Risoluzione approssimata di equazioni

Andrea Canale

May 20, 2025

Contents

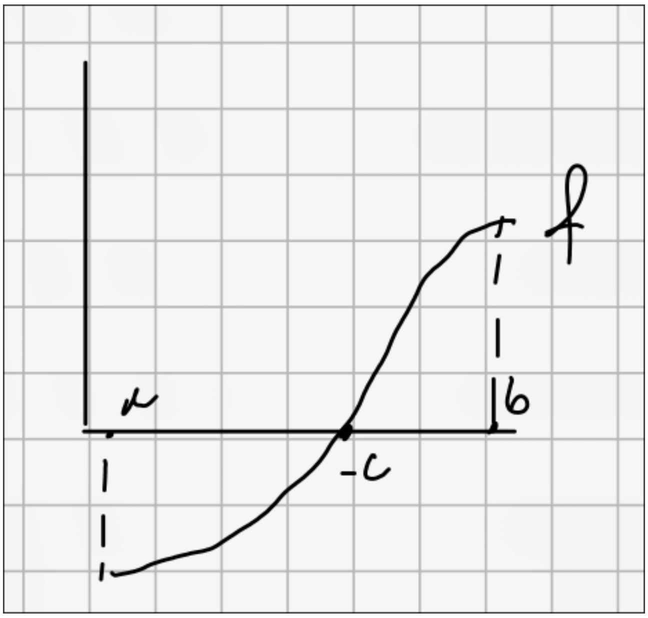
1 Equazioni non risolvibili

Equazioni come $e^x + x - 3 = 0$ non si possono risolvere esplicitamente, allora procediamo facendo:

- Cercare un risultato teorico per garantire l'esistenza della soluzione
- Trovare la soluzione attraverso metodi matematici

2 Teorema di esistenza degli zeri

Sia $f : [a, b]$ continua, allora se $f(a) \cdot f(b) < 0$(cioè i due punti hanno segni opposti), allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c)$



Questa è una soluzione della funzione e viene detta **zero di** f
Questo teorema garantisce l'esistenza di almeno uno zero.

2.1 Osservazioni

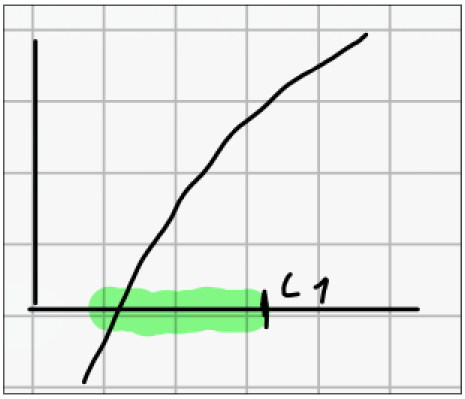
- Se f è strettamente monotona, allora c è univoco. Infatti la funzione dopo lo zero non potrà passare nuovamente sull'asse x.
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ è una condizione sufficiente ma non necessaria. Pensiamo ad esempio ad x^2 che ha due zeri ma non rispetta questa condizione.
- f continua invece è una condizione necessaria.

2.2 Dimostrazione

Ipotizziamo $f(a) < 0 < f(b)$, prendiamo $c_1 = \frac{(a+n)}{2}$(il punto medio tra a,b), allora abbiamo 3 casi:

- Se $f(c_1) = 0$, c è uno zero di f
- Se$f(c_1) > 0$

– Imponiamo $a_1 = c$ e $b_1 = c_1$ e iteriamo il procedimento. Infatti se il punto è positivo, dobbiamo andare verso sinistra verso lo zero



- Se $f(c_1) < 0$, allora $a_1 = c_1$ e $b_1 = b$ e iteriamo il processo. Se il punto è negativo, dobbiamo spostarci a destra verso lo zero.

Possono verificarsi due possibilità:

- Trovo uno zero in un numero finito di passi. Quindi il teorema vale
- Costruisco una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che

A. $[a, b] > [a_1, b_1] > ... > [a_n, b_n]$ Quindi la successione diventa sempre più piccola.

B. $b_n - a_n = \frac{(b-2)}{(b^n)}$

C. $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

Questa successione ha due caratteristiche:

- a_n È monotona crescente e limitata
- b_n È monotona decrescente e limitata

Queste due successioni allora sicuramente convergono in due punti l_1 e l_2. Dal punto b, inoltre si ha:

$$l_2 - l_1 = lim_(n \to \infty)? \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

Quindi $l_1 = l_2$

Poichè f è continua, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(l) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Inoltre per il secondo teorema della permanenza del segno, si ha:

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \implies f(l) \leq 0 \leq (l)$$

Quindi $f(l) = 0$, cioè l zero di f

3 Algoritmo di bisezione

L'algoritmo di bisezione permette di trovare una soluzione approssimata di una equazione se vale il teorema di esistenza degli zeri. Infatti si basa sulla dimostrazione di questo teorema.

