Sistemi lineari

Andrea Canale

December 14, 2024

Contents

1 **Sistemi lineari** 1

2 **Sistema omogeneo associato** 2

3 **Sottospazio affine** 2

4 **Pivot di una riga** 2

5 **Rango di una matrice** 3

6 **Mosse di Gauss** 3

7 **Algoritmo di Gauss-Jordan** 3

8 **Teorema di Rouchè-Capelli** 4

9 **Coordinate** 4

1 Sistemi lineari

Un sistema lineare è un insieme di k equazioni lineari(di primo grado) in n variabile

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + \{a_1 n\}\, x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Dove x sono le **incognite** e a i **coefficienti** delle incognite mentre b sono i **termini noti**. Coefficienti e termini noti appartengono ad un campo $\mathbb{K}$, per questa ragione i sistemi lineari si possono rappresentare come matrici.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Dove la prima matrice è detta la matrice dei coefficienti, il secondo vettore è quello delle incognite e la terza il vettore dei termini noti.

La soluzione di questo sistema è un vettore che sostituito alle incognite rende vera l'uguaglianza.

2 Sistema omogeneo associato

Dato un sistema del tipo $\begin{matrix} a_{11}x + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n = b_k \end{matrix}$, il sistema omogeneo associato a questo sistema è lo stessbb o sistema con i termini noti messi a 0 $\begin{cases} a_{11}x + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$

Denotiamo come S, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare.

Denotiamo come S_0, l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

S_0 forma un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ perchè contiene sicuramente l'origine 0.

S in generale non è un sottospazio perchè non è certo che contenga 0.

Se $S \neq \emptyset$ può essere generata prendendo qualsiasi elemento $s \in S_0$ e sommandoci tutti i vettori in S_0

3 Sottospazio affine

S forma un sottospazio affine.

Un sottospazio affine ha la forma:

$$S = \{x + w | w \in W\}$$

4 Pivot di una riga

Il pivot di una riga è il primo elemento $\neq 0$ che è presente in una riga partendo da sinitra verso destra

Una matrice è ridotta a scalini se il pivot di ogni riga è sempre più a destra della riga che la precede, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

non è ridotta a scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta a scalini, l'ultima riga non ha pivot

5 Rango di una matrice

Data una matrice A, il rango di A è la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne. Quindi il rango di A è il numero di colonne linearmente indipendenti di A.

Il rango può anche essere calcolato come il numero di pivot della matrice ridotta a scalini.

6 Mosse di Gauss

Le mosse di Gauss sono procedimenti utili per cambiare la struttura della matrice senza cambiare il risultato del sistema. Sono 3:

- Scambiando due righe il risultato non cambia
- Moltiplicando gli elementi di una riga per $\lambda \neq 0$, la soluzione non cambia
- Aggiungendo o sottraendo ad una riga, un'altra riga moltiplicata per λ, la soluzione non cambia

Queste mosse non funzionano per le colonne perchè cambierebbero la posizione delle variabili

Combinando queste mosse possiamo ottenere una matrice ridotta a scalini, questo procedimento prende il nome di algoritmo di Gauss.

Le mosse di Gauss cambiano il determinate

7 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo di Gauss-Jordon è un algoritmo che permette la risoluzione di sistema lineari usando le mosse di Gauss. Si può sintetizzare in 3 passi fondamentali:

- Ridurre la matrice a scalini

- Mettere 0 sopra ad ogni pivot
- Mettere i pivot a 1

Eseguendo questi passi, riusciamo ad ottenere il valore delle incognite senza procedere con sostituzioni o altre tecniche.

Tuttavia non sempre un sistema lineare a soluzioni. L'esistenza delle soluzioni viene verificata attraverso il **teorema di Rouchè-Capelli**

8 Teorema di Rouchè-Capelli

Il teorema di Rouchè-Capelli ci permette di capire se un sistema ha soluzioni.

Dato un sistema lineare, sappiamo che ci sono soluzioni, se e solo se, B(il vettore dei termini noti) è combinazione lineare di A(la matrice dei coefficienti)

Usiamo quindi la definizione di rango e il numero di colonne della matrice A n e abbiamo tre casistiche:

- $rk(A|B) > rk(A)$ abbiamo 0 soluzioni
- $rk(A|B) = rk(A) = n$ abbiamo 1 soluzione
- $rk(A|B) = rk(A) < n$ abbiamo ∞ soluzioni

Inoltre possiamo dedurre che se $detA \neq 0$ esiste una sola soluzione ed è invertibile.

Inoltre, sappiamo che se abbiamo n vettori e il rango della matrice del sistema è minore di n, allora ci sono soluzioni.

Una riga con soli 0, viene considerata senza pivot.

9 Coordinate

Se $v_1, ..., v_n$ formano una base V, allora $v \in V$ può essere scritto come combinazione lineare univocamente.

I numeri $\lambda_1, ..., \lambda_n$ che creano la combinazione lineare, sono le coordinate di v rispetto alla base $v_1, ..., v_n$