Quinta semana

Hoy sí ………
que nos vamos a divertir todos !!!

- Resolvamos los modelos de una vez por todas (aunque tengan mas de dos variables)
  - METODO SIMPLEX

Método Simplex:

Modelos y Optimización I

“FA CALDO”, una heladería mayorista, utiliza un modelo de Programación Lineal para determinar sus niveles mensuales de producción.

Modelos y Optimización I

Los datos del modelo son los siguientes:

- **Fabrica dos tipos de helado: de agua y de crema.**
- **Cada lata de helado de agua lleva 2 kilos de azúcar y 2 kilos de almidón de maíz.**
- **Cada lata de helado de crema lleva 2 kilos de azúcar, 4 kilos de crema y 4 kilos de almidón de maíz.**
- **Se dispone mensualmente de 600 kilos de azúcar, 600 kilos de crema y 800 kilos de almidón.**
- **El beneficio por lata es de 8 pesos para los helados de agua y de 10 para los de crema.**

$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$ [KG AZUCAR/MES]

$4\ X2 \leq 600$ [KG CREMA/MES]

$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$ [KG ALMID./MES]

$Z(MAX) = 8\ X1 + 10\ X2$

X1: Cantidad de latas de helado de agua producidas y vendidas (U/Mes)
X2: Cantidad de latas de helado de crema producidas y vendidas (U/Mes)

Forma normalizada de un problema de P.L.

- Para poder resolver con el método simplex un problema de PL tiene que cumplirse que:
  - Todas las variables estén en el primer miembro
  - Todas las restricciones sean igualdades.
- Para lograr que todas las restricciones sean igualdades, agregamos variables slack en cada restricción

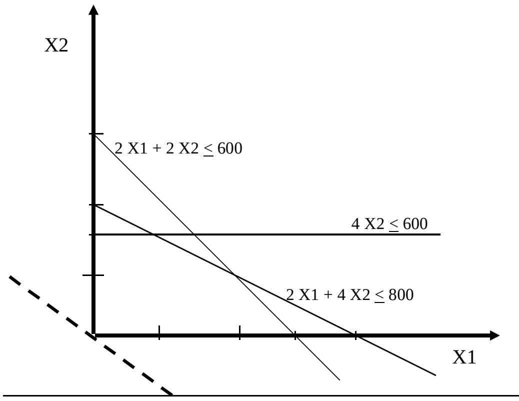
Forma normalizada del problema de los helados

$$2\ X1 + 2\ X2 + X3 = 600$$
$$4\ X2 + X4 = 600$$
$$2\ X1 + 4\ X2 + X5 = 800$$

Z(MAX) = 8 X1 + 10 X2 + 0 X3 + 0 X4 + 0 X5

X3 = sobrante de azúcar (kg/mes)
X4 = sobrante de crema (kg/mes)
X5 = sobrante de almidón (kg/mes)

Modelos y Optimización I



Modelos y Optimización I

Problema de P.L.

Expresión Algebraica:	Expresión Vectorial:
$Z = \Sigma\ c_j x_j$ (MAX o MIN)	$Z = C X$ (MAX o MIN)
Sujeto a:	Sujeto a:
$x_j \geq 0 \quad \forall\ j = 1...n$	$X \geq 0$
y $\Sigma\ a_{ij} x_j = b_i \quad \forall\ i = 1...m$	y $A X = B$

Modelos y Optimización I

Expresión vectorial del problema de los helados

$$Z = (8\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix}$$

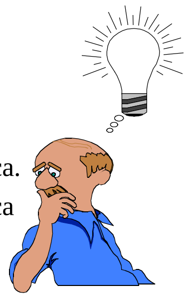
$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Modelos y Optimización I

Tipos de Solución a un P.L.

- ☺Solución.
- ☺Solución posible o factible.
- ☺Solución factible básica.
- ☺Solución factible básica no degenerada.



