



Interativa

Geometria Analítica

Autora: Profa. Fabíola Mariana Aguiar Ribeiro

Colaboradoras: Profa. Vanessa Lessa

Profa. Christiane Mazur Doi

Professora conteudista: Fabíola Mariana Aguiar Ribeiro

Fabíola Mariana Aguiar Ribeiro é graduada em Física, com habilitação em Astronomia, pela Universidade de São Paulo (USP) desde 2001. Em 2006, concluiu doutorado em Astrofísica pela mesma universidade. Em 2009, mudou seu enfoque de pesquisa para o ensino, ministrando disciplinas para o ciclo básico do curso de Engenharia na Universidade Paulista (UNIP). Desde 2009, integra a equipe da Comissão de Qualificação e Avaliação (COA) da Universidade Paulista, elaborando e revisando materiais didáticos e de apoio de diversos cursos, além de realizar a tabulação de resultados de avaliações internas e externas.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R484g Ribeiro, Fabíola Mariana Aguiar.

Geometria Analítica / Fabíola Mariana Aguiar Ribeiro. – São Paulo: Editora Sol, 2021.

120 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Vetor. 2. Produto. 3. Cálculo. I. Título.

CDU 516

U512.57 – 21

Prof. Dr. João Carlos Di Genio
Reitor

Prof. Fábio Romeu de Carvalho
Vice-Reitor de Planejamento, Administração e Finanças

Profa. Melânia Dalla Torre
Vice-Reitora de Unidades Universitárias

Profa. Dra. Marília Ancona-Lopez
Vice-Reitora de Pós-Graduação e Pesquisa

Profa. Dra. Marília Ancona-Lopez
Vice-Reitora de Graduação

Unip Interativa – EaD

Profa. Elisabete Brihy
Prof. Marcello Vannini
Prof. Dr. Luiz Felipe Scabar
Prof. Ivan Daliberto Frugoli

Material Didático – EaD

Comissão editorial:

Dra. Angélica L. Carlini (UNIP)
Dr. Ivan Dias da Motta (CESUMAR)
Dra. Kátia Mosorov Alonso (UFMT)

Apoio:

Profa. Cláudia Regina Baptista – EaD
Profa. Deise Alcantara Carreiro – Comissão de Qualificação e Avaliação de Cursos

Projeto gráfico:

Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:

Lucas Ricardi
Vera Saad

Sumário

Geometria Analítica

APRESENTAÇÃO	7
INTRODUÇÃO	7

Unidade I

1 VETORES: DEFINIÇÃO E APLICAÇÕES	9
1.1 Definição	9
1.2 Propriedades dos vetores	10
2 OPERAÇÕES COM VETORES	15
2.1 Adição de vetores	15
2.2 Multiplicação de vetor por escalar	26
3 VETORES: TRATAMENTO ALGÉBRICO	28
3.1 Vetor definido por dois pontos	28
3.2 Módulo de vetor	32
3.3 Operações com vetores	35
3.3.1 Soma de vetores	36
3.3.2 Multiplicação de vetor por escalar	39
4 DEPENDÊNCIA LINEAR ENTRE VETORES	42

Unidade II

5 PRODUTO ESCALAR	53
5.1 Produto escalar de dois vetores	53
5.2 Ângulo entre dois vetores	56
5.3 Condição de perpendicularismo entre dois vetores	64
5.4 Condição de paralelismo entre dois vetores	67
5.5 Produto escalar e dependência linear de dois vetores	75
6 PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM VETOR SOBRE OUTRO	78
6.1 Projeção ortogonal de vetores	78
6.2 Aplicações	82
7 PRODUTO VETORIAL	85
7.1 Definição	85
7.2 Propriedades do produto vetorial	90

8 APLICAÇÕES DO PRODUTO VETORIAL.....	95
8.1 Cálculo da área de um paralelogramo.....	95
8.2 Cálculo da área de um triângulo	101
8.3 Vetor normal a uma figura plana determinada por dois vetores.....	106

APRESENTAÇÃO

Neste livro-texto, mostraremos os principais conceitos relacionados aos vetores em espaços euclidianos bidimensionais e tridimensionais. Faremos exposições de conceitos e de operações envolvendo vetores tanto por suas representações geométricas quanto por suas coordenadas.

Além disso, falaremos sobre as definições de produto escalar e de produto vetorial, a projeção ortogonal e as condições de paralelismo e de perpendicularidade entre vetores.

Este livro-texto está organizado em duas unidades.

Na unidade I, apresentaremos:

- a definição e as propriedades dos vetores;
- as operações com vetores (adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar);
- o tratamento algébrico dos vetores;
- a dependência linear entre vetores;


Na unidade II, veremos:

- o produto escalar (incluindo os estudos das condições de perpendicularidade e de paralelismo entre dois vetores e da dependência linear de dois vetores);
- a projeção ortogonal de um vetor sobre outro;
- o produto vetorial e suas aplicações (incluindo os cálculos das áreas de um paralelogramo e de um triângulo e a determinação do vetor normal a uma figura plana determinada por dois vetores).

INTRODUÇÃO

Este livro-texto tem como objetivo apresentar ao aluno os elementos básicos de geometria analítica, necessários para estudos de álgebra linear e importantes para diversas áreas da ciência da computação, especialmente no que se refere às abordagens do campo da computação gráfica. Conhecimentos a respeito de geometria analítica e de álgebra linear também são aplicados na elaboração e na análise de modelos preditivos em *machine learning*, por exemplo.

De modo geral, vetores são fundamentais quando estudamos e desenvolvemos aplicações de computação gráfica ou jogos eletrônicos. As imagens digitais são formadas a partir de pontos, retas e polígonos. Para aplicar efeitos de iluminação realísticos, precisamos saber a orientação desses polígonos, o que é feito com o emprego de conceitos da geometria analítica. Quando tratamos de animações,



devemos simular o movimento, mantendo o aspecto dos objetos. Além disso, frequentemente corrigimos a iluminação, o que também é feito com o uso de conceitos da geometria analítica. Adicionalmente, para criarmos projeções que representem um movimento realístico, são necessários conhecimentos de cinemática vetorial, uma área da física que requer o domínio das propriedades dos vetores.

Boa leitura e bom estudo!

Unidade I

1 VETORES: DEFINIÇÃO E APLICAÇÕES

1.1 Definição

Para começarmos nossa disciplina, precisamos fazer a distinção entre grandezas escalares e grandezas vetoriais.

São grandezas escalares aquelas que podem ser dadas, de forma completa, por apenas um número. Logo, a massa de um objeto, o preço de um produto e o tempo gasto em um deslocamento entre dois pontos são exemplos de grandezas escalares.

São grandezas vetoriais aquelas que, para serem dadas de forma completa, precisam de intensidade (ou módulo), direção e sentido. Se fornecermos apenas a intensidade de uma grandeza vetorial, não estamos descrevendo essa grandeza totalmente. Velocidade e força são exemplos de grandezas vetoriais. Quando falamos de velocidade, devemos expressar a sua intensidade (parte numérica), a sua direção e o seu sentido, como 60 km/h, na pista da marginal e no sentido oeste.

Definimos o segmento orientado AB pelo par ordenado (A,B) , em que A representa a origem do segmento e B representa a sua extremidade, e definimos o segmento orientado BA pelo par ordenado (B,A) , em que B representa a origem do segmento e A representa a sua extremidade (figura 1).

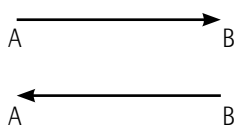


Figura 1 – Segmentos orientados (A,B) , acima, e (B,A) , abaixo

Note, pela figura 1, que os segmentos orientados (A,B) e (B,A) são distintos.

Podemos ter um segmento orientado em que a origem e a extremidade coincidam, (A,A) , por exemplo. Esse tipo de segmento é chamado de segmento nulo.

Dizemos que dois segmentos orientados têm o mesmo comprimento quando os segmentos de reta definidos por sua origem e por sua extremidade têm comprimentos iguais. Na figura 1, vemos que os segmentos orientados (A,B) e (B,A) têm o mesmo comprimento.

Dizemos que dois segmentos orientados são paralelos quando eles têm a mesma direção. Na figura 2, os segmentos orientados (A,B) e (C,D) são paralelos, pois têm a mesma direção.

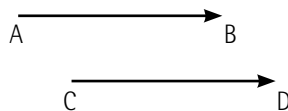


Figura 2 – Segmentos orientados paralelos (A,B) e (C,D)

Dizemos que dois segmentos orientados são colineares se eles estão sobre uma mesma reta. Na figura 3, os segmentos (E,F) e (M,N) são colineares.



Figura 3 – Segmentos orientados colineares (E,F) e (M,N)

Os segmentos orientados ainda podem ser classificados em segmentos orientados de mesmo sentido e segmentos orientados de sentidos opostos. Na figura 4, vemos que os segmentos orientados (C,D) e (A,B) têm o mesmo sentido, enquanto os segmentos orientados (P,Q) e (S,R) têm sentidos opostos.

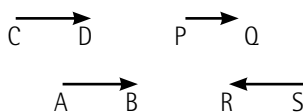


Figura 4 – Segmentos orientados. Os segmentos orientados (C,D) e (A,B) têm o mesmo sentido, enquanto os segmentos orientados (P,Q) e (S,R) têm sentidos opostos

Com base no conceito de segmento orientado, podemos definir um vetor. Um vetor \overrightarrow{AB} é o conjunto de todos os segmentos orientados (A,B) com mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Note que o vetor \overrightarrow{AB} tem como origem o ponto A e como extremidade o ponto B (figura 5).

