Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de cálculo em várias variáveis

Rio de Janeiro
2021

Capítulo 16 - Cálculo Vétorial

16.1 - Campos Vetoriais

Definição 1 *Seja E um conjunto em $\mathbf{R}^n$. Um campo vetorial em $\mathbf{R}^n$ é uma função F que associa a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ um vetor $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Definição 2 (Campo vetorial gradiente) *Se $f : E \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, o campo vetorial gradiente é dado por:*

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)j_1 + \cdots + f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)j_n$$ [1]

16.2 - Integrais de Linha

Definição 3 (integral de linha sobre curva) *Se f é definida sobre uma curva suave C dada por uma equação paramétrica da forma $x = x(t), y = y(t)$ com $a \leq t \leq b$. Então a integral de linha de f sobre C é:*

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f({x_i}^*, {y_i}^*)\Delta s_i$$

ou usando a seção 10.2

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

Integral de linha com relação ao comprimento do arco

Podemos escrever integral de linha em função de $t : x = x(t), y = y(t), dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$ ficando com:

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt$$

[1] Note que, f_x é a derivada de f em relação a x

Integrais de Linha no Espaço

De forma análoga a integrais duplas

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$$

e

$$\int_C f(x,y,z)dz = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

Integrais de Linha de Campos Vetorias

Seja F um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $r(t), a \leq t \leq b$. Então, a integral de linha de F ao longo de C é

$$\int_C F dr = \int_a^b F(r(t)).r'(t)dt = \int_C F.T ds$$

onde $T(x,y,z)$ é o vetor tangente unitário no ponto $(x,y,z) \in C$.

16.3 - O Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Teorema 0.1 *Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $r(t), a \leq t \leq b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então*

$$\int_C \nabla f.dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

obs.: Lembre-se que, $\nabla f = \mathbf{F}$

Independência do Caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes que tem mesmos pontos iniciais e finais A e B, se ∇f é contínua então

$$\int_{C_1} \nabla f.dr = \int_{C_2} \nabla f.dr$$

Teorema 0.2 *$\int_C F.dr$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C F.dr = 0$ para todo caminho fechado $C \in D$.*

Teorema 0.3 *Suponha que F seja um campo vetorial contínuo em uma região aberta conexa por caminhos D. Se $\int_C F.dr$ for independente do caminho em D, então F é um campo vetorial conservativo em D, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = F$.*

Teorema 0.4 *Se $F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Teorema 0.5 *Seja $F = Pi + Qj$ um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa D. Suponha que P e Q tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Em todo D, então F é conservativo.

16.4 - Teorema de Green

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral sobre a região do plano D delimitada de C.

Teorema 0.6 (Teorema de Green) *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se F_1 e F_2 têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então*

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

Corolário 0.6.1 *Do Teorema de Green podemos tirar a área de D*

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

obs.: $\oint_C F_1dx + F_2dy$ indica que a integral de linha é calculada usando a orientação positiva da curva fechada C.

16.5 - Rotacional e Divergente

Rotacional

Se $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de F_1, F_2 e F_3 existem, então o **rotacional** de **F** é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Ou,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Teorema 0.7 *Se f é uma função de três variáveis e tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então*

$$rot(\nabla f) = 0$$

Teorema 0.8 *Se $\boldsymbol{F}$ for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções F_1, F_2 e F_3 possuem derivadas de segunda ordem contínuas e rot $\boldsymbol{F} = 0$, então $\boldsymbol{F}$ será um campo vetorial consecutivo.*

Divergente

Se $F = F_1i + F_2j + F_3k$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e F_1, F_2, F_3 possuem derivadas, então o **divergente** de F é

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Teorema 0.9 *Se $F = F_1i + F_2j + F_3k$ é campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e F_1, F_2, F_3 têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então*

$$div\ rot\ F = 0$$

16.6 - Superfícies Parametrizadas e suas Áreas

Podemos descrever uma superfície por uma função vetorial de dois parâmetros u e v, em vez de apenas um único t.

