PRÁCTICAS

2.14. Capítulo 1. Generalidades

PRÁCTICA 1

1. Encuentre el orden de cada una de las siguientes ecuaciones

   a) $(y'')^4 + 3y' + y = 6x$
   b) $y'' + (y')^3 - y''' = 4x^7$
   c) $y'' - y^8 = 0$
   d) $y'''y - (y')^5 = 22$

2. Verifique que la función dada es una solución de la ecuación diferencial dada sobre algún intervalo, para cualquier valor de las constantes arbitrarias que aparecen en la función.

   a) $y = ce^{2x}, \quad y' = 2y$
   b) $y = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{c}{x}; \quad xy' + y = x^2$
   c) $y = \dfrac{1}{2} + ce^{-x^2}; \quad y' + 2xy = x$
   d) $y = (1 + ce^{-x^2/2})(1 - ce^{-x^2/2})^{-1}; \quad 2y' + x(y^2 - 1) = 0$
   e) $y = \tan\left(\dfrac{x^3}{3} + c\right); \quad y' = x^2(1 + y^2)$
   f) $e^{xy} + y = x - 1, \qquad y' = \dfrac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$
   g) $\sin y + xy - x^3 = 2, \qquad y'' = \dfrac{6xy' + (y')^3 \sin y - 2(y')^2}{3x^2 - y}$
   h) $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^{-x^2}, \quad y' + 2xy = 1$
   i) $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + ce^x, \qquad y' - y = e^{x+x^2}$
   j) $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + ce^{-x^2}, \qquad y' + 2xy = 1,$

3. Encuentre todas las soluciones de la ecuación dada

   a) $y' = -x^2$
   b) $y' = x \ln x$
   c) $y' = -x \sin x$
   d) $y'' = x \cos x$
   e) $y'' = 2x + \sin x + e^x$
   f) $y''' = -\cos x$

g) $y''' = -x^2 + e^x$ *h)* $y''' = 7e^{4x}$

4. **Teorema de Picard**. Si $f(x,y)$ y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas en una región $\Re$, entonces, por cada punto (x_0, y_0) en el interior de $\Re$, pasará una curva integral única de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

En los problemas que siguen determine si el teorema de existencia y unicidad (Picard) implica que el problema de valor inicial dado tiene solución única.

a) $y' = x^3 - y^3, \quad y(0) = 6$

b) $y' - xy = \sin^2 x, \quad y(\pi) = 5$

c) $y' + \cos y = \sin x, \quad y(\pi) = 0$

d) $y' = x/y, \quad y(1) = 0$

e) $yy' - 4x = 0, \quad y(0) = 0$

f) $yy' - 4x = 0, \quad y(2) = -\pi$

2.15. Capítulo 2. Ecuaciones Diferenciales de Primer orden

PRÁCTICA 2.1

ECUACIONES DE VARIABLE SEPARABLE

A) En los ejercicios que siguen encuentre la solución general

1. $y' + ay = 0$
2. $\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0$
3. $y' + 3x^2 y = 0$
4. $xy' - y = y^3$
5. $(1-x^2)y' = 2y, \quad$ R. $y = C\dfrac{1+x}{1-x}$
6. $xy' + y \ln x = 0$
7. $y' = xy^3, \quad$ R. $y = (C - x^2)^{-1/2}$
8. $xy' + 3y = 0$
9. $y' = \sqrt[3]{64xy}$, R. $y = \sqrt{(2x^{\frac{4}{3}} + C)^3}$
10. $x^2 y' + y = 0$ item $xyy' = 1 - x^2$
11. $y - xy' = a(1 + x^2 y')$
12. $y' \tan x = y$

B) En los ejercicios que siguen resuelva el problema con valor inicial

1. $y' + \left(\dfrac{1+x}{x}\right) y = 0; \quad y(1) = 1$
2. $(1+e^x)yy' = e^x; \quad y(0) = 1$
3. $xy' + \left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right) y = 0; \quad y(e) = 1$ item $(xy^2+x)dx + (x^2y - y)dy = 0 \quad y(0) = 1$
4. $xy' + (1 + x\cot x)y = 0; \quad y(\pi/2) = 2$
5. $y' - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) y = 0; \quad y(0) = 2$
6. $y' + \dfrac{k}{x} y = 0, \quad y(1) = 3$
7. $y' + (\tan kx)y = 0; \quad y(0) = 2$
8. $y' = ye^x; \quad y(0) = 2e; \qquad$ R. $\quad y = 2e^x$
9. $2yy' = x(x^2-16)^{-1/2}; \quad y(5) = 2; \qquad$ R. $\quad y^2 = 1 + (x^2-16)^{1/2}$
10. $y' + 1 = 2y; \quad y(1) = 1; \qquad$ R. $\quad \ln(2y-1) = 2(x-1)$
11. $xy' - y = 2x^2y; \quad y(1) = 1; \qquad$ R. $\quad \ln y = x^2 - 1 + \ln x$
12. $y' \sin x = y \ln y; \quad y(\pi/2) = 1$

PRÁCTICA 2.2

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Resuelva los problemas siguientes:

1. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$
2. $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0; \quad$ *R.* $\quad x^3 + 3xy^2 = c$
3. Hallar, para la ecuación $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$ la familia de curvas integrales y escoger aquellas curvas que pasan respectivamente por los puntos $(4;0)$ y $(1;1)$.
   R. $\quad (x-C)^2 - y^2 = C^2; \quad (x-2)^2 - y^2 = 4; \quad y = \pm x$
4. $(xy+y^2)dx - x^2dy = 0$
5. $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0; \quad$ *R.* $\quad y = \dfrac{x}{c + \ln x}$
6. $(3x^2 - y^2)dx + (xy - x^3y^{-1})dy = 0$
7. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$

8. $y' = \dfrac{y^2 + x\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$; $\quad R.\quad \sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = c + \ln x$

9. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$

10. $y' = \dfrac{x\sec(y/x) + y}{x}$

11. $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{3xy}$; $\quad R.\quad (x^2 - 4y^2)^3 x^2 = c$

12. $y' = \dfrac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}$

En los problemas que siguen resuelva cada ecuación mediante sustitución lineal y racional

13. $y' = 1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}$ $\quad$ R. $\quad 3x + (x-y)^3 = C$

14. $y' = (3x+y)^2 - 1$

15. $y' = 5x + y - 2$ $\quad$ R. $\quad x = \ln(5x + y + 3) + C$

16. $y' = \dfrac{x-y}{x-y-1}$

17. $y' = \dfrac{(2x-y+1)^2}{2x-y}$ $\quad$ R. $\quad 2x + \ln[(2x-y)^2 + 1] = C$

18. $y' = \cos^2(x-y)$

19. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ $\quad$ R. $\quad 2x^2\ln x = y^2 + Cx^2$

20. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

21. $2xydy = (x^2 + 3y^2)dx$ $\quad$ R. $\quad x^2 + y^2 = Cx^3$

22. $(4x-y)dx - (x-2y)dy = 0$

23. $x^2dy = (y^2 + xy - x^2)dx$ $\quad$ R. $\quad x^2(x+y) = C(y-x)$

24. $y' = \dfrac{y}{x} + e^{y/x}$

25. Demuestre que la ecuación diferencial

$$y' = \frac{ax + by^m}{y^{m-1}(cx + dy^m)}$$

se puede transformar en ecuación homogénea realizando el cambio de variable $y^m = v$

26. Demuestre que la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x^{m-1}(ay + bx^m)}{(cy + dx^m)}$$

se puede transformar en ecuación homogénea realizando el cambio de variable $x^m = u$

Aplicando los ejercicios 25 y 26 resolver las ecuaciones siguientes

27. $(4x\sqrt{y} - 6y)dx + (4\sqrt{y} - 3x)dy,$ R. $x^2 - 3x\sqrt{y} + 2y = C$

28. $2y' = -\dfrac{y + 4\sqrt{x}}{x - 2y\sqrt{x}},$ R. $2x + y\sqrt{x} - y^2 = C$
Resolver las ecuaciones

29. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$

30. $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$

PRÁCTICA 2.3

ECUACIONES EXACTAS

En los ejercicios que siguen determine que ecuaciones son exactas, y resuelva las que lo sean

1. $(\sin x \tan y + 1)dx + \cos x \sec^2 y dy = 0$

2. $(4x - y)dx + (2y - x)dy = 0$ R. $2x^2 - xy + y^2 = C$

3. $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

4. $(x + y)dy = (x - y)dx$ R. $2xy - x^2 + y^2 = C$

5. $(2y^2 - 4x + 5)dx = (4xy - 2y + 4)dy$

6. $y(x^2 + y^2)dy + x(y^2 - x^2)dx = 0$ R. $2x^2y^2 + y^4 - x^4 = C$

7. $(y + y\cos xy)dx + (x + x\cos xy)dy = 0$

8. $(e^{x-y} + x)dx = (e^{x-y} + y)dy$ R. $2e^{x-y} + x^2 - y^2 = C$

9. $\cos x \cos^2 y dx + 2\sin x \sin y \cos y dy = 0$

10. $\left(1 + \dfrac{\ln y}{x}\right)dx + \left(1 + \dfrac{\ln x}{y}\right)dy = 0;$ R. $x + y + (\ln x)(\ln y) = C$

