Metodi di risoluzione esercizi

Andrea Canale

December 14, 2024

Contents

1 Esercizi span

Per trovare il sottospazio generato dobbiamo controllare che l'elemento sia definito nel sottospazio e la dipendenza delle soluzioni proposte

Ad esempio dato questo esercizio:

1.(1 pt.) Siano $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_3[x]$ definiti da

$$a(x) = x - 1, \qquad b(x) = x + 2, \qquad c(x) = 2x^2 - 2,$$
$$d(x) = x^2 - x, \qquad e(x) = 2x^3 + 1, \qquad f(x) = x^3 - x^2,$$

e sia U il sottospazio $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ ; \ p(1) = 0\}$. Allora vale

(a) $U = \mathrm{Span}(a, c)$. (b) $U = \mathrm{Span}(a, c, f)$. (c) $U = \mathrm{Span}(c, d, e, f)$.
(d) $U = \mathrm{Span}(b, e, f)$. (e) $U = \mathrm{Span}(a, c, d)$.

Possiamo escludere gli elementi $b(x)$ e $e(x)$ in quanto non rispettano condizione $p(1) = 0$

Poi troviamo che c ed f sono indipendenti(in questo caso si vede senza fare il sistema lineare)

Infine notiamo che $d(x)$ viene generato da $a(x) \cdot x$ quindi $d(x)$ va escluso

Concludiamo che la risposta corretta è la b: $Span(a, c, f)$

1.1 Trovare combinazione lineare con polinomi

Per trovare una combinazione lineare tra polinomi, come ad esempio:

3.(1 pt.) I polinomi

$$p_1(x) = x^2 + x + 1, \qquad p_2(x) = x^2 + x - 1, \qquad p_3(x) = x - 2$$

formano una base di $\mathbb{R}_2[x]$. Il vettore delle coordinate di $q(x) = (x+1)^2$ in questa base è:

(a) $(1, 2, 1)$. (b) $(2p_1, -p_2, p_3)$. (c) $(3, -2, -1)$.
(d) $(2, -1, 1)$. (e) $(x^2, 2x, 1)$.

Bisogna calcolare:

- $\lambda_1(p_1(x))$
- $\lambda_2(p_2(x))$
- $\lambda_3(p_3(x))$

Otteniamo:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_2 x - \lambda_2 + \lambda_3 x - 2\lambda_3 = (x+1)^2$$

Ora raccogliamo $x^2, x,$ termini noti:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = x^2 + 2x + 1$$

Adesso possiamo trasferire il tutto in un sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \quad \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \quad 2\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Dove nella prima riga abbiamo isolato ed eguagliato x^2, nella seconda x e nella terza i termini noti.

Ora possiamo risolvere il sistema lineare e trovare le soluzioni che in questo caso saranno:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = -1$
- $\lambda_3 = 1$

Che corrispondono alla risposta (d)

2 Esercizi sottospazio

Per trovare un sottospazio, dobbiamo controllare le sue 3 condizioni, ad esempio dato il seguente esercizio:

2.(1 pt.) Quale degli seguenti insiemi **non** è un sottospazio di $\mathbb{R}_2[x]$:

(a) $\{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\}$.

(b) $\{(t+s)x^2 - tx - s \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a = 2c, b = 0\}$.

(d) $\{(1+t)x^2 + tx \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(e) $\{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0 = p(2)\}$.

Bisogna controllare le 3 condizioni per tutti i sottospazi dati