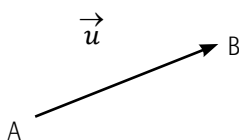


Figura 5 – Representação de um vetor

A notação de um vetor pode ser feita a partir dos pontos de origem e de extremidade, com uma seta por cima, que indica a característica vetorial. Um vetor pode ser indicado, ainda, por uma única letra minúscula, como \vec{u} , por exemplo.

1.2 Propriedades dos vetores

Considere o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

O vetor oposto ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

O módulo (tamanho ou comprimento) de um vetor é indicado por $|\vec{u}|$.

Dizemos que um vetor é unitário se ele tem módulo igual a 1, ou seja, para que \vec{u} seja unitário, devemos ter $|\vec{u}|=1$.

Seja \vec{v} um vetor de módulo qualquer. O versor de \vec{v} é o vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{v} , mas com módulo igual a 1. O versor de \vec{v} , denotado por \hat{v} , é calculado por:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Dizemos que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são iguais se eles têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido (figura 6).

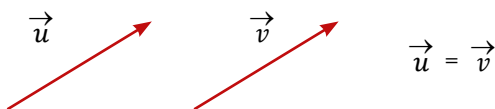


Figura 6 – Vetores iguais

Dizemos que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos se eles têm a mesma direção (figura 7).

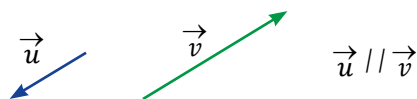


Figura 7 – Vetores paralelos, mas de sentidos opostos

Dizemos que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais ou perpendiculares quando há o ângulo de 90° entre eles (figura 8).

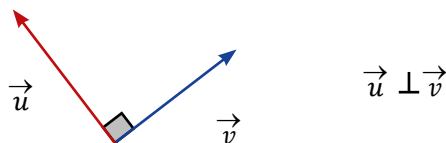


Figura 8 – Vetores perpendiculares

Dois vetores sempre estão contidos em um mesmo plano (figura 9). Três ou mais vetores podem ser classificados, quanto à sua orientação, em coplanares, quando estão contidos em um mesmo plano, e não coplanares, quando isso não ocorre (figura 10).

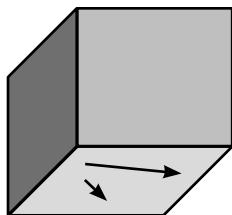


Figura 9 – Dois vetores definem um plano; logo, os vetores são sempre coplanares dois a dois

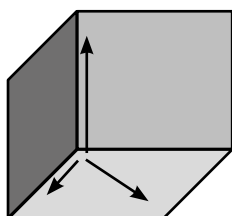


Figura 10 – Três vetores não coplanares

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Quais vetores são paralelos ao vetor \overrightarrow{AB} dado na figura 11?

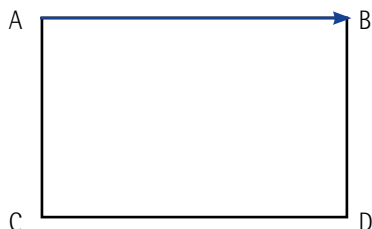


Figura 11 – Vetor \overrightarrow{AB}

Resolução

Os vetores paralelos ao vetor \overrightarrow{AB} são os que têm a mesma direção de \overrightarrow{AB} , mas podem ter o mesmo sentido ou sentido oposto ao vetor \overrightarrow{AB} .

Na figura 12, vemos que o vetor \overrightarrow{CD} é paralelo e tem o mesmo sentido de \overrightarrow{AB} .



Figura 12 – Vetor \overrightarrow{CD} paralelo, e com mesmo sentido do vetor \overrightarrow{AB}

Temos ainda os vetores que são paralelos a \overrightarrow{AB} , mas com sentidos opostos a ele. São esses os vetores \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{DC} mostrados na figura 13.

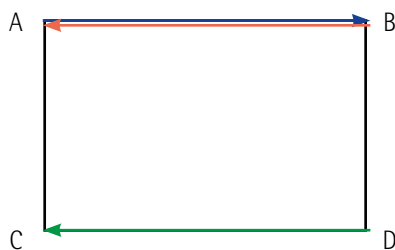


Figura 13 – Vetores \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{DC} , paralelos ao vetor \overrightarrow{AB} , mas de sentido oposto

Logo, os vetores paralelos ao vetor \overrightarrow{AB} são os vetores \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{DC} .

Exemplo 2

Quais vetores são perpendiculares ao vetor \overrightarrow{AB} dado na figura 14?

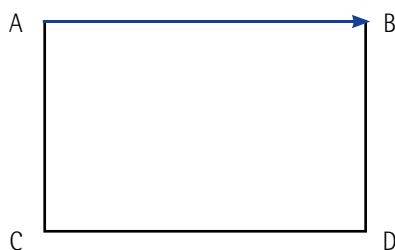


Figura 14 – Vetor \overrightarrow{AB}

Resolução

Os vetores perpendiculares ao vetor \overrightarrow{AB} são os que formam ângulo de 90° com o vetor \overrightarrow{AB} , em ambos os sentidos possíveis.

Vemos, na figura 15, que os vetores perpendiculares a \overrightarrow{AB} são os vetores \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{CA} e \overrightarrow{AC} .

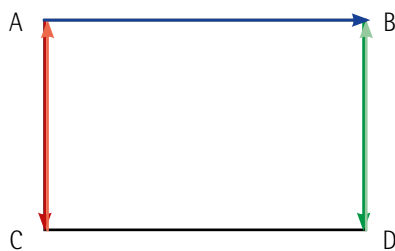


Figura 15 – Vetores perpendiculares ao vetor \overrightarrow{AB}

Exemplo 3

Quais vetores são paralelos ao vetor \overrightarrow{CA} na figura 16?

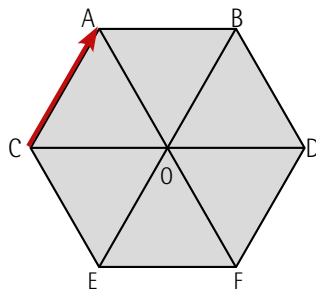


Figura 16 – Vetor \overrightarrow{CA} em um hexágono

Resolução

Os vetores paralelos a \overrightarrow{CA} têm que ter a mesma direção desse vetor, mas podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos.

Devido às características do hexágono, o único vetor paralelo a \overrightarrow{CA} e com mesmo sentido de \overrightarrow{CA} é o vetor \overrightarrow{FD} (figura 17).

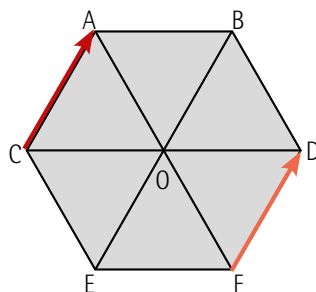


Figura 17 – Vetor \overrightarrow{FD} , paralelo a \overrightarrow{CA} e de mesmo sentido

Já os vetores paralelos a \overrightarrow{CA} , mas com sentidos opostos, são os "inversos" dos vetores \overrightarrow{CA} e \overrightarrow{FD} , ou seja, são os vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{DF} (figura 18).

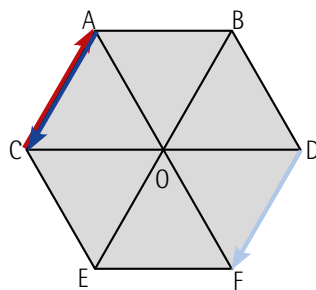


Figura 18 – Vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{DF} , paralelos a \overrightarrow{CA} , mas de sentidos opostos a ele

2 OPERAÇÕES COM VETORES

É frequente a necessidade de somar grandezas vetoriais, como forças, por exemplo. O procedimento para somar vetores é distinto do que usamos para somar escalares, como veremos a seguir.

2.1 Adição de vetores

Existem, basicamente, dois métodos para somar vetores graficamente:

- a regra do polígono;
- a regra do paralelogramo.

A regra do polígono para a soma de vetores é a aplicação do seguinte procedimento:

- colocamos os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro;
- traçamos o vetor soma a partir da origem do primeiro vetor da sequência até a extremidade do último vetor da sequência.

Por exemplo, considere os vetores da figura 19. A soma desses vetores, aplicando-se a regra do polígono, é ilustrada na figura 20.

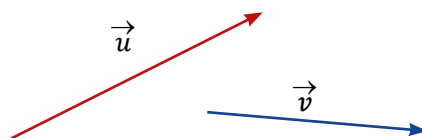


Figura 19 – Vetores \vec{u} e \vec{v}

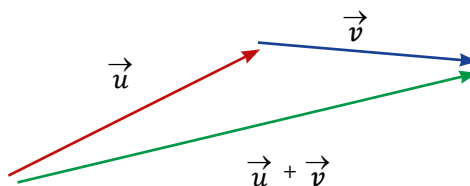


Figura 20 – Procedimento de soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} pela regra do polígono. Note que os vetores foram colocados em sequência e o vetor soma se inicia na origem do primeiro vetor e termina na extremidade do último vetor

Esse método pode ser aplicado, inclusive, para somar mais de dois vetores, como esquematizado nas figuras 21 e 22.