Passi del teorema:

- Scegliamo un intervallo dove applicare la bisezione(cioè dove vale il teorema di esistenza degli zeri)
- Troviamo il punto medio c dell'intervallo $[a, b]$ cioè $\frac{a+b}{2}$
- Calcoliamo: $f(a), f(b), f(c)$
- Calcoliamo poi l'errore come $\frac{b-a}{2}$. Se l'errore è minore di quello che viene richiesto possiamo terminare, altrimenti iteriamo il procedimento, scegliendo come intervallo quello che rispetta il teorema di esistenza degli zeri ed include il punto c

3.1 Criterio d'arresto

Fissiamo quindi una tolleranza di errore ϵ per stabile quando abbiamo trovato uno zero, questo può essere ottenuto imponendo

$$\frac{b-a}{2} < \epsilon$$

.

Il numero di passi può essere calcolato come:

$$\frac{b-a}{2^n} < \epsilon \leftrightarrow 2^n > \frac{b-a}{\epsilon} \leftrightarrow n > log_2 \frac{b-a}{a}$$

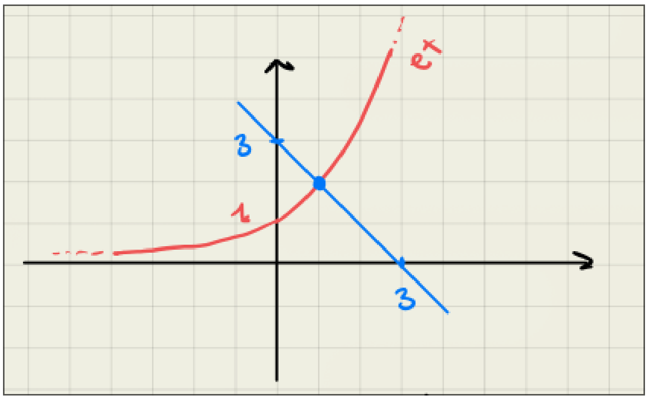
Questo si può risolvere usando le proprietà dei logaritmi.
Ad esempio $\epsilon = 10^{-K}$ si ottiene:

$$log_2(b-a) + K log_2(10)$$

3.2 Determinare un intervallo per applicare la bisezione

Per applicare il teorema di esistenza degli zeri dobbiamo trovare un intervallo che soddisfi le ipotesi del teorema. è utile in questo senza ragionare con considerazioni grafiche.

Ad esempio $e^x + x - 3$ si può scrivere come $e^x = 3 - x$, disegnamo questa due funzioni su un piano cartesiano:



Vediamo che c'è un intersezione tra i due grafici che sta sicuramente nell'intervallo $[0, 3]$, usiamo quindi questo intervallo.

Osserviamo inoltre che in questo intervallo la funzione è strettamente crescente e quindi lo zero sarà unico.

3.3 Esempio

Risolvere con il metodo di bisezione con $\epsilon = 10^{-1}$:

$$2x - e^{-x} = 1$$

Troviamo un intervallo iniziale che rispetti il teorema di esistenza degli zeri. In questo caso, dal grafico riusciamo a capire che la soluzione sta tra $[0, 2]$ e in questo intervallo vale il teorema. Infatti:

$$f(0) \cdot f(2) = -2 \cdot (e - e^{-4}) < 0$$

Ora applichiamo la bisezione sul primo intervallo:

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	$\frac{b-a}{2}$
0	2	1	-2	(3 - e^{-4})	0.632	1

Notiamo che l'errore è $> \epsilon$, quindi iteriamo il processo. Notiamo che a e c

hanno segni discordi quindi nell'intervallo $[a, c]$ vale la condizione per applicare la bisezione.

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	$\frac{b-a}{2}$
0	1	0.5	-2	0.632	$-e^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$

L'errore si è ridotto ma non è ancora $< \epsilon$, iteriamo nuovamente sull'intervallo $[b, c]$ ed otteniamo:

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	$\frac{b-a}{2}$
0.5	1	0.75	$-e^{\frac{1}{2}}$	0.632	0.028	0.25

Iteriamo nuovamente perchè l'errore commesso è $> \epsilon$. Alla fine otterremo:

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	$\frac{b-a}{2}$
0.625	0.75	0.6875	-0.285	-1.617	-0.1278	0.0625

Ora l'errore è $< \epsilon$ e quindi abbiamo terminato.

4 Teorema di Newton

Supponiamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^2(derivabile due volte) e supponiamo:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- $f^{'}$ e $f^{''}$ hanno segno costante su $[a, b]$
- $f(a) \cdot f^{''}(a) > 0$ oppure $f(b) \cdot f^{''}(b) > 0$

Allora esiste un unico punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$ e la successione

$$\{x_n\} = \begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Oppure

$$\{x_n\} = \begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Converge a c

4.1 Osservazioni

- L'ipotesi 2 vuol dire che $f^{'}$ mantiene lo stesso segno per tutto l'intervallo $[a, b]$. Stessa cosa per $f^{''}$, il segno delle due derivate può comunque essere diverso.

