4. Aritmética de Ponto Flutuante no MIPS

Objetivo

Neste este exercício você usará instruções de ponto flutuante. O foco será nas operações de ponto flutuante e sua representação numérica.

Números em Ponto Flutuante

O padrão IEEE-754 reserva vários padrões de bits para ter um significado especial. Em outras palavras, nem todos os padrões de bits representam algum número, conforme quadro a seguir.

Special bit patterns in IEEE-754

Sign bit	Exponent	Significand	Comment
x	0..0	0..0	Zero
x	0..0	not all zeros	Denormalized number
0	1..1	0..0	Plus infinity (+inf)
1	1..1	0..0	Minus infinity (-inf)
x	1..1	not all zeros	Not a Number (NaN)

Infinito significa algo grande demais para ser representado. Um estouro pode retornar um + inf ou um -inf. Algumas operações no infinito retornam outro infinito como resultado. Um resumo dessa representação encontra-se na Tabela 1.

Table 1: Some operations with infinity

Operation	Result	Comment
x + (-inf)	-inf	x finite
x - (+inf)	-inf	x finite
(+inf) + (+inf)	+inf	
(-inf) + (-inf)	-inf	
x * (+inf)	+inf if x>0, -inf otherwise	x nonzero

Pode haver um zero positivo se o bit de sinal for 0 e um zero negativo (bit de sinal é 1). Números desnormalizados estão incluídos no padrão IEEE-754 para lidar com casos de estouro negativo de expoente (números muito pequenos). Um NaN (às vezes denotado por nan) é usado para representar um resultado indeterminado. Existem dois tipos de NaNs: sinalização e silêncio. O padrão de bits no significando é usado para diferenciar entre eles, e é dependente da implementação. Um NaN de sinalização pode ser usado, por exemplo, para variáveis não inicializadas. Observe que qualquer operação em um NaN de sinalização terá como resultado, um NaN silencioso. Operar em um NaN silencioso simplesmente retorna outro NaN sem gerar nenhuma exceção, vide Tabela 2.

Table 2: Some operations which produce a quiet NaN

Operation	Comment
x + (NaN)	Any operation on a quiet NaN (addition in this example)
(+inf) + (-inf)	
0 * (-inf)	
0/0	
inf/inf	
x%0	The remainder of division by 0
$\sqrt{x}$, x < 0	

Atividade 1

Usando o simulador MARS:

- Declare as variáveis Zero.s, PlusInf.s, MinusInf.s, PlusNaN.s, MinusNaN, inicializadas com os padrões de bits correspondendo a zero, mais infinito, menos infinito, NaN positivo, NaN negativo em representação de precisão simples.
- Declare as variáveis Zero.d, PlusInf.d, MinusInf.d, NaN.d, inicializadas com os padrões de bits correspondendo a zero, mais infinito, menos infinito, NaN positivo, NaN negativo em representação de precisão dupla.
- Carregue essas variáveis em registradores de ponto flutuante, começando com $f0
- Imprima, começando com $f0, o conteúdo dos registradores onde as variáveis foram carregadas; imprime um caractere de nova linha (\n) após cada valor.

Execute o programa e preencha a tabela a seguir com o nome de cada variável e o respectivo valor impresso após a execução:

Variável	Saída impressa
Zero.s ; Zero.d	0.0
PlusInf.s, PulsInf.d	Infinity
MinusInf.s, MinusInf.d	-Infinity
PlusNaN.s, PlusNaN.d	NaN
MinusNaN.s, MinusNaN.d	NaN

Atividade 2

Usando o simulador MARS:

- Declare as mesmas variáveis de precisão simples usadas na Atividade I;
- Declara uma variável float chamada MyNum, inicializado-a com os dois primeiros dígitos do seu número de matrícula na Ufes
- Execute uma operação que usa MyNum e que gere o infinito e imprima o resultado. Dica: escolha alguma operação da Tabela 1
- Executa uma operação que usa MyNum e que gere NaN e imprima o resultado. Dica: escolha alguma operação da Tabela 2

Execute o programa e preencha a seguinte tabela:

MyNum	Operação Implementada	Resultado Impresso
20	20 + Infinity	Infinity
20	20 + NaN	NaN

Questões

1. Qual é o padrão de bits para o maior número possível de ponto flutuante de precisão única? Escreva em hexadecimal.

Atividade 3

Nesta atividade você deverá criar um programa que calcula o fatorial de um número inteiro, representado usando notação de números de ponto flutuante, conforme passos a seguir:

- Solicite ao usuário que insira um número inteiro;
- Verifique se o número inserido é negativo: se for negativo, imprima uma mensagem de erro e solicite o usuário para entrar novamente com um número inteiro positivo
- Realizar a operação 'FactorialSingle', cujo parâmetro será o número lido do usuário convertido em ponto flutuante de precisão simples. A operação deve retornar o fatorial (em PF precisão simples) desse número
- Imprimir o valor retornado por 'FactorialSingle'

Execute o 'FactorialSingle' para completar o plano de testes a seguir. Use notação científica normalizada para representar a saída impressa por 'FactorialSingle'.

