CEFET-MG
Engenharia de Computação
Otimização II
Elizabeth Wanner

Cadeias de Markov
Exemplos

Número de Sucessos de um processo de Bernoulli

Considere o número de sucessos, $\{N_n\}_{n\geq 0}$ em um processo de Bernoulli com probabilidade p de sucesso. O espaço de estados é $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e como $N_0 = 0$, a distribuição inicial é $\pi_0(0) = 1$ e $\pi_0(j) = 0, \quad \forall j > 0$.

- N_n é uma cadeia de Markov com transições,

$$
\begin{aligned}
P_{i,j} &= P(N_{n+1} = j | N_n = i) \\
&= P(N_{n+1} - N_n = j - i) \\
&= P(X_{n+1} = j - i) \\
&= \begin{cases} p, & j - i = 1 \\ 1 - p, & j = i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Matriz de transição

$$
P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

Sequência de sucessos

- Considere uma sequência de variáveis aleatórias independentes $\{T_n\}_{n \geq 0}$ que tomam somente dois valores, s (sucesso) ou f (falha) com probabilidade $P(T_n = s) = p$ e $P(T_n = f) = q$, com $p + q = 1$.
- Seja X_n o número de sucessos consecutivos (ou sequência de sucessos) no instante n, suponha que X_n é zero se tiver uma falha no instante n.
- Uma possível realização seria:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
T_n	s	s	f	f	s	f	f	s	s	s	...
X_n	1	2	0	0	1	0	0	1	2	3	...

- Matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 \dots \\ q & 0 & p & 0 \dots \\ q & 0 & 0 & p \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Processo de nascimento e morte

- Uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, \ldots, d\}$ (ou espaço de estados $E = \{1, 2, \ldots, \infty\}$ no caso infinito) e com probabilidade de transição:

$$P_{i,j} = \begin{cases} q_i, & j = i - 1 \\ r_i, & j = i \\ p_i, & j = i + 1 \end{cases}$$

em que $p_i + r_i + q_i = 1$, $q_0 = 0$ e $p_d = 0$ (se $d < \infty$), é chamada de *Processo de Nascimento e Morte*.

Mudança de classe social

- Seja X_n uma cadeia de Markov que modela as mudanças de classe solcial (0 - baixa; 1 - média; 2 - alta) dado pela matriz estocástica:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

- Ela nos diz, por exemplo, que a probabilidade de que os filhos de uma família de classe baixa permaneçam nessa classe é 0,7.
- Suponha que uma família comece na classe média (estado 1) na geração 0. Qual a probabilidade de que na geração 1 haja uma ascenção a classe alta (estado 2) e que na geração 2 desça para a baixa(estado 0)?

Solução: Calculemos $P(X_1 = 2, X_2 = 0|X_0 = 1)$, a probabilidade de ir em um passo do estado 1 para o 2 e depois para o estado 0. Confirmemos que essa probabilidade é $P_{1,2}P_{2,0}$.

$$\begin{aligned} P(X_1 = 2, X_2 = 0|X_0 = 1) &= \frac{P(X_2 = 0, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)} \frac{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \\ &= P(X_2 = 0|X_1 = 2, X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1) \\ &= P(X_2 = 0|X_1 = 2)P(X_1 = 2|X_0 = 1) \\ &= P_{2,0}P_{1,2} \\ &= 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \end{aligned}$$

Mudança de classe social- cont.

- Suponha a família comece na classe média (1) na geração 0. Qual a probabilidade de que na geração 2 desça para a baixa (0)?
  Solução: Para resolver esse problema devemos considerar os três estados possíveis para a geração 1.

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0|X_0 = 1) &= \sum_{k=0}^{2} P(X_1 = k, X_2 = 0|X_0 = 1) \\
&= \sum_{k=0}^{2} P_{1,k}P_{k,0} \\
&= P_{1,0} \cdot P_{0,0} + P_{1,1} \cdot P_{1,0} + P_{1,2} \cdot P_{2,0} \\
&= 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,2 \\
&= 0,4
\end{aligned}$$

- De forma similar, é verdade que para $i, j \in \{0, 1, 2\}$ vale

$$P(X_2 = j|X_0 = i) = \sum_{k=0}^{2} P_{i,k}P_{k,j}.$$

  O termo da direita da igualdade é o coeficiente (i, j) da matriz $P^2 = P \cdot P$.
  O termo da esquerda é a probabilidade de passar de i para o j em dois passos.

- De maneira geral, a probabilidade de transição em m passos de uma cadeia de Markov X é:

$$P_{i,j}^{(m)} = P(X_{m+n} = j | X_n = i).$$

que é a entrada (i,j) da m-ésima potência da matriz de transição P, ou seja, $P^m = P \cdot P \cdots P$ (m termos no produto).

- Para transições de *ordem dois* (entre os tempos n e $n+2$):

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{(2)} &= P(X_{n+2} = j | X_n = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = k | X_n = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_{n+2} = j | X_{n+1} = k) P(X_{n+1} = k | X_n = i) \\ &= \sum_{k \in E} P_{i,k} P_{k,j} \end{aligned}$$

Ou seja, é o elemento (i,j) da matriz $P^2 = PP$.

Distribuição Inicial

- Seja π_0 uma distribuição de probabilidades no conjunto E,

$$\pi_0(i) \geq 0, i \in E, \quad \sum_{i \in E} \pi_0(i) = 1,$$

  dizemos que π_0 é distribuição inicial da cadeia se para todo $i \in E$ vale $P(X_0 = i) = \pi_0(i)$.
- A distribuição inicial de uma cadeia de Markov é simplesmente a função de probabilidade do seu estado inicial X_0.
- O teorema da probabilidade total nos permite obter a distribuição de qualquer um dos estados em função da matriz de transição e da distribuição inicial. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \sum_{i \in E} P(X_n = k | X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in E} P_{i,k}^{(n)} \pi_0(i) \\ &= \pi_0^T P^n \end{aligned}$$

Proposição:

Seja π_0 a distribuição inicial da cadeia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ que tem matriz de transição $P = (P_{i,j})_{i,j\in E}$. Sejam $i_0, i_1, \ldots, i_m \in E$ então vale

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m) = \pi(i_0)P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{m-1},i_m}$$

Exemplo 1

Considere uma cadeia de Markov X_n com espaço de estados $E = \{a, b, c\}$ e matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

- A partir da matriz estocástica podemos construir o grafo das transições ou topologia da cadeia. Reciprocamente, podemos achar a matriz de transição P a partir do grafo.
- Calcule $P(X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a | X_0 = a)$.
  Solução:
  $P(X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a | X_0 = a)$

$$\begin{aligned} &= P(X_1 = b | X_0 = a) P(X_2 = c | X_1 = b) P(X_3 = a | X_2 = c) \\ &= P_{a,b} P_{b,c} P_{c,a} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Exemplo 1- cont.

- Calcule $P(X_6 = c, X_4 = b)$.
  Solução:
  Achemos primeiro P^2.
  $$P^2 = \begin{pmatrix} 17/30 & 9/40 & 5/24 \\ 8/15 & 3/10 & 1/6 \\ 17/30 & 3/20 & 17/60 \end{pmatrix}$$
  Observe que $P(X_6 = c, X_4 = b) = P^2_{b,c} = 1/6$.
- Calcule $P(X_6 = c, X_4 = a | X_3 = a)$.
  Solução:

$$\begin{aligned} P(X_6 = c, X_4 = a | X_3 = a) &= P(X_4 = a | X_3 = a) P(X_6 = c | X_4 = a) \\ &= P_{a,a} P^2_{a,c} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{24} \\ &= \frac{5}{48} \end{aligned}$$

Exemplo 1- cont.

- Se a distribuição inicial da cadeia está dado por $\pi_0(a) = 0,3, \pi_0(b) = 0,3$ e $\pi_0(c) = 0,4$, determine a função de probabilidade de X_2.
  Solução:
  Chamaremos de π_0 o vetor coluna:

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} \pi_0(a) \\ \pi_0(b) \\ \pi_0(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

  O vetor de probabilidades de X_2 é dado por

$$\begin{aligned} \pi_0^T P^2 &= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17/30 & 9/40 & 5/24 \\ 8/15 & 3/10 & 1/6 \\ 17/30 & 3/20 & 17/60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 167/300 & 87/400 & 271/1200 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Portanto,

$$P(X_2 = a) = \frac{167}{300}, P(X_2 = b) = \frac{87}{400} \text{ e } P(X_2 = c) = \frac{271}{1200}$$

Proposição

Para uma cadeia $\{X_n\}_{n\geq 0}$, suponha que π é uma distribuição satisfazendo as equações

$$\sum_{i\in E} \pi(i)P_{i,j} = \pi(j), \tag{1}$$

para todo $j \in E$. Então vale as seguintes afirmações:

i) Para todo $j \in E, \sum_{i\in E} \pi(i)P^2_{i,j} = \pi(j)$. Em geral, para todo $n \geq 1$, vale que $\sum_{i\in E} \pi(i)P^n_{i,j} = \pi(j)$.

ii) Se a cadeia possui distribuição inicial π, então para todo $n \geq 1$ vale

$$P(X_n = i) = \pi(i) \tag{2}$$

Comentários

- A igualdade 2 afirma que se a cadeia começar com uma distribuição π satisfazendo 1, então a distribuição em todos os instantes será a mesma e igual a π;
- A distribuição marginal permanece invariante ante as transições da cadeia.
- Toda distribuição π que satisfaça a equação 1 é chamado de **distribuição invariante** da cadeia $\{X_n\}_{n\geq 0}$.