$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$$

Superfícies de Revolução

Uma superfície de revolução num certo eixo x, com uma função f:

$$x = x, y = f(x)\cos\theta, z = f(x)\sin\theta$$

Planos Tangentes

O plano tangente de uma certa função vetorial $r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$, no ponto P_0 com vetor posição $r(u_0,v_0)$ é dada por:

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)k$$

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)k$$

Onde o vetor normal do plano tangente é dado por $|r_v \times r_u| = \alpha i + \beta j + \gamma k$, note que α, β, γ estão em função de u, v.

E a equação do plano num ponto (x_0, y_0, z_0):

$$\alpha(u_0,v_0)(x - x_0) + \beta(u_0,v_0)(y - y_0) + \gamma(u_0,v_0)(z - z_0) = 0$$

Área da Superfície

Definição

Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação $r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$, com $(u,v) \in D$ e S é coberta uma única vez quando (u,v) abrange todo o domínio D parâmetros, então a área da superfície de S é:

$$A(S) = \iint_D |r_u \times r_v| dA$$

onde

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)k$$

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)k$$

Exemplo - Determine a área da esfera de raio a

Como foi visto no capítulo 15 temos as equações paramétricas:

$$x = a\sin\phi\cos\theta, y = a\sin\phi\sin\theta, z = a\cos\phi$$

O produto cruzado dos vetores tangentes:

$$r_\phi \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2\sin\phi^2\cos\theta i + a^2\sin\phi^2\sin\theta j + a^2\sin\phi\cos\phi k$$

Logo,

$$|r_\phi \times r_\theta| = \sqrt{a^4\sin\phi^4\cos\theta^2 + a^4\sin\phi^4\sin\theta^2 + a^4\sin\phi^2\cos\phi^2} = a^2\sin\phi$$

Uma vez que $\sin\phi \geq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$. Portanto, a área da esfera é

$$A = \iint_D |r_u \times r_v| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi d\phi d\theta = 4\pi a^2$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x,y)$, onde $(x,y) \in D$ e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x, y = y, z = f(x,y)$$

Então a área fica

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

16.7 - Integrais de Superfície

Superfícies parametrizadas

Dada uma superfície $r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$ com $(u,v) \in D$, a superfície é dada por:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(r(u,v))|r_u \times r_v|dA$$

Gráficos

Como caso particular se $z = f(x,y)$ podemos calcular a superfície com equações parametrizadas

$$x = x, y = y, z = f(x,y)$$

E a superfície fica:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Superfícies Orientadas

Dada uma superfície $z = g(x,y)$ orientada, onde sua orientação é dada pelo vetor unitário

$$n = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x} i - \dfrac{\partial g}{\partial y} j + k}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

E se S for uma superfície orientada suave com parametrização vetorial $r(u, v)$, então pode ser associada à orientação do vetor normal unitário.

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Se F for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário n, então a superfície integral de F sobre S é

$$\iint_S F dS = \iint_S F \cdot n dS$$

obs.: A integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à superfície de sua componente normal em S.

Se S é uma função vetorial dada por $r(u, v)$, então tomando D o domínio dos parâmetros:

$$\iint_S F dS = \iint_D F \cdot (r_u \times r_v) dA$$

16.8 - Teorema de Stokes

Sejam S uma superfície orientável de classe C^1, com bordo e orientado coerentemente e $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^1 definido em um domínio que contém S. Então

$$\int_{\partial S} F dr = \iint_S \text{rot} F \cdot dS = \iint_S \text{rot} F \cdot n dA$$

16.9 - Teorema do Divergente (ou Teorema de Gauss)

O Teorema do Divergente é uma generalização do Teorema de Green (16.5) para o espaço com certas hipóteses, para que vala

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_E \text{div } F(x, y, z) dV$$

Onde S é a superfície fronteira da região sólida E.

Teorema 0.10 (O Teorema do Divergente) *Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja F um espaço vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então*

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_E div\ F dV$$

16.10 - Resumo resumido do resumo

Teorema 0.11 (Teorema Fundamental do Cálculo)

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Teorema 0.12 (Teorema Fundamental para as Integrais de Linha)

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Teorema 0.13 (Teorema de Green)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy$$

,

Teorema 0.14 (Teorema de Stokes)

$$\iint_S rot\ F \cdot dS = \int_C F \cdot dr$$

Teorema 0.15 (Teorema de Gauss)

$$\iiint_E div\ F\ dV = \iint_S F \cdot dS$$