11. $(\sin x \sin y - xe^y)dy = (e^y + \cos x \cos y)dx$

12. $\left(\frac{1}{x} + 2x\right) dx + \left(\frac{1}{y} + 2y\right) dy = 0$

13. $y' = \frac{x - y\cos x}{y + \sin x}$; R. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - y\sin x = C$

14. $(y\sin xy + xy^2\cos xy)dx + (x\sin xy + xy^2\cos xy)dy = 0$

15. $(x^2 - y)y' + 2x^3 + 2xy = 0$; R. $y = x^2 \pm \sqrt{2x^4 + C})$

16. $\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

17. $(y^3 - x^2y)y' - xy^2 = 0$; R. $y = \pm[x^2 \pm (x^4 + C)^{1/2}]^{1/2}$

18. $[e^x(x^2y^2 + 2xy^2) + 6x]dx + (2x^2ye^x + 2)dy = 0$

19. $(e^{2y} - xe^y)y' - e^y - x = 0$; R. $y = \ln[x \pm \sqrt{2x^2 + C}]$

20. $[x^2e^{x^2+y}(2x^2 + 3) + 4x]dx + (x^3e^{x^2+y} - 12y^2)dy = 0$

21. $[e^{x+y}(x^4y + 4x^3) + 3y]dx + (x^5e^{xy} + 3x)dy = 0$

22. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$

23. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

24. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$

25. $dx = \frac{y}{1 - x^2y^2}dx + \frac{x}{1 - x^2y^2}dy$

PRÁCTICA 2.4

FACTORES DE INTEGRACIÓN

En los ejercicios que siguen encuentre un factor de integración y resuelva la ecuación dada.

1. $(x+2y^2)dx + xydy = 0$ R. $\mu = x^3$, $2x^5 + 5x^4y^2 = C$
2. $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$
3. $(x + y - xy)dx + xdy = 0$ R. $\mu = e^{-x}$, $xy - x - 1 = Ce^x$
4. $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$
5. $(x^2 + y^2)dx + 2xy \ln xdy = 0$ R. $\mu = x^{-1}$,
6. $xdy + ydx + 3x^3y^4dy = 0$ $x^2 + 2y^2 \ln x = C$
7. $(1 - xy)y' + y^2 + 3xy^3 = 0$ R. $\mu = y^{-3}$, $y = [x \pm (4x^2 + C)^{1/2}]^{-1}$
8. En qué circunstancias tendrá la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ un factor de integración que sea una función de la suma $z = x + y$?
9. $xdy - ydx = (1 + y)^2dy$
10. $ydx - xdy = xy^3dy$
11. $r\cos\theta d\theta + (r - \sin\theta)dr = 0$; R. $\mu = r^{-2}$, $\ln r + r^{-1}\sin\theta = C$
12. $(xy + x + 2y + 1)dx + (x + 1)dy = 0$
13. $(1 - xy)y' + y^2 + 3xy^3 = 0$; R. $\mu = y^{-3}$, $y = [x \pm (4x^2 + C)^{1/2}]^{-1}$
14. $xdy = (x^5 + x^3y^2 + y)dx$
15. $(x + y)dy = (y - x)dx$
16. $xdy = (y + x^2 + 9y^2)dx$
17. $(6xy^2 + 2y)dx + (12x^2y + 6x + 3)dy = 0$
18. $(x - 4x^2y^3)y' + 3x^4 - y = 0$; R. $\mu = x^{-2}$, $\dfrac{y}{x} + y^3 - y^4 = C$
19. $-ydx + (x^4 - x)dy = 0$
20. $(2y\sin x - \cos^3 x)dx + \cos xdy = 0$; R. $\mu = \cos^{-3} x$, $y\cos^{-2} x = C + x$
21. $\cos x \cos ydx + (\sin x \cos y - \sin x \sin y + y)dy = 0$

22. $(2y^3 - x)y' + 3x^2y^2 + y = 0;$ R. $\mu = y^{-2}$, $\dfrac{x}{y} + y^2 + x^3 = C$

23. $y \sin y dx + x(\sin y - y \cos y)dy = 0.$

En los ejercicios que siguen encuentre un factor de integración de la forma $\mu(x, y) = P(x)Q(y)$ y resuelva la ecuación dada.

24. $y(1 + 5 \ln |x|)dx + 4x \ln |x|dy = 0;$ *R.* $\mu = x^4y^3$; $x^5y^4 \ln x = c$

25. $(y + 3e^x)dx + (1 + y^{-1}e^x)dy = 0$

26. $(3x^2y^3 - y^2 + y)dx + (2x - xy)dy = 0;$ *R.* $\mu = x^{-2}y^{-3}$; $3x^2y^2 + y = 1 + cxy^2$

27. $(a \cos xy - y \sin xy)dx + (b \cos xy - x \sin xy)dy = 0;$
    R. $\mu = e^{ax}e^{by}$; $e^{ax}e^{by} \cos xy = c$

28. $(2x^2 + e^{-y})dx + (x^3 + xy)dy = 0;$ R. $\mu = x^{-1}e^y$, $(x^2 + y - 1)e^y + \ln x = c$

En los problemas que siguen encuentre un factor de integración de la forma $\mu = x^my^n$ y resuélvalas

29. $(x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0;$ R. $\mu = xy^{-2}$, $y = x^{-2}[C \pm \sqrt{C^2 + x^5}]$

30. $(x^2y^5 + y^3)dx + (x^3y^4 + x)dy = 0;$ R. $\mu = x^{-1}y^{-3}$, $x^2y^2 + 2 \ln x - y^{-2} = C$

31. $(y^2 + 2xy + 3y)dx + (x^2 + xy + 2x)dy = 0$

32. $(xy + y \ln y)dx + (x + y + x \ln x)dy = 0;$ R. $\mu = x^{-1}y^{-1}$

33. $(y^2 + 2xy + 3y)dx + (x^2 + xy + 2x)dy = 0$

PRÁCTICA 2.5

ECUACIONES LINEALES

En los ejercicios siguientes resolver las ecuaciones dadas

1. $xy' + 2y = 4x^2$, $y(1) = 4$, R. $y = cx^{-2} + x^2$, $y = 3x^{-2} + x^2$

2. $xy' - 3y = x^3$, $y(1) = 0$, R. $y = x^3 \ln x$

3. $xy' + (x - 2)y = 3x^3e^{-x}$, R. $y = x^2e^{-x(3x+c)}$

4. $(1 + x)y' + y = \cos x$, $y(0) = 1$

5. $x(\ln x)y' + y = 2 \ln x$, R. $y = \ln x + \dfrac{c}{\ln x}$

6. $y' = 2xy + 3x^2e^{x^2}, \quad y(0) = 5$

7. $x(x+1)y' - y = 2x^2(x+1), \qquad$ R. $\quad y = x(x+1) + \dfrac{cx}{x+1}$

8. $(x^2+1)y' + 3x^3y = 6xe^{\frac{-3x^2}{2}}, \quad y(0) = 1$

9. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 3t + e^{-t}; \quad R. \quad x(t) = \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4} - \dfrac{e^{-t}}{3} + ce^{2t}$

10. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u}{t} + 2t; \quad R.$

11. $\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{r-1}{r}p + r^2; \quad R. \quad p(r) = -r^2 - 3r - 6 - \dfrac{6}{r} + \dfrac{ce^r}{r}$

12. $\dfrac{dx}{dt} = tx + 6te^{-t^2}; \quad R.$

13. $\dfrac{dv}{dx} = (\cot x)v + \sin x \quad R. \quad v(x) = x\sin x + c\sin x$

14. $\dfrac{dx}{dt} = (\tan t)x - \cos t; \quad R.$

15. $t\dfrac{dw}{dt} = w + \dfrac{1}{t}; \quad R. \quad w(t) = -\dfrac{1}{2t} + ct$

16. $t\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t} + \dfrac{e^{1/t}}{t^3}; \quad R.$

Resolver el problema de valor inicial en los siguientes problemas

17. $\dfrac{dx}{dt} = tx + 2t; \quad x(1) = 2; \quad R. \quad x(t) = 4\exp\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right) - 2$

18. $\dfrac{dv}{dt} = t^2v - 3t^{-2}; \quad v(0) = 3; \quad R.$

19. $\dfrac{dw}{d\theta} = (\tan\theta)w + 1; \quad w(\pi) = 1; \quad R. \qquad w(\theta) = \dfrac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}$

20. $\dfrac{dr}{d\phi} = (\cot 2\phi)r - \cos 2\phi; \quad r(\pi/4) = 0; \quad R.$

21. $\dfrac{dx}{dt} = (\cot t)x + \csc t; \quad x(\pi/4) = 10; \quad R. \quad x(t) = -\cos t + (10\sqrt{2}+1)\sin t$

22. $\dfrac{dy}{dx} = -(\cot x)y + \csc x; \quad y(\pi/4) = 0; \quad R.$

23. $\dfrac{dx}{dt} = x + e^{2t}; \quad x(0) = 2; \quad R. \quad x(t) = e^t(e^t + 1)$