Número	Fatorial (Inteiro)	Fatorial PF (single)
0	1	1.0
5	120	120.0
10	3628800	3628800.0
15	2004310016	2.00431002E9
20	-2102132736	-2.10213274E9
40	0	0.0

Questões

1. Por que alguns dos resultados impressos são negativos?

R: Porque ocorre overflow

2. Quais são os valores máximos da entrada para os quais a saída correta ainda é impressa?
R: 10

3. Usando algum outro método ou linguagem de programação, calcule o valor exato de 20 e compare com o valor impresso pelo seu programa no MARS. Quais são esses valores? Por quê os valores são diferentes?
R: O valor no MARS é -2.10213274E9 enquanto em outra linguagem de programação é 2.4329020081766E18. Essa diferença ocorre, porque tem uma limitação em bits no MARS.

Atividade 4

Na Atividade 3 você usou a conversão de inteiro para ponto flutuante (cvt.s.w). Vamos agora tentar uma conversão de PF para inteiro, conforme instruções a seguir:

- Após de imprimir o valor retornado por 'FactorialSingle', converta esse valor em um número inteiro e imprima-o também.

Execute esse novo programa e conclua o próximo plano de teste. Anote o valor impresso para o fatorial como está, não use notação científica neste momento.

Número	Fatorial (Impressão como Inteiro)	Fatorial (Impressão como PF simples)
0	1	1.0
5	120	120.0
10	3628800	3628800.0
11	39916800	3.99168E7
12	479001600	4.790016E8
13	6227020800	1.9320535E9
14	8.71782912E10	1.27894528E9
15	1.307674368E12	2.00431002E9

Destaque os casos em que a saída de inteiro é um número diferente da saída de ponto flutuante.

Questões

1. Você acha que a operação de conversão produz um inteiro com ou sem sinal? Explique

R: Produz com sinal, pois ocorre o overflow.

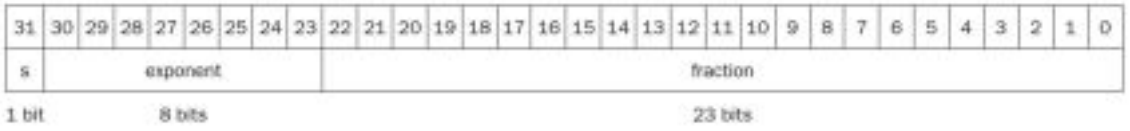
2. Como você pode ver, a instrução de conversão não sinaliza nenhum erro, mesmo que a própria conversão resulte em um valor incorreto para o resultado. Qual é, em sua opinião, a razão pela qual a arquitetura não especifica que as instruções de conversão devem relatar erros?
R: Porque é muito mais custoso resolver por hardware.

Aritmética de Ponto Flutuante

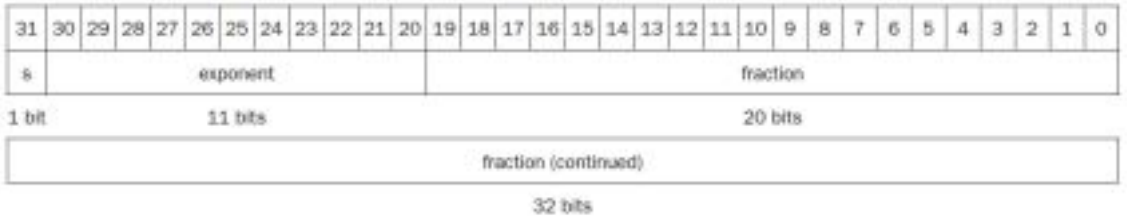
A aritmética de Ponto Flutuante é implementada pelo coprocessador 1 (*Coproc 1* no MARS) da arquitetura MIPS. O coprocessador possui 32 registradores de 32 bits, numerados de 0 a 31 ($f0 a $f31). Os valores armazenados nestes registradores seguem o padrão IEEE-754 (ver material do curso).