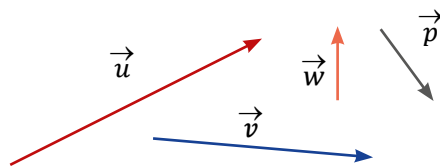


Figura 21 – Vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{p}

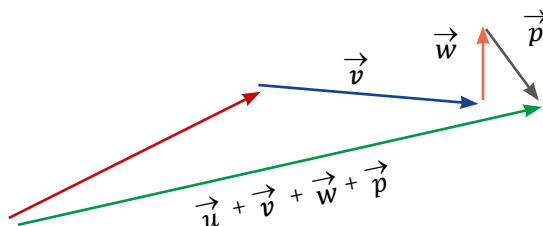


Figura 22 – Soma dos vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{p} pela regra do polígono. Note que os vetores foram colocados em sequência e que o vetor soma se inicia na origem do primeiro vetor e termina na extremidade do último vetor

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Usando o método do polígono, represente a soma dos vetores dados na figura 23.

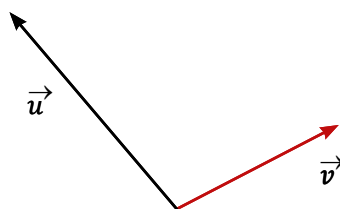


Figura 23 – Vetores \vec{u} e \vec{v}

Resolução

Pelo método do polígono, devemos ordenar os vetores de forma que a extremidade de um deles coincida com o final do outro. A ordem que adotamos nesse processo é indiferente.

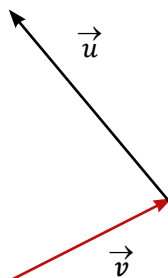


Figura 24 – Vetores \vec{u} e \vec{v} ordenados para aplicação da regra do polígono

O vetor soma é o vetor que se inicia no começo do primeiro vetor da sequência e termina na extremidade do último vetor (figura 25).

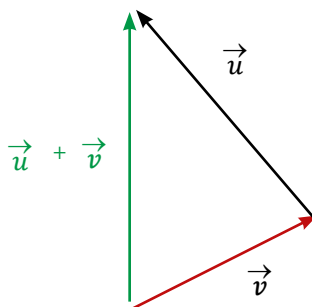


Figura 25 – Soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} , pela regra do polígono

Exemplo 2

Usando o método do polígono, represente a soma dos vetores dados na figura 26.

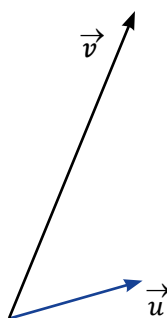


Figura 26 – Vetores \vec{u} e \vec{v}

Resolução

Pelo método do polígono, devemos ordenar os vetores de forma que a extremidade de um deles coincida com o final do outro. A ordem que adotamos nesse processo é indiferente.

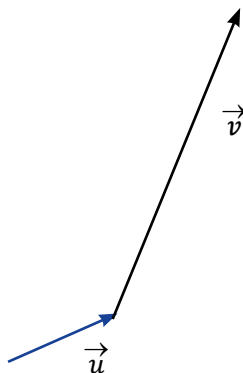


Figura 27 – Vetores \vec{u} e \vec{v} ordenados para aplicação da regra do polígono

O vetor soma é o vetor que se inicia no começo do primeiro vetor da sequência e termina na extremidade do último vetor (figura 28).

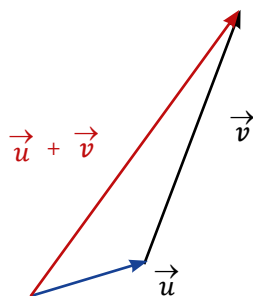


Figura 28 – Soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} , pela regra do polígono

Exemplo 3

Considere os vetores \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BD} sobre um hexágono regular, conforme indicado na figura 29.

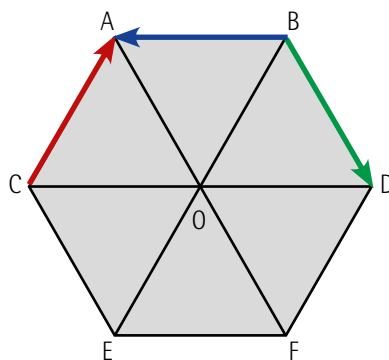


Figura 29 – Vetores \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BD} sobre um hexágono regular

Resolução

Para fazermos a soma de vetores pelo método do polígono, precisamos colocá-los em sequência, e, nesse processo, podemos substituir qualquer vetor por outro vetor idêntico (mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido), como feito na figura 30.

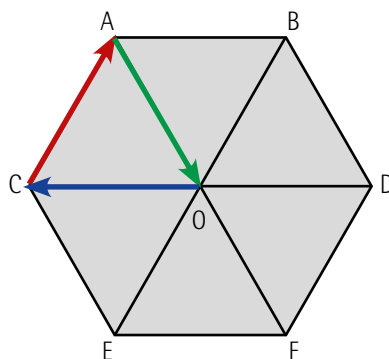


Figura 30 – Vetores \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{AO} e \overrightarrow{OC} , sobre um hexágono regular

Vemos, na figura 30, que os três vetores, quando em sequência para aplicar a regra do polígono, formam uma figura fechada, de forma que, se seguirmos a direção e o sentido dos vetores, a partir de qualquer ponto, voltamos a esse ponto inicial. Isso significa que a soma dos vetores é o vetor nulo (vetor de módulo igual a zero). Dessa forma, temos que:

$$\vec{CA} + \vec{BA} + \vec{BD} = \vec{0}$$

Outra forma de resolvermos esse exercício é trocando o vetor \vec{BD} pelo seu vetor idêntico \vec{AO} e vendo que a soma de \vec{CA} com \vec{AO} é o vetor \vec{CO} (figura 29). Esse vetor, por sua vez, é paralelo ao vetor \vec{BA} , mas com sentido oposto (figura 31), de forma que a soma final é um vetor nulo.

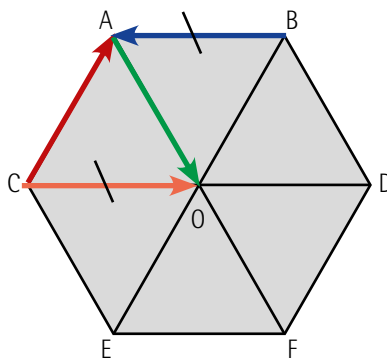


Figura 31 – Outro método para fazer a soma dos vetores indicados. O vetor \vec{CO} , em rosa, é a soma dos vetores \vec{CA} e \vec{AO} . A soma do vetor \vec{CO} com o vetor \vec{BA} resulta em um vetor nulo

Exemplo 4

Faça a soma dos vetores \vec{GH} e \vec{CA} dados na figura 32.

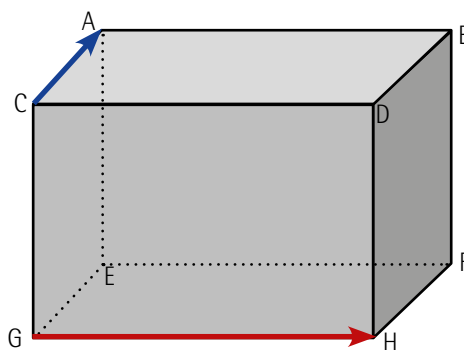


Figura 32 – Vetores \vec{GH} e \vec{CA}

Resolução

O primeiro passo, seguindo o método do polígono, é colocar os vetores em sequência. Podemos ver que o vetor \vec{CA} é idêntico ao vetor \vec{HF} . Então, podemos trocar \vec{CA} por \vec{HF} , conforme mostrado na figura 33.

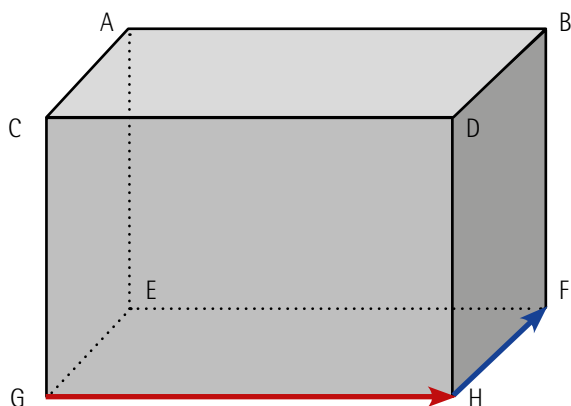


Figura 33 – Vetores \overrightarrow{GH} e \overrightarrow{HF} , esse último é paralelo a \overrightarrow{CA}

A soma, pelo método do polígono, é o vetor que se inicia na origem do primeiro vetor da sequência e termina na extremidade do último vetor. A soma dos vetores é, portanto, o vetor \overrightarrow{GF} (figura 34).

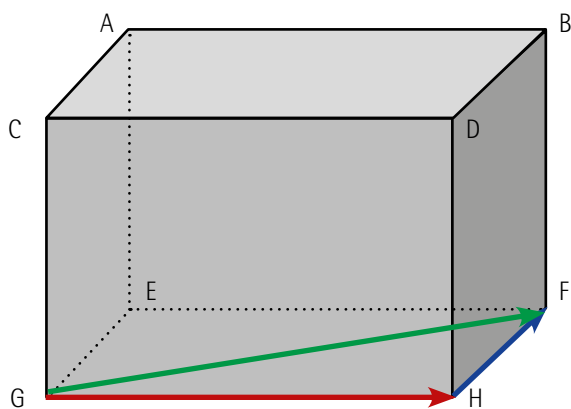


Figura 34 – Soma dos vetores \overrightarrow{GH} e \overrightarrow{HF} em verde

Note que o vetor \overrightarrow{GF} é idêntico ao vetor \overrightarrow{CB} . Logo, o vetor \overrightarrow{CB} é também uma resposta correta para a soma solicitada.

