Unidade II

Objetivos

Neste tópico, apresentar-se-á o tema mais importante da lógica tradicional, ou seja, o argumento. Estudar-se-á que, para a lógica clássica, o principal objetivo no estudo dos argumentos é a verificação da validade da sua forma, entendendo-se por forma, aqui, a forma de raciocínio.

5 PRINCÍPIOS DA ARGUMENTAÇÃO

5.1 Argumentos

5.1.1 Introdução

Intuitivamente, todos temos uma ideia do que seja argumento – bem próxima ao que de fato é – no entanto, é preciso dar-se uma definição formal e todo o simbolismo matemático para um trabalho preciso.

Lembrete

Argumento: 1. Raciocínio de no qual se tira uma conclusão. 2. Prova, demonstração. 3. Resultado de uma obra; sumário.

Observação

Um argumento é um conjunto de duas os mais proposições, no qual uma das proposições é denominada **conclusão**, e as demais são chamadas de premissas. A conclusão é consequência das premissas.

A forma como, por meio das premissas, chega-se a uma conclusão é denominada de inferência lógica. Ela pode ser dita como forma de raciocínio.

Exemplo:

“Minha avó é alta, minha mãe é alta, eu sou alta, logo minha filha será alta.”

Esse argumento é composto de quatro proposições: as três primeiras são as premissas e a última é a conclusão, justificada com base nas outras três.

Note-se que, em um argumento, nem sempre a última proposição é a conclusão. Esta pode estar em qualquer lugar no argumento, pode ser a primeira proposição ou alguma intermediária. Na maioria dos casos aqui estudados, entretanto, manter-se-á a conclusão por último.

Geralmente, classificam-se os argumentos em dedutivos ou indutivos.

Os argumentos dedutivos são aqueles em que a conclusão é uma consequência lógica das premissas.

Exemplos:

Todos os peixes vivem na água.

Piranha é um peixe

Logo, a piranha vive na água.

No argumento exemplificado, há três proposições, sendo a última a conclusão, que é uma consequência lógica das premissas. Diz-se que um argumento dedutivo é bem construído quando é impossível obter-se uma conclusão falsa se as premissas forem verdadeiras; para este caso, diz-se que o argumento é válido, por outro lado, tendo-se premissas verdadeiras e conclusão falsa, diz-se que o argumento é inválido.

Os argumentos indutivos são aqueles em que a conclusão apresenta informações que não estão presentes nas premissas. Esses argumentos, contudo, não farão parte de nossos estudos neste livro-texto.

Exemplo:

O Corinthians nunca foi campeão da Taça Libertadores.

No próximo ano, participará da Taça Libertadores.

Logo, o Corinthians não será campeão.

Nesse argumento, não há de fato como afirmar categoricamente que o Corinthians não será campeão, porém é provável que não o seja em virtude de seu passado na competição. Fica claro que, nesse tipo de argumento, há uma dedução do que poderá ocorrer, mas não uma certeza absoluta.

5.1.2 Definição simbólica de argumento

De acordo com Alencar Filho (2002), sejam $P_1, P_2,..., P_n$ $(n \geq 1)$ e Q proposições quaisquer, simples ou compostas.

Denomina-se argumento toda afirmação em que uma dada sequência finita $P_1, P_2,..., P_n$ $(n \geq 1)$ de proposições tem como consequência uma proposição Q.

As proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dizem-se as premissas do argumento, e a proposição final Q diz-se a conclusão do argumento.

Notação

Um argumento de premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e de conclusão Q é denotado por:

1. Na primeira forma, as premissas vêm separadas por vírgulas, seguidas em sequência pelo símbolo $\vdash$ e finalizadas pela conclusão Q.

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

2. Na segunda forma, tem-se uma estrutura de uma coluna com várias linhas, sendo a última a relativa à conclusão, a qual é separada das demais por um traço.

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \ldots \\ Pn \\ \hline Q \end{array}$$

O argumento que consiste em duas premissas e uma conclusão chama-se silogismo.

Diz-se antecedente o conjunto das premissas e o consequente é a conclusão.

5.2 Validade de um argumento

No tocante a um argumento (dedutivo), diz-se que é válido ou inválido; não podemos dizer se é verdadeiro ou falso, já que as designações de verdadeiro ou falso aplicam-se às premissas.

Simbolicamente:

Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é dito válido se, e somente se, a conclusão Q é verdadeira em todas as vezes que as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são verdadeiras.

Chama-se de sofisma (ou falácia) um argumento não válido.

Lembrete

Sofisma: 1. Raciocínio capcioso, feito com a intenção de enganar. 2. Argumento ou raciocínio falso, com alguma aparência de verdade.

Falácia: 1. Engano, burla. 2. Palavra ou ato enganoso.

Todo o argumento tem um valor lógico, V se for válido (correto, legítimo) ou F se é um sofisma (incorreto, ilegítimo).

> As premissas dos argumentos são verdadeiras ou pelo menos admitidas como tal. Aliás, a lógica só se preocupa com a validade dos argumentos e não com a verdade ou a falsidade das premissas e das conclusões. O importante para a lógica é a forma do raciocínio.
>
> A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, afirmar que um dado argumento é válido significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplos:

Todo carro é azul.

O fusca é um carro.

Logo, o fusca é azul.

Esse é um argumento válido, pois se admite em princípio que as premissas são verdadeiras, logo, se elas fossem verdadeiras, a conclusão também seria. Esse argumento é do tipo

Todo x é y

z é x

---

logo, z é y

Podem-se substituir as variáveis x, y e z por quaisquer palavras, se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também será. Por isso, esse é um argumento válido.

1. Nenhum macaco é banana.

Nenhuma banana tem rabo.

Logo, nenhum macaco tem rabo.

2. Alguns professores são matemáticos.

Alguns matemáticos são altos.

Logo, alguns professores são altos.

Esses são exemplos de argumentos inválidos, pois mesmo nos casos em que as premissas e a conclusão sejam aparentemente verdadeiras, a forma de raciocínio é incorreta. Logo, para a lógica, o importante é a forma do argumento e não o valor lógico das proposições componentes do argumento.

5.2.1 Critério de validade de um argumento

Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a condicional:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ é tautológica.

Exemplo:

O argumento válido $p \vdash p \vee q$ (pois sempre que **p** for válida, a disjunção também o será), assim, os argumentos a seguir também são válidos, pois possuem a mesma forma:

a. $(\sim p \wedge r) \vdash (\sim p \wedge r) \vee (\sim s \rightarrow r)$

b. $(p \rightarrow r \vee s) \vdash (p \rightarrow r \vee s) \vee (\sim r \wedge s)$

Observação

A validade ou não validade de um argumento depende apenas da sua forma, e não de seu conteúdo ou da verdade e falsidade das proposições que o integram.

Logo, diversos argumentos podem ter a mesma forma, e como é a forma que determina a validade, todos os argumentos serão válidos se a forma em questão for válida.

5.2.2 Lista de argumentos válidos fundamentais e/ou regras de inferência

Os argumentos a seguir são considerados argumentos válidos fundamentais; por conseguinte, são usados para validar outros argumentos. Os argumentos fundamentais são utilizados para fazer inferências, ou seja, demonstrações.

A vantagem do uso das regras de inferência em relação à tabela-verdade é que, quando se tem um número elevado de premissas, as tabelas-verdade tornam-se de um tamanho inviável, daí o uso dos argumentos fundamentais para demonstrar a validade de argumentos mais complexos.

Junto às regras, colocam-se as abreviações costumeiramente adotadas.

1. Adição (AD)

   a. $p \vdash p \vee q$;

b. $p \vdash q \vee p$.

2. Simplificação (SIMP)

a. $p \wedge q \vdash p$;

b. $p \wedge q \vdash q$.

3. Conjunção (CONJ)

a. $p, q \vdash p \wedge q$;

b. $p, q \vdash q \wedge p$.

4. Absorção (ABS)

$p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$

5. *Modus ponens* (MP, também conhecida como regra da separação)

$p \rightarrow q, p \vdash q$

6. *Modus tollens* (MT)

$p \rightarrow q, p \vdash \sim p$

7. Silogismo disjuntivo (SD)

a. $p \vee q, \sim p \vdash q$;

b. $p \vee q, \sim q \vdash p$.

8. Silogismo hipotético (SH)

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$.

9. Dilema construtivo (DC)

$p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \vdash q \vee s$

10. Dilema destrutivo (DD)

$p \rightarrow q, r \rightarrow s, \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$.

11. Simplificação disjuntiva (SIMPD)

$p \vee q, p \vee \sim q \vdash p$

12. Disjunção exclusiva (DE)

$p \veebar q, q \vdash \sim q$

13. Eliminação bicondicional (EB)

a. $p \leftrightarrow q, p \vdash q$;

b. $p \leftrightarrow q, q \vdash p$;

c. $p \leftrightarrow q, \sim p \vdash \sim q$;

d. $p \leftrightarrow q, \sim q \vdash \sim p$.

5.2.3 Exemplos do uso das regras de inferência

1. Regra da adição – sendo uma proposição **p** verdadeira, conclui-se que a sua disjunção com qualquer outra proposição é verdadeira.

a. $\dfrac{p}{p \vee \sim q}$

Se p for verdadeira, então $p \vee \sim q$ será verdadeira.

b. $\dfrac{p \wedge q}{(p \wedge q) \vee r}$

Se $p \wedge q$ for verdadeira, então $(p \wedge q) \vee r$ será verdadeira.

c. $\dfrac{x \neq 4}{x \neq 4 \vee x \neq 1}$

Se $x \neq 4$ for verdadeira, então $x \neq 4 \vee x \neq 1$ será verdadeira.

2. Regra da simplificação – se a conjunção $p \wedge q$ é uma proposição verdadeira, pode-se inferir que cada uma das proposições componentes é verdadeira.

a. $\dfrac{(p \vee q) \wedge r}{p \vee q}$

Se a proposição $(p \vee q) \wedge r$ for verdadeira, então $(p \vee q)$ será verdadeira e r também. Logo, pode-se concluir tanto $p \vee q$ como r.

c. $\dfrac{x \in A \wedge x \in B}{x \in A}$

Se a proposição $x \in A \wedge x \in B$ for verdadeira, então $x \in A$ será verdadeira e $x \in B$ também.

3. Regra da conjunção – sendo duas proposições p e q verdadeiras, tidas como premissas, a conjunção delas também o será.

a. $\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$

Sendo verdadeiras tanto a proposição p como a proposição q, a conjunção entre elas também o será.

b. $\begin{array}{c} x > 7 \\ x > 4 \\ \hline x > 4 \wedge x > 7 \end{array}$

Sendo verdadeiras tanto a proposição $x > 7$ como a proposição $x > 4$, a conjunção entre elas também o será.

4. Regra da absorção – sendo verdadeira a proposição $p \rightarrow q$, conclui-se que a proposição $p \rightarrow (p \wedge q)$ também o será.

Se hoje é sexta-feira, então irei sair ($p \rightarrow q$).

Hoje é sexta feira, então hoje e sexta-feira eu irei sair ($p \rightarrow (p \wedge q)$).

Têm-se as proposições p e q abaixo com os seguintes significados:

p = hoje é sexta feira

q = irei sair

5. Regra *modus ponens* – sendo verdadeira a proposição $p \rightarrow q$, conclui-se que a proposição p também o será.

Se hoje é sexta-feira, então amanhã irei ao cinema ($p \rightarrow q$).

Ora, hoje é sexta-feira.

Logo, amanhã irei ao cinema.

Têm-se as proposições p e q abaixo com os seguintes significados:

p = hoje é sexta-feira

q = amanhã irei ao cinema

6. Regra *modus tollens* – sendo verdadeiras as proposições p→q e ~q, conclui-se que a proposição ~p também o será.

a. $$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow \sim q \\ \sim\sim q \end{array}}{\sim p}$$

b. Se hoje for domingo, então irei ao cinema.

Ora, não irei ao cinema.

Logo, hoje não é domingo.

