

$$||2u|| = \sqrt{2u, 2u} = \sqrt{-2.(-2) + 6.6 + 4.4} = \sqrt{56}$$

d) ||2v||

2v = (2, 0, -2)

$$||2v|| = \sqrt{2v, 2v} = \sqrt{2.2 + 0.0 + (-2).(-2)} = \sqrt{8}$$

e) ||u - v||

u - v = (-1 - 1, 3 - 0, 2 - (-1)) = (-2, 3, 3)

$$||u - v|| = \sqrt{u - v, u - v} = \sqrt{-2.(-2) + 3.3 + 3.3} = \sqrt{22}$$

7.6 Métrica

Métrica é a função distância, $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, induzida por uma norma sobre um espaço vetorial V com produto interno que contempla as seguintes propriedades:

I – d(u, v) = d(v, u)

II – $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

III – $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Conforme a geometria analítica, sabemos que a distância entre as extremidades de dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que partem da origem do sistema de coordenadas, é $|\vec{u} - \vec{v}|$. Dessa forma, para um espaço vetorial V, a aplicação d: V x V $\rightarrow \mathbb{R}$, dada por d(u, v) = ||u - v||, $\forall$u, v $\in$ V, é uma métrica.

Demonstração

Para verificarmos se a aplicação d é uma métrica, devemos validar as três propriedades.

Propriedade I: d(u, v) = d(v, u)

$d(u, v) = ||u - v|| = ||(-1)(v - u|| = |-1|\ ||v - u|| = d(v, u)$

Propriedade II: $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

Pela própria definição de norma, sabemos que $||u - v|| \geq 0$ e

$$||u|| = 0 \Leftrightarrow u, u^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow u, u = 0$$

Propriedade III: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

$d(u, v) = ||u - v|| = ||u-w + w-u|| \leq ||u - w|| + ||w - v||$

A métrica definida por d(u, v) = ||u - v|| é a usual no $\mathbb{R}^n$. Vejamos alguns exemplos.

Usando a métrica usual, calcule:

a) d(u, v) com u = (1, 3) e v = (2, 1)

$u - v = (1 - 3, 3 - 1) = (-2, 2)$

$$||u - v|| = \sqrt{u - v, u - v} = \sqrt{-2 \, . \, (-2) + 2 \, . \, 2} = \sqrt{8}$$

b) d(u, v) com u = (1, 2, -3) e v = (-2, 3, 1)

$u - v = (-1 - 2, 2 - 3, -3 - 1) = (-1, -1, -4)$

$$||u - v|| = \sqrt{u - v, u - v} = \sqrt{-1 \, . \, (-1) + (-1) \, . \, (-1) + (-4) \, . \, (-4)} = \sqrt{18}$$

8 TRANSFORMAÇÕES LINEARES PLANAS

Agora estudaremos algumas transformações de grande relevância para a ciência da computação, em especial, para a computação gráfica.

As transformações lineares planas são aquelas que ocorrem no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, ou seja, uma transformação T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Como a computação gráfica é uma área da ciência da computação que se ocupa da geração, manipulação e análise de imagens através de computadores, ao utilizar dados e modelos matemáticos para atingir esse fim, as transformações lineares planas se tornam uma ferramenta indispensável.

Assim, apresentaremos superficialmente alguns elementos de computação gráfica para contextualizar e dar significado a esse conteúdo.

Os televisores, smartphones, monitores e escâner são exemplos de dispositivos em que é possível visualizar imagens digitais. Esses aparelhos são chamados de dispositivos gráficos de saída.

Quando visualizamos uma imagem em algum desses dispositivos e aplicamos uma aproximação (zoom), é possível observar que a imagem é composta de diversos "quadradinhos" dispostos em linha e colunas, como em uma matriz, aos quais damos o nome de pixels.

Podemos concluir, então, que as telas dos dispositivos gráficos de saída são formadas por uma matriz de pixel e que as imagens são criadas e manipuladas acendendo e apagando pixels através de modelos matemáticos.

8.1 Dilatação e contração

É uma transformação linear T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que dilata ou contrai um vetor em k vezes o valor de seu módulo na própria direção, na direção do eixo x ou na direção do eixo y.

Dessa maneira, ocorre:

- dilatação se $k > 1$
- contração se $0 < k < 1$

8.1.1 Dilatação ou contração na própria direção

Seja a transformação $T(x, y) = (kx, ky)$

Se $k > 1$

Observe a representação geométrica da transformação T:

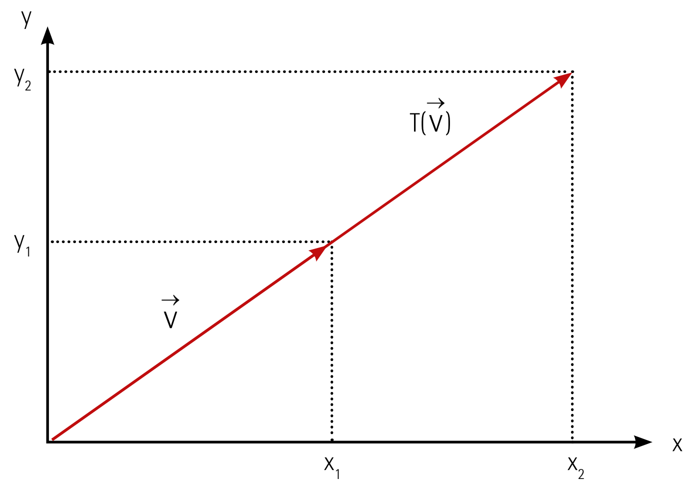

Figura 22

Note que o vetor $\vec{v}$, de coordenadas (x_1, y_1), transformou-se no vetor $T(\vec{v})$, de coordenadas (x_2, y_2) e teve um incremento (dilatação), em sua própria direção, de k vezes o valor de seu módulo.

Se $0 < k < 1$

Observe a representação geométrica da transformação T:

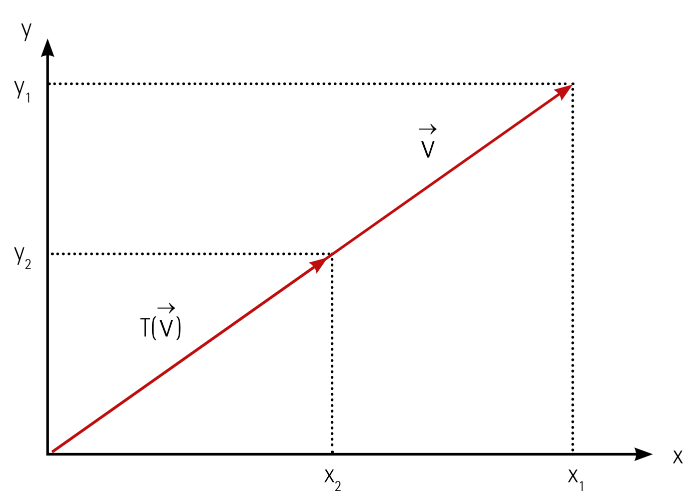

Figura 23

Observe que o vetor $\vec{v}$, de coordenadas (x_1, y_1), transformou-se no vetor $T(\vec{v})$, de coordenadas (x_2, y_2) e teve uma contração, em sua própria direção, de k vezes o valor de seu módulo.