Exemplo 5

No exemplo anterior, fizemos a soma de dois vetores, mas o método do polígono permite somar diversos vetores de uma vez.

Considere os vetores \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{BF} e \overrightarrow{EG} da figura 35.

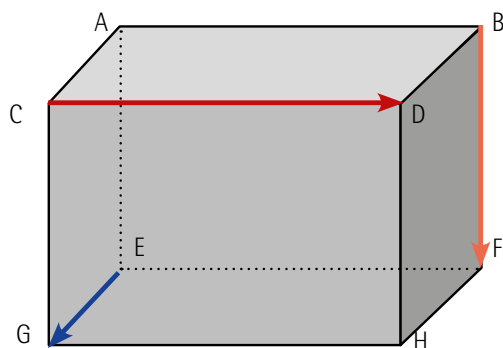


Figura 35 – Vetores \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{BF} e \overrightarrow{EG}

Resolução

Para fazer a soma dos vetores, precisamos ordenar os vetores da figura: isso deve ser feito de forma que eles continuem nas arestas do paralelogramo. Para tanto, podemos substituir o vetor \overrightarrow{EG} pelo vetor \overrightarrow{AC} e, também, substituir o vetor \overrightarrow{BF} pelo vetor \overrightarrow{DH} , já que eles são idênticos. Fazendo dessa maneira, temos a configuração a seguir.

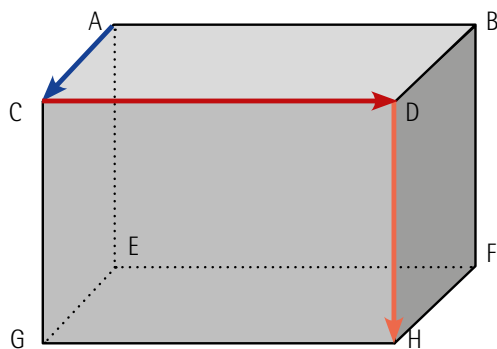


Figura 36 – Vetores ordenados para a soma

Com os vetores em sequência, pelo método do polígono, a soma dos vetores é o vetor que se inicia na origem do primeiro vetor e tem extremidade na extremidade do último vetor da sequência (figura 37).

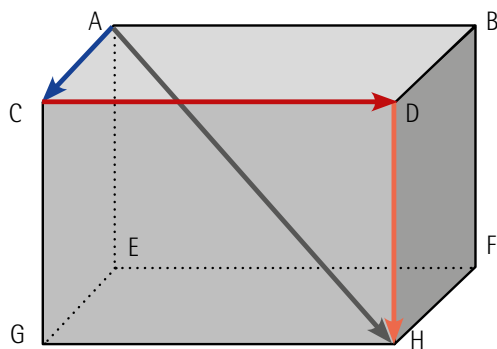


Figura 37 – Soma dos vetores indicada em cinza

Vemos, portanto, que a soma dos vetores \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{BF} e \overrightarrow{EG} é o vetor \overrightarrow{AH} .

Outro método para somar vetores não colineares é o método do paralelogramo, dado pela seguinte sequência de etapas:

- conectar a origem de dois vetores;
- traçar paralelas a esses dois vetores, formando um paralelogramo;
- verificar que o vetor soma se inicia na origem dos dois vetores e tem a extremidade na ponta oposta do paralelogramo.

A regra do paralelogramo, diferentemente da regra do polígono, só permite somar vetores dois a dois.

Nas figuras 38, 39 e 40, apresentamos a sequência para se fazer a soma de dois vetores pela regra do paralelogramo.

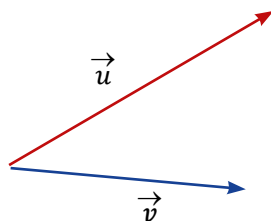


Figura 38 – Vetores \vec{u} e \vec{v} já conectados pelas origens

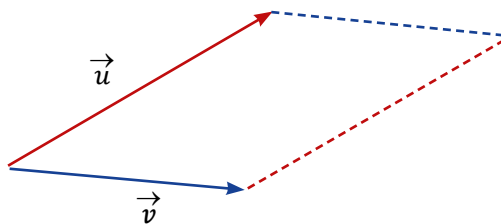


Figura 39 – Vetores \vec{u} e \vec{v} já conectados pelas origens e com segmentos de reta paralelos em tracejado

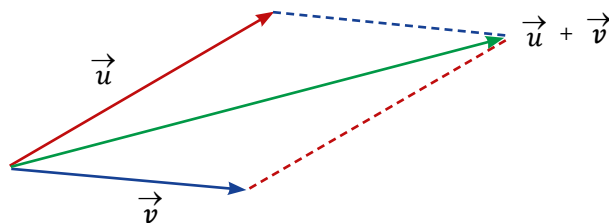


Figura 40 – Soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} pela regra do paralelogramo

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Para calcular a força resultante atuando sobre um corpo, precisamos fazer a soma dos dois vetores \vec{u} e \vec{v} ilustrados na figura 41.

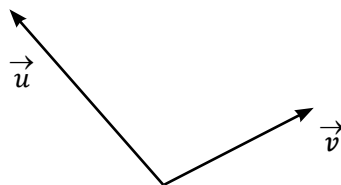


Figura 41 – Vetores \vec{u} e \vec{v} representando forças que atuam sobre um corpo

Resolução

Para fazer a soma de dois vetores, o resultado é o mesmo usando-se o método do paralelogramo ou o método do polígono para fazer a soma. Aqui, utilizaremos o método do paralelogramo.

Para somar dois vetores usando a regra do paralelogramo, devemos traçar paralelas aos vetores, formando um paralelogramo (figura 42).

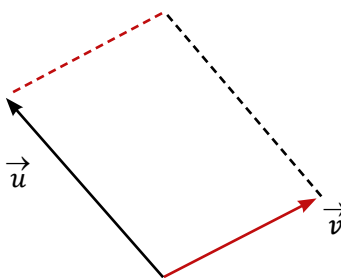


Figura 42 – Vetores \vec{u} e \vec{v} e suas paralelas

Em seguida, traçamos o vetor soma, que se inicia na origem dos dois vetores e termina no vértice oposto do paralelogramo (figura 43).

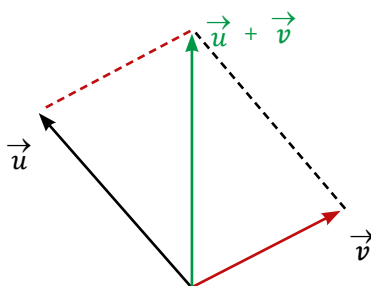


Figura 43 – Soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} pela regra do paralelogramo

Exemplo 2

Precisamos fazer a soma dos vetores indicados na figura 44.

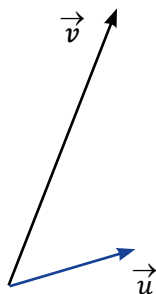


Figura 44 – Vetores \vec{u} e \vec{v}

Resolução

Para somar dois vetores usando a regra do paralelogramo, devemos traçar paralelas aos vetores, formando um paralelogramo (figura 45).

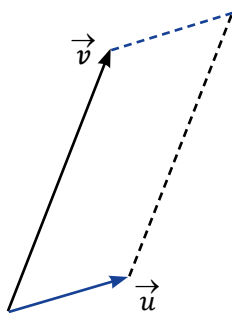


Figura 45 – Vetores \vec{u} e \vec{v} e suas paralelas

Em seguida, traçamos o vetor soma, que se inicia na origem dos dois vetores e termina no vértice oposto do paralelogramo (figura 46).

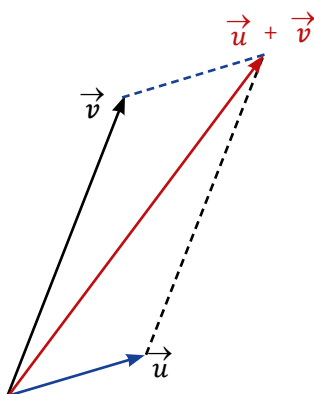


Figura 46 – Soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} pela regra do paralelogramo

A soma de vetores segue algumas propriedades, listadas a seguir.

- **Propriedade comutativa:** a ordem da soma dos vetores não altera o resultado. Ou seja:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

- **Propriedade de elemento neutro:** a soma de um vetor nulo, indicado por $\vec{0}$, a um vetor não altera o resultado. Ou seja:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

- **Propriedade do elemento oposto:** ao somarmos um vetor com seu oposto, o resultado é o vetor nulo. Ou seja:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

- **Propriedade associativa:** se temos a soma de mais de dois vetores, o resultado é o mesmo independentemente de quais vetores escolhamos para iniciar o processo de soma. Ou seja:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$



Observação

As prioridades quando realizamos cálculo são as potências, seguidas das multiplicações e das divisões, e, por último, das somas e das subtrações.

Os parênteses, os colchetes e as chaves, nessa ordem, têm como função alterar prioridades no cálculo. Logo, uma operação (ou um conjunto de operações) entre parênteses deve ser calculada primeiro. Por exemplo, $3 \cdot (4 - 1) = 3 \cdot (3) = 9$ dá um resultado completamente diferente da expressão calculada sem parênteses, em que a prioridade de cálculo é a multiplicação, conforme mostrado a seguir.

$$3 \cdot 4 - 1 = 12 - 1 = 11$$

Um vetor pode ser multiplicado por um escalar, ou seja, por um número, conforme será discutido a seguir.