7. Regra do silogismo disjuntivo – sendo verdadeiras as proposições p ∨ q e ~p, conclui-se que a proposição q também o será.

a. $$\frac{\begin{array}{l} x = 3 \vee x = 6 \\ x \neq 6 \end{array}}{x = 3}$$

b. João é professor ou engenheiro.

Ora, João não é professor.

Logo, João é engenheiro.

8. Regra do silogismo hipotético – sendo verdadeiras as proposições p → q e q → r, conclui-se que a proposição p → r também o será.

a. $$\frac{\begin{array}{l} \sim p \rightarrow \sim q \\ \sim q \rightarrow \sim r \end{array}}{\sim p \rightarrow \sim r}$$

b. Se almoço bem, então vou ao cinema.

Se vou ao cinema, então como pipoca.

Se almoço bem, então como pipoca.

9. Regra do dilema construtivo – essa regra trata de duas proposições condicionais mais uma proposição formada pelos disjunção dos antecedentes, o que leva a inferir a disjunção dos consequentes.

a. $$\begin{array}{l} x < y \rightarrow x = 3 \\ x \geq y \rightarrow x > 5 \\ \underline{x < y \vee x \geq y} \\ x = 3 \vee x > 5 \end{array}$$

b. Se o Corinthians vencer, então irei ao cinema.

Se o Palmeiras perder, então ficarei em casa.

Ora, ou o Palmeiras perdeu ou o Corinthians venceu.

Logo, irei ao cinema ou irei ficar em casa.

10. Regra do dilema – essa regra trata-se de duas proposições condicionais mais uma proposição formada pelos disjunção da negação dos consequentes, o que leva a inferir a disjunção da negação dos antecedentes

a. $$\begin{array}{l} x - y = 3 \rightarrow x = 2 \\ y + x = 5 \rightarrow x = 3 \\ \underline{x \neq 2 \vee x \neq 3} \\ x - y \neq 3 \vee y + x \neq 5 \end{array}$$

b. Se João é professor, então Maria é professora.

Se Pedro é médico, então Marta é médica.

Ora, ou Maria não é professora ou Marta não é médica.

Logo, João não é professor ou Pedro não é médico.

6 TÉCNICAS PARA VALIDAÇÃO DE ARGUMENTOS

6.1 Validação através de tabelas–verdade

Introdução

Relembramos aqui que, para a lógica tradicional, o tema de maior interesse são os argumentos, e o mais importante neles é a sua forma, isto é, a forma raciocínio construída nos argumentos.

As tabelas-verdade são um dos instrumentos que podem ser usados para demonstrar a validade de qualquer argumento. A desvantagem desse método está na dificuldade de lidar com um número de premissas grande; porém, para uma quantidade pequena de proposições, é excelente.

Para construir-se uma tabela-verdade para validar um argumento procede-se de maneira semelhante aos passos normais, isto é, inicialmente, colocam-se as colunas referentes às proposições simples, em seguida, vêm as proposições relativas às premissas e, por fim, a coluna relativa à conclusão.

Note que não é necessário que a coluna da conclusão seja aquela mais à direita, ela pode ser uma coluna intermediária na tabela ou até mesmo a primeira.

Após a construção da tabela-verdade para se verificar se o argumento é válido, deve-se procurar pelas linhas em que todas as premissas possuem valor lógico verdadeiro. Se em algumas dessas linhas o valor lógico da conclusão for falso (inválido), então o argumento será inválido; porém, se em todas as linhas em que as premissas possuem valor lógico verdadeiro e a conclusão também possuir valor lógico verdadeiro, então o argumento será válido.

Colocando-se em forma simbólica o que foi dito, temos:

Dado um argumento:

$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$

Deve-se verificar se é ou não possível ter $V(Q) = F$ quando $V(P_1) = V(P_2) = V(P_n) = V$.

O procedimento prático consiste em construir uma tabela-verdade, identificando inicialmente as proposições simples que ocuparão as primeiras colunas; em seguida, uma coluna para cada premissa P_i e, por fim, uma coluna para a conclusão.

O procedimento de validação consiste em identificar linhas em que os valores lógicos das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são todos V. Nessas linhas, o valor lógico da conclusão Q deve ser também V para que o argumento dado seja válido. Se, em pelo menos uma dessas linhas o valor lógico da conclusão Q for F, então o argumento dado é não válido, ou seja, é um sofisma (falácia).

Alternativamente, demonstrar a validade do argumento dado consiste em construir a tabela-verdade da condicional associada ao argumento:

Como já visto, dado o argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$, a condicional associada é $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$.

Se, nessa tabela-verdade relativa à condicional associada, verifica-se que essa condicional é uma tautologia, isto é, para a coluna referente à proposição Q todos os valores lógicos são verdadeiros, então o argumento dado é válido. Caso contrário, é inválido, ou seja, um sofisma.

Exemplos adaptados de Alencar Filho (2002):

1. Verificar a validade dos argumentos dados a seguir:

Dão-se como exemplo dois argumentos aparentemente distintos, porém, observando-se com detalhe, nota-se que possuem a mesma forma de raciocínio.

a. Se $a = 3$ e $b = c$, então $b > 2$
   $b \leq 2$
   ____
   Portanto, $b \neq c$

b. Se João tem 2 m de altura e Maria tem a altura de Pedro, então Maria tem 1,8 m de altura.

A altura do Pedro é menor que 1,8 m.

Portanto, Maria e Pedro não têm a mesma altura.

Solução:

Inicialmente, identificam-se as proposições simples envolvidas em todas as proposições do argumento dado.

No caso do item A, identificam-se três proposições simples:

$a = 3$; $b = c$; $b > 2$

Representando-as respectivamente por p, q e r, pode-se então escrever o argumento do item A da seguinte forma simbólica:

$p \wedge q \rightarrow r, \sim r \vdash \sim q$

No caso do item B, identificam-se três proposições simples:

João tem 2 m de altura.

Maria tem a altura de Pedro.

Maria tem 1,8 m de altura.

Analogamente, como no item A, representando essas proposições respectivamente por p, q e r, pode-se então escrever o argumento da seguinte forma simbólica:

$p \wedge q \rightarrow r, \sim r \vdash \sim q$

Para verificar os argumentos dos itens A e B, construir-se-á a tabela-verdade referente a ambos. Para isso, inicialmente colocam-se as colunas referentes às proposições simples componentes; depois insere-se uma coluna auxiliar com a conjunção de p e q; na sequência, colocam-se as premissas e a conclusão, respectivamente.

Quadro 44

				Premissa 1	Premissa 2	Conclusão	
p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$	$\sim r$	$\sim q$	
V	V	V	V	V	F	F	
V	V	F	V	F	V	V	
V	F	V	F	V	F	F	
V	F	F	F	V	V	V	← 4
F	V	V	F	V	F	F	
F	V	F	F	V	V	F	← 6
F	F	V	F	V	F	F	
F	F	F	F	V	V	V	← 8

As premissas do argumento dado estão nas colunas 5 e 6, e a conclusão na coluna 7.

As premissas são verdadeiras (V) nas linhas 4, 6 e 8. Nas linhas 4 e 8, a conclusão também é verdadeira (V), porém, na linha 6, a conclusão é falsa (F), isto é, essa linha está afirmando que a falsidade da conclusão é compatível com a verdade das premissas. Logo, o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma ou falácia.

Observação

Para se demonstrar que um argumento é inválido, basta encontrar um argumento da mesma forma com premissas verdadeiras e conclusão falsa. Essa maneira de demonstrar a não validade de um argumento chama-se **método do contraexemplo**.

Por exemplo (ALENCAR FILHO, 2002), baseado no argumento do item A, tem-se o seguinte argumento, que possui a mesma forma de raciocínio daquele:

Se $3 = 8$ e $2 = 2$, então $2 > 3$
$2 \leq 3$

Portanto, $2 \neq 2$

A primeira premissa é verdadeira (V) porque o seu antecedente é falso (lembre-se da tabela-verdade da condicional), e a segunda premissa é claramente verdadeira (V), mas a conclusão é irrefutavelmente falsa (F). Logo, esse argumento é um contraexemplo que prova que o argumento dado é não válido, ou seja, um sofisma.

2. Verificar se é válido o argumento : $p \to q, \sim p \vdash \sim q$.

Quadro 45

		Premissa 1	Premissa 2	Conclusão	
p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim q$	
V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	
F	V	V	V	F	← 3
F	F	V	V	V	← 4

Note-se que as primeiras colunas foram destinadas às proposições simples componentes de todas as proposições envolvidas no argumento. As premissas do argumento estão nas colunas 3 e 4, e a conclusão na coluna 5. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 3 e 4. Na linha 4 a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 3 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma.

Observação

Essa forma de argumento não válido apresenta certa semelhança com a forma de argumento válido *modus tollens*. Tem o nome de "sofisma de negar o antecedente".

3. Verificar se é válido o argumento: $p \to q, q \vdash p$.

Quadro 46

Conclusão	Premissa 2	Premissa 1	
p	q	$p \to q$	
V	V	V	← 1
V	F	F	
F	V	V	← 3
F	F	V	

As premissas do argumento dado estão nas colunas 2 e 3, e a conclusão na coluna 1. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 1 e 3. Na linha 1, a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 3 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado não é válido, é um sofisma.

Observação

Essa forma de argumento não válido apresenta certa semelhança com a forma de argumento válido *modus ponens*. Tem o nome de "sofisma de afirmar o consequente".

4. Verificar a validade do argumento: $p \vee q, \sim q, p \rightarrow r \vdash r$.

Quadro 47

			P_1	P_2	Q	P_3	
p	q	r	$p \vee q$	$\sim q$	$\sim q$	$p \rightarrow r$	
V	V	V	V	F	F	V	
V	V	F	V	F	F	F	
V	F	V	V	V	V	V	$\leftarrow$ 3
V	F	F	V	V	V	F	
F	V	V	V	F	F	V	
F	V	F	V	F	F	V	
F	F	V	F	V	V	V	
F	F	F	F	V	V	V	

As premissas do argumento dado estão nas colunas 4, 5 e 6, e a conclusão na coluna 3. As três premissas são verdadeiras (V) somente na linha 3, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V), isto é, não é possível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Logo, o argumento dado é válido.

5. Verificar a validade do argumento : $p \leftrightarrow q, q \vdash p$.

Quadro 48

Conclusão	Premissa 2	Premissa 1
p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

As premissas do argumento dado estão nas colunas 2 e 3, e a conclusão na coluna 1. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente na linha 1, e nesta linha, a conclusão também é verdadeira (V), isto é, não é possível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Logo, o argumento dado é válido.

6. Verificar se é válido o argumento : $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q \vee r$.

Neste item, será verificada a validade ou não do argumento utilizando-se o recurso da condicional associada ao argumento sob análise, logo, para este caso, a condicional associada ao argumento objeto de análise é:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$

Quadro 49

			P_1		Q	Condicional Associada	
p	q	r	$p \rightarrow q$	qVr	$p \rightarrow q \vee r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$	
V	V	V	V	V	V	V	← 1
V	V	F	V	V	V	V	← 2
V	F	V	F	V	V	V	← 3
V	F	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	V	V	← 5
F	V	F	V	V	V	V	← 6
F	F	V	V	V	V	V	← 7
F	F	F	V	F	V	V	← 8

Na última coluna dessa tabela-verdade, a referente à condicional associada, encontra-se somente a letra V (verdade). Logo, a "condicional associada" é tautológica e, por conseguinte, o argumento dado é válido.

Observando-se as linhas 1, 2, 5, 6, 7, 8, nota-se, como era de se esperar, que, para premissas verdadeiras, a conclusão é sempre verdadeira, o que torna o argumento válido. A linha 3 em destaque sinaliza que, de uma premissa falsa, obteve-se uma conclusão verdadeira, mas isso não invalida o argumento, pois de uma premissa falsa pode-se chegar a uma conclusão verdadeira.

7. Verificar a validade do argumento:

Se correr, então Vinicius fica suado.

