Calcolo integrale

Andrea Canale

May 20, 2025

Contents

1 Primitive di una funzione

Si dice primitiva o antiderivata di una funzione f, una funzione F la cui derivata è uguale alla funzione di partenza.

Valgono inoltre i seguenti fatti:

- Se g è una primitiva di f, allora $g(x) + c$ dove $c \in \mathbb{R}$ è una primitiva di f. Esistono infinite primitive
- Se g e h sono due primitive di f, allora $g(x) - h(x) = c$. Le primitive sono univoche a meno di costanti additive.

1.1 Integrale indefinito di f

L'insieme di tutte le primitive di f formano l'integrale indefinito di f:

$$\int_a^b x^2 \, dx$$

2 Calcolo delle primitive di una funzione

Per calcolare le primitive di funzioni elementari seguiamo la seguente tabella:

Funzione	**Primitiva**
k	kx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
$1/x$	$\ln\|x\| + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$arcsin(x) + c$

2.1 Integrazione per parti

L'integrazione per parti viene usata quando abbiamo integrali del tipo

$$\int_a^b (fg)^{'} = f^{'}g + fg^{'}$$

In questo caso vale la seguente formula:

$$\int_a^b fg^{'} = fg - \int_a^b f^{'}g$$

f e g vanno decise in base a cosa è più comodo derivare e poi integrare.

2.2 Esempio

$\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx = xe^x - e^x + c$

2.3 Integrazione per sostituzione

L'integrazione per sostituzione viene usata quando abbiamo integrali del tipo

$$\int_a^b (F\ o\ f)(x)f^{'}(x)$$

In questi casi otteniamo:

$$\int_a^b (F\ o\ f)(x)f^{'}(x) = \int_a^b f(y)dy \text{ con } y = f(x)$$

Solitamente nelle funzioni di cui vogliamo avere la primitiva, la forma non è esattamente quella di questa tabella, allora dobbiamo andare a crearci la forma correttamente moltiplicando e dividendo per un certo valore.

2.3.1 Esempio

$$\int 2e^{3x}$$

Qui potremmo usare la sostituzione, tuttavia manca la derivata di $3x$ che è 3. Inoltre 2 può essere portato fuori perchè una costante moltiplicata per una funzione integrata non cambia. Otteniamo quindi:

$$2\int e^{3x}\cdot 3\cdot \frac{1}{3}$$

Ora portiamo fuori $\frac{1}{3}$ che non ci serve nella forma 4 della tabella, ora possiamo applicare la formula:

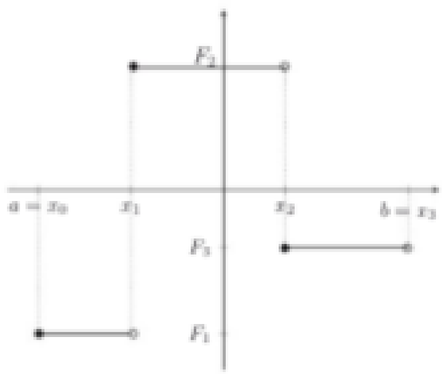
$$\frac{2}{3}\int e^{3x}\cdot 3 = \frac{2e^{3x}}{3}+c$$

2.4 Integrazione di frazioni

Funzione	**Primitiva**
$\frac{g^{'}(x)}{g(x)}$	$log\|g(x)\|+c$
$\frac{g^{'}(x)}{1+(g^{'}(x))^2}$	$arctan\|g(x)\|+c$

3 Funzione definita a tratti

Una funzione definita a tratti è una funzione dove ci sono valori costanti per un certo intervallo.



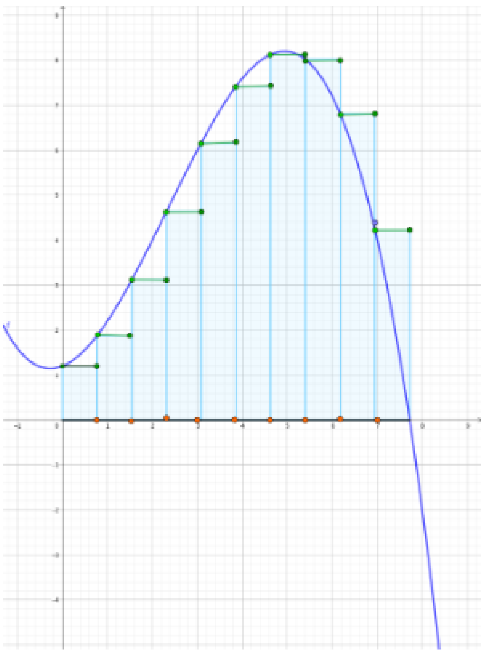
4 Integrale definito

L'integrale definito permette di calcolare l'area tra la funzione e l'asse x per un determinato intervallo, approssimativamente possiamo seguire questi passi:

