Matrici

Andrea Canale

December 14, 2024

Contents

1 Matrici

Sia fissato un campo $\mathbb{K}$, una matrice con m righe e n colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$ è una tabella del tipo:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove tutti i coefficienti a sono elementi del campo $\mathbb{K}$.
Le righe verranno indicate come $A_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$
Le colonne verranno indicate come $A^j = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix}$

2 Lo spazio delle matrici

Le matrici formano uno spazio che ha due operazioni: Somma e prodotto scalare

2.1 Somma tra matrici

Date due matrici delle stessa dimensione, possiamo fare le somma:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

dove facciamo la somma degli elementi allo stesso indice tra le varie matrici.

2.2 Prodotto scalare

Data una matrice con coefficienti in $\mathbb{K}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, il prodotto scalare è definito così:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ossia la moltiplicazione tra lo scalare e ogni componente della matrice.

3 Classificazione di matrici quadrate

Una matrice quadrata è una matrice che ha lo stesso numero di righe e di colonne.

Possono essere classificate in 6 modi diversi. Ognuna di queste classificazioni forma un sottospazio dello spazio delle matrici quadrate n x n, scritto formalmente: $M(n, n, \mathbb{K})$.

3.1 Matrici diagonali

Una matrice diagonale è una matrice che ha elementi solo sulla sua diagonale e sul resto delle posizioni ha 0. Sono contenute dal sottospazio $P(n)$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3.2 Matrici triangolari superiori

Sono matrici dove lo zero è in posizione i, j con $i > j$. Sono contenute dal sottospazio $T(n)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3 Matrici triangolari inferiori

Sono matrici dove lo zero è in posizione i, j con $i < j$. Sono contenute dal sottospazio $T^i(n)$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 9 & -13 \end{pmatrix}$$

3.4 Matrici triangolari

Sono matrici che sono o triangolari inferiori o superiori

3.5 Matrici simmetriche

Sono matrici dove $a_{ij} = a_{ji}$, simmetriche rispetto alla diagonale. Sono contenute dal sottospazio $S(n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3.6 Matrici antisimmetriche

Sono matrici dove $a_{ij} = -a_{ji}$, simmetriche rispetto alla diagonale con coefficiente negativo. Sono contenute dal sottospazio $A(n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -7 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Alcune matrici hanno più classificazioni contemporaneamente.
Non tutte le matrici quadrate soddisfano queste classificazioni.

4 Trasposta di una matrice

Data una matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, la sua trasposta è la matrice che si ottiene scambiando righe e colonne. è indicata come ${}^tA$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- ${}^t(A + B) =^t A +^t B$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda \cdot^t A$
- Una matrice è quadrata se $A =^t A$
- Una matrice è antisimmetrica se $A = -{}^tA$

5 Prodotto tra matrici

Date due matrici $A \in M\left(m, n, \mathbb{K}\right)$ e $B \in M\left(n, p, \mathbb{K}\right)$, il prodotto $A \cdot B$ p una matrice n x p, definita come:

$$\left(A \cdot B\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,i}$$

Questo prodotto si può fare se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.
Non vale la proprietà commutativa
Esempio di un prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 & 9 \\ 10 & 14 & 11 \\ -13 & 12 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot (-13) & -8 + 14 \cdot 2 + 9 \cdot 4 & 9 + 11 \cdot 2 + 15 \cdot 4 \\ -3 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot (-13) & -3 \cdot -8 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 12 & -3 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 15 \end{pmatrix}$$

6 Matrice identità

La matrice identità è una matrice definita come

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Cioè la matrice che ha tutti zero tranne sulla diagonale e ha come proprietà:

- Il prodotto tra matrici con matrice identità come fattore è commutabile

La matrice identità è l'elemento neutro dello spazio delle matrici

7 Traccia di una matrice qudrata

Data una matrice quadrata, la traccia è la somma degli elementi sulla diagonale.

8 Determinante di una matrice

σ è una permutazione in S_n ed è un prodotto di un numero k finito di trasposizione(scambi di 2 elementi)

Il segno di σ è il prodotto delle k trasposizioni tali che $sgn(\sigma) = (-1)^k$

Data una matrice quadrata n x n, il determinante è definito come:

$$detA = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\,(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}$$

9 Calcolo del determinante di matrici $N < 2$

Questi determinanti si calcolano perchè il numero di permutazioni in S_2 è gestibile senza ricorrere ad algoritmi particolari come vedremo dopo.

9.1 N=1

$detA = a_{11}$

9.2 N=2

$detA = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$

9.3 Matrici triangolare superiore

$detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$

Questo perchè gli zeri annullano la riga su cui calcoliamo il determinante

10 Sviluppo di Laplace

Se vogliamo calcolare il determinante di una qualsiasi matrice n x n, possiamo usare la seguente formula fissando una riga i arbitrariamente

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot detC_{ij}$$

Possiamo anche fissare una colonna j arbitrariamente e la formula diventa così:

$$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot detC_{ij}$$

10.1 Cofattori

$(-1)^{i+j} \cdot det(C_{ij})$ è detto cofattore di A_{ij}. Se calcoliamo i cofattori in tutte le posizioni otterremo la matrice dei cofattori.

10.2 Proprietà del determinante

- Se una riga o una colonna ha zero, lo sviluppo di quella riga/colonna è zero
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$
- Data una matrice A con 2 righe uguali, possiamo concludere che $detA = 0$

11 Inverso di una matrice

Una matrice A quadrata è invertibile se esiste una matrice inversa A^{-1} tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

In questo caso la commutatità, in questo caso, garantisce l'esistenza dell'inverso.

12 Teorema di Binet

Se A e B sono matrici quadrati, allora

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

12.1 Invertibilità per Binet

Se A è invertibile, possiamo trovare il determinante del suo inverso attraverso questa formula

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{detA} = (detA)^{-1}$$

Da questa formula possiamo dedurre che una matrice è invertibile se e solo se

$$detA \neq 0$$

Infatti $\frac{1}{0}$ sarebbe impossibile

12.2 Calcolo di una matrice inversa dati i cofattori

Se la matrice è invertibile, possiamo calcolare la matrice inversa attraverso questa formula

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\,^{t}(cofA)$$