Limiti

Andrea Canale

May 20, 2025

Contents

1 Retta reale estesa

La retta reale estesa è un'estensione dei numeri reali $\mathbb{R}$ compresi di $+\infty$ e $-\infty$

Si dice **intorno di** $+\infty$ un qualsiasi intervallo del tipo: $(a, +\infty)$ ed è denotato come $I_a(+\infty)$

Si dice **intorno di** $-\infty$ un qualsiasi intervallo del tipo: $(a, -\infty)$ ed è denotato come $I_a(-\infty)$

1.1 Proprietà definitivamente vere

Si dice che una proprietà è definitivamente vera per $x \to +\infty$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che la proprietà è vera $\forall x \in I_a(+\infty)$

2 Limite finito al finito

I limiti finito al finito sono limiti della forma

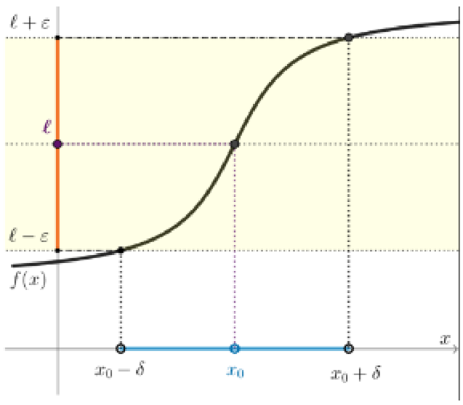
$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Cioè che se x si avvicina a c, la funzione assumerà il valore l

2.1 Definizione

Sia $f : I_\delta(c) \backslash c \to \mathbb{R}$ e sia $l \in \mathbb{R}$, si dice che f tende ad l per x che tende a c se $\forall \epsilon > 0$, uno scarto scelto arbitrariamente, esiste $\delta > 0$, tale che $|x - c| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$ con $x \neq c$

Quest'ultima condizione rende possibile l'esistenza del limite anche se la funzione non è definita in c



Quindi ϵ agisce sull'asse y mentre δ sull'asse x. Dato l, $\forall \epsilon > 0$ cerchiamo di definire δ sull'asse x che sarà dato dall'intersezione tra $f(x)$ nelle coordinate $(x_0 + \delta, l + \epsilon)$ e $(x_0 - \delta, l - \epsilon)$. Se la funzione è definita in questo intervallo(e non ne esce) e tende ad assumere il valore l nel punto x_0 allora il limite esiste.

In termini di intorni questo è equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ Tale che } x \in I_\delta(c) \backslash \{c\} \implies f(x) \in I_\epsilon(f)$$

Cioè che se x sta nell'intorno di raggio δ, allora $f(x)$ stta nell'intorno di raggio ϵ

In termini di proprietà definitivamente vere:

$$\forall \epsilon > 0 \; f(x) \in I_\epsilon(l) \text{ def. vera per } x \to c$$

Il limite non calcola l'andamento della funzione in f(c)

2.2 Proprietà algebriche

Dati $\lim_{x \to c} f(x) = l$ e $\lim_{x \to c} g(x) = m$, allora valgono le seguenti proprietà:

- $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = l + m$

- $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ se $m \neq 0$

3 Limite finito all'infinito

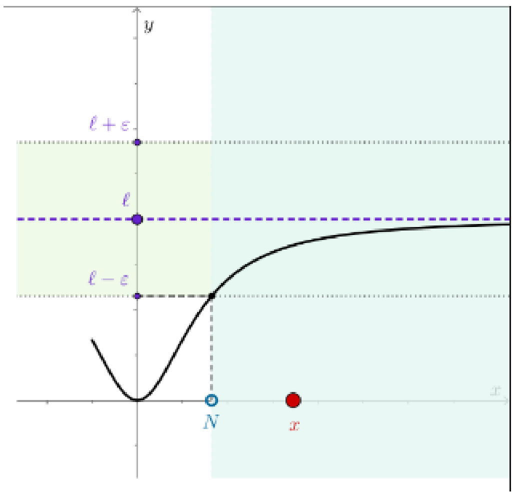
I limiti finito al infinito sono limiti della forma