Modelos y Optimización I

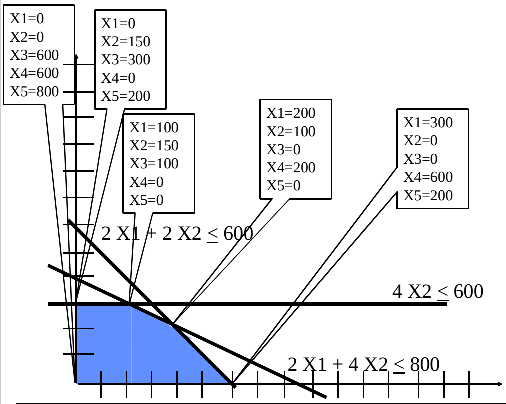
Teorema 1:

- **El conjunto de todas las soluciones factibles a un problema de programación lineal es un conjunto convexo (poliedro convexo).**

Teorema 2:

- **La función objetivo alcanza su mínimo (o máximo) en un punto extremo del conjunto convexo K de soluciones factibles del problema de prog. lineal. Si alcanza ese mínimo (máximo) en más de un punto extremo, entonces la función objetivo tiene el mismo valor para cualquier combinación convexa de esos puntos extremos.**

Modelos y Optimización I



Teorema 3:

- **Si se puede encontrar un conjunto de k = m vectores A1, A2,...Ak que es linealmente independiente y tal que**

x1 A1 + x2 A2 + ... + xk Ak = B y todos los xi ≥ 0, entonces es punto extremo del conjunto convexo de soluciones posibles.

X es un vector n-dimensional cuyos últimos n - k elementos son cero.

Teorema 4:

- **Si X = (x1, x2,..., xn) es un punto extremo del poliedro solución K, entonces los vectores asociados con las componentes xi que son mayores que cero forman un conjunto linealmente independiente.**

Teorema 5:

- **X = (x_1, x_2,..., x_n) es un punto extremo del poliedro solución K, si y sólo si las componentes x_i que son mayores que cero están asociadas con vectores linealmente independientes en :**

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B$$

Como consecuencia de los teoremas y corolarios en los cuales se basa el método simplex se deduce que:

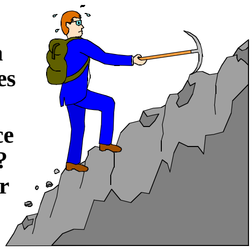
❶ Existe un punto extremo del poliedro K de soluciones factibles en el cual la función de objetivo alcanza su máximo (mínimo).

❷ Cada solución factible básica corresponde a un punto extremo del poliedro solución K.

❸ Cada punto extremo de K tiene asociados a él m vectores linealmente independientes del conjunto dado de n vectores asociados con él.

¿Qué problemas tenemos que solucionar ahora?

- **¿Cómo encontramos un vértice?.**
- **¿Cómo nos damos cuenta de que el vértice hallado es el óptimo?.**
- **Una vez hallado un vértice ¿cómo encontramos otro? El procedimiento debe ser coherente para no saltearnos ninguno.**



¿Cómo solucionamos los problemas?

- **¿Cómo encontramos un vértice?.**

El método simplex elige comenzar por el vértice en el cual las variables reales son cero (las que toman valor distinto de cero son las slacks).

Eso tiene la ventaja adicional de que los vectores de las variables distintas de cero son canónicos distintos y, por lo tanto, linealmente independientes (ver forma vectorial del problema de los helados)

Primera tabla del método simplex para el problema de los helados

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
			8	10			
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	800	2	4	0	0	1

¿Cómo solucionamos los problemas?

- **¿Cómo nos damos cuenta de que el vértice hallado es el óptimo?.**

  Tenemos que calcular, para cada columna, el valor de zj - cj para saber si llegamos al óptimo o no.

  El cj es el coeficiente del funcional de la variable de la columna.

  Veamos cómo calculamos el zj.

Procedimiento de cómputo:

Definimos:

$a_{1j}\ c_1 + a_{2j}\ c_2 + \ldots + a_{mj}\ c_j = z_j$

Donde los c_j son los coeficientes de costo de las variables que están en la base

Teorema A:

- **Dado un Z sujeto a A X = B y X $\geq$ 0, si existe alguna columna j de la matriz A para la cual $z_j - c_j < 0$ (para un problema de máximo) entonces puede construirse un conjunto de soluciones posibles tal que su Z es mejor que el actual, donde el límite superior de Z puede ser finito o infinito.**

Teorema B:

- **Dado un Z de máximo sujeto a A X = B y X $\geq$ 0. Si para una solución básica factible X = (x_1, x_2,..., x_m) las condiciones $z_j - c_j \geq 0$ se cumplen para todas las j = 1...n, entonces:**

  $x_1\ A_1 + x_2\ A_2 + \ldots + x_m\ A_m = B$

  y $x_1\ c_1 + x_2\ c_2 + \ldots + x_m\ c_m = Z$

  constituyen una solución factible máxima

Primera tabla del método simplex para el problema de los helados

Calculamos el zj - cj para cada columna (todos los zj = 0)

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
			8	10			
0	X3	600	2	2	1	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	800	2	4	0	0	1
		Z=0	-8	-10	0	0	0

Como vemos, aún no llegamos al óptimo

¿Cómo solucionamos los problemas?

- **Una vez hallado un vértice ¿cómo encontramos otro? El procedimiento debe ser coherente para no saltearnos ninguno.**

  Para hallar un nuevo vértice, una vector debe salir de la base y otro vector debe entrar a la base (cambio de base).

  Para determinar el que ingresa a la base elegimos uno de los que tienen un zj-cj que denota que no llegamos al óptimo (negativo en este caso, porque el problema es de máximo).

  Se puede elegir cualquiera de los que cumplen con esa condición, por ejemplo, elijamos a X1 para que su vector entre a la base.

¿Cómo solucionamos los problemas?

- **Pero una vez determinado quién entra a la base ¿cómo determinamos quién sale?**

  Para eso se calcula, para cada fila, un coeficiente llamado θ (tita) de cuyo significado se puede obtener más información en el teorema de Generación de soluciones de punto extremo.

  El tita se calcula, para cada fila, como el cociente entre el elemento del vector que entra a la base y el elemento del vector B en esa fila (es decir B/Aj, en este caso B/A1)

Primera tabla del método simplex para el problema de los helados

Calculamos el valor de tita para cada fila

			8	10				
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	θxx
0	X3	600	2	2	1	0	0	600/2
0	X4	600	0	4	0	1	0	-----
0	X5	800	2	4	0	0	1	800/2
		Z=0	-8	-10	0	0	0	

El menor valor es el del primer θ, así que X3 sale de la base

Generación de Soluciones de punto extremo:

Si

$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0 \ldots 0)$ es solución,

Entonces:

$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \ldots + x_m A_m = B$ (a)

Se puede escribir:

$\Sigma\, a_{ij} A_i = A_j$

Si A_{m+1} *no está en la base:*

$a_{1,m+1} A_1 + a_{2,m+1} A_2 + \ldots + a_{m,m+1} A_m = A_{m+1}$ (b)

Generación de Soluciones de punto extremo:

Calculamos (a) · θ *y la restamos de* (b) :

$(x_1 - \theta\, a_{1,m+1}) A_1 + (x_2 - \theta\, a_{2,m+1}) A_2 + \ldots +$

$+ (x_m - \theta\, a_{m,m+1}) A_m + \theta\, A_{m+1} = B$ (c)

Queremos encontrar θ *tal que:*

$x_i - \theta\, a_{i,m+1} \geq 0$ para todo $a_{i,m+1} > 0$ ④

De lo cual:

$$0 < \theta \leq \min \frac{x_i}{a_{i,m+1}}$$

Generación de Soluciones de punto extremo:

Para que el nuevo punto sea extremo:

$$\theta_0 = \min \frac{x_i}{a_{i,m+1}}$$

Si el mínimo se da con i =1 *la primera componente de* (c) *es cero*

$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \ldots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = B$

Donde:

$x'_i = x_i - \theta_0\, a_{i,m+1}$ $\quad$ i = 2,..,m

$x'_{m+1} = \theta_0$

¿Cómo solucionamos los problemas?

