Equivalenza logica

Andrea Canale

December 30, 2024

Contents

1 Tautologia

La tautologia è una formula logicamente valida, cioè è vera per ogni valutazione delle lettere proposizionali.

Ad esempio $A \vee A \iff A$

Questo perchè non esiste un caso dove $A \vee A$ è vera e A è falsa.

Si legge $A \vee A \iff A$ come $A \vee A$ se è solo se A

L'operatore logico che usiamo per la tautologia è $\iff$

Una tautologia si può scrivere come $\models A \wedge B$

1.1 Leggi di De Morgan

Un esempio molto importante di tautologia sono le leggi di De Morgan:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

2 Conseguenza logica

Una proposizione Q è una conseguenza logica di un insieme di premesse P se e solo se, ogni volta che tutte le premesse in P sono vere, anche q deve essere vera.

La differenza con la tautologia è che la tautologia è sempre vera mentre la conseguenza logica dipende dalle premesse P.

L'operatore logico della conseguenza logica è $\rightarrow$

Una conseguenza logica si può scrivere come $A \models B$

Esempio: Data la frase: "Se piove, la strada è bagnata", può essere divisa in 2 parti: La premessa e la conseguenza.

La premessa(P) è "Se piove" La conseguenza(Q) è "La strada è bagnata"

Quindi possiamo renderla conseguenza logica scrivendo $P \rightarrow Q$

3 Derivazione

Un argomento è una serie proposizioni che concludono una proposizione scritte come:

$$
\begin{array}{rl}
 & p_1 \\
 & p_2 \\
 & \vdots \\
 & p_n \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

Dove $p_1, p_2, ..., p_n$ sono gli argomenti(premesse) mentre q è la conclusione.

Un argomento è valido se la conclusione segue le ipotesi e ciò può essere dimostrato attraverso le regole d'inferenza.

3.1 Regole di inferenza note

3.1.1 Modus ponens

$$
\begin{array}{rl}
 & p \to q \\
 & p \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

3.1.2 Modus tollens

$$
\begin{array}{rl}
 & p \to q \\
 & \neg q \\
\hline
\therefore & \neg p
\end{array}
$$

3.1.3 Addizione

$$
\begin{array}{rl}
 & p \\
\hline
\therefore & p \vee q
\end{array}
$$

3.1.4 Semplificazione

$$
\begin{array}{rl}
 & p \wedge q \\
\hline
\therefore & p
\end{array}
$$

3.1.5 Congiunzione

$$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$$

3.1.6 Silogismo ipotetico

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

3.1.7 Silogismo disgiuntivo

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

4 Insieme universo

C'è un insieme universale U(universo) che contiene tutti gli elementi e tutti gli insiemi esistenti. Si assume che ogni insieme possa contenere solo elementi che appartengono anche ad U.

Questo ci porta al **paradosso di Russell** che denota i limiti della logica classica.

4.1 Paradosso di Russell

L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso. Questo perchè un insieme è sempre sottoinsieme di se stesso tuttavia se noi imponiamo che non sia così, è impossibile decidere se $R \in R$.

Definiamo l'insieme $R = def\{X|X \notin X\}$

Abbiamo due casi:

- $R \in R$, allora vuol dire che $R \notin R$ perchè abbiamo la condizione $x \notin x$
- $R \in R$, allora vuol dire $R \in R$

Questa è una contraddizione ed è chiamato paradosso di Russell.

5 Quantificatori universali

5.1 Quantificatore "Per ogni"

Il quantificatore "per ogni" $\forall$, indica che una proposizione è vera per ogni valore di un insieme

5.1.1 Regole d'inferenza per il qualificatore $\forall$

Usando la regola d'eliminazione abbiamo:

$$\begin{array}{rl} & \forall x P(x) \\ \hline \therefore & P(u) \text{per ogni u} \in \text{U} \end{array}$$

Usando la regola d'introduzione abbiamo:

$$\begin{array}{rl} & P(u) \text{per ogni u} \in \text{U} \\ \hline \therefore & \forall x P(x) \end{array}$$

Dove u è un elemento generico indistinguibile dagli altri dell'insieme universo(e che può essere scambiato con x)

5.2 Quantificatore esiste

Il quantificatore "esiste" $\exists$, indica che per almeno un elemento di un insieme, la proposizione è vera

5.2.1 Controesempio

Se troviamo un valore del dominio di discorso che rende falso il quantificatore esistenziale, possiamo concludere che quell'elemento è un controesempio.

5.2.2 Regole d'inferenza per il qualificatore $\exists$

Usando la regola d'eliminazione abbiamo:

$$\begin{array}{rl} & \exists x P(x) \\ \hline \therefore & P(u) \text{per qualche u} \in \text{U} \end{array}$$

Usando la regola d'introduzione abbiamo:

$$\begin{array}{rl} & P(u)\text{per qualche u} \in \text{U} \\ \hline \therefore & \exists x P(x) \end{array}$$

6 Leggi di De Morgan generalizzate

Esistono anche le leggi di De Morgan che valgono per il qualificatore esistenziale e quello universale e sono:

$$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$$

7 Qualificatori innestati

Possiamo anche innestare i qualificatori universali ed esistenziali, per formare proposizioni del tipo: $\forall x \exists y P(x, y)$

Il dominio del discorso è univoco per entrambi i qualificatori, ad esempio: $\mathbb{Z}$

Il dominio di discorso non diventa prodotto cartesiano $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$