Raccolta possibili esercizi d'esame

Per ogni prova d'esame sono forniti 4 esercizi tra cui sceglierne 3 (ognuno vale 10 punti). Nel caso si usino tre linguaggio diversi c'è un bonus aggiuntivo di un punto.

1. (Esame 21/01/19) L'area del cerchio (sfera 2D) vale πr^2, il volume della sfera 3D vale $4/3\pi r^3$. Non è difficile immaginare che la sfera 4D abbia volume αr^4. Determinare α con il metodo Monte Carlo. Verificare che il valore tenda a $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}r^n$ (n dimesioni della sfera) all'aumentare di N (numero di estrazioni). La funzione Γ (Gamma) è disponibile in ROOT (TMath).

2. Si risolva il problema elettrostatico (2D) di un dipolo al centro di un quadrato il cui perimentro è mantenuto a $V = 0$. Si grafichi l'andamento della componente del campo elettrico normale all'asse formato dai punti equidistanti alle due cariche.

3. (Esame 21/01/19) Uno spettrometro di massa misura la distanza tra il punto di ingresso degli ioni nella regione di campo magnetico e il loro punto di rivelazione (diametro della circonferenza). Il raggio di tale circonferenza è dato da:

   $$r = \sqrt{\frac{2Vm}{B^2q}}$$

   dove $B = 0.1\ T$, $V = 10^3\ V, q = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$. Nel file `Dati_Spettrometro.dat` sono salvati un certo numero di valori di "diametri" corrispondenti ad un certo tempo di acquisizione di ioni.

   - Si dica se la distribuzione dei dati è compatibile con l'ipotesi di singola gaussiana
   - Si esegua un binned likelihood fit per determinare le due "possibili" componenti (gaussiane) e la relativa occorrenza. Nota l'unità di massa atomica ($1.66 \cdot 10^{-27}\ kg$) si individui il numero di massa (A) degli ioni relativi alle due componenti.

4. (Esame 21/01/19) Sono state effettuate n misure $x_1, ..., x_n$ di una grandezza X distribuita secondo (file `DatiGamma.dat`) la distribuzione:

   $$f(x, \theta) = \frac{x^2 exp(-x/\theta)}{2\theta^3}$$

   - Si determini la miglior stima del parametro theta e il suo errore.
   - Si sovrapponga la distribuzione (con il parametro determinato al punto precedente) ai dati.

5. (Esame 04/02/19) Si vuole risolvere l'equazione dell'oscillatore armonico forzato

   $$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + kx = Asin(\omega t)$$

   ($m = 1\ kg$,$k = 0.25\ N/m$, $A = 0.1\ N$, $\omega = 0.25\ rad/s$) usando Verlet-Velocity

   $$x_{n+1} = x_n + hv_n + \frac{h^2}{2}a(x_n, t_n)$$
   $$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}\left(a(x_{n+1}, t_{n+1}) + a(x_n, t_n)\right)$$

   Si disegni l'andamento di x in funzione di t per $t \in [0, 100]$ sapendo che all'istante $t = 0$ la posizione vale $x = 1\ m$ e il corpo è in quiete.

6. (Esame 04/02/19) Si risolva il problema di una corda vibrante di lunghezza $L = 20\ m$ che all'istante $t = 0$ ha la forma $y = sin[\pi(x/L)\pi]$. Gli estremi restano vincolati a $y = 0$ durante il moto. La velocità di propagazione è $v = 1\ m/s$. Si disegni l'andamento del punto centrale (y per $x = L/2$) in funzione del tempo.

7. (Esame 04/02/19) Una certa costante che ha valore noto (x_0) pari a 10 (in qualche unità) viene misurata in un esperimento caratterizzato da un errore statistico (σ) di 2 ed uno massimo (Δ) di 2.

   - Usando il metodo di Monte Carlo ("seme" pari a 123456789) si generino 1000 misure. Ciascuna misura è descritta da una variabile aleatoria x distribuita uniformemente ($\pm\Delta$) intorno ad una variabile x' a sua volta distribuita secondo una gaussiana centrata su x_0 con deviazione standard (σ).
   - Si dica se la distribuzione ottenuta è compatibile con una gaussiana centrata in x_0 e con errore dato dalla combinazione dell'errore statistico e massimo.

