Práctica No. 2

Mat 136- Algebra Lineal

Determinantes

1. Hallar los valores de λ para los que $\det(A) = 0$

   ❶ $\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{pmatrix}$

   ❷ $\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

2. Demuestre que si A y B son matrices diagonales de $n \times n$, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3. Demuestre que en general no se cumple que $