Observação

O vetor nulo "ainda" é um vetor e é indicado por $\vec{0}$.

2.2 Multiplicação de vetor por escalar

O comprimento de um vetor é dado pelo seu módulo. Quando multiplicamos um vetor por um escalar, ou seja, por um número, podemos alterar o seu módulo e o seu sentido.

A figura 47 ilustra a multiplicação do vetor \vec{u} pelo escalar 3. Note que, nesse processo, o módulo do vetor resultante é 3 vezes o módulo do vetor original.

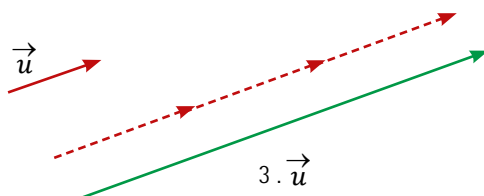


Figura 47 – Multiplicação do vetor \vec{u} pelo escalar 3



Observação

Seja n um número. Calcular $3 \cdot n$ é o equivalente a calcular $n + n + n$.

Quando o escalar é negativo, o vetor resultante da multiplicação tem sentido invertido, conforme ilustrado na figura 48.

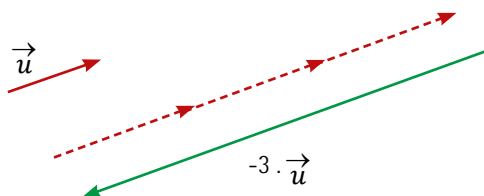


Figura 48 – Multiplicação do vetor \vec{u} pelo escalar -3

Então, para inverter o sentido de um vetor sem alterar seu módulo (figura 49), basta multiplicarmos esse vetor por -1.



Figura 49 – Vetores \vec{v} e $-\vec{v}$ paralelos, mas com sentidos opostos

Note que, quando multiplicamos um vetor por um escalar, o resultado é sempre um vetor paralelo ao vetor original.

Podemos resumir a multiplicação de um vetor \vec{u} por um escalar a da seguinte forma:

- o resultado é um vetor de mesmo sentido do vetor \vec{u} se $a > 0$;
- o resultado é um vetor de sentido oposto ao vetor \vec{u} se $a < 0$.



Observação

Dizer que um número n é maior do que zero é equivalente a dizer que esse número é positivo. Dizer que um número n é menor do que zero é equivalente a dizer que esse número é negativo. Se o número n é igual a zero, podemos dizer também que ele é nulo.

Caso multipliquemos um vetor por zero, o resultado será um vetor nulo. Ou seja:

$$\vec{u} \cdot 0 = \vec{0}$$

Temos, então, as propriedades mostradas a seguir para a multiplicação de vetores por escalar, sendo que a e b representam escalares.

- **Propriedade comutativa:** a ordem da multiplicação não altera o resultado. Ou seja:

$$a \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot a$$

- **Propriedade de elemento neutro:** a multiplicação de um vetor por 1 resulta nesse mesmo vetor. Ou seja:

$$\vec{u} \cdot 1 = \vec{u}$$

- **Propriedade distributiva:** ao multiplicarmos a soma de dois vetores por um escalar, isso é equivalente a multiplicar primeiro cada parcela da soma pelo escalar e, em seguida, somar os resultados. Isso aplica-se quando temos um vetor multiplicado por uma soma de escalares. Ou seja:

$$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$$

$$(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$$

- **Propriedade associativa:** se temos o produto de mais de dois escalares por um vetor, o resultado é o mesmo, independentemente de quais escalares escolhermos para iniciar o processo de multiplicação. Ou seja:

$$(a \cdot b) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})$$



Observação

O elemento neutro da soma é o número 0, enquanto o elemento neutro da multiplicação é o número 1.

3 VETORES: TRATAMENTO ALGÉBRICO

3.1 Vetor definido por dois pontos

Além de representar um vetor graficamente, como já fizemos, podemos representá-lo a partir de suas coordenadas em relação a uma base, mas primeiro precisamos ver o que é uma base.

Qualquer conjunto ordenado de vetores não paralelos constitui uma base. Essa base é usada como referência para representar outros vetores.

Por exemplo, considere os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 e uma base B dada por:

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

Imagine um vetor \vec{v} dado por:

$$\vec{v} = a.\vec{v}_1 + b.\vec{v}_2$$

Nesse caso, as coordenadas do vetor \vec{v} , na base B, são (a,b).

Um caso especial de bases corresponde às bases ortonormais, compostas por vetores unitários e ortogonais. O sistema de eixos que usamos para construir gráficos, tanto no plano quanto no espaço, é um exemplo de uma base ortonormal.



Observação

O termo "normal" refere-se a um ângulo de 90° . Dois vetores são ditos normais se há, entre eles, ângulo de 90° (figura 50).

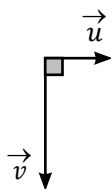


Figura 50 – Vetores normais

É um exemplo de base ortonormal, portanto, a base canônica $B = \{\hat{x}, \hat{y}\}$ em duas dimensões. Em três dimensões, a base canônica é dada por $B = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.



Observação

Na base canônica, conforme descrita, \hat{x} representa um versor, ou seja, tem módulo unitário e conserva apenas a direção e sentido do eixo ordenado x . O mesmo acontece com \hat{y} e \hat{z} .

Outra forma de representarmos a base canônica é usando os versores i, j e k , que correspondem, respectivamente, à direção e ao sentido dos eixos x, y e z . Nessa representação, a base canônica em duas dimensões é dada por $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$; em três dimensões, é dada por $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Dessa forma, um vetor \vec{v} bidimensional de coordenadas (a, b) no plano xOy pode ser representado por:

$$\vec{v} = a.\vec{i} + b.\vec{j} = a.\hat{x} + b.\hat{y} = (a, b)$$

De forma similar, em três dimensões, temos:

$$\vec{v} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k} = a.\hat{x} + b.\hat{y} + c.\hat{z} = (a, b, c)$$

Podemos definir um vetor a partir dos pontos que o limitam. Seja um vetor \vec{v} de origem no ponto $A = (a_1, a_2)$ e extremidade no ponto $B = (b_1, b_2)$. O vetor \vec{v} pode ser representado a partir da diferença das coordenadas desses pontos, sempre considerando as coordenadas do ponto da extremidade "menos" as coordenadas do ponto da origem. Vejamos.

$$\vec{v} = B - A$$

$$\vec{v} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2)$$

$$\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

A mesma ideia é aplicada no caso tridimensional. Seja um outro vetor \vec{v} , agora tridimensional, de origem no ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ e de extremidade no ponto $B = (b_1, b_2, b_3)$. Esse vetor pode ser descrito a partir das coordenadas dos dois pontos da seguinte forma:

$$\vec{v} = B - A$$

$$\vec{v} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3)$$

Expressando essa diferença, coordenada a coordenada, temos:

$$\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Exemplo de aplicação

Considere os pontos $A = (0,1)$ e $B = (5,4)$. Expresse o vetor \overrightarrow{AB} e o vetor \overrightarrow{BA} .

Resolução

Para definir um vetor a partir de dois pontos, basta fazermos a diferença, coordenada a coordenada, do ponto final do vetor e do ponto inicial do vetor.

Para o vetor \overrightarrow{AB} , com $A = (0,1)$ e $B = (5,4)$, temos:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos, ficamos com:

$$\overrightarrow{AB} = (5,4) - (0,1)$$

Agrupando coordenada a coordenada, chegamos a:

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 0, 4 - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (5,3)$$

De forma similar, para o vetor \overrightarrow{BA} , com $A = (0,1)$ e $B = (5,4)$, temos:

$$\overrightarrow{BA} = (x_A, y_A) - (x_B, y_B)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos, ficamos com:

$$\overrightarrow{BA} = (0,1) - (5,4)$$

Agrupando coordenada a coordenada, chegamos a:

$$\overrightarrow{BA} = (0 - 5, 1 - 4)$$

$$\overrightarrow{BA} = (-5, -3)$$

Note que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Podemos representar esses pontos e os vetores em um plano cartesiano (figuras 51 e 52).

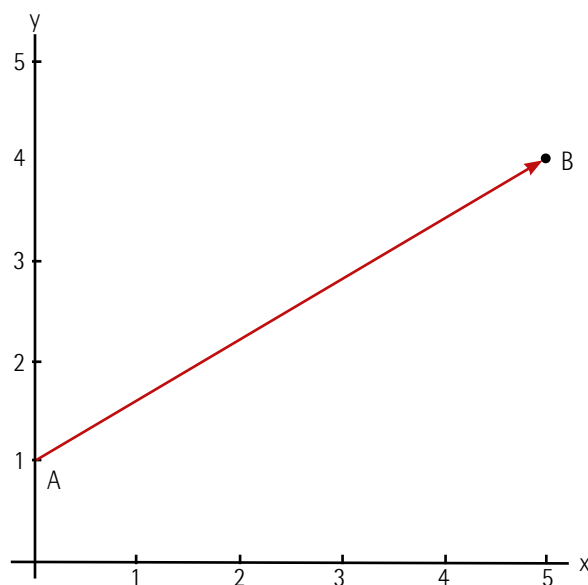


Figura 51 – Vetor \overrightarrow{AB}

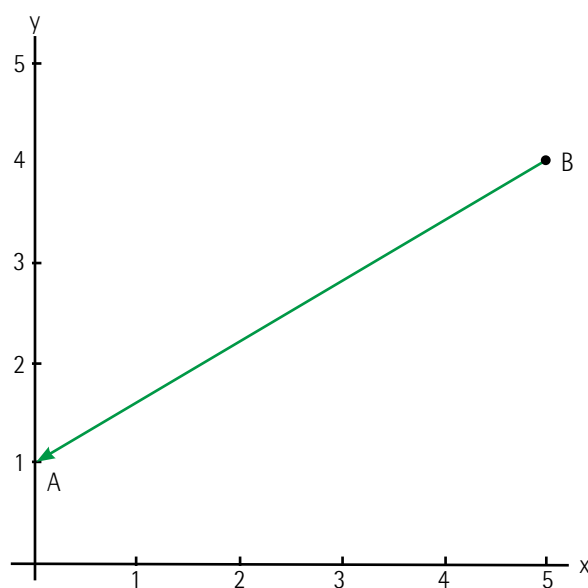


Figura 52 – Vetor \overrightarrow{BA}



Observação

Note que $A=(x,y)$ representa um ponto, enquanto $\overrightarrow{AB}=(x,y)$ indica um vetor.