8. (Esame 04/02/19) Il file `Es4Data.dat` raccoglie un insieme di N misure del valore di $x = cos(\theta)$, dove θ è l'angolo di scattering nel centro di massa per un processo $a + b \to c + d$. Assumendo che la forma funzionale generica per la distribuzione di probabilità della variabile x sia del tipo:

$$f(x; \alpha, \beta) = K(1 + \alpha x + \beta x^2)$$

   dove K e' un opportuno fattore di normalizzazione, si determinino le migliori stime dei parametri α e β, l'errore su ciascuna delle due stime e il relativo coefficiente di correlazione. (*Suggerimento: per il coefficiente di correlazione dopo il fit si risalga alla matrice di covarianza attraverso il comando:*

$$gMinuit- > mnemat(mat\_ptr, npar);$$

   (da effettuare subito dopo il fit) dove `npar` *è il numero di parametri del fit e* `mat_ptr` *è il puntatore al primo elementi della matrice di covarianza (che deve essere creata precedentemente). Il puntatore* `gMinuit` *è il puntatore globale all'oggetto TMinuit che ha effettuato la minimizzazione*)
   Si calcoli inoltre la miglior stima della grandezza definita come $\gamma = 3\alpha - 2\beta$ e l'errore su tal quantità.

9. Si derivi una classe C++ `myTF1` che derivi da `TF1` ed implementi un metodo per la ricerca di zeri secondo il metodo di Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

   (si può scegliere se iterare fino ad un dato n o finché la differenza tra x_{n+1} e x_n non sia minore di un certo valore). Si usi la classe in un main per trovare lo zero di una funzione a piacere.

10. Usando un linguaggio a scelta si implementi il metodo di Eulero-Cromer

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n \Delta t$$
$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}(\vec{r}_{n+1}) \Delta t$$

   per un corpo sottoposto a forza gravitazionale (sorgente di massa M nell'origine) con posizione, al tempo $t = 0$, $\vec{r} = (x, 0)$ e velocità $\vec{v} = (0, v_y)$. M, x e v_y sono fornite dall'utente (si assuma $G = 1$).

11. Usando un linguaggio a scelta si risolva il problema di Poisson di una carica al centro di un quadrato i cui lati sono mantenuti a $V = 0$. Posta la spaziatura Δ tale che la carica coincida con un punto della griglia (numero di divisioni pari lungo x e y) la densità di carica vale q/Δ^2 per il punto al centro e 0 altrove.

12. La differenza di tempo di occorrenza tra due eventi poissoniani successivi segue la distribuzione esponenziale. Si utilizzi questa proprietà per generare una distribuzione poissoniana con media μ:

   - si generino intervalli temporali Δt secondo la distributione $exp(-\Delta t)$
   - ad ogni iterazione si aggiorni la somma

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i$$

- non appena si raggiunge N per cui $S > \mu$ si salvi $N-1$ come elemento della distribuzione Poissoniana.

Si verifichi che il metodo descritto produca in effetti una poissoniana con il μ voluto.

13. Date le misure $x_1 = 1 \pm 0.1$ e $x_1 = 2 \pm 0.1$ con coefficiente di correlazione $\rho = 1$ si calcoli $x_2 - x_1$ con il suo errore e si giustifichi il risultato. Grafichi il risultato e il suo errore in funzione di ρ.

14. In un esperimento, in una certa regione di interesse, si osservano 30 eventi (attesi 15). Si può rigettare l'ipotesi nulla al 5% di significanza ? Qual è l'intervallo al 95% C.L. del numero di eventi in eccesso ?

15. (Esame 04/09/19) Si vuole risolvere l'equazione dell'oscillatore armonico forzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a_0 \sin(\omega_0 t)$$

($\omega = 1\ rad/s$, $\omega_0 = 1.5\ rad/s$, $a_0 = 2\ m/s^2$) sfruttando il metodo di integrazione "Verlet Velocity". Si disegni l'andamento di x in funzione di t per $t \in [0, 10]$ sapendo che all'istante $t = 0$ la posizione vale $x = 1\ m$ e il corpo è in quiete.

16. (Esame 04/09/19) Si risolva il problema della propagazione del calore in una sbarra con $\kappa = 2$ e lunghezza L, dove l'impulso di temperatura iniziale è

$$T(x, t = 0) = \delta(x - x_0) \qquad x_0 = L/2$$

e le si confronti con la soluzione analitica (valida per una sbarra di lunghezza infinita)

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \sigma = \sqrt{2\kappa t}$$

17. (Esame 04/09/19) Si ha la funzione $f(x) = 1/x$ e la misura $x = 1 \pm \varepsilon$ (distribuita gaussianamente). A partire da quale valore di ε la propagazione degli errori su $f(x)$ con le derivate non è più valida ? Si ricavi la distribuzione di $f(x)$ per un valore di σ doppio rispetto a quello limite.

18. (Esame 04/09/19) Si estragga un campione di valori x che segua la distribuzione

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1} & 0 < x < 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

con $\theta = 3$. Dato il campione di eventi e assumendo θ incognito se ne determini il valore con il metodo di maximum likelihood unbinned.