Otimização II

30/08/2021

1. Considere uma cadeia de markov $(X_n)_{n\geq 0}$, com espaço de estados $E = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, e com a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

   - Desenha a topologia do grafo induzida por esta matriz de transição.
   - Classifique os estados como recorrentes e transientes.
   - Determine a distribuição invarienta desta cadeia de markov.
   - Esta cadeia possui distribuição assintótica? Justifique cuidadosamente sua resposta.
   - Calcule o tempo médio de primeiro retorno ao estado 2 e a proporção do tempo que a cadeia passa no estado 1.

2. Uma urna contém 6 bolas, das quais 3 são pretas e 3 são verdes. São seleccionadas ao acaso da urna 2 bolas simultaneamente. Se uma for verde e a outra for preta, então são postas de lado e são colocadas duas bolas azuis na urna. Se não for o caso colocam-se de volta as bolas retiradas na urna. O processo repete-se até só haver bolas azuis na urna. Seja X_n o número de bolas azuis na urna depois da tiragem n. Justifique que $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov homogênea, defina cuidadosamente o espaço de estados e construa a respectiva matriz das probabilidades de transição P.