

Estimação da volatilidade via McCormick 2012

Valores iniciais

$$\begin{aligned} n &= 1.461, & \mu &= -5,4, & \phi &= 0,99, & \sigma^2 &= 0,5^2, \\ m_0 &= 0, & C_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = \frac{0,5^2}{0,01} & e & \lambda_0 &= 1. \end{aligned}$$

Funções auxiliares

$$l'(h_t^*|y_t, \mu, \phi, m_{t-1}, C_{t-1}, \lambda_t) = -\frac{1}{2} + \frac{y_t^2}{2e^{h_t^*+\mu}} - \frac{(h_t^* - \phi m_{t-1})\lambda_t}{\phi^2 C_{t-1}} \quad (1)$$

e

$$l''(h_t^*|y_t, \mu, \phi, C_{t-1}, \lambda_t) = -\frac{y_t^2}{2e^{h_t^*+\mu}} - \frac{\lambda_t}{\phi^2 C_{t-1}}. \quad (2)$$

Estimando λ_t

Achar λ_t que maximize $f(\lambda_t)$, onde:

$$\begin{aligned} f(\lambda_t) &\approx \sqrt{2\pi} \sqrt{\left| \frac{1}{l''(\hat{h}_t^*)} \right|} f(y_t|D_{t-1}, \hat{h}_t^*) f(\hat{h}_t^*|D_{t-1}), \\ &\approx \sqrt{2\pi} \sqrt{\left| \frac{1}{-\frac{y_t^2}{2e^{m_t+\mu}} - \frac{\lambda_t}{\phi^2 C_{t-1}}} \right|} \times \mathcal{N}(0, e^{m_t+\mu}) \times \mathcal{N}\left(m_t, \frac{\phi^2 C_{t-1}}{\lambda_t}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Note que $\hat{h}_t^* = m_t$ e portanto $f(\lambda_t) = f(\lambda_t|y_t, \mu, \phi, m_t, C_{t-1})$.

Estimando h_t^*

A distribuição de $(h_t^*|D_t)$ será:

$$(h_t^*|D_t) \sim \mathcal{N}(m_t, C_t), \quad (4)$$

onde

$$m_t = m_{t-1} - \frac{l'(m_{t-1})}{l''(m_{t-1})} \quad e \quad (5)$$

$$C_t = -\frac{1}{l''(m_{t-1})}. \quad (6)$$

Então $\hat{h}_t^* = m_t$. Note porém que, no tempo t os valores de m_t e C_t dependem do λ_t da maximização através das derivadas. Entretanto λ_t depende, do mesmo modo, de m_t e C_{t-1} , dando origem a uma dependência cíclica entre m_t e λ_t .

Algumas considerações

Eu programei o algoritmo de maneira que, durante a busca pelo λ_t , o valor de m_t é sempre recalculado. Isto é, eu substituí a equação (5) em (3), numa tentativa de corrigir a dependência cíclica. O resultado da estimação pode ser visto na Figura 1.