24. $t\dfrac{d\theta}{dt} = (t+2)\theta + 3t; \quad \theta(\ln 2) = 1; \quad R.$

25. $x(\ln x)y' + y = 2\ln x,$ R. $y = \ln x + \dfrac{c}{\ln x}$

26. $y' = 2xy + 3x^2e^{x^2}, \quad y(0) = 5$

27. $x(x+1)y' - y = 2x^2(x+1),$ R. $y = x(x+1) + \dfrac{cx}{x+1}$

28. $(x^2+1)y' + 3x^3y = 6xe^{\frac{-3x^2}{2}}, \quad y(0) = 1$

PRÁCTICA 2.6

ECUACIÓN DE BERNOULLI

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n; \quad n \neq 0; 1$$

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $xy' - (3x+6)y = -9xe^{-x}y^{4/3},$ R. $y = e^{3x}(Cx^{-2} + x)^{-3}, \quad y = 0$
2. $2xyy' - y^2 + x = 0,$ R.
3. $xyy' = y^2 - x^2,$ R. $y = \pm x(C - 2\ln x)^{1/2}$
4. $y' - 2(\sin x)y = -2y^{3/2}\sin x$
5. $3xy^2y' - 3y^3 = x^4\cos x,$ R. $y^3 = x^3(\sin x + C)$
6. $\dfrac{dx}{dt} = -tx^2 + \dfrac{x}{t}; \quad R.$
7. $\dfrac{dx}{dt} = -2\dfrac{x}{t} + \dfrac{x^3}{t^2}; \quad R. \quad x(t) = \pm\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{(2+5t^5c)t}}{2+5t^5c}$
8. $\dfrac{dx}{dt} = x - x^3; \quad R.$
9. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 3x^2; \quad R. \quad x(t) = \dfrac{1}{\frac{3}{2} + ce^{-2t}}$
10. $\dfrac{dx}{dt} = ax - bx^3; \quad a > 0, b > 0; \quad R. \quad x(t) = \sqrt{\dfrac{a}{b + ke^{-2t}}}$

11. $\frac{1}{y^2+1}y' + \frac{2}{x}\tan^{-1} y = \frac{2}{x},$

12. $3xdy = y(1 + \sin x - 3y^3 \sin x)dx$

13. $xe^y y' - e^y = 3x^2$, Sug. Sea $u = e^y$

14. $2yy' + y^2 \cot x = \csc x$, R. $y^2 \sin x = x + C$

15. $y' + \frac{2y}{x} = 2xy^{3/2}$

Puesto que la ecuación de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

se reduce a una ecuación lineal al sustituir $z = y^{1-n}$. Se puede emplear también la sustitución $y = uv$. Por ejemplo, nos piden resolver la ecuación

$$y' - \frac{4}{x}y = xy^{1/2}$$

Esta ecuación es de Bernoulli, donde $n = 1/2$, entonces empleamos la sustitución

$$y = uv \quad \Longrightarrow \quad y' = u'v + uv'$$

y la ecuación dada queda

$$u'v + uv' = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv}$$

$$v\left(u' - \frac{4}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv} \qquad (A)$$

para determinar la función u se debe exigir que

$$u' - \frac{4}{x}u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4}{x}u \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{4}{x}dx$$

$$\ln u = 4\ln x \quad \Longrightarrow \quad \ln u = \ln x^4$$

de donde

$$u = x^4$$

sustituyendo en la ecuación (A), obtenemos

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4}$$

resolviendo esta ecuación se halla v, esto es

$$v = \left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$$

y, por tanto, obtenemos la solución general

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$$

PRÁCTICA 2.7

ECUACIÓN DE RICCATI

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \quad \text{ó} \quad \frac{dx}{dt} = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$$

Resolver las siguientes ecuaciones

1. $y' = 3y + y^2 - 4$, dada $y = 1$, R. $y = \dfrac{C + 4e^{5x}}{C - e^{5x}}$
2. $y' = y^2 + xy + 2x - 4$, dada $y = -2$
3. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}y^2 - 1$, dada $y = x$, R. $y = \dfrac{x(2C + x^2)}{2C - x^2}$
4. $y' = y^2 - 4x^2 + 2$, dada $y = 2x$
5. $y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2$, dada $y = x$
6. $y' = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$, dada $y = -e^x$, R. $y = -e^x + \dfrac{1}{Ce^{-x} - 1}$
7. $y' = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2$, dada $y = \tan x$
8. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} - 1$, dada $y = x$
9. $y' = y^2 - \dfrac{y}{x} + 1 - \dfrac{1}{4x^2}$, dada $y = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$
10. $y' = -2 - y + y^2$, dada $y = 2$, R. $y = 2 + \dfrac{1}{Ce^{-3x} - 1/3}$
11. $\dfrac{dx}{dt} = -x^2 + 3x - 2$; $\varphi(t) = 1$; *R.*

12. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{\cos t} - x\tan t + \cos t; \quad \varphi(t) = \sin t; \quad R. \quad x(t) = \dfrac{1}{c\cos t - \sin t} + \sin t$

13. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - \dfrac{x}{t} - \dfrac{1}{t^2}; \quad \varphi(t) = \dfrac{1}{t}; \quad R.$

14. $\dfrac{dx}{dt} = -x^2 + 2tx - t^2 + 5; \quad \varphi(t) = t - 2; \quad R. \quad x(t) = \dfrac{4}{e^{-4t-c} + 1} + t - 2$

15. $\dfrac{dx}{dt} = -x^2 + t^2 + 1; \quad \varphi(t) = t; \quad R. \quad x(t) = \dfrac{e^{-t^2}}{(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{42} + ...) + c} + t$

PRÁCTICA 2.8

ECUACIONES DE LAGRANGE Y CLAIRAUT

$$y = xf(p) + g(p); \quad p = \frac{dy}{dx} \quad \text{(Ec. Lagrange)}$$

$$y = px + g(p); \quad p = \frac{dy}{dx} \quad \text{(Ec. Clairaut)}$$

Integrar las siguientes ecuaciones:

1. $2y = px + p\ln p; \quad R.$
2. $y = 2px + \ln p; \quad R.$
3. $y = x(1+p) + p^2; \quad R.$
4. $y = 2px + \sin p; \quad R.$
5. $y = p^2x - \dfrac{1}{p}; \quad R.$
6. $y = \dfrac{3}{2}xp + e^p; \quad R.$
7. $y = px + \dfrac{a}{p^2}; \quad R.$
8. $y = px + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}; \quad R.$
9. $y = px + p$
10. $y = px + 1/p$

11. $y = px + p^2,$ R. $y = -\dfrac{x^2}{4}$
12. $p^2x + 1 = p(1 + y),$ R. $(y + 1)^2 = 4x$
13. $y = px + \sqrt{1 + p^2},$ R. $y = \sqrt{1 - x^2}$
14. $y = px - e^p,$ R. $y = x(-1 + \ln x)$
15. $y = px + \dfrac{1}{\sqrt{p - 1}},$ R. $y = x + \dfrac{3}{2^{2/3}x^{1/3}}$

PRÁCTICA 2.9

REDUCCIÓN DE ORDEN

Para $f(x, y', , y'') = 0$ hacer que: $y' = p,\quad y'' = dp/dx$ Para $f(y, y', , y'') = 0$ hacer que: $y' = p,\quad y'' = pdp/dy$ Resuelva las ecuaciones siguientes:

1. $yy'' + (y')^2 = 0;$ *R.* $y^2 = c_1x + c_2$
2. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$
3. $xy'' = y' + (y')^3;$ *R.* $x^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2$
4. $y'(1 + (y)'^2) = ay''$
5. $y'' - k^2y = 0;$ *R.* $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$
6. $x^2y'' + xy' = 1$
7. $x^2y'' = 2xy' + (y')^2;$ *R.* $y = -1/2x^2 - c_1x - c_1^2 \ln(x - c_1) + c_2$
8. $y' + (1/4)(y'')^2 = xy''$
9. $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$ R. $y = (C_1e^x + 1)x + C_2$
10. $1 + (y')^2 = 2yy'';\quad y(1) = 1, y'(1) = 1$
11. $yy'' + (y')^2 = (y')^3;\quad y(0) = 1, y'(0) = 1)$
12. $y''(y')^2 + y'(y - 1) = 0;\quad y(0) = 2, y'(0) = 2$
13. $yy'' = y^2y' + (y')^2;\quad y(0) = 1/2, y'(0) = 0$
    En los ejercicios que siguen, hallar las soluciones particulares, para las condiciones iniciales que se indican

14. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0;\quad y(0) = 0, y'(0) = 3.$ R. $y = x^3 + 3x$

15. $1 +' (y')^2 = 2yy''$; $\quad y(1) = 1, y'(1) = 1 \quad$ R. $\quad y = 1/2(x^2 + 1)$

16. $yy'' + (y')^2 = (y')^3$; $\quad y(0) = 1, y'(0) = 1 \quad$ R. $\quad y = x + 1$

