

**Fundação Getulio Vargas  
Escola de Matemática Aplicada**

**Wellington José**

**Resumo de Analise na Reta - Parte 2**

Rio de Janeiro  
2021

“Provas ficam a cargo do leitor”

## 1 Funções Contínuas

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida no intervalo  $I$ , se  $c \in I$ , dizemos que  $f$  é contínua em  $c$  quando  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . A função é contínua em  $I$  quando for contínua em todos os pontos.

**Teorema 1.1** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então  $f$  é limitada.*

**Teorema 1.2** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua,  $A = \inf \{f(t); t \in [a, b]\}$  e  $B = \sup \{f(t); t \in [a, b]\}$ . Existem então  $c, d \in [a, b]$  de modo que  $f(c) = A$  e  $f(d) = B$ .*

**Definição 1** *Uma partição  $\mathcal{B}$  de  $[a, b]$  é uma sequência finita de pontos  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k = b$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos a partição  $\mathcal{B}_n$  formada por intervalos de mesmo comprimento  $\frac{b-a}{n}$ .*

**Teorema 1.3** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $\varepsilon > 0$  qualquer. Então  $\exists n \in \mathbb{N}$  de modo que se  $x, y$  estão num certo intervalo de  $\mathcal{P}_n$  temos que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .*

Dizemos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua é uniformemente contínua quando, dado  $\varepsilon > 0$  qualquer,  $\exists \delta > 0$  tal que se  $|x - y| < \delta$  então  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

### 1.1 T.V.I.

**Lema 1.4** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $c \in I$ . Se  $f(c) > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que se  $|x - c| < \delta$  e  $x \in I$  então  $f(x) > 0$ .*

**Teorema 1.5** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Tome  $L \in (f(a), f(b))$ ,  $\exists c \in (a, b)$  de modo que  $f(c) = L$ .*

**Corolário 1.5.1** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, com  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Existe então  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .*

**Corolário 1.5.2** *Tome  $g(x) = x^n$ , com  $x \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Para qualquer  $L > 0$ ,  $\exists c > 0$  de modo que  $g(c) = L$ , ou seja,  $c^n = L$  ( $c$  é raiz  $n$ -ésima de  $L$ ).*

## 2 Derivadas e Integrais

**Definição 2** Dizemos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $a \in I$  quando existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , neste caso  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

obs.: se  $f$  é derivável em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ . E a inclinação da função no ponto  $a$  é dada por:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Propriedades Operacionais:

1. Se  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in I$ ,  $f$  e  $g$  deriváveis em  $c$  então  $(f + g)$  é derivável em  $c$  e  $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$  e  $f \cdot g$  é derivável em  $c$  e  $(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$ .
2. Suponhamos  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) \neq 0$  se  $x \in I$  e  $g$  é derivável em  $c$  então  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$  é derivável em  $c$  e  $f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ .
3. Seja  $f : (a, b) \rightarrow (A, B)$  função injetiva e sobrejetiva, e denotaremos por  $g : (A, B) \rightarrow (a, b)$  sua inversa. Se  $f$  é derivável e  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $g$  é derivável em  $(A, B)$  e  $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ .
4. (A Regra da Cadeia) Sejam  $f : I \rightarrow J$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deriváveis,  $I$  e  $J$  intervalos abertos e  $f(I) \subset J$ . Definimos a composta  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  como  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ . Então  $(g \circ f)$  é derivável e  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ .

### 2.1 Relações Com Máximos e Mínimos de Funções

Consideremos uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável num ponto interior  $c \in I$ . Suponhamos que exista  $\delta > 0$  de modo que  $(c - \delta, c + \delta) \subset I$  e  $f(x) \leq f(c)$ . Sempre que  $x \in (c - \delta, c + \delta)$  então diremos que  $c$  é um ponto de máximo local de  $f$  (análogo para o mínimo).

**Teorema 2.1** Se  $c \in I$  é ponto de máximo local, então  $f'(c) = 0$  (análogo para o mínimo).

**Teorema 2.2 (Rolle)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $f$  seja derivável em  $(a, b)$ . Caso  $f(a) = f(b)$ , então  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$*

**Teorema 2.3 (Valor Médio)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e derivável em  $(a, b)$ .  $\exists c \in (a, b)$  de modo que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .*

**Corolário 2.3.1** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  função localmente constante. Então  $f$  é constante.*

**Corolário 2.3.2 (Monotonicidade)** *Seja  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável.*

- *se  $g'(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ , então  $g$  é crescente.*  
*se  $g'(x) > 0$  para todo  $x \in I$ , então  $g$  é estritamente crescente.*
- *se  $g'(x) \leq 0$  para todo  $x \in I$ , então  $g$  é decrescente.*  
*se  $g'(x) < 0$  para todo  $x \in I$ , então  $g$  é estritamente decrescente.*

## 2.2 Áreas e Derivadas

Vamos usar a noção intuitiva de área para regiões associada ao gráfico de uma função contínua e positiva  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . A região em questão está limitada pelo eixo horizontal, o gráfico de  $f$  e as verticais pelos pontos  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$  denotamos por  $A(x)$  sua área.

**Definição 3**  *$A(x)$  é derivável e  $A'(x) = f(x)$ . (a formulação rigorosa será apresentada a frente)*

**Definição 4 (Função logaritmo)** *Consideremos  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ , e tomemos a região delimitada pelo gráfico de  $g$ , o eixo horizontal e as verticais por  $(1, 0)$  e  $(x, 0)$ , seja  $A(x)$  sua área. Se  $x \geq 1$ ,  $\log x := A(x)$ , se  $0 < x \leq 1$ ,  $\log x := -A(x)$*

**Definição 5 (Função exponencial)** *Seja  $a > 0$ , então  $a^x := e^{x \log a}$*

## 2.3 Derivadas Sucessivas

Se a função  $f$  é derivável  $k$  vezes podemos escrever a  $i$ -ésima derivada de  $f$  em  $x$  como  $f^{(i)}(x)$ .

**Teorema 2.4** *As funções apresentadas (polinômios, funções trigonométricas, racionais, logaritmo, exponencial) são infinitamente deriváveis em seu domínio de definição.*

**Lema 2.5** *Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e duas vezes derivável em  $c \in (a, b)$ . Suponhamos  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) > 0$  ( $f''(c) < 0$ ). Então  $c$  é ponto de mínimo local (máximo local).*

## 2.4 Convexidade de Função

**Definição 6** *Dizemos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente convexa para cima quando para quaisquer  $a < b \in I$  temos que  $f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$  para todo  $x \in (a, b)$ . E  $f$  é estritamente convexa para baixo quando para quaisquer  $a < b \in I$  temos que  $f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$  para todo  $x \in (a, b)$ .*

**Teorema 2.6** *Suponhamos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  seja duas vezes derivável. Se  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) para todo  $x \in I$  então  $f$  é estritamente convexa para cima (estritamente convexa para baixo).*

**Lema 2.7** *Seja  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes derivável. Suponhamos  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  e  $\varphi''(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ . Então  $\varphi(x) < 0 \forall x \in (a, b)$ .*

## 3 Integral de Riemann

Consideremos uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e uma partição  $\mathcal{P} : a = t_0 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$  do intervalo  $[a, b]$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Definição 7** *A soma inferior de  $f$  relativa à partição  $\mathcal{P}$  é  $s(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n (\inf\{f(t); t_{i-1} \leq t \leq t_i\})(t_i - t_{i-1})$  e a soma superior de  $f$  relativa à partição  $\mathcal{P}$  é  $S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n (\sup\{f(t); t_{i-1} \leq t \leq t_i\})(t_i - t_{i-1})$*

Temos  $s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$

**Definição 8**  $\exists \int_a^b f := \sup\{s(f, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição}\}$  e  $\exists \overline{\int_a^b f} := \inf\{S(f, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição}\}$   
**integral inferior** de  $f$  em  $[a, b]$  e **integral superior** de  $f$  em  $[a, b]$ , respectivamente.

**Lema 3.1**  $\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}$

**Definição 9**  $f$  é **integrável** quando  $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$  o valor comum é denotado por  $\int_a^b f$  e convencionamos  $\int_a^b f := -\int_b^a f$ .

**Teorema 3.2** Funções contínuas são integráveis.

### 3.1 Teorema Fundamental do Cálculo

**Lema 3.3** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável.  $\forall x \in (a, b)$ ,  $f|_{[a, b]}$  e  $f|_{[c, b]}$  são integráveis. Além disso,  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

**Teorema 3.4 (Teorema Fundamental do Cálculo)** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $F(x) := \int_a^x f$ . Se  $f$  é contínua em  $c \in [a, b]$ , então  $F$  é derivável em  $c$  e  $F'(c) = f(c)$ .

**Definição 10**  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **primitiva** de  $g$  quando  $G'(x) = g(x)$  em  $[a, b]$ .

**Lema 3.5** Se  $f$  é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, então  $f$  possui primitiva  $F(x) = \int_a^x f$ . Tomando  $\overline{F}$  qualquer outra primitiva (acrescentando uma constante), temos que  $\overline{F}(x) = F(x) + \overline{F}(0)$ , e portanto  $\overline{F}(b) - \overline{F}(a) = \int_a^b f$ .

### 3.2 Operações com Integrais

Proposições: Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis.

- $f + g$  e  $f \cdot g$  são integráveis e  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Se  $|f(x)| \geq k > 0 \forall x \in [a, b]$  e algum  $k > 0$ , então  $\frac{1}{f(x)}$  é integrável.

- $|f|$  é integrável e  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

**Definição 11** Quando  $\int_0^\infty |f(x)|dx$  (ou  $\int_a^b |f(x)|dx$ ) existe, dizemos que a integral é **absolutamente convergente**. E a integral também é **convergente**.