Vamos agora determinar a matriz canônica da transformação linear de dilatação ou contração na direção do próprio vetor.

$T(1, 0) = (kx, 0)$

$T(0, 1) = (0, ky)$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \, . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = (kx, ky)$$

Vejamos alguns exemplos

1) Admita um objeto 2D que sofre dilatação em sua própria direção de 3 vezes o valor de seu módulo. Supondo que você queira converter esse objeto em pixels acesos no dispositivo gráfico de saída, será necessário transformá-lo em elemento de uma matriz. Dessa forma, determine a transformação linear e a matriz associada à dilatação desse objeto.

Se a transformação é de dilatação na direção do próprio vetor, então:

$T(x, y) = (3x, 3y)$ de matriz canônica $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) Admita um objeto 2D que sofre contração em sua própria direção reduzindo o valor de seu módulo à metade. Supondo que você queira converter esse objeto em pixels acesos no dispositivo gráfico de saída, será preciso transformá-lo em elemento de uma matriz. Assim, determine a transformação linear e a matriz associada à contração desse objeto.

Se a transformação é de contração na direção do próprio vetor, então:

$T(x, y) = (x/2, y/2)$ de matriz canônica $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

8.1.2 Dilatação ou contração na direção do eixo x

Seja a transformação $T(x, y) = (kx, y)$

Se $k > 1$

Observe a representação geométrica da transformação T:

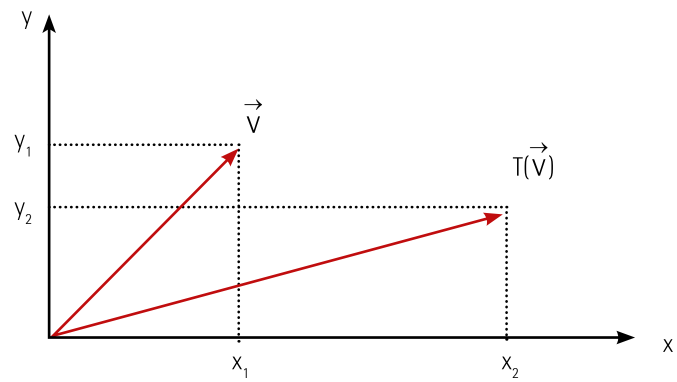

Figura 24

Note que o vetor $\vec{v}$, de coordenadas (x_1, y_1), transformou-se no vetor $T(\vec{v})$, de coordenadas (x_2, y_2) e dilatou-se, na direção do eixo x, k vezes o valor de seu módulo.

Se $0 < k < 1$

Observe a representação geométrica da transformação T:

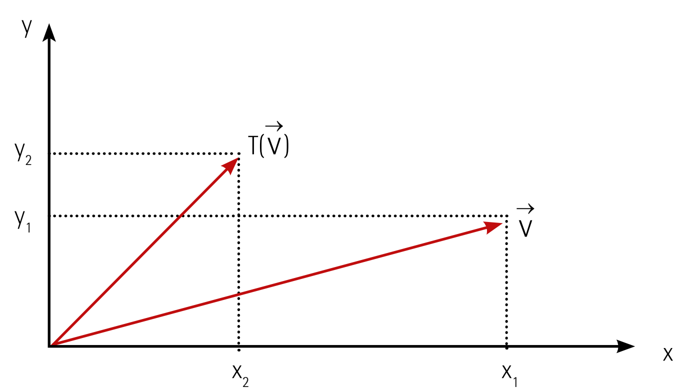

Figura 25

Note que o vetor $\vec{v}$, de coordenadas (x_1, y_1), transformou-se no vetor $T(\vec{v})$, de coordenadas (x_2, y_2) e teve uma contração, na direção do eixo x, de k vezes o valor de seu módulo.

Vamos agora determinar a matriz canônica da transformação linear de dilatação ou contração na direção do eixo x.

$T(1, 0) = (kx, 0)$

$T(0, 1) = (0, y)$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \,.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix} = (kx, y)$$

Vejamos alguns exemplos.

1) Admita um objeto 2D que sofre dilatação na direção x de 3 vezes o valor de sua abcissa. Supondo que você queira converter esse objeto em pixels acesos no dispositivo gráfico de saída, será necessário transformá-lo em elemento de uma matriz. Dessa forma, determine a transformação linear e a matriz associada à dilatação desse objeto.

Se a transformação é de dilatação na direção do eixo x, então:

$T(x, y) = (3x, y)$ de matriz canônica $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Admita um objeto 2D que sofre contração na direção x, reduzindo sua abcissa à metade. Supondo que você queira converter esse objeto em pixels acesos no dispositivo gráfico de saída, será preciso transformá-lo em elemento de uma matriz. Assim, determine a transformação linear e a matriz associada à contração desse objeto.

$T(x, y) = (x/2, y)$ de matriz canônica $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.1.3 Dilatação ou contração na direção do eixo y

Seja a transformação $T(x, y) = (x, ky)$

Se $k > 1$

Observe a representação geométrica da transformação T:

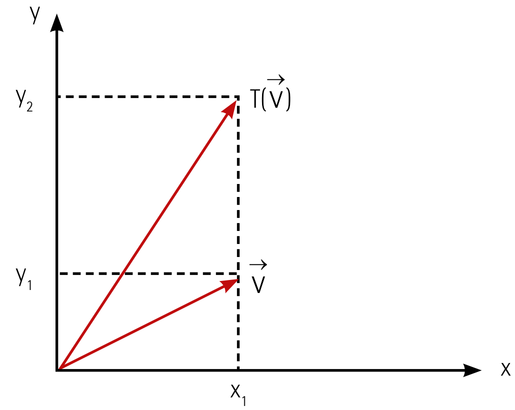

Figura 26

Note que o vetor $\vec{v}$, de coordenadas (x_1, y_1), transformou-se no vetor $T(\vec{v})$, de coordenadas (x_1, y_2) e teve uma dilatação, na direção do eixo y, de k vezes o valor de sua abcissa.

Se $0 < k < 1$

Observe a representação geométrica da transformação T:

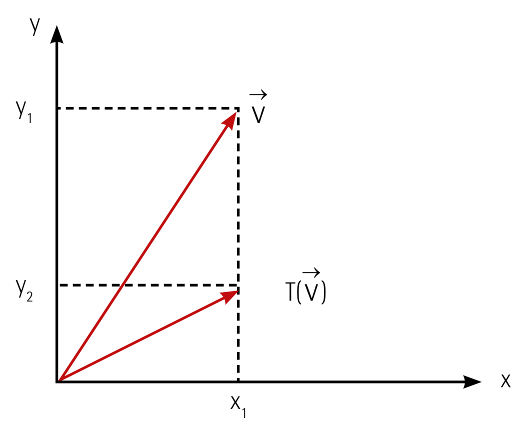

Figura 27

Note que o vetor $\vec{v}$, de coordenadas (x_1, y_1), transformou-se no vetor $T(\vec{v})$, de coordenadas (x_1, y_2) e teve uma contração, na direção do eixo y, de k vezes o valor de sua abcissa.