- **Una vez determinado quién entra a la base (X1) y quién sale (X3) hay que cambiar de base.**

  Además, hay que hacerlo de tal manera que X1 tome valor distinto de cero (porque entra su vector a la base), que X3 tome valor igual a cero (porque sale de la base) y que el vector de X1 sea el primer canónico (para mantener a los vectores de las variables que están en la base como canónicos distintos y dado que la variable que sale de la base -X3- tenía como vector al primer canónico).

¿Cómo cambiar de base?

Para cambiar de base (cambiar de tabla y pasar a analizar otro vértice) se deben seguir estos pasos:

❶ **Elegir el elemento pivote, que está en la intersección de la fila de la variable que sale de la base (X3) con la columna de la variable que entra a la base (X1)**

❷ **Dividir la fila del pivote por el valor del pivote**

❸ **Completar la columna del pivote con ceros**

❹ **Aplicar la regla del pivote que veremos a continuación, para obtener el resto de los valores**

Regla del pivote:

a_{ie}	a_{ij}
a_{ke}	a_{kj}

Valor que está en la fila del elemento a transformar y en la columna del pivote → a_{ie}

Elemento a transformar → a_{ij}

Pivote → a_{ke}

Valor que está en la columna del elemento a transformar y en la fila del pivote → a_{kj}

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{ie} \cdot a_{kj}}{a_{ke}}$$

Valor en la nueva tabla del elemento a transformar → a_{ij}'

Primera tabla del método simplex para el problema de los helados

Pivote: 2

Ck	Xk	Bk	A1 (8)	A2 (10)	A3	A4	A5	$\bar{x}$
0	X3	600	2	2	1	0	0	
0	X4	600	0	4	0	1	0	
0	X5	800	2	4	0	0	1	
		Z=0	-8	-10	0	0	0	

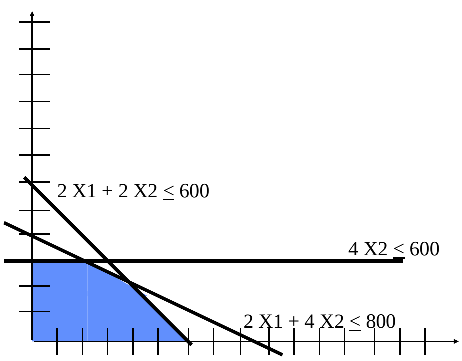
Sale de la base ← 0 (X3)

Variable que entra a la base ↑ (-8)

Segunda tabla del método simplex para el problema de los helados

Ck	Xk	Bk	A1 (8)	A2 (10)	A3	A4	A5	$\bar{x}$
8	X1	300	1	1	1/2	0	0	
0	X4	600	0	4	0	1	0	
0	X5	200	0	2	-1	0	1	
		Z=2400	0	-2	4	0	0	

Como vemos, aún no llegamos al óptimo



Modelos y Optimización I

TABLA OPTIMA

Ck	Xk	Bk	A1 (8)	A2 (10)	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
		2600	0	0	3	0	1

Solución con LINDO

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
          1)      2600.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1          200.000000         0.000000
      X2          100.000000         0.000000
     ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      AZ)          0.000000          3.000000
      CR)        200.000000          0.000000
      AL)          0.000000          1.000000

 NO. ITERATIONS=      2
```

Modelos y Optimización I

No olvidar...

Leer el material adicional a esta clase en la página web (problemas de Distribución y de Asignación)

Modelos y Optimización I