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

Cioè che se x tende a ∞, la funzione assumerà il valore l

3.1 Definizione

Sia $f : I_\delta(c) \backslash c \to \mathbb{R}$ e sia $l \in \mathbb{R}$, si dice che f tende ad l per x che tende a ∞ se $\forall \epsilon > 0$, uno scarto scelto arbitrariamente, esiste $N > 0$, che dipende da ϵ, tale che $\forall x \; x > N \implies |f(x) - l| < \epsilon$ con $x \neq c$



In altre parole, un limite di questo tipo, indica che dopo un certo punto N, la funzione tenderà a l senza mai arrivarci($< \epsilon$). Notiamo che la funzione sta in questo intervallo $[l - \epsilon, l + \epsilon]$ senza mai uscirne.

In termini di intorni questo è equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N > 0 \text{ Tale che } x \in I_N(+\infty) \backslash \{c\} \implies f(x) \in I_\epsilon(l)$$

Questo limite funziona ugualmente con $-\infty$, semplicemente cambiano gli intorni e si ragiona nel primo quadrante.

3.2 Limiti per eccesso e per difetto

Dato $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$, se $\lim_{x\ \to\ c^+} f\,(x) = l$ e $f\,(x) > l$ definitivamente per $x \to c$, si dice che f tende a l per eccesso(o dall'alto) se $x \to c$ e si scrive:

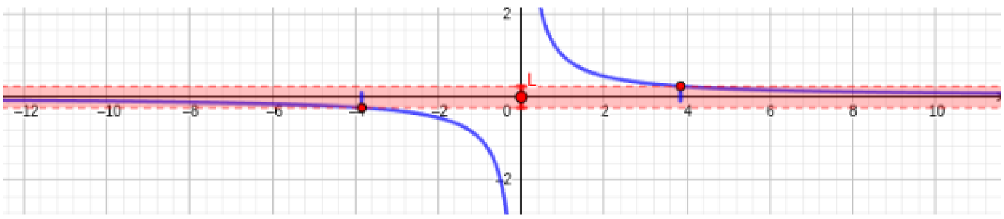
$$\lim_{x\ \to\ c} f\,(x) = l^+$$

Cioè quando la funzione tende ad un valore l positivo e $f(x) > l$.

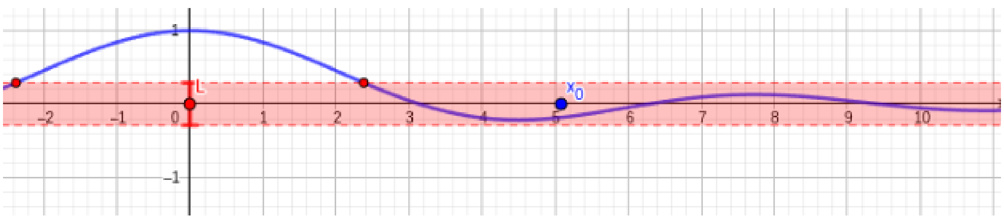
Dato $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$, se $\lim_{x\ \to\ c^+} f\,(x) = l$ e $f\,(x) < l$ definitivamente per $x \to c$, si dice che f tende a l per difetto(o dal basso) se $x \to c$ e si scrive:

$$\lim_{x\ \to\ c} f\,(x) = l^-$$

Ad esempio $\lim_{x\ \to\ +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ e $\lim_{x\ \to\ -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$



Ovviamente esistono casi dove non si può fare questa distinzione, ad esempio se la funzione passa da valori negativi a positivi di continuo: $\lim_{x\ \to\ +\infty} \frac{sin(x)}{x} = 0$



3.3 Asintoti

Se esiste almeno un limite finito all'infinito data una funzione $f(x)$, abbiamo gli asintoti:

- Se esiste $\lim_{x\ \to\ +\infty} f\,(x) = l$, la retta di equazione y=l si dice **asintoto orizzontale destro**

- Se esiste $\lim_{x\ \to\ -\infty} f\,(x) = l$, la retta di equazione y=l si dice **asintoto orizzontale sinistro**

Se f ha un asintoto orizzontale, allora f' ha un asintoto orizzontale y=0 cioè la funzione derivata smette di crescere.

