Numeri complessi

I numeri complessi sono un ampliamento dei numeri reale.

Un numero complesso è un oggetto algebrico che si scrive nel modo seguente: a + bi

Dove a e b sono numeri reali mentre i è la parte immaginaria.

Ad esempio

- $\sqrt{7}$, dove b e i sono uguali a 0
- 20, dove b e i sono uguali a 0
- 2 + i, dove b = 1
- 7 + 5i
- 8i, dove a = 0

I numeri complessi si sommano e moltiplicano in modo identico ai numeri reali, tuttavia c'è una relazione fondamentale tra i reali e i complessi:

$$i^2 = -1$$

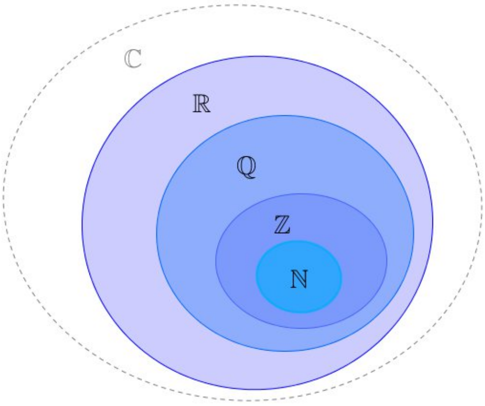
La somma si può realizzare nel modo seguente:

(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i

La moltiplicazione si può realizzare nel modo seguente:

(a + bi) · (c + di) = ac + adi + bic + (bdi^2) = ac – bd + (ad + bc)i

I numeri complessi sono indicati con la lettera ℂ e abbiamo la seguente relazione con gli altri insiemi:



N Z Q R C

Proprietà dei numeri complessi:

Per l'addizione:

1. Esiste un elemento neutro 0
2. Vale la proprietà commutativa
3. Vale la proprietà associativa
4. Ogni z ∈ ℂ ha un inverso –z = z + (-z) = 0

Per la moltiplicazione:

1. Esiste un elemento neutro 1
2. Vale la proprietà commutativa
3. Vale la proprietà associativa. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
4. Ogni z ∈ ℂ ha un inverso $z^{-1} = \frac{1}{z}$ tale che $z \cdot z^{-1} = 1$
5. Vale la proprietà distributiva. $z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$

Coniugio

Se z = a + bi allora la parte reale di z è a e la parte immaginaria è b

Il coniugio(o coniugato) è il numero complesso $\overline{z}$ = a – bi ∈ ℂ

Il numero z è reale solo se il suo coniugio è uguale a z, questo perchè la sua parte immaginaria è 0

$$z = \overline{z}$$

Norma(o modulo)

Se z = a + bi allora la sua norma è $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$

Notiamo allora che $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 + (-ab + ab)\, i = a^2 + b^2 = |Z|^2$

Quindi $z \cdot \overline{z} = |Z|^2$

Inverso

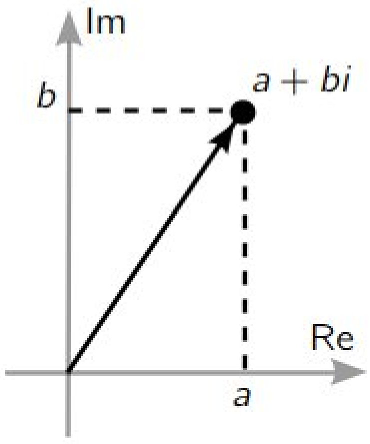
L'inverso di z = a + bi è uguale a z^{-1} che è uguale a $\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}$

Difatti $z \cdot z^{-1} = z \cdot \overline{z} = \frac{z \cdot \overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$

Esempio: $(2 + i)^{-1} = \frac{2 - i}{|2+i|^2} = \frac{2 - i}{4 + 1} = \frac{2 - i}{5}$

