Monomi

I monomi sono espressione algebriche con una parte numerica e una parte letterale che contiene variabili, ad esempio:

4x, -2xyz, $\sqrt{7}x^3$, ...

Non sono monomi: 2$\sqrt{x}$, e^x, 7sin(x), ecc...

Questo perchè nei monomi non ci sono operazioni radice, potenze, seno, ecc... Sulla parte letterale

Il grado

Il grado di un monomio è la somma degli esponenti di tutte le variabili nella parte letterale.

Un monomio di grado zero è semplicemente un numero.

Polinomi

Un polinomio è una somma finita di monomi, ad esempio: 4x-2xyz+$\sqrt{7}x^3$

Il grado

Il grado di un polinomio è il grado più alto di tutti i monomi.

Forma normale

Un polinomio è ridotto in forma normale se tutti i monomi hanno parte letterale diverse e tutte le parti numeriche sono ≠ 0(oppure il polinomio è 0). Questo perchè possiamo sommare o sottrarre i monomi con parte letterale uguale. Mentre per la moltiplicazione non è necessaria una parte letterale uguale.

I polinomi con una sola variabile x vengono indicati come p(x) oppure con p.

Se p(x) è in forma normale possiamo ordinare i monomi dal grado più alto al più basso:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}, ..., a_0$$

a_0 È detto coefficiente del polinomio.

Un polinomio di grado zero equivale ad a_0

Rappresentare l’insieme dei coefficienti del polinomio

$\mathbb{R}[x]$ È l’insieme dei polinomi con variabile x e coefficienti in $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_k[x]$ È l’insieme dei polinomi con variabile x e coefficienti in $\mathbb{R}$ dove il grado è ≤ k

Questo vale per tutti gli insiemi. Ad esempio $\mathbb{C}[x]$ e $\mathbb{C}_k[x]$ richiedono coefficienti in $\mathbb{C}$

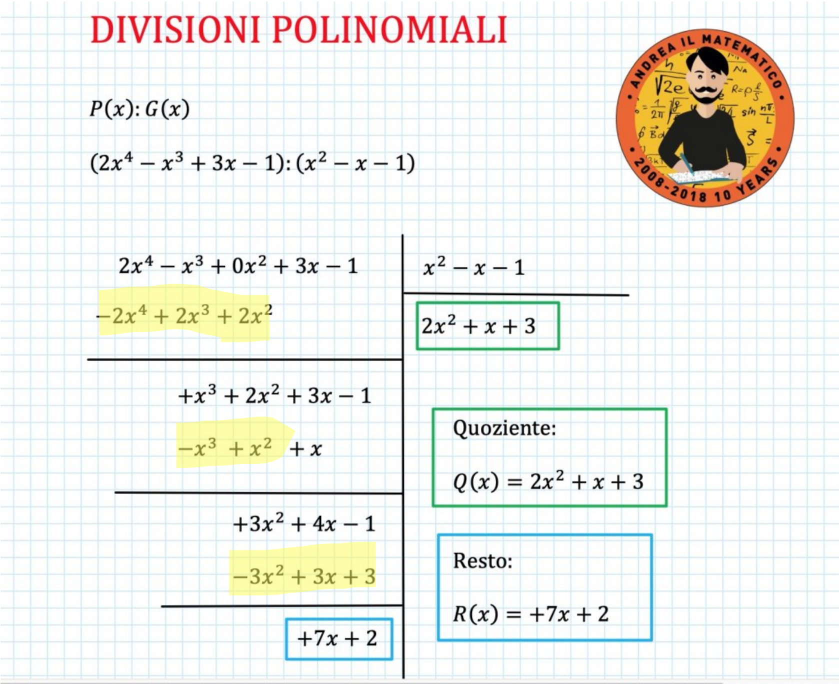
Divisioni con resto

Se abbiamo due polinomi:

- $p(x)$ dividendo
- $d(x)$ divisore

Esistono 2 polinomi q(x), il quoziente e r(x) il resto tale che $p(x) \ = \ [q(x)\,d(x)] \ + \ r(x)$

Il resto r(x) ha grado strettamente minore di d(x), altrimenti p(x) calcolato, sarebbe sicuramente con un grado superiore a dividendo di partenza.