Vinicius não ficou suado.

Logo, Vinicius não correu.

Escreva-se então o argumento na forma simbólica, em que as proposições serão representadas pelos seguintes significados: "p = correr", q = "Vinicius fica suado".

$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$

Visto que esse argumento está na forma *modus tollens*, pode-se concluir, pela regra de inferência, imediatamente que se trata de um argumento válido. Porém, segue-se a tabela-verdade, que corrobora essa conclusão.

Quadro 50

		Q	P_2	P_1	
p	q	~p	~q	p→q	
V	V	F	F	V	← 1
V	F	F	V	F	
F	V	V	F	V	← 3
F	F	V	V	V	← 4

As premissas do argumento dado estão nas colunas 4 e 5, e conclusão na coluna 3. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente na linha 4, e nessa linha conclusão também é verdadeira (V). Logo, o argumento válido.

8. Verificar a validade do argumento:

Se 9 não é ímpar, então 7 não é primo.

Mas 9 é ímpar.

Logo, 7 é primo.

Primeiramente, passa-se o argumento dado para a forma simbólica. Representando por p a proposição "9 é impar" e por q a proposição "7 é primo", tem-se:

$\sim p \rightarrow \sim q,\ p \vdash q$

Quadro 51

P_2	Q			P_1	
p	q	~p	~q	~ p → ~q	
V	V	F	F	V	← 1
V	F	F	V	V	← 2
F	V	V	F	F	
F	F	V	V	V	

As premissas do argumento dado estão nas colunas 1 e 5, e a conclusão na coluna 2.

As premissas verdadeiras (V) estão nas linhas 1 e 2, mas na linha 2 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado é um sofisma, embora tenha premissas e conclusão verdadeiras na outra linha.

9. Verificar se é válido o argumento: $\sim p \rightarrow q,\ p \vdash \sim q$.

Neste item, será verificada a validade ou não do argumento utilizando-se o recurso da condicional associada ao argumento sob análise. Logo, para este caso, a condicional associada ao argumento objeto de análise é:

$((\sim p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q$

Quadro 52

P_2		Q	P_1		Condicional associada	
p	q	~p	$\sim p \rightarrow q$	$(\sim p \rightarrow q) \wedge p$	$((\sim p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q$	
V	V	F	V	V	F	← 1
V	F	F	V	V	V	
F	V	V	V	F	V	
F	F	V	F	F	V	

Na última coluna desta tabela-verdade relativa à condicional associada, têm-se as letras V e F. Logo, a condicional associada não é tautológica e, por conseguinte, o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma ou falácia.

Da mesma forma, pode-se observar na segunda linha que há premissas verdadeiras e uma conclusão falsa, ou seja, a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão, o que corrobora a não validade do argumento.

10. Verificar se é válido o argumento:

Se 5 é primo,então 5 não divide 15.

5 divide 15.

Logo, 5 não é primo.

Convertendo-se as proposições para sua fórmula simbólica, representar-se-á por p a proposição "5 é primo" e por q a proposição "5 divide 15", assim escreve-se:

$p \rightarrow \sim q, q \vdash \sim p$

Quadro 53

	P_2	Q		P_1	
p	q	~p	~q	$p \rightarrow \sim q$	
V	V	F	F	F	← 1
V	F	F	V	V	
F	V	V	F	V	← 3
F	F	V	V	V	

As premissas do argumento dado estão nas colunas 2 e 5, e a conclusão na coluna 3. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente na linha 3, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V). Logo, o argumento válido.

Observe-se neste exemplo que se sabe que nosso argumento em questão não cai no caso de premissas verdadeiras e conclusão verdadeira. O argumento é visualizado na linha 1 da tabela, onde se tem a primeira premissa falsa, a segunda premissa verdadeira e uma conclusão obviamente falsa, contudo, para essa forma de raciocínio apresentada no argumento em questão, quando as premissas forem ambas verdadeiras, a conclusão também o será.

11. Verificar se é válido o argumento:

Se um homem é baixo, ele é complexado.

Se um homem é complexado, fica doente.

Logo, os homens baixos ficam doentes.

Escreva-se então o argumento na forma simbólica, em que as proposições serão representadas pelos seguintes significados: "p = Ele é baixo", q = "Ele é complexado" e r = "Ele fica doente".

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

De imediato, pode-se concluir que é um argumento válido, pois tem a forma de um silogismo hipotético.

Quadro 54

			P_1	P_2	Q	
p	**q**	**r**	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	
V	V	V	V	V	V	← 1
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	F	V	V	
V	F	F	F	V	F	
F	V	V	V	V	V	← 5
F	V	F	V	F	V	
F	F	V	V	V	V	← 7
F	F	F	V	V	V	← 8

As premissas do argumento dado estão nas colunas 4 e 5, e a conclusão na coluna 6. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente nas linhas 1, 5, 7, 8, e nessas linhas a conclusão também é verdadeira (V). Logo, o argumento válido.

12. Verificar a validade do argumento.

Se 13 é menor que 8, então 13 não é primo.
13 não é menor que 8.

Logo, 13 é primo.

Convertam-se as proposições do argumento a sua forma simbólica. Para tanto, faça-se p igual à proposição "13 é menor que 8" e q à proposição "13 é primo". Do que se escreve a seguinte expressão:

$p \rightarrow \sim q, \sim p \vdash q$

Quadro 55

	Q		P_1	P_2	
p	q	~q	p→~q	~p	
V	V	F	F	F	
V	F	V	V	F	
F	V	F	V	V	← 3
F	F	V	V	V	← 4

As premissas do argumento dado estão nas colunas 4 e 5, e a conclusão na coluna 2. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 3 e 4, mas na linha 4 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado é um sofisma, embora tenha premissas e conclusão verdadeiras, pois existe pelo menos um caso inválido.

6.2 Validade mediante regras de inferência

A seguir, apresenta-se um quadro resumido dos argumentos fundamentais usados para a inferência da validade ou não dos argumentos. À esquerda, colocou-se o símbolo principal da regra, para auxiliar a encontrar a regra mais adequada à dedução do argumento.

Quadro 56

Tabela resumida das regras de inferência		
Símbolo	Nome da regra	Regra
$\vee$	Adição (AD)	a) $p \vdash p \vee q$; b) $p \vdash p \vee q$
	Silogismo disjuntivo (SD)	a) $p \vee q, \sim p \vdash q$; b) $p \vee q, \sim q \vdash p$
	Simplificação disjuntiva (SIMPD)	$p \vee q, p \vee \sim q \vdash p$
$\wedge$	Simplificação (SIMP)	a) $p \wedge q \vdash p$; b) $p \wedge q \vdash q$
	Conjunção (CONJ)	a) $p, q \vdash p \wedge q$; b) $p, q \vdash q \wedge p$
$\rightarrow$	Absorção (ABS)	$p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$
	Modus ponens (MP)	$p \rightarrow q, p \vdash q$
	Modus tollens (MT)	$p \rightarrow q, p \vdash \sim p$
	Silogismo hipotético (SH)	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
	Dilema construtivo (DC)	$p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \vdash q \vee s$
	Dilema destrutivo (DD)	$p \rightarrow q, r \rightarrow s, \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$
$\underline{\vee}$	Disjunção exclusiva (DE)	$p \underline{\vee} q, q \vdash \sim q$
$\leftrightarrow$	Eliminação bicondicional (EB)	a) $p \leftrightarrow q, p \vdash q$; b) $p \leftrightarrow q, q \vdash p$ c) $p \leftrightarrow q, \sim p \vdash \sim q$; d) $p \leftrightarrow q, \sim q \vdash \sim p$

O método das tabelas-verdade permite demonstrar a validade de qualquer argumento, porém sua utilização torna-se mais trabalhosa à medida que aumenta o número de proposições simples componentes dos argumentos. Para testar, por exemplo, a validade de um argumento com seis proposições simples componentes, é necessário construir uma tabela-verdade com 2^6 =

> 64 linhas, o que consumiria muito tempo e facilmente está sujeita a erros (ALENCAR FILHO, 2002).

Um método mais eficiente para demonstrar a validade de um dado argumento $P_1, P_2,..., P_n \vdash Q$ é o uso das regras de inferência, ou seja, dos argumentos fundamentais.

O método consiste em dispor verticalmente as premissas e numerá-las linha a linha. Essa numeração será usada para referenciá-las durante o processo de inferência. Após a última premissa, como de costume, passa-se o traço horizontal separando as premissas das regras de inferência que se seguirão ao traço. Abaixo do traço, inicia-se o processo sucessivo de inferir de cada premissa elementos que nos conduzam à conclusão. Presume-se que as premissas são sempre verdadeiras se for possível obter o valor lógico da conclusão igual à verdade, então o argumento será válido.

Colocando em passos:

1. Disponha as premissas uma em cada linha.
2. Numere as linhas.
3. Identifique os principais conectivos de cada premissa.
4. Sempre presuma que as premissas são verdadeiras.
5. Comece com as premissas que tenham uma fórmula mais simples.
6. Infira de cada premissa os valores lógicos de suas proposições componentes.
7. A cada valor lógico encontrado substitua-o nas premissas mais complexas.
8. Obtenha todos os valores lógicos possíveis.
9. No final, você deve ser capaz de afirmar que o valor lógico da conclusão é verdadeiro para que o argumento seja válido; do contrário o argumento será inválido.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

1. Verificar a validade do argumento : $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q$.

Solução:

Aplicar-se-á os passos básicos para a construção.

a. Na linha (1), coloca-se a condicional e na (2) a conjunção.

b. Na linha (2), a conjunção parece ser mais simples que a condicional.

c. Na linha (2), tem-se a conjunção da proposição p e r.

d. Olhando na tabela de regras de inferência pelo símbolo $\wedge$, vê-se que dessa proposição pode-se concluir p ou r, isto é, tanto p como r devem ser verdadeiros para que a proposição seja verdadeira. Como p aparece também na linha (1) e r não, logo, da segunda conclui-se p, por isso na linha (3) aparece p, que foi concluído através da linha (2) usando a regra da simplificação.

e. Agora, presumindo-se p = V na linha (1), onde se tem uma condicional que deve ser verdadeira, percorre-se a tabela de inferência e nota-se que a *modus ponens* é a regra, de onde concluo q, que é a conclusão a qual se deve atingir. Assim, da linha (1) e linha (3), junto com a *modus ponens*, conclui-se que q é verdadeiro quando (1) e (2) são verdadeiros. Se não se conseguisse afirmar o valor, então o argumento seria inválido, pois a conclusão poderia assumir qualquer um dos valores lógicos V ou F.

$$\begin{array}{l} (1) p \rightarrow q \\ (2) p \wedge r \\ \hline (3)\ p\ \ 2-\text{SIMP} \\ (4)\ q\ \ 1,3-\text{MP} \end{array}$$

2. Verificar que é válido o argumento: $p \wedge q,\ p \vee r \rightarrow s \vdash p \wedge s$

Solução:

a. Colocam-se as premissas em linhas separadas e numeradas.

b. Na linha (1), coloca-se a conjunção e na (2) uma disjunção e uma condicional.

c. Na linha (1), a conjunção parece ser mais simples que a da linha (2).

d. Na linha (1), tem-se a conjunção da proposição p e q.

e. Olhando-se a tabela de regras de inferência pelo símbolo $\wedge$, vê-se que dessa proposição pode-se concluir p ou q, isto é, tanto p como q devem ser verdadeiros para que a proposição seja verdadeira. Como p aparece também na linha (2) e q não, logo, da primeira linha conclui-se p pela regra da simplificação, por isso, na linha (3) aparece p, que foi concluído através da linha (1) usando a regra da simplificação.

f. Agora, presumindo-se p = V na linha (2), onde se tem uma condicional e a disjunção. A proposição p interfere na disjunção, então, pela regra da adição, pode-se inferir que a disjunção será válida. Logo, da linha (3) pode-se concluir que a disjunção da linha (2) será sempre verdadeira.

g. Na linha (2), a disjunção é verdadeira, logo, para que a condicional seja verdadeira, necessariamente s tem que ser verdadeiro pela regra *modus pollens*, assim, das linhas (2) e (4) pode-se concluir que s é verdadeiro.

h. Sobre a conclusão, pode-se afirmar, então, com base na regra da conjunção e das linhas (3) e (5), que ela será verdadeira. Logo, como é possível fazer essa afirmação, sem dúvidas, nosso argumento é válido.

