

## Decimotercera clase

**Mas heurísticas para este boletín!!!**

---

Modelos y Optimización I

### Problema de Distribución o Transporte

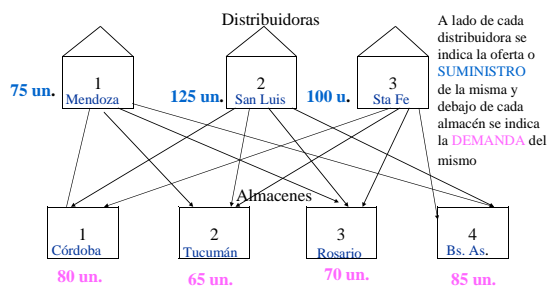
Recordamos el ejemplo que vimos en el material previo a la quinta clase por la web, en el cual los orígenes o suministros son tres distribuidoras (Mendoza, San Luis y Santa Fe) que tienen disponible determinada cantidad de producto y los destinos son cuatro almacenes (Córdoba, Tucumán, Rosario y Buenos Aires) que demandan determinada cantidad de ese mismo producto

Cualquier origen puede enviar producto a cualquiera de los destinos (todos se conectan con todos)

---

Modelos y Optimización I

### Problema de Distribución o Transporte




---

Modelos y Optimización I

### Costo de transporte

En la tabla se indica el costo de transportar una unidad desde el origen  $i$  hasta el destino  $j$

Distribuidora		Almacén				Oferta
		Cba. 1	Tucumán 2	Rosario 3	Bs. As. 4	
Mendoza	1	464	513	654	867	75
San Luis	2	352	416	690	791	125
Sta. Fe	3	995	682	388	685	100
Demandas		80	65	70	85	300

---

Modelos y Optimización I

### Problema de Distribución o Transporte

En nuestro ejemplo la demanda total y la oferta total suman igual (300 unidades).

Si no fuera así habría que agregar un origen ficticio (en el caso en el cual la demanda supera la oferta) que tenga disponibles la cantidad de unidades que faltan o un destino ficticio (en el caso en el cual la oferta supera a la demanda) que demande las unidades que sobran

Los costos de transporte vinculados con orígenes o destinos ficticios son CERO

---

Modelos y Optimización I

### Problema de Distribución o Transporte

- Definición.

El objetivo es determinar la cantidad de unidades de producto que cada origen envía a cada destino, para minimizar los costos de transporte totales

- Hipótesis principales:

- Producto homogéneo (estamos hablando del mismo producto en orígenes y destinos)
- Costos lineales.

---

Modelos y Optimización I

**Modelización del problema de Distribución o Transporte**

De acuerdo con el objetivo las variables serán:

$X_{ij}$ : cantidad de unidades que el origen  $i$  envía al destino  $j$

El funcional minimiza los costos totales:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 464 X_{11} + 513 X_{12} + 654 X_{13} + 867 X_{14} \\ & + 352 X_{21} + 416 X_{22} + 690 X_{23} + 791 X_{24} + 995 \\ & X_{31} + 682 X_{32} + 388 X_{33} + 685 X_{34} \end{aligned}$$

*Modelos y Optimización I*

**Modelización del problema de Distribución o Transporte**

Por cada origen hay que asegurar que se van a distribuir todas las unidades

Mendoza:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 75$$

San Luis:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 125$$

Santa Fe:

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 100$$

*Modelos y Optimización I*

**Modelización del problema de Distribución o Transporte**

Por cada destino hay que asegurar que le va a llegar todo lo pedido

Córdoba:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 80$$

Tucumán:

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 65$$

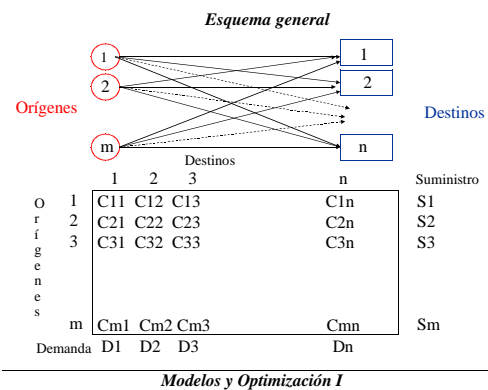
Rosario:

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$$

Buenos Aires:

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$$

*Modelos y Optimización I*

**El modelo de transporte (planteo genérico)**

- Asumiendo que  $\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$

- El planteo matemático es:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{ij} &= S_i \quad \text{para } i=1 \dots m & \sum_{i=1}^m X_{ij} &= D_j \quad \text{para } j=1 \dots n \\ X_{ij} &\geq 0 \quad \text{para todo } i \text{ y para todo } j \end{aligned}$$

*Modelos y Optimización I*

**Heurísticas de distribución**

Vamos a utilizar el mismo problema para resolverlo con heurísticas

Recordemos la matriz que tiene los costos de enviar una unidad de un origen a un destino, las tres ofertas y las cuatro demandas:

464	513	654	867	75
352	416	690	791	125
995	682	388	685	100
80	65	70	85	

*Modelos y Optimización I*

**Heurísticas de distribución**

- La idea de usar heurísticas en el problema de distribución es llegar de manera simple a una primera solución válida (en algunos casos, como la segunda y la tercera heurística que veremos, se trata de que esa solución sea también una buena solución)
- ¿Por qué se necesita hacer esto? Porque, como vimos, todas las restricciones del problema son igualdades, y si lo resolvemos por el método simplex tenemos que agregar una variable artificial por cada una, con lo que tendrían que pasar al menos 7 tablas (en el caso de este problema) hasta que encontremos una solución válida. En problemas de tamaño mayor es peor. Así que se usa una modificación del método partiendo de una primera solución válida

Modelos y Optimización I

**Heurísticas de distribución**

- En cada una de las heurísticas van a encontrar una parte subrayada: esas son las reglas heurísticas
- El resto de la formulación de la heurística es igual para cada una de las heurísticas (es el mismo procedimiento siempre) porque es la forma de que se distribuyan todas las unidades (recordemos que antes controlamos que la oferta total quede igual que la demanda total, sino esto no se puede cumplir)
- Las heurísticas que vamos a ver son tres:
  - Regla del Noroeste
  - Costos mínimos progresivos
  - Método de aproximaciones de Vogel (VAM)

Modelos y Optimización I

**Heurísticas de distribución  
Regla del Noroeste**

Mientras queden celdas en la matriz

- Se elige la celda que ocupa la posición Noroeste de la matriz para darle valor distinto de cero.
  - En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna.
  - Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna.
  - Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz.
  - Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz.
- Fin mientras

Modelos y Optimización I

**Heurísticas de distribución  
Regla del Noroeste**

<del>464</del>	<del>513</del>	<del>654</del>	<del>867</del>	75	75				75
352	416	690	791	125					125
995	682	388	685	100					100
80	65	70	85		80	65	70	85	

- Se elige la celda que ocupa la posición Noroeste de la matriz para darle valor distinto de cero. (En este caso es la 1,1)
- En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (Entre 75 y 80 la menor es 75)
- Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (Se resta 75 de la disponibilidad de la fila y de la columna)
- Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (se tacha)
- Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (no se tacha)

Modelos y Optimización I

**Heurísticas de distribución  
Regla del Noroeste**

<del>464</del>	<del>513</del>	<del>654</del>	<del>867</del>	75	75				75
352	416	690	791	125	5				125
995	682	388	685	100					100
80	65	70	85		80	65	70	85	

- Se elige la celda que ocupa la posición Noroeste de la matriz para darle valor distinto de cero. (En este caso es la 2,1 porque la primera fila de la matriz se eliminó en el paso anterior)
- En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (Entre 125 y 5 la menor es 5)
- Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (Se resta 5 de la disponibilidad de la fila y de la columna)
- Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (no se tacha)
- Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (se tacha)

Modelos y Optimización I

**Heurísticas de distribución  
Regla del Noroeste**

<del>464</del>	<del>513</del>	<del>654</del>	<del>867</del>	75	75				75
352	416	690	791	125	5	65			120
995	682	388	685	100					55
80	65	70	85		80	65	70	85	

- Se elige la celda que ocupa la posición Noroeste de la matriz para darle valor distinto de cero. (En este caso es la 2,2 porque la primera columna de la matriz se eliminó en el paso anterior y la primera fila se había eliminado en el primer paso)
  - En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (Entre 120 y 65 la menor es 65)
  - Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (Se resta 65 de la disponibilidad de la fila y de la columna)
  - Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (no se tacha)
  - Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (se tacha)
- Y así sucesivamente...

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Costos Mínimos Progresivos

Mientras queden celdas en la matriz

- 1) Se elige la celda de menor costo de la matriz (si hay más de una con el mínimo costo se elige la de menor fila y si hay más de una se elige la de menor columna) para darle valor distinto de cero. (Es la celda 2,1)
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna.
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna.
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz.
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. Fin mientras

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Costos Mínimos Progresivos

464	513	654	867	75					75
352	416	690	791	125	80				125 45
995	682	388	685	100					100
80	65	70	85		80	65	70	85	

- 1) Se elige la celda de menor costo de la matriz (si hay más de una con el mínimo costo se elige la de menor fila y si hay más de una se elige la de menor columna) para darle valor distinto de cero. (Es la celda 2,1)
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (Entre 125 y 80 el menor es 80)
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (Se resta 80 de la disponibilidad de la fila y de la columna)
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (no se tacha)
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (se tacha)

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Costos Mínimos Progresivos

464	513	654	867	75					75
352	416	690	791	125	80				125 45
995	682	388	685	100			70		100 30
80	65	70	85		80	65	70	85	

- 1) Se elige la celda de menor costo de la matriz (si hay más de una con el mínimo costo se elige la de menor fila y si hay más de una se elige la de menor columna) para darle valor distinto de cero. (Es la celda 3,3)
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (Entre 100 y 70 el menor es 70)
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (Se resta 70 de la disponibilidad de la fila y de la columna)
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (no se tacha)
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (se tacha)

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Costos Mínimos Progresivos

464	513	654	867	75					75
352	416	690	791	125	80	45			125 45
995	682	388	685	100			70		100
80	65	70	85		80	65	70	85	

- 1) Se elige la celda de menor costo de la matriz (si hay más de una con el mínimo costo se elige la de menor fila y si hay más de una se elige la de menor columna) para darle valor distinto de cero. (Es la celda 2,2)
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (Entre 45 y 65 el menor es 45)
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (Se resta 45 de la disponibilidad de la fila y de la columna)
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (se tacha)
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (no se tacha)

Y así sucesivamente...

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Método "VAM"

Mientras queden celdas en la matriz

- 1a) Para cada fila y cada columna se calcula la diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo.
- 1b) Se elige la celda de menor costo de la fila o columna que tenga la mayor diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo para darle valor distinto de cero.
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna.
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna.
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz.
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. Fin mientras

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Método "VAM"

					112	97	266	106	
464	513	654	867	75	49				
352	416	690	791	125	64				
995	682	388	685	100	294		70		30
80	65	70	85						

- 1a) Para cada fila y cada columna se calcula la diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo. (Lo vemos en color violeta a la izquierda de cada fila y arriba de cada columna)
- 1b) Se elige la celda de menor costo de la fila o columna que tenga la mayor diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo para darle valor distinto de cero. (la mayor diferencia está en la tercera fila y la celda de menor costo de esa fila es la (3,2))
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (entre 100 y 70, el menor es 70)
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (se resta 70 de la disponibilidad de la fila 3 y de la disponibilidad de la columna 2)
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (no se tacha)
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (se tacha)

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Método "VAM"

464	513		867
352	416		791
995	682		685

	112	97	106	75
49				
64	80			125
3			70	45
	80	65	70	85
				30

- 1a) Para cada fila y cada columna se calcula la diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo. (Lo vemos en color violeta a la izquierda de cada fila y arriba de cada columna)
- 1b) Se elige la celda de menor costo de la fila o columna que tenga la mayor diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo para darle valor distinto de cero. (la mayor diferencia está en la primera columna y la celda de menor costo de esa columna es la (2,1))
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (entre 125 y 80, el menor es 80)
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (se resta 80 de la disponibilidad de la fila 2 y de la disponibilidad de la columna 1)
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (no se tacha)
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (se tacha)

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Método "VAM"

	513		867
	416		791
	682		685

		97	106	75
354				
375	80	45		45
3			70	30
	80	65	70	85
		20		

- 1a) Para cada fila y cada columna se calcula la diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo. (Lo vemos en color violeta a la izquierda de cada fila y arriba de cada columna)
- 1b) Se elige la celda de menor costo de la fila o columna que tenga la mayor diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo para darle valor distinto de cero. (la mayor diferencia está en la segunda fila y la celda de menor costo de esa fila es la (2,2))
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (entre 45 y 65, el menor es 45)
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (se resta 80 de la disponibilidad de la fila 2 y de la disponibilidad de la columna 2)
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (se tacha)
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (no se tacha)

Modelos y Optimización I

### Heurísticas de distribución Método "VAM"

	513		867
	682		685

	354	169	106	75
		20		55
	80	45		45
3			70	30
	80	20	70	85

- 1a) Para cada fila y cada columna se calcula la diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo. (Lo vemos en color violeta a la izquierda de cada fila y arriba de cada columna)
- 1b) Se elige la celda de menor costo de la fila o columna que tenga la mayor diferencia entre el segundo menor costo y el menor costo para darle valor distinto de cero. (la mayor diferencia está en la primera fila y la celda de menor costo de esa fila es la (1,2))
- 2) En la celda seleccionada se coloca una cantidad igual al menor valor entre la oferta de su fila y la demanda de su columna. (entre 75 y 80, el menor es 75)
- 3) Se resta la cantidad que se coloca en la celda de la disponibilidad de la fila y de la columna. (se resta 75 de la disponibilidad de la fila 1 y de la disponibilidad de la columna 2)
- 4) Si la fila quedó con oferta cero, se tacha la fila de la matriz. (no se tacha)
- 5) Si la columna quedó con demanda cero se tacha la columna de la matriz. (se tacha)

Y así sucesivamente...

Modelos y Optimización I

### Soluciones con las distintas Heurísticas de distribución

Regla del Noroeste

75			
5	65	55	
		15	85

Costos mínimos progresivos

	20		55
80	45		
		70	30

Método "VAM"

	20		55
80	45		
		70	30

Modelos y Optimización I

### Soluciones con las distintas Heurísticas de distribución

- Luego de obtener una primera solución válida con cualquiera de estas heurísticas se aplica una modificación del método simplex que trabaja con el cuadro en dos dimensiones (en vez de trabajar con un vector de cada variable) y opera hasta llegar al resultado óptimo
- En el caso de este problema, si aplicamos el método simplex modificado a las soluciones que obtuvimos con la heurística, verificaremos que las soluciones obtenidas con costos mínimos progresivos y con VAM (que son iguales) son óptimas

Modelos y Optimización I

### Metaheurísticas

Una **metaheurística** es un método de solución general que proporciona tanto una estructura general como criterios estratégicos para desarrollar un método heurístico específico que se ajuste a un tipo particular de problema.

Comúnmente las heurísticas utilizan procedimientos de **mejora local**

Modelos y Optimización I

## Metaheurísticas

La **metaheurística** es un tipo general de método de solución que organiza la interacción entre los procedimientos de mejora local y las estrategias de más alto nivel para crear un proceso que sea capaz de escapar de un óptimo local y realizar una búsqueda de una región factible.

---

*Modelos y Optimización I*

## Metaheurísticas: GRASP

**G**reedy  
**R**andomized  
**A**daptative  
**S**earch  
**P**rocedure

\*Cada iteración tiene dos fases:

- 📖 Construcción
- 📖 Búsqueda local




---

*Modelos y Optimización I*

## Metaheurísticas: Tabú Search

- Utiliza la memoria para salir de óptimos locales.
- Memoria explícita.
  - Memoria atributiva.




---

*Modelos y Optimización I*

## Metaheurísticas: Tabú Search

- Memoria de corto plazo (tabú)
  - Eficiencia determinada por:
    - Tipo de movimiento.
    - Elección atributos prohibidos.
    - Regla de activación tabú.
    - Tiempo de prohibición.
- Memoria de largo plazo.
  - Intensificación vs. Diversificación.

---

*Modelos y Optimización I*

## Metaheurísticas: Recocido Simulado

**Simulated Annealing:**

Proceso térmico para obtener estados de baja energía en un sólido mediante un baño térmico.

La evolución de un sólido en el baño térmico puede ser simulado mediante el algoritmo de Metrópolis, basado en técnicas de Monte Carlo

- ☞ Un estado es aceptado si posee una energía menor que el estado actual, en caso contrario el estado generado se aceptará con una determinada probabilidad (basada en la distribución de Boltzmann)

---

*Modelos y Optimización I*

## Metaheurísticas: Recocido Simulado

**Simulated Annealing:**

- ☞ Kirpatrick [1983] y Cerny [1985] introducen el concepto en el mundo de la optimización.
- ☞ Los estados del problema se corresponden con las soluciones del problema de optimización combinatoria; la energía de los estados con la evaluación de la calidad de la solución (costo o beneficio); el estado fundamental con la solución óptima; mientras que los estados meta-estables serán los óptimos locales. El papel de la temperatura lo desempeñará un parámetro de control

---

*Modelos y Optimización I*

### Metaheurísticas: Algoritmos Genéticos

#### Técnicas de búsqueda basadas en la mecánica de la selección natural y la genética. Goldberg [1989]

Los cromosomas se representan por tiras de bits.  
El proceso de reproducción se guía a través de una función que mide el grado de adaptación del cromosoma, a mayor valor mayor probabilidad de selección y supervivencia. La nueva generación es sometida al mismo proceso.

Sobrecruzamiento: intercambio de genes entre la pareja.

Mutación: alteración de un bit con una probabilidad pequeña.

Se repite el proceso hasta alcanzar un criterio de finalización.

*Modelos y Optimización I*

### Ant Colony Optimization (ACO)

- ¿Cómo encuentran a ciegas las hormigas el camino a seguir hacia la comida?
- De la observación del comportamiento de las hormigas surge en 1996 un nuevo tipo de heurísticas: ACO (Ant Colony Optimization)



*Modelos y Optimización I*

### Ant Colony Optimization (ACO)

- Un grupo de  $n$  hormigas es colocada en los nodos de un grafo en el momento cero (una hormiga a lo sumo en cada nodo)
- Cada hormiga elige su destino de acuerdo con dos factores (inputs):

Visibilidad  $\Rightarrow$  Una estimación *a priori* de la posibilidad de alcanzar comida rápidamente

Feromona  $\Rightarrow$  Una información *a posteriori* basada en las rutas antes seguidas por las otras hormigas.

*Modelos y Optimización I*

### Ant Colony Optimization (ACO)

- La cantidad de feromona que coloca cada hormiga en la ruta que ha seguido puede ser fija o en función de la bondad de la solución alcanzada por la hormiga.
- Para prevenir que la solución converja prematuramente, la feromona puede evaporarse de una vuelta a la siguiente. El % de evaporaciones un parámetro de la heurística.
- La decisión de cuál nodo visitar a continuación es estocástica. La probabilidad de visitar un determinado nodo se da en función de la feromona y de la visibilidad.

*Modelos y Optimización I*