4 Limite infinito al finito

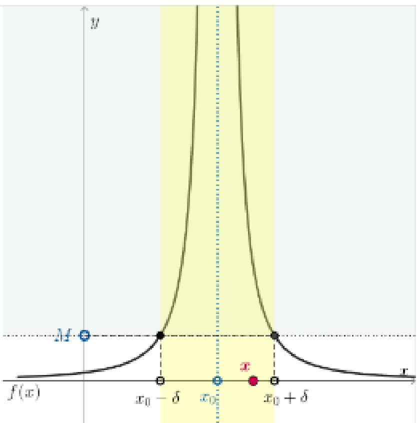
I limiti infinito al finito sono limiti della forma

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Cioè che se x tende a c, la funzione diventerà arbitrariamente grande(positivamente o negativamente).

4.1 Definizione

Sia $f : I_\delta(c) \backslash c \to \mathbb{R}$, si dice che f tende ad $+\infty$ per x che tende a c se $\forall M > 0$, fissata arbitrariamente, esiste $\delta > 0$,tale che $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > M$ con $x \neq c$



In altre parole, un limite di questo tipo, indica che dopo un certo punto M, la funzione sarà sempre sopra alle retta $y = M$. Cioè $f(x) > M \ \forall M$

In termini di intorni questo è equivalente a:

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ Tale che } x \in I_\delta(c) \backslash \{c\} \implies f(x) \in I_M(+\infty)$$

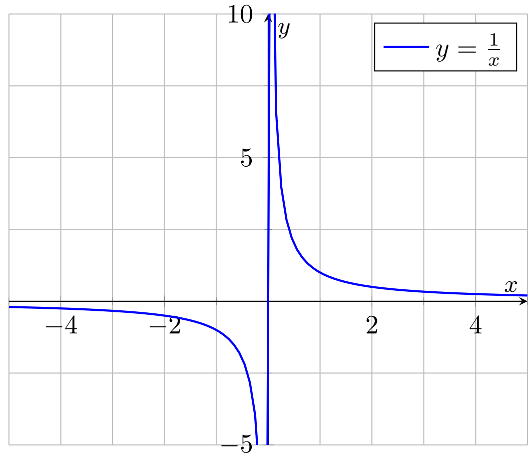
In termini di proprietà vera definitivamente, $\forall M > 0, f(x) > M$ definitivamente vera per $x \to c$

Nel caso in cui $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, la retta di equazione $x = c$ viene detto **asintoto verticale** per x

Questo limite funziona ugualmente con $-\infty$.
Cioè quando la funzione tende ad un valore l negativo e $f(x) < l$.

4.2 Limiti destri e sinistri

A volte succede che i limiti vadano per un intervallo a $+\infty$ e per un altro a $-\infty$, in questo caso si parla di limite destro e sinistro. Ad esempio:



4.2.1 Limite destro

Per indicare il limite destro scriviamo:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

Nel nostro esempio abbiamo: $\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$

4.2.2 Limite sinistro

Per indicare il limite sinistro scriviamo:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l$$

Nel nostro esempio abbiamo: $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

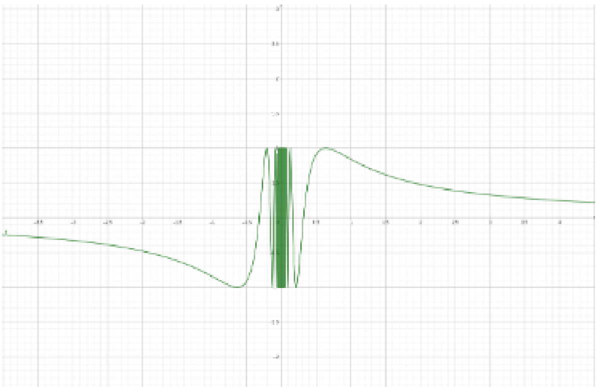
4.3 Esistenza di un limite

Un limite esiste, se e solo se, esistono sia il limite destro sia quello sinistro con lo stesso valore l per $x \to c$.

