Applicazioni lineari

Andrea Canale

January 4, 2025

Contents

1 Applicazioni lineari

Dati due spazi vettoriali V e W sullo stesso campo $\mathbb{K}$, un'applicazione lineare è una funzione $f: V \to W$ tale che valgono i seguenti assiomi:

- $f(0) = 0$
- $f(v + w) = f(v) + f(w)\ \forall v, w \in V$
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall v \in V$

Osserviamo che se $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, osserviamo che:

$f(v) = f(\lambda_1 v_1) + ... + f(\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$

E quindi possiamo unire le proprietà insieme.

1.1 Funzioni note non lineari

- Funzioni che hanno un grado maggiore di 1, ad esempio: $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 + b \\ a - 2b \end{pmatrix}$
- Funzioni che hanno termini noti, ad esempio: $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2 \\ a - b - 1 \end{pmatrix}$

1.2 Funzioni note lineari

- La funzione nulla(composta da soli zeri)
- La funzione identità(1 sulla diagonale)

2 Nucleo e immagine

2.1 Nucleo

Il nucleo di una funzione $f : V \to W$ è definito come:

$$ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0_w\}$$

Sappiamo inoltre che il nucleo è sempre sottospazio di V perchè contiene l'origine 0 e i vettori $v \in V$

La funzione f è iniettiva se e solo se $ker(f) = \{0\}$

Per trovare il nucleo bisogna risolvere il sistema f(v) = 0

Esempio:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ definita come: } f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

Dobbiamo risolvere il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e, in questo caso, avrebbe 0 soluzioni cioè il nucleo è vuoto.

Inoltre la dimensione del nucleo può essere calcolata come: $n - rk(A)$ dove n è il numero di incognite del sistema lineare.

2.2 Immagine

L'immagine di una funzione $f : V \to W$ è definita come:

$$Im = \{w \in W | \exists v \in V \text{ tale che } f(v) = w\}$$

L'immagine è sempre sottospazio di W perchè contiene l'origine 0 e i vettori $w \in W$

Inoltre sappiamo che la funzione f è suriettiva se e solo se $Im(f) = W$

L'immagine può essere trovata calcolando lo Span delle colonne della matrice associata all'applicazione lineare.

Esempio:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ definita come: } f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

Rispetto alla base canonica.

Dobbiamo risolvere controllare che le colonne della matrice associata(in questo caso alla base canonica) generino uno Span. In questo caso abbiamo $\mathbb{R}^2$ e quindi otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

. Notiamo che le colonne sono indipendenti tra loro e quindi $Span = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$

Un ulteriore prova di ciò può essere fatto trovando $dim(Im(f)) = rk(f) = 2$

3 Matrice associata all'applicazione lineare

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e $C = \{w_1, ..., w_n\}$ una base di W, possiamo rappresentare qualsiasi vettore di V come combinazione lineare di C. Questo ci permette di rappresentare una funzione lineare come matrice. è denotata come: $[f]_C^B$

Vale la seguente proprietà: $[f(v)]_C = [f]_C^B \cdot [v]_B$

4 Teorema della dimensione

Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Se V ha dimensione finita n, allora:

$$dimKerf + dimImf = n$$

Nel caso di un applicazione lineare $L_a : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, abbiamo che:

$$kerL_a = \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = 0\} = S$$

Ciò è lo spazio delle soluzioni del sistema $Ax = 0$. Per calcolare la dimensione di questo spazio, possiamo usare il teorema di Rouchè-Capelli:

$$dimS = n - rk(A)$$

5 Classificazioni

- Se $dimKer(f) \neq 0$, allora f è iniettiva
- Se $dimIm(f) \geq dimW$, allora f è suriettiva
- Se $dimW = dimV$, allora f è iniettiva

6 Isomorfismi

Un isomorfismo è un applicazione lineare biettiva. Due spazi vettoriali V, W sono isomorfi se esiste un isomorfismo $f : V \to W$. Inoltre dato che l'isomorfismo è biettivo, esisterà anche una funzione inversa.

Quindi due spazi vettoriali W,V sono isomorfi, se e solo se, $dimW = dimV$.

Da ciò deduciamo che tutti gli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ sono isomorfi rispetto a $\mathbb{K}^n$

7 Matrice del cambiamento di base

Sia V uno spazio vettoriale, B e C due basi di V. La matrice del cambiamento di base da B in C è definita come: $A = [id_v]_C^B$

Questa matrice contiene nella sua j-esima colonna, le coordinate di v_j rispetto alla base C.

La matrice del cambiamento di base quindi codifica nella sue colonne le coordinate di ciascun elemento rispetto a B.

Per calcolare la matrice del cambiamento di base ci sono due tecniche:

- Scrivere un sistema lineare dove cerchiamo eguagliamo i vettori di C a quelli di B e troviamo i coefficienti adatti a rendere vera l'uguaglianza
- Usare la base canonica.

Il metodo che utilizzeremo prevederà l'utilizzo della base canonica.

Esempio:

Dato l'endomorfismo $T = id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, scrivere la matrice associata rispetto alle base $B = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ e $C = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$

Data la base canonica $E = \{e_1, e_2\}$, i vettori in base canonica saranno:

$$[id]_E^B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$[id]_E^C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Adesso la matrice del cambiamento di base si può ottenere facendo:

$$[id]_C^B = [id]_E^B \cdot [id]_C^E = [id]_E^B \cdot ([id]_E^C)^{-1} \cdot A$$

Dove A è la matrice associata all'applicazione lineare(in questo caso I_2 quindi la omettiamo)

Ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

8 Composizione di applicazioni lineari

Se due funzioni f e g sono lineari, la loro composizione sarà lineare.

Inoltre vale la seguente proprietà: $L_a \cdot L_b = L_{ab}$

9 Endomorfismi

Sia V uno spazio vettoriale, un endomorfismo è un'applicazione lineare $f : V \to V$.

Da ciò ne ricaviamo che la matrice associata ad f con B una base di V è $[f]_B^B$

10 Matrici simili

Due matrici A, B sono simili se esiste una matrice invertibile tale che $A = M^{-1} \cdot B \cdot M$.

Se due matrici sono simili allora:

- Il loro rango è uguale
- Il loro terminante è uguale

Inoltre se A è invertibile anche B è invertibile.