Spazio euclideo

Andrea Canale

December 14, 2024

Contents

1 Isometrie

Un isometria è un isomorfismo $T : V \to W$(con g e $g^{'}$ prodotti scalari) che soddisfa la seguente proprietà:

$$g\left(v_1, v_2\right) = g'\left(T\left(v_1\right), T\left(v_2\right)\right)$$

Un isometria mantiene la lunghezza dei vettori invariata.

Ci sono altri 3 modi per verificarla:

- Esiste una base B tale che vale la proprietà dell'isometria($\forall v_i, v_j \in B$)
- $\forall v \in V$, $||v|| = ||T(v)||$
- $\forall v, w \in W$, $d(v, w) = d(T(v), T(w))$

Inoltre, T è isometria se vale:

$$[g]_B = [T]_B^B \cdot^t [g^{'}]_B \cdot [T]_B^B$$

Questo ci torna utile per l'endomorfismo $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che è isometria se:

$$^tA \cdot A = I_n$$

2 Isometrie su $\mathbb{R}^2$

2.1 Rotazioni

Una rotazione di angolo θ è una mappa $L_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla matrice di rotazione $A = \begin{pmatrix} cos\,(\theta) & -sin\,(\theta) \\ sin\,(\theta) & cos\,(\theta) \end{pmatrix}$

2.2 Riflessioni

Una riflessione di angolo θ rispetto ad una retta r è una mappa $L_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla matrice di rotazione $A = \begin{pmatrix} cos\,(\theta) & sin\,(\theta) \\ sin\,(\theta) & -cos\,(\theta) \end{pmatrix}$

Queste sono le uniche isometrie in $\mathbb{R}^2$

3 Matrici ortogonali

Una matrice $M(n, \mathbb{K})$ è ortogonale se

$$^tA \cdot A = I_n$$

Ed equivalentemente: $^tA = A^{-1}$

Inoltre, se una matrice è ortogonale sappiamo che il determinante sarà $+1$ se la matrice descrive una rotazione o -1 se descrive una riflessione.

Tuttavia non tutte le matrici con determinante ± 1 sono ortogonali.

4 Isometrie su $\mathbb{R}^3$

4.1 Antirotazione

Un antirotazione è la composizione di una rotazione rispetto ad un asse r e una riflessione rispetto al piano $r^{\perp}$

In $\mathbb{R}^3$ ogni isometria è una rotazione o un'antirotazione

5 Prodotto vettoriale

In $\mathbb{R}^3$ possiamo definire un operazione che funziona solo su questo spazio:

$$v\ x\ w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

Questa operazione può essere ricordata con questa formula: $v\ x\ w = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ sviluppando sulla prima riga e prendiamo i coefficienti dei rappresentanti canonici come componenti del vettore.

5.1 Proprietà del prodotto vettoriale

- è ortogonale sia a v che a w
- Se $v\ x\ w$ è nullo, allora v e w sono dipendenti
- Se v e w sono indipendenti, $v, w, v\ x\ w$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$
- $||v\ x\ w|| = ||v|| \cdot ||w|| - < v, w >$
- $||v\ x\ w|| = ||v|| \cdot ||w|| - sen(\theta)$

Le ultime due proprietà valgono anche per la norma al quadrato(mettendo al quadrato tutti i membri dell'uguaglianza)

6 Basi positive

Una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $\mathbb{R}^3$ è positiva se:

$$det(v_1|v_2|v_3) > 0$$

La positività di una base dipende dai vettori e dalla loro posizione.

7 Sottospazio affine

Un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V, dato un vettore v_0 è un sottospazio del tipo:

$$\{w \in W \mid v_0 + w\}$$

Due spazi $x + W$ e $y + V$ coincidono se e solo se $W = V$ e $x - y \in W$

Lo spazio W di uno spazio affine S scritto come $x + W$ è detto giacitura di S ed è indicato come $giac(S)$

7.1 Forma parametrica e cartesiana di spazi affini

La forma cartesiana descrive uno spazio attraverso i punti che soddisfano un'equazione lineare omogenea:

è utile per determinare i punti di una funzione.

$$x = \{v \in \mathbb{R}^3 | F(v) = 0\}$$

La forma parametrica descrive uno spazio attraverso i vettori che lo generano:

$$x = F(y) \text{ Per qualche } F : y \to \mathbb{R}^3$$

Oppure:

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

è utile per determinare se un punto appartiene allo spazio.