Notiamo che in questo incolonnamento i segni vanno sempre invertiti durante il calcolo del resto perchè c’è un meno davanti al polinomio che calcoliamo e questo porta a cambiare tutti i segni al polinomio:

$$-\left(2x^4 - 2x^3 - 2x^2\right) \ = \left(2x^4 + 2x^3 \ + 2x^2\right)$$

Se il resto è 0, diciamo che d(x) divide p(x) e scriviamo: d(x)|p(x)

Esempio: $(x + 1) \mid (x^3 + 1)$

Radici di un polinomio

Se p(x) è un polinomio e a è un numero, denotiamo con p(a) il numero ottenuto sostituendo la variabile x con a, ad esempio:

$P(x) = x^2 - 3 \quad a = -2$

$P(-2) = 1$

Un numero a è una radice di un polinomio p se p(a) = 0

Ad esempio a = 1 è la radice di x^3 - 1

Un numero è la radice di p(x) ⇔ (x-a) | p(x)

Possiamo dimostrarlo:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$$

Il grado di r(x) è strettamente minore di (x-a)

Allora il grado di r è 0, ossia un numero.

Calcolando p(a) abbiamo $p(a) = (a - a) \cdot q(x) + r_0$ che equivale a $0 + r_0$

A questo punto abbiamo: $p(a) = 0 \Leftrightarrow r_0 = 0 \Leftrightarrow$ (x-a) | p(x)

Da aggiungere(forse) polinomio monico(p.31 del pdf o 23 del libro) e prop. 1.3.5(stesse pagine)

Molteplicità di una radice

La molteplicità di una radice a di un polinomio, è il massimo numero k ≥ 1 tale che $(x-a)^k$ | p(x), informalmente diciamo quante volte a è radice di p(x).

Ad esempio $x^3 - 1$ ha radice a = 1 con molteplicità 1

Invece, $x^3 + 2x^2 + x = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2$

Da qui possiamo ricavare che a = 1 è radice con molteplicità due

Anche a=0 è radice ma con molteplicità 1.

Se moltiplichiamo p(x) per una costante k ≠ 0, otterremo un altro polinomio q(x) = kp(x) che ha le stesse radici di p(x) con le stesse molteplicità.

Q(x) ha il pregio di avere il primo coefficiente pari a 1. Un polinomio di questo tipo è detto monico.

Sia $p(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$, le radici di p(x) contate con molteplicità sono l'unione di $q_1(x)$ e $q_2(x)$

Un polinomio p(x) di grado n ≥ 1 ha al massimo n radici contate con molteplicità.

Dimostrazione per induzione(da rivedere, p.32 del PDF):

L'induzione vuole dimostrare due cose:

- Vale per n = 1
- Vale per n + 1

Se il grado è 1 allora $p(x) = a_1 x + a_2$

Con grado 1, p(x) ha sicuramente radice $x = -\frac{a_2}{a_1}$ e non abbiamo altre soluzioni

Con grado n + 1, se p(x) ha grado n + 1 e se a è una radice p(x) allora p(x) = (x-a)q(x)

Q(x) ha al massimo n - 1 radici(contate con molteplicità)

P(x) ha al massimo (n - 1) + 1 radici(a e le radici di Q)

Esempio:

Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio di grado 2.

Allora, se calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

- Se Δ > 0, il polinomio ha due radici $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ con molteplicità 1
- Se Δ = 0, il polinomio ha 1 radice $x = \frac{-b}{2a}$ con molteplicità 2
- Se Δ = 0, il polinomio non ha soluzioni **reali**

Teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio p(x) con coefficienti nei numeri complessi p(x) ∈ $\mathbb{C}[x]$ di grado n, ha n soluzioni complesse(e ha almeno una radice complessa), contate con molteplicità.

Ad esempio: Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio di grado 2, allora p(x) ha sempre due soluzioni $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Se Δ = 0, allora $x = \frac{-b}{2a}$
- Se Δ < 0, allora $\sqrt{\Delta}$ ha almeno un numero complesso tale che $z^2 = \Delta$

Esempio 1:

$x^2 + 1$ Ha come soluzione x = $\pm i$

Esempio 2:

$p(x) = x^2 + (1-i)x - i$ Ha radici

$$x_{1,2} = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 + 4i}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{2i}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(1-i) \pm (1+i)}{2}$$

$$x_1 = \frac{2i}{2} = i$$

$$x_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

Sia p(x) un polinomio di grado n con coefficienti reali, se z $\in \mathbb{C}$ è radice di p(x), allora anche $\overline{z}$ è radice di p(x)