Continuità di una funzione

Andrea Canale

May 20, 2025

Contents

1 Funzioni continue

Dato un punto $c \in \mathbb{R}$, una funzione $f(x) : I(c) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in c se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

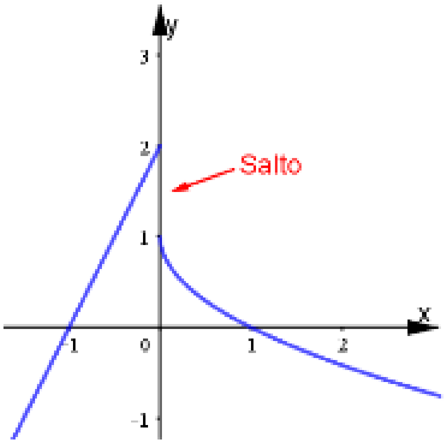
1.1 Casi di discontinuità

- Funzione non definita in c
- Il limite esiste ma è diverso da $f(x)$
- Il limite non esiste(limite destro diverso da quello sinistro)

1.2 Tipi di discontinuità

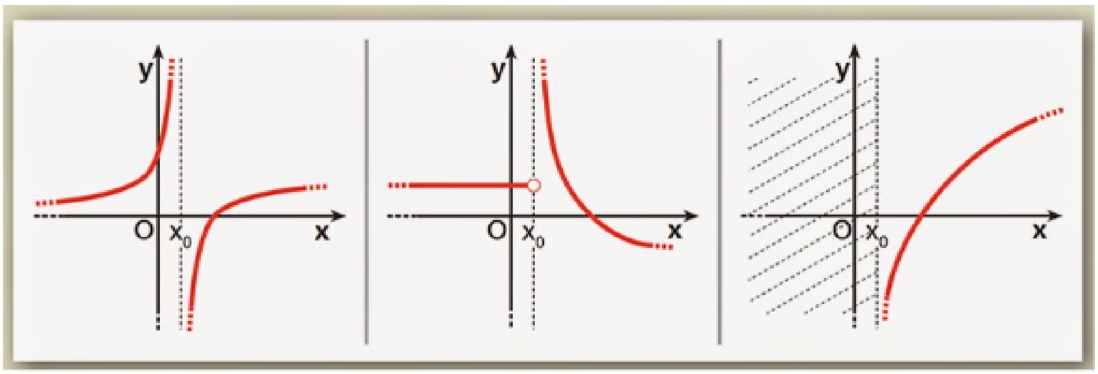
Una funzione ha un **salto(o di prima specie)** in $x = c$ se:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$



Una funzione ha una **discontinuità di seconda specie** se

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty \text{ o non esiste}$$



Esempi di funzioni discontinue sono la funzione segnale, la funzione parte intera o la funzione mantissa.

1.3 Discontinuità eliminabile

Se abbiamo una discontinuità del primo tipo, possiamo eliminarla modificando la funzione:

Dato

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

Ridefiniamo $f(x)$ come:

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{se } x \neq c \\ f(x) = l & \text{se } x = c \end{cases} \tag{1}$$

Cioè imponiamo la funzione uguale ad l in $x = c$

La discontinuità di seconda specie non è eliminabile invece

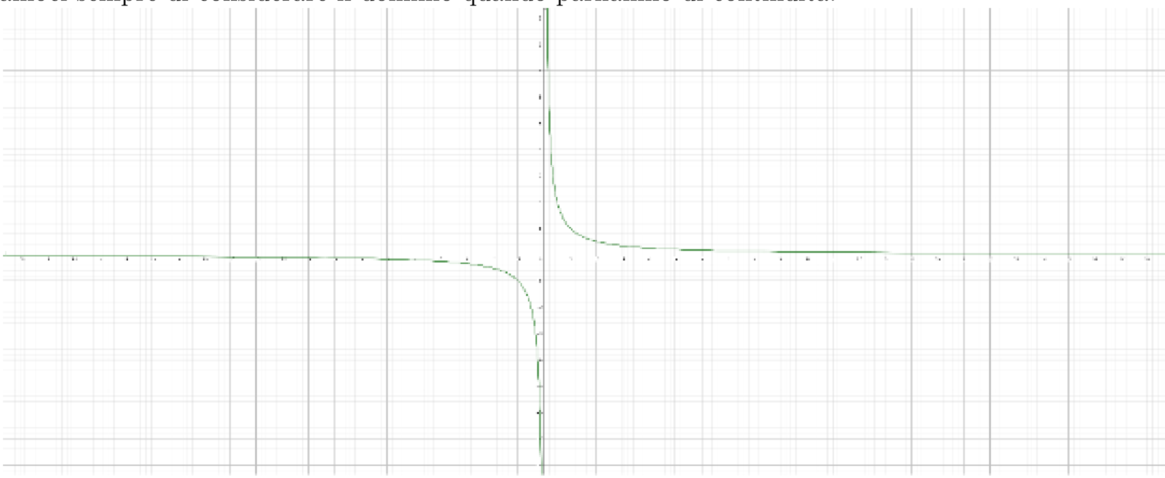
2 Continuità di funzioni elementari

2.1 Potenze

- Le funzioni potenza x^n sono sempre continue
- Le funzioni $\frac{1}{x^n}$ sono continue nel loro dominio
- Le funzioni x^{-n} sono continue tranne in 0

2.1.1 Osservazione

La funzione $\frac{1}{x}$ è continua nel suo dominio perchè in 0 non è definita. Ricordiamoci sempre di considerare il dominio quando parlianmo di continuità.



2.2 Funzioni trigonometriche

- $sin(x), cos(x), arccos(x), ...$ sono sempre continue in $\mathbb{R}$
- $tan(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ tranne in $\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

3 Proprietà delle funzioni continue

Se f, g sono continue in un intervallo $I(c)$, allora, valgono i seguenti fatti:

- $f \pm g$ è continua in $I(c)$
- $f \cdot g$ è continua in $I(c)$
- $\frac{f}{g}$ è continua in $I(c)$ se $g \neq 0$
- $f \;\; o \;\; g$ è continua in $I(c)$. Questa proprietà vale per composizione di k funzioni. Cioè se sono tutte continue in $I(c)$, allora la composizione sarà continua in $I(c)$. Nelle zone dove tutte sono continue, la composizione è continua

* * *

Se f è continua in un intervallo $I(c)$, allora:

$$\frac{1}{f}$$

è continua in $I(c)$ se $f \neq 0$

4 Teorema di Weierstrass

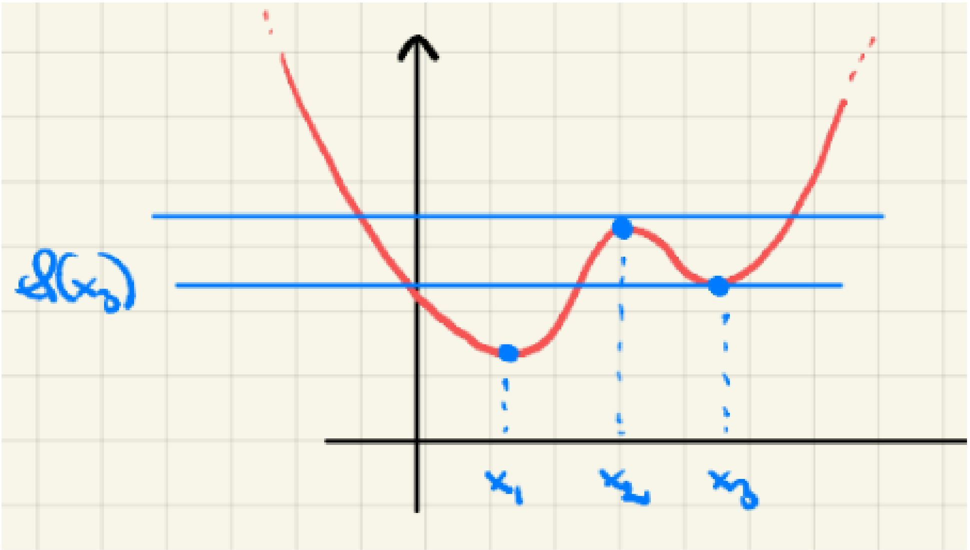
Sia $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato, allora esistono x_m e x_n tali che:

$$f(x_n) \leq f(x) \geq f(x_m) \; \forall x \in [a, b]$$

Cioè esistono un massimo e un minimo assoluti nell'intervallo $[a, b]$.

4.1 Osservazioni

- I punti di massimo e minimo non sono unici, ma potrebbero esisterne altri locali.



Solo x_1 e x_2 sono punti assoluti. x_3 è un minimo locale

- Se esiste un massimo assoluto, allora la funzione è limitata superiormente
- Se esiste un minimo assoluto, allora la funzione è limitata inferiormente
- Questo teorema funziona solo se la funzione è continua
- Questo teorema funziona solo se la funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato