Quinta semana web

- Para hoy tenemos:
  - Problemas Combinatorios:
    - Problema de distribución o transporte
      - Problema de trasbordo
    - Problema de asignación
    - Problema de asignación cuadrática

Problemas combinatorios

- Son aquellos en los cuales se desea determinar combinaciones óptimas.
- Se caracterizan por tener un número finito de soluciones factibles.
- Generalmente este número es muy grande.

Problema de Distribución o Transporte

- Definición.
- Hipótesis principales:
- Modelización.

Problema de Distribución o Transporte

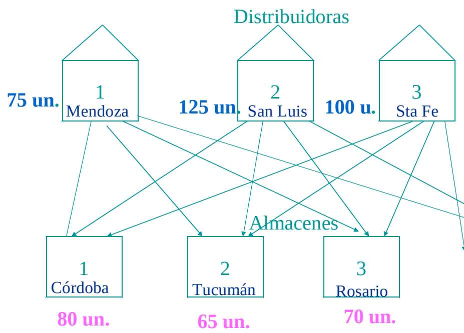
- Tenemos:
- Un conjunto de lugares cada uno de los cuales tiene disponible una cantidad de unidades de un producto (Orígenes o Suministros)
- Un conjunto de lugares cada uno de los cuales demanda una cantidad de unidades de un producto (Destinos o Demandas)
- Se conoce el costo Cij de enviar una unidad desde el Origen i hasta el destino j

Problema de Distribución o Transporte

Veremos un ejemplo en el cual los orígenes o suministros son tres distribuidoras (Mendoza, San Luis y Santa Fe) que tienen disponible determinada cantidad de producto y los destinos son cuatro almacenes (Córdoba, Tucumán, Rosario y Buenos Aires) que demandan determinada cantidad de ese mismo producto

Cualquier origen puede enviar producto a cualquiera de los destinos (todos se conectan con todos)

El problema de Transporte



A lado de cada distribuidora se indica la oferta o SUMINISTRO de la misma y debajo de cada almacén se indica la DEMANDA del mismo

Costo de transporte

En la tabla se indica el costo de transportar una unidad desde el origen i hasta el destino j

Distribuidora		Almacén Cba. 1	Tucumán 2	Rosario 3	Bs. As. 4	Oferta
Mendoza	1	464	513	654	867	75
San Luis	2	352	416	690	791	125
Sta. Fe	3	995	682	388	685	100
Demandas		80	65	70	85	300

Problema de Distribución o Transporte

En nuestro ejemplo la demanda total y la oferta total suman igual (300 unidades).

Si no fuera así habría que agregar un origen ficticio (en el caso en el cual la demanda supera la oferta) que tenga disponibles la cantidad de unidades que faltan o un destino ficticio (en el caso en el cual la oferta supera a la demanda) que demande las unidades que sobran

Los costos de transporte vinculados con orígenes o destinos ficticios son CERO

Problema de Distribución o Transporte

- Definición.

  El objetivo es determinar la cantidad de unidades de producto que cada origen envía a cada destino, para minimizar los costos de transporte totales
- Hipótesis principales:
  - Producto homogéneo (estamos hablando del mismo producto en orígenes y destinos)
  - Costos lineales.

Modelización del problema de Distribución o Transporte

De acuerdo con el objetivo las variables serán:

Xij: cantidad de unidades que el origen i envía al destino j

El funcional minimiza los costos totales:

MIN Z = 464 X11 + 513 X12 + 654 X13 + 867 X14 + 352 X21 + 416 X22 + 690 X23 + 791 X24 + 995 X31 + 682 X32 + 388 X33 + 685 X34

Modelización del problema de Distribución o Transporte

Por cada origen hay que asegurar que se van a distribuir todas las unidades

Mendoza:

X11 + X12 + X13 + X14 = 75

San Luis:

X21 + X22 + X23 + X24 = 125

Santa Fe:

X31 + X32 + X33 + X34 = 100

Modelización del problema de Distribución o Transporte

Por cada destino hay que asegurar que le van a llegar todas las unidades

Córdoba:

X11 + X21 + X31 = 80

Tucumán:

X12 + X22 + X32 = 65

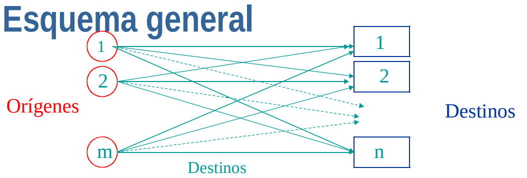
Rosario:

X13 + X23 + X33 = 70

Buenos Aires:

X14 + X24 + X34 = 85

Esquema general



		Destinos 1	2	3	n	Suministro
Orígenes	1	C11	C12	C13	C1n	S1
	2	C21	C22	C23	C2n	S2
	3	C31	C32	C33	C3n	S3
	m	Cm1	Cm2	Cm3	Cmn	Sm
Demanda		D1	D2	D3	Dn	

El modelo de transporte (planteo genérico)

- Asumiendo que $\sum_{i=1}^{m} Si = \sum_{j=1}^{n} Dj$
- El planteo matemático es:

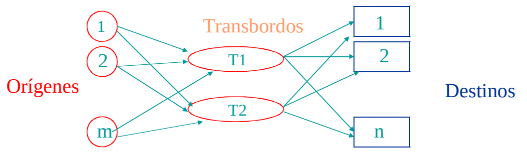
Minimizar $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cij \; Xij$

Sujeto a:

$\sum_{j=1}^{n} Xij = Si$ para i=1...m $\qquad \sum_{i=1}^{m} Xij = Dj$ para j=1...n

$Xij \geq 0$ para todo i y para todo j

El problema de Transbordo



- En este problema las unidades no son enviadas directamente desde los orígenes hacia los destinos, sino que las unidades van desde los orígenes hasta alguno de los centros de transbordo y desde éste a alguno de los destinos

Costos de Transbordo

En la tabla se indica el costo de transportar una unidad desde el origen i hasta el transbordo j

Transbordos

Distribuidora		Transbordo 1	Transbordo 2	Oferta
Mendoza	1	138	313	75
San Luis	2	321	216	125
Sta. Fe	3	356	182	100

Los transbordos comúnmente no tienen capacidad máxima (tampoco demanda)

Costos de Transbordo

En la tabla se indica el costo de transportar una unidad desde el transbordo i hasta el destino j

Almacén

Transbordos		Cba. 1	Tucumán 2	Rosario 3	Bs. As. 4
Transbordo	1	464	513	654	867
Transbordo	2	495	682	388	685
Demandas		80	65	70	85

Los transbordos no tienen una cantidad fija como oferta (lo que pueden entregar es lo que recibieron de los orígenes)

Modelización del problema de Transbordo

Las variables serán:

XOiTj: cantidad de unidades que el origen i envía al transbordo j

XTiDj: cantidad de unidades que el transbordo i envía al destino j

El funcional minimiza los costos totales:

MIN Z = 138 XO1T1 + 313 XO1T2 + 321 XO2T1 + 216 XO2T2 + 356 XO3T1 + 182 XO3T2 + 464 XT1D1 + 513 XT1D2 + 654 XT1D3 + 867 XT1D4 + 495 XT2D1+ 682 XT2D2 + 388 XT2D3 + 685 XT2D4

Modelización del problema de Transbordo

- Para los orígenes, los transbordos son destinos

Mendoza:

XO1T1 + XO1T2 = 75

San Luis:

XO2T1 + XO2T2 = 125

Santa Fe:

XO3T1 + XO3T2 = 100

Modelización del problema de Transbordo

- Para los destinos, los transbordos son orígenes

Córdoba:

XT1D1 + XT2D1 = 80

Tucumán:

XT1D2 + XT2D2 = 65

Rosario:

XT1D3 + XT2D3 = 70

Buenos Aires:

XT1D4 + XT2D4 = 85

Modelización del problema de Transbordo

- Se agrega al modelo una ecuación por cada transbordo: Todo lo que entró al centro de transbordo debe salir del mismo.

Transbordo 1

XO1T1 + XO2T1 + XO3T1 = XT1D1 + XT1D2 + XT1D3 + XT1D4

Transbordo 2

XO1T2 + XO2T2 + XO3T2 = XT2D1 + XT2D2 + XT2D3 + XT2D4

El problema de Asignación

- Definición
- Hipótesis principales
- Modelo matemático

El problema de Asignación

Sean los conjuntos A y B, ambos con m elementos:

El problema de asignación consiste en:

- encontrar el conjunto P donde:
  - cada elemento de P es un par (a, b),
  - a es un elemento del conjunto A,
  - b es un elemento del conjunto B,
- tal que minimice una función de costo Σ C(a,b).

El problema de Asignación...

Restricciones que se deben cumplir para P:
- cada elemento de A debe aparecer en P exactamente una vez
- cada elemento de B debe aparecer en P exactamente una vez

El problema es LINEAL

La función de costo depende solamente de cada par (a, b) y es independiente de los demás pares.

El problema de Asignación...

	1	2	3		m	Suministro
1	C11	C12	C13		C1m	1
2	C21	C22	C23		C2m	1
3	C31	C32	C33		C3m	1
m	Cm1	Cm2	Cm3		Cmm	1
Demanda	1	1	1		1	

- Suministro total = Demanda total
- Todos los suministros y demandas iguales a uno
- Función de costo lineal

El modelo de Asignación

$$Xij \begin{cases} 1 & \text{si i (miembro de A) es asignado a j (miembro de B)} \\ 0 & \text{si i no es asignado a j} \end{cases}$$

Minimizar/Maximizar $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} Cij \; Xij$

Sujeto a:

$\sum_{j=1}^{m} Xij = 1 \quad \forall\, i=1...m \qquad \sum_{i=1}^{m} Xij = 1 \quad \forall\, j=1...m$

$Xij \geq 0 \; \forall\, i$ y $\forall\, j$

Xij bivalentes

Asignación Cuadrática - Ejemplo

Sea A conjunto de fábricas y B conjunto de ciudades
Objetivo: ubicar una fábrica en cada ciudad minimizando los costos totales de comunicación entre las fábricas

Este costo de comunicación depende de:
- Frecuencia de comunicación entre cada par de fábricas.
- Distancias entre las dos ciudades donde las fábricas están localizadas.

t_{ik} : frecuencia de comunicación entre fabricas i y k

d_{jl} : costo por unidad de comunicación entre las ciudades j y l

El modelo de Asignación Cuadrática

La definición de las Xij y el planteo de restricciones es igual que en el problema de asignación.

PERO LOS COSTOS DEPENDEN DE QUE SE PRODUZCAN DOS ASIGNACIONES SIMULTANEAS

Definimos $Cijkl = t_{ik} \,.\, d_{jl}$

Entonces la función objetivo es:

¡OJO! NO ES LINEAL
(por eso se llama asignación cuadrática)

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \cancel{Xij \,.\, Xkl} \,.\, Cijkl \qquad \forall\, i \neq k, \;\; \forall\, j \neq l$$

El modelo de Asignación Cuadrática...

Si queremos resolver el problema mediante PLE deberemos generar un cambio de variables:

Yijkl = 1 si Xij = Xkl = 1,
Yijkl = 0 en caso contrario

¿Cómo hacemos que las variables Yijkl tomen ese valor?

El modelo de Asignación Cuadrática...

Tenemos que plantear un AND de Xij y Xkl

$$2\, Yijkl \leq Xij + Xkl \leq 1 + Yijkl$$

Y en el funcional ponemos las Yijkl en lugar del producto de Xij por Xkl