- Dividiamo l'area sottostante ad una funzione in $n \geq 1$ sottoparti di ampiezza $\frac{b-a}{n}$. Più questo valore è maggiore, minore sarà l'errore di approssimazione

- Scegliamo dei punti(in arancione) $x_i = a + i + \frac{i(b-a)}{n}$ che formeranno i rettangoli

- Segliamo **i punti di campionamento** $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sul lato del rettangolo, che definiscono una nuova funzione costante a tratti fatta dalle tangenti orizzontali nei punti.



Questa nuova funzione costante a tratti(quella delimitata dai rettangoli) è definita come $g(x) = f(z_i)$

L'area formata da questi rettangoli è detta **area del plurirettangolo** ed è un'approssimazione dell'area del grafico di f. Quest'area è la somma delle aree dei singoli rettangoli: $\sum_1^n f(z_i) = S_n(f; z_1, ..., z_n)$. Questa sommatoria è detta somma di **Reimann**

Per rendere più precisa questa approssimazione, l'integrale definito può essere scritto come:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} S_n(f; z_1, ..., z_n)$$

5 Integrabilità

Se esiste finito $\lim_{n\to\infty} S_n(f; z_1, ..., z_n)$, la funzione si dice **integrabile**.

Si può dimostrare che:

- Funzioni continue su $[a, b]$ sono integrabili
- Funzioni monotone e limitate su $[a, b]$ sono integrabili
- Funzioni con un numero finito di punti di discontinuità(di prima o seconda specie) sono integrabili

5.1 Funzione di Direchlet

Un esempio di funzione non integrabile è la funzione di Direchlet che è definita come: $f(x) =$

$$\begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} . \tag{1}$$

In questo caso avremmo due diversi valori del limite e quindi non esisterebbe.

6 Formula del punto medio con n suddivisioni

Per approssimare il valore di un integrale definito, possiamo usare la formula del punto medio con n suddivisioni:

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq (\sum_{i=1}^{n} f(z_i)) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Cioè la sommatoria di f calcolata nei punti medi z_i dei punti di suddivisione, cioè l'altezza del rettangolo, moltiplicata per $\frac{b-a}{n}$ che sarebbe la base dei rettangoli. I punti di suddivisione devono essere equidistanti tra loro.

6.1 Stimare l'errore

Possiamo stimare l'errore di questa approssimazione usando il seguente teorema:

Sia f di classe C^2(derivabile due volte con derivate continue) in $[a, b]$, allora definito k il massimo tra $[a, b]$ di $|f^{''}(x)|$, abbiamo che l'errore massimo commesso da questa stima sarà minore di:

$$\frac{k}{24} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

7 Proprietà di base degli integrali

7.1 Linearità

Se f e g sono definite su $[a, b]$ e sono integrabili su $[a, b]$ e prendo due numeri α e β, allora $\alpha f + \beta g$ è integrabile su $[a, b]$ e vale:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

7.2 Additività rispetto al dominio di integrazione

Se f è integrabile su $[a, b]$ e $c \in (a, b)$, allora f è integrabile su (a, c) e su $[c, b]$ e vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

8 Valore medio di una funzione

Attraverso l'integrale definito, possiamo anche calcolare il valore medio di una funzione su un intervallo $[a, b]$ come:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

9 Teorema della media integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $\exists c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Osserviamo che il teorema si può riscrivere come $\exists c \in [a, b]$ tale che

$$(b-a) \cdot f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

9.1 Dimostrazione

Per Weierstrass questa funzione ha sicuramente un minimo e un massimo locale in $[a, b]$, poniamo questi due punti come x_m e x_M. Allora vale:

$$m \leq f(x) \leq M \;\forall x \in [a, b]$$

Per monotonia dell'integrale allora vale:

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b M$$

Dato che M e n sono due funzioni costanti, allora il loro integrale varrà rispettvamente: $m(b-a)$ e $M(b-a)$ perchè l'area che si va a costruire sotto questa funzione sarà o un rettangolo o un quadrato(la cui area è base per altezza cioè $m(b-a)$)

Quindi otteniamo:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$$

Ora dividiamo per $(b-a)$ e otteniamo:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) \leq M$$

Ma questo termine è proprio la media integrale, quindi per il teorema dei valori intermedi, $\exists c \in [a,b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)$$

10 Teorema di Torricelli-Barrow(Primo teorema fondamentale del calcolo integrale o di enumerazione)

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, se F è una primitiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Grazie a questo teorema, possiamo calcolare l'integrale definito in modo esatto da una primitiva.

10.1 Dimostrazione

Dato $n \in \mathbb{R}$ consideriamo le suddivisioni di $[a,b]$ in n sottointervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Notiamo che $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ possiamo riscrivere $F(b) - F(a)$ come:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0)$$

espandendo il calcolo otteniamo:

$$F(x_n - x_0) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1} - F(x_{n-2}))] + \cdots [F(x_1) - F(x_0)]$$

Questo si può ulteriormente riscrivere come

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Dato che F è una primitiva di f, allora F è derivabile in $[a, b]$ e lo sarà anche in $[x_{i-1}, x_i]$, inoltre è continua.

Sfruttiamo il teorema di Lagrange per riscrivere $F(x_i) - F(x_{i-1})$ come

$$F^{'}(z_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x)(x_i - x_{i-1})$$

Quindi otteniamo

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Ma questo si può ulteriormente riscrivere come:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\frac{b-a}{n} = S_n(f; z_1, ..., z_n)$$

cioè sono proprio le somme di Reimann.

Ora passiamo al limite, essendo f intrabile(poichè continua), otteniamo:

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} S_n(f; z_1, ..., z_n) = \int_a^b f$$

11 Funzione integrale o di accumulazione di f

Dato $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile(e continua), costruiamo una funzione del tipo $x \in [a, b] \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

Questa funzione associa ad x, l'area da x_0 a x se $x > x_0$. Se $x = x_0$ darà come valore 0, se $x < x_0$, allora restituirà $-\int_{x}^{x_0} f$

Questa funzione viene detta funzione integrale di f su $[a, b]$ centrata in x_0

12 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, fissato $x_0 \in [a, b]$, consideriamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \ \forall x \in [a, b]$$

Allora F è derivabile in $[a, b]$ e $F^{'}(x) = f(x)$ cioè F è la primitiva che si annulla in x_0

Questo teorema lega il calcolo differenziale con quello integrale.

12.1 Dimostrazione

Fissato $\overline{x}$, vogliamo dimostrare $F^{'}(\overline{x}) = f(\overline{x})$, cioè

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\overline{x} + h) - F(\overline{x})}{h} = f(\overline{x})$$

Dimostriamo il caso dove $h > 0$

Riscriviamo $F(\overline{x} + h) - F(\overline{x})$ come:

$$\int_{x_0}^{\overline{x}+h} f(t)\ dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$$

Per l'addittività dell'integrale otteniamo:

$$\int_{x_0}^{\overline{x}} f(t)\ dt + \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} f(t)\ dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} f(t)\ dt$$

Dunque riscrivendo la derivata si ottiene:

$$\frac{F(\overline{x} + h) - F(\overline{x})}{h} = \frac{1}{h} \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} f(t)\ dt$$

Ora dato che f è continua, per il teorema della media integrale $\exists c_h \in [\overline{x}, \overline{x}+h]$ tale che:

$$\frac{1}{h} \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} f(t)\ dt = \frac{F(\overline{x} + h) - F(\overline{x})}{h} = f(c_h)$$

Ora passiamo al limite per $h \to 0$ e notiamo che $c_h \to \overline{x}$ perchè $\overline{x} + 0 = \overline{x}$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\overline{x} + h) - F(\overline{x})}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(\overline{x})$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema

12.1.1 Osservazioni

- Se $h < 0$ si pone $h \to 0^-$. Se $h > 0$ si può anche porre $h \to 0^+$ per essere più precisi
- Se $h = a$(l'estremo sinistro dell'intervallo), si pone $h \to 0^+$, se $h = b$(l'estremo destro dell'intervallo), si pone $h \to 0^-$

12.2 Osservazioni

Questo teorema non ci permette di calcolare esplicitamente una primitiva, ad esempio

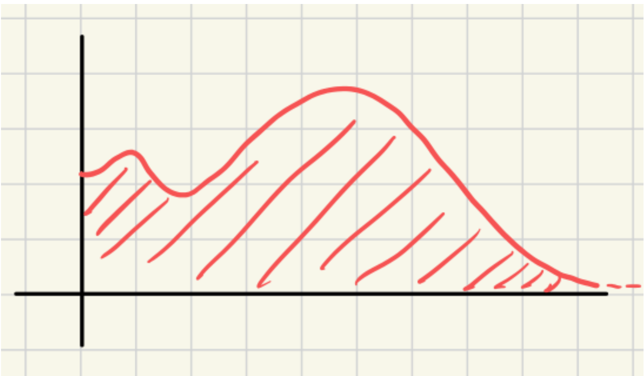
$$\int_0^x e^{-t^2}\ dt$$

Non può essere calcolata esplicitamente, tuttavia sappiamo che esiste. Inoltre data la funzione integrale $F(x)$, possiamo approssimare la sua derivata $F^{'} = f(x)$ con i test di monotonia e convessità.

In questo modo partendo da una funzione integrale, possiamo approssimare la funzione di partenza.

13 Integrali impropri

Gli integrali impropri(o generalizzati) sono integrali dove almeno un estremo di integrazione è ∞.



Guardiamo il caso del tipo $\int_a^{+\infty}$:
Sia $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ continua con $a \in \mathbb{R}$ si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\ dx$$

Se il limite esiste.

Questo limite è il valore dell'integrale improprio di f su $[a, +\infty]$. Abbiamo 3 casi:

- L'integrale si dice convergente se il limite è finito
- L'integrale si dice divergente se il limite è infinito
- L'integrale si dice indeterminato se il limite è non esiste

13.1 Osservazioni

Se $f(x) \geq 0 \forall x \geq 0$, allora

$$\int_a^x f(x)\ dx$$

è crescente, infatti per il teorema fondamentale si ha

$$F^{'}(b) = f(b) \geq 0$$

13.2 Formula di valuzione

La formula di valutazione permette di studiare integrali impropri, ad esempio poniamo

$$\int_1^{+\infty} cosx\ dx$$

Questo si può riscrivere come

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^{+\infty} cosx\ dx$$

Adesso integriamo ed otteniamo:

$$\lim_{b \to +\infty} [sinx]_1^b$$

Per il teorema di Torricelli-Barrow questo si può riscrivere come:

$$\lim_{b \to \infty} sinb - sin1$$

Ma sappiamo che $\lim_{b \to \infty} sinb$ non esiste quindi l'integrale è indeterminato.

13.3 Esempio fondamentale

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ su $[1, +\infty]$ e studiamo la funzione di accumulazione $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx$, le primitive di $\frac{1}{x^\alpha}$ sono:

$$\begin{cases} log|x| + c & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Per la formula di valutazione se $\alpha = 1$, otteniamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx = \lim_{b \to +\infty} [logx]_1^b = \lim_{b \to +\infty} (logb - log1) = +\infty$$

Se ora imponiamo $\alpha \neq 1$, otteniamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]^b$$

Questo limite dà:

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } 1 - \alpha > 0 \leftrightarrow \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{se } 1 - \alpha < 0 \leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi in questo caso l'integrale converge se $\alpha > 1$ e diverge se $a \leq 1$.

13.3.1 Osservazioni

- La convergenza/divergenza dell'integrale dipende dalla velocità con cui f tende a 0 per $x \to \infty$
- L'estremo di integrazione 1 può essere sostituito con qualsiasi $\alpha > 0$ perchè f non è continua in 0
- Notare l'analogia con le serie

13.4 Condizione necessaria di convergenza

Per capire se un integrale converge, diverge o non esiste esiste la condizione necessaria di convergenza:

Data $f \in [a, +\infty]$ continua, se $\int_a^{+\infty} f$ converge e se $\exists l = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, allora $l = 0$