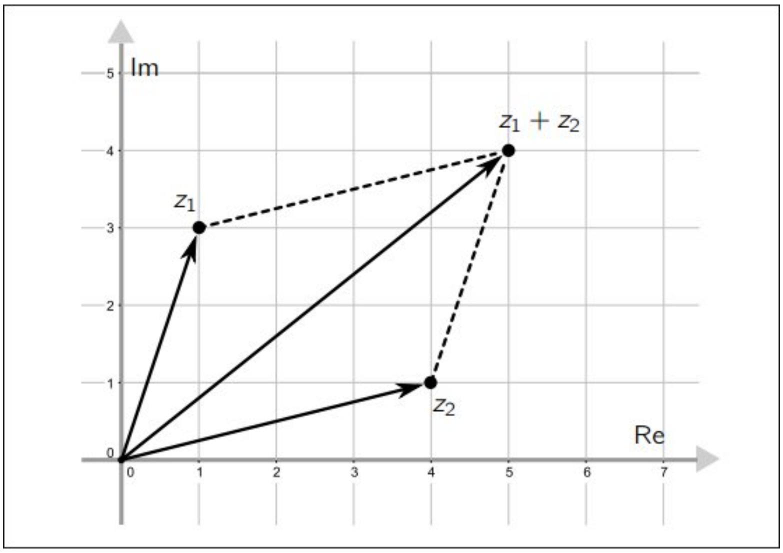
Il piano complesso

Mentre i numeri reali formano una retta, i numeri complessi formano un piano.

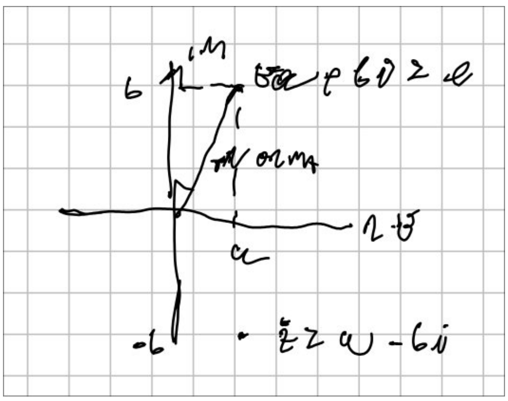


Il numero a + bi si può identificare con il grafico qua sopra.

La somma può essere vista come la somma dei vettori(numeri rappresentati sul piano)



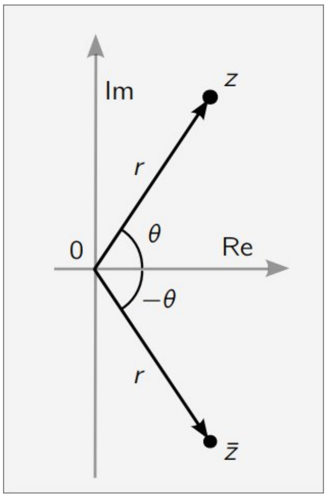
Il coniugio è la riflessione rispetto all’asse x del punto.



La norma è la distanza tra l’origine è il numero

Coordinate polari

Le coordinate polari del punto x + iy ∈ ℂ corrispondono a (r, θ) dove r è la norma e θ è l'angolo che la norma forma con l'asse x del piano.



Per ricavare le varie informazioni date le coordinate polari possiamo usare queste formule:

- X = rcos(θ)
- Y = rsin(θ)
- r = $\sqrt{x^2 + y^2}$
- θ = arccos($\frac{x}{r}$)

Secondo la formula di Eulero, un numero z = x + iy può essere scritto come: rcos(θ) + (rsin(θ))i = r(cosθ + isinθ)

Una comoda notazione è $e^{i\theta}$ che scrive implicitamente la seguente formula:

$e^{i\theta}$ = cos(θ) + isin(θ)

Un numero z = x + iy può essere scritto con questa notazione come $r \cdot e^{i\theta}$

Moltiplicazione di numeri complessi

La moltiplicazione tra numeri complessi attraverso le coordinate polari può essere spiegata attraverso la formula di Eulero che abbiamo visto prima. Infatti esiste la proprietà additiva degli esponenziali complessi che afferma:

$$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\phi}$$

Dimostrazione su appunti o libro(da aggiungere qui maybe)

Quindi dati 2 numeri $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ abbiamo che:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Data questa proprietà troviamo anche una nuova formula per l'inverso di z:

$$z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$$

Quindi invertiamo la norma(r^{-1}) e l'argomento(-θ)

