Combinazioni lineari

Andrea Canale

December 14, 2024

Contents

1 Combinazioni lineari

Dato una spazio vettoriale V e siano $v_1, ..., v_n$ vettori in V, una combinazione lineare di questi vettori è un vettore di forma:

$$v \ = \ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ + ... + \lambda_n v_n$$

Dove $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$

Esempio

$$v \ = \ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Sottospazio generato

Dato uno spazio vettoriale V in $\mathbb{K}$ e siano $v_1, ..., v_n$ vettori in V.

Il sottospazio generato da questi vettori è un sottoinsieme di V formato da tutte le combinazioni lineari di questi vettori. Viene indicato come

$$Span\,(v_1, \ ..., \ v_k) \ = \ \{\lambda_1 v_1, \ ..., \ \lambda_k v_k \ |\lambda_1, \ ..., \ \lambda_k \ \in \mathbb{K}\}$$

3 Indipendenza lineare

Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e siano $v_1, ..., v_n$ vettori in questo spazio.

I vettori si dicono **linearmente dipendenti** se esistono $\lambda_1, ..., \lambda_n$ con almeno un $\lambda \neq 0$ se

$$\lambda_1 v_1,\ ...,\ \lambda_k v_k\ =\ 0$$

Questo vuol dire che i vettori si possono scrivere come combinazione lineare tra loro.

In caso contrario i vettori si dicono **linearmente indipendenti**

Per capire se i vettori sono linearmente indipendenti dobbiamo risolvere un sistema per trovare i coefficienti.

Questo si può fare facilmente utilizzando il teorema di Rouchè-Capelli:

- Se abbiamo ∞ soluzioni, i vettori dipendenti
- Se abbiamo 1 soluzione, i vettori sono indipendenti perchè l'unica soluzione che esiste è sicuramente 0 perchè esiste sempre

Esempio

$$w_1\ =\ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ w_2\ =\ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ w_3\ \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\ =$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ +\ \lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ +\ \lambda_3\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\ =\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ =$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\ +\ \lambda_2\ +\ 3\lambda_3\\ \lambda_1\ +\ 2\lambda_2\ +\ \lambda_3\\ 2\lambda_1\ +\ \lambda_2\ +\ \lambda_3\end{pmatrix}\ =\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ =$$

E possiamo formare il seguente sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0\\1 & 2 & 1 & 0\\2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

4 Basi e dimensioni

Data una sequenza di vettori $v_1, ..., v_n$ in V, essi formano una base se vengono soddisfatte due condizioni:

- Questi vettori sono linearmente indipendenti

- $Span(v_1, ..., v_n) = V$ Cioè che il rango della matrice del sistema omogeneo associato con i vettori dello Span sia uguale alla dimensione di V

La dimensione di V, definita come $dimV$ è il numero di elementi nella base di V.
Due basi di uno stesso spazio hanno la stessa dimensione.

4.1 Base canonica

Dati vettori canonici(vettori con un unico 1 e nelle altre posizione 0), formati da

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi vettori canonici formano una base nello spazio $\mathbb{K}^n$ chiamata base canonica.
Infatti i vettori canonici formano lo spazio $\mathbb{K}^n$