Para permitir o armazenamento de valores em precisão dupla (64 bits), a arquitetura usa o artifício de

agrupar pares de registradores subsequentes, isto é, $f0 com $f1, $f2 com $f3, e assim, sucessivamente. Assim, a arquitetura oferece "virtualmente" 16 registradores de 64 bits, nos quais o valor armazenado terá sempre seus 32 bits de ordem mais alta armazenados num registrador par e os 32 de mais baixa ordem num registrador ímpar. A representação em IEEE-754 para 32 e 64 bits é mostrada abaixo:



Representação IEEE-754 em precisão simples (32 bits)



Representação IEEE-754 em precisão dupla (64 bits)

Para simplificar as coisas, operações em ponto flutuante usam sempre registradores numerados e podem ser executadas em precisão simples (32 bits) ou precisão dupla (64 bits). A diferença das instruções MIPS é determinada por um sufixo após o mnemônico da instrução, por exemplo, as instruções add.s e add.d representam adições em precisão simples (.s) e precisão dupla (.d), respectivamente.

Adição, subtração, multiplicação e divisão em ponto flutuante podem gerar erros de *overflow*. Um *overflow* aqui significa que o expoente é muito grande para ser representado nos 8 bits (precisão simples) ou 11 bits (precisão dupla) do campo expoente da notação IEEE 754.

O conjunto de instruções MIPS oferece, além das instruções aritméticas, comparações, desvios, movimentação de dados da (*load*) e para (*store*) a memória, conversões de formatos de ponto-flutuante (32 para 64 bits e vice-versa) e conversão de inteiro para ponto flutuante e vice-versa. Enquanto nas comparações envolvendo inteiros um dos registradores de propósito geral pode ser definido como destino da execução, no caso de ponto flutuante, uma comparação irá implicitamente determinar ("setar") uma *flag*. Esta *flag* poderá então ser usada para testar se um desvio é realizado ou não numa instrução de desvio condicional.

Instruction	Comment
`mfc1 Rdest, FPsrc`	Move the content of floating-point register `FPsrc` to `Rdest`
`mtc1 Rsrc, FPdest`	Integer register `Rsrc` is moved to floating-point register `FPdest`
`mov.x FPdest, FPsrc`	Move floating-point register `FPsrc` to `FPdest`
`lwc1 FPdest, address`	Load word from `address` in register `FPdest`[a]
`swc1 FPsrc, address`	Store the content of register `FPsrc` at `address`[b]
`add.x FPdest, FPsrc1, FPsrc2`	Add single precision

Instruction	Comment
`sub.x FPdest, FPsrc1, FPsrc2`	Subtract `FPsrc2` from `FPsrc1`
`mul.x FPdest, FPsrc1, FPsrc2`	Multiply
`div.x FPdest, FPsrc1, FPsrc2`	Divide `FPsrc1` by `FPsrc2`
`abs.s FPdest, FPsrc`	Store the absolute value of `FPsrc` in `FPdest`
`neg.x FPdest, FPsrc`	Negate number in `FPsrc` and store result in `FPdest`
`c.eq.x FPsrc1, FPscr2`	Set the floating-point condition flag to true if the two registers are equal
`c.le.x FPsrc1, FPsrc2`	Set the floating-point condition flag to true if `FPsrc1` is less than or equal to `FPsrc2`
`c.lt.x FPsrc1, FPsrc2`	Set the floating-point condition flag to true if `FPsrc1` is less than `FPsrc2`
`bc1t label`	Branch if the floating-point condition flag is true
`bc1f label`	Branch if the floating-point condition flag is false
`cvt.x.w FPdest, FPsrc`	Convert the integer in `FPsrc` to floating-point
`cvt.w.x FPdest, FPsrc`	Convert the floating-point number in `FPsrc` to integer
`cvt.d.s FPdest, FPsrc`	Convert the single precision number in `FPsrc` to double precision and put the result in `FPdest`
`cvt.s.d FPdest, FPsrc`	Convert the double precision number in `FPsrc` to single precision and put the result in `FPdest`

a. Um número PF em precisão simples tem o mesmo tamanho que uma palavra (32 bits). Dentro do Coprocessador 1, uma palavra será tratada como um número em precisão simples. Existe uma instrução sintética no conjunto de instruções MIPS para carregar um valor em precisão dupla da memória para o Coproc1.

b. Armazena na memória um valor de PF em precisão simples. Existe uma instrução sintética no conjunto de instruções MIPS para armazenar m valor em precisão dupla na memória a partir do Coproc1.