Vamos agora determinar a matriz canônica da transformação linear de dilatação ou contração na direção do eixo y.

$T(1, 0) = (x, 0)$

$T(0, 1) = (0, ky)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \, . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix} = (x, ky)$$

Vejamos alguns exemplos.

1) Admita um objeto 2D que sofre dilatação na direção y de 2 vezes o valor de sua abcissa. Supondo que você queira converter esse objeto em pixels acesos no dispositivo gráfico de saída, será necessário transformá-lo em elemento de uma matriz. Dessa forma, determine a transformação linear e a matriz associada à dilatação desse objeto.

Se a transformação é de dilatação na direção do eixo x, então:

$T(x, y) = (x, 2y)$ de matriz canônica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) Admita um objeto 2D que sofre contração na direção y, reduzindo sua abcissa à metade. Supondo que você queira converter esse objeto em pixels acesos no dispositivo gráfico de saída, será preciso transformá-lo em elemento de uma matriz. Assim, determine a transformação linear e a matriz associada à contração desse objeto.

$T(x, y) = (x, y/2)$ de matriz canônica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8.2 Reflexão

É uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva um ponto do plano ao seu simétrico em relação:

- ao eixo x
- ao eixo y
- à origem
- à reta y = x

8.2.1 Reflexão em relação ao eixo x

Seja a transformação T(x, y) = (x, -y) e observe sua representação geométrica.

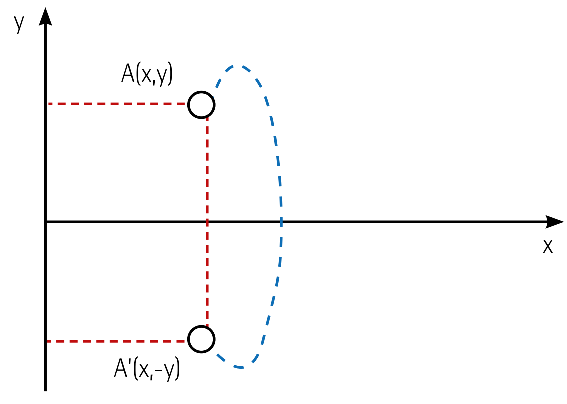

Figura 28

Note que T levou o ponto A(x, y), em relação ao eixo x, ao ponto A'(x, -y).

Assim, a matriz canônica associada a T é:

T(1, 0) = (1, 0)

T(0, 1) = (0, -1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = (x, -y)$$

8.2.2 Reflexão em relação ao eixo y

Seja a transformação T(x, y) = (x, -y), observe sua representação geométrica.

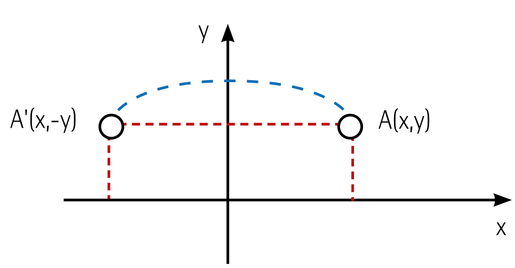

Figura 29

Note que T levou o ponto A(x, y), em relação ao eixo y, ao ponto A'(-x, y).

Assim, a matriz canônica associada a T é:

T(1, 0) = (-1, 0)

T(0, 1) = (0, 1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = (-x, y)$$

8.2.3 Reflexão em relação à origem do plano

Seja a transformação T(x, y) = (-x, -y), observe sua representação geométrica.

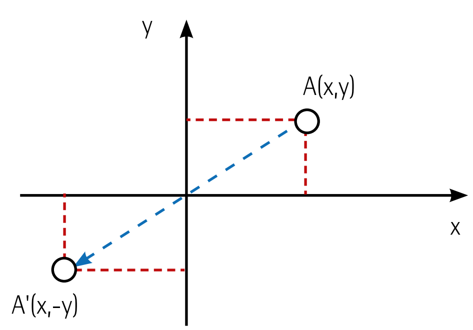

Figura 30

Note que T levou o ponto A(x, y), em relação à origem do plano, ao ponto A'(-x, y).

Assim, a matriz canônica associada a T é:

T(1, 0) = (-1, 0)

T(0, 1) = (0, -1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \, . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = (-x, -y)$$

8.2.4 Reflexão em relação à reta y = x

Seja a transformação T(x, y) = (y, x), observe sua representação geométria

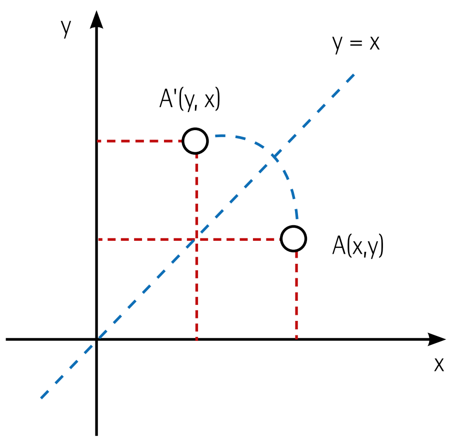

Figura 31

Note que T levou o ponto A(x, y), em relação à reta y = x, ao ponto A'(y, x).

Assim, a matriz canônica associada a T é:

T(1, 0) = (0, 1)

T(0, 1) = (1, 0)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \, . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = (y, x)$$

8.3 Projeção

É uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva um vetor do plano à sua projeção ortogonal sobre o eixo x ou sobre o eixo y.

8.3.1 Projeção em relação ao eixo x

Seja a transformação $T(x, y) = (x, 0)$, observe sua representação geométrica.

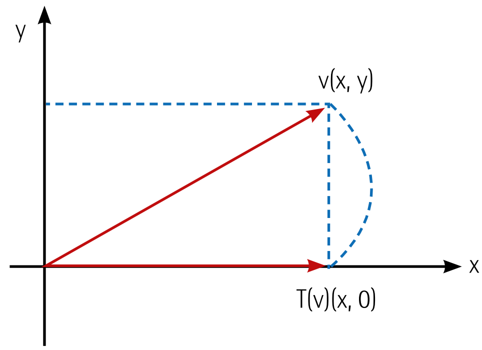

Figura 32

Note que T transformou o vetor v, de coordenada (x, y), em sua projeção ortogonal em relação ao eixo x, T(v) de coordenada (x, 0).

Assim, a matriz canônica associada a T é:

$T(1, 0) = (1, 0)$

$T(0, 1) = (0, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = (x, 0)$$

8.3.2 Projeção em relação ao eixo y

Seja a transformação $T(x, y) = (0, y)$, observe sua representação geométrica.

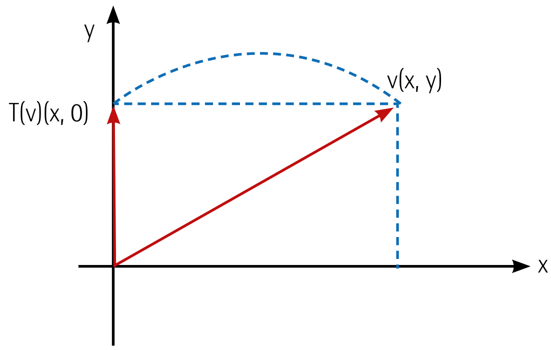

Figura 33

Note que T transformou o vetor v, de coordenada (x, y), em sua projeção ortogonal em relação ao eixo y, T(v) de coordenada (0, y).