17. $y'' + \dfrac{1}{y^2}e^{y^2}y' - 2yy' = 0 \quad y(-\dfrac{1}{2e}) = 1, y'(-\dfrac{1}{2e}) = e \quad$ R. $\quad x = -1/2e^{-y^2}$

18. $1 + yy'' + (y')^2 = 0$, $\quad y(1) = 0, y'(1) = 1 \quad$ R. $\quad$ No tiene solución

19. $(1 + yy')y'' = (1 + (y')^2)y'$; $\quad y(0) = 1, y'(0) = 1 \quad$ R. $\quad y = e^x$

20. $(x + 1)y'' + x(y')^2 = y'$; $\quad y(1) = -2, y'(1) = 4 \quad$ R. $\quad y = 2\ln|x| - 2/x$

PRÁCTICA 2.10

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

En los problemas que siguen, obtenga las trayectorias ortogonales para cada familia de curvas dada

1. $y = cx^2$, $\quad$ R. $\quad 2y^2 + x^2 = c$
2. $y = (x + c)^2$
3. $cx^2 + y^2 = 1$, $\quad$ R. $\quad 2\ln y = x^2 + y^2 + c$
4. $2x^2 + y^2 = c^2$ Determine las trayectorias ortogonales de cada familia y encuentre miembros particulares de cada una que pasen por los puntos indicados
5. $x^2 + cy^2 = 1$; $\quad (2, 1)$, $\quad$ R. $\quad x^2 - 3y^2 = 1$, $\quad 4e^{x^2+y^2-5} = x^2$
6. $x^2 = cy + y^2$; $\quad (3, -1)$, $\quad$ R. $\quad x^2 + 8y = y^2$, $\quad x^3 + 3xy^2 = 36$
7. $y = c\tan 2x + 1$; $\quad (\pi/8, 0)$, $\quad$ R. $\quad y = 1 - \tan 2x$, $\quad 8y^2 - 16y + 2\sin^2 2x = 1$
8. $y = ce^{-2x} + 3x$; $\quad (0, 3)$, $\quad$ R. $\quad y = 3e^{-2x} + 3x$, $\quad 9x - 3y + 5 = -4e^{6(3-y)}$
9. $y^2 = c(1 + x^2)$; $\quad (-2, 5)$, $\quad$ R. $\quad y^2 = 5(1 + x^2)$, $\quad 4e^{29-x^2-y^2} = x^2$

En los problemas que siguen, obtenga las trayectorias ortogonales para cada familia de curvas dada.

10. $y = e^{cx}$
11. $y^2 = cx^3$, $\quad$ R. $\quad 2x^2 + 3y^2 = c$
12. $y^3 = cx^2$, $\quad$ R. $\quad 3x^2 + 2y^2 = c$

13. $y = \dfrac{1+cx}{1-cx}$

14. $2x^2 + y^2 = 4cx$, R. $y^2 \ln y + x^2 = cy^2$

15. $y^3 + 3x^2 y = c$, R. $y^2 - x^2 = cx$

16. $y^2 - x^2 = cx^3$

PRÁCTICA 2.11

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS-PERSECUCIÓN-OTROS

1. Hallar una curva cuya subtangente tenga una longitud constante k.
   R. $y = Ce^{x/k}$

2. Hallar una curva cuya subtangente sea el doble de la abcisa del punto de contacto. R. $y^2 = 2px$

3. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(3, 1)$, para la que el segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje OX esté dividido en dos partes iguales por el punto de intersección con el eje OY.
   R. $y^2 = x/3$

4. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(2, 0)$, sabiendo que el segmento de la tangente a dicha curva , comprendido entre el punto de contacto y el eje OY, tiene longitud constante e igual a 2.
   R. $y = \sqrt{4-x^2} + 2\ln \dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$

5. Hallar una curva que pase por el punto $(0, 1)$ y que la subtangente sea igual a la suma de las coordenadas del punto de contacto. R. $y = e^{x/y}$

6. Hallar la curva, sabiendo, que la suma de los segmentos que intercepta la tangente a la misma en los ejes de coordenadas es constante e igual a $2a$.
   R. $y = (\sqrt{2a} \pm \sqrt{x})^2$

7. La suma de las longitudes de la normal y de la subnormal es igual a la unidad. Hallar la ecuación de la curva, sabiendo que ésta pasa por el origen de coordenadas. R. $y^2 = 1 - e^{-x}$

8. La normal en el punto $P(x, y)$ de una curva corta al eje de las x en Q, y al eje de las y, en R. Hallar la ecuación de las curvas, para las cuales R es el punto medio de PQ. R. $y^2 + 2x^2 = C$

9. La pendiente en cualquier punto (x, y) de una curva es $1 + \frac{y}{x}$. Si la curva pasa por $(1, 1)$ encuentre su ecuación. R. $y = x(1 + \ln x)$

10. Encuentre una ecuación para la familia de curvas tal que la pendiente en cualquier punto es la suma de la mitad de la ordenada y dos veces la abcisa del punto.

    R. $y = Ce^{x/2} - 4x - 8$

11. El intercepto en el eje y de la línea normal a una curva en cualquier punto es 2. Si la curva pasa por $(3, 4)$, encuentre su ecuación. R. $x^2 + y^2 - 4y = 9$

12. El intercepto en el eje y de la línea tangente a una curva en cualquier punto es siempre igual a la pendiente en ese punto. Si la curva pasa por $(2, 1)$, encuentre su ecuación. R. $y = \frac{1}{3}(x + 1)$

13. La longitud de la línea normal desde cualquier punto de una curva al eje x es siempre igual a una constante $a > 0$. Muestre que la curva es un círculo de radio a.

14. Hallar la ecuación de las curvas tales que la parte de cada tangente comprendida entre el eje de las y y el punto de tangencia, queda dividido en dos partes iguales por el eje de las x. R. $y = Cx^2$

15. Si el producto de las distancias de los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ a la tangente de una curva en cualquier punto es una constante igual a k. Hallar la ecuación de dicha curva. R. $\dfrac{x^2}{k + a^2} + \dfrac{y^2}{k} = 1$

16. Hallar la ecuación de la curva, cuya subtangente es igual a la media aritmética de las coordenadas del punto de contacto. R. $(x - y)^2 - Cy = 0$

17. Hallar la ecuación de una curva, para la cual, la longitud del segmento, interceptado por la normal en cualquiera de sus puntos en el eje de ordenadas, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.
    R. $x^2 = C(2y + C)$

18. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, el segmento interceptado por la tangente en el eje de las abcisas es igual al cuadrado de la ordenada del punto de contacto. R. $y^2 + x + ay = 0$

19. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, el segmento interceptado por la tangente en el eje de las ordenadas es proporcional al cuadrado de la ordenada del punto de contacto. R. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1$

20. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, la longitud de la tangente es igual a la distancia desde el punto de intersección de esta tangente con el eje OX hasta el punto $M(0, a)$ R. $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$

21. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, el segmento interceptado por la tangente en el eje de las ordenadas es igual a la subnormal. R. $x = y \ln y/a$

Problemas varios

22. **(Crecimiento de poblaciones)** Cierta ciudad tenía una población de 25000 habitantes en 1960 y una población de 30000 en 1970. Suponiendo que su población continúe creciendo exponencialmente con un índice constante, ¿que población pueden esperar los urbanistas que tengan la ciudad en el año 2000 ? R. Alrededor de 51840 personas

    Sug. Utilizar la ecuación $dP/dt = kP$

23. **(Fechado por radiocarbono)** El carbono extraído de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del carbono C^{14} extraído de un hueso de los tiempos actuales.¿Cuál es la antigüedad del cráneo? R. Alrededor de 14735 años

    Sug. Utilizar la ecuación $dN/dt = -kN$

24. **(Interés compuesto continuo)** cuando nació su primer hijo, una pareja depositó en una cuenta de ahorros \$5000 bajo interés compuesto continuo al 8 %. Se dejó que se acumularan los intereses devengados. ¿A cuánto ascenderá la cuenta el décimo octavo cumpleaños del niño? R. 21103,48

    Sug. Utilizar la ecuación diferencial $dA/dt = rA$, r : tasa de interés anual, $A(t)$: cantidad en dólares de una cuenta de ahorros en el tiempo t (años)

25. Suponga que un cuerpo mineral, formado en un antiguo cataclismo (quizá la formación de la Tierra misma) originalmente contenía el isótopo de Uranio U^{238} (cuya vida media es de $4{,}51 \times 10^9$ años)pero no plomo, producto final de la desintegración de U^{238}. Si la proporción actual de los átomos de U^{238} al plomo en ese cuerpo mineral es de 0,9, ¿cuándo ocurrió el cataclismo? R. Hace alrededor de 4,86 miles de millones de años

Problemas. Ecuaciones de Primer Orden

1. Se suministra bacterias con alimento a una población de protozoarios, a una tasa constante μ. Se ha observado que las bacterias son consumidas a una tasa proporcional al cuadrado de su cantidad. La concentración $c(t)$ de bacterias satisface entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \mu - \lambda c^2$$

   donde λ es una constante positiva.

a) Determine $c(t)$ en términos de $c(0)$.

$$R. \quad c(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \left(\frac{ke^{2\sqrt{\mu}t} - 1}{ke^{2\sqrt{\mu}t} + 1} \right) \quad \text{donde} \quad k = \frac{\sqrt{u} + c(0)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{u} - c(0)\sqrt{\lambda}}$$

b) ?Cuál es la concentración de equilibrio de las bacterias? R. $\sqrt{\mu/\lambda}$

2. Halle la forma que debe tener un espejo curvo para que la luz de un foco situado en el origen se refleje en un haz paralelo al eje x. Ver Fig. R. $y^2 = 2cx + c^2$

3. *Alimentación intravenosa con glucosa.* El suministro de glucosa al torrente sanguíneo es una técnica médica importante. Para estudiar este proceso, definimos $G(t)$ como la cantidad de glucosa presente en la sangre de un paciente en el tiempo t. Suponga que la glucosa se suministra al sistema sanguíneo a una tasa constante de k gramos por minuto. Al mismo tiempo la glucosa se transforma y se separa de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de glucosa presente. Entonces la función $G(t)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden
$$\frac{dG}{dt} = k - aG$$
donde a es una constante positiva. Halle la solución de esta ecuación cuando $t = 0$.
R. $G(t) = \frac{k}{a} + \left[G(0) - \frac{k}{a}\right] e^{-at}$

4. Suponga que $T(t)$ es la diferencia de temperatura en el tiempo t entre un objeto y el medio circundante. Por la ley de enfriamiento de Newton, $dT/dt = -kT$, donde $k > 0$. En términos de k, calcule el tiempo necesario para que la diferencia de temperatura disminuya hasta

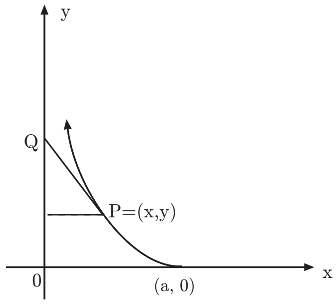
   a) La mitad de su valor inicial. R. $\frac{\ln 2}{k}$

   b) Un cuarto de su valor inicial. R. $\frac{2\ln 2}{k}$

5. En una extensa población aparece una enfermedad infecciosa. La proporción de personas que han sido expuestas a la enfermedad aumenta con el tiempo. Suponga que $P(t)$ es la proporción de personas que han sido expuestas a la enfermedad en los t primeros años de su aparición en la población. Si $P'(t) = [1 - P(t)]/3$ y $P(0) = 0$, después de cuántos años la proporción habrá aumentado hasta el 90 % ?. R. $3\ln 10 \approx 6{,}9$ años.

Problemas de persecución

1. Un esquiador acuático P localizado en el punto $(a, 0)$ es halado por un bote de motor Q localizado en el origen y que viaja hacia arriba a lo largo del eje y. Halle la trayectoria del esquiador si éste se dirige en todo momento hacia el bote. (Este camino se denomina *tractriz*. Ver la fig.



2. Suponga que un halcón H situado en el punto $(a, 0)$ descubre una paloma Q en el origen, la cual vuela a lo largo del eje y a una velocidad v. El halcón emprende vuelo inmediatamente hacia la paloma a una velocidad w. ¿Cuál será el camino seguido por el halcón en su vuelo?
R. Si $w > v$ entonces
$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{(x/a)^{1+v/w}}{1+v/w} - \frac{(x/a)^{1-v/w}}{1-v/w} + c\right]$$
Como $y = 0$ cuando $x = a$, se tiene
$$c = -\frac{a}{2}\left[\frac{1}{1+v/w} - \frac{1}{1-v/w}\right] = \frac{avw}{w^2-v^2}$$

3. Suponga que $v = w$ en el ejercicio anterior. Demuestre que
$$y = \frac{a}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right] - \ln\frac{x}{a}\right\}$$
Así que el halcón nunca capturará a la paloma.

4. Suponga que el eje y y la línea $x = b$ forman las orillas de un rio cuya corriente tiene una velocidad v (en la dirección negativa del eje y). Un hombre está en el origen y su perro está en el punto $(b, 0)$. cuando el hombre llama al perro, éste se lanza al río y nada hacia el hombre a una velocidad constante $(w > v)$ ¿Cuál será el camino por el perro?.
$$R. \quad y = \frac{x}{2}\left[\left(\frac{x}{b}\right)^{v/w} - \left(\frac{b}{x}\right)^{v/w}\right]$$

5. ¿En qué punto tocará tierra el perro del ejercicio anterior si $w = v$?

6. Demuestre que el perro del ejercicio anterior nunca llegará a la otra orilla si $w < v$. Suponga que el hombre camina rio abajo a la velocidad v mientras llama a su perro. Podrá esta vez el perro llegar a tierra? R. Sí, en $(0, -bv/w)$

Práctica 3

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

1. *a*) Demuestre que $y_1(x) = \sin x^2$ e $y_2(x) = \cos x^2$, son soluciones linealmente independientes de
$$xy'' - y' + 4x^3y = 0$$
   b) Calcule $W(y_1, y_2)$ y demuestre que es cero para $x = 0$.

2. Demuestre que $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = 4\sin x - 2\cos x$ son soluciones linealmente independientes (L.I) de $y'' + y = 0$. Escriba la solución $y_3(x) = \cos x$ como una combinación lineal de y_1 e y_2

3. Demuestre que $e^x \sin x$ y $e^x \cos x$ son soluciones L.I de la ecuación
$$y'' - 2y' + 2y = 0$$
   Halle una solución que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 4$

4. Defina la función $f(x)$ como la solución única del problema de valor inicial
$$y'' + y = 0; \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$
   y la función $g(x)$ como la solución de
$$y'' + y = 0; \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$
   Sin usar trigonometría, demuestre que:

   a) $\dfrac{df}{dx} = g(x)$

   b) $\dfrac{dg}{dx} = -f(x)$

c) $f^2 + g^2 = 1$

5. Demuestre que $y_1 = \sin \ln x^2$ e $y_2 = \cos \ln x^2$ son soluciones L.I de

$$y'' + (1/x)y' + (4/x^2)y, \qquad (x > 0)$$

Calcule además $W(y_1, y_2)$

En cada uno de los ejercicios se dan una ecuación diferencial de segundo orden y una solución $y_1(x)$. Compruebe que $y_1(x)$ es en efecto una solución y halle una segunda solución L.I

1. $y'' - 2y' + y = 0, \qquad y_1 = e^x$
2. $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0 \quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ R. $\quad y = \cos x/x$
3. $y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_1 = x$
4. $y'' - \dfrac{2x}{1-x^2}y' + \dfrac{6}{1-x^2}y = 0, \qquad y_1 = \dfrac{3x^2-1}{2}$
5. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \qquad (x > 0), \qquad y_1 = \sin x^2$
6. $x^{1/3}y'' + y' + (1/4x^{-1/3} - \dfrac{1}{6x} - 6x^{-5/3})y = 0, \qquad y_1 = x^3 e^{\frac{-3x^{2/3}}{4}}$
7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{2(t+1)}{t^2+2t-1}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{t^2+2t-1}y = 0; \quad y_1 = t+1$
8. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4t\dfrac{dy}{dt} + (4t^2-2)y = 0; \quad y_1 = e^{t^2}$
9. $(1-t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0; \quad y_1 = t$
10. $(1+t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0; \quad y_1 = t$
11. $(1-t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0; \quad y_1 = 3t^2 - 1$
12. $(2t+1)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4(t+1)\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0; \quad y_1 = t+1$

Indicar la forma de las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas

1. $y'' - 4y = x^2e^{2x}$

2. $y'' + 9y = \cos 2x$

3. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

4. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

5. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$

6. $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$

En los ejercicios que siguen, halle la solución general de cada ecuación diferencial. Aplique el método de coeficientes indeterminados y si se dan condiciones iniciales, entonces halle la solución particular que las satisfaga

1. $y'' + 3y = t^3 - 1$; R. $y_p(t) = \dfrac{t^3 - 2t - 1}{3}$

2. $y'' + 4y = 3\sin x$

3. $y'' - y = t^2 e^t$; R. $y_p(t) = t\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{6}t^2\right)e^t$

4. $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 6$

5. $y'' + 2y' + y = e^{-t}$; R. $y_p(t) = \dfrac{t^2}{2}e^{-t}$

6. $y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 3$

7. $y'' + 4y = t\sin 2t$; R. $y_p(t) = \dfrac{1}{16}t[\sin 2t - 2t\cos 2t]$

8. $y'' + y' = x^3 - x^2$

9. $y'' - 2y' + 5y = 2\cos^2 t$; R. $y_p(t) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{17}(\cos 2t - 4\sin 2t)$

10. $y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}\cos x$

11. $y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t}$; R. $y_p(t) = \dfrac{-1}{50}(\cos t + 7\sin t) + \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{5}\right)\dfrac{te^{2t}}{5}$

12. $y'' - y' - 2y = x^2 + cosx$

13. $y'' - 3y' + 2y = e^t + e^{2t}$; R. $y_p(t) = t(e^{2t} - e^t)$

14. $y'' + y = 1 + 2\sin x$

15. $y'' + y = \cos t \cos 2t$; R. $y_p(t) = \dfrac{-1}{16}\cos 3t + \dfrac{1}{4}t\sin t$

16. $y'' - 2y' - 3y = x - x^2 + e^x$

17. $y'' + 2y' = 1 + t^2 + e^{-2t}$

18. $y'' + 4y' + 4y = xe^x + \sin x$

19. Demuestre, usando el método de coeficientes indeterminados, que una solución particular de
$$y'' + 2ay' + b^2 y = A \sin wx, \qquad (a, w > 0)$$
está dada por
$$y = \frac{A \sin(wx - a)}{\sqrt{(b^2 - w^2)^2 + 4w^2a^2}}$$
donde
$$a = \tan^{-1} \frac{2aw}{b^2 - w^2}, \qquad 0 < a < \pi$$

20. $y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x$

En los ejercicios que siguen, halle la solución general de cada ecuación por el método de variación de parámetros

1. $y'' + y = \tan x$

2. $y'' + y = \cot x$

3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

4. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

5. $y'' - y = \tanh x$

6. $y'' - y' = \sec^2 x - \tan x$

7. $y'' + y = \sec 2x$

8. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$

9. $y'' - y = \dfrac{(2x-1)e^x}{x^2}$

10. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$

11. $y''+y = \sec x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$ R. $y(x) = (c_1 + \ln \cos x)\cos x + (c_2 + x)\sin x$

12. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

13. $2y'' - 3y' + y = (x^2 + 1)e^x$ R. $y(x) = c_1 e^{x/2} + [c_2 + 9x - 2x^2 + (1/3)x^3]e^x$

14. $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + 1$

Resuelva cada uno de los problemas de valor inicial

15. $3y'' + 4y' + y = (\sin x)e^{-x}; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0;$
R. $\frac{1}{13}(2\cos x - 3\sin x)e^{-x} - e^{-x} + \frac{24}{13}e^{-x/3}$

16. $y'' + 4y' + 4y = x^{5/2}e^{-2x}; \quad y(0) = y'(0) = 0$

17. $y'' - 3y' + 2y = \sqrt{x+1}; \quad y(0) = y'(0) = 0$

    R $y(x) = \int_0^x \sqrt{s+1} \quad [e^{2(x-s)} - e^{(x-s)}]ds$

    Utilizando el método para resolver ecuaciones de Euler, halle la solución general de las ecuaciones no homogéneas de Euler en los ejercicios 18 a 21, por el método de variación de parámetros.

18. $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$

19. $x^2y'' + 3xy' - 3y = 5x^2$

20. $x^2y'' - 2y = \ln x, \qquad (x > 0)$

21. $4x^2y'' - 4xy' + 3y = \sin\ln(-x), \qquad (x < 0)$

22. Halle una solución particular de

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2 + x^3}, \qquad (x > 0)$$

    dados que dos soluciones de las ecuaciones homogéneas asociadas son $y_1 = x$ e $y_2 = 1/x$

23. Halle una solución particular de

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{\ln x}{x}, \qquad (x > 0)$$

    dadas las dos soluciones de la ecuación homogénea $y_1 = x$ e $y_2 = x^2$.

3.1. Problemas varios

Transformación exponencial: $y = e^{rx}v$
transformación monomial: $y = x^r v$
En los problemas que siguen resuelva la ecuación diferencial mediante una transformación exponencial

1. $x^2y'' - 4x^2y' + (4x^2 - 6)y = 0$
2. $x^2y'' + (x - 2x^2)y' + (x^2 - x - 1)y = 0$
3. $4x^2y'' - 4x^2y' + (x^2 + 1)y = 0$
4. $4x^2y'' + 4(x^2 + x)y' + (x + 1)^2y = 0$

En los problemas que siguen resuelva la ecuación diferencial mediante una transformación monomial

1. $x^2y'' - 2xy' + 2(x^2+1)y = 0$

2. $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0$

3. $x^2y'' - 4(x^2+x)y' + (6+8x-5x^2)y = 0$

4. $4x^2y'' + 4(x^2-x)y' + (3-2x-8x^2)y = 0$

   Resuelva los siguiente problemas:

5. $(1+t)^2$ es una solución de la ecuación
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (*)$$
y el wronskiano dde cualesquiera dos soluciones de $(*)$ es constante. Encuentre la solución general de
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1+t$$

6. Obtenga la solución general de $y'' + (\frac{t^2}{4})y = f\cos t, \quad t > 0$, sabiendo que $y_1(t) = \sqrt{t}$ es una solución de la ecuación homogénea.
R. $y(t) = \sqrt{t}\left[c_1 + c_2 \ln t + \int_0^t f\sqrt{s}\cos s[\ln t - \ln s]ds\right]$

7. Hallar la solución particular de la ecuación
$$(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$$

8. Hallar la solución de la ecuación $y''+4y = \sin x$, que satisfaga a las condiciones $y(0) = y'(0) = 1$

9. Resolver la ecuación $\quad x'' + w^2x = A\sin pt$.

   Examinar los casos: a) $p \neq w$, b) $p = w$

10. Hallar la solución general de la ecuación
$$y^{(n)} + ny^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}y^{(n-2)} + ... + ny' + y = 0$$

Práctica 4

Transformada de Laplace

A) Halle la transformada de Laplace de las siguientes funciones, donde a y b son constantes reales

1. $\sin(5t+2)$
2. $\cos(at+b)$
3. $\sinh(7t+8)$
4. $\cosh(at+b)$
5. t^2e^{2t}
6. $e^{-t}\sin 2t$
7. $e^{4t}cos2t$
8. $e^{-t}\sinh 2t$
9. $e^{-t}(\sin t+\cos t)$
10. $e^{2t}(t+\cosh t)$

B) En los ejercicios que siguen halle $f(t)$, donde $F(s)=L\{f(t)\}$ está dado. si es necesario, complete el cuadrado en el denominador

1. $\dfrac{7}{s-3}$
2. $\dfrac{s-2}{s^2-2}$
3. $\dfrac{s-2}{s^2+3}$
4. $\dfrac{1}{(s-1)^2}$
5. $\dfrac{1}{s^2+2s+2}$
6. $\dfrac{3}{s^2+4s+9}$
7. $\dfrac{s+12}{s^2+10s+35}$
8. $\dfrac{2s-1}{s^2+2s+8}$
9. $\dfrac{7s-8}{s^2+9s+25}$
10. $\dfrac{cs+d}{s^2+2as+b}$, $\qquad b>a^2>0$

C) En los ejercicios que siguen, exprese cada función hiperbólica dada en términos de exponenciales para demostrar lo siguiente

1. $L\{\cosh^2 at\} = \dfrac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$
2. $L\{\sinh^2 at\} = \dfrac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$
3. $L\{\cosh at \sin at\} = \dfrac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$
4. $L\{\sinh at \sin at\} = \dfrac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$
5. $L\{\cosh at \cos at\} = \dfrac{s^3}{s^4 + 4a^4}$
6. $L\{\sinh at \cos at\} = \dfrac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

D) Usando el método anterior, halle la transformada de Laplace en los ejercicios que siguen

1. $\{\cosh at \cosh bt\}$
2. $\{\sinh at \sinh bt\}$
3. $\{\cosh at \sin bt\}$
4. $\{\cosh at \cos bt\}$
5. $\{\sinh at \sin bt\}$
6. $\{\sinh at \cos bt\}$

E) Resolver el problema del valor inicial en los problemas 1 a 8 usando el transformada de Laplace

1. $x' = 5x + 6; \quad x(0) = 1$
2. $y' = y + 12t; \quad y(0) = 2$
3. $v' = \dfrac{1}{2}v; \quad v(0) = 1$
4. $r' = r + t^3; \quad r(0) = 3$
5. $x'' = 4x + 10e^{-t}\sin t; \quad x(0) = x'(0) = 1$
6. $u'' = -u - 10te^{-t}; \quad u(0) = 1, u'(0) = 2$
7. $z'' = -z' - z - \sin t; \quad z(0) = z'(0) = 1$
8. $w'' = -2w' - 7w + e^{-t}\cos; \quad w(0) = 0, w'(0) = 1$

F) En los ejercicios siguientes , resolver los problemas de valor inicial dados

1. $y'' - 9y = t, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2$
   R. $-t/9 + (23/27)e^{3t} + (4/27)e^{-3t}$
2. $y'' - 3y' - 4y = t^2, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 1$
3. $y'' + k^2 y = \cos kt, \qquad y(0) = 0, y'(0) = k$
   R.$(1 + t/2k)\sin kt$
4. $y'' + 4y = \cos t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$
5. $y'' + a^2 y = \sin at, \qquad y(0) = a, y'(0) = a^2$
   R. $(a + 1/2a^2)\sin at + (a - t/2a)\cos at$
6. $y'' - y = te^t, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1$
7. $y'' - y = \cos t - \sin t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$
8. $y'' - 4y' + 5y = e^t \cos t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 3$
9. $y'' + 8y' + 7y = t^2 \qquad y(0) = 1, y'(0) = -1$
10. $y'' - 3y' + 2y = \sin 2t \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$

G) En los ejercicios que siguen , use el teorema de convolución para calcular las transformadas inversas de Laplace de las funciones dadas

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

1. $F(s) = \dfrac{3}{s^4(s^2+1)}$
2. $F(s) = \dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$
   R. $f(t) = \dfrac{at - \sin at}{a^2}$
3. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$
4. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$
   R. $f(t) = \dfrac{1}{a^2}(1 - \cos at)$
5. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^3}$

H) En los problemas que siguen utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación integral dada

1. $f(t) + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = t$
2. $f(t) = 2t - 4\int_0^t \sin\tau f(t-\tau)d\tau$

3. $f(t) = te^{\tau} + \int_0^t f(t-\tau)\tau d\tau$
4. $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau$
5. $f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (\tau - t)^3 f(\tau) d\tau$
6. $\int_0^t x(y)e^{t-y}dy = \sin t;$ R. $x = \cos t - \sin t$
7. $\int_0^t yx(t-y)dy = t^3$
8. $\int_0^t x(y)x(t-y)dy = 1;$ R. $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
9. $x' = \int_0^t x(y)\cos(t-y)dy, \quad x_0 = 1$
10. $\int_0^t x(y)x'(t-y)dy = t, \quad x_0 = 0$ R. $\pm 2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$

4.1. Problemas varios

A) Encuentre la transformada de Laplace de cada función

1. $\sin^2(2t)$
2. $e^t \sin(2t)$
3. $(t^2 - e^t)^2$
4. $e^{-t}t^{-1/2}$
5. $\int_0^t e^{-t}\sin(2t)dt$
6. $t\int_0^t \dfrac{e^t - 1}{t} dt$

B) Encuentre la inversa de cada transformada de Laplace

1. $\dfrac{1}{s}\left(e^{-2s} + 3e^{-4s}\right)$
2. $e^{-2s} + 3e^{-4s}$
3. $e^{-s}(s^2-1)^{-1}$
4. $\dfrac{1-e^{2s}}{se^{3s}}$
5. $e^{-s}(s+1)^{-1}$
6. $e^{-2s}s^{-3}$
7. $\ln\dfrac{s+1}{s-1}$
8. $\ln 1 - \dfrac{1}{s}$
9. $\ln 1 + \dfrac{1}{s^2}$
10. $\sqrt{s+1} + \sqrt{s-1} - 2\sqrt{s}$
11. $\dfrac{s^3}{(s^2+1)^2}$ Sug. Sume $s - s$ al numerador
12. $\dfrac{s}{(s^2-1)^2}$
13. $\dfrac{1}{(s^2-1)^2}$
14. $\dfrac{s^2}{(s^2-1)^2}$

C) En los problemas que siguen, suponga que $x = x(t)$ tiene una transformada de Laplace L. Considerando que $\mathcal{L}[tx] = -L'$ y $\mathcal{L}[t^2 x] = -L''$, donde las primas indican diferenciación con respecto a s. Ahora, escriba $x' = dx/dt$ y $x'' = d^2x/dt^2$, y plantee las fórmulas que a continuación se enuncian

1. $\mathcal{L}[tx'] = -(sL' + L)$
2. $\mathcal{L}[t^2 x'] = (sL'' + 2L')$
3. $\mathcal{L}[tx''] = -(s^2 L' + 2sL - x_0)$
4. $\mathcal{L}[t^2 x''] = (s^2 L'' + 4sL' + 2L)$

D) En los problemas que siguen emplee los resultados de los problemas anteriores para encontrar una solución a cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $tx'' + (2-t)x' - x = 0, \quad x_0 = 1$
2. $tx'' + 2x' + tx = t, \quad x_0 = 0$
3. $t^2 x'' + 4tx' + (t^2 + 2)x = \sin t$

E) Resolver el problema de valor inicial para los sistemas en los problemas siguientes usando el método de la transformada de Laplace

1. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 3y \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1$
2. $\begin{cases} u' = 1{,}8u - v \\ v' = 2{,}9u - 1{,}6v \end{cases} \qquad u(0) = 1, v(0) = 0{,}5$
3. $\begin{cases} r' = 2r - 2\theta + e^{-t} \\ \theta' = 6r - 5\theta + e^{-2t} \end{cases} \qquad r(0) = 1\theta(0) = -1$
4. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 5x - 2y - t^2 \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 2$

4.1.1. Función escalón unitario

La función $\mathcal{U}(t-a)$ se define como

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases} \tag{1}$$

Si a es una constante positiva, entonces

$$L[f(t)\mathcal{U}(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

donde $F(s) = L[f(t)]$.

En los problemas siguientes encuentre $F(s)$

1. $L[(t-1)\mathcal{U}(t-1)]$
2. $L[e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)]$
3. $L[t\mathcal{U}(t-2)]$
4. $L[(3t+1)\mathcal{U}(t-3)]$
5. $L[\cos 2t\mathcal{U}(t-\pi)]$
6. $L[\sin t\mathcal{U}(t-\pi/2)]$
7. $L[(t-1)^3e^{t-1}\mathcal{U}(t-1)]$
8. $L[te^{t-5}\mathcal{U}(t-5)]$

En los problemas siguientes utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial dada. Escriba f en términos de funciones escalón unitario

1. $y' + y = f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1, \quad y(0) = 0 \\ 5 & t \ge 1 \end{cases}$
2. $y' + y = f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1, \quad y(0) = 0 \\ -1 & t \ge 1 \end{cases}$
3. $y' + 2y = f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1, \quad y(0) = 0 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$
4. $y'' + 4y = f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$
5. $y'' + 4y = \sin t\mathcal{U}(t-2\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
6. $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t-1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
7. $y' + y = f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \pi \\ 1 & \pi \le t < 2\pi, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1 \\ 0 & t \ge 2\pi \end{cases}$
8. $y'' + 4y' + 3y = 1 - \mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-4) + \mathcal{U}(t-6), \quad y(0) = y'(0) = 0$

4.1.2. La transformada de la función delta de Dirac

Para $t_0 > 0$,

$$L[\delta(t - t_0)] = e^{-st_0}$$

En los problemas siguientes use la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales dadas.

1. $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
2. $y'' + 16y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
3. $y'' + y = \delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
4. $y'' + 2y' = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
5. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
6. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
7. $y'' + 2y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
8. $y'' + 4y' + 13y = \delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

Problema. Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1; \quad 0, \quad 1 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 3; \quad 0, \quad 3 \le t < 4 \\ 1, & 4 \le t < 5; \quad 0, \quad 5 \le t < \infty \end{cases}$$

$y(0) = 0, y'(0) = 0$

Solución. Sean $Y(s) = L[y(t)]$ y $F(s) = L[f(t)]$. Al aplicar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial se obtiene que

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = F(s)$$

de modo que

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2} = \frac{F(s)}{(s-1)(s-2)}.$$

Una manera de calcular $F(s)$ es escribir $f(t)$ en la forma

$$f(t) = [H_0(t) - H_1(t)] + [H_2(t) - H_3(t)] + [H_4(t) - H_5(t)].$$

Por lo tanto, por la linealidad de la transformada de Laplace, se tiene que

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}.$$

Una segunda manera de calcular $F(s)$ es evaluar la integral

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt &= \int_0^1 e^{-st}dt + \int_2^3 e^{-st}dt + \int_4^5 e^{-st}dt \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s}-e^{-5s}}{s}.\end{aligned}$$

Como consecuencia, se obtiene

$$Y(s) = \frac{1 - e{-}s + e{-}2s - e{-}3s + e{-}4s - e{-}5s}{s(s-1)(s-2)}$$

vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s-1)(s-2)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} \\ &= L\left[\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right]\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de la propiedad:

$$L[H_c(t)f(t-c)] = e^{-cs}F(s)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}y(t) = {}&[\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t} - H_1(t)[\frac{1}{2} - e^{t-1} + \frac{1}{2}e^{2(t-1)}] \\ &+ H_2(t)[\frac{1}{2} - e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}] - H_3(t)[\frac{1}{2} - e^{t-3} + \frac{1}{2}e^{2(t-3)}] \\ &+ H_4(t)[\frac{1}{2} - e^{t-4} + \frac{1}{2}e^{2(t-4)}] - H_5(t)[\frac{1}{2} - e^{t-5} + \frac{1}{2}e^{2(t-5)}]\end{aligned}$$

Encuentre la solución de:

1. $$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases} \qquad y(0) = 3, y'(0) = -2$$

2. $$\frac{d^2y}{dt^2} + y = f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t < \pi \\ \cos t & \pi \le < \infty \end{cases} \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

3. $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = f(t) = \begin{cases} \sin 2t & 0 \le t < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le < \infty \end{cases} \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad \blacksquare$$

Práctica 5

Soluciones en Series de Potencia

En los ejercicios que siguen , halle la solución general de cada ecuación por el método de series de potencias. Cuando se especifiquen condiciones iniciales, dé la solución que las satisfaga

1. $y' = y - x, \qquad y(0) = 2$

   R. $y = e^x + x + 1$

2. $y'' + y = x, \qquad y(0) = 1$

   R. $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x + x - \sin x$

3. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

   R. $y = a_0(1 + x \arctan x) + a_1 x$

4. $xy'' - x^2y' + (x^2 - 2)y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$