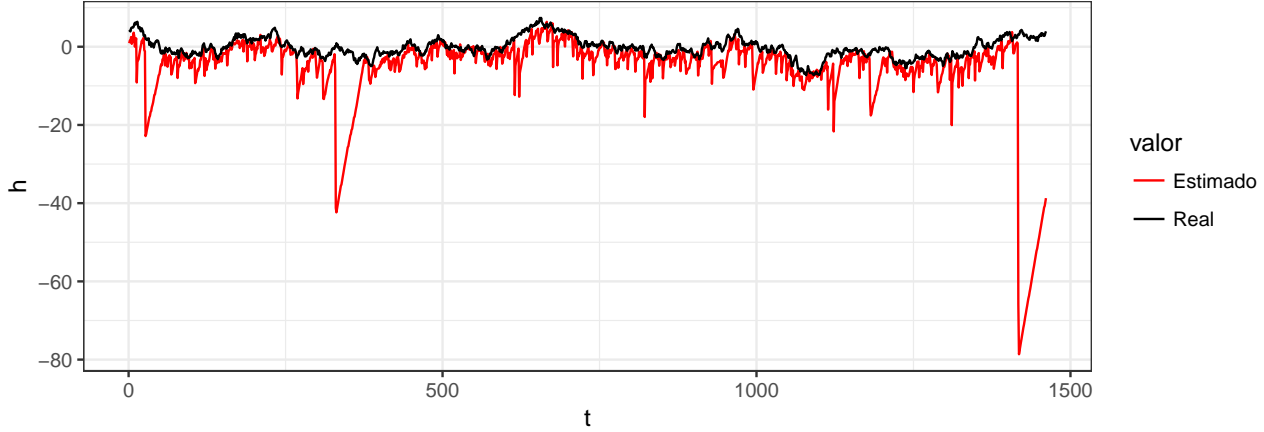


Figura 1: Valores estimados vs valores reais de h_t^* .

Eu notei que frequentemente os valores ótimos de λ_t eram iguais a um, e os gráficos da função preditora era algo semelhante a Figura 2. Assim tive a ideia de estender o eixo x do gráfico, como na Figura 3.

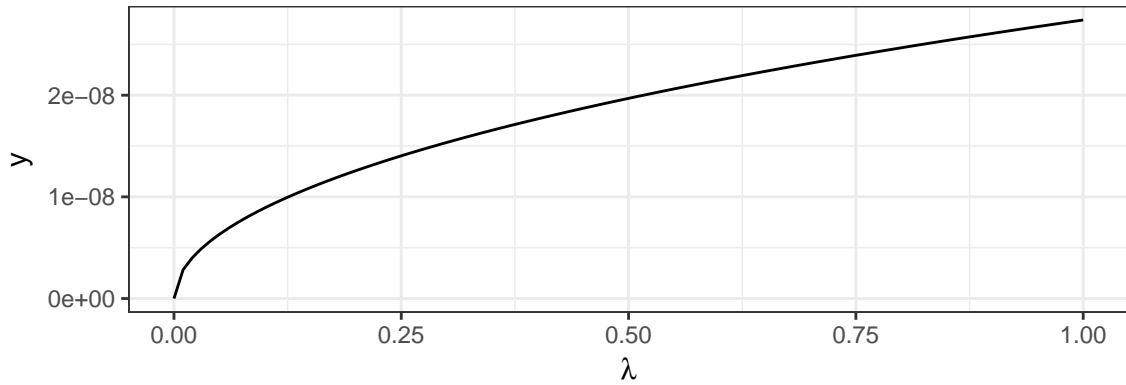


Figura 2: Função preditora.

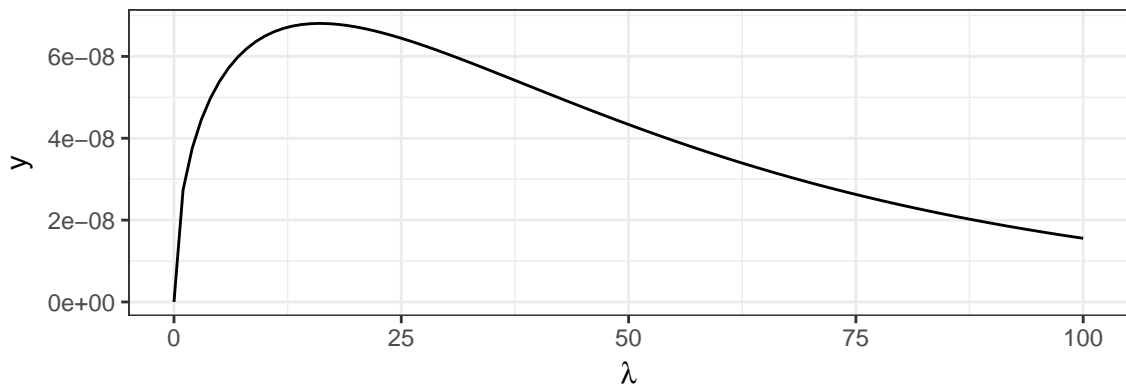


Figura 3: Função preditora.