Assim, a matriz canônica associada a T é:

T(1, 0) = (0, 0)

T(0, 1) = (0, 1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = (0, y)$$

8.4 Cisalhamento

O cisalhamento na direção do eixo x transforma cada ponto (x, y) do plano deslocando-os horizontalmente até (x + ky, y). Por outro lado, se cada ponto (x, y) do plano for deslocado verticalmente até (x, y + kx), chamamos de cisalhamento em relação ao eixo y.

8.4.1 Cisalhamento em relação ao eixo x

Seja a transformação T(x, y) = (x + ky, y), observe sua representação geométrica.

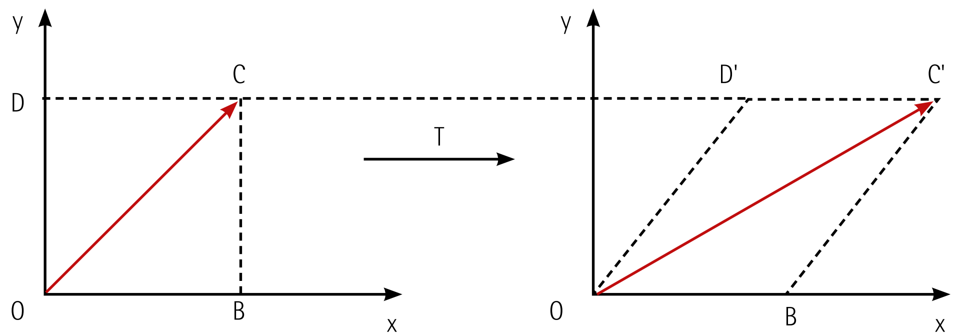

Figura 34

O cisalhamento na direção do eixo x transformou o retângulo OBCD no paralelogramo OBC'D'. Cada ponto (x, y) foi deslocado horizontalmente até (x + ky, y). Observe que os pontos sobre o eixo das abscissas não foram deslocados, pois possuem a ordenada nula. Em razão disso, os quadriláteros OBCD e OBC'D' possuem a mesma base OP.

Assim, a matriz canônica associada a T é:

$T(1, 0) = (1, 0)$

$T(0, 1) = (k, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \, . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix} = (x + ky, y)$$

8.4.2 Cisalhamento em relação ao eixo y

Seja a transformação $T(x, y) = (x, y + kx)$, observe sua representação geométrica.

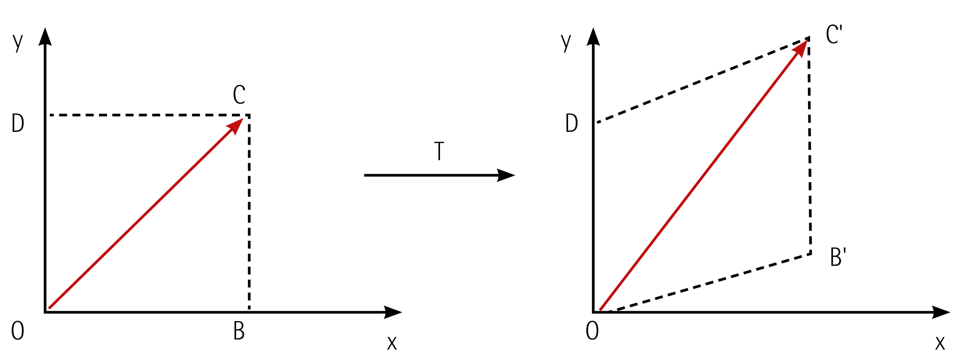

Figura 35

O cisalhamento na direção do eixo y transformou o retângulo OBCD no paralelogramo OB'C'D. Cada ponto (x, y) foi deslocado verticalmente até (x, y + kx). Observe que os pontos sobre o eixo das ordenadas não foram deslocados, pois possuem a abcissa nula.

Assim, a matriz canônica associada a T é:

$T(1, 0) = (1, k)$

$T(0, 1) = (0, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + kx \end{bmatrix} = (x, y + kx)$$

8.5 Rotação

A transformação linear plana da rotação faz cada ponto (vetor) descrever, em volta da origem, um ângulo θ no sentido anti-horário.

Observe a figura a seguir:

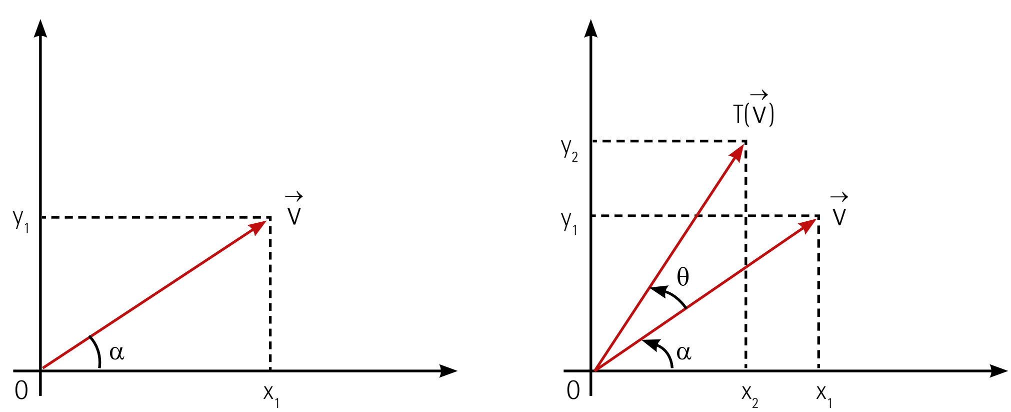

Figura 36

Em outras palavras, podemos dizer que a rotação é uma transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Note que, se apenas rotacionamos o vetor $\vec{v}$, significa que os módulos de $\vec{v}$ e $T(\vec{v})$ são iguais.

Agora, com base na figura anterior, vamos determinar a matriz canônica que representa essa transformação.

I – $|\vec{v}| = |T(\vec{v})|$

II – $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y_1}{|\vec{v}|} \\ \cos\alpha = \dfrac{x_1}{|\vec{v}|} \end{cases}$

III – $\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \dfrac{y_2}{|\vec{v}|} \\ \cos(\alpha+\theta) = \dfrac{x_2}{|\vec{v}|} \end{cases}$

Conforme a trigonometria, sabemos que:

IV – $\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\alpha \\ \cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Substituindo o 2º membro de III no 1º membro de IV, temos:

V – $\begin{cases} \dfrac{y_2}{|\vec{v}|} = \operatorname{sen}\alpha \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\alpha \\ \dfrac{x_2}{|\vec{v}|} = \cos\alpha \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Substituindo o 2º membro de II no 2º membro de V, temos:

VI – $\begin{cases} \dfrac{y_2}{|\vec{v}|} = \dfrac{y_1}{|\vec{v}|}\cos\theta + \dfrac{x_1}{|\vec{v}|}\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{x_2}{|\vec{v}|} = \dfrac{x_1}{|\vec{v}|}\cos\theta - \dfrac{y_1}{|\vec{v}|}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Como todos os termos de VI estão sendo divididos por $|\vec{v}|$, simplificamos:

VII – $\begin{cases} y_2 = y_1 \cos\theta + x_1 \operatorname{sen}\theta \\ x_2 = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Sabendo que $T(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, temos:

$T(1, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$T(0, 1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

Logo a matriz canônica é:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

De fato:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

Vejamos alguns exemplos.

1) Determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que representa uma reflexão em torno do eixo dos y, seguida de um cisalhamento de fator 3 na direção horizontal.

Resolução

A transformação linear de reflexão em relação ao eixo y é dada por $T(x, y) = (-x, y)$

Aplicando em $(-x, y)$ um cisalhamento de fator 3 na direção x, que é dado por $T(x, y) = (x + ky, y)$, temos:

$T(-x, y) = (-x + ky, y) = (x + 3y, y)$

2) Determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que representa uma reflexão em torno do eixo dos x, seguida de um cisalhamento de fator 3 na direção horizontal.

Resolução

A transformação linear de reflexão em relação ao eixo x é dada por $T(x, y) = (x, -y)$

Aplicando em $(x, -y)$ um cisalhamento de fator 3 na direção x, que é dado por $T(x, y) = (x + ky, y)$, temos:

$T(x, -y) = (x - ky, -y) = (x - 3y, -y)$

3) Determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que representa uma rotação de 90º, seguida de reflexão em torno do eixo dos x:

Resolução

A transformação da rotação é dada por $T(x, y) = (x\cos\theta - y\text{sen}\theta, x\text{sen}\theta + y\cos\theta)$, logo:

$T(x, y) = (-y\text{sen}90^\circ, x\text{sen}90^\circ)$

Aplicando em $(-y\text{sen}90^\circ, x\text{sen}90^\circ)$ uma reflexão em torno do eixo x, que é dada por $T(x, y) = (x, -y)$, temos:

$T(-y\text{sen}90^\circ, x\text{sen}90^\circ) = (-y\text{sen}90^\circ, -x\text{sen}90^\circ) = (-y, -x)$

4) Determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que representa uma reflexão em torno do eixo y, seguida de uma dilatação de fator 2 na direção do próprio vetor e, por último, um cisalhamento de fator 3 na direção do eixo dos y.

Resolução

A reflexão em relação ao eixo y é dada por $T(x, y) = (-x, y)$

Aplicando em $(-x, y)$ a transformação da dilatação de fator 2 na direção do próprio vetor, que é dada por $T(x, y) = (kx, ky)$, temos:

$T(-x, y) = (-kx, ky) = (-2x, 2y)$

Por fim, aplicando em $(-2x, 2y)$ um cisalhamento de fator 3 em relação ao eixo y, temos:

$T(-2x, 2y) = (-2x, 2y - k2x) = (-2x, 2y - 3 \,.\, 2x) = (-2x, 2y - 6x)$

5) Determine a imagem do vetor (2, 3) através da transformação linear plana da projeção em relação ao eixo x.

Resolução

A transformação linear plana que representa a projeção em relação ao eixo x é dada por:

$T(x, y) = (x, 0)$

$T(2, 3) = (2, 0)$

6) O vetor (2, 3) sofreu uma dilatação de fator 3 em relação ao eixo x, em seguida uma reflexão em relação à origem e, por fim, foi projetado no eixo y. Determine a imagem de (2, 3) após todas as transformações aplicadas.

Resolução

A transformação da dilatação em torno do eixo x é dada por:

$T(x, y) = (x, ky)$

$T(2, 3) = (2, 3 . 3) = (2, 9)$

Aplicando em (2, 9) a transformação da reflexão em relação à origem, que é dada por:

$T(x, y) = (-x, -y)$

$T(2, 9) = (-2, -9)$

Aplicando em (-2, -9) a transformação da projeção em relação ao eixo y, que é dada por:

$T(x, y) = (0, y)$

$T(-2, -9) = (0, -9)$

Saiba mais

Amplie seus conhecimentos sobre transformações lineares planas, nos capítulos 8 e 9, consultando a seguinte obra:

HETEM JÚNIOR, A. *Computação gráfica*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

8.6 Exemplos práticos

1) Sabendo que $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (3y, x + z)$ é linear, assinale a alternativa que indica a imagem do vetor (1, 2, -3) pela transformação:

A) $T(1, 2, -3) = (6, -2)$

B) $T(1, 2, -3) = (6, 9)$

C) $T(1, 2, -3) = (-5, 1)$

D) $T(1, 2, -3) = (-2, 6)$

E) $T(1, 2, -3) = (5, -3)$

Resolução

$T(1, 2, -3) = (3 . 2, 1 + (-3)) = (6, -2)$

A alternativa correta é A.

2) Considerando que $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é função linear e $F(1, 1, 1) = (-2, 1, 3, 2)$; $F(0, 1, 1) = (1, 2, 3, -4)$; $F(0, 0, 1) = (-1, 3, 6, 1)$; sendo $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, determine $F(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

A) $F(x, y, z) = (-3x + 2y - z, - x - y +3z, - 3y + 6z, 6x - 5y + z)$

B) $F(x, y, z) = (-3x + 2y - z, - x - y +3z, 3y + 6z, 6x - 5y + z)$

C) $F(x, y, z) = (-3x + 2y - z, x - y +3z, - 3y + 6z, 6x - 5y + z)$

D) $F(x, y, z) = (3x + 2y - z, x - y +2z, - 3y + 6z, 6x - 5y - z)$

E) $F(x, y, z) = (3x + 2y - z, x + y +2z, - 3y - 6z, 20x - 2y + z)$

Resolução

Escrevemos $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores da base B, assim:

$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1)$

$(x, y, z) = (a, a, a) + (0, b, b) + (0, 0, c)$

$(x, y, z) = (a, a + b, a + b + c)$

$$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \\ a + b + c = z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$a = x$, $b = y - x$ e $c = z - y$

$F(x, y, z) = F(a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1))$

$F(x, y, z) = a\,F(1, 1, 1) + b\,F(0, 1, 1) + c\,F(0, 0, 1)$

$F(x, y, z) = x(-2, 1, 3, 2) + y - x(1, 2, 3, -4) + z - y(-1, 3, 6, 1)$

$F(x, y, z) = (-2x, x, 3x, 2x) + (y - x, 2y - 2x, 3y - 3x, -4y + 4x) + (-z + y, 3z - 3y, 6z - 6y, z - y)$

$F(x, y, z) = (-2x + y - x - z + y, x + 2y - 2x + 3z - 3y, 3x + 3y - 3x + 6z - 6y, 2x - 4y + 4x + z - y)$

$F(x, y, z) = (-3x + 2y - z, -x - y + 3z, -3y + 6z, 6x - 5y + z)$

A alternativa correta é A.

