

# Um Estudo sobre Modelos para Volatilidade Estocástica

Projeto para Qualificação em Mestrado

André Silva de Queiroz

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Cibele Queiroz da Silva, Ph.D.

Departamento de Estatística  
Universidade de Brasília

18 de junho de 2015



# Introdução

- A importância dos modelos de séries temporais.
- Dados com a variância variável:
  - Tradicionalmente: ARCH e GARCH.
  - Nova proposta: Modelos de Volatilidade Estocástica.
- Inferência Bayesiana.
- Modelos Dinâmicos.



# Introdução

- A importância dos modelos de séries temporais.
- Dados com a variância variável:
  - Tradicionalmente: ARCH e GARCH.
  - Nova proposta: Modelos de Volatilidade Estocástica.
- Inferência Bayesiana.
- Modelos Dinâmicos.



# Introdução

- A importância dos modelos de séries temporais.
- Dados com a variância variável:
  - Tradicionalmente: ARCH e GARCH.
  - Nova proposta: Modelos de Volatilidade Estocástica.
- Inferência Bayesiana.
- Modelos Dinâmicos.



# Introdução

- A importância dos modelos de séries temporais.
- Dados com a variância variável:
  - Tradicionalmente: ARCH e GARCH.
  - Nova proposta: Modelos de Volatilidade Estocástica.
- Inferência Bayesiana.
- Modelos Dinâmicos.



# Introdução

- A importância dos modelos de séries temporais.
- Dados com a variância variável:
  - Tradicionalmente: ARCH e GARCH.
  - Nova proposta: Modelos de Volatilidade Estocástica.
- Inferência Bayesiana.
- Modelos Dinâmicos.



# Introdução

- A importância dos modelos de séries temporais.
- Dados com a variância variável:
  - Tradicionalmente: ARCH e GARCH.
  - Nova proposta: Modelos de Volatilidade Estocástica.
- Inferência Bayesiana.
- Modelos Dinâmicos.













- O MLD é caracterizado pela quádrupla  $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{V}_t, \mathbf{W}_t\}$ .
- Se  $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ , então o modelo é chamado de constante.
- O modelo linear dinâmico constante engloba essencialmente todos os modelos lineares tradicionais de séries temporais.
- Modelos mais gerais podem ser propostos com  $\nu_t$  e  $\omega_t$  correlacionados. Porém esses novos modelos podem sempre ser reescritos satisfazendo as condições de independência, West e Harrison (1997).
- A informação inicial sobre  $\theta_t$  é representada por:
  - Informação Inicial;



- O MLD é caracterizado pela quádrupla  $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{V}_t, \mathbf{W}_t\}$ .
- Se  $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ , então o modelo é chamado de constante.
- O modelo linear dinâmico constante engloba essencialmente todos os modelos lineares tradicionais de séries temporais.
- Modelos mais gerais podem ser propostos com  $\nu_t$  e  $\omega_t$  correlacionados. Porém esses novos modelos podem sempre ser reescritos satisfazendo as condições de independência, West e Harrison (1997).
- A informação inicial sobre  $\theta_t$  é representada por:
  - Informação Inicial:



- O MLD é caracterizado pela quádrupla  $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, V_t, \mathbf{W}_t\}$ .
- Se  $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}, V, \mathbf{W}\}$ , então o modelo é chamado de constante.
- O modelo linear dinâmico constante engloba essencialmente todos os modelos lineares tradicionais de séries temporais.
- Modelos mais gerais podem ser propostos com  $\nu_t$  e  $\omega_t$  correlacionados. Porém esses novos modelos podem sempre ser reescritos satisfazendo as condições de independência, West e Harrison (1997).
- A informação inicial sobre  $\theta_t$  é representada por:
  - Informação Inicial:



- O MLD é caracterizado pela quádrupla  $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, V_t, \mathbf{W}_t\}$ .
- Se  $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}, V, \mathbf{W}\}$ , então o modelo é chamado de constante.
- O modelo linear dinâmico constante engloba essencialmente todos os modelos lineares tradicionais de séries temporais.
- Modelos mais gerais podem ser propostos com  $\nu_t$  e  $\omega_t$  correlacionados. Porém esses novos modelos podem sempre ser reescritos satisfazendo as condições de independência, West e Harrison (1997).
- A informação inicial sobre  $\theta_t$  é representada por:



- O MLD é caracterizado pela quádrupla  $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, V_t, \mathbf{W}_t\}$ .
- Se  $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}, V, \mathbf{W}\}$ , então o modelo é chamado de constante.
- O modelo linear dinâmico constante engloba essencialmente todos os modelos lineares tradicionais de séries temporais.
- Modelos mais gerais podem ser propostos com  $\nu_t$  e  $\omega_t$  correlacionados. Porém esses novos modelos podem sempre ser reescritos satisfazendo as condições de independência, West e Harrison (1997).
- A informação inicial sobre  $\theta_t$  é representada por:
  - Informação Inicial:

$$(\theta_0|D_0) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0). \quad (3)$$





- O MLD é caracterizado pela quádrupla  $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, V_t, \mathbf{W}_t\}$ .
- Se  $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}, V, \mathbf{W}\}$ , então o modelo é chamado de constante.
- O modelo linear dinâmico constante engloba essencialmente todos os modelos lineares tradicionais de séries temporais.
- Modelos mais gerais podem ser propostos com  $\nu_t$  e  $\omega_t$  correlacionados. Porém esses novos modelos podem sempre ser reescritos satisfazendo as condições de independência, West e Harrison (1997).
- A informação inicial sobre  $\theta_t$  é representada por:
  - **Informação Inicial:**

$$(\theta_0|D_0) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0). \quad (3)$$







- A equação (1) é utilizada para calcular a distribuição da previsão da observação de  $Y_{t+1}$  dada a informação em  $t$ , ou a primeira previsão:

$$\begin{aligned}Y_{t+1} &= \mathbf{F}'\boldsymbol{\theta}_{t+1} + \nu_{t+1}, \\(Y_{t+1}|D_t) &\sim \mathbf{F}'\mathcal{N}_{(\boldsymbol{\theta}_{t+1}|D_t)}(\mathbf{a}_{t+1}, \mathbf{R}_{t+1}) + \mathcal{N}_{\nu_{t+1}}(0, V), \\(Y_{t+1}|D_t) &\sim \mathcal{N}(f_{t+1}, Q_{t+1}),\end{aligned}\tag{6}$$

onde  $f_{t+1} = \mathbf{F}'\mathbf{a}_{t+1}$  e  $Q_{t+1} = \mathbf{F}'\mathbf{R}_{t+1}\mathbf{F} + V$ .





## Previsões

- Para definir o  $k$ -ésimo valor predito, é necessário antes encontrar a distribuição de  $\theta_{t+k}$ .
- Para um valor de  $k \geq 2$ , Pole et al. (1994) mostra que:

$$(\theta_{t+k}|D_t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}_{t+k}, \mathbf{R}_{t+k}), \quad (8)$$

onde  $\mathbf{a}_{t+k} = \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{a}_{t+1}$  e

$$\mathbf{R}_{t+k} = \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{R}_{t+1} (\mathbf{G}^{k-1})' + \sum_{j=2}^k \mathbf{G}^{k-j} \mathbf{W} (\mathbf{G}^{k-j})'.$$

- Com isso, a distribuição da  $k$ -ésima predição dada a informação  $D_t$  será:

$$(Y_{t+k}|D_t) \sim \mathcal{N}(f_{t+k}, Q_{t+k}), \quad (9)$$

onde  $f_{t+k} = \mathbf{F}' \mathbf{a}_{t+k}$  e  $Q_{t+k} = \mathbf{F}' \mathbf{R}_{t+k} \mathbf{F}' + V$ .



## Previsões

- Para definir o  $k$ -ésimo valor predito, é necessário antes encontrar a distribuição de  $\theta_{t+k}$ .
- Para um valor de  $k \geq 2$ , Pole et al. (1994) mostra que:

$$(\theta_{t+k}|D_t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}_{t+k}, \mathbf{R}_{t+k}), \quad (8)$$

onde  $\mathbf{a}_{t+k} = \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{a}_{t+1}$  e

$$\mathbf{R}_{t+k} = \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{R}_{t+1} (\mathbf{G}^{k-1})' + \sum_{j=2}^k \mathbf{G}^{k-j} \mathbf{W} (\mathbf{G}^{k-j})'.$$

- Com isso, a distribuição da  $k$ -ésima predição dada a informação  $D_t$  será:

$$(Y_{t+k}|D_t) \sim \mathcal{N}(f_{t+k}, Q_{t+k}), \quad (9)$$

onde  $f_{t+k} = \mathbf{F}' \mathbf{a}_{t+k}$  e  $Q_{t+k} = \mathbf{F}' \mathbf{R}_{t+k} \mathbf{F}' + V$ .



## Previsões

- Para definir o  $k$ -ésimo valor predito, é necessário antes encontrar a distribuição de  $\theta_{t+k}$ .
- Para um valor de  $k \geq 2$ , Pole et al. (1994) mostra que:

$$(\theta_{t+k}|D_t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}_{t+k}, \mathbf{R}_{t+k}), \quad (8)$$

onde  $\mathbf{a}_{t+k} = \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{a}_{t+1}$  e

$$\mathbf{R}_{t+k} = \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{R}_{t+1} (\mathbf{G}^{k-1})' + \sum_{j=2}^k \mathbf{G}^{k-j} \mathbf{W} (\mathbf{G}^{k-j})'.$$

- Com isso, a distribuição da  $k$ -ésima predição dada a informação  $D_t$  será:

$$(Y_{t+k}|D_t) \sim \mathcal{N}(f_{t+k}, Q_{t+k}), \quad (9)$$

onde  $f_{t+k} = \mathbf{F}' \mathbf{a}_{t+k}$  e  $Q_{t+k} = \mathbf{F}' \mathbf{R}_{t+k} \mathbf{F}' + V$ .





## Modelo de Volatilidade Estocástica (MVE)

- MVE vs ARCH e GARCH.
- Bos (2012) cita que o MVE é pouco amigável.
  - ARCH e GARCH: Muitas variações do modelo, basicamente uma maneira de se estimar os parâmetros.
  - MVE: Basicamente uma definição do modelo, muitas maneiras de se estimar os parâmetros.



## Modelo de Volatilidade Estocástica (MVE)

- MVE vs ARCH e GARCH.
- Bos (2012) cita que o MVE é pouco amigável.
  - ARCH e GARCH: Muitas variações do modelo, basicamente uma maneira de se estimar os parâmetros.
  - MVE: Basicamente uma definição do modelo, muitas maneiras de se estimar os parâmetros.



## Modelo de Volatilidade Estocástica (MVE)

- MVE vs ARCH e GARCH.
- Bos (2012) cita que o MVE é pouco amigável.
  - ARCH e GARCH: Muitas variações do modelo, basicamente uma maneira de se estimar os parâmetros.
  - MVE: Basicamente uma definição do modelo, muitas maneiras de se estimar os parâmetros.







## Modelo Canônico

- Modelagem inicialmente proposta por Taylor (1982).
- Kim et al. (1998) definem o modelo canônico como:
- 

$$\psi = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2). \quad (12)$$

## Modelo Canônico

- Modelagem inicialmente proposta por Taylor (1982).
- Kim et al. (1998) definem o modelo canônico como:

$$\psi = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2). \quad (12)$$





## Modelo Canônico

- Modelagem inicialmente proposta por Taylor (1982).
- Kim et al. (1998) definem o modelo canônico como:

$$\text{Modelo Canônico : } \begin{cases} Y_t &= e^{\frac{h_t}{2}} \delta_t, \\ h_t &= \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \eta_t, \\ h_0 &\sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right). \end{cases} \quad (10)$$

- Os termos  $\delta_t$  e  $\eta_t$  são ruídos gaussianos, independentes no tempo e entre si, com distribuições:

$$\delta_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{e} \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2). \quad (11)$$

$$\psi = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2). \quad (12)$$







- Durbin e Koopman (2012) afirmam que isso não impede a utilização das técnicas associadas aos modelos gaussianos.
- Omori et al. (2007) sugere uma mistura de  $r = 10$  normais que se aproxima da distribuição do erro:

$$\ln \delta_t^2 \approx \xi_t = \sum_{j=1}^{10} w_j \mathcal{N}(m_j, s_j^2). \quad (14)$$



- Durbin e Koopman (2012) afirmam que isso não impede a utilização das técnicas associadas aos modelos gaussianos.
- Omori et al. (2007) sugere uma mistura de  $r = 10$  normais que se aproxima da distribuição do erro:

$$\ln \delta_t^2 \approx \xi_t = \sum_{j=1}^{10} w_j \mathcal{N}(m_j, s_j^2). \quad (14)$$



- Comparação entre as distribuições de  $\ln \delta_t^2$ , que é o verdadeiro erro do modelo, de  $\varepsilon_t$ , que corresponde à aproximação ingênua, e de  $\xi_t$ , que é a mistura de 10 normais sugerida.

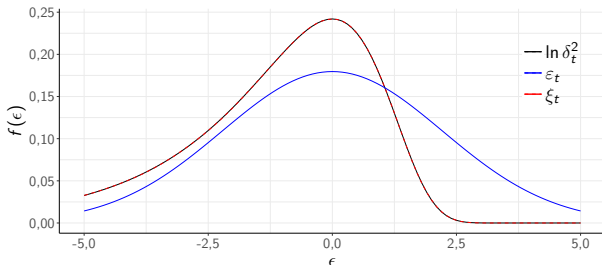


Figura: Comparação das distribuições de  $\ln \delta_t^2$ ,  $\varepsilon_t$  e  $\xi_t$ .



- A equação que define a evolução da variável latente,  $h_t$ , em (10) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}h_t &= \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \eta_t, \\h_t &= \mu - \phi\mu + \phi h_{t-1} + \eta_t, \\h_t &= (1 - \phi)\mu + \phi h_{t-1} + \eta_t.\end{aligned}\tag{15}$$

- Portanto (13) e (15) definem a equação das observações e a equação do sistema, respectivamente.







- Assim, a equação das observações do MVE será:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\theta}_t + \nu_t, \\ \ln Y_t^2 &= h_t + E(\ln \delta_t^2) + \varepsilon_t, \\ \ln Y_t^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_t \\ \mu \\ E(\ln \delta_t^2) \end{bmatrix} + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (16)$$



- Já a equação do sistema do MVE será:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_t &= \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, \\ h_t &= \phi h_{t-1} + (1 - \phi)\mu + \eta_t, \\ \begin{bmatrix} h_t \\ \mu \\ E(\ln \delta_t^2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi & 1 - \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{t-1} \\ \mu \\ E(\ln \delta_t^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)\end{aligned}$$



- O modelo de volatilidade estocástica é definido como um modelo de espaço-estado constante através das matrizes:

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_t = \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \phi & 1 - \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

$$V_t = V = \text{Var}(\varepsilon_t) \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_t = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$



## Definição do Modelo Bayesiano

- Como o paradigma Bayesiano sugere, deve-se definir as distribuições *a priori* dos parâmetros. Foram assumidas as distribuições *a priori* conforme Kastner e Frühwirth-Schnatter (2014) e Kim et al. (1998).
- O nível  $\mu$  da volatilidade tem seu suporte em  $\mathbb{R}$ , e será atribuída uma distribuição *a priori* com densidade gaussiana para o seu valor:

$$\mu \sim \mathcal{N}(a_\mu, B_\mu). \quad (20)$$



## Definição do Modelo Bayesiano

- Como o paradigma Bayesiano sugere, deve-se definir as distribuições *a priori* dos parâmetros. Foram assumidas as distribuições *a priori* conforme Kastner e Frühwirth-Schnatter (2014) e Kim et al. (1998).
- O nível  $\mu$  da volatilidade tem seu suporte em  $\mathbb{R}$ , e será atribuída uma distribuição *a priori* com densidade gaussiana para o seu valor:

$$\mu \sim \mathcal{N}(a_\mu, B_\mu). \quad (20)$$



- O parâmetro  $\phi$  determina a persistência da volatilidade, e  $|\phi| < 1$ . Seja uma nova variável  $\phi_0$  cuja distribuição *a priori* é  $\mathcal{B}(a_\phi, b_\phi)$ .
- A persistência então será  $\phi = 2\phi_0 - 1$  e sua distribuição *a priori* será:

$$\pi(\phi) = \frac{\Gamma(a_\phi + b_\phi)}{2\Gamma(a_\phi)\Gamma(b_\phi)} \left(\frac{1+\phi}{2}\right)^{a_\phi-1} \left(\frac{1-\phi}{2}\right)^{b_\phi-1}. \quad (21)$$



- O parâmetro  $\phi$  determina a persistência da volatilidade, e  $|\phi| < 1$ . Seja uma nova variável  $\phi_0$  cuja distribuição *a priori* é  $\mathcal{B}(a_\phi, b_\phi)$ .
- A persistência então será  $\phi = 2\phi_0 - 1$  e sua distribuição *a priori* será:

$$\pi(\phi) = \frac{\Gamma(a_\phi + b_\phi)}{2\Gamma(a_\phi)\Gamma(b_\phi)} \left(\frac{1+\phi}{2}\right)^{a_\phi-1} \left(\frac{1-\phi}{2}\right)^{b_\phi-1}. \quad (21)$$





- O terceiro e último parâmetro do modelo é  $\sigma_\eta^2$ , a variância da volatilidade, e seus possíveis valores estão em  $\mathbb{R}^+$ . Sua distribuição *a priori* será:

$$\sigma_\eta^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2B_\sigma}\right). \quad (22)$$



# Estudo de Simulação

- Foi realizado um estudo com dados simulados para avaliar um processo de estimação dos parâmetros.
- Foram geradas 64 populações ( $n = 1461$ ) com cada combinação dos valores resultantes do produto cruzado de:
  - $\mu \in \{-5, 4\}$ ,
  - $\phi \in \{0, 0, 0, 65; 0, 99\}$ ,
  - $\sigma_{\eta}^2 \in \{0, 1^2; 0, 3^2; 0, 5^2\}$ .



# Estudo de Simulação

- Foi realizado um estudo com dados simulados para avaliar um processo de estimação dos parâmetros.
- Foram geradas 64 populações ( $n = 1461$ ) com cada combinação dos valores resultantes do produto cruzado de:
  - $\mu \in \{-5, 4\}$ ,
  - $\phi \in \{0, 0; 0, 65; 0, 99\}$ ,
  - $\sigma_{\eta}^2 \in \{0, 1^2; 0, 3^2; 0, 5^2\}$ .



# Estudo de Simulação

- Foi realizado um estudo com dados simulados para avaliar um processo de estimação dos parâmetros.
- Foram geradas 64 populações ( $n = 1461$ ) com cada combinação dos valores resultantes do produto cruzado de:
  - $\mu \in \{-5,4\}$ ,
  - $\phi \in \{0,0; 0,65; 0,99\}$ ,
  - $\sigma_{\eta}^2 \in \{0,1^2; 0,3^2; 0,5^2\}$ .



# Estudo de Simulação

- Foi realizado um estudo com dados simulados para avaliar um processo de estimação dos parâmetros.
- Foram geradas 64 populações ( $n = 1461$ ) com cada combinação dos valores resultantes do produto cruzado de:
  - $\mu \in \{-5, 4\}$ ,
  - $\phi \in \{0, 0; 0, 65; 0, 99\}$ ,
  - $\sigma_{\eta}^2 \in \{0, 1^2; 0, 3^2; 0, 5^2\}$ .

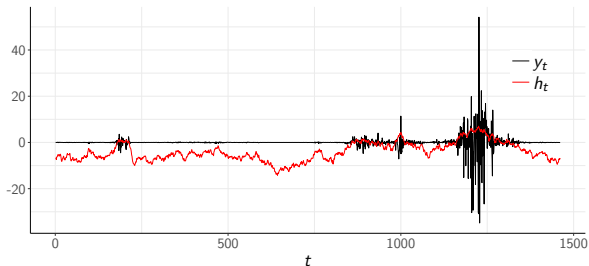


# Estudo de Simulação

- Foi realizado um estudo com dados simulados para avaliar um processo de estimação dos parâmetros.
- Foram geradas 64 populações ( $n = 1461$ ) com cada combinação dos valores resultantes do produto cruzado de:
  - $\mu \in \{-5, 4\}$ ,
  - $\phi \in \{0, 0; 0, 65; 0, 99\}$ ,
  - $\sigma_{\eta}^2 \in \{0, 1^2; 0, 3^2; 0, 5^2\}$ .



- Um exemplo de um conjunto de dados simulados.



**Figura:** Conjunto de dados simulados a partir do modelo (10),  $\mu = -5,4$ ,  $\phi = 0,99$  e  $\sigma_\eta^2 = 0,5^2$ .



# Amostrador de Gibbs via JAGS

- O método de estimação testado será baseado no amostrador de Gibbs via JAGS.
- JAGS (***J**ust **A**nother **G**ibbs **S**ampler*).
- Por que JAGS?
  - Desenvolvimento.
  - Integração.
- Sintaxe parecida com R.





## Amostrador de Gibbs via JAGS

- O método de estimação testado será baseado no amostrador de Gibbs via JAGS.
- JAGS (***J**ust **A**nother **G**ibbs **S**ampler*).
- Por que JAGS?
  - Desenvolvimento.
  - Integração.
- Sintaxe parecida com R.



## Amostrador de Gibbs via JAGS

- O método de estimação testado será baseado no amostrador de Gibbs via JAGS.
- JAGS (***J**ust **A**nother **G**ibbs **S**ampler*).
- Por que JAGS?
  - Desenvolvimento.
  - Integração.
- Sintaxe parecida com R.



## Amostrador de Gibbs via JAGS

- O método de estimação testado será baseado no amostrador de Gibbs via JAGS.
- JAGS (***J**ust **A**nother **G**ibbs **S**ampler*).
- Por que JAGS?
  - Desenvolvimento.
  - Integração.
- Sintaxe parecida com R.



## Amostrador de Gibbs via JAGS

- O método de estimação testado será baseado no amostrador de Gibbs via JAGS.
- JAGS (***J**ust **A**nother **G**ibbs **S**ampler*).
- Por que JAGS?
  - Desenvolvimento.
  - Integração.
- Sintaxe parecida com R.



## Amostrador de Gibbs via JAGS

- O método de estimação testado será baseado no amostrador de Gibbs via JAGS.
- JAGS (***J**ust **A**nother **G**ibbs **S**ampler*).
- Por que JAGS?
  - Desenvolvimento.
  - Integração.
- Sintaxe parecida com R.



- Procedimento:

- *burn-in* = 5.000.
- iterações = 10.000.
- *thin* = 10.
- Distribuições *a priori* dos parâmetros:

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, 100), \quad \phi_0 \sim \mathcal{B}(1, 1) \quad \text{e} \quad \sigma_\eta^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (23)$$



- Procedimento:

- *burn-in* = 5.000.
- iterações = 10.000.
- *thin* = 10.
- Distribuições *a priori* dos parâmetros:

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, 100), \quad \phi_0 \sim \mathcal{B}(1, 1) \quad \text{e} \quad \sigma_\eta^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (23)$$



- Procedimento:

- *burn-in* = 5.000.
- iterações = 10.000.
- *thin* = 10.
- Distribuições *a priori* dos parâmetros:

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, 100), \quad \phi_0 \sim \mathcal{B}(1, 1) \quad \text{e} \quad \sigma_\eta^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (23)$$





- Procedimento:

- $burn-in = 5.000$ .
- $iterações = 10.000$ .
- $thin = 10$ .
- Distribuições *a priori* dos parâmetros:

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, 100), \quad \phi_0 \sim \mathcal{B}(1, 1) \quad \text{e} \quad \sigma_\eta^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (23)$$



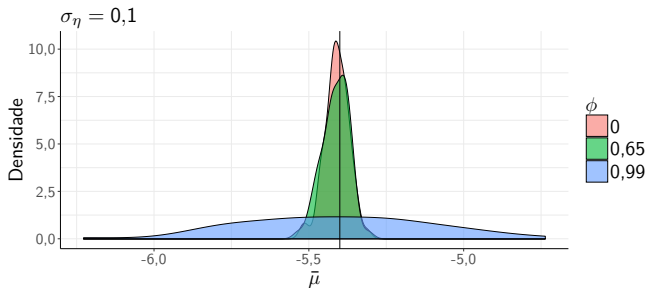
- Procedimento:

- $burn-in = 5.000$ .
- $iterações = 10.000$ .
- $thin = 10$ .
- Distribuições *a priori* dos parâmetros:

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, 100), \quad \phi_0 \sim \mathcal{B}(1, 1) \quad \text{e} \quad \sigma_\eta^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (23)$$

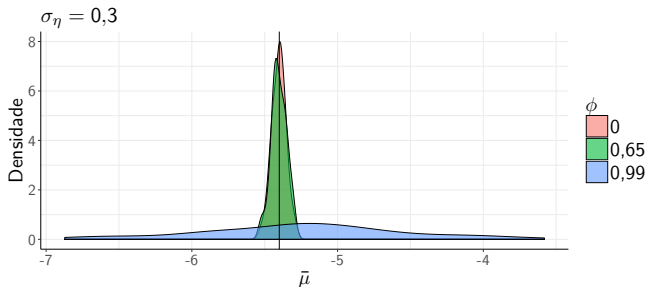


## Resultados



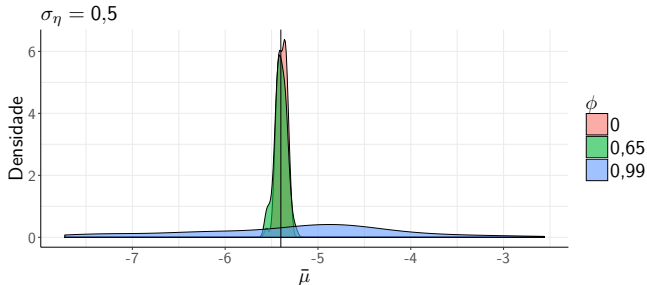
**Figura:** Valores de  $\bar{\mu}$  estimados através do amostrador de Gibbs para o conjunto das populações de dados simulados.





**Figura:** Valores de  $\bar{\mu}$  estimados através do amostrador de Gibbs para o conjunto das populações de dados simulados.



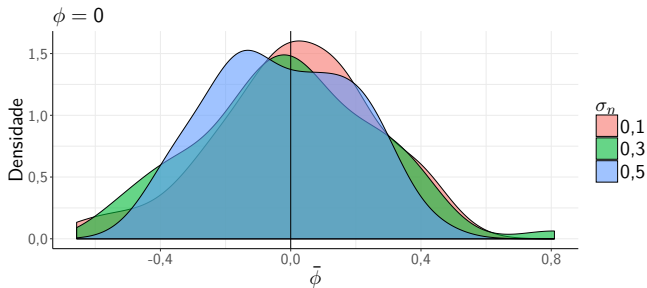


**Figura:** Valores de  $\bar{\mu}$  estimados através do amostrador de Gibbs para o conjunto das populações de dados simulados.





## Resultados



**Figura:** Valores de  $\bar{\phi}$  estimados através do amostrador de Gibbs para o conjunto das populações de dados simulados.



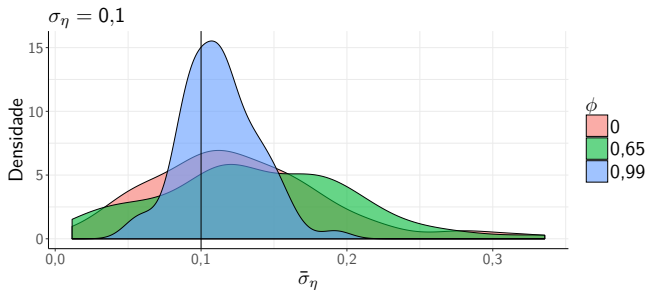








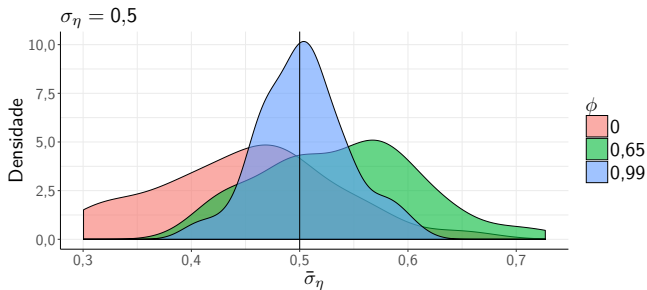
## Resultados



**Figura:** Valores de  $\bar{\sigma}_\eta$  estimados através do amostrador de Gibbs para o conjunto das populações de dados simulados.







**Figura:** Valores de  $\bar{\sigma}_\eta$  estimados através do amostrador de Gibbs para o conjunto das populações de dados simulados.



**Tabela:** Principais estatísticas dos valores estimados  $\bar{\sigma}_\eta$  através do amostrador de Gibbs para o conjunto de populações de dados simulados.

$\phi_{\text{real}}$	$\sigma_{\eta_{\text{real}}}$	média( $\bar{\sigma}_\eta$ )	mín( $\bar{\sigma}_\eta$ )	Md( $\bar{\sigma}_\eta$ )	máx( $\bar{\sigma}_\eta$ )	$\sigma_{\bar{\sigma}_\eta}$
0	0,1	0,126	0,012	0,118	0,323	0,061
0	0,3	0,247	0,053	0,271	0,527	0,104
0	0,5	0,451	0,300	0,454	0,658	0,082
0,65	0,1	0,137	0,013	0,128	0,336	0,067
0,65	0,3	0,314	0,097	0,333	0,527	0,100
0,65	0,5	0,539	0,412	0,546	0,727	0,072
0,99	0,1	0,113	0,055	0,112	0,192	0,026
0,99	0,3	0,310	0,258	0,308	0,372	0,030
0,99	0,5	0,504	0,404	0,501	0,604	0,041



## Exemplo com Dados Reais

- Replicação de (Achcar et al., 2011).
- Estudar a concentração de ozônio na Cidade do México.
- 16 anos (1/1/1990 a 31/12/2005) de medições da média semanal do nível diário máximo de ozônio em cinco regiões da cidade.
- Os autores propõe dois modelos.



## Exemplo com Dados Reais

- Replicação de (Achcar et al., 2011).
- Estudar a concentração de ozônio na Cidade do México.
- 16 anos (1/1/1990 a 31/12/2005) de medições da média semanal do nível diário máximo de ozônio em cinco regiões da cidade.
- Os autores propõe dois modelos.





## Exemplo com Dados Reais

- Replicação de (Achcar et al., 2011).
- Estudar a concentração de ozônio na Cidade do México.
- 16 anos (1/1/1990 a 31/12/2005) de medições da média semanal do nível diário máximo de ozônio em cinco regiões da cidade.
- Os autores propõe dois modelos.



## Exemplo com Dados Reais

- Replicação de (Achcar et al., 2011).
- Estudar a concentração de ozônio na Cidade do México.
- 16 anos (1/1/1990 a 31/12/2005) de medições da média semanal do nível diário máximo de ozônio em cinco regiões da cidade.
- Os autores propõe dois modelos.



# Modelo I

- No tempo  $t = 1, \dots, N$  e na região  $j = 1, \dots, K$ , como:

$$\text{Modelo I : } \begin{cases} Y_{j,t} \sim \mathcal{N}(0, e^{h_{j,t}}) \\ h_{j,t} = \begin{cases} \mu_j + \eta_{j,t}, & t = 1, \\ \mu_j + \phi_j(h_{j,t-1} - \mu_j) + \eta_{j,t}, & t = 2, \dots, N. \end{cases} \end{cases} \quad (24)$$



## Modelo II

- No tempo  $t = 1, \dots, N$  e na região  $j = 1, \dots, K$ , como:

$$\text{Modelo II : } \begin{cases} Y_{j,t} \sim \mathcal{N}(0, e^{h_{j,t} + \omega_t}). \\ h_{j,t} = \begin{cases} \mu_j + \eta_{j,t}, & t = 1, \\ \mu_j + \phi_j(h_{j,t-1} - \mu_j) + \eta_{j,t}, & t = 2, \dots, N, \end{cases} \\ \omega_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\omega^2). \end{cases} \quad (25)$$

- A distribuição *a priori* de  $\sigma_\omega^2$  é:

$$\sigma_\omega^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2B_{\sigma_\omega}}\right). \quad (26)$$



## Modelo II

- No tempo  $t = 1, \dots, N$  e na região  $j = 1, \dots, K$ , como:

$$\text{Modelo II : } \begin{cases} Y_{j,t} \sim \mathcal{N}(0, e^{h_{j,t} + \omega_t}). \\ h_{j,t} = \begin{cases} \mu_j + \eta_{j,t}, & t = 1, \\ \mu_j + \phi_j(h_{j,t-1} - \mu_j) + \eta_{j,t}, & t = 2, \dots, N, \end{cases} \\ \omega_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\omega^2). \end{cases} \quad (25)$$

- A distribuição *a priori* de  $\sigma_\omega^2$  é:

$$\sigma_\omega^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2B_{\sigma_\omega}}\right). \quad (26)$$



# Estimação

- O procedimento foi idêntico ao anterior com os dados simulados.
- Distribuição *a priori* de  $\sigma_\omega^2$ :

$$\sigma_\omega^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (27)$$



## Estimação

- O procedimento foi idêntico ao anterior com os dados simulados.
- Distribuição *a priori* de  $\sigma_\omega^2$ :

$$\sigma_\omega^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (27)$$









## Referências Bibliográficas I

- Achcar, J. A., Rodrigues, E. R., e Tzintzun, G. (2011). Using stochastic volatility models to analyse weekly ozone averages in Mexico City. *Environmental and Ecological Statistics*, 18(2):271–290.
- Bos, C. S. (2012). *Handbook of Volatility Models and their Applications*, chapter Relating Stochastic Volatility Estimation Methods, pages 147–174. John Wiley & Sons.
- Carter, C. K. e Kohn, R. (1994). On Gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, 81:541–553.
- Durbin, J. e Koopman, S. J. (1997). Monte Carlo maximum likelihood estimation for non-gaussian state-space models. *Biometrika*, 89:603–615.
- Durbin, J. e Koopman, S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford University Press, Oxford, 2nd edition.







## Referências Bibliográficas IV

Zivot, E. e Yollin, G. (2012). Time series forecasting with state space models. In *R/Finance Workshop, University of Chicago*.

