Teorema Spettrale

Andrea Canale

December 22, 2024

Contents

1 Prodotti hermitiani

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Un prodotto hermitiano $V\ x\ V \to \mathbb{C}$ con le proprietà:

- $<v + v^{'}, w> = <v, w> + <v^{'}, w>$
- $<\lambda v, w> = \lambda <v, w>$
- $<w, v> = \overline{<v, w>}$
- $<v, v> = \overline{<v, v>}$
- $<v, w + w^{'}> = <v, w> + <v, w^{'}>$
- $<v, 0> = <0, w> = 0$

Questo prodotto è sequilineare perchè è lineare sul primo fattore ma sul secondo fattore è lineare solo per somma.

1.1 Prodotto hermitiano definito positivo

Un prodotto hermitiano è definito positivo se $<v, v>>0 \ \forall v \neq 0$

Inoltre possiamo definire la norma di un prodotto hermitiano definito positivo come:

$$||v|| = \sqrt{<v, v>} = 0 \text{ se v} \neq 0$$

1.2 Prodotto hermitiano euclideo

Il prodotto hermitiano euclideo è definito come:

$$<x, y> =^t x \cdot \overline{y}$$

2 Matrici hermitiane

Una matrice $H \in M(n, \mathbb{C})$ è hermitiana se:

$$^tH = \overline{H}$$

Notiamo che sulla diagonale di una matrice hermitiana abbiamo sempre numeri reali.

Inoltre, se tutte le entrate sono reali, allora H è hermitiana se e solo se H è simmetrica.

3 Matrice associata ad un prodotto hermitiano

Sia V uno spazio vettoriale complesso e $B = \{v_1, ..., v_n\}$, una base di V. La matrice associata al prodotto hermitiano è data da:

$$H_{ij} = <v_i, v_j>$$

Questa matrice associata a g in B è scritta come: $[g]_B$

4 Endomorfismi autoaggiunti

Un endomorfismo $T : V \to V$ è autoaggiunto se:

$$<T(v), w> = <v, T(w)>$$

Data A la matrice di T associata a B, T è autoaggiunto, se e solo se, A è hermitiana.

Corollario

- Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$, l'endomorfismo $L_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è autoaggiunto, se e solo se A è hermitiana

- Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$, l'endomorfismo $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è autoaggiunto, se e solo se A è simmetrica

Questo corollario vale solo per il prodotto hermitiano/scalare euclideo.

5 Sottospazi invarianti

Dato uno spazio V con prodotto scalare/hermitiano definito positivo, il sottospazio $U \subset V$ è invariante se

$$T(U) \subset U$$

Notiamo che se T è autoaggiunto e U è un sottospazio invariante, allora anche $U^{\perp}$ è T-invariante

6 Teorema spettrale

Un endomorfismo $T : V \to V$ è autoaggiunto se e solo se V ha una base ortogonale formata da autovettori di T e se tutti questi autovettori sono reali.

Per le matrici reali questi fatti sono equivalenti:

- A è simmetrica
- L_a è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare euclideo
- L_a e A ha una base ortogonale di autovettori(con autovalori reali)
- Esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$ che è diagonale

Questo ci torna molto utile per capire se una matrice ha una base ortogonale, infatti basta verificare che sia simmetrica perchè valgano tutte le altre proprietà del corollario.