3) O núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + z, y)$, é:

A) $N(T) = \{(0, 0, -x) | x \in \mathbb{R}\}$

B) $N(T) = \{(0, x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$

C) $N(T) = \{(x, x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$

D) $N(T) = \{(x, 0, x) | x \in \mathbb{R}\}$

E) $N(T) = \{(x, 0, -x) | x \in \mathbb{R}\}$

Resolução

$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | T(x, y, z) = (0, 0)\}$

$T(x, y, z) = (x + z, y) = (0, 0)$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$y = 0$ e $x = -z$

$N(T) = \{(x, 0, -x) | x \in \mathbb{R}\}$

A alternativa correta é E.

4) Uma base do núcleo da transformação T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por T(x, y, z) = (x + y, 2x - z, z - 2y), é:

A) B = $\{(1, 3, 1)\}$

B) B = $\{(1, -1, 1)\}$

C) B = $\varnothing$

D) B = $\{(-1, 3, -1)\}$

E) B = $\{(-1, -3, -1)\}$

Resolução

$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | \; T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

$T(x, y) = (x + y, 2x - z, z - 2y) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$

$N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ subespaço trivial

Logo, por definição, base de $N(T) = \varnothing$

A alternativa correta é C.

5) Uma base da imagem da transformação T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por T(x, y, z) = (x + y, 2x - z, z - 2y), é:

A) B = $\{(0, 2, -2), (1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$

B) B = $\{(0, 2, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

C) B = $\{(0, -2, 2), (0, -1, 1)\}$

D) B = $\{(0, 2, -2), (1, 0, 0)\}$

E) B = $\{(0, 2, -2), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

Resolução

$\text{ImT} = \{(x + y, 2x - z, z - 2x) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Base de ImT

$(x + y, 2x - z, z - 2x) = (x, 2x, -2x) + (y, 0, 0) + (0, -z, z)$

$(x + y, 2x - z, z - 2x) = x(1, 2, -2) + y(1, 0, 0) + z(0, -1, 1)$

Desse modo $[(0, 2, -2), (1, 0, 0), (0, -1, 1)] = \text{ImT}$, resta verificar se os geradores são LI, montando e escalonando a matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Em L1, permutando L1 com L2, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Em L3, L2 + 2L3, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ é L.D, entretanto } (1, 0, 0) \text{ e } (0, 2, -2) \text{ é L.I}$$

Portanto $B = \{(1, 0, 0), (0, 2, -2)\}$ é base de ImT

A alternativa correta é D.

6) Assinale a alternativa que contenha um operador ortogonal.

A) $T(x, y) = (-x, y)$

B) $T(x, y) = (2x, y)$

C) $T(x, y) = (x - y, y)$

D) $T(x, y) = (x + y, x - y)$

E) $T(x, y) = (x, 3y)$

Resolução

A) $|T(u)| = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |u|$

B) $|T(u)| = \sqrt{(2x)^2 + y^2} = \sqrt{4x^2 + y^2} \neq |u|$

C) $|T(u)| = \sqrt{(x - y)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + 2y^2} \neq |u|$

D) $|T(u)| = \sqrt{(x + y)^2 + (x - y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2} \neq |u|$

E) $|T(u)| = \sqrt{x^2 + (3y)^2} = \sqrt{x^2 + 9y^2} \neq |u|$

A alternativa correta é A.

7) Um retângulo, representado pelas coordenadas A(0,0), B(4,0), C(4,3) e D(0,3), tem como imagem um outro retângulo, cujas coordenadas são, respectivamente, A'(0,0), B'(-8,0), C'(-8,-6), D'(0,-6). Assinale a alternativa que indica a transformação aplicada.

A) (2x, -2y)

B) (-2x, 2y)

C) (-2x, -2y)

D) (2y, 2x)

E) (-2y, 2x)

Resolução

Note que a transformação é F: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e que todos os vetores que compõem a imagem têm suas coordenadas multiplicadas por -2. Logo a transformação aplicada é T(x, y) = (-2x, -2y).

A alternativa correta é C.

8) Um triângulo, representado pelas coordenadas A (0, 0), B (3, 0) e C (3, 4), tem como imagem após a transformação T (x, y) = (-2x, -2x) outro triângulo, onde ocorreu o seguinte:

A) Dilatação e reflexão em relação ao eixo x.

B) Dilatação e reflexão em relação ao eixo y.

C) Dilatação e reflexão em relação à origem.

D) Contração e reflexão em relação à origem.

E) Contração e reflexão em relação ao eixo y.

Resolução

Aplicando a transformação dada:

T(0, 0) = (0, 0)

T(3, 0) = (-6, 0)

T(3, 4) = (-6, -8)

Inserindo no plano cartesiano as coordenadas do primeiro triângulo e do triângulo obtido após a transformação, podemos notar a reflexão em relação à origem e à dilatação nas dimensões.

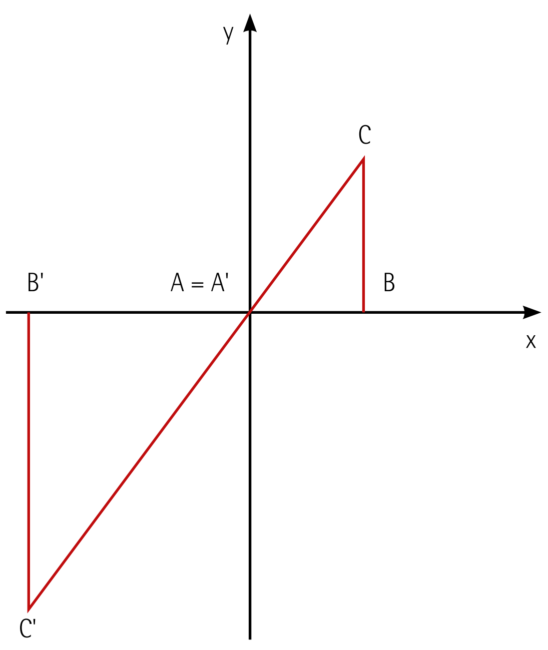

Figura 37

A alternativa correta é C.

9) Um quadrilátero representado pelas coordenadas A (0, 0), B (2, 0), C (2, 4) e D (0, 4) tem como imagem, após a transformação T (x, y) = (x + 2y, y), outro quadrilátero e cuja transformação ocorrida foi:

A) Rotação em 90º.

B) Cisalhamento na direção do eixo x.

C) Cisalhamento na direção do eixo y.

D) Reflexão em relação ao eixo x.

E) Reflexão em relação ao eixo y.

Resolução

Aplicando a transformação dada:

$T(0, 0) = (0, 0)$

$T(2, 0) = (2, 0)$

$T(2, 4) = (10, 4)$

$T(0, 4) = (8, 4)$

Inserindo no plano cartesiano as coordenadas do primeiro e do segundo quadrilátero, cada ponto (x, y) foi deslocado horizontalmente até (x+2y,y), transformando o retângulo ABCD no paralelogramo ABC'D'. Observe que os pontos sobre o eixo das abscissas não foram deslocados, pois possuem a ordenada nula. Por essa razão, os quadriláteros ABCD e ABC'D' possuem a mesma base AB.

De acordo com as características obtidas do plano, conclui-se que a transformação foi de cisalhamento em relação ao eixo x

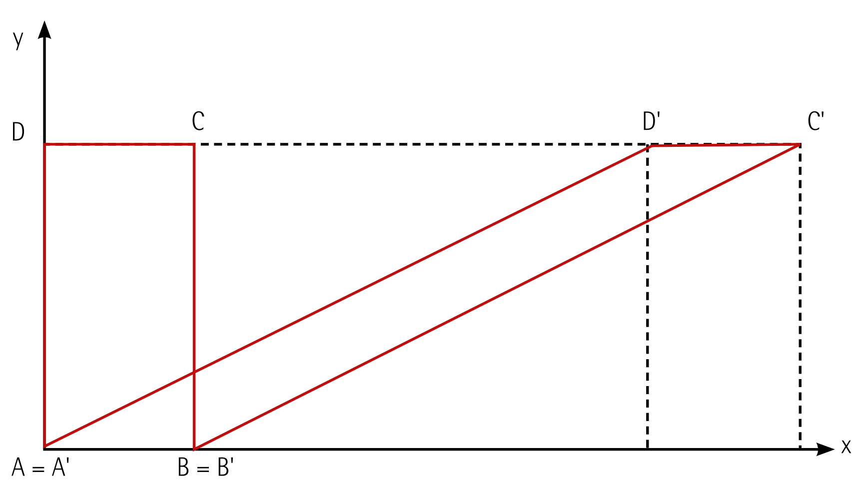

Figura 38

A alternativa correta é B.

Resumo

Nesta unidade, vimos que um operador linear é uma transformação linear T: U $\rightarrow$ U. Assim, estudamos as propriedades das transformações lineares e o núcleo de uma transformação linear.

Depois, destacamos o operador inversível. A transformação T: U $\rightarrow$ U também será chamada de operador inversível se existir T^{-1}, tal que:

$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (identidade)

O operador T é inversível somente se T for uma aplicação bijetora.

Em relação ao operador ortogonal, seja a transformação linear T: U $\rightarrow$ U, operador linear, se $|T(u)| = |u|$, então a transformação T é ortogonal.

Prosseguindo nossa análise, acentuamos que determinante nada mais é do que um número real associado a uma matriz quadrada. Nessa condição, dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, a representação do determinante dessa matriz é dada por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ao analisar o teorema de Laplace, destacamos que o determinante de uma matriz quadrada de ordem n é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos seus respetivos cofatores.

Em linguagem matemática:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum a_{ij} \cdot A_{ij}, \text{ fixado i ou j}$$

Ressaltamos nesta unidade a permutação de linhas ou colunas paralelas. Se trocarmos de posição duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, então o determinante dessa nova matriz será o oposto da matriz original. Assim, vimos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Também estudamos o teorema de Binet, o teorema de Jacobi e temas como formas bilineares, produto interno, transformações lineares planas e projeção, reflexão e cisalhamento em relação aos eixos x e y.

Exercícios

Questão 1. Considere as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

I – A transformação T: R2 $\rightarrow$ R3, definida por T(x,y) = (5x, 7y, 3x - 8y), é uma transformação linear (TL).

porque

II – Para a transformação T: R2 $\rightarrow$ R3, definida por T(x,y) = (5x, 7y, 3x - 8y), temos T(u+v) = T(u) + T(v) e T(αu) = αT(u).

Assinale a alternativa correta.

A) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II justifica a asserção I.

B) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II não justifica a asserção I.

C) As asserções I e II são falsas.

D) A asserção I é verdadeira, e a asserção II é falsa.

E) A asserção I é falsa, e a asserção II é verdadeira.

Resposta correta: alternativa A.

Análise da questão

Vamos lembrar da definição de transformação linear. Para isso, tome dois espaços vetoriais U e V sobre R (o corpo dos números reais). Suponha ainda dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u}, \vec{v} \in U$, e um número escalar qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere uma função T :U $\rightarrow$ V. Dizemos que T é uma transformação linear se, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com $\vec{u}, \vec{v} \in U$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, as condições a seguir forem satisfeitas:

I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

II) $T(\alpha+\vec{u}) = \alpha \, . \, T(\vec{u})$

Assim, para provarmos que uma função é uma transformação linear, devemos provar que essas duas condições são válidas sempre. No caso do exercício, vamos considerar dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ pertencentes a R2. De acordo com o enunciado, a transformação T: R2→R3 é definida como $T(x,y) = (5x, 7y, 3x - 8y)$. Assim, sabemos que, para $\vec{u}$, temos:

$$T(\vec{u}) = T(x_1, y_1) = (5x_1, 7y_1, 3x_1 - 8y_1)$$

De forma equivalente, para $\vec{v}$ temos:

$$T(\vec{v}) = T(x_2, y_2) = (5x_2, 7y_2, 3x_2 - 8y_2)$$

Vamos começar provando a primeira condição. Para isso, devemos lembrar que a soma de dois vetores é feita somando-se cada uma das suas coordenadas. Dessa forma, vamos encontrar o valor da soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e chamar esse resultado de $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Vamos calcular o valor de $T(\vec{w})$:

$$T(\vec{w}) = T(\vec{u} + \vec{v}) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2))$$

Calculamos T de acordo com $T(x,y) = (5x, 7y, 3x - 8y)$:

$$T(\vec{w}) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (5.(x_1 + x_2), 7.(y_1 + y_2), 3.(x_1 + x_2) - 8.(y_1 + y_2))$$

$$T(\vec{w}) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (5x_1 + 5x_2, 7y_1 + 7y_2, 3x_1 + 3x_2 - 8y_1 - 8y_2)$$

Podemos reagrupar os elementos da última equação isolando os termos que dependem de x_1 e y_1 e os termos que dependem de x_2 e y_2

$$T(\vec{w}) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (5x_1 + 5x_2, 7y_1 + 7y_2, 3x_1 - 8y_1 + 3x_2 - 8y_2)$$

Agora, faremos outro cálculo. Sabemos que $T(\vec{u}) = T(x_1,y_1) = (5x_1, 7y_1, 3x_1 - 8y_1)$ e que $T(\vec{v}) = T(x_2,y_2) = (5x_2, 7y_2, 3x_2 - 8y_2)$. Observe o que acontece se fizermos diretamente a soma de $T(\vec{u}) + T(\vec{v})$:

$$T(\vec{u})+T(\vec{v})=(5x_1,7y_1,3x_1-8y_1)+(5x_2,7y_2,3x_2-8y_2)$$

Somando cada uma das coordenadas, chegamos a:

$$T(\vec{u})+T(\vec{v})=(5x_1+5x_2,7y_1+7y_2,3x_1-8y_1+3x_2-8y_2)$$

Podemos mudar a ordem da soma da última coordenada:

$$T(\vec{u})+T(\vec{v})=(5x_1+5x_2,7y_1+7y_2,3x_1+3x_2-8y_1-8y_2)$$

Observe que esse é o mesmo resultado obtido anteriormente:

$$T(\vec{w})=T(\vec{u}+\vec{v})=T((x_1+x_2,y_1+y_2))=(5x_1+5x_2,7y_1+7y_2,3x_1+3x_2-8y_1-8y_2)$$

Assim, provamos que:

$$T(\vec{w})=T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$$

Isso prova a primeira condição.