3.2 Módulo de vetor

Vimos que o módulo de um vetor é o mesmo que o tamanho de um vetor. Considere um vetor bidimensional $\vec{v} = (x, y)$. O módulo desse vetor, representado por $|\vec{v}|$, é calculado pela seguinte expressão:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

No caso de um vetor tridimensional, $\vec{v} = (x, y, z)$, por exemplo, o seu módulo é calculado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ou seja, o módulo de qualquer vetor é calculado como a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas coordenadas.

Exemplo de aplicação

Considere o vetor $\vec{u} = (2, 4)$. Podemos determinar seu módulo a partir de suas coordenadas pelo seguinte cálculo:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Resolução

Substituindo as coordenadas dadas na expressão e fazendo os cálculos, ficamos com:

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 16}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{20}$$

$$|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$$

Logo, o módulo do vetor $\vec{u} = (2, 4)$ é $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$.



Observação

Quando temos $\sqrt{20}$, podemos escrever o número 20 como:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

Assim, no cálculo da raiz, ficamos com:

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5}$$

Como a raiz quadrada é a operação inversa de se elevar algo ao quadrado, temos:

$$\sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere o vetor $\vec{u} = (3, 4, 1)$. Podemos determinar seu módulo a partir de suas coordenadas pelo seguinte cálculo:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Resolução

Substituindo as coordenadas dadas na expressão e fazendo os cálculos, ficamos com:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 1}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{26}$$

Logo, o módulo do vetor $\vec{u} = (3, 4, 1)$ é $|\vec{u}| = \sqrt{26}$.

Exemplo 2

Calcule o versor do vetor $\vec{u} = (1, 2, 5)$.

Resolução

Vimos que um versor é um vetor de comprimento unitário. Dessa forma, o versor do vetor \vec{u} , indicado por \hat{u} , deve conservar as informações de direção e de sentido desse vetor e ter tamanho unitário.

Como podemos fazer um vetor qualquer se tornar unitário? Basta dividi-lo pelo seu comprimento, ou seja, basta dividi-lo pelo seu módulo.

Calculamos, primeiramente, o módulo do vetor \vec{u} a partir de suas coordenadas:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 25}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{30}$$

Calculamos, então, o versor de \vec{u} :

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\hat{u} = \frac{(1, 2, 5)}{\sqrt{30}}$$

$$\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right)$$

Chegamos ao versor de \vec{u} , que conserva as informações de direção e de sentido de \vec{u} , mas tem tamanho unitário. Na matemática, não costumamos expressar valores com raízes no denominador de frações: logo, vamos racionalizar a resposta.

Voltando à passagem anterior, vamos multiplicar o resultado por $\sqrt{30} / \sqrt{30}$:

$$\hat{u} = \frac{(1, 2, 5)}{\sqrt{30}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}}$$

Mas $\sqrt{30} \cdot \sqrt{30}$ é o mesmo que $(\sqrt{30})^2$. Logo:

$$\hat{u} = \frac{(1,2,5)}{(\sqrt{30})^2} \cdot \sqrt{30}$$

$$\hat{u} = \frac{(1,2,5)}{30} \cdot \sqrt{30}$$

$$\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{30}, \frac{5 \cdot \sqrt{30}}{30} \right)$$

Lembramos que as duas respostas às quais chegamos estão corretas, mas a última tem um rigor matemático maior.



Observação

Esteja preparado para racionalizar frações, principalmente em provas de múltipla escolha, em que as alternativas podem ter frações racionalizadas ou não.



Saiba mais

Para saber mais sobre racionalização de denominadores de frações, veja o vídeo no endereço:

KHAN ACADEMY. *Introdução à racionalização de denominadores*. [s.d.]b. Disponível em: <https://cutt.ly/CnBvG2W>. Acesso em: 18 jun. 2021.

3.3 Operações com vetores

Tratamos da soma de vetores e da multiplicação de vetores por escalar de forma gráfica. Agora, podemos usar a representação de um vetor por suas coordenadas para analisar como fazer essas operações matemáticas.

3.3.1 Soma de vetores

Sejam dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$. A soma desses dois vetores é dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ou seja, na soma de vetores, é feita a soma coordenada a coordenada.

No caso tridimensional, o tratamento é o mesmo. Sejam dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. A soma desses dois vetores é dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$

Fazendo a soma coordenada a coordenada, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$



Lembrete

Vimos os métodos de soma de vetores de forma gráfica, e esses métodos são dois. No primeiro, podemos colocar os vetores em sequência, e o vetor soma será o que se inicia no começo do primeiro vetor da soma e termina no final do último vetor da soma. No segundo, conhecido como método do paralelogramo, juntamos as origens de dois vetores, e o vetor soma é dado pela diagonal do paralelogramo que se inicia na origem desses vetores.

Os métodos gráficos e algébricos de soma de vetores devem retornar os mesmos resultados.

Exemplo de aplicação

Uma bola de bilhar sofre duas forças distintas, $\vec{F}_1 = (0, 1)$ e $\vec{F}_2 = (-2, 3)$, ao ser atingida por duas outras bolas durante um jogo. Calcule a força resultante \vec{F}_R que atua sobre essa primeira bola de bilhar, dada pela soma das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

Resolução

Calculando a soma das forças, temos:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_R = (0,1) + (-2,3)$$

Como a soma de vetores é feita coordenada a coordenada, ficamos com:

$$\vec{F}_R = (0 + (-2), 1 + 3)$$

$$\vec{F}_R = (-2,4)$$

Logo, a força resultante é dada pelo vetor $(-2,4)$.



Observação

O que significa um vetor $(-2,4)$?

O vetor $(-2,4)$ tem extremidade no ponto $(-2,4)$ e origem no ponto $(0,0)$. Podemos representar esse vetor em um plano cartesiano, como ilustrado na figura 53.

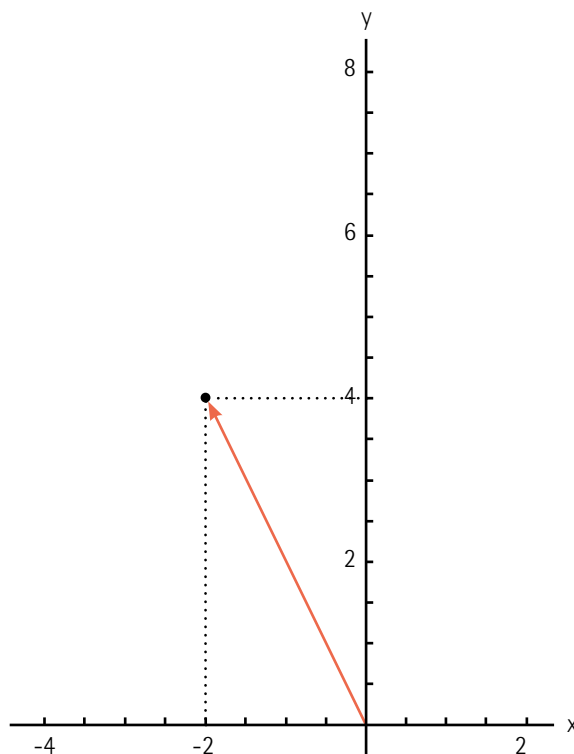


Figura 53 – Vetor $(-2,4)$ representado em um plano cartesiano

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Calcule a soma dos vetores $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, 2)$.

Resolução

Basta somarmos coordenada a coordenada da seguinte forma:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 2, 1) + (2, 0, 2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (3 + 2, 2 + 0, 1 + 2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (5, 2, 3)$$

Logo, a soma dos vetores dados resulta no vetor $(5, 2, 3)$.

Exemplo 2

Calcule a soma dos vetores $\vec{u} = (1, 2, 1, 4)$ e $\vec{v} = (2, 0, -2, -1)$.

Resolução

Basta somarmos coordenada a coordenada da seguinte forma:

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 2, 1, 4) + (2, 0, -2, -1)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (1 + 2, 2 + 0, 1 + (-2), 4 + (-1))$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 2, -1, 3)$$

Logo, a soma dos vetores $\vec{u} = (1, 2, 1, 4)$ e $\vec{v} = (2, 0, -2, -1)$ é o vetor $(3, 2, -1, 3)$.

