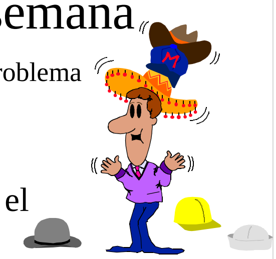
Séptima semana



- Modificaciones en el problema
  - Cambios en los cj
- Planteo dual
- Modificaciones en el problema
  - Cambios en los bi
    - Variación simultánea de recursos

Modificaciones al problema original

❶ Modificaciones a los cj

- Ahora vamos a ver qué pasa cuando queremos analizar si ante un cambio en el coeficiente del funcional de un producto el punto que actualmente es el óptimo va a seguir siéndolo o no.
- ¿Qué pasa si c1 vale 9?

Cambios en los c_j

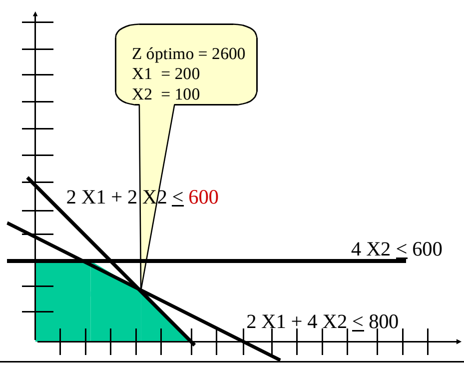
Ck	Xk	Bk	A1 (9)	A2 (10)	A3	A4	A5
9	x_1	200	1	0	1	0	-1/2
10	x_2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	x_4	200	0	0	2	1	-2
			0	0	?	0	?

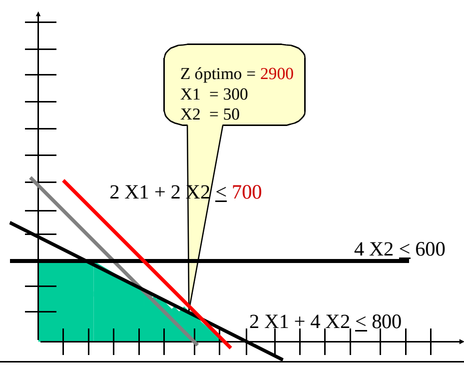
Si los dos zj-cj son >= 0, sigue siendo óptima

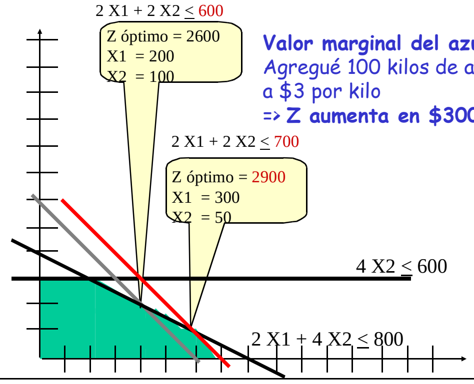
Modificaciones al problema original

❷ Modificaciones a los b_i

- Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso.
- Supongamos que conseguimos 100 kilos más de azúcar.
- ¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)







Valor marginal del azúcar= 3
Agregué 100 kilos de azúcar a $3 por kilo
=> Z aumenta en $300.

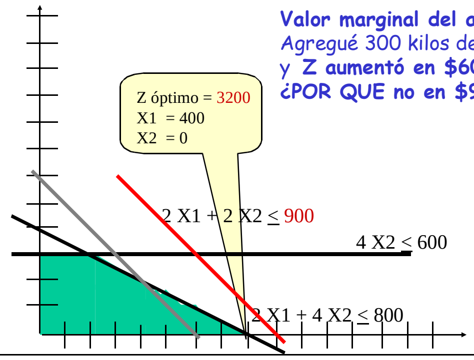
Modelos y Optimización I

Modificaciones al problema original

❷ Modificaciones a los b_i

- Como nos funcionó bien conseguir 100 kilos de azúcar (cada kilo nos aumentó el funcional en $3 que es el valor marginal del azúcar), vamos a intentar aumentar más la disponibilidad del azúcar
- Vamos a conseguir 300 kilos adicionales a los que teníamos en un principio (que eran 600). Lo que esperamos es que cada kilo aumente el funcional en $3, es decir que el Z pasará de valer 2600 a valer 3500

Modelos y Optimización I



Valor marginal del azúcar= 3
Agregué 300 kilos de azúcar
y **Z aumentó en $600**
¿POR QUE no en $900?.

Modelos y Optimización I

Modificaciones al problema original

❷ Modificaciones a los b_i

- Lo que pasó es que cuando conseguimos 200 kilos de azúcar llegamos al punto (400, 0) y al dejar de producir X2, no tenemos a quien quitarle almidón para agregarlo al azúcar que nos regalaron y no podemos hacer más producto X1
- Por lo tanto, los 100 kilos restantes nos sobran (observen que la recta queda afuera del poliedro) y tienen valor marginal cero

Modelos y Optimización I

Modificaciones al problema original

❷ Modificaciones a los b_i

- Sería bueno que pudiéramos saber hasta cuánto conseguir para que se mantenga el valor marginal de $3 para el recurso
- Para saber eso tenemos que parametrizar el coeficiente de disponibilidad de azúcar (b_i) que actualmente vale 600
- Si lo pudiéramos parametrizar podríamos hacer un trabajo parecido al que hicimos la clase anterior con los c_j

Modelos y Optimización I

Modificaciones al problema original

❷ Modificaciones a los b_i

- El problema es que en la tabla óptima que nosotros tenemos no figura la disponibilidad de azúcar (figuraba en la primera tabla en la columna B, pero ya cambiamos la base varias veces)
- Entonces tenemos que pasar de la expresión común del problema (que se llama expresión primal o directa) a otra expresión del problema, en la cual podamos parametrizar los términos independientes, que se llama PROBLEMA DUAL

Modelos y Optimización I

El problema Dual:

Dado un primal de la forma:	Se define como su prob. Dual:
$A\,X \leq B$	$Y\,A \geq C$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$
max C X	min Y B
donde:	donde:
A(mxn) B(mx1) 0(nx1)	Y(1xm) 0(1xm)
X(nx1) C(1xn)	

Relación entre Primal y Dual:

- El dual tiene una variable real por cada restricción del problema primal.
- El dual tiene tantas restricciones como variables reales tiene el primal.
- El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y viceversa.
- Los coeficientes del funcional (costo o beneficio) del primal, son los términos independientes de las rest. del dual.
- Los términos independientes de las rest. del primal son los coeficientes del funcional del dual.
- Toda columna de coeficientes en el primal se transforma en una fila de coeficientes en el dual.
- El sentido de las desigualdades del primal es el inverso del dual.

Hagamos el planteo inicial del dual de nuestro problema de los helados:

Directo inicial:

$2\,X1 + 2\,X2 \leq 600$

$0\,X1 + 4\,X2 \leq 600$

$2\,X1 + 4\,X2 \leq 800$

MAX $Z = 8\,X1 + 10\,X2$

Dual inicial:

$2\,Y1 + 0\,Y2 + 2\,Y3 \geq 8$

$2\,Y1 + 4\,Y2 + 4\,Y3 \geq 10$

MIN $Z = 600\,Y1 + 600\,Y2 + 800\,Y3$

Relación entre las variables del Directo y las del Dual:

Sobrante de azúcar X3 - Y1 Valor marginal del azúcar

Sobrante de crema X4 - Y2 Valor marginal de la crema

Sobrante de almidón X5 - Y3 Valor marginal del almidón

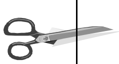
Latas de hel. de agua X1 - Y4 Costo de oport. h. de agua

Latas de hel. de crema X2 - Y5 Costo de oport. h. de crema

Observemos que las slack del directo se relacionan con las reales del dual y las reales del directo se relacionan con las slack del dual

Teorema fundamental de la dualidad:

"Si el problema primal (o el dual) tiene una solución óptima finita, entonces el otro problema tiene una solución óptima finita y los dos funcionales son iguales."



"Si cualquiera de los dos problemas tiene una solución óptima no acotada, entonces el otro problema no tiene soluciones posibles."

Teorema de la holgura complementaria.

Dados el problema primal y el dual correspondiente, siempre que en la k-ésima restricción de uno de ellos la variable de holgura o slack tome valor distinto de cero, entonces la k-ésima variable del otro problema desaparece de la base y, si la k-ésima variable de uno de los dos problemas es mayor que cero, en la k-ésima restricción del otro problema se verifica la igualdad (la variable slack o de holgura de esa restricción es igual a cero).

Consecuencia del teorema de la holgura complementaria:

Quiere decir que de cada par de variables directo-dual, una sola puede ser distinta de cero. Una sola de las dos está en la base de la tabla óptima de su problema.

0 = X3	Y1 = 3
200 = X4	Y2 = 0
0 = X5	Y3 = 1
200 = X1	Y4 = 0
100 = X2	Y5 = 0

Relación entre las tablas óptimas del Directo y del Dual:

Pero entonces, si el valor del Z del directo en el óptimo, es igual al valor del Z del dual en el óptimo y además el valor de las variables del dual es igual al valor del zj-cj de su variable relacionada en el directo, en base a la tabla óptima del directo tendríamos que poder armar la tabla óptima del dual.

- Las variables que están en la base en la tabla óptima del dual son aquellas cuya variable relacionada en el directo no estaba en la base en la tabla óptima del directo. Es decir que en la base óptima del dual estarán Y1 e Y3, porque X3 y X5 no estaban en la base en la óptima del directo.

Relación entre las tablas óptimas del Directo y del Dual:

- El valor que toman las variables en la óptima del dual es igual al zj-cj de su variable relacionada del directo. Es decir que Y1 vale 3, Y3 vale 1 y las demás valen cero.
- Tenemos que verificar que el Z nos dé 2600
- Y podemos armar los vectores canónicos, que van a ser los vectores de Y1 e Y3, que son las variables que están en la base.

TABLA OPTIMA DEL DUAL

			600	600	800		
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
600	**Y1**	**3**	**1**		**0**		
800	**Y3**	**1**	**0**		**1**		
		2600	**0**		**0**		

Relación entre las tablas óptimas del Directo y del Dual:

- El resto de los valores los vamos a sacar de los vectores no canónicos de la tabla óptima del directo, trasponiendo las columnas y cambiando el signo de los valores antes de pasarlos a la tabla del dual (les cambiamos el signo porque el dual opera con la identidad cambiada de signo, por ser un problema con restricciones de mayor o igual)
- Para saber dónde ubicar cada valor, colocamos en la tabla óptima del directo los nombres de las variables del dual relacionadas, debajo de cada columna y a la derecha de cada fila

Relación entre las tablas óptimas del Directo y del Dual:

- Hemos puesto un simbolito distinto en cada número para que se vea a dónde va a parar cada número de la tabla óptima del directo en la tabla óptima del dual.

TABLA OPTIMA DEL DIRECTO

Ck	Xk	Bk	A1 (8)	A2 (10)	A3	A4	A5	
8	X1	200	1	0	$\boxed{1}$	0	-1/2	Y4
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2	Y5
0	X4	200	0	0	2	1	-2	Y2
		2600	0	0	3	0	1	
			Y4	Y5	Y1	Y2	Y3	

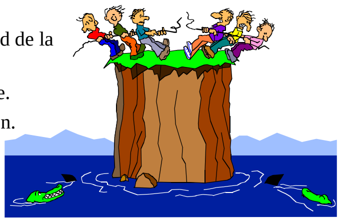
Modelos y Optimización I

TABLA OPTIMA DEL DUAL

Ck	Xk	Bk	A1 (600)	A2 (600)	A3 (800)	A4	A5
600	Y1	3	1	-2	0	$\boxed{-1}$	1/2
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	-200	0	-200	-100

Aplicaciones lineales de los planteos duales.

- Análisis de sensibilidad de la solución óptima.
- Problema de transporte.
- Problema de asignación.
- Flujo en redes.
- Teoría de los juegos.
- Algoritmos de descomposición de problemas lineales de gran tamaño.



Modificaciones al problema original

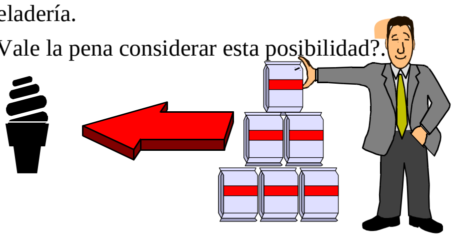
❷ Modificaciones a los b_i

- Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso.
- Es muy probable que no vayamos a fabricar la misma cantidad que antes.
- ¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)
- Para analizar esto, necesitamos el DUAL

Cambios en los b_i

Se presenta la posibilidad de conseguir 100 kilos adicionales de almidón que son regalados por el dueño del restaurante "Fideo Fino", cliente de la heladería.

¿Vale la pena considerar esta posibilidad?.



Cambios en los b_i

			600	600	~~800~~ 900		
600	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
900 ~~800~~	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~ 2700	0	~~-200~~ 0*	0	~~-200~~ -150	~~-100~~ -150

Cambios en los b_i

		b1 ~~600~~	600	800				
b1 ~~600~~	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
800 + 3 b1		~~2600~~	0	~~-200~~	0	~~-200~~	~~-100~~

$\boxed{-2\ b1 + 1600 - 600 \leq 0}$

$\boxed{-\ b1 + 400 - 0 \leq 0}$

$\boxed{½\ b1 - 400 - 0 \leq 0}$

¿Cuánto puede valer b1 para que se cumplan las 3 condiciones?

Modelos y Optimización I

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

Modelos y Optimización I

Solución con LINDO

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

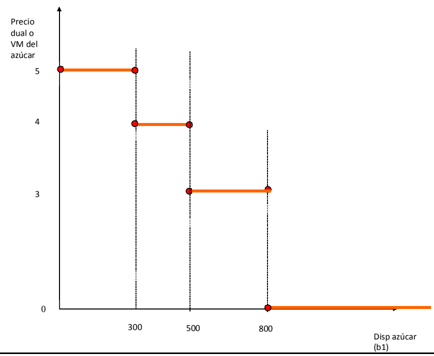
1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

Modelos y Optimización I

Gráfica del VM del azúcar



Modelos y Optimización I

Modificaciones al problema original

❸ <u>Variación simultánea de recursos</u>

- Si variamos más de un recurso al mismo tiempo, no podemos confiar en el rango de variación (porque el rango de variación sirve si lo único que cambia es ese recurso).
- Debe haber una relación entre la variación de los recursos (uno varía en función de lo que varía otro).
- Se reduce a un problema de conveniencia económica (si me mejora el Z o no)

Modelos y Optimización I

Variación simultánea de dos recursos

- Se presenta la posibilidad de conseguir azúcar entregando a cambio crema (para conseguir 1 kg. de azúcar se deben entregar 1,5 kg. de crema). ¿Conviene efectuar este canje?. Si conviene: ¿cuántos kg. de azúcar es conveniente conseguir?

Modelos y Optimización I

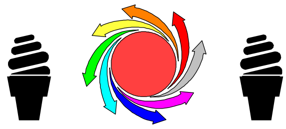
Modificaciones al problema original

❸ Variación simultánea de recursos

- Para que convenga, en principio el recurso que recibo debe estar saturado (si tiene sobrante, directamente no conviene). En este caso el azúcar está saturado así que en principio conviene.
- En segundo lugar hay que verificar que el valor de lo que entregamos sea menor que el valor de lo que recibimos. En este caso 1,5 kg de crema por el valor marginal de la crema es menor que 1 kg de azúcar por el valor marginal del azúcar
- Podemos ver en el Z que por cada canje ganamos 3 pesos

Variación simultánea de dos recursos

			600+α	**600-1,5α**	**800**		
600+α	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600+3α	0	**-200 - 0,5α**	0	**-200-α**	**-100+0,5α**



Modificaciones al problema original

❸ Variación simultánea de recursos

- Hay que hallar el valor de α para que todos los zj-cj sigan siendo menores o iguales a cero (uno de ellos se hará cero = soluciones alternativas en el dual = punto degenerado en el directo)
- Este valor de α es para que esta tabla siga siendo óptima. Hay que pasar a la próxima tabla óptima (alternativa) y ver si sigue siendo conveniente el negocio.
- En este caso en la próxima tabla no conviene porque sale Y1 de la base, pero hay que probar que es así y no decir que analizando la tabla óptima basta.