Ad esempio con la bisettrice abbiamo:

- In forma cartesiana: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 0\}$
- In forma parametrica $\{(t, t) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$

Entrambi descrivono i punti con le stesse coordinate

7.2 Intersezione tra spazi affini

Per calcolare l'intersezione di due spazi affini $S \cap S'$ dobbiamo sempre calcolare un sistema di equazioni indipendentemente dalla forma.

Siano r una retta e π un piano che si intersecano in un punto P. Usiamo le giaciture così da assumere $P = 0$. $v' = P\pi(v)$ Attraverso una proiezione ortogonale. **DA VEDERE**

Angolo tra piani

Siano π_1 e π_2 due piani che si intersecano in una retta interse$r$. L'angolo fra i due piani è definito da due rette $s_1 \subset \pi_1$ e $s_2 \subset \pi_2$ incidenti ed ortogonali a r, l'angolo fra i due piani è l'angolo fra s_1 e s_2

Siano v_1 e v_2 vettori non nulli ortogonali a due piani π_1 e π_2, l'angolo α fra π_1 e π_2 è uguale a quello tra v_1 e v_2

Distanze fra sottospazi disgiunti

Distanza fra punti

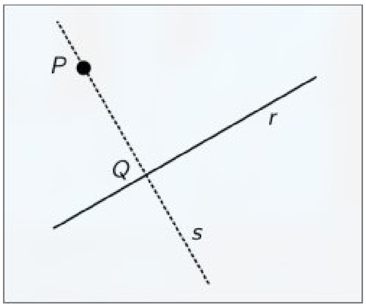
$$d(P,Q) = \| \overline{PQ} \| = \| Q - P \|$$

Distanza fra punto e retta

La distanza fra un punto e una retta è definita come la retta perpendicolare s a r nel punto P.

$$d(P,r) = d(P,Q)$$

Dove Q e l'intersezione tra r e s



Inoltre, se la retta è espressa in forma parametrica del tipo $r = \{P_0 + tv_0\}$, la distanza si calcola usando il prodotto vettoriale:

$$d(P,r) = \frac{\| v_0 x v_1 \|}{\| v_0 \|}$$

Dove $v_1 = P - P_0$

Distanza fra rette

La distanza fra due rette r e r' nel piano è definita così: tracciamo una retta s perpendicolare ad entrambe e calcoliamo la distanza nei due punti di intersezione:

$$d(r,r') = d(P,P')$$

Dove $P = r \cap s$ e $P' = r' \cap s$

Inoltre, se la retta è espressa in forma parametrica del tipo $r = \{P_0 + tv_0\}$ e $r' = \{P'_0 + uv_1\}$, la distanza si calcola come:

$$d(r,r') = d(P_0,r')$$

Inoltre, se le due rette sono sghembe vale la formula:

$$\boxed{d(r,r') = \frac{|\det(v\,|v'|\,v'')|}{\|v \times v'\|}}$$

Dove $v'' = P'_0 - P_0$

Distanza fra punto e piano

La distanza fra un punto P_0 e un piano π è definita così: Si traccia una retta s perpendicolare a π e passante per P_0 e si definisce:

$$d(P_0,\pi) = d(P_0,Q)$$

Dove $Q = s \cap \pi$

Distanze fra retta e piano

Se π è un piano e r una retta, allora:

$d(r,\pi) = d(P,\pi)$ Dove P è un punto qualsiasi del piano

Distanza fra due piani

Se π,π' sono due piani disgiunti, allora:

$d(\pi,\pi') = d(P,\pi')$ Dove P è un punto qualsiasi del piano