Exemplo 3

Considere uma carga elétrica. Próximas a ela, estão duas outras cargas que produzem forças elétricas $\vec{F}_1 = (3, 4, 8)$ e $\vec{F}_2 = (0, -4, 1)$ na primeira carga.

Resolução

Sabendo que a força resultante \vec{F}_R na primeira carga é dada pela soma das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , podemos calculá-la da seguinte forma:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_R = (3, 4, 8) + (0, -4, 1)$$

Somando coordenada a coordenada, temos:

$$\vec{F}_R = (3 + 0, 4 - 4, 8 + 1)$$

$$\vec{F}_R = (3, 0, 9)$$

Logo, a força elétrica resultante na primeira carga, causada pelas duas outras cargas, é $\vec{F}_R = (3, 0, 9)$.



Saiba mais

Para saber mais sobre força elétrica, consulte:

YOUNG, H. D. *Física III: eletromagnetismo* – Young e Freedman. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

3.3.2 Multiplicação de vetor por escalar

De forma similar à soma de vetores, na multiplicação de um vetor por um escalar, basta multiplicar cada componente do vetor pelo escalar.

Seja um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e um escalar a . A multiplicação desse vetor pelo escalar é dada por:

$$a\vec{u} = a.(x_1, y_1)$$

$$a\vec{u} = (a.x_1, a.y_1)$$

O mesmo tratamento é aplicado no caso tridimensional. Seja um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e um escalar a . A multiplicação desse vetor pelo escalar é dada por:

$$a\vec{u} = a.(x_1, y_1, z_1)$$

Fazendo a multiplicação coordenada a coordenada, ficamos com:

$$a\vec{u} = (a.x_1, a.y_1, a.z_1)$$

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Considere a velocidade inicial representada pelo vetor $\vec{v}_0 = (1, 0, 2)$. Qual vetor representa a velocidade final, após dado tempo, dada pelo triplo da velocidade inicial?

Resolução

Temos aqui uma aplicação da multiplicação de um vetor, no caso, $\vec{v}_0 = (1,0,2)$, por um escalar, no caso, 3 (calcular o triplo de algo equivale a multiplicar por 3). Fazendo o cálculo, temos:

$$\vec{v} = 3 \cdot \vec{v}_0$$

Substituindo o vetor $\vec{v}_0 = (1,0,2)$ na expressão anterior, chegamos a:

$$\vec{v} = 3 \cdot (1,0,2)$$

Da multiplicação de escalar por vetor, temos:

$$\vec{v} = (3 \cdot 1, 3 \cdot 0, 3 \cdot 2)$$

$$\vec{v} = (3, 0, 6)$$

Logo, o triplo de $\vec{v}_0 = (1,0,2)$ é $\vec{v} = (3,0,6)$.

Exemplo 2

Seja $\vec{u} = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (4,1,0)$, calcule $3\vec{u} - \vec{v}$.

Resolução

Nesse exemplo, temos soma de vetor (calcular a diferença de vetores não deixa de ser um tipo de soma) e multiplicação de vetor por escalar. O primeiro passo é substituir os vetores na expressão pedida:

$$3\vec{u} - \vec{v} = 3 \cdot (1,2,3) - (4,1,0)$$

Pela prioridade de cálculo, devemos começar com a multiplicação de vetor por escalar:

$$3\vec{u} - \vec{v} = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3) - (4,1,0)$$

$$3\vec{u} - \vec{v} = (3,6,9) - (4,1,0)$$

Fazemos, então, a soma (ou a subtração, o que é equivalente) de vetores, coordenada a coordenada:

$$3\vec{u} - \vec{v} = (3 - 4, 6 - 1, 9 - 0)$$

$$3\vec{u} - \vec{v} = (-1, 5, 9)$$

Logo, para os vetores \vec{u} e \vec{v} dados, a expressão $3\vec{u} - \vec{v}$ resulta no vetor $(-1,5,9)$.

Exemplo 3

Calcule x de forma que $\vec{w} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$, para $\vec{w} = (1, 20)$, $\vec{u} = (x, 4)$ e $\vec{v} = (2, 0)$.

Resolução

Começamos substituindo os vetores na expressão dada:

$$\vec{w} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$(1, 20) = 5.(x, 4) - 2.(2, 0)$$

Pela prioridade de cálculo, devemos começar com as multiplicações de vetores pelos escalares:

$$(1, 20) = (5.x, 5.4) - (2.2, 2.0)$$

$$(1, 20) = (5.x, 20) - (4, 0)$$

Calculamos, então, a soma (ou diferença, o que é equivalente) de vetores, coordenada a coordenada:

$$(1, 20) = (5.x - 4, 20 - 0)$$

$$(1, 20) = (5.x - 4, 20)$$

Da igualdade de vetores, temos que eles devem ser iguais coordenada a coordenada. Na segunda coordenada, já temos uma expressão verdadeira ($20 = 20$). Na primeira coordenada, temos a seguinte equação:

$$1 = 5x - 4$$

Isolando x , ficamos com:

$$5x - 4 = 1$$

$$5x = 1 + 4$$

$$5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5}$$

$$x = 1$$

Logo, o valor de x que satisfaz à expressão $\vec{w} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$ para os vetores dados é $x = 1$.

4 DEPENDÊNCIA LINEAR ENTRE VETORES

Considere dois vetores, \vec{u} e \vec{v} . Dizemos que há dependência linear entre esses dois vetores ou, ainda, que esses vetores são linearmente dependentes se:

$$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$$

Na equação, a é um escalar.

Dessa equação, concluímos que os vetores \vec{u} e \vec{v} serão linearmente dependentes (condição abreviada por LD) se forem paralelos a uma mesma reta. Caso contrário, serão vetores linearmente independentes (condição abreviada por LI).

Esse conceito pode ser ampliado para o caso de mais de dois vetores. De forma similar, dizemos que um vetor \vec{w} é combinação linear dos vetores \vec{u} e \vec{v} se ele puder ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$

Na equação, a e b são escalares.

Dessa equação, concluímos que os vetores \vec{w} , \vec{u} e \vec{v} serão linearmente dependentes (condição abreviada por LD) se forem paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, serão vetores linearmente independentes (condição abreviada por LI).



Lembrete

Ao estudarmos dependência linear de vetores, precisamos relembrar a soma de vetores e o produto por escalar. Na soma de dois vetores, somamos coordenada a coordenada. No produto de um vetor por um escalar, ou seja, por um número, multiplicamos coordenada a coordenada por esse escalar.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-5, -10)$, verifique se eles são linearmente dependentes (LD) ou linearmente independentes (LI).

Resolução

Para que os vetores sejam linearmente dependentes, deveremos ter:

$$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$$

Ou, de forma similar:

$$\vec{v} = b \cdot \vec{u}$$

Substituindo as coordenadas dos vetores na expressão, temos:

$$(-5, -10) = b \cdot (1, 2)$$

Do produto de um escalar por um vetor, vemos que:

$$(-5, -10) = (b \cdot 1, b \cdot 2)$$

Lembramos que a igualdade de vetores implica igualdade coordenada a coordenada. Assim, chegamos ao sistema de equações lineares mostrado a seguir, em que cada equação é dada por uma coordenada.

$$\begin{cases} -5 = b \cdot 1 \\ -10 = b \cdot 2 \end{cases}$$

Isolando b em ambas equações, ficamos com:

$$\begin{cases} b = -\frac{5}{1} = -5 \\ b = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

Como existe valor de b que satisfaça simultaneamente às duas equações do sistema, os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-5, -10)$ são linearmente dependentes (LD).

Poderíamos chegar a essa mesma conclusão observando que os vetores, mesmo com sentidos opostos, são paralelos.

Exemplo 2

Determine x para que os vetores $\vec{u} = (1, 6)$ e $\vec{v} = (4, 2x - 1)$ sejam linearmente dependentes (LD).

Resolução

Começamos escrevendo a relação de dependência linear. Ou seja:

$$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$$

Substituímos na relação os vetores dados:

$$(1, 6) = a \cdot (4, 2x - 1)$$

Do produto de um vetor por um escalar, temos:

$$(1,6) = (a.4, a.(2x - 1))$$

Da igualdade de vetores, vemos que eles devem ser iguais coordenada a coordenada, o que nos leva a um sistema de equações, em que cada equação se refere a uma coordenada. Vejamos.

$$\begin{cases} 1 = 4.a \\ 6 = a.(2x - 1) \end{cases}$$

Temos um sistema com duas equações em duas incógnitas, a e x . Isolando a na primeira equação e, em seguida, substituindo a expressão encontrada na segunda equação, temos:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ 6 = a.(2x - 1) \end{cases}$$

$$6 = \frac{1}{4} \cdot (2x - 1)$$

$$6 = \frac{1}{4} \cdot 2x - \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$6 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Iniciamos o processo para isolar x :

$$\frac{x}{2} = 6 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{24 + 1}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{25}{4}$$

$$x = 2 \cdot \frac{25}{4}$$

$$x = \frac{25}{2}$$

Logo, $x = 25 / 2$ faz com que os vetores dados sejam linearmente dependentes (LD).



Saiba mais

Para ler mais sobre a manipulação de equações desse exemplo, bem como sobre a soma de frações, visite:

RIBEIRO, F. M. A. *Revisão de alguns conceitos de matemática*. [s.d.]a. Disponível em: https://bit.ly/rev_matematica1. Acesso em: 15 dez. 2020.

Exemplo de aplicação

Dados os vetores $\vec{w} = (1, 2, 3)$, $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$, determine a e b de forma que o vetor \vec{w} seja combinação linear (CL) dos vetores \vec{u} e \vec{v} .

