Spazio euclideo

Andrea Canale

December 22, 2024

Contents

1 Isometrie

Un isometria è un isomorfismo $T : V \to W$(con g e $g^{'}$ prodotti scalari) che soddisfa la seguente proprietà:

$$g\left(v_1, v_2\right) = g'\left(T\left(v_1\right), T\left(v_2\right)\right)$$

Un isometria mantiene la lunghezza dei vettori invariata.

Ci sono altri 3 modi per verificarla:

- Esiste una base B tale che vale la proprietà dell'isometria($\forall v_i, v_j \in B$)
- $\forall v \in V$, $||v|| = ||T(v)||$
- $\forall v, w \in W$, $d(v, w) = d(T(v), T(w))$

Inoltre, T è isometria se vale:

$$[g]_B = [T]_B^B \cdot^t [g^{'}]_B \cdot [T]_B^B$$

Questo ci torna utile per l'endomorfismo $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che è isometria se:

$${}^tA \cdot A = I_n$$

2 Isometrie su $\mathbb{R}^2$

2.1 Rotazioni

Una rotazione di angolo θ è una mappa $L_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla matrice di rotazione $A = \begin{pmatrix} cos\,(\theta) & -sin\,(\theta) \\ sin\,(\theta) & cos\,(\theta) \end{pmatrix}$

2.2 Riflessioni

Una riflessione di angolo θ rispetto ad una retta r è una mappa $L_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla matrice di rotazione $A = \begin{pmatrix} cos\,(\theta) & sin\,(\theta) \\ sin\,(\theta) & -cos\,(\theta) \end{pmatrix}$

Queste sono le uniche isometrie in $\mathbb{R}^2$

3 Matrici ortogonali

Una matrice $M(n, \mathbb{K})$ è ortogonale se

$${}^tA \cdot A = I_n$$

Ed equivalentemente: ${}^tA = A^{-1}$

Inoltre, se una matrice è ortogonale sappiamo che il determinante sarà $+1$ se la matrice descrive una rotazione o -1 se descrive una riflessione.

Tuttavia non tutte le matrici con determinante ± 1 sono ortogonali.

4 Isometrie su $\mathbb{R}^3$

4.1 Antirotazione

Un antirotazione è la composizione di una rotazione rispetto ad un asse r e una riflessione rispetto al piano $r^{\perp}$

In $\mathbb{R}^3$ ogni isometria è una rotazione o un'antirotazione

5 Prodotto vettoriale

In $\mathbb{R}^3$ possiamo definire un operazione che funziona solo su questo spazio:

$$v\ x\ w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

Questa operazione può essere ricordata con questa formula: $v\ x\ w = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ sviluppando sulla prima riga e prendiamo i coefficienti dei rappresentanti canonici come componenti del vettore.

5.1 Proprietà del prodotto vettoriale

- è ortogonale sia a v che a w
- Se $v\ x\ w$ è nullo, allora v e w sono dipendenti
- Se v e w sono indipendenti, $v, w, v\ x\ w$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$
- $||v\ x\ w|| = ||v|| \cdot ||w|| - < v, w >$
- $||v\ x\ w|| = ||v|| \cdot ||w|| - sen(\theta)$

Le ultime due proprietà valgono anche per la norma al quadrato(mettendo al quadrato tutti i membri dell'uguaglianza)

6 Basi positive

Una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $\mathbb{R}^3$ è positiva se:

$$det(v_1|v_2|v_3) > 0$$

La positività di una base dipende dai vettori e dalla loro posizione.

7 Sottospazio affine

Un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V, dato un vettore v_0 è un sottospazio del tipo:

$$\{w \in W \mid v_0 + w\}$$

Due spazi $x + W$ e $y + V$ coincidono se e solo se $W = V$ e $x - y \in W$

Lo spazio W di uno spazio affine S scritto come $x + W$ è detto giacitura di S ed è indicato come $giac(S)$

7.1 Forma parametrica e cartesiana di spazi affini

La forma cartesiana descrive uno spazio attraverso i punti che soddisfano un'equazione lineare omogenea:

è utile per determinare i punti di una funzione.

$$x = \{v \in \mathbb{R}^3 | F(v) = 0\}$$

La forma parametrica descrive uno spazio attraverso i vettori che lo generano:

$$x = F(y) \text{ Per qualche } F : y \to \mathbb{R}^3$$

Oppure:

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

è utile per determinare se un punto appartiene allo spazio.

Ad esempio con la bisettrice abbiamo:

- In forma cartesiana: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 0\}$
- In forma parametrica $\{(t, t) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$

Entrambi descrivono i punti con le stesse coordinate

7.2 Intersezione tra spazi affini

Per calcolare l'intersezione di due spazi affini $S \cap S^{'}$ dobbiamo sempre calcolare un sistema di equazioni indipendentemente dalla forma.