Calcolo differenziale

Andrea Canale

May 20, 2025

Contents

1 Derivabilità

Una funzione si dice derivabile se esiste finito il limite del rapporto di Newton:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il valore di questo limite è detto derivata prima di f oppure primitiva.

Se questa funzione è derivabile $\forall (x, x_0)$ possiamo creare la funzione derivata. Derivando la derivata prima(se è derivabile) si ottiene quella seconda e così via.

Valgono i seguenti assiomi:

- Esistono infinite primitive di f della forma $g(x) + c$
- Di conseguenza se g e h sono due primitive di f, allora $g(x) - h(x) = c$

Partendo dal grafico della derivata prima, riusciamo ad ottenere monotonia e convessità.

Per stimare il valore della derivata in un punto possiamo anche usare il rapporto incrementale

$$f^{'}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1.1 Monotonia di $f^{'}$ partendo da f

Se f è derivabile in (a, b), allora sappiamo che:

- f è crescente in (a, b) se e solo se $f^{'}(x) \geq 0$
- f è decrescente in (a, b) se e solo se $f^{'}(x) \leq 0$

1.2 Convessità di $f^{'}$ partendo da f

Se f è derivabile in (a, b), allora sappiamo che:

- f è convessa(punta verso il basso) in (a, b) se e solo se $f^{'}(x)$ è crescente in (a, b) quindi se e solo se $f^{''} \geq 0$

- f è concava(punta verso l'alto) in (a, b) se e solo se $f^{'}(x)$ è decrescente in (a, b) quindi se e solo se $f^{''} \leq 0$

Notiamo che se una funzione scende o sale tendendo ad infinito, anche la derivata farà la stessa cosa cioè tenderà ad infinito

Se la pendenza è costante, $y = f^{'}$ rimane costante

Notiamo da queste due formule, che non possiamo sapere la convessità della funzione derivata ma possiamo solo sapere la crescenza/decrescenza(monotinia)

1.3 Stimare il grafico della derivata di f

Seguiamo i seguenti punti per stimare il grafico della derivata $f^{'}$

- Trovare il dominio di $f^{'}$ che coincide con il dominio di f meno punti di non derivabilità

- Trovare le intersezioni con l'asse x cioè i punti a tangente orizzontale(di flesso) dove $f^{'}$ sarà $y = 0$

- Eseguire il test di monotonia per capire il codominio

- Eseguire il test di convessità per capire la concavità

Per facilitare la stima, evidenziamo dove la funzione è positiva e dove è negativa, la convessità verrà da se.

Inoltre notiamo che se f è dispari, $f^{'}$ diventa pari e viceversa.

Inoltre se la funzione f ha degli asintoti, valgono le seguenti regole:

- Se $f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = y_0$, allora $f^{'}(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 0$. Questo perchè la funzione in quel punto(o verso infinito) non cresce più

- Se $f(x)$ ha un asintoto verticale $x = x_0$, allora $f^{'}(x)$ tende ad ∞ in quel punto cioè la pendenza della funzione $f(x)$ è infinita se è verticale

- Se $f(x)$ ha un asintoto obliquo $y = mx + q$, allora $f^{'}(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = m$

Siamo anche coerenti con eventuali punti di flesso(la derivata ha x=0) e punti di non derivabilità(la funzione derivata non è definita)

Le stesse regole valgono in senso opposto per stimare la primitiva di una derivata.

1.4 Punti di flesso

I punti dove la monotonia cambia, sono detti punti di flesso e lì corrispondono i massimi o minimi relativi della funzione derivata.

2 Proprietà fondamentale delle derivate

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b), allora questa funzione è anche continua in (a, b)

Dimostrazione:

Se f è continua, allora

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(x_0)$$

Cioè:

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(x_0) = 0$$

Ricordiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0)$$

Unendo le due cose otteniamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ora moltiplichiamo entrambi i membri per $(x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Ora calcoliamo il limite, osserviamo che $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$ per $x \to x_0$ mentre $(x - x_0) \to 0$ per $x \to x_0$. Otteniamo quindi:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Quindi vale la continuità.