Comentários

- Uma cadeia começando com uma distribuição invariante é um processo estocástico estacionário, no sentido estrito;
- No caso em que E é finito, a equação 1 pode ser reescrita como:

$$\pi^T \cdot P = \pi^T \tag{3}$$

- Para determinar a distribuição invariante de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, deve-se encontrar um vetor π satisfazendo 3, com entradas não negativas e com $\sum_{i \in E} \pi(i) = 1$.

Exemplo 2

- Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{0, 1, 2\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- A equação $\pi^T \cdot P = \pi^T$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi(0) + \frac{1}{4}\pi(1) + \frac{1}{6}\pi(2) & = \pi(0) \\ \frac{1}{3}\pi(0) + \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{3}\pi(2) & = \pi(1) \\ \frac{1}{3}\pi(0) + \frac{1}{4}\pi(1) + \frac{1}{2}\pi(2) & = \pi(2) \end{cases}$$

- Porém esse sistema é indeterminado, pois a soma das três equações resulta na soma trivial $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2)$.
- Assim deve-se retirar uma equação e colocar no sistema a igualdade $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$.

Exemplo 2 - cont.

Assim, retirando a primeira equação, inserindo $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$ e passando todas as variáveis para o lado esquerdo, temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi(0) - \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{3}\pi(2) & = 0 \\ \frac{1}{3}\pi(0) + \frac{1}{4}\pi(1) - \frac{1}{2}\pi(2) & = 0 \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) & = 1 \end{cases}$$

Desse modo, encontra-se a solução

$$\pi(0) = 6/25 = 0,24 \quad \pi(1) = 2/5 = 0,4 \ \text{ e } \ \pi(2) = 9/25 = 0,36.$$

Exemplo 3

Considere novamente o exemplo da mobilidade social. A matriz de transição é

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Encontre a distribuição invariante.

Solução:

Para encontrar a distribuição invariante devemos montar o sistema $\pi^T \cdot P = \pi^T$, trocar uma igualdade por $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$ e resolver o sistema linear.

Substituindo a terceira igualdade por $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$ teremos o sistema

$$\begin{cases} (0,7-1)\pi(0) + 0,3\pi(1) + 0,2\pi(2) & = 0 \\ 0,2\pi(0) + (0,5-1)\pi(1) + 0,4\pi(2) & = 0 \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) & = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -0,3\pi(0) + 0,3\pi(1) + 0,2\pi(2) & = 0 \\ 0,2\pi(0) - 0,5\pi(1) + 0,4\pi(2) & = 0 \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) & = 1 \end{cases}$$

que resulta na solução

$$\pi = \begin{pmatrix} 44/94 \\ 32/94 \\ 9/47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,34 \\ 0,19 \end{pmatrix}$$

Comentários

- Toda cadeia de Markov com espaço de estados E finito possui pelo menos uma distribuição invariante;
- Toda distribuição π_∞ que satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{i,j} = \pi_\infty(j),$$

para todo $j \in E$, é denominado **distribuição assintótica** da cadeia $\{X_n\}_{n\geq 0}$.

- Por definição, a distribuição assintótica, quando existir, será única;
- Quando $n \to \infty$ as linhas da matriz de transição se aproximam de uma distribuição (assintótica). A distribuição π_∞ será a distribuição assintótica da cadeia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ se e somente se para todo $j \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_\infty(j).$$

Proposição

Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com matriz de transição P e com distribuição assintótica π_∞. Então π_∞ é a **única** distribuição invariante da cadeia.

- Pela última proposição podemos encontrar a distribuição assintótica de uma cadeia através do cálculo da distribuição invariante. Ou seja, podemos usar a técnica empregada nos exemplos anteriores para determinar a probabilidade da cadeia estar em um estado $j \in E$ depois de "muitos" passos. Mas lembrem-se: π_∞ deve existir!

Teorema Básico de Convergência

Se uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ com distribuição invariante π_{inv} for **irredutível** e **aperiódica** então π_{inv} será a respectiva distribuição assintótica.