Spazi vettoriali

Andrea Canale

December 14, 2024

Contents

1 Gruppo

Un gruppo è un insieme G dotato di 2 operazione binaria identificate come $*$ tale che

$$GxG \to G$$

Un gruppo deve soddisfare le seguenti proprietà:

- Esistenza di un elemento neutro per l'operazione binaria $e \in G$ tale che $e \cdot g = g$
- Vale la proprietà associativa: $(a * b) * c = a * (b * c)$
- Per ogni elemento di G, esiste un inverso a^{-1} tale che $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Inoltre, se vale la proprietà commutativa, il gruppo si dice abeliano o commutativo.

1.1 Esempi

$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{C},+)$ sono gruppi abeliani

$(\mathbb{Z},\cdot),(\mathbb{C},\cdot)$ non sono gruppi abeliani in quanto manca l'inverso a 0

Se togliamo 0, otteniamo gruppi abeliani $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot),(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$

2 Campo

Un campo è un insieme $\mathbb{K}$ con 2 operazioni $+$ e $\cdot$ tale che

- L'addizione $(\mathbb{K},+)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 0_k (non è necessariamente 0)
- $(\mathbb{K}\backslash\{0\},\cdot)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 1_k(non è necessariamente 1)
- Vale la proprietà distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

3 Spazi vettoriali

Dato un campo $\mathbb{K}$, gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti scalari.

Uno spazio vettoriale di $\mathbb{K}$ è un insieme V di elementi, detti vettori, dotato di due operazioni:

- Somma di vettori, indicata con $+$
- Prodotto scalare, che associa $v\in V$ ad uno scalare $\lambda\in\mathbb{K}$ tale che $\lambda v\in V$

Gli spazi vettoriali devono soddisfare le seguenti proprietà:

- $(V,+)$ è un gruppo abeliano
- Vale la proprietà distributiva: $\lambda\,(v+w)=\lambda v+\lambda w$
- Vale la proprietà associativa: $(\lambda+u)\,v=\lambda u+\lambda v$
- Vale la proprietà commutativa: $(\lambda u)\,v=\lambda\,(uv)$
- Esiste un elemento neutro della moltiplicazione
- Esiste un elemento neutro per l'addizione che è l'origine dello spazio

4 Lo spazio euclideo

Lo spazio euclideo di dimensione n è uno spazio che contiene tutte le n-uple dei numeri reali ed identificato dall'insieme $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}x\mathbb{R}x...x\mathbb{R}$$

Lo spazio euclideo è fornito di due operazioni:

- Somma tra vettori
- Prodotto scalare

4.1 Somma tra vettori

Definita come la somma riga per riga

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

4.2 Prodotto scalare

Dato un vettore e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto scalare è definito come la moltiplicazione dello scalare per ogni elemento del vettore.

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \lambda \\ \vdots \\ x_n \cdot \lambda \end{pmatrix}$$

5 Spazio dei polinomi

Lo spazio $\mathbb{K}[x]$ contiene i polinomi con coefficiente in $\mathbb{K}$ di grado inferiore o uguale a x.

6 Sottospazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, un sottospazio W di V è un sottoinsieme di uno spazio che soddisfa 3 assiomi:

- L'origine 0_v deve essere contenuta in W, quindi un sottospazio avrà almeno sempre un elemento e avrà sempre l'elemento neutro dell'addizione
- Se $v, v' \in W$ allora $v + v' \in W$

- Se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $\lambda v \in W$

Ogni spazio vettoriale ha almeno 2 sottospazi:

- Il sottospazio banale $W = 0$, l'origine
- Il sottospazio totale $W = V$, formato da tutti i vettori di V

Chiaramente ci possono anche essere altri sottospazi.