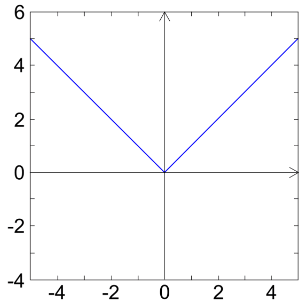
3 Punti di non derivabilità

3.1 Punti angolosi

Se esistono finiti il limite destro e sinistro, e sono diversi tra loro, allora f ha un punto angoloso in $x = c$:

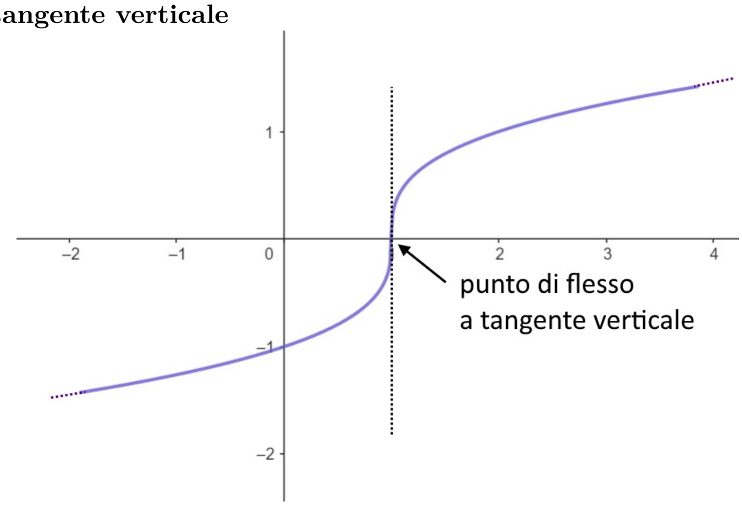
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Ad esempio $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x = 0$



3.2 Punto a tangente verticale

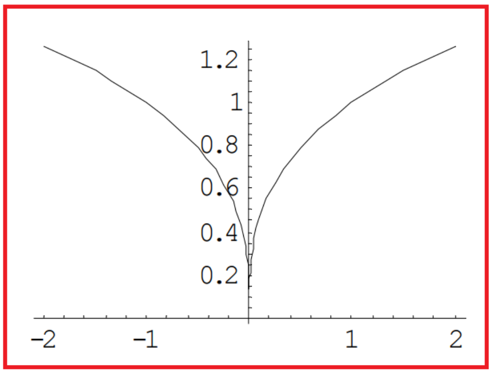
Se f è continua in c e $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \pm\infty$ si dice che $x = c$ è un **punto a tangente verticale**



Il punto a tangente verticale è anche un punto di flesso

3.3 Cuspide

Se f è continua in c e $\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \pm\infty$ si dice che f ha un cuspide in c



4 Derivate delle funzioni elementari

Le derivate seguono regole ben precise per essere create da funzioni elementari.

f	$f^{'}$
c	0
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

Notiamo che sono tutti casi particolari dell'ultima. Infatti:

- $f(x) = c = x^0$
- $f(x) = x = x^1$
- $f(x) = x^n = x^\alpha$
- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Dimostriamo quindi l'ultimo caso $f(x) = x^\alpha$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

- Adesso raccogliamo x^α:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$\frac{h}{x}$ ci serve per avere h e rimanere coerenti.

- Adesso portiamo fuori x^α poi moltiplichiamo per $\frac{x}{x}$ e $\frac{\alpha}{\alpha}$:

$$\lim_{h \to 0} \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x \cdot \alpha}}$$

- Semplifichiamo α e imponiamo $\frac{h}{x} = y$ ottenendo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha}{x} \cdot \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y}$$

- Ora sappiamo che $\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y}$ è un limite notevole che tende ad α per $h \to 0$ e quindi possiamo usarlo nel nostro limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha}{x} \cdot \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = x^{\alpha-1} \cdot \alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Che è quello che vogliamo dimostrare.