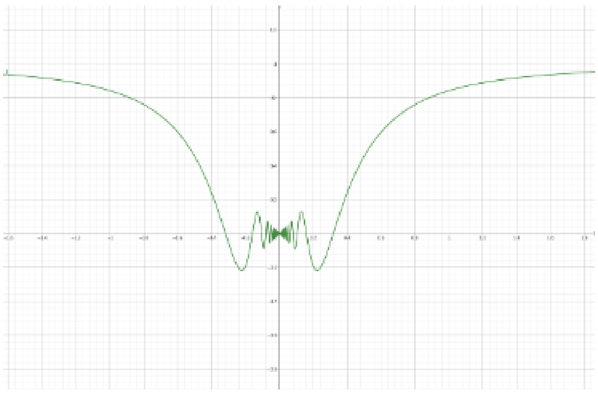
4.4 Casi di non esistenza di un limite

- Funzioni periodiche come seno, coseno, ecc...
- Infinite oscillazione per $x \to c$

Ad esempio la funzione $sin(\frac{1}{x})$:



Invece se le oscillazioni si riducono, il limite $x \to 0$ esiste ed è 0:



5 Limite infinito all'infinito

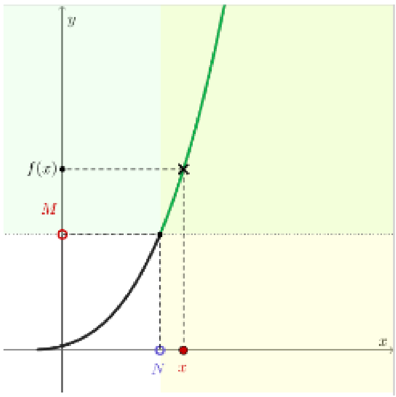
I limiti infinito all'infinito sono limiti della forma

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

Studiamosolo il caso $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, cioè che se x diventa molto grande, la funzione diventerà arbitrariamente grande. Gli altri sono analoghi.

5.1 Definizione

Sia $f : I_\delta(c) \backslash c \to \mathbb{R}$, si dice che f tende ad $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ se $\forall M > 0$, fissata arbitrariamente, esiste $N > 0$,tale che $x > N \implies f(x) > M$ con $x \neq c$



In altre parole, un limite di questo tipo, indica che dopo un certo punto M, la funzione sarà sempre sopra alle retta $y = M$ e che questa funzione continua ad essere $f(x) > M$ con il proseguire dei valori $x > N$

In termini di intorni questo è equivalente a:

$$\forall M > 0 \ \exists N > 0 \text{ Tale che } x \in I_N(+\infty) \backslash \{c\} \implies f(x) \in I_M(+\infty)$$

5.2 Proprietà algebriche

Dati:

- $\lim_{x \to c} f(x) = l$
- $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to c} k(x) = 0^+$

Allora valgono le seguenti proprietà:

- $\lim_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \pm\infty$ dove il segno della somma corrisponde a quello del risultato
- $\lim_{x \to c} g(x) + h(x) = +\infty$ cioè $+\infty + \infty = +\infty$
- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ cioè $\frac{l}{\pm\infty} = 0$
- $\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{h(x)} = \infty$ cioè $+\infty \cdot +\infty = +\infty$

- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{k(x)} = \begin{cases} +\infty \text{ se } l > 0 \\ -\infty \text{ se } l < 0 \\ \textbf{indeterminato se l = 0} \end{cases}$ cioè che per $\frac{l}{0} = \infty$ valgono le regole dei segni

5.3 Casi particolari

Casi come:

- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{-\infty}$
- $\infty \cdot 0$

Vanno discussi caso per caso, ad esempio:

$g(x) = x^2$ e $h(x) = x$ con i limiti $g(x), h(x) \to +\infty$ se $x \to +\infty$

Abbiamo due casi:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{x^2}{x} = x \to \infty$$

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

6 Definizione generale dei limiti

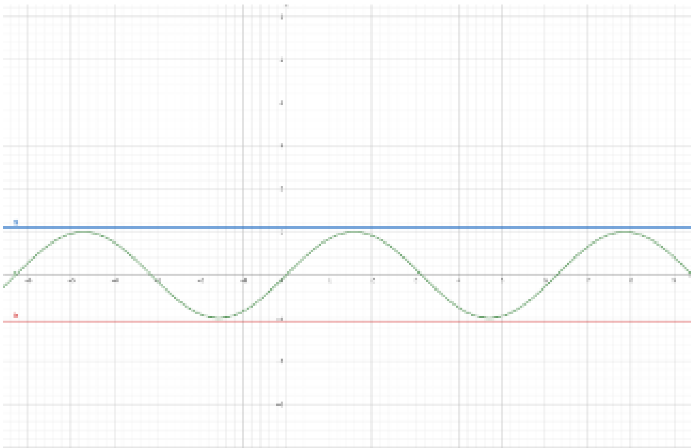
Siano c e $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to c} f(x) = l$ esiste se e solo se $\forall I(l), \exists I(c)$ tale che se $x \in I(c) \setminus c\{c\} \implies f(x) \in I(l)$.

7 Funzioni limitate

In base agli asintoti trovati, le funzioni possono essere classificate come:

- Funzioni limitate superiormente se esiste un asintoto orizzontale destro sopra il quale la funzione non esiste
- Funzioni limitate inferiormente se esiste un asintoto orizzontale sinistro sotto il quale la funzione non esiste
- Funzioni limitate se sono limitate sia superiormente che inferiormente

Ad esempio $sin(x)$



8 Esistenza dei limiti per funzioni monotone su intervalli illimitati

Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, allora $\exists\ lim_{x\to\infty} f(x) = l$ e abbiamo 4 casi:

- Se f è crescente e superiormente limitata da un numero B, allora $l \in \mathbb{R}$ e $l \leq B$.
- Se f è crescente ma non è limitata superiormente, allora $l = +\infty$
- Se f è decrescente ed è inferiormente limitata da un numero B, allora $l \in \mathbb{R}$ e $l \geq B$
- Se f è decrescente ma non è limitata inferiormente, allora $l = -\infty$

Analogamente vale per $(-\infty, a)$ e per intervalli limitati.

9 Teoremi sui limiti

9.1 Primo teorema della permanenza del segno

Data una funzione $f : I(c)\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$, se esiste finito $\lim_{x\to c} f(x) = l$, allora:

- Se $l > 0$ o $l = +\infty$, allora $f(x) > 0$ def. vera per $x \to c$
- Se $l < 0$ o $l = -\infty$, allora $f(x) < 0$ def. vera per $x \to c$

9.2 Secondo teorema della permanenza del segno

Data una funzione $f : I(c)\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$, se esiste finito $\lim_{x\to c} f(x) = l$, allora:

- Se $f(x) \geq 0$ def. vera per $x \to c$, allora $l \geq 0$
- Se $f(x) \leq 0$ def. vera per $x \to c$, allora $l \leq 0$

9.2.1 Osservazione

Se $f(x) > 0$ non è detto che $l > 0$, infatti per $f(x) = x^2$, $f(x) > 0$ ma $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

9.2.2 Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $f(x) \geq 0$ e $l \leq 0$, per il primo teorema del segno abbiamo che $f(x) < 0$(per la condizione su l) ma abbiamo supposto $f(x) \geq 0$. Un assurdo.

Questi due teoremi descrivono l'andamento della funzione in un determinato intorno.

In particolare se il limite è positivo, la funzione è crescente, se il limite è negativo, la funzione è decrescente(vale la doppia implicazione).

