Concavità e convessità

Andrea Canale

May 20, 2025

Contents

1 Convessità

Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa nell'intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ risulta vero:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

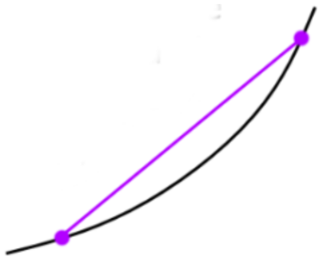
La parte destra della disequazioni è una funzione che ha come parametro x e l'abbreviamo $\delta(x)$.

Notiamo che questa funzione $\delta(x)$ ha le seguenti caratteristiche:

- $\delta(x_1) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_1 - x_1) = f(x_1)$ per via delle semplificazioni
- $\delta(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2 - x_1) = f(x_1) + f(x_2) - f(x_1) = f(x_2)$ per via delle semplificazioni

Questa funzione è quindi una retta passante tra i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

Quindi la definizione di concavità impone che la funzione sia sotto questa retta per ogni punto della funzione:

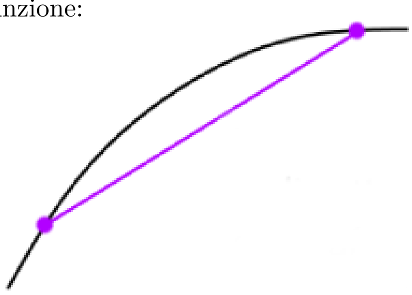


2 Concavità

Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è concava nell'intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 > x_2$ risulta vero:

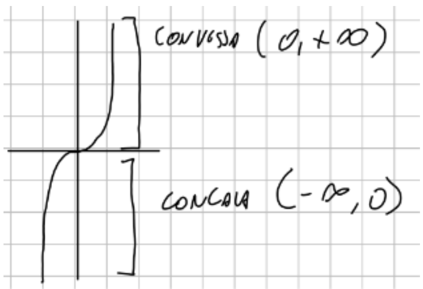
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Cioè la retta $\delta(x)$ di prima deve stare sopra la funzione per ogni punto della funzione:



2.1 Osservazione

Una funzione che ha un flesso in un intervallo, non è nè concava nè convessa.



3 Test di concavità

Il test di concavità mostra il legame tra la funzione derivata e la concavità di una funzione.

Se f è derivabile in (a,b), allora:

- f è convessa su (a,b) se e solo se $f^{'}$ è crescente in (a,b)
- f è concava su (a,b) se e solo se $f^{'}$ è decrescente in (a,b)

Inoltre se f è derivabile due volte:

- f è crescente in (a,b) se e solo se $f^{''} \geq 0$
- f è decrescente in (a,b) se e solo se $f^{''} \leq 0$

3.1 Dimostrazione

Dimostriamo la prima implicazione, f convessa $\implies$ f crescente:

Vogliamo dimostrare $x_1 < x_2 \implies f^{'}(x_1) \leq f^{'}(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in (a,b)$.

Per ipotesi f è convessa: $f(x) \leq f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)(x - x_1)$

Spostando $f(x)$ a destra, otteniamo:

$$f(x) - f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) \leq 0$$

Questa disequazione la abbreviamo come $g(x) \leq 0$ ed otteniamo:

- $g(x_1) = f(x_1) - \delta(x_1) = 0$
- $g(x_2) = f(x_2) - \delta(x_2) = 0$

Ora mostriamo che

- $g^{'}(x_1) \leq 0$
- $g^{'}(x_2) \geq 0$

Se $x > x_1$, otteniamo:

$$g^{'}(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \leq 0$$

Per il secondo teorema della permanenza del segno

Se $x < x_2$, otteniamo:

$$g^{'}(x_2) = \lim_{x \to x_2^-} \frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} = \geq 0$$

Questa implicazione è verificata quindi:

$$f^{'}(x_1) \leq f^{'}(x_2)$$

quindi la derivata è crescente.

* * *

Dimostriamo ora la seconda implicazione.

Mostriamo che $x_1 < x_2 \ \forall x_1, x_2 \implies g(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$

Ricordiamo da prima $g(x_1) = g(x_2) = 0$, inoltre $g^{'} = f^{'}(x) - c$ con $c \in \mathbb{R}$

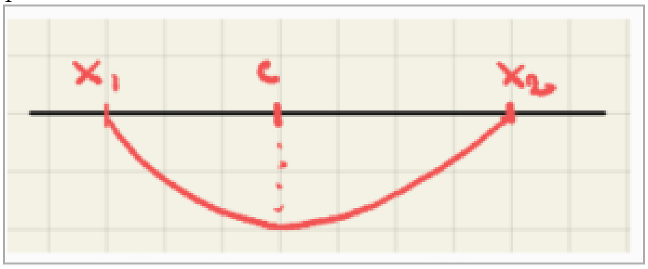
Allora se $g^{'}$ è crescente lo è anche $f^{'}(x)$ perchè stiamo solo applicando uno spostamento.

Usando il teorema di Lagrange otteniamo:

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ Tale che } g^{'}(c) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{(x_2 - x_1)} = 0$$

Questo perchè $g(x_1) = g(x_2) = 0$

Allora il grafico sarà sicuramente crescente tra (c, x_2) e decrescente tra (x_1, c) e quindi sarà così:



Che dimostra la convessità.

3.2 Osservazione

Le funzioni lineare sono sia concave che convesse. Infatti avendo $\geq$ e $\leq$ copriamo tutti i casi di uguaglianza.