Resolução

Para que o vetor \vec{w} seja combinação linear (CL) dos vetores \vec{u} e \vec{v} , devemos ter:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Substituindo os vetores dados na igualdade, ficamos com:

$$(1, 2, 3) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1)$$

Da multiplicação de um escalar por um vetor, temos:

$$(1, 2, 3) = (a, 0, a) + (0, b, b)$$

A soma de vetores é feita coordenada a coordenada. Logo:

$$(1, 2, 3) = (a + 0, 0 + b, a + b)$$

$$(1, 2, 3) = (a, b, a + b)$$

De forma semelhante, a igualdade de vetores também implica que eles sejam iguais coordenada a coordenada, o que nos leva a um sistema linear de equações, no qual cada equação representa uma das coordenadas do vetor. Vejamos.

$$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = b \\ 3 = a + b \end{cases}$$

As duas primeiras equações do sistema já fornecem, de forma direta, os valores de a e b , mas precisamos verificar se esses valores satisfazem à terceira equação.

Substituindo $a = 1$ e $b = 2$ na terceira equação, temos:

$$3 = 1 + 2$$

$$3 = 3$$

Vemos que se trata de uma expressão verdadeira. Logo, $a = 1$ e $b = 2$ também satisfazem à terceira equação. Desse modo, $a = 1$ e $b = 2$ fazem com que o vetor \vec{w} seja combinação linear (CL) dos vetores \vec{u} e \vec{v} .



Observação

Sistemas de equações lineares podem ser resolvidos por vários métodos, de acordo com a situação. Os métodos mais comuns de resolução de sistemas de equações são os métodos da:

- substituição;
- igualdade;
- subtração.

No método da substituição, isolamos uma variável em uma das equações e fazemos sua substituição nas demais. No método da igualdade, para duas equações, isolamos a mesma variável e, em seguida, igualamos as duas equações. No método da subtração, subtraímos uma equação da outra de forma que a equação resultante não dependa mais de uma das variáveis.



Resumo

Vetor é uma entidade matemática que tem módulo (ou intensidade), direção e sentido. Um vetor pode ser representado por uma seta.

Os vetores podem ser:

- paralelos, quando têm mesma direção;
- perpendiculares, quando formam ângulo de 90° entre si.

A soma de vetores pode ser feita graficamente por dois métodos:

- regra do polígono;
- regra do paralelogramo.

Na regra do polígono, os vetores são ordenados de forma que a origem do próximo coincida com a extremidade do seguinte. A soma dos vetores é o vetor que começa na origem do primeiro vetor da sequência e tem extremidade no último vetor da sequência.

A regra do paralelogramo diz que, para somar dois vetores, basta traçarmos as paralelas a cada vetor, formando um paralelogramo. A soma será o vetor cuja origem coincide com a dos vetores e tem extremidade no vértice oposto do paralelogramo.

A multiplicação de um vetor por um escalar pode alterar o módulo e o sentido de um vetor, mas não a sua direção.

Um vetor \vec{v} bidimensional, de coordenadas (a,b) no plano xy , pode ser representado por:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} = a\hat{x} + b\hat{y} = (a,b)$$

Em três dimensões, temos:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = (a,b,c)$$

Podemos definir um vetor a partir dos pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\vec{v} = B - A$$

$$\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

O módulo do vetor $\vec{v} = (x, y)$, representado por $|\vec{v}|$, é calculado pela seguinte expressão:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

No caso de um vetor tridimensional, o módulo do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$, representado por $|\vec{u}|$, é calculado pela seguinte expressão:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sejam dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$. A soma desses dois vetores é dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

No caso tridimensional, o tratamento é similar ao anterior. Sejam dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. A soma desses dois vetores é dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Concluimos que, na soma de vetores, é feita a soma coordenada a coordenada.

De forma equivalente à soma de vetores, na multiplicação de vetor por escalar, basta multiplicar cada componente do vetor pelo escalar. Seja um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e um escalar a . A multiplicação desse vetor pelo escalar é dada por:

$$a \cdot \vec{u} = a \cdot (x_1, y_1)$$

$$a \cdot \vec{u} = (a \cdot x_1, a \cdot y_1)$$

O mesmo tratamento é aplicado no caso tridimensional. Seja um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e um escalar a . A multiplicação desse vetor pelo escalar é dada por:

$$a \cdot \vec{u} = a \cdot (x_1, y_1, z_1)$$

$$a \cdot \vec{u} = (a \cdot x_1, a \cdot y_1, a \cdot z_1)$$

Dizemos que há dependência linear entre esses dois vetores ou, ainda, que esses vetores são linearmente dependentes se:

$$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$$

Na equação, a é um escalar.

Dessa equação, concluímos que os vetores \vec{u} e \vec{v} serão vetores linearmente dependentes (condição abreviada por LD) se forem paralelos a uma mesma reta. Caso contrário, serão vetores linearmente independentes (condição abreviada por LI).

Dizemos que um vetor \vec{w} será uma combinação linear (CL) dos vetores \vec{u} e \vec{v} , se o vetor \vec{w} puder ser escrito da forma:

$$\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$

Na igualdade, a e b são escalares.

Os vetores \vec{w} , \vec{u} e \vec{v} serão linearmente dependentes (condição abreviada por LD) se forem paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, serão linearmente independentes (condição abreviada por LI).



Exercícios

Questão 1. Considere o vetor $\vec{r} = (x, y)$. O módulo do vetor \vec{r} , indicado por r ou $|\vec{r}|$, é dado por $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Essa relação pode ser observada na figura a seguir.

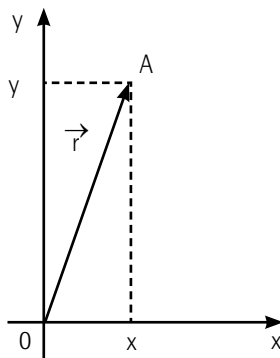


Figura 54 – Vetor $\vec{r} = (x, y)$.

O módulo do vetor \vec{r} é igual à distância entre os pontos O e A (vide figura). A distância entre esses pontos é a hipotenusa do triângulo observado, ou seja, é a raiz quadrada da soma dos lados ao quadrado (Teorema de Pitágoras).

Com base no exposto, assinale a alternativa correta.

- A) Se $\vec{r} = (3, -6)$, então $|\vec{r}| = \sqrt{81} = 9$.
- B) Se $\vec{r} = (3, 4)$, então $|\vec{r}| = \sqrt{49} = 7$.
- C) Se $\vec{r} = (-3, 4)$, então $|\vec{r}| = \sqrt{1} = 1$.
- D) Se $\vec{r} = (-3, 6)$, então $|\vec{r}| = \sqrt{9} = 3$.
- E) Se $\vec{r} = (3, -6)$, então $|\vec{r}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Resposta correta: alternativa E.

Resolução da questão

Se $\vec{r} = (3, -6)$, então $|\vec{r}| = 3\sqrt{5}$, pois $|\vec{r}| = \sqrt{(3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 3} = 3\sqrt{5}$.

Se $\vec{r} = (3, 4)$, então $|\vec{r}| = 5$, pois $|\vec{r}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Se $\vec{r} = (-3, 4)$, então $|\vec{r}| = 5$, pois $|\vec{r}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Se $\vec{r} = (-3, 6)$, então $|\vec{r}| = 3\sqrt{5}$, pois $|\vec{r}| = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 3} = 3\sqrt{5}$.

Questão 2. Para determinarmos o versor \vec{u} de um vetor \vec{s} , de módulo $|\vec{s}|$, devemos fazer o seguinte cálculo: $\vec{u} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$.

O versor \vec{u} do vetor \vec{s} é um vetor unitário (de módulo igual a 1), de mesma direção e de mesmo sentido de \vec{s} .

Com base no exposto, assinale a alternativa correta.

A) Se $\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, então o versor de \vec{s} é igual a $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{3}}\vec{k}$.

B) Se $\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, então o versor de \vec{s} é igual a $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{17}}\vec{k}$.

C) Se $\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, então o versor de \vec{s} é igual a $\vec{u} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} - \frac{3}{7}\vec{k}$.

D) Se $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}$, então o versor de \vec{s} é igual a $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{6}\vec{k}$.

E) Se $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}$, então o versor de \vec{s} é igual a $\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{i} + \frac{3}{10}\vec{j} - \frac{1}{10}\vec{k}$.

Resposta correta: alternativa B.

Resolução da questão

Se $\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, então o versor de \vec{s} é igual a $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{17}}\vec{k}$, conforme calculado a seguir.

$$\vec{u} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \rightarrow \vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-3)^2}}$$

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{4 + 4 + 9}} \rightarrow \vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{17}} \rightarrow \vec{u} = \frac{2\vec{i}}{\sqrt{17}} + \frac{2\vec{j}}{\sqrt{17}} - \frac{3\vec{k}}{\sqrt{17}}$$

Se $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, então o versor de \vec{s} é igual a $\vec{u} = \frac{2\vec{i}}{\sqrt{14}} + \frac{3\vec{j}}{\sqrt{14}} - \frac{\vec{k}}{\sqrt{14}}$, conforme calculado a seguir.

$$\vec{u} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \rightarrow \vec{u} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2}}$$

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{4+9+1}} \rightarrow \vec{u} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{14}} \rightarrow \vec{u} = \frac{2\vec{i}}{\sqrt{14}} + \frac{3\vec{j}}{\sqrt{14}} - \frac{1\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

[illegible]