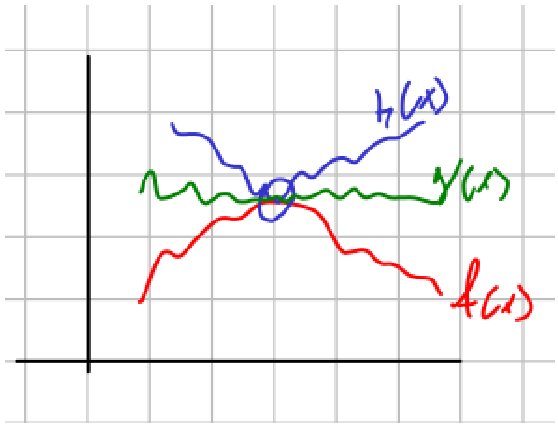
9.3 Primo teorema del confronto

Date tre funzione $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se valgono le seguenti ipotesi:

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in A$
- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$ cioè la funzione più grande e la più piccola tendono allo stesso limite

Allora vale:

$$\lim_{x\to c} g(x) = l$$



9.3.1 Dimostrazione

Dalla definizione di limite, abbiamo $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$ per un opportuno intorno $I(l) = (l - \epsilon, l + \epsilon)$ con $\epsilon > 0$

Stessa cosa vale per $h(x)$ dato che tendono allo stesso valore l: $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$.

Allora dato che abbiamo imposto $f(x) < g(x) < h(x)$, abbiamo sicuramente:

$$l - \epsilon < f(x) < g(x) < h(x) > l + \epsilon$$

9.4 Secondo teorema del confronto

Date $f, g : I(c)\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$, supponiamo $f(x) \leq g(x)\ \forall x$, allora valgono le seguenti proprietà:

- Se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$
- Se $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

9.4.1 Dimostrazione primo punto

Dato $M > 0$, abbiamo $f(x) > M$ def. vera $x \to c$ per la definizione di limite all'infinito.

Dato che abbiamo imposto $f(x) < g(x)$, otteniamo $M < f(x) \geq g(x)$ def. vera per $x \to c$ e quindi vale la proprietà.

In altre parole questo teorema stabilisce che se $f(x) \leq g(x)\ \forall x$, allora possiamo ricavare il limite di $f(x)$ o $g(x)$.

10 Funzioni asintotiche

Due funzioni f e g si dicono asintotiche per $x \to c$ se:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

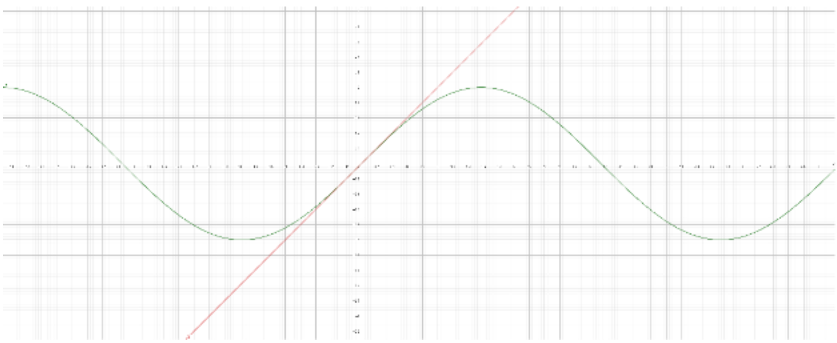
e si scrive f g per $x \to c$.

Questo indica che per $x \to c$, f e g si comportano allo stesso modo.

11 Limiti notevoli

I limiti notevoli sono forme di indeterminazione che si possono risolvere attraverso le proprietà delle funzioni coinvolte

- $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$, infatti $sin(x)$ x per $x \to 0$



- $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

11.1 Dimostrazione

Moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{1+cos(x)}{1+cos(x)}$:

$$\frac{1 - cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + cos(x)}{1 + cos(x)}$$

Adesso moltplichiamo solamente il numeratore:

$$\frac{1 - cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + cos(x)}$$

Notiamo che $cos^2(x) = sin^2(x)$, quindi possiamo riscrivere come:

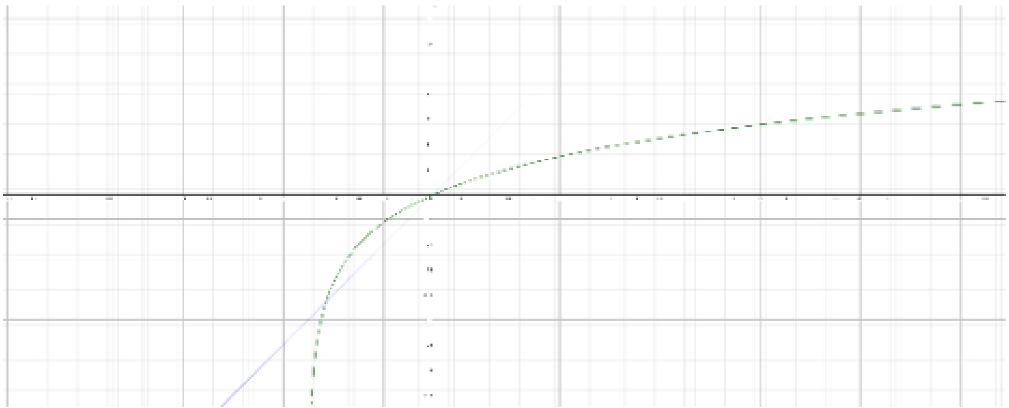
$$\left(\frac{sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + cos(x)}$$

La prima parte è il limite notevole $\frac{sin(x)}{x}$ che tende a 1 per $x \to 0$. La seconda parte tende a $\frac{1}{2}$ facendo i conti.

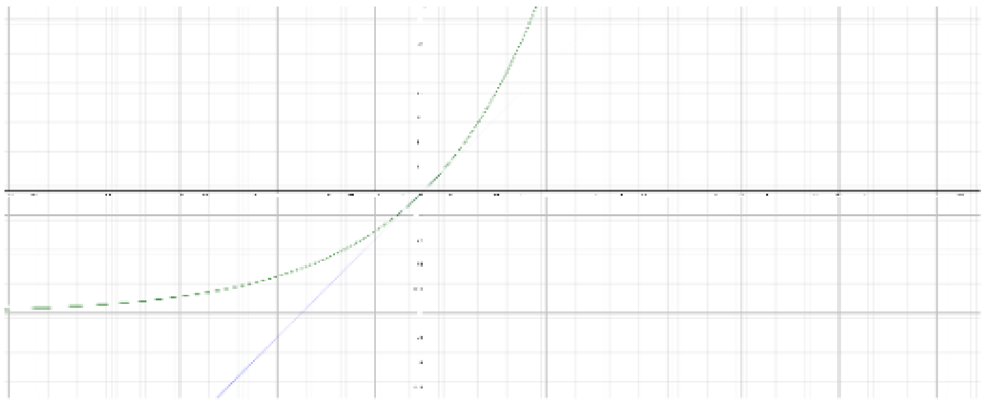
Quindi abbiamo dimostrato il limite.

* * *

- $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1$, infatti $log(1+x)\ x$ per $x \to 0$



- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, infatti $e^x - 1\ x$ per $x \to 0$



11.2 Dimostrazione

Poniamo:

- $e^x - 1 = y$ e quindi $e^x = 1 + y$

Ricordiamo inoltre:

- $e^{log(t)} = t$

- $log\ e^z = z$

Quindi:

$$x = log\ e^x = log(1+y)$$

Notiamo che $x \to 0$, implica $e^x - 1 \to 0$, quindi $y \to 0$.
Ora riscriviamo il limite come:

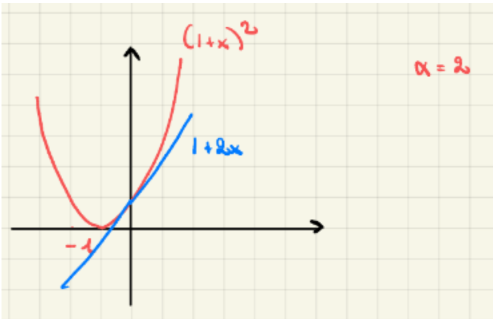
$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{log(1+y)}$$

Passando al reciproco otteniamo:

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{log(1+y)}{y}} = 1$$

$$* * *$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$, infatti $(1+x)^\alpha\ x$ per $x \to 0$



11.3 Osservazioni

- In tutti questi limiti, tranne nel secondo caso, abbiamo usato la pendenza della retta tangente in $x = 0$
- Nel secondo caso abbiamo approssimato $cox(x)$ in $x = 0$