5 Derivate delle funzioni trigonometriche

f	f'
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Dimostriamo il primo caso:

$$\lim_{h\to 0} \frac{sin\,(x+h) - sin\,(x)}{h}$$

- Ora usiamo la formula di addizione del seno sul primo termine ed otteniamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{sin\,(x)\,cos\,(h) + sin\,(h)\,cos\,(x) - sin\,(x)}{h}$$

- Spezziamo la frazione al numeratore e raccoglimo $sin(x)$:

$$\lim_{h\to 0} sin\,(x) \cdot \frac{cos\,(h) - 1}{h} + cos\,(x) \cdot \frac{sin\,(h)}{h}$$

- Per il limite notevole, $\frac{sin(h)}{h}$ tende a 1 per $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} sin\,(x) \cdot \frac{cos\,(h) - 1}{h} + cos\,(x) \cdot 1$$

- Adesso moltiplico per $\frac{h}{h}$ ed ottengo:

$$\lim_{h\to 0} sin\,(x) \cdot \frac{cos\,(h) - 1}{h} \cdot \frac{h}{h} + cos\,(x) \cdot 1 = \lim_{h\to 0} sin\,(x) \cdot \frac{cos\,(h) - 1}{h^2} \cdot h + cos\,(x) \cdot 1$$

- Per il limite notevole $\frac{cos(h)-1}{h^2}$ tende a $\frac{1}{2}$ per $h \to 0$ ed otteniamo:

$$\lim_{h\to 0} sin\,(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + cos\,(x) \cdot 1 = cos(x)$$

Che è quello che volevamo dimostrare. Le altre derivate, si dimostrano in maniera analoga.

6 Derivate di funzioni esponenziali e logaritmiche

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$log(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot log(a)$
$log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot log(a)}$

Le condizioni sono: $a > 0$ **e** $a \neq 1$

Dimostriamo la prima:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

- Spezzo la frazione usando la proprietà delle potenze: $e^{x+h} = e^x \cdot e^h$ poi porto fuori e^x:

$$\lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

- Sappiamo che $\frac{e^h-1}{h}$ tende a 1 per $h \to 0$ per il limite notevole:

$$\lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Che conferma la nostra tesi.

7 Regole di calcolo per le derivate

Se f e g sono derivabili in uno stesso punto, allora valgono le seguenti relazioni:

- $(f+g)^{'}(c) = f^{'}(c) + g^{'}(c)$
- $(f \cdot g)^{'}(c) = (f^{'}(c) \cdot g(c)) + (f(c) \cdot g^{'})$ Questa è la **regola di Leibniz**
- $(kf)^{'} = k \cdot f^{'}(c)$ Questo è un caso particolare della regola di Leibniz. Infatti $(k)^{'} = 0$
- $(\frac{f}{g})^{'}(c) = \frac{f^{'}(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g^{'}}{g^2(c)}$

Attraverso l'ultima regola, ad esempio, possiamo calcolare la derivata di $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$:

Per l'ultima proprietà, otteniamo:

$$\frac{cos\,(x) \cdot cos\,(x) - sin\,(x) \cdot (-sin\,(x))}{cos^2\,(x)} = \frac{cos^2\,(x) + sin^2\,(x)}{cos^2\,(x)}$$

Adesso speziamo la frazione e semplifichiamo:

$$1 + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$$

Altrimenti usando la relazione fondamentale per il numeratore($cos^2(x) + sin^2(x)$) otteniamo:

$$\frac{1}{cos^2(x)}$$

7.1 Regola della catena

Date f e g derivabili nello stesso intervallo, tali che $g \ o \ f = g(f(x))$ è ben definita e derivabile, allora:

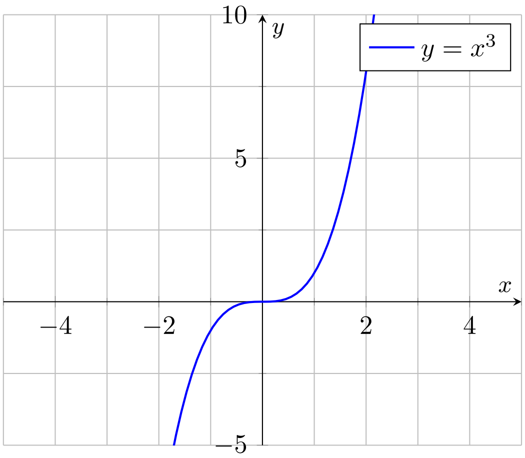
$$(g \ o \ f)^{'}(x) = g^{'}(f(x)) \cdot f^{'}(x)$$

8 Teorema di Fermat

Data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $c \in (a,b)$ un punto di min/max locale, allora $f^{'}(c) = 0$.

In questi casi, si dice che c è un **punto critico** cioè un punto con pendenza nulla.

Notiamo che non sempre i punti critici sono punti di massimo o minimo. Ad esempio x^3:



Abbiamo un punto critico in $x = 0$ che però non è un massimo o un minimo.
A questo punto sappiamo dove si possono trovare punti di massimo o minimo:

- Punti critici
- Estremi del dominio se è chiuso
- Punti di non derivabilità

Sta a noi cercare tra questi punti e capire se sono di massimo o di minimo e capire se sono globali o locali.

9 Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **una funzione continua su un intervallo chiuso, è sia** f **derivabile in** $[a, b]$ allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - c}$$

Cioè esiste almeno un punto dove la pendenza in quel punto è uguale alla pendenza tra a e b.(per l'interpretazione cinematica, questo significa che almeno in un punto la velocità media è uguale a quella istantanea)

Usando questo teorema possiamo caratterizzare delle funzioni che hanno delle caratteristiche ben precise.

9.1 Caratterizzazione di funzioni a derivata nulla

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, allora:

$$f^{'}(x) = 0 \ \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \ k \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) = k \ \forall x \in [a, b]$$

Questo corollario ci dice che se la funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora è costante in quell'intervallo.

9.1.1 Dimostrazione

Dimostriamo la prima parte dell'implicazione:

Se imponiamo $f(x) = k$, allora otteniamo

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sostituendo $f(x)$, otteniamo:

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

Notiamo che $f(x + h) = k$ in quanto $f(x)$ è costante.

Questo conferma la prima implicazione del teorema

* * *

Dimostriamo la seconda parte dell'implicazione:

Sappiamo che f è derivabile in $[x_1, x_2]$ ed è quindi continua. Per il teorema di Lagrange:

$$f^{'}(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

. Può essere riscritta come:

$$f(x_2) - f(x_1) = f^{'}(c)(x_2 - x_1)$$

Tuttavia, dalla prima implicazione sappiamo che $f^{'}(x) = 0$, quindi $f^{'}(c) = 0$ cioè $f(x_2) = f(x_1) \ \forall x_1, x_2$ che dimostra che f è costante.

9.2 Caratterizzazione di funzioni a derivata seconda nulla

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte in (a, b), allora:

$$f^{''}(x) = 0 \ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow \exists m, q \in \mathbb{R} \text{ tali che } f(x) = mx + q$$

Cioè se la derivata seconda è nulla, allora la funzione di partenza è una retta.

9.2.1 Dimostrazione

Dimostriamo l'implicazione $\leftarrow$ in questo senso.