Para provarmos a segunda condição, devemos seguir um caminho similar ao caminho que usamos. Vamos supor um escalar qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e definir um novo vetor $\vec{z} = (x_3, y_3) = \alpha\vec{u}$. Como $\vec{u} = (x_1, y_1)$, sabemos que:

$$\vec{z}=(x_3,y_3)=\alpha\vec{u}=\alpha(x_1,y_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1)$$

Logo, $x_3 = \alpha x_1$ e $y_3 = \alpha y_1$. Vamos calcular $T(\vec{z})$:

$$T(\vec{z})=(5x_3,7y_3,3x_3-8y_3)$$

Substituindo $x_3 = \alpha x_1$ e $y_3 = \alpha y_1$ na igualdade anterior, ficamos com:

$$T(\vec{z})=(5\alpha x_1,7\alpha y_1,3\alpha x_1-8\alpha y_1)$$

$$T(\vec{z})=\alpha(5x_1,7y_1,3x_1-8y_1)$$

Sabemos que:

$$T(\vec{u})=T(x_1,y_1)=(5x_1,7y_1,3x_1-8y_1)$$

Adicionalmente, se fizermos $\alpha T(\vec{u})$, obteremos:

$$\alpha T(\vec{u}) = \alpha T((x_1, y_1)) = \alpha(5x_1, 7y_1, 3x_1 - 8y_1) = (5\alpha x_1, 7\alpha y_1, 3\alpha x_1 - 8\alpha y_1)$$

Esse é o mesmo valor de $T(\vec{z})$. Assim, concluímos que:

$$T(\vec{z}) = T(\alpha\vec{u}) = \alpha(5x_1, 7y_1, 3x_1 - 8y_1) = \alpha T(\vec{u})$$

Como $T(\vec{z}) = T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$, provamos que a segunda condição também é válida.

Como a transformação T: R2→R3, definida por T(x,y) = (5x, 7y, 3x - 8y), obedece às duas condições previamente enunciadas, concluímos que T é uma transformação linear (abreviada, em alguns textos, como TL).

Uma observação importante a ser feita é que T é uma função que tem R2 como domínio e R3 como contradomínio. Isso significa que as variáveis $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ são vetores em R2, no formato (a,b), com duas coordenadas, enquanto o "resultado da função" é um vetor em R3, no formato (a,b,c), com três coordenadas.

Finalmente, provamos que ambas as asserções são verdadeiras e que a asserção II é a causa da asserção I (pela própria definição de transformação linear).

Apenas para recapitular o que fizemos, veja a síntese a seguir.

Considere $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ pertencentes ao R2.

Para transformação T: R2 → R3, definida por T(x,y) = (5x, 7y, 3x - 8y), temos o que segue.

I) T(u + v) =T(u) + T(v)

$$T(u+v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$T(u+v) = (5(x_1 + x_2), 7(y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) - 8(y_1 + y_2))$$

$$T(u+v) = (5x_1 + 5x_2, 7y_1 + 7y_2, 3x_1 + 3x_2 - 8y_1 - 8y_2)$$

$$T(u+v) = (5x_1, 7y_1, 3x_1 - 8y_1) + (5x_2, 7y_2, 3x_2 - 8y_2)$$

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

$$T(\alpha u) = T(\alpha(x_1, y_1)$$

$$T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1)$$

$$T(\alpha u) = (5(\alpha x_1), 7(\alpha x_1), 3(\alpha x_1) - 8(\alpha y_1))$$

$$T(\alpha u) = (\alpha(5x_1), \alpha(7x_1), \alpha(3x_1 - 8y_1))$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Concluímos que a transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y) = (5x, 7y, 3x - 8y)$, é uma transformação linear (TL).

Questão 2. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x, y, z) = \left(-3x + 2y + \frac{2}{5}z, x + 7y - z\right)$$

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o núcleo N(T) dessa transformação linear.

A) $N(T) = \left[\left(\frac{9}{11}, \frac{13}{11}, 11\right)\right]$

B) $N(T) = \left[\left(\frac{24}{115}, \frac{13}{115}, 1\right)\right]$

C) $N(T) = \left[\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)\right]$

D) $N(T) = \left[\left(-3, 2, \frac{2}{5}\right)\right]$

E) $N(T) = \left[(1, 7, -1)\right]$

Resposta correta: alternativa B.

Análise da questão

Para o núcleo N(T) da transformação linear T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z) = \left(-3x + 2y + \frac{2}{5}z, x + 7y - z\right)$, devemos ter:

$$N(T) = \left\{(x,y,z) \in R^3 \,/\, T(x,y,z) = (0,0)\right\}$$

Logo, (x, y, z) $\in$ N(T) somente se:

$$\left(-3x + 2y + \frac{2}{5}z, x + 7y - z\right) = (0,0)$$

Assim:

$$-3x + 2y + \frac{2}{5}z = 0$$

$$x + 7y - z = 0$$

Para z = k, com k pertencendo a R, temos o seguinte:

$$-3x + 2y + \frac{2}{5}k = 0 \rightarrow -3x + 2y = -\frac{2}{5}k$$

$$x + 7y - k = 0 \rightarrow x + 7y = k$$

Da última igualdade, obtemos:

x = k - 7y

Assim:

$$-3x + 2y = -\frac{2}{5}k \rightarrow -3(k - 7y) + 2y = -\frac{2}{5}k$$

$$-3k + 21y + 2y = -\frac{2}{5}k \rightarrow 23y = -\frac{2}{5}k + 3k$$

$$23y = \frac{-2k + 15k}{5} \rightarrow 23y = \frac{13k}{5} \rightarrow y = \frac{13k}{115}$$

Escrevemos x como:

$$x = k - 7y \to x = k - \frac{7.13k}{115}$$

$$x = k - \frac{91k}{115} = \frac{115k - 91k}{115} \to x = \frac{24k}{115}$$

Com isso, obtemos o núcleo da transformação linear T:

$$N(T) = \left\{ \left(\frac{24k}{115}, \frac{13k}{115}, k \right), k \in R \right\} = \left\{ k \left(\frac{24}{115}, \frac{13}{115}, 1 \right), k \in R \right\}$$

Concluímos que o vetor gera:

$$N(T) = \left[\left(\frac{24}{115}, \frac{13}{115}, 1 \right) \right]$$

REFERÊNCIAS

Textuais

ANTON, H.; BUSBY, R. C. *Álgebra linear contemporânea*. São Paulo: Bookman, 2006.

CALLIOLI, C. A. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra,1980.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. São Paulo: Saraiva, 2000.

CORRÊA, P. S. Q. *Álgebra linear e geometria analítica*. Rio de Janeiro: Interciência, 2021.

HETEM JÚNIOR, A. *Computação gráfica*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Álgebra linear*. São Paulo: Bookman, 2009. (Coleção Schaum)

MENDES, R. M. N. *Álgebra linear*. Belo Horizonte: PUC-Minas, 2009.

WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000