1. $p \wedge q$

2. $p \vee r \rightarrow s$

---

3. p	1 – SIMP
4. $p \vee r$	3 – AD
5. s	2,4 – MP
6. $p \wedge s$	3,5 – CONJ

3. Verificar a validade do argumento:

$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

Solução:

a. Colocam-se as premissas em linhas separadas e numeradas.

b. Na linha (1), coloca-se a condicional, na (2), outra condicional e na (3) a proposição p.

c. Obviamente, a linha (3) é a mais simples, e dela conclui-se que p é verdadeiro.

d. Da linha (3), pode-se concluir com base na regra *modus pollens* que a condicional $q \rightarrow r$ é verdadeira, para que toda a proposição também seja. Como a conclusão é apenas baseada na proposição r e somente q tem relação direta com r, se for encontrado o valor lógico de q, se poderá realizar a afirmação relativa a r.

e. Da linha (3) e da regra *modus pollens*, com base na linha (2), pode-se concluir que a proposição q é verdadeira.

f. Logo, da linha (4), que afirma que $q \rightarrow r$ é verdadeira, e da linha (5), onde se tem que q é verdadeiro usando-se novamente a *modus pollens*, pode-se concluir que r será forçosamente verdadeiro, por isso o argumento é válido.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

2. $p \rightarrow q$

3. p

---

4. $q \rightarrow r$ 1,3 – MP

5. q 2,3 – MP

6. r 4,5 – MP

5. Verificar a validade do argumento:

$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$

a. Colocam-se as premissas em linhas separadas e numeradas.

b. Na linha (1), coloca-se a condicional, na (2) a negação.

c. Da linha (2), verifica-se que q deve ser falsa para a premissa ser verdadeira, porém, se q é falso, não há como tornar a premissa (1) verdadeira, pois em uma condicional, se o antecedente for falso, o consequente será verdadeiro necessariamente, e se o antecedente for verdadeiro, o consequente deve ser verdadeiro para que a proposição se torne verdadeira, porém, não é o caso. Logo, cai-se em contradição, o que leva à conclusão de que o argumento é inválido.

Solução:

1. $p \rightarrow q$

2. $\sim q$

---

3. Inválido, pois as proposições estão se contradizendo, por isso, não foi possível entrar uma regra de inferência.

Álgebra de Boole

Em meados do século XIX, George Boole (1815-1864), em seus livros *A análise matemática da lógica* (1847) e *Uma investigação das leis do pensamento* (1854), desenvolveu a ideia de que as proposições lógicas poderiam ser tratadas por ferramentas matemáticas. Segundo Boole, essas proposições podem ser representadas por símbolos e a teoria para trabalhar com esses símbolos, suas entradas (variáveis) e saídas (respostas) é a lógica simbólica desenvolvida por ele.

Já no século XX, a álgebra booleana foi de grande importância prática, relevância que continua até hoje, na era da informação digital (por isso falamos da lógica digital). Graças a ela, Shannon (1930) foi capaz de formular sua teoria da codificação e John Von Neumann, de articular o modelo de arquitetura que define a estrutura interna de computadores da primeira geração.

7 EMBASAMENTO PARA A LÓGICA DOS PREDICADOS

7.1 Sentenças abertas

Note-se a seguinte sentença, em que x é uma variável:

"x é menor que 8"

Para essa sentença, não é possível atribuir um valor lógico de verdadeiro ou falso, pois não se tem conhecimento do valor de x, por isso, essa sentença não é uma proposição. Porém, se for atribuído um valor a x, por exemplo, 45, a sentença será "45 é menor que 8", pode ser dita como falsa, logo, chamada de proposição. As sentenças desse tipo que possuem uma ou mais variáveis e que não podem ser avaliadas como verdadeiras ou falsas são denominadas de sentenças abertas.

As sentenças abertas não são apenas aquelas que envolvem variáveis numéricas, elas podem representar outros tipos de valores, por exemplo, pessoas ou cidades. Diga-se "y é a capital de São Paulo". Se a y atribuir-se o conteúdo "São Paulo", a sentença será verdadeira, caso contrário, será falsa.

As sentenças abertas podem possuir uma quantidade de variáveis qualquer. Outra maneira de usá-las é quando utilizam-se frases fora de um contexto, Por exemplo: "Ele foi jogador do Corinthians". Obviamente, não se pode afirmar se a sentença é verdadeira ou falsa, pois não se sabe quem é ele, porém, em um contexto determinado: "Rivelino foi um craque. Ele foi jogador do Corinthians", sabe-se que o "Ele" se refere a Rivelino, logo, no caso, pode-se afirmar que a frase é verdadeira.

7.2 Revisão de teoria dos conjuntos

Definição de conjunto: é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados elementos do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada. Em outras palavras, é uma **coleção não ordenada** de objetos.

Exemplo:

A = {branco, azul, amarelo}.
Em um conjunto, a ordem dos elementos não importa e cada elemento deve ser listado apenas uma vez.

Pode-se definir um conjunto de diferentes formas:

Denotação por extensão: os elementos são listados exaustivamente.

Exemplo:

Vogais = {a, e, i, o, u}

Denotação por compreensão: definição de um conjunto por propriedades comuns aos objetos. De forma geral, escreve-se $\{x \mid P(x)\}$, onde P(x) representa a propriedade.

Exemplo:

Pares = $\{n \mid n \text{ é par}\}$, que representa o conjunto de todos os elementos n, tal que n é um número par.

Ainda podemos especificar um conjunto omitindo alguns elementos que estão implícitos na notação adotada. Veja exemplos:

Dígitos = $\{0, 1, 2, 3,..., 9\}$.

Pares = $\{0, 2, 4, 6,...\}$.

Relação de pertinência

Se "a" é elemento de um conjunto A, então podemos escrever: "a" $\in$ A e diz-se que "a" pertence ao conjunto A.

Se "a" não é elemento de um conjunto A, então podemos escrever: "a" $\notin$ A e diz-se que "a" não pertence ao conjunto A.

Exemplos:

Considerando o conjunto Vogais = $\{a, e, i, o, u\}$, pode-se dizer que:

- e $\in$ Vogais;
- m $\notin$ Vogais.

Considerando o conjunto B = $\{x \mid x \text{ é brasileiro}\}$, temos que:

- Pelé $\in$ B.
- Bill Gates $\notin$ B.

Alguns conjuntos importantes

O conjunto vazio é um conjunto que não possui elementos e pode ser denotado por $\varnothing$ ou $\{\ \}$.

Ainda temos:

- N, que representa o conjunto dos números naturais;
- Z, que representa o conjunto dos números inteiros;

- Q, que representa o conjunto dos números racionais;
- I, que representa o conjunto dos números irracionais;
- R, que representa o conjunto dos números reais;
- C, que representa o conjunto dos números complexos.

Definição de alfabeto: um alfabeto é um conjunto finito, ou seja, um conjunto que pode ser denotado por extensão. Os elementos de um alfabeto são chamados de símbolos ou caracteres.

Definição de palavra: uma palavra sobre um alfabeto é uma sequência finita de símbolos do alfabeto, justapostos.

Exemplos:

- $\varnothing$ é um alfabeto;
- $\{a, b, c, d\}$ é um alfabeto;
- N não é um alfabeto;
- *e* é uma palavra sobre {a, b, c].

Relação de inclusão

Se todos os elementos de um conjunto A são também elementos de um conjunto B, então dizemos que:

$A \subseteq B$ - A está contido em B,

ou que

B $\leftarrow$A - B contém A.

Neste caso, podemos dizer que **A é um subconjunto de B**.

Por outro lado, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, ou seja, existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, então diz-se que:

$A \subset B$ A está contido propriamente em B,

ou que

$B \supset A$ B contém propriamente A.

Neste caso, dizemos que **A é um subconjunto próprio de B**.

Exemplos:

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{3, 2, 1\}$;
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$;
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

Definição de conjunto universo: denotado por U, é o conjunto que contém todos os conjuntos que estão sendo considerados, ou seja, define o contexto de discussão. Dessa forma, U não é um conjunto fixo e, para qualquer conjunto A, temos que $A \subseteq U$.

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos A e B são ditos iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos, ou seja:

$A = B$, ou seja, $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

Exemplos:

- $\{0,1,2\} = \{x \in N \mid x \geq 0 \wedge x < 3\}$,
- $N = \{x \in Z\ x \geq 0\}$,
- $\{a, b, c\} = \{a, b, b, c, c, c\}$.

Pertinência x Inclusão

Os elementos de um conjunto podem ser conjuntos.

Exemplos:

Considere o conjunto $S = \{a, b, c, d, \varnothing, \{0\}, \{1, 2\}\}$. Então:

- $\{a\} \subseteq S$;
- $\{a\} \notin S$;
- $\varnothing \in S$;
- $\varnothing \subseteq S$;
- $\{0\} \in S$;
- $\{1,2\} \subseteq S$;
- $\{a, b, c, d\} \notin S$;
- $\{a, b, c, d\} \subseteq S$;

Podem-se representar conjuntos e suas operações através de figuras geométricas, como elipses e retângulos, os **diagramas de Venn**.

Usualmente, os retângulos são utilizados para representar o conjunto universo e as elipses para representar os demais conjuntos.

Conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$.

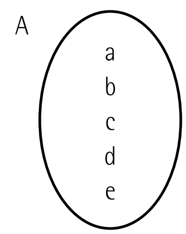


Figura 12

Conjunto $A \subseteq B$.

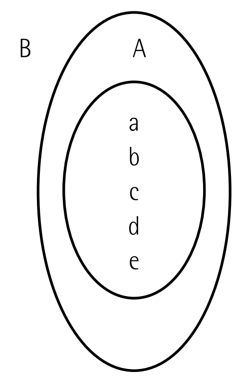


Figura 13

Conjunto $A \subseteq U$.

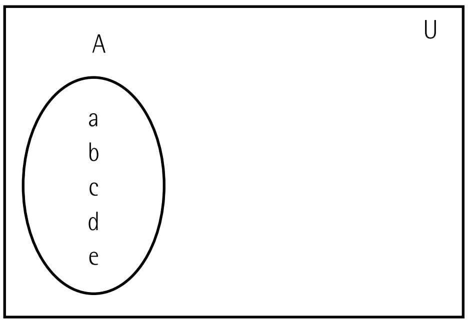


Figura 14

7.3 Sentença aberta

> Dá-se o nome de sentença aberta de uma variável em um conjunto **A** ou apenas sentença aberta em A a uma expressão p(x) tal que p(a) é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo $a \in A$. Isto é, p(x) é uma sentença aberta em A se e somente se p(x) torna-se uma proposição (falsa ou verdadeira) todas as vezes que se substitui a variável x por qualquer elemento a do conjunto A($a \in A$) (ALENCAR FILHO, 2002).

O conjunto A recebe o nome de conjunto universo ou domínio da variável x. Aos elementos $a \in A$ dá-se o nome de valor da variável x.

Se $a \in A$ é tal que p(a) é uma proposição verdadeira (V), diz-se que a satisfaz ou verifica p(x).

Dá-se o nome de **função proposicional** a uma sentença aberta com uma variável cujos valores possíveis estão em um conjunto A (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplos

a. $y + 4 > 10$;

b. x é divisor de 50;

c. z não é primo;

d. k é múltiplo de 7;

e. u é capital da Argentina;

f. Ele é presidente da Guatemala.

7.3.1 Conjunto-verdade de uma sentença aberta com uma variável

Dá-se o nome de conjunto verdade de uma sentença aberta p(x) em um conjunto A ao conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que p(a) é uma proposição verdadeira (V). Obviamente, o conjunto verdade é um subconjunto do conjunto A.