- L'ipotesi 3 segue da questo fatto

4.2 Dimostrazione

Dal teorema di esistenza degli zeri, sappiamo che $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$, inoltre in questo caso specifico c è unico perchè $f^{'}$ ha segno costante. Dimostriamo che $\{x_n\}$ è convergente:

Supponiamo $f(a) > 0$ e $f^{''} > 0$ cioè f decrescente e convessa e definiamo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Notiamo che:

- $g(c) = c - \frac{f(c)}{f'(c)} = c - \frac{0}{f'(c)} = c$ quindi c è un punto fisso di g
- g è derivabile

$$g^{'}(x) = 1 - \frac{(f^{'})^2 - f(x) \cdot f^{''}(x)}{(f'(x))^2}$$

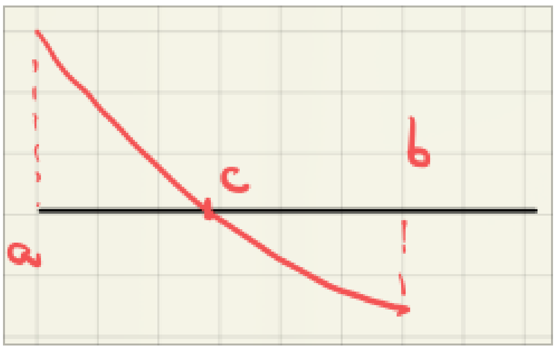
Ma questo si può riscrivere come:

$$g^{'}(x) = \frac{(f^{'}(x))^2}{(f'(x))^2} - \frac{(f^{'})^2 - f(x) \cdot f^{''}(x)}{(f'(x))^2}$$

Questo si può riscrivere sottraendo:

$$g^{'}(x) = \frac{f(x) \cdot f^{''}(x)}{(f'(x))^2}$$

Questa è una funzione strettamente crescente perchè numeratore e denominatore sono > 0. Inoltre dato che $f^{''} > 0$, allora g è concava.



Ora dobbiamo dimostrare

$$x_n \leq x_{n+1} \leq c \ \forall n$$

:

Se $N = 0$ si ha $x_0 = a$ e

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Questo si può scrivere come

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

ma questa frazione è sicuramente negativa perchè $\frac{\geq 0}{< 0}$ e quindi

$$x_1 > a$$

cioè

$$x_1 > x_0$$

Inoltre $x_1 = g(x_0) = g(a) < g(c) = c$.

Per la monotonia di g, abbiamo:

$$g(x_0) < g(x_1) < g(c) \forall n$$

e quindi vale per induzione

$$x_n \leq x_{n+1} \leq c \ \forall n$$

Quindi la successione $\{x_n\}$ è crescente e quindi è sicuramente limitata. Infatti $x_n < c \ \forall n$. Quindi $x_n \to l \in \mathbb{R}$

* * *

Ora dimostriamo il punto B(cioè $l = c$):

Ricordiamo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Passiamo al limite e notiamo che $x_n \to l \implies x_{n+1} \to l$

$$\frac{f(l)}{f'(l)} = 0$$

Quindi l è uno zero di f.

5 Metodo delle tangenti di Newton

Il metodo delle tangenti di Newton è un algoritmo alternativo per calcolare uno zero di f.

Consideriamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$ eseguiamo i seguenti passi:

- Prendiamo un punto $x_0 \in [a, b]$ e calcoliamo la tangente in questo punto $y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$
- Calcoliamo lo zero della tangente imponendo $y = 0$. Questo punto può essere trovato come $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Questo punto però non approssima bene la funzione quindi iteriamo il processo calcolando

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

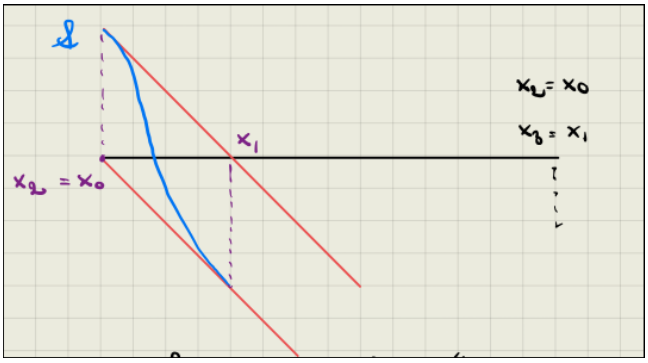
Possiamo quindi costruire una successione definita per ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Questa successione converge ad uno zero di f

5.1 Osservazioni

- Affinchè x_{n+1} sia ben definita, dobbiamo supporre $f^{'}(x_n) \neq 0$ per ogni iterazione. Quindi f è strettamente monotona e quindi lo zero è univoco
- C'è un caso particolare dove questo metodo va in loop:



Dobbiamo quindi sviluppare un teorema per far funzionare questo metodo.

6 Teorema dei valori medi

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora esistono m e M il minimo e il massimo di f su $[a, b]$(che esistono per Weierstrass), allora

$$\forall \lambda \in [m, M] \; \exists c_\lambda \in [a, b] \text{ tale che } f(c_\lambda) = \lambda$$

Cioè f assume tutti i valori intermedi tra m e M.