   R. $y = xe^x$

5. $y'' - 2xy' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

   R. $y = 1 - 2x^2$

6. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$

7. $(1 - x)^2y'' - (1 - x)y' - y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$

   R. $y = \dfrac{1}{1 - x}$

8. $y'' - 2xy' + 2y = 0$

9. $y'' - 2xy' - 2y = x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1/4$

   R. $e^{x^2} - \dfrac{x}{4}$

10. La Ecuación de Airy $\quad y'' - xy = 0$

    R. $y = a_0 \sum_{n=0} \frac{1 \cdot 4 \cdot .... \cdot (3n-2)}{(3n!)} x^{3n} + a_1 \sum_{n=1} \frac{2 \cdot 5 \cdot .... \cdot (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}$

Halle la solución general de la ecuación diferencial dada en los ejercicios que siguen por el método de Frobenius

1. $y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{4x} y = 0$

   R. $y = a_0 \cos \sqrt{x} + a_1 \sin \sqrt{x}$

2. $y'' + \frac{2(1-2x)}{x(1-x)} y' - \frac{2}{x(1-x)} y = 0$

3. $y'' + \frac{6}{x} + (\frac{6}{x^2} - 1) y = 0$

   R. $a_0 \frac{\sinh x}{x^3} + c_1 \frac{\cosh x}{x^3}$

4. $y'' + \frac{4}{x} y' + (1 + \frac{2}{x^2}) y = 0$

5. $y'' + \frac{3}{x} y' + 4x^2 y = 0$

   R. $a_0 \frac{\sin x^2}{x^2} + a_1 \frac{\cos x^2}{x^2}$

6. $xy'' + 2y' + xy = 0$

   R. $a_0 \frac{\sin x}{x} + a_1 \frac{\cos x}{x}$

7. $y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 0$

   R.$y = a_0 x + a_1 \frac{1}{x^2}$

8. $xy'' + (1-2x)y' - (1-x)y = 0$

   R. $y = a_0 e^x + c_1 e^x \ln x$

9. $y'' - 2y' + (1 + \frac{1}{4x^2}) y = 0$

   R. $y = a_0 \sqrt{x} e^x + a_1 \sqrt{x} e^x \ln x$

10. $x^2 y'' + x(x-1)y' - (x-1)y = 0$

    R. $y = a_0 x + a_1 (x \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n} x^{n+1})$

Práctica 6

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

6.1. Eigenvalores reales y distintos

En los problemas que siguen encuentre la solución general del sistema.

1. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} x$

3. $x' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x$

4. $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x$

5. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} x$

6. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x$

7. $x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} x$

8. $x' = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} x$

9. $x' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$

10. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 30 \\ 7 & 14 & 21 & 42 \end{pmatrix} x$

En cada uno de los problemas siguientes, resuelva el problema de valor inicial

1. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. $x' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix}$

5. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. $x' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

6.2. Eigenvalores complejos

En los problemas siguientes, encuentre la solución general de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

1. $x' = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$

3. $x' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x$

4. $x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$

5. $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$

6. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$

7. $x' = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix} x$

8. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

9. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$

10. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$

En los problemas siguientes, resuelva el problema de valor inicial dado

1. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. $x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

6.3. Eigenvalores repetidos

En los problemas siguientes, encuentre la solución general de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

1. $x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x$

3. $x' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} x$

4. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$

5. $x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} x$

6. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} x$

7. $x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x$

8. $x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x$

9. Considere el problema

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x$$

con el eigenvalor η dado por $\eta^t = (1, -1)$ correspondiendo al eigenvalor doble $r = 2$.
a) Demuestre que todas las soluciones de $(A^* - 2I)\mathbf{y} = 0$ son de la forma $\mathbf{y}^t = c(1, 1)$, donde c es una constante arbitraria.
b) Demuestre que $(\eta, \mathbf{y}) = 0$ para todo $\mathbf{y}$ encontrado en el inciso (a).
c) Resuelva el sistema $(A - 2I)\zeta = \eta$, mostrando que ζ debe ser como se da en la ecuación

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde k es una constante arbitraria.
10) Demuestre que $r = 2$ es una raíz triple de la ecuación característica para el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} x$$

En los problemas siguientes, resuelva el problema de valor inicial dado

1. $x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $x' = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $x' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6.4. La ecuación no homogénea

Variación de Parámetros

En los siguientes problemas use el método de variación de parámetros para resolver los siguientes sistemas

1. $x' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3/4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

2. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}$

3. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} t$

4. $x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

5. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$

6. $x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$

7. $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{t} \\ t \end{pmatrix}$

8. $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

9. $x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$

10. $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$

En los problemas siguientes determine e^{At} encontrado primero una matriz fundamental $X(t)$ de $x' = Ax$ y luego usando la fórmula

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

1. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$

3. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$

4. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} x$

En los problemas siguientes determine e^{At} utilizando vectores propios generalizados para encontrar una matriz fundamental y luego usando la fórmula

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

1. $x' = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$

En los problemas siguientes use vectores generalizados de A para encontrar la solución general del sistema $x' = Ax$.

1. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

3. $x' = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & -16 & 7 \end{pmatrix} x$

4. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$

Emile Borel
"La conclusión final es que sabemos muy poco y sin embargo es asombroso lo mucho que conocemos. Y más asombroso todavía, que un conocimiento tan pequeño pueda dar tanto poder".
Albert Einstein
"La matemática se escribe para los matemáticos, quienes, si no me equivoco, pensarán que mi trabajo será útil también a la comunidad eclesiástica,..."

■

Práctica 7

Estabilidad

En cada uno de los problemas del 1 al 8 clasifique el punto crítico $(0,0)$, y determine su estabilidad

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 7y \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{4}y \end{cases}$$

1. Calcular las soluciones de los siguientes sistemas, y dibujar las trayectorias

   a) $x' = x, \quad y' = y$
   b) $x' = -x, \quad y' = -y$
   c) $x' = x, \quad y' = -y$
   d) $x' = -x, \quad y' = 2y$
   e) $x' = -x, \quad y' = -2y$
   f) $x' = -y, \quad y' = x$
   g) $x' = x, \quad y' = 2y$

1. Analizar la estabilidad del punto de reposo $(0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + x^5; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - y^2 \end{cases}$$

R. El punto de reposo es estable

2. Analizar la estabilidad del punto de reposo $(0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - 5y - 3z \end{cases}$$

R. El punto de reposo es inestable

3. Analizar la estabilidad del punto de reposo $(0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + e^y - \cos y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y - \sin y \end{cases}$$

R. El punto de reposo es inestable

4. Analizar la estabilidad del punto de reposo $(0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y - x^5; \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y^5 \end{cases}$$

R. El punto de reposo es estable

5. ¿Para qué valores de α el punto de reposo $(0,0)$ es sistema dado es estable?

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \alpha x - x^5 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y^5 \end{cases}$$

R. Para $\alpha \leq 0$ el punto de reposo es asintóticamente estable. Para $\alpha > 0$, es inestable.

6. ¿Es estable la solución $x = 0$ de la ecuación

$$\dddot{x} + 5\ddot{x} + 2\dot{x} + 20x = 0 \quad ?$$

R. El punto de reposo es estable.

7. ¿Qué clase de punto de reposo $x = 0, y = 0$, tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$$

R. Montura

8. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin t$$

e investigar su estabilidad.
R. La solución periódica $x = 1/5 \sin t - 2/5 \cos t$, es asintóticamente estable.

9. Analizar la estabilidad de la solución trivial en la ecuación

$$\ddot{x} + (\alpha - 1)\dot{x} + (4 - \alpha^2)x = 0$$

donde α es un parámetro.
R. Para $1 < \alpha < 2$ la solución $x = 0$, es asintóticamente estable.
Para $\alpha = 1, \alpha = 2$ la solución $x = 0$ es estable.
Para $\alpha > 2$ y para $\alpha < 1$, la solución es inestable.

10. Hallar la región de estabilidad de

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (1 - \alpha)x = 0$$

R. La región de estabilidad es $0 \leq \alpha \leq 1$
La de estabilidad asintótica es $0 < \alpha < 1$

11. Hallar la región de estabilidad de

$$\dddot{x} + \ddot{x} + \alpha^2\dot{x} + 5\alpha x = 0 \quad ?$$

R. La región de estabilidad es $\alpha \geq 5$.
La región de estabilidad asintótica es, $\alpha > 5$.

12. construyendo funciones de Liapunov adecuadas de la forma $ax^2 + b^2$ donde a y b deben determinarse. Demuestre además que para cada uno de los sistemas, el punto crítico en el origen es el de tipo indicado.

    a) $dx/dt = -x^3 + xy^2, \quad dy/dt = -2x^2y - y^3;$ R. Asintóticamente estable
    b) $dx/dt = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2, \quad dy/dt = -y^3;$ R. Asintóticamente estable
    c) $dx/dt = -x^3 + 2y^3, \quad dy/dt = -2xy^2;$ R. Estable (cuando menos)
    d) $dx/dt = x^3 - y^3, \quad dy/dt = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3;$ R. Inestable