Il che equivale a $z^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-\theta i} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Infatti: $z \cdot z^{-1} = r \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{i(\theta - \theta)} = 1 \cdot e^0 = 1$

Valori di e^θ

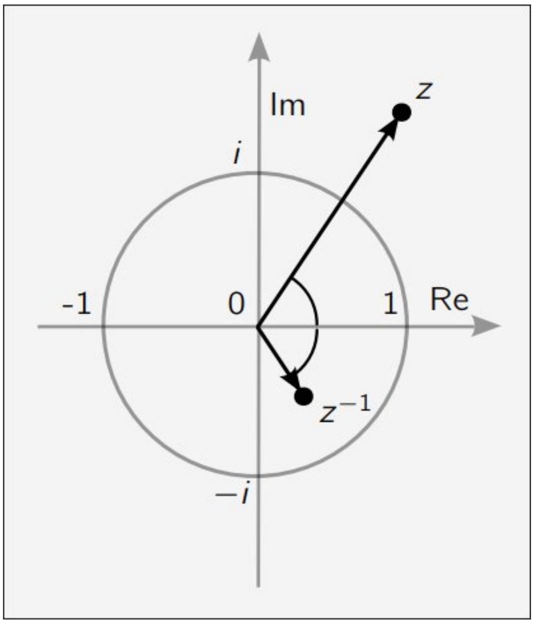
$e^{\theta i}$	-1
$e^{2\pi i}$	1
$e^{\frac{3\pi}{2}i}$	-i

Proprietà dei numeri complessi

$$|e^{i\theta}|^2 = |\cos\theta + \sin\theta|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

Questo descrive la relazione fondamentale della trigonometria dove $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Allora l'insieme $\mathbb{C}$ di tutti i numeri complessi di forma $e^{i\theta}$ è una circonferenza di raggio 1



Uguaglianza coordinate polari

Se $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$

Allora $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ e $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$ per qualche k $\in \mathbb{Z}$

Questo perchè anche se l'angolo θ_1 sembra diverso da θ_2, se differiscono di un multiplo intero di 2π, rappresentano comunque lo stesso punto nel piano complesso.

Potenze e radici n-esime di un numero complesso

Sia $z = r \cdot e^{i\theta}$

La potenza può essere descritta nel modo classico: $z^n = z \cdot z \cdot z \dots \cdot z$

Tuttavia per i numeri complessi in coordinate polari si può usare la seguente formula: $z^n = r^n \cdot e^{n\theta i}$

Esempio:
z = 1 + i

R = $\sqrt{2}$

θ = $\frac{\pi}{4}$

$$z^5 = \left((1+i)^2\right)^2(1+i) = (2i)^2(1+i) = -4(1+i) = -4-4i$$

Oppure

$$z^5 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 \cdot e^{5 \cdot \frac{\pi}{4} i} = 4\left(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{5\pi i}{4}}\right) = -4 - 4i$$

Se vogliamo determinare tutte le radici n-esime di z tali che $z^n = z_0$ possiamo scrivere la variabile z attraverso la sua forma polare: $r^n \cdot e^{in\theta} = r_0 \cdot e^{i\theta_0}$

Questa equazione è soddisfatta se:

- $r = \sqrt[n]{r_0}$
- $\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ Per qualche k $\in \mathbb{Z}$

Per qualche valore k $\in \mathbb{Z}$ otteniamo quindi n soluzioni distinte.

Quindi per valori di k = 0,1, ..., n - 1 otteniamo come argomenti:

$$\theta = \frac{\theta_0}{n}, \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\theta_0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

Ossia l'ultima condizione con k sostituito.

Le n soluzioni dell'equazione $z^n = z_0$ hanno tutte lo stesso modulo $\sqrt[n]{r_0}$

Notiamo quindi che tutte le soluzioni hanno la stessa norma con angoli(argomenti) diversi e variano con un passo costante $\frac{2\pi}{n}$

Esempio 1:

$z^2 = 1$ ha come soluzioni $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$

Esempio 2:

$z^3 = 1$ Ha come soluzioni $z_1 = 1, z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$

Tutte le soluzioni formano sempre un poligono di n lati: