Sexta semana

- Método Simplex
  - Problemas con z mínimo
  - Relaciones de $\geq$ o =
  - Casos particulares
- Algunos conceptos:
  - Valor marginal
  - Costo de oportunidad

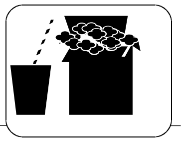
Seguimos usando el problema de FA CALDO

$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$ [KG AZUCAR/MES]

$4\ X2 \leq 600$ [KG CREMA/MES]

$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$ [KG ALMID./MES]

Z(MAX) = 8 X1 + 10 X2



Modelos y Optimización I

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Solución con LINDO

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)     2600.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         200.000000         0.000000
       X2         100.000000         0.000000
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      AZ)         0.000000           3.000000
      CR)       200.000000           0.000000
      AL)         0.000000           1.000000

 NO. ITERATIONS=      2
```


- La clase pasada vimos cómo resolver problemas de simplex cuando los problemas son de máximo con restricciones de menor o igual.
- ¿Qué pasa cuando los problemas son de mínimo? ¿y cuando hay restricciones de mayor o igual?

<u>Problemas de PL con funcional de mínimo:</u>

- Fórmula de mejora del funcional

  $Z^{p+1} = Z^{p} - \theta_{mín}\ (zj - cj)$ de la variable que entrará a la base en el paso p+1

  Entonces en un problema de mínimo lo único diferente es:
- Si todos los zj - cj son ≤ 0, estamos en el óptimo
- Las candidatas a entrar a la base son las variables con zj - cj > 0

Problemas de PL con funcional de mínimo...:

- Entonces, si en un problema de mínimo llegamos al óptimo cuando todos los zj - cj son ≤ 0, si miramos la primera tabla del problema de los helados que hicimos la semana pasada, vemos que si el funcional fuera de mínimo, en esa primera tabla el problema da óptimo

			8	10				
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	$\bar{x}$
0	X3	600	2	2	1	0	0	
0	X4	600	0	4	0	1	0	
0	X5	800	2	4	0	0	1	
		Z=0	-8	-10	0	0	0	

Todos los zj - cj son ≤ 0

Problemas de PL con funcional de mínimo...:

- Es lógico que si el problema de los helados fuera de mínimo, la primera tabla sea la óptima, porque cuando un problema es de mínimo y tiene todas relaciones de menor o igual, si los coeficientes de las variables en Z son mayores que cero, la solución óptima es la trivial: no hacer nada para que el funcional dé lo menor posible (es decir, las variables reales son cero y no fabrica nada, así el funcional le da cero).
- Pero si el problema tiene relaciones de mayor o igual ¿cómo lo resolvemos?
- Veamos un ejemplo:

Problemas de PL con restricciones de $\geq$:

$$X1 \geq 2$$
$$2\,X1 + 2\,X2 \leq 24$$
$$MAX\ Z = X1 + 2\,X2$$

Como las variables están en el primer miembro lo único que falta hacer es agregar las slack para convertir las inecuaciones en ecuaciones

$$X1 - X3 = 2$$
$$2\,X1 + 2\,X2 + X4 = 24$$
$$MAX\ Z = X1 + 2\,X2$$

Problemas de PL con restricciones de $\geq$:

Claro que, como vimos, el método simplex empieza haciendo cero las variables reales.

Si hacemos cero las variables reales (X1 y X2) queda:

$$X3 = -2$$
$$X4 = 24$$

¡Pero las variables no pueden ser negativas! Además no nos quedan dos canónicos sino un canónico y otro canónico cambiado de signo.

Entonces, lo que tenemos que hacer es ***fingir que el (0, 0) es solución.***

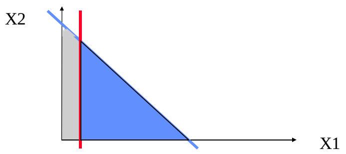
Problemas de PL con restricciones de $\geq$:

Para fingir que el (0, 0) es solución agregamos una variable sumando en la primera fila de tal manera que cuando estamos en el (0, 0) tenga dos variables mayores que cero. Pero esas variables son artificios, así que se llaman ***variables artificiales*** y se denominan con la letra griega μ con un subíndice distinto para cada una (como tenemos una sola, la llamaremos μ).

$$X1 - X3 + \mu = 2$$
$$2\,X1 + 2\,X2 + X4 = 24$$
$$MAX\ Z = X1 + 2\,X2 - M\,\mu$$

Problemas de PL con restricciones de $\geq$:

Es decir que estamos alterando el poliedro de soluciones para que incluya al (0,0), nótese que la restricción que era de mayor o igual quedó como una meta ($X1 - 2 = X3 - \mu$) donde X3 es el exceso y μ es el defecto respecto de 2. El poliedro original es el sombreado de oscuro y agregamos la parte sombreada más clara.



Problemas de PL con restricciones de $\geq$:

$$X1 - X3 + \mu = 2$$
$$2\ X1 + 2\ X2 + X4 = 24$$
$$MAX\ Z = X1 + 2\ X2 - M\ \mu$$

Como vemos, en el Z la variable artificial tiene un coeficiente "-M" ¿por qué? Porque necesitamos que en el óptimo, esa variable valga cero (una cosa es arrancar del origen porque nos conviene y otra es que en el óptimo tengamos valor para esa variable). Entonces se le pone un coeficiente con valor muy grande (M) y signo contrario a lo que busca el Z.

Modelos y Optimización I

Problemas de PL con restricciones de $\geq$:

Ahora veamos la resolución del problema:

			1	2			-M
-M	μ	2	1	0	-1	0	1
0	x_4	24	2	2	0	1	0
		-2 M	-M-1	-2	M	0	0
1	x_1	2	1	0	-1	0	1
0	x_4	20	0	2	2	1	-2
		2	0	-2	-1	0	1+M
1	x_1	2	1	0	-1	0	1
2	x_2	10	0	1	1	1/2	-1
		22	0	0	1	1	-1+M

Todos los zj-cj son mayores o iguales que cero. Es óptima

Modelos y Optimización I

Problemas de PL con restricciones de =:

$$X1 \geq 2$$
$$2\ X1 + 2\ X2 = 24$$
$$MAX\ Z = X1 + 2\ X2$$

También hay que agregar una variable artificial en la restricción de igual para obtener el canónico que falta:

$$X1 - X3 + \mu 1 = 2$$
$$2\ X1 + 2\ X2 + \mu 2 = 24$$
$$MAX\ Z = X1 + 2\ X2 - M\ \mu 1 - M\ \mu 2$$

Modelos y Optimización I

Casos particulares:

Vamos a plantear distintos problemas, cada uno de ellos tiene un caso particular.

Esto nos va a enseñar a reconocer en una tabla de simplex cuándo la solución óptima (o cualquier tabla) tiene un caso particular.

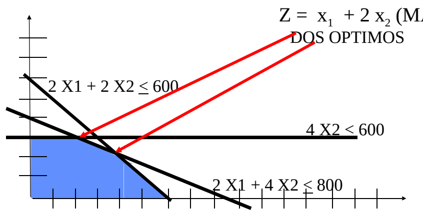
Es bueno graficar los problemas, para que veamos la relación entre lo que detecta el simplex y lo que podemos detectar en el gráfico (que debe ser lo mismo).

Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Soluciones Alternativas:**

$$2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 600$$
$$4\ x_2 \leq 600$$
$$2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 800$$
$$Z = x_1 + 2\ x_2\ (MAX)$$



Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Soluciones Alternativas:**

$$2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 600$$
$$4\ x_2 \leq 600$$
$$2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 800$$
$$Z = x_1 + 2\ x_2\ (MAX)$$

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	Tita
0	x3	600	2	2	1	0	0	300
0	x4	600	0	4	0	1	0	150
0	x5	800	2	4	0	0	1	200
		0	-1	-2	0	0	0	
0	x3	300	2	0	1	-1/2	0	150
2	x2	150	0	1	0	1/4	0	-
0	x5	200	2	0	0	-1	1	100
		300	-1	0	0	1/2	0	
0	x3	100	0	0	1	1/2	-1	200
2	x2	150	0	1	0	1/4	0	600
1	x1	100	1	0	0	-1/2	1/2	-
		400	0	0	0	0*	1/2	

Se hace entrar esa variable a la base para encontrar el otro vértice óptimo

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	x4	200	0	0	2	1	-2
2	x2	100	0	1	-1/2	0	1/2
1	x1	200	1	0	1	0	-1/2
		400	0	0	0*	0	1/2

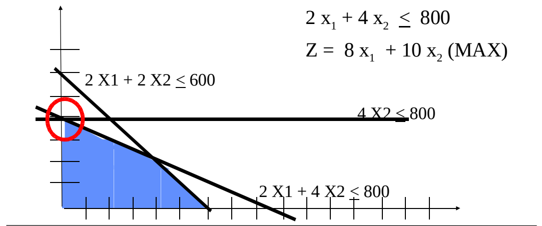
Cuando hay un zj-cj=0 en una variable que no está en la base y es el óptimo HAY SOLUCIONES ALTERNATIVAS OPTIMAS

Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Punto Degenerado:**

$$2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 600$$
$$4\,x_2 \leq 800$$
$$2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 800$$
$$Z = 8\,x_1 + 10\,x_2 \text{ (MAX)}$$



Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Punto Degenerado:**

$$2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 600$$
$$4\,x_2 \leq 800$$
$$2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 800$$
$$Z = 8\,x_1 + 10\,x_2 \text{ (MAX)}$$

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	Tita
0	x3	600	2	2	1	0	0	300
0	x4	800	0	4	0	1	0	200
0	x5	800	2	4	0	0	1	200
		0	-8	-10	0	0	0	
0	x3	200	2	0	1	-1/2	0	100
10	x2	200	0	1	0	1/4	0	-
0	x5	0	2	0	0	-1	1	0
		2000	-8	0	0	5/2	0	
0	x3	200	0	0	1	1/2	-1	400
10	x2	200	0	1	0	1/4	0	800
8	x1	0	1	0	0	-1/2	1/2	-
		2000	0	0	0	-3/2	4	

Empate de titas mínimos:
El próximo punto es
un punto degenerado

Cero es el tita mínimo
SALE x5

Estamos en el mismo punto
Que en la tabla anterior

Hay una variable en la base
que vale cero: ES UN PUNTO
DEGENERADO

Continuar...

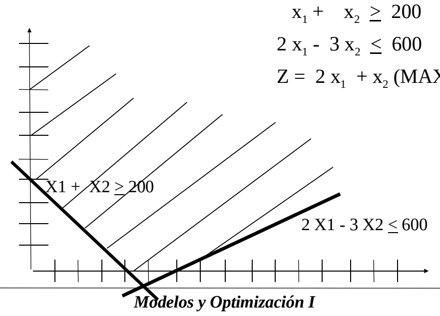
Sale x3 de la base
En la próxima tabla ya no
estamos en el punto degenerado

Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Poliedro Abierto.**

$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2\,x_1 - 3\,x_2 \leq 600$$
$$Z = 2\,x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$



Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Poliedro Abierto.**

			2	1			-M
-M	μ	200	1	1	-1	0	1
0	x_4	600	2	-3	0	1	0
		-200 M	-M-2	-M-1	M	0	0
2	x_1	200	1	1	-1	0	1
0	x_4	200	0	-5	2	1	-2
		400	0	1	-2	0	2+M
2	x_1	300	1	-3/2	0	1/2	0
0	x_3	100	0	-5/2	1	1/2	-1
		600	0	-4	0	0	M

$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2\,x_1 - 3\,x_2 \leq 600$$
$$Z = 2\,x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$

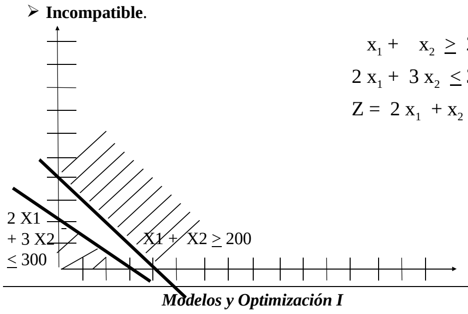
Cuando una variable
quiere entrar a la base
pero no puede salir ninguna
(porque en la columna no hay
ningún número mayor que
cero ES POLIEDRO ABIERTO
(no hay próximo vértice)

Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Incompatible.**

$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 300$$
$$Z = 2\,x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$



Modelos y Optimización I

Casos particulares:

- **Incompatible.**

			2	1			-M
-M	μ	200	1	1	-1	0	1
0	x_4	300	2	3	0	1	0
		-200 M	-M-2	-M-1	M	0	0
-M	μ	50	0	-1/2	-1	-1/2	1
2	x_1	150	1	3/2	0	1/2	0
		300 - 50 M	0	1/2 M+2	M	1/2 M+1	0

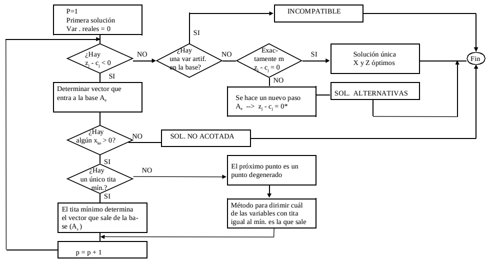
$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 300$$
$$Z = 2\,x_1 + x_2 \text{ (MAX)}$$

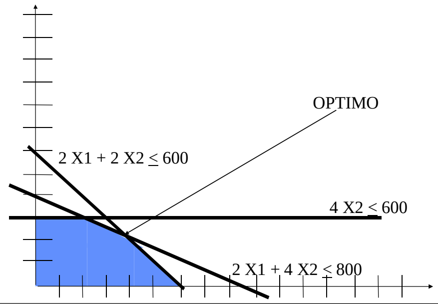
Cuando se llega al
óptimo (no hay ningún
Zj-Cj negativo en un
problema de máximo)
pero en la base hay una
variable artificial
EL PROBLEMA ES
INCOMPATIBLE

Modelos y Optimización I

Diagrama de flujo del método simplex:

Para máximo:





Recursos saturados y Recursos con sobrante

- Cuando un recurso tiene sobrante cero (la variable que indica su sobrante no está en la base o está en la base valiendo cero) se dice que el recurso está saturado.
- ¿Qué recursos están saturados en nuestro problema de los helados?
- Si consigo uno solo de los recursos saturados ¿podré ganar más dinero?

Recursos saturados y con sobrante

- Como X4 está en la base de la tabla óptima valiendo 200 y X4 es la slack de la restricción de crema (es el sobrante de crema), significa que el recurso crema ***tiene sobrante*** igual a 200 kilos.
- Como X3 (sobrante de azúcar) y X5 (sobrante de almidón no están en la base en la tabla óptima, significa que no tienen sobrante. Entonces el azúcar y el almidón son recursos ***saturados***.

Valor marginal y Costo de oportunidad

- Los zj - cj tienen significado:
  - Si el zj - cj corresponde a una variable real del problema (por lo general son productos) se llama costo de oportunidad de ese producto (CO)
  - Si el zj - cj corresponde a una variable slack del problema (por lo general son sobrantes de recursos) se llama valor marginal de ese recurso o restricción (VM)

TABLA OPTIMA DEL DIRECTO

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Costos de oportunidad

Valores marginales

Solución con LINDO

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)      2600.000

   VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1          200.000000         0.000000
     X2          100.000000         0.000000

   ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    AZ)         0.000000         3.000000
    CR)       200.000000         0.000000
    AL)         0.000000         1.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

Costos de oportunidad

Valores marginales

Costo de oportunidad

- El costo de oportunidad es distinto de cero cuando la variable correspondiente al producto no está en la base (porque vale cero).
- El costo de oportunidad de un producto indica en cuánto va a desmejorar el funcional si tenemos la obligación de fabricar una unidad de ese producto.

Valor marginal

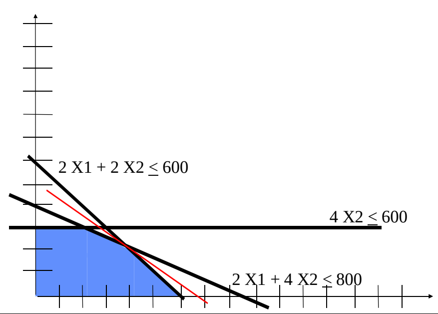
- El valor marginal es distinto de cero cuando la variable correspondiente al sobrante de recurso o slack de la restricción no está en la base (porque vale cero).
- El valor marginal indica en cuánto va a mejorar el funcional si esa restricción se afloja en una unidad.
  - Si la restricción es de menor o igual, aflojar la restricción implica aumentar el término independiente (por ejemplo: conseguir una unidad más de recurso)
  - Si la restricción es de mayor o igual, aflojar la restricción implica disminuir el término independiente (por ejemplo: disminuir la demanda mínima de un producto en una unidad,)

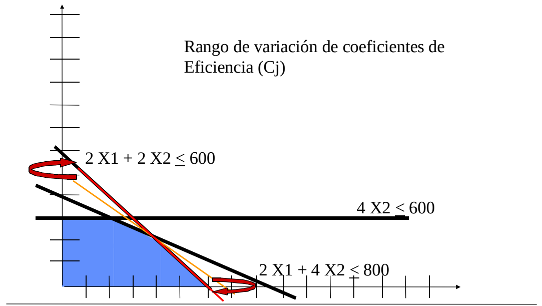
Valor marginal

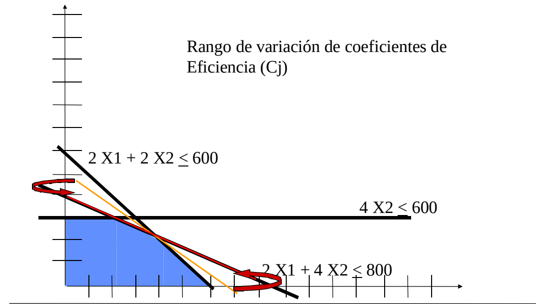
- Por ejemplo: el VM del azúcar es 3 (z3-c3=3). Eso significa que si consigo un kilo más de azúcar el Z aumenta en $3. ¿por qué?
- Porque si consigo un kilo más de azúcar puedo hacer una unidad más de X1 ¿de dónde saco el almidón? De X2. Como X1 consume 2 kilos de almidón por unidad y X2 consume 4 kilos de almidón por unidad, haciendo media unidad menos de X2, libera 2 kilos de almidón. Pero esa media unidad menos también libera 1 kilo de azúcar y 2 kilos de crema. Con el kilo de azúcar que conseguí más el kilo de azúcar que liberó X2 y los 2 kilos de almidón que liberó X2 hago una unidad más de X1. La crema no me sirve así que el sobrante de crema aumentará en 2 kilos.

Valor marginal

- Económicamente ¿cómo terminó esta operación de conseguir 1 kilo más de azúcar?
- Hago media unidad menos de X2 así que gano $5 menos que antes (porque por una unidad gano $10)
- Hago una unidad más de X1 así que gano $8 más que antes
- Conclusión, gano $3 más que antes.
- El VM del azúcar es 3, ya vimos por qué eso quiere decir que con un kilo más de azúcar mi funcional aumenta en $3.







Rango de variación de los cj

- ¿en qué rango de valores puede variar el coeficiente en el funcional de los helados de agua (que actualmente vale 8) para que el punto óptimo siga siéndolo?

Rango de variación de c_1

			C1	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
C1	x_1	200	1	0	1	0	-1/2
10	x_2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	x_4	200	0	0	2	1	-2
			0	0		0	

1. C1 + 10 . (-1/2) + 0 . 0 – 0 ≥ 0

-1/2 . C1 + 10. ½ + 0 . (-2) – 0 ≥ 0

¿Cuánto puede valer C1 para que se cumplan ambas condiciones?

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

Solución con LINDO

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

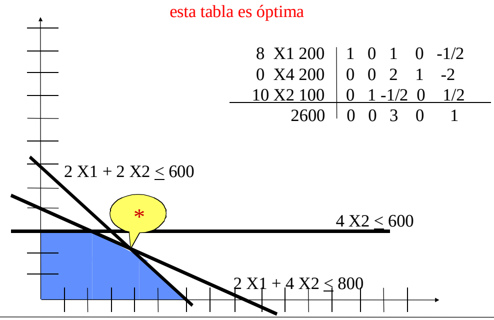
NO. ITERATIONS= 2

Curva de oferta del producto X1

- ¿Cómo se hace la curva de oferta de un producto?
- La curva de oferta representa, a los distintos valores que puede tomar el coeficiente Cj de ese producto en el Z, qué cantidad de producto Xj es conveniente fabricar.
- Para empezar, en la tabla óptima, tenemos, por lo que vimos en la transparencia anterior, que si C1 vale entre 5 y 10, la tabla sigue siendo óptima (es decir, X1 sigue valiendo 200)
- Para los demás valores, hay que reemplazar C1 por 10, nos dará una solución alternativa y hay que pasar a esa tabla, en la cual X1 vale 300.

Para 5 <= C1 <= 10
esta tabla es óptima

8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
		2600	0	0	3	0	1

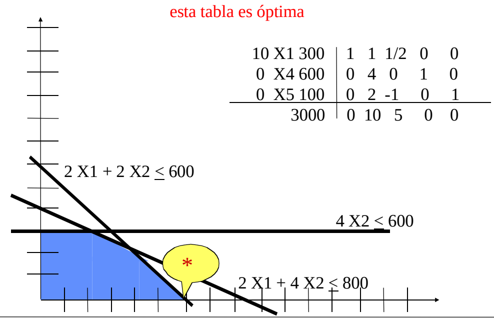


Curva de oferta del producto X1...

- En esa tabla hay que calcular el rango de variación de C1.
- El rango de variación de C1 será >= 10 y hay que ver el valor máximo. Si hay un valor máximo, tenemos que seguir reemplazando el valor de C1 hasta que el límite superior sea infinito.
- Cuando el límite superior llega a infinito, quiere decir que por más que aumente el C1, no puede fabricar más cantidad de X1 (no hay más recursos y no hay a quién quitárselos, porque ya no se fabrica más X2).
- Ahora hay que ver qué pasa si C1 vale menos que 5.

Para 10 <= C1 < infinito
esta tabla es óptima

10	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	100	0	2	-1	0	1
		3000	0	10	5	0	0

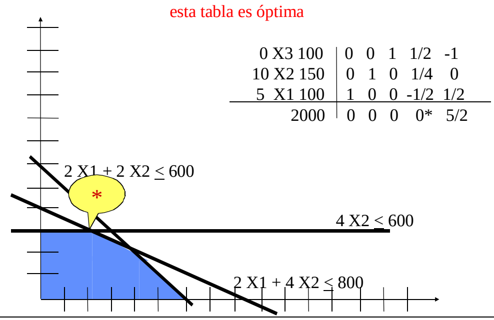


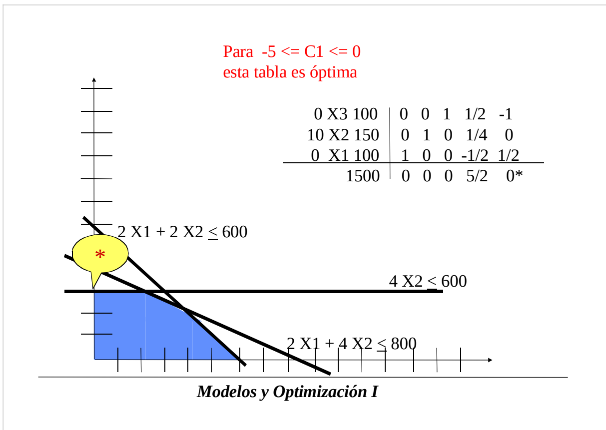
Curva de oferta del producto X1...

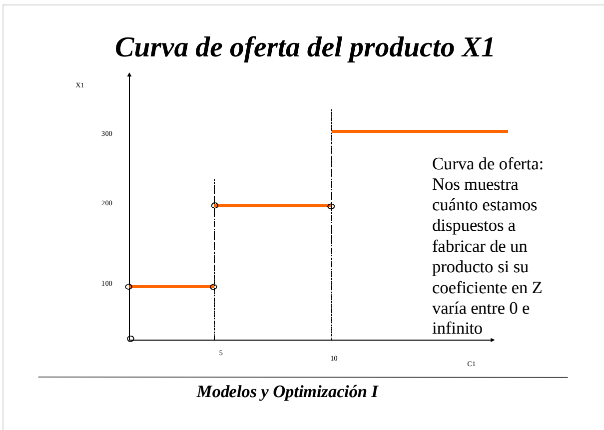
- Poniendo un valor de 5 como C1 se obtiene una tabla con soluciones alternativas (igual que lo que sucedía cuando X1 era igual a 10).
- Pasando a la tabla alternativa se obtiene un nuevo valor de X1 (100) y en esa tabla debemos obtener el rango de C1. El rango de variación de C1 será <= 5 y hay que ver el valor mínimo. Tenemos que seguir reemplazando el valor de C1 hasta que el límite inferior sea cero.

Para 0 <= C1 <= 5
esta tabla es óptima

0	X3	100	0	0	1	1/2	-1
10	X2	150	0	1	0	1/4	0
5	X1	100	1	0	0	-1/2	1/2
		2000	0	0	0	0*	5/2




Para -5 <= C1 <= 0
esta tabla es óptima
0 X3 100 | 0 0 1 1/2 -1
10 X2 150 | 0 1 0 1/4 0
0 X1 100 | 1 0 0 -1/2 1/2
1500 | 0 0 0 5/2 0*
2 X1 + 2 X2 ≤ 600
*
4 X2 ≤ 600
2 X1 + 4 X2 ≤ 800
Modelos y Optimización I


Curva de oferta del producto X1
X1
300
200
100
5
10
C1
Curva de oferta: Nos muestra cuánto estamos dispuestos a fabricar de un producto si su coeficiente en Z varía entre 0 e infinito
Modelos y Optimización I