Esse conjunto representa-se por V_p.

Em símbolos:

$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p\,(x) \text{ é } V\}$

ou seja:

$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$ ou $V_p = \{x \in A \mid p(x)\}$

O conjunto-verdade V_p de uma sentença aberta p(x) em A é sempre um subconjunto do conjunto $A (V_p \subset A)$.

Exemplos:

Nos exemplos a seguir, N é conjunto dos números naturais, ou seja, $\{0,1,2,...\}$.

1. Seja a sentença aberta "x + 4 > 7" em N. O conjunto verdade é:

$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 4 > 7\} = \{4, 5, 6,...\} \subset N$

Neste caso, tem-se como conjunto-verdade um subconjunto de N com infinitos valores.

2. Para a sentença aberta "x + 10 < 3" em N, o conjunto-verdade é:

$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 10 < 3\} = \{-8, -9, -10,...\} = \varnothing \subset N$

Neste caso, tem-se como conjunto-verdade o conjunto vazio, e pela definição de conjunto vazio, ele está contido em qualquer conjunto.

3. O conjunto verdade em N da sentença aberta "x + 2 > 1" é:

$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 2 > 1\} = \{0, 1,...\} = N \subset N$

Neste exemplo, o conjunto-verdade coincidiu com o domínio da variável e, logo, com infinitos valores.

4. Para a sentença aberta "x é divisor de 4" em N, temos:

$Vp \{x \mid x \in N \wedge x \text{ é divisor de } 4\} = \{1, 2, 4\} \subset N$

Neste caso, tem-se como conjunto-verdade um subconjunto de N, com uma quantidade finita de valores.

Se p(x) é uma sentença aberta em um conjunto A, três casos podem ocorrer:

a) Se p(x) é verdadeira para todo $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p coincide com o universo A da variável x, ou seja, $V_p = A$, então p(x) é uma condição universal ou uma propriedade universal no conjunto A.

b) Se p(x) é verdadeira somente para alguns $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p é um subconjunto próprio do universo A da variável x, ou seja, $V_p \subset A$, então p(x) é uma condição possível ou uma propriedade possível no conjunto A.

c) Se p(x) é falso para todo x ∈ A, isto é, o conjunto-verdade V_p é vazio, ou seja, Vp = ∅, então p(x) é uma condição impossível ou uma propriedade impossível no conjunto A (ALENCAR FILHO, 2002).

7.3.2 Sentenças abertas com duas variáveis

Sejam A e B dois conjuntos, uma sentença aberta com duas variáveis em A x B (A cartesiano B) é uma expressão p(x, y) tal que p(a, b) é falsa ou verdadeira para todo o par ordenado (a, b) ∈ A x B.

O conjunto A x B recebe o nome de conjunto universo ou domínio das variáveis x e y, e qualquer elemento (a, b) de A x B é denominado um par de valores das variáveis x e y.

Se (a, b) ∈ A x B é tal que p(a, b) é uma proposição verdadeira, então diz-se que (a, b) satisfaz ou verifica p(x, y).

Uma sentença aberta com duas variáveis em A x B também se chama função proposicional com duas variáveis em A x B ou, simplesmente, função proposicional em A x B.

Exemplos adaptados de Alencar Filho (2002):

Sejam os conjuntos A $\{1, 2, 3\}$ e B = $\{5, 6\}$ e as seguintes sentenças abertas a seguir.

a. x é menor que y;

b. y é o dobro de x.

O par ordenado (3, 5) ∈ A x B, por exemplo, satisfaz (a), pois $3 < 5$, e o par ordenado (3, 6) ∈ A x B satisfaz (b). O par (3,5) não satizfaz b.

7.3.3 Conjunto-verdade de uma sentença aberta com duas variáveis

O conjunto-verdade de uma sentença aberta p(x, y) em A x B é o conjunto de todos os elementos (a, b) ∈ A x B tais que p(a, b) é uma proposição verdadeira (ALENCAR FILHO, 2002). Este conjunto representa-se por V_p.

Em símbolos:

$$V_p = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x,y)\}$$

ou, simplesmente:

$$V_p \ \{(x,y) \in A \times B \mid p(x,y)\}$$

O conjunto-verdade Vp de uma sentença aberta p(x, y) em A x B é sempre um subconjunto do conjunto A x B, ou seja, $V_p \subset A \times B$ (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplos:

1. Qual é o conjunto-verdade da sentença aberta "$x \leq y$" em A x B quando A e B são A = $\{1,2,3,4,5\}$ e B $\{1,2,3\}$ respectivamente.

$Vp = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x \leq y\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\} \subset A \times B$

2. O conjunto-verdade da sentença aberta "$x + y \geq 0$" em N x N, sendo N o conjunto dos números naturais, é:

$V \{(x,y) \mid x,y \in N \wedge x + y \leq 0\} = NxN \subset N \times N$

Esse exemplo resultou em um conjunto infinito de valores, e ainda esse conjunto é o próprio universo.

2. O conjunto-verdade da sentença aberta "$x + y < 0$" em N x N, sendo N o conjunto dos números naturais, é:

$V \{(x,y) \mid x,y \in N \wedge x + y < 0\} = \varnothing \subset N \times N$

Esse exemplo resultou em um conjunto vazio, pois obviamente não é possível obter-se um numero menor que zero para a expressão usando-se apenas os números naturais.

7.3.4 Sentenças abertas com n variáveis

Generalizando-se as sentenças abertas para uma quantidade n qualquer de variáveis e uma quantidade n de domínios, segue-se:

Considere-se os n conjuntos $A_1, A_2,..., A_n$ e o respectivo produto cartesiano entre eles, ou seja, $A_1 \times A_2 x,...,x A_n$.

Uma sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 x,...,x A_n$ é uma expressão $p(x_1, x_2,...,x_n)$ tal que $p(a_1, a_2,...,a_n)$ é falsa ou verdadeira para toda n-upla $(a_1, a_2,...,a_n) \in A_1 \times A_2 x,...,x A_n$.

O conjunto $A_1 \times A_2 x,...,x A_n$ recebe o nome de conjunto universo ou domínio das variáveis $x_1, x_2,...,x_n$, e qualquer elemento $(a_1, a_2,...,a_n) \in A_1 \times A_2 x,...,x A_n$ chama-se de uma n-upla de valores das variáveis $(x_1, x_2,...,x_n)$.

Se $(a_1, a_2,...,a_n) \in A_1 \times A_2 x,..., x A_n$ é tal que $p(a_1, a_2,...,a)$ é uma proposição verdadeira, diz-se que $(a_1, a_2\ a_n)$ satisfaz ou verifica $p(x_1, x_2,...,x_n)$.

Uma sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 x,...,x A_n$ também se chama função proposicional com n variáveis em $A_1 \times A_2 x,...,x A_n$.

Exemplo:

A expressão "2x + 2y + 2k +2z > 10 " é uma sentença aberta em N x N x N x N, sendo N o conjunto dos números naturais.

A quadra ordenada (2, 2, 2, 2) ∈ N x N x N x N, por exemplo, satisfaz essa sentença aberta, já que 2.2 + 2.2 +2.2 + 2.2 > 10.

7.3.5 Conjunto-verdade de uma sentença aberta com n variáveis

O conjunto-verdade de uma sentença aberta $p(x_1, x_2,...,x_n)$ em $A_1 \times A_2, x,...,x\ A_n$ é o conjunto de todas as n-uplas $(a_1, a_2,...,a_n) \in A_1 \times A_2\ x,...,x\ A_n$, tais que $p(a_1, a_2,...,a_n)$ é uma proposição verdadeira.

Em símbolos:

$Vp = \{(x_1,x_2,...,x_n) \mid x_1 \in A_1\ x_2 \in A_2 \wedge ... \wedge x_n \in A_n \wedge p(x_1, x_2,...,x_n)\}$

ou seja,

$Vp = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in A_1 \times A_2\ x,...,x\ A_n \mid p(x_1, x_2,...,x_n)\}$

Observação

Em matemática, as equações e as inequações são sentenças abertas que definem uma relação de igualdade e desigualdade, respectivamente, entre duas ou mais expressões com uma ou várias variáveis. Mas, o conceito de sentença aberta é muito mais amplo que o de equação ou inequação; assim, "x divide y", "x é jogador do time y", "x é mecânico de y", etc., são sentenças abertas, sem serem equações nem inequações (ALENCAR FILHO, 2002).

7.4 Operações lógicas sobre as sentenças abertas

As operações lógicas sobre as sentencas abertas tem o comportamento idêntico às operações lógicas sobre as proposições, por conseguinte, o desenrolar das explicações será abreviado.

7.4.1 Negação

Considere-se como conjunto universo o conjunto dos numeros naturais N para a seguinte sentença aberta adaptado de Alencar Filho (2002):

"x > 12"

Antepondo a essa sentença aberta o conectivo ~ (que se lê "não **é** verdade que"), obtém-se uma nova sentença aberta em N:

"$\sim x > 12$"

que é natural chamar negação da primeira, pois é verdadeira quando x não satisfaz a proposição original.

A negação de "$x > 12$" é logicamente equivalente à seguinte sentença aberta em H:

"$x = 12 \vee x < 12$", melhor representada por "$x \leq 12$".

Segue outro exemplo adaptado de Alencar Filho (2002):

No universo N (conjunto dos números naturais):

$\sim$ x é par $\Leftrightarrow$ x é ímpar.

Isto é, x não é par se e somente se x é ímpar.

Dada uma sentença p(x) aberta em um conjunto A, e seja o elemento $a \in A$, este satisfaz a sentença aberta ~p(x) em A se a proposição ~p(a) é verdadeira e, consequentemente, a proposição p(a) é falsa, isto é, se e somente se $a \in A$ não satisfaz a sentença aberta p(x) em A. Portanto, o conjunto-verdade $V_{\sim p}$ da sentença aberta p(x) em A é o complemento em relação a A do conjunto-verdade V_p da sentença aberta p(x) em A (ALENCAR FILHO, 2002).

Em símbolos:

$$V_{\sim p} = C_A V_p = C_A \{x \in A \mid p(x)\}$$

Ou seja, o conjunto complementar de V_p em A é formado por todos os elementos que estão em A mas não estão em V_p. Disso tem-se que a intersecção de V_p com $V_{\sim p}$ é vazia.

Exemplo adaptado de Alencar Filho (2002):

Seja A o conjunto dos números naturais múltiplos de 3, isto é, $A = \{3k \mid k \in N\} = \{3, 6, 9, 12,...\}$.

p(x): x múltiplo de 3

temos:

$$V_{\sim p} = C_A \{x \in A \mid x \text{ é múltiplo de } 3\} = \{x \in A \mid x \text{ não é divisível por } 3\}.$$

7.4.2 Conjunção

Sejam as seguintes sentenças abertas (adaptadas de Alencar Filho, 2002):

"x é carpinteiro", "x é piloto de avião".

O conjunto universo da variável x para cada uma das proposições pode ser considerado como sendo o conjunto H dos seres humanos.

Unindo essas duas sentenças abertas pelo conectivo $\wedge$, obtém-se uma nova sentença aberta em H:

"x é carpinteiro $\wedge$ x piloto de avião".

que será verdadeira para todos os indivíduos que satisfazem ao mesmo tempo as duas condições dadas, e só por esses indivíduos.

Diz-se que a nova sentença aberta obtida é a conjunção das proposições.

Analogamente, a conjunção das sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

"$x > 5$", "$x < 10$" ,

é a sentença aberta em "$x > 5 \wedge x < 10$"

A conjunção $x > 5 \wedge x < 10$ costuma ser escrita da seguinte forma $5 < x < 10$.

Generalizando-se para dois números reais quaisquer a e b, tem-se:

$a < x < b \Leftrightarrow x > a \wedge x < b$

ou

$]a, b[\Leftrightarrow x > a \wedge x < b$.

Observe-se que os colchetes estão de tal forma que indicam intervalo aberto; para se indicar um intervalo fechado, usar-se-ia a seguinte notação.