### 3.3 Fórmula de Taylor (versão infinitesimal)

Consideremos  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  função  $n - 1$  vezes derivável em  $(a, b)$  e  $n$  vezes derivável em  $c \in (a, b)$ .

**Definição 12** Definimos o **polinômio de Taylor de  $f$  de ordem  $n$  centrado em  $c$**  como

$$T_{f,c}^n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(c)}{j!} (x - c)^j$$

**Teorema 3.6** Seja  $r(x) := f(x) - T_{f,c}^n(x)$ . Então  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{r(x)}{(x - c)^n} = 0$

### 3.4 Fórmula de Taylor, versão integral

**Teorema 3.7** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $n + 1$  vezes derivável, e  $c \in [a, b]$ . Então  $f(x) = T_{f,c}^n(x) + r_n(x)$ , onde  $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ .

**Corolário 3.7.1** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  vezes derivável no ponto  $c \in [a, b]$ . Se  $p(x)$  é polinômio de grau  $n$  t.q.  $f(x) = p(x) + S(x)$  com  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{S(x)}{(x - c)^n} = 0$ , então  $T_{f,c}^n(x) = p(x)$ .

## 4 Séries

**Definição 13** Consideremos a sequência  $(a_j)$  e formemos a nova sequência  $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$  ela se denomina **série**, e caso seja convergente, escrevemos  $\sum_{j=1}^\infty a_j := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

**Teorema 4.1** Se  $\sum |a_j|$  é convergente então  $\sum a_j$  é também convergente.

**Definição 14**  $\sum a_n$  **converge absolutamente** quando  $\sum |a_n|$  for convergente.

**Teorema 4.2 (Critério de d'Alembert)** Se existe  $0 \leq c \leq 1$  t.q.  $|a_{n+1}| \leq c|a_n|$  a partir de algum  $n_0$ , então  $\sum a_n$  é absolutamente convergente.

## 4.1 Séries de Potências

Vamos tratar o caso particular de séries do tipo  $\sum a_n(x - c)^n$ , diremos que está é uma **série de potências** centrada em  $c$ . Queremos encontrar valores de  $x$  para os quais a série converge, no caso  $c = 0$  observe que  $\sum a_n x^n$  é sempre convergente em 0.

**Teorema 4.3** Suponhamos que  $\exists x_0 \neq 0$  t.q.  $\sum a_n x_0^n$  seja convergente.  $\exists R > 0$  de modo que  $\sum a_n x^n$  converge em  $(-R, R)$  e diverge em  $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$  (podendo ser  $R = \infty$ ).

**Teorema 4.4** Seja  $[-b, b] \subset (-R, R)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$  t. q.  $n_0 > n \Rightarrow |\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j x^j| < \varepsilon$  para  $x \in [-b, b]$ .

**Definição 15** Tomando  $s(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ ,  $s_m(x) := \sum_{j=0}^m a_j x^j$  para  $x \in (-R, R)$ , temos que  $\forall x \in (-R, R) : \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = s(x)$ , então a série  $s_m$  **converge uniformemente para  $s$**  em um intervalo  $[-b, b] \subset (-R, R)$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$  qualquer,  $\exists N \in \mathbb{N}$  t.q.  $|s(x) - s_m(x)| < \varepsilon$  se  $m > N$  e  $x \in [-b, b]$  (intervalo limitado fechado de  $(-R, R)$ ).

**Teorema 4.5** Da definição 15, temos que,  $s(x)$  é contínua em  $(-R, R)$ .

**Teorema 4.6 (Integração termo a termo)**  $\int_0^x s(t)dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^x a_j t^j dt$  para  $x \in (-R, R)$ .

**Teorema 4.7 (Derivação termo a termo)**  $s'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$  para  $x \in (-R, R)$ .

**Definição 16 (geral)** Sejam  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  sequência de função e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $f_n$  **converge uniformemente** para  $f$  quando dado  $\varepsilon > 0$  qualquer,  $\exists N \in \mathbb{N}$  de modo que  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  se  $n > N$  e para todo  $x \in I$ .



Temos os seguintes teoremas correspondentes ao caso das séries. Suponhamos então  $f_n \rightarrow f$  em  $I$ .

**Teorema 4.8** *Se  $f_n$  é contínua  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então  $f$  é contínua.*

**Teorema 4.9** *Fixemos  $a \in I$ ,  $f_n$  contínua  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Então  $\int_a^x f_n(t)dt \rightarrow \int_a^x f(t)dt \forall x \in I$ .*

**Teorema 4.10** *Suponhamos  $f_n$  deriváveis, e que  $f'_n$  sejam contínuas. Se  $f'_n \rightarrow g$  converge uniformemente, então  $g = f'$ , isto é,  $\frac{d}{dx}f_n(x) \rightarrow \frac{d}{dx}f(X)$ .*