



## **Guía 7, Probabilidades**

*(Carrera: Ingenierías Civiles Varias)*

**TEMA:** Distribuciones de Probabilidad

1. Sea  $X$  una variable Aleatoria Binomial con  $n=15$  y  $p=0.25$ , entonces determine las siguientes probabilidades.
  - a.  $P(X \leq 5)$
  - b.  $P(X \geq 10)$
  - c.  $P(3 \leq X \leq 7)$
  - d.  $P(8 \leq X \leq 1000)$
2. Sea  $X$  una variable Aleatoria Binomial con  $n=25$  y  $p=0.8$ , entonces determine las siguientes probabilidades.
  - a.  $P(X \leq 5)$
  - b.  $P(X \geq 10)$
  - c.  $P(15 \leq X \leq 27)$
  - d.  $P(-5 \leq X \leq 20)$
3. Sea  $X$  una variable Aleatoria Binomial con  $n=18$  y  $p=0.3$ , entonces determine el valor de la variable aleatoria  $a$  de modo que la probabilidad sea:
  - a.  $P(X \leq a) = 0,9404$
  - b.  $P(X \geq a) = 0,0326$
  - c.  $P(3 \leq X \leq a) = 0,7718$
  - d.  $P(a \leq X \leq 13) = 0,1819$
4. Sea  $X$  una variable Aleatoria Poisson con  $\lambda = 2$ , entonces determine las siguientes probabilidades.
  - a.  $P(X \leq 5)$
  - b.  $P(X \geq 10)$
  - c.  $P(3 \leq X \leq 7)$
  - d.  $P(8 \leq X \leq 1000)$
5. Sea  $X$  una variable Aleatoria Poisson con  $\lambda = 8$ , entonces determine las siguientes probabilidades.
  - a.  $P(X \leq 5)$
  - b.  $P(X \geq 10)$
  - c.  $P(15 \leq X \leq 27)$
  - d.  $P(-5 \leq X \leq 20)$
6. Sea  $X$  una variable Aleatoria Poisson con  $\lambda = 5$ , entonces determine el valor de la variable aleatoria  $a$  de modo que la probabilidad sea:
  - a.  $P(X \leq a) = 0,4405$
  - b.  $P(X \geq a) = 0,1334$
  - c.  $P(3 \leq X \leq a) = 0,8616$
  - d.  $P(a \leq X \leq 13) = 0,7343$

7. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución Normal, con media 100 y varianza 25, determine las siguientes probabilidades:
  - a.  $P(X \leq 94)$
  - b.  $P(X \geq 110)$
  - c.  $P(97 \leq X \leq 104)$
  - d.  $P(85 \leq X \leq 115)$
  
8. Sea  $X \sim N(30, 9)$ , determine el valor de la variable aleatoria para las siguientes situaciones:
  - a.  $P(X \leq a) = 0,85$
  - b.  $P(X \geq a) = 0,25$
  - c.  $P(27 \leq X \leq b) = 0,6826$
  - d.  $P(a \leq X \leq 36) = 0,9544$
  
9. Sea  $X \sim N(50, 16)$ , determine el valor de las variables aleatorias que equidistan del centro, para las siguientes situaciones:
  - a.  $P(a \leq X \leq b) = 0,6826$
  - b.  $P(a \leq X \leq b) = 0,9544$
  - c.  $P(a \leq X \leq b) = 0,9$
  - d.  $P(a \leq X \leq b) = 0,75$
  
10. Para cada uno de los siguientes escenarios, establezca el modelo de probabilidades asociado a la variable aleatoria, e indique todas las suposiciones necesarias en cada caso:
  - a. Un proceso produce miles de transductores de temperatura. Sea  $X$ , el número de transductores que no cumplen con los requisitos de diseño de una muestra de 30 tomada al azar del proceso.
  - b. De un lote de 50 refractómetros, se toma una muestra de 30 sin reemplazo. Sea  $X$  el número de refractómetros de la muestra que no cumplen con los requisitos de diseño.
  - c. Cuatro componentes electrónicos idénticos, están conectados a un controlador que puede conmutar de un componente que falla a otro. Sea  $X$  el número de componentes que han fallado después de cierto tiempo de operación.
  - d. Sea  $X$  el número promedio de accidentes en una carretera, durante un mes.
  - e. Sea  $X$  el número de respuestas correctas que un estudiante resolvió en un examen de opción múltiple, en las que pudo eliminar en algunas preguntas varias opciones, y en otras, todas las opciones incorrectas.
  - f. Los defectos sobre la superficie de un chip semiconductor aparecen al azar. Sin embargo, sólo el 80% de los defectos puede detectarse mediante pruebas. Se toma una muestra al azar de 40 chips que tienen un defecto y se someten a la prueba. Sea  $X$  el número de chips en que se encuentra un defecto con la prueba.
  - g. Considere nuevamente la situación anterior. Suponga ahora que la muestra de 40 chips esta formada por chips, que tienen uno o cero defectos.
  - h. En una operación de llenado, se intenta llenar paquetes de detergente, de modo que tengan el peso señalado en la publicidad. Sea  $X$  el número de paquetes que pesan menos de lo señalado en la publicidad.
  - i. Los errores en un canal de comunicación digital se presentan en rachas que afectan de manera severa a varios bits consecutivos. Sea  $X$  el número de bits transmitidos erróneamente en el envío de 100000 bits.
  - j. Sea  $X$  el número de grietas superficiales de una bobina de grande de acero galvanizado.
  - k. Una máquina de llenado intenta llenar paquetes de detergente, de modo que tengan el peso señalado en publicidad. Sea  $X$  el peso real de los paquetes de detergente.
  - l. El número de fallas de un instrumento de prueba producidas por las partículas contaminantes de un producto, es una variable aleatoria con media 0.02 fallas por hora.
  - m. El número promedio de de errores en un libro de texto es de 0.01 errores por pagina.

11. De la producción de un día en una empresa de contrachapado, se toma una muestra aleatoria de 25 tableros que salen de prensa. Si se sabe que el 40% de los tableros que salen de prensa son aptos para recubrimiento de láminas o melamina, entonces respecto de los tableros no aptos para recubrimiento determine:
- ¿Cuál es la probabilidad que se encuentren al menos uno y menos de 21 tableros no aptos en la muestra? .
  - ¿Cuál es el coeficiente de variación de la variable aleatoria?
  - Determine el número de tableros no aptos para recubrimiento, sobre el cual se tiene el 25% de todos los tableros con esta característica.
  - Suponga que el precio de venta de un tablero recubierto es \$7000 y, si la calidad del tablero no es apta para recubrimiento, entonces su precio de venta sólo alcanza los \$4500. Determine:
    - Límites para el precio de venta de tableros no aptos para recubrimiento, de modo que entre estos límites se encuentre el costo de al menos el 80% central de tales tableros.
    - Límites para el precio de venta de tableros aptos para recubrimiento, de modo que entre estos límites se encuentre el costo de al menos el 80% central de tales tableros.
12. Mecanismos de dirección defectuosos han sido montados por error en tres misiles de un grupo de diez. No se sabe que misiles tienen los mecanismos defectuosos, si usted toma una muestra al azar de tres misiles sin reposición, determine:
- La probabilidad que la muestra no contenga misiles defectuosos.
  - La probabilidad de encontrar más de un misil defectuoso.
13. En un cierto servicio telefónico, la probabilidad de que una llamada sea contestada en menos de 30 segundos es de 0.75. Suponga que las llamadas son independientes.
- Si una persona llama 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente nueve de las llamadas sean contestadas en un espacio de 30 segundos?
  - Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 16 de las llamadas sean contestadas en menos de 30 segundos?
  - Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es el número promedio de llamadas que serán contestadas en menos de 30 segundos?
14. Dado que no todos los pasajeros de una aerolínea abordan el vuelo para el que han reservado un lugar, la aerolínea vende 125 boletos para un vuelo de 120 pasajeros. La probabilidad de que un pasajero no aborde el vuelo es 0.10. Si el comportamiento de los pasajeros es independiente, entonces:
- ¿Cuál es la probabilidad de que todos los pasajeros aborden el vuelo?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que el vuelo parta vacío?
15. En un proceso de producción una máquina es detenida para ajuste cuando una muestra al azar de cinco unidades, escogidas con sustitución, tiene dos o más unidades defectuosas. Demuestre que la probabilidad de que el proceso sea detenido después de una inspección, si está produciendo:
- Un 20% de unidades defectuosas es igual a 0.2627
  - Un 10% de unidades defectuosas es igual a 0.0815
  - Un 5% de unidades defectuosas es igual a 0.0226.
16. Considerar una oficina de correos con dos ventanillas. Si tres personas A, B y C entran simultáneamente. A y B son atendidos, y C espera hasta que bien A o B salga para poder realizar su gestión. ¿Cuál es la probabilidad de que A esté todavía en la oficina de correos después de que las otras dos personas se hayan ido cuando:
- El tiempo de servicio en cada ventanilla es exactamente de 10 minutos?
  - El tiempo de servicio es  $i$  con probabilidad  $1/3$ , si  $i=1,2,3$ ?
  - El tiempo de servicio es exponencial con media  $1/\lambda$ ?

17. Supongamos que  $X$  representa la cantidad de tiempo que una persona emplea en un banco, el cual está exponencialmente distribuida con media 10:
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente emplee más de 15 minutos en el banco?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente emplee más de 15 minutos, si ya ha empleado 10?
18. Supongamos que un equipo de alta fidelidad consta de dos partes principales: el amplificador y el módulo central. Si la vida media de ambas partes sigue una distribución exponencial con medias 1000 y 500 horas respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que el fallo del equipo se deba al módulo central?
19. Dos personas  $N$  y  $M$  entran a una barbería simultáneamente,  $N$  para un afeitado y  $M$  para un corte de pelo. Si la cantidad de tiempo para realizar un corte de pelo y un afeitado está exponencialmente distribuida con medias 20 y 15 minutos respectivamente, y si  $N$  y  $M$  son atendidos inmediatamente, ¿Cuál es la probabilidad de que  $M$  termine antes que  $N$ ?
20. Se sabe que la concentración de metales pesados en las aguas de un río donde se evacuan residuos de una industria metalúrgica es de  $0.2 \text{ grms/cm}^3$ .
  - a. ¿Cuál será la probabilidad de encontrar mas de un  $2 \text{ grms/cm}^3$  de concentración de metales pesados en una muestra de  $50 \text{ cm}^3$  de agua tomadas río abajo.
  - b. ¿Cuál será la probabilidad de encontrar menos de un  $5 \text{ grms/cm}^3$  de concentración de metales pesados en una muestra de  $25 \text{ cm}^3$  de agua.
  - c. Suponga que S.N.S. determina que el tamaño de la muestra para el estudio es muy pequeño y, condiciona el funcionamiento de la Industria a tomar una muestra al menos de tamaño  $500 \text{ cm}^3$ , en la cual se espera encontrar no más de  $25 \text{ grms}$  de metales pesados con una tolerancia de  $20\%$  . ¿Cuál es la probabilidad que la concentración de metales pesados se encuentre en el intervalo considerado como aceptable.?
21. Se sabe que la polilla del brote del pino se encuentra presente en 3 de cada 20 árboles examinados de pino. si se toman una muestra aleatoria de tamaño 100 árboles en una hectárea, determine:
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar más de 18 árboles infestados por la polilla ?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a lo más 7 árboles infestados por la polilla ?
  - c. ¿Cuál es el número esperado de árboles infestados por hectárea si hay 1 árbol por cada 4 metros cuadrados?
22. Suponga que  $X$  tiene una distribución Hípergeométrica con  $N=100$ ,  $n=4$ , y  $k=20$ . Calcule lo siguiente:
  - a.  $P(X = 1)$
  - b.  $P(X = 6)$
  - c.  $P(X = 4)$
  - d. Calcule la media y la varianza de  $X$ .
23. Una planta de Contrachapado quiere comprar un bosque nativo de más de 150 años de promedio de edad con una superficie de 500 hectáreas, además se sabe que cada  $8 \text{ m}^2$  hay un árbol, y que el  $60\%$  de la madera es coigüe. La empresa para tomar su decisión obtiene una muestra de 200 árboles para procesarlos y evaluar su rendimiento. Dada la información anterior responda lo siguiente:
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar más de 150 árboles de coigüe en la muestra ?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar más de 500 árboles de coigüe por hectárea ?

24. Se sabe que en un predio se encuentran en promedio 3 lombrices por cada 1000 cm<sup>3</sup>, y además que 1 de cada 3 lombrices son de tipo A y 2 de tipo B. Sabiendo que en un predio de 5 hectareas se toma una muestra aleatoria de tamaño 100, donde cada unidad contiene 15625 cm<sup>3</sup>.
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar menos de 5000 lombrices en la muestra. ?
  - ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a lo más 2000 lombrices de tipo A. ?
  - ¿Cuál es la probabilidad de encontrar más de 1500 y menos de 3500 lombrices de tipo B.?
  - ¿Cuál de los 2 tipos de lombrices tiene menor dispersión. ?
  - Calcule el Índice de Simetría de Pearson para los 2 tipos de lombrices.
  - Calcule el Índice de Curtosis que utiliza los percentiles para los 2 tipos de lombrices
25. Un Agricultor que siembra fruta afirma que 60% de su cosecha de duraznos ha sido contaminada por la mosca del mediterraneo. Si el agricultor toma una muestra aleatoria de 15 duraznos, entonces :
- ¿Cuál es la probabilidad que se encuentren más de 5 duraznos contaminados ?
  - ¿Cuál es la probabilidad que se encuentren 3 o más duraznos y menos de 12 duraznos contaminados. ?
  - Gráfique la función de masa de probabilidad.
  - Determine el Coeficiente de Variación.
  - Utilice el teorema de Chebyshev para interpretar  $\mu \pm 2\sigma$
26. 16. Dada una distribución Normal Estandar, encuentre los valores de K de tal forma que :
- $P(Z > K) = 0.3015$
  - $P(K < Z < -0.18) = 0.4197$
27. La compañía Alemana Gantt de instrumentos y tecnología para la madera fabrica Higrómetros (xiloigrómetros) digitales para medir contenido de humedad de madera aserrada. La duración de sus instrumentos está normalmente distribuida con una media igual o superior a 800 horas y una desviación estandar de 50 horas.
- ¿Cuál es la probabilidad que un higrómetro dure más de 900 horas.?
  - ¿Cuál es la probabilidad que un higrómetro dure más de 750 horas y menos de 850 horas.?
28. Se estima que en promedio que una máquina cosechadora puede sustituir 10000 horas/hombre, con probabilidad de 0.25 que el ahorro en el tiempo medio sea mayor que 10500 horas/hombre por semana. Suponga que este fenómeno se modela adecuadamente por una distribución Normal. ¿Cuál es la probabilidad que la máquina sustituya realmente al menos 9.000 horas hombre por semana.?
29. La vida promedio de un PC de la empresa armadora CHANCHIN COMPANY, es de 4 años con una desviación estándar de un año. Si el fabricante repone la máquina o alguna de sus partes durante el periodo de garantía y este sólo está dispuesto a reponer el 3% de las máquinas que fallan, entonces :Suponga normalidad en la vida de las máquinas.
- ¿Qué tan larga puede ser la garantía que otorgue.?
  - Un estudio que realiza el Departamento de Desarrollo revela que los PC CHANCHIN tienen un año más de vida promedio que los PC de las empresas armadoras de la competencia. Con estos antecedentes, el depto de Desarrollo se pregunta, ¿cuál es el valor de la dispersión para que al disminuir la vida promedio en un año, la garantía en años y el porcentaje de reposición permanezcan constantes.? ¿Cree Ud que la idea planteada por el Departamento de Desarrollo es conveniente para la compañía.?

- 30.** En una cierta fabricación mecánica el 96% de las piezas resultan con longitudes admisibles (dentro de las tolerancias), un 3% defectuosas cortas y un 1% defectuosas largas. Determine la probabilidad que:
- a.** En un lote de 250 piezas sean admisibles 242 o más piezas.
  - b.** En un lote de 500 piezas, sean cortas 10 o menos.
  - c.** En 1000 piezas haya entre 6 y 12 piezas largas. Asuma distribución normal para las longitudes.
- 31.** Una empresa recibe piezas de un proveedor en lotes de 2000 que se someten al siguiente control de calidad: se toman 20 al azar y si hay más de una defectuosa se rechaza el lote; en otro caso se acepta. La calidad garantizada por el proveedor es un 8 por mil defectuosas. Calcular la probabilidad que:
- a.** Aceptar un lote que contenga un 2% de defectuosas.
  - b.** Rechazar un lote que debería ser aceptado al tener solo el 8 por mil defectuosas.