Se $f(x) = mx + q$,allora la sua derivata seconda sarà $f^{''}(x) = 0$

Questo dimostra questa implicazione

* * *

Dimostriamo ora l'altra parte:

Per il corollario 1, abbiamo che se $f(x)^{'} = m$, allora $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = m \forall x \in (a, b)$

Possiamo quindi riscrivere questa relazione come:

$$(f(x) - mx)^{'} = f(x)^{'} - mx^{'} = f(x)^{'} - m$$

Per il corollario 1, abbiamo $f(x)^{'} - mx = q$ e quindi:

$$f(x) = mx + 1$$

che conferma il teorema.

9.3 Caratterizzazione di primitive di funzioni

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, allora valgono i seguenti fatti:

- $F(x) + c$ è una primitiva di f $\forall c \in \mathbb{R}$
- Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono due primitive di $f(x)$, allora $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $F_1(x) - F_2(x) = k$ $\forall x$

9.3.1 Dimostrazione primo punto

Se $F(x)$ è una primitiva, allora $F(x)^{'} = f(x)$.

Equivalentemente, $(F(x) + c)^{'} = f(x)$ cioè è una primitiva anche $F(x) + c$.

9.3.2 Dimostrazione secondo punto

Ipotizziamo $F_1(x)^{'} = F_2(x)^{'} = f(x)$, si ha quindi

$$f(x) = F_1(x)^{'} - F_2(x)^{'} = f(x) - f(x) = 0$$

Ma dalla caratterizzazione di funzioni a derivata prima nulla, sappiamo che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f_1(x) - f_2(x) = c \ \forall x \in (a, b)$$

10 Teorema del test di monotonia

Se f è derivabile in (a, b), allora:

- f è crescente in (a, b) se e solo se $f^{'}(x) \geq 0$
- f è decrescente in (a, b) se e solo se $f^{'}(x) \leq 0$

Inoltre:

- $f^{'}(x) > 0 \forall x \in (a, b) \implies f$ strettamente crescente su (a, b)
- $f^{'}(x) < 0 \forall x \in (a, b) \implies f$ strettamente decrescente su (a, b)

L'implicazione non è doppio perchè ci sono casi dove la doppia implicazione non vale.

Ad esempio $f(x) = x^3$ ha $f^{'}(0) = 0$ ma f strettamente crescente.

10.1 Dimostrazione

Supponiamo f crescente in (a, b).

Presi due punti $x, z \in (a, b)$ con $x \neq z$, abbiamo due casi:

- $x < z$ implica $f(x) \leq f(z)$
- $x > z$ implica $f(x) \geq f(z)$

Da ciò capiamo che:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \begin{cases} \frac{\geq 0}{> 0} \text{ se } x < z \\ \frac{\leq 0}{< 0} \text{ se } x > z \end{cases} .$$

Quindi

$$\lim_{z \to h} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f^{'}(x) \geq 0$$

La prima implicazione vale

* * *

Dimostriamo ora la seconda parte dell'implicazione.

Supponiamo $f^{'}(x) \geq 0 \forall x \in (a,b)$,per assurdo ipotizziamo $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$:

Usando il teorema di Lagrange, $\exists c \in (a,b)$ tale che:

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - c}$$

Questo implica che $f(x_2) - f(x_1) = f^{'}(c)(x_2 - x_1) \geq 0$

Quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$, un assurdo rispetto all'ipotesi.

10.2 Corollario del test di monotonia

Data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte, allora valgono i seguenti fatti:

- $f^{'}$ crescente su (a,b) se e solo se $f^{''}(x) \geq 0$
- $f^{'}$ decrescente su (a,b) se e solo se $f^{''}(x) \leq 0$

11 Trovare massimi e minimi

Lo studio dei punti massimi e dei minimi di una funzione è molto importante per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione. Possibili punti max/min sono:

- Punti critici
- Gli estremi dell'intervallo
- Punti di non derivabilità

Poi dobbiamo anche studiare il segno della funzione, imponendola > 0 per capire dove cresce e dove decresce.

Infine per capire se i punti sono di max/min assoluto, gli confrontiamo tra loro per capire qual è il valore maggiore tra i candidati.