Stringhe e relazioni

Andrea Canale

December 19, 2024

Contents

1 Sequenze e parole

Dato un alfabeto di simboli, possiamo formare una parola cioè una sequenza di simboli.

Ad esempio: $A = \{la, sul, tetto, gatta\}$ formerà la parola "la gatta sul tetto".

L'insieme di tutte le parole che si possono formare sull'alfabeto A viene indicato come A^*.

Questo insieme è infinito perchè possiamo sempre aggiungere un simbolo ad un parola.

2 Numero di Gödel

Per un alfabeto generico A, finito o numerabile:

- Numeriamo i simboli ka $\forall a \in A$
- Ogni parola $a_1, ..., a_n$ diventa il numero: $2^{ka_1} \cdot 3^{ka_2} \cdot 5^{ka_3} \cdot ... \cdot p_n^{ka_n}$

Dove p_n è un numero primo.

Il numero che otteniamo da questa moltiplicazione è detto numero di Gödel

3 Operazioni su parole

L'insieme delle parole A^* ha due operazioni:

- Inversione: $w \to W^r$, ad esempio felice^r = ecilef

- Concatenazione: $w_1, w_2 \rightarrow w_1w_2$, ad esempio: $w_1 =$ abra $w_2 =$ cadabra $w_1w_2 =$ abracadabra

Notiamo che l'insieme A^* è un **monoide** cioè una struttura algebrica simile ad un gruppo che non ha un inverso.

Questo perchè, per la concatenazione vale l'associatività e ha come elemento neutro λ cioè la parola vuota che non cambia il risultato della concatenazione.

Inoltre, per il monoide A^* esiste la funzione lunghezza che ritorna la lunghezza di una parola. Questa funzione è un **omomorfismo**.

3.1 Monoidi

Un monoide M è una struttura algebrica che rispetta 3 proprietà:

- $a * b \in M$
- Vale l'associatività
- Esiste un elemento neutro

Un gruppo è un monoide dotato d'inverso

4 Sequenze

Una sequenza è una funzione dove il dominio è sottoinsieme degli interi.

Viene indicata come $S(n)$ dove n è il numero massimo nel dominio

La sua cardinalità è $n!$.

Le stringhe sono sequenze formate da un alfabeto di partenza.

5 Classificazione di sequenza

5.1 Sequenze crescenti

Una sequenza è crescente se: $s(n) < s(n+1) < s(n+2)$

5.2 Sequenza decrescenti

Una sequenza è decrescente se: $s(n) > s(n+1) > s(n+2)$

5.3 Sequenza non crescenti

Una sequenza è non crescente se: $i < j$ e $S_i \geq S_j$

5.4 Sequenza non decrescenti

Una sequenza è non decrescente se: $i < j$ e $S_i \leq S_j$

6 Sottosequenze

Data una sequenza, una sottosequenza è un sottoinsieme di quella sequenza.

Ad esempio:

Sequenza $A = \{a, a, b, c, q\}$

Si possono ottenere le seguenti sottosequenze: $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, q\}, ...\}$

6.1 Sottosequenze note

Una sequenza di soli numeri può essere scritta come: $[n] = \{1, ..., n\}$

Una famiglia d'insiemi di lunghezza n può essere scritta come: A^n

7 Relazione

Una relazione binaria tra un insieme X e un insieme Y è l'insieme dei prodotti cartesiano tra X e Y. Denotiamo l'insieme delle relazioni con R.

8 Proprietà delle relazioni

8.1 Relazioni riflessive

Una relazione è riflessiva se esiste $(x, x) \in R\ \forall x \in X$ dove R è la relazione XxY

8.2 Relazioni transitive

Una relazione è transitiva se vale $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, allora $(x, z) \in R\ \forall x, y, z \in R$

8.3 Relazioni simmetriche

Una relazione è simmetrica se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R\ \forall x, y \in R$

8.4 Relazioni antisimmetriche

Una relazione è antisimmetrica se $x \neq y$ allora $(x, y) \notin R$ oppure $(y, x) \notin R$, allora y non è in relazione con x.

Notiamo che se $x = y$, la relazione si considera antisimmetrica.

Ad esempio:

$S = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ è antisimmetrica perchè $\forall x, y \in S$, $x = y$

9 Relazioni d'ordine/totali

Una relazione è definita d'ordine se valgono tre proprietà:

- Transitiva
- Riflessiva
- Antisimmetrica

Esempi di relazioni d'ordine:

- P(x) rispetto all'inclusione
- $\leq$ su $\mathbb{N}$
- Su $\mathbb{Z}$, $x|y$

10 Chiusura transitiva

Data una relazione binaria R, definitiamo la chiusura transitiva $R^{'} = T(r)$ come la più piccola relazione transitiva e riflessiva che contiene R

$R^{'} = \bigcap\{S|S \text{ è riflessiva e transitiva }, R \subset S\}$

11 Relazioni d'equivalenza

Una relazione di equivalenza è una relazione che soddisfa 3 proprietà:

- è riflessiva
- è transitiva
- è simmetrica

12 Congruenza

Una congruenza su X è una relazione di equivalenza che mette in relazione due insiemi.