$[a, b] \Leftrightarrow x \geq a \wedge x \leq b$.

Como outro exemplo de sentença aberta, pode-se citar o seguinte sistema de equações lineares.

Presumindo-se que o conjunto universo é R (conjunto dos números reais):

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

o qual pode ser escrito de uma forma mais sintética:

$2x + 2y = 6 \wedge 2x - 3y = -4 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2$

Generalizando-se, sejam as proposições $P_1(x)$, $P_2(x)$,...,$P_n(x)$ sentenças abertas em um conjunto A qualquer. Para satizfazer a conjunção de $P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge ... \wedge P_n(x)$, o elemento $a \in A$ deve satisfazer cada sentença aberta $P_1(x)$, $P_2(x)$,..., $P_n(x)$ em A para que a proposição $P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge ... \wedge P_n(x)$ seja verdadeira.

Portanto, o conjunto verdade $V_{P1 \wedge P2 \wedge ... \wedge Pn}$ da sentença aberta $P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge ... \wedge P_n(x)$ em A é a intersecção dos conjuntos-verdade $V_{p1}, V_{p2}, ..., V_{pn}$ (ALENCAR FILHO, 2002).

Em símbolos:

$V_{P1 \wedge P2 \wedge ... \wedge Pn} = V_{P1} \cap V_{P2} \cap ... \cap V_{Pn} = \{x \in A \mid P_1(x)\} \cap \{x \in A \mid P_2(x)\} \cap ... \cap \{x \in A \mid P_n(x)\}$.

Exemplo:

A) Sejam as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

$p(x) : x - 3 = 0$;

$q(x) : x^2 - 9 = 0$.

Temos:

$V_{p \wedge q} = \{x \in Z \mid x-3 = 0\} \cap \{x \in Z \mid x^2 - 9 = 0\}$

$= \{3\}) \cap \{-3,3\} = \{3\}$

$V_{p \wedge q} = \{x \in Z \mid X = 3\}$

7.4.3 Disjunção

Sejam as seguintes sentenças abertas adaptadas de Alencar Filho (2002):

"x é carpinteiro", "x é piloto de avião".

O conjunto universo da variável x para cada uma das proposições pode ser considerado como sendo o conjunto H dos seres humanos.

Unindo essas duas sentenças abertas pelo conectivo $\vee$, obtém-se uma nova sentença aberta em H:

"x é carpinteiro $\vee$ x piloto de avião".

que será verdadeira para todos os indivíduos que satisfazem pelo menos uma das duas condições dadas.

Diz-se que a nova sentença aberta obtida é a disjunção das proposições.

Analogamente, a conjunção das sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

"$x > 5$", "$x < 10$"

é a sentença aberta em "$x > 5 \wedge x < 10$".

Obviamente, qualquer número real satisfaz essa proposição, logo, o conjunto-verdade seria o próprio R, sendo que, em alguns casos, ele pode satizfazer simultaneamente as duas proposições.

$V_{p \vee q} = R$

Para as seguintes proposições:

"$x < 5$", "$x > 10$",

a sentença aberta em "$x < 5 \vee x > 10$" tem uma diferença no conjunto-verdade, que já não é mais R, mas, sim, R menos a região entre 5 e 10.

$V_{p\,q} = R - \{x \in R \mid 5 \leq x \leq 10\}$

Generalizando-se, sejam as proposições $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ sentenças abertas em um conjunto A qualquer. Para satisfazer a conjunção de $P_1(x) \vee P_2(x) \vee ... \vee P_n(x)$, o elemento $a \in A$ deve satisfazer cada sentença aberta $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ em A para que a proposição $P_1(x) \vee P_2(x) \vee ... \vee P_n(x)$ seja verdadeira.

Portanto, o conjunto-verdade $V_{P1\,P2\,...\,Pn}$ da sentença aberta $P_1(x) \vee P_2(x) \vee ... \vee P_n(x)$ em A é a união dos conjuntos verdade $V_{p1}, V_{p2}, ..., V_{pn}$ (ALENCAR FILHO, 2002).

Em símbolos:

$V_{P1 \vee P2 \vee ... \vee Pn} = V_{P1} \cup V_{P2} \cup ... \cup V_{Pn} = \{x \in A \mid P_1(x)\} \cup \{x \in A \mid P_2(x)\} \cup ... \cup \{x \in A \mid P_n(x)\}$.

Exemplo:

A) Sejam as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

p(x) : $x - 3 = 0$

q(x) : $x^2 - 9 = 0$

Temos:

$V_{p \vee q} = \{x \in Z \mid x\text{-}3 = 0\} \cup \{x \in Z \mid x^2 - 9 = 0\}$

$= \{3\} \cup \{-3,3\} = \{-3,3\}$

$V_{p \vee q} = \{x \in Z \mid X = -3 \vee X = 3\}$

7.4.4 Condicional

Dadas duas proposições p(x) e q(x) que sejam sentenças abertas em um mesmo conjunto A. Se essas duas sentenças abertas forem unidas pelo conectivo $\rightarrow$, obter-se-á uma nova sentença aberta em A: "$p(x) \rightarrow q(x)$", que é verdadeira para todo elemento $a \in A$ tal que a condicional "$p(a) \rightarrow q(a)$" é verdadeira.

Para encontrar-se o conjunto-verdade da condicional, será considerada a seguinte expressão $p(x) \rightarrow q(x) \Leftrightarrow {\sim}p(x) \vee q(x)$, e daí segue-se que o conjunto-verdade $Vp \rightarrow q$ da sentença aberta $p(x) \rightarrow q(x)$ em A coincide com o conjunto-verdade da sentença aberta ${\sim}p(x) \vee q(x)$ em A e, portanto, é a união dos conjuntos-verdade e $V_{\sim p}$ e V_q das sentenças abertas ~p (x) e q(x) em A (ALENCAR FILHO, 2002).

Em símbolos:

$V_{p \rightarrow q} = V_{\sim p} \cup V_q = C_A V_p \cup V_q$

Ou seja:

$V_{p \rightarrow q} = CA\ \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$

Exemplo adaptado de Alencar Filho (2002):

Dadas as sentenças abertas em N (conjunto dos números naturais):

p(x) : $x < 13$, q(x) : $x > 9$

Escreve-se:

$V_{p \to q} = C_N \{x \in N \,|x < 13\} \cup \{x \in N \,|x > 9\}$

$= \{x \in N \,|x \,.\, 13\} \cup \{x \in N \,|x > 9\}$

$= \{x \in N \,|x > 9\}$

7.4.5 Bicondicional

> Dadas duas proposições p(x) e q(x) que sejam sentenças abertas em um mesmo conjunto A. Se essas duas sentenças abertas forem unidas pelo conectivo $\leftrightarrow$ obter-se-á uma nova sentença aberta em A: "$p(x) \leftrightarrow q(x)$", que é verdadeira para todo elemento $a \in A$ tal que a bicondicional "$p(a) \leftrightarrow q(a)$" é verdadeira (ALENCAR FILHO, 2002).

Para determinar-se o conjunto-verdade da bicondicional, será considerada a seguinte expressão: $p(x) \leftrightarrow q(x) \Leftrightarrow (p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to p(x))$, e daí segue-se que o conjunto-verdade $V_{p \leftrightarrow q}$ da sentença aberta $p(x) \leftrightarrow q(x)$ em A coincide com o conjunto-verdade da sentença aberta em A:

$(p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to p(x))$

que é a interseção dos conjuntos-verdade das condicionais $p(x) \to q(x)$ e $q(x) \to p(x)$ em A, ou seja, $V_{p \to q}$ interserção $V_{q \to p}$ das sentenças abertas em A:

Em símbolos:

$V_{p \leftrightarrow q} = V_{p \to q} \cap V_{q \to p} = (V_{\sim p} \cup V_q) \cap (V_{\sim q} \cup V_p) = (C_A V_p \cup V_q) \cap (C_A V_q \cup V_p)$

Exemplo adaptado de Alencar Filho (2002):

Dadas as sentenças abertas em N (conjunto dos números naturais):

$p(x): x > 16,\ q(x): x < 5$

Tem-se:

$C_N V_p \cup V_q = CN \{x > 16\} \cup \{x < 5\} = \{x \leq 16\} \cup \{x < 5\} = \{x \leq 16\}$

$C_N V_q \cup V_p = CN \{x < 5\} \cup \{x > 16\} = \{x \geq 5\} \cup \{x > 16\} = \{x \geq 5\}$

finalmente: $Vp \leftrightarrow q = \{x \leq 16\} \cap \{x \geq 5\} = \{5 \geq x \leq 16\}$

Note-se nesse exemplo que o conjunto-verdade torna a proposição verdadeira, porém, observe que no caso em questão a proposição é verdadeira porque ambos os lados são falsos, ou seja, $F \leftrightarrow F$.

7.4.6 Propriedades das sentenças abertas

No tocante às propriedades das sentenças abertas, isto é, as propriedades da distribuição, associação etc., tem-se exatamente o mesmo comportamento das proposições normais.

7.5 Quantificadores

7.5.1 Quantificador universal

Encontramos em Alencar Filho (2002) que, dada uma sentença aberta p(x) em um conjunto não vazio $A(A \neq \varnothing)$, onde V_p é o conjunto-verdade. Em símbolos: $V_p = \{x|x \in A \wedge p(x)\}$.

Quando $V_p = A$, isto é, todos os elementos do conjunto A satisfazem a sentença aberta p(x), pode-se escrever de alguma destas maneiras a seguir:

1. "Para todo elemento x em A, p(x) é verdadeira".

2. "Qualquer que seja o elemento x de A, p(x) é verdadeira".

Em símbolos:

$\forall\ x \in A, p(x)$

Simplificadamente, por exemplo:

$\forall\ x, p(x)$

pois vale a equivalência:

$(\forall\ x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow V_p = A$

Observação

Nota-se que p(x) é uma sentença aberta e, por isso, não tem valor lógico V ou F; contudo, a sentença aberta p(x) com o símbolo $\forall$ antes dela, isto é, $(\forall\ x \in A)\ (p(x))$, torna-se uma proposição e, portanto, tem um valor lógico, que é verdadeiro se $V_p = A$ e falso se $V_p \neq A$ (ALENCAR FILHO, 2002).

A essa operação lógica dá-se o nome de **quantificação universal** e ao respectivo símbolo $\forall$ (que é um A invertido), o de **quantificador universal**.

Em particular, seja A um conjunto finito com n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, é óbvio que a proposição $(\forall\ x \in A)(p(x))$ é **equivalente** à conjunção das n proposições $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)$, ou seja,

$(\forall\ x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow (p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge ... \wedge p(a_n))$.

Quado o conjunto universo é finito, o quantificador universal equivale a conjunções sucessivas.

Exemplos adaptados de Alencar Filho (2002):

1. No universo finito $A = \{2, 4, 6\}$ e sendo p(x) a sentença aberta "x é par", tem-se:

$(\forall\ x \in A)$ (x é par) $\Leftrightarrow$ (2 é par $\wedge$ 4 é par $\wedge$ 6 é par).

No caso, pode-se dizer "qualquer que seja o elemente x pertencente a A, ele será par."

2. $(\forall\ x)$ (x é mortal)

Lê-se "Qualquer que seja x, x é mortal"; é uma proposição verdadeira no universo A dos animais.

Analogamente, as expressões:

$(\forall\ x)$ $(3x > x)$: "Qualquer que seja x, $3x > x$"

Essa expressão **"O triplo de um número é sempre maior que esse número"**, o que é verdadeiro quando em N, mas falso em Z.

Exemplo:

Tem-se em R:

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y), \forall\ x, y$

7.5.2 Quantificador existencial

Dada uma sentença aberta p(x) em um conjunto não vazio $A(A \neq \varnothing)$ e seja V_p o seu conjunto-verdade:

$Vp = \{x | x \in A \wedge p(x)\}$.

Quando V_p, não é vazio $(V_p \neq \varnothing)$, então pelo menos um elemento do conjunto A satisfaz a sentença aberta p(x), daí pode-se dizer que:

1. "Existe pelo menos um $x \in A$ tal que p(x) é verdadeira";

2. "Para algum $x \in A$, p(x) é verdadeira".

Em símbolos:

$\exists\, x \in A, p(x)$

Simplificadamente, por exemplo:

$\exists x, p(x)$

pois, vale a equivalência:

$(\exists\, x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow Vp \neq \varnothing$

Observação

A essa operação lógica dá-se o nome de quantificação existencial e ao respectivo símbolo ∃ (que é um E invertido), o de **quantificador existencial** (ALENCAR FILHO, 2002)..

Seja A um conjunto finito com n elementos a_1, a_2, e seja a, isto é, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, a proposição $(\exists\, x \in A)(p(x))$ é equivalente à disjunção das n proposições $p(a_1)$, $p(a_2)$,..., $p(a)$, ou seja:

$(\exists\, x \in A)\ (p(x)) \Leftrightarrow (p\ (a_1) \vee p(a_2) \vee ... \vee p(a_n))$

Lembrete

Em um universo finito, o quantificador existencial equivale a disjunções sucessivas.

Exemplo adaptado de Alencar Filho (2002):

Seja o seguinte conjunto universo finito $A = \{3, 4, 5\}$ e sendo p(x) a sentença aberta "x é par", temos:

$(\exists\, x \in A)\ (p(x)) = (3 \text{ é par} \vee 4 \text{ é par} \vee 5 \text{ é par})$

7.5.3 Quantificador da unicidade

Temos em Alencar Filho (2002) uma sentença aberta p(x) em um conjunto não vazio $A(A \neq \varnothing)$ e seja V_p o seu conjunto-verdade composto por apenas um elemento, e somente um elemento. Usa-se a seguinte simbologia:

∃! ou ∃|, isto é, existe um e somente um.

Exemplo adaptado de Alencar Filho (2002):

Seja a sentença: "x - 3 = 0", em que o conjunto universo é o dos numeros naturais N

$(\exists!\ x \in N)(x - 3 = 0)$

Ou seja, existe um e somente um x em N tal que $x - 3 = 0$ seja verificada.

7.5.4 Negação de um quantificador

Evidentemente, pode-se negar qualquer expressão na qual se use o quantificador universal ou o quantificador existencial.

a. $\sim\forall$ ou

b. $\sim\exists$

Em a. se está negando o quantificador universal "todos"; isso quer dizer que há pelo menos um, ou seja, existe ao menos um que não satisfaz a condição proposta. No caso b. se está negando a existência de pelo menos um, e nesse caso quer dizer que não existe nenhum elemento que satisfaça a condição proposta. No caso b. também usa-se o símbolo do E invertido cortado por uma barra inclinada, ou seja, $\sim\exists$ equivale a $\nexists$, que quer dizer que não existe nenhum elemento.

Exemplos:

1. "Todos os carros são bonitos"; neste caso, pode-se usar como o conjunto universo o conjunto de carros produzidos por uma montadora qualquer.

Negar essa frase significa dizer:

"Nem todos os carros são bonitos."

2. "Pelo menos um aluno tirou nota dez em lógica"; neste caso, o conjunto universo pode ser o conjunto de todos os alunos de uma turma em particular.

Negar essa proposição quer dizer:

"Nenhum alunos tirou dez em lógica."

7.5.5 Quantificação com várias variáveis

A quantificação de sentenças abertas com várias variáveis possui algumas particularidades que devem ser exploradas.

7.5.6 Quantificação parcial

A quantificação parcial aparece quando apenas uma das variáveis da sentença aberta é quantificada:

Exemplo:

$(\exists\ x \in A)\ (5x - 3y = 12)$

onde o conjunto universo das variáveis x e y é $A = \{1,2,3,4,5\}$

Visto que não se sabe o valor de y, não se pode afirmar se existe o valor de x para que se tenha uma proposição falsa ou verdadeira.

Neste caso, a variável y é denominada de variável livre.

7.5.7 Quantificação múltipla

Quando uma sentença aberta possui um quantificador para cada variável, pode-se então dizer que a sentença em questão é uma proposição, pois poder-se-á verificar se ela é uma declaração falsa ou verdadeira.

Note-se que os quantificadores podem ser diferentes para cada variável.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

a. $(\forall\ x \in A)(\forall\ y \in B)(p(x,y))$

b. $(\exists\ x \in A)(\exists\ y \in B)(p(x,y))$

c. $(\nexists\ x \in A)(\forall\ y \in B)(p(x,y))$

d. $(\nexists\ x \in A)(\exists!\ y \in B)(p(x,y))$

e. $(\forall\ x \in A)(\exists\ y \in B)(p(x,y))$

8 NOÇÕES SOBRE SILOGISMOS CATEGÓRICOS

8.1 Proposições categóricas

Seja o seguinte argumento:

Todos os bandidos são pessoas de mau caráter.
Alguns políticos são bandidos.
Logo, alguns políticos são pessoas de mau caráter.

Observe que a relação que existe entre as proposições simples do argumento decorre da estrutura interna das próprias proposições, particularmente em razão da presença dos quantificadores "todos" e "alguns".

As proposições desse argumento apresentam a seguinte estrutura:

Quantificador + termo sujeito + verbo "ser" + termo predicado.

As proposições com tal estrutura são conhecidas como proposições categóricas.

As proposições categóricas são classificadas da seguinte forma, em que S é o termo sujeito e P, o termo predicado.

1. Proposição universal afirmativa: "Todo S é P".
   Exemplo: "Todos os políticos são ricos".

2. Proposição universal negativa: "Nenhum S é P".
   Exemplo: "Nenhum político é rico".

3. Proposição particular afirmativa: "Algum S é P".
   Exemplo: "Alguns políticos são ricos".

4. Proposição particular negativa: "Algum S não é P".
   Exemplo: "Alguns políticos não são ricos".

As proposições categóricas sempre são escritas com o verbo "ser", fazendo-se as alterações necessárias para manter o do sentido original.

Por exemplo, a proposição "Alguns répteis vivem na água" ficaria assim: "Alguns répteis são seres que vivem na água".

O quantificador "algum" apresenta o sentido de "pelo menos um". Esse sentido se mantém quando se emprega o plural: "alguns". Ou seja, considera-se, por convenção, que "algum" e "alguns" têm o mesmo significado.

Diagramas de Euler

As relações anteriores podem ser representadas pelos diagramas de Euler adaptados de Alencar Filho (2002):

1. Todos os políticos são ricos.

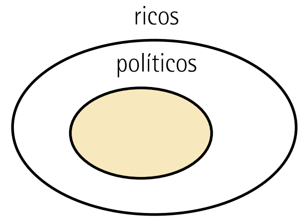


Figura 15

Esse diagrama mostra que o conjunto dos políticos está contido no conjunto de ricos.

Apenas a partir dessa proposição, não temos elementos para afirmar que alguns políticos não são políticos (isto é, não podemos garantir que haja elementos no conjunto "ricos" fora do conjunto "políticos"). Do mesmo modo, também não podemos concluir que todos os ricos são políticos, isto é, não podemos afirmar que os conjuntos "ricos" e "políticos" são iguais. Sabe-se apenas que essas duas possibilidades existem; por isso, para melhor visualização, podemos imaginar as seguintes representações:

1ª representação

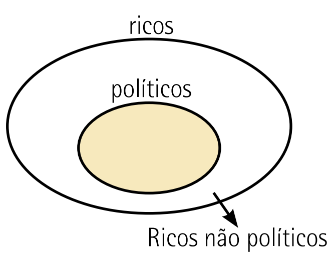


Figura 16

2ª representação

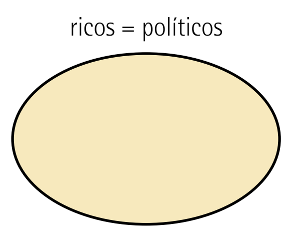


Figura 17

O que essas duas representações têm em comum é o fato de, em ambas, o conjunto "políticos" estar contido no conjunto "ricos", pois esse é precisamente o conteúdo da proposição "Todos os políticos são ricos". Assim, qualquer conclusão, para poder ser inferida a partir dessa proposição, deve ser coerente com as duas representações anteriores.

Em outras palavras, ambos os diagramas tornam verdadeira a proposição "Todos os políticos são ricos". Na verdade, a segunda representação nada mais é do que um caso particular da primeira, em que não há elementos na região correspondente aos "ricos não políticos".

2. Nenhum político é rico.

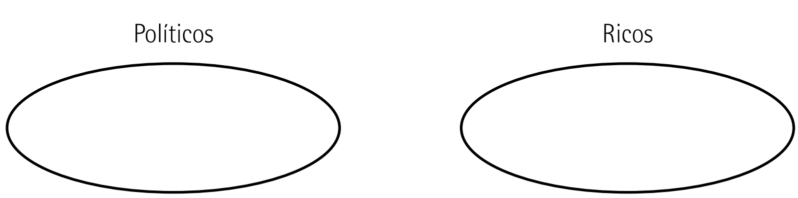


Figura 18

O diagrama nos mostra que o conjunto dos políticos e o conjunto dos ricos não possuem nenhum elemento em comum.

3. Alguns políticos são ricos.

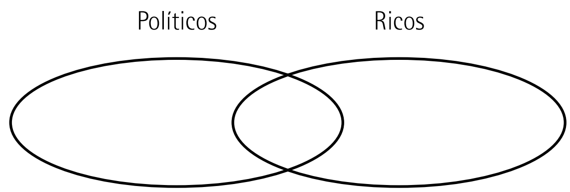


Figura 19

A intersecção entre o conjunto dos políticos e o dos ricos nos fornece o conjunto dos políticos ricos.

O que esse diagrama nos mostra é que a intersecção dos conjuntos "ricos" e "políticos" possui elementos, ou seja, existem políticos ricos.

Entretanto, não podemos concluir que existem políticos não ricos, nem que não existem. Nada nos é afirmado a esse respeito. Por vezes, para deixar mais claras essas possibilidades, podemos considerar as duas representações a seguir:

1ª representação

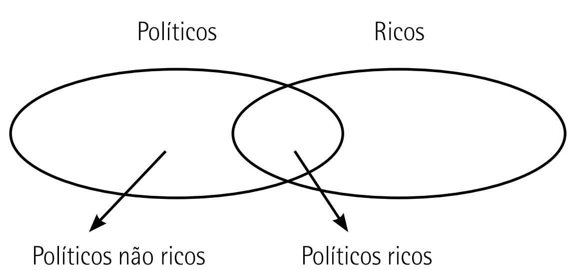


Figura 20

2ª representação

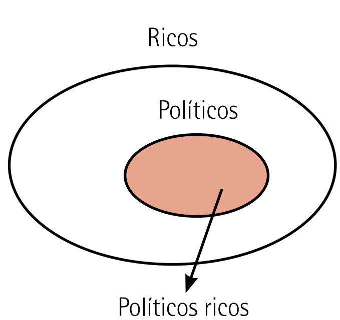


Figura 21

A primeira representação admite a possibilidade de haver políticos não ricos, já a segunda nos diz, efetivamente, que todos os políticos são ricos.

Observe que a segunda não passa de um caso particular da primeira, em que a região que representa os políticos não ricos é vazia.

Admitindo-se a existência de políticos (hipótese existencial), se for verdade que todos os políticos são ricos, também será verdade que alguns políticos são ricos.

Em termos gerais, se a proposição “todo S é P” é verdadeira, então a proposição “ algum S é P” também é. O fato de a proposição “algum S é P” ser verdadeira não garante que a proposição “todo S é P” seja verdadeira.

4. Alguns políticos são ricos.

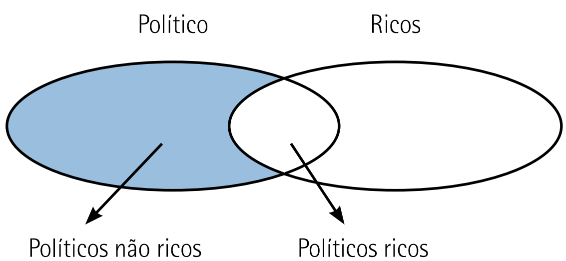


Figura 22

A região sombreada representa o conjunto dos políticos não ricos.

Ao dizer que alguns políticos não são ricos, não se está afirmando que haja políticos ricos, nem tampouco que não haja.

Assim, admitindo-se que existem políticos (hipótese existencial), se é verdade que nenhum político é rico, é claro que também é verdade que alguns políticos não são ricos.

Genericamente, se a proposição “Nenhum, S é P” é verdadeira, então a proposição “Algum S não é P” também é verdadeira, assim a verdade da proposição “Algum S não é P” não garante a verdade da proposição “Nenhum S é P”.

8.2 Proposições contraditórias

Duas proposições são contraditórias quando uma é a negação da outra, isto é, sendo uma verdadeira, a outra é falsa, e vice versa.

Seguem algumas maneiras de escrever a negação das proposições categóricas em sua forma típica:

1. Negação de "Todo S é P"

Há várias formas de expressar a negação dessa proposição, todas com o mesmo significado:

a. Nem todo S é P.

b. Existe pelo menos um S que não é P.

c. Algum S não é P.

Essa última é a mais usada.

Exemplo:

A negação de "Todos os políticos são ricos" pode ser escrita, na forma típica, como: "Alguns políticos não são ricos".

2. Negação de "Nenhum S é P"

A negação dessa proposição pode ser assim expressa:

a. Não é verdade que nenhum S é P.

b. Existe pelo menos um S que é P.

c. Algum S é P.

Exemplo:

A negação de "Nenhum político é rico" é "Alguns políticos são ricos".

3. Negação de "Algum S é P"

a. Não é verdade que algum S é P.

b. Não existe nenhum S que seja P.

c. Nenhum S é P.

Exemplo:

A negação de "Alguns políticos são ricos" é "Nenhum político é rico".

4. Negação de "Algum S é P"

a. Não é verdade que algum S é P.

b. Todo S é P.

Exemplo:

A negação de "Alguns políticos não são ricos" é "Todos os políticos são ricos".

Por fim, considerem-se as quatro proposições contraditórias:

"Todo S é P" e "Alguns S não são P"

"Nenhum S é P" e "Alguns S são P"

As proposições "Todos os políticos são ricos" e "nenhum político é rico" não são contraditórias, pois, embora não seja possível que ambas sejam verdadeiras, é possível que sejam ambas falsas; tais proposições são **denominadas contrárias**.

As proposições "Alguns políticos são ricos" e "Alguns políticos não são ricos" também não são contraditórias, pois, apesar de não poderem ser ambas falsas, pode ocorrer que ambas sejam verdadeiras; essas **proposições são denominadas subcontrárias**.

8.3 Silogismos categóricos

O silogismo é um argumento constituído de exatamente três proposições, sendo duas premissas e uma conclusão. Os silogismos constituídos por proposições categóricas são denominados por silogismos categóricos.

Os diagramas de Euler são úteis para nos auxiliar na análise da validade desses tipos de argumentos. Para isso, basta desenhar o diagrama das premissas e analisar se a conclusão não ficou automaticamente desenhada.

Se a conclusão ficar automaticamente desenhada para todos os desenhos possíveis das premissas, então o argumento é válido; caso contrário, se a conclusão não for automaticamente desenhada para alguma forma de desenho possível, o argumento será inválido.

Exemplo:

Todos os mamíferos voam.

Todos os gatos são mamíferos.

Logo, os gatos voam.

Usando o diagrama de Euler, vê-se que o argumento é válido, apesar da conclusão não ser verdadeira. Lembre-se que, em lógica, o que importa é a forma do argumento.

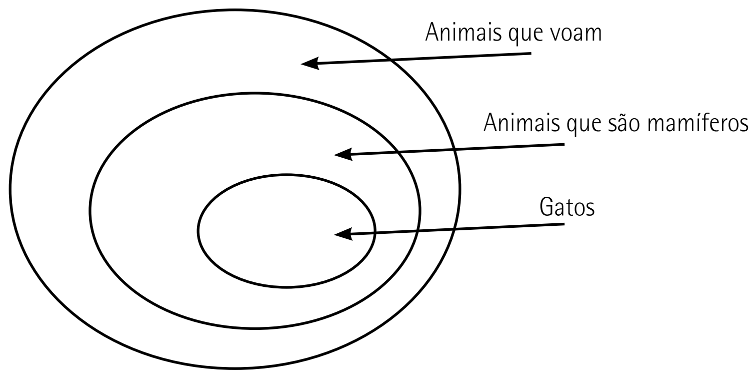


Figura 23

Lembrete

Origem da filosofia

A filosofia ocidental surgiu na Grécia, incentivada por um contexto político grave difícil de suportar.

Um grupo de elite de eruditos de vários campos reunia-se para discutir e compreender os acontecimentos.

A partir do século VI a.C até o século II, começa na Grécia o movimento filosófico que influenciou e ainda continua a influenciar a nossa cultura.

Os filósofos antes de Sócrates (século IV a.C.), chamado pré-socráticos, integram o grupo chamado cosmológico, frequentemente agrupados em escolas, como a jônica, de Mileto, Pitágoras etc.

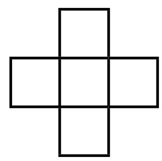
Os mais importantes foram Tales (século. VI a.C.), Anaximandro (século VI a.C.), Anaxímenes (século VI a.C.), Heráclito (século V AC), Parmênides (século V a.C.), Pitágoras (século V a.C.), Empédocles (século IV. a.C.), Anaxágoras (século IV. a.C.) e Demócrito (século IV a.C.).

Resumo

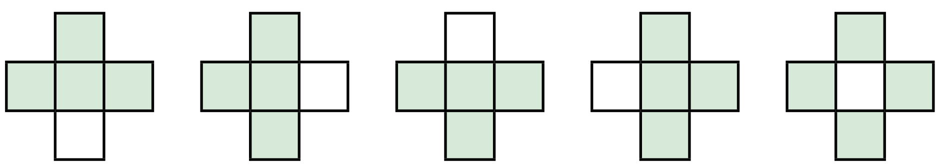
Nesta unidade, examinamos o que se conhece em lógica por argumentação, assim como as operações sobre ela. Estudamos as regras de inferência e os argumentos fundamentais. Além disso, apresentamos algumas formas de validação desses argumentos. Nosso objetivo foi estudar as técnicas adicionais para aplicabilidade em casos nos quais a Lógica proposicional não se aplica. A teoria dos conjuntos é apresentada como ferramenta auxiliar para o entendimento da lógica dos predicados. Para isso, fundamentamos os conceitos de sentenças abertas e quantificadores. Entre os quantificadores, foram abordados os quantificadores universais e de existência, bem como suas variantes e a negação de quantificadores. Finalizamos esta unidade com os conceitos de silogismos categóricos.

Exercícios

Questão 1. (SAE-PE/2008) Na figura abaixo, cada quadrinho possui um número oculto.



Em cada uma sãs situações abaixo, o número que aparece embaixo de cada figura é a soma dos números que estão nos quadrinhos sombreados.



26 29 22 23 24

O número do quadrinho central é:

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

Resposta correta: alternativa C.

Análise das alternativas

Considerando-se X, Y, W, Z e T os números nos quadrinhos de forma que estejam assim dispostos:

X está no quadrinho superior, Y está no da esquerda, W está no central, Z está no da direita e T no inferior. Utilizando-se esta notação, partindo-se das cinco figuras podemos escrever:

- Primeira figura: $X+Y+W+Z=26$.
- Segunda figura: $X+Y+W+T=29$.
- Terceira figura: $Y+W+Z+T=22$.
- Quarta figura: $X+W+T+Z=23$.
- Quinta figura: $X+Y+Z+T=24$.

Deseja-se obter o valor de W. Logo:

Somando-se algebricamente membro a membro as cinco expressões acima, encontramos:

$4\,(X+Y+W+Z+T) = 124$

Então:

$X+Y+W+Z+T = 31$

Substituindo-se a expressão obtida pela expressão obtida a partir da quinta figura, temos: $W+24=31$

Logo, $W=7$.

Sendo assim, o número do quadrinho central é 7. Então:

A) Alternativa incorreta.

Justificativa: de acordo com os cálculos.

B) Alternativa incorreta.

Justificativa: de acordo com os cálculos.

C) Alternativa correta.

Justificativa: de acordo com os cálculos.

D) Alternativa incorreta:

Justificativa: de acordo com os cálculos.

E) Alternativa incorreta:

Justificativa: de acordo com os cálculos.

Questão 2. (SAE-PE/2008) Observe as figuras abaixo:

1	1
1	2

5	10
2	10

3	15
5	6

5	x
6	y

Os números que existem dentro de cada uma das figuras possuem uma regra lógica que os une. Então, a diferença x-y é igual a:

A) 20

B) 18

C) 16

D) 12

E) 10

Resolução desta questão na Plataforma.

REFERÊNCIAS

Textuais

ALENCAR FILHO, E. de. *Iniciação à lógica matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

DAGLIAN, J., Lógica e Álgebra de Boole – 4ª. Ed. – São Paulo: Atlas, 1995.

D'OTTAVIANO, Í. M. L., FEITOSA, H. A., Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. V SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. Rio Claro. Abr. de 2003. Disponível em: <ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf>. Acesso em: 22 Fev. 2011.

MAOR, E. *A história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2003.

TAHAN, M. *O homem que calculava.* Rio de Janeiro: Record, 2001.

Exercícios

Unidade I – Questão 1: ESCOLA DE ADMINISTRAÇÂO FAZENDÀRIA (ESAF). *Concurso público 2002*: Analista de Finanças e Controle. Questão 2. Disponível em: < http://raciociniologico.50webs.com/AFC2002/AFC2002.html >. Acesso em: 21 mai. 2011.

Unidade I – Questão 2: FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (FGV). *Concurso público 2008*: Analista em Gestão Administrativa - PE. Questão 22. Disponível em: < http://200.198.188.123/download/provas/sadpe_prova_objetiva_analista_gestao_administrativa_02.pdf >. Acesso em: 21 mai. 2011.

Unidade II – Questão 1: Disponível em:< http://www.jusdecisum.com.br/sistema/turma/arquivos/APOSTILA%20DE%20RACIOCINIO%20LOGICO%202011.pdf> Acesso em: 23 mai. 2011.

Unidade II – Questão 2: FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (FGV). *Concurso público 2008*: Analista em Gestão Administrativa – PE, caderno 1. Questão 34. Disponível em: < http://200.198.188.123/download/provas/sadpe_prova_objetiva_analista_gestao_administrativa_01.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2011.

Unidade III – Questão 1: FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (FGV). *Concurso público 2008*: Analista em Gestão Administrativa - PE. Questão 1. Disponível em: < http://200.198.188.123/download/provas/sadpe_prova_objetiva_analista_gestao_administrativa_02.pdf >. Acesso em: 21 mai. 2011.

Unidade III – Questão 2: FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (FGV). *Concurso público 2008*: Analista em Gestão Administrativa – PE, caderno 1. Questão 26. Disponível em: < http://200.198.188.123/download/provas/sadpe_prova_objetiva_analista_gestao_administrativa_01.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2011.

Unidade IV – Questão 1: FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (FGV). *Concurso público 2008*: Analista em Gestão Administrativa – PE, caderno 1. Questão 21. Disponível em: < http://200.198.188.123/download/provas/sadpe_prova_objetiva_analista_gestao_administrativa_01.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2011.

Unidade IV – Questão 2: FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (FGV). *Concurso público 2008*: Analista em Gestão Administrativa – PE, caderno 1. Questão 23. Disponível em: < http://200.198.188.123/download/provas/sadpe_prova_objetiva_analista_gestao_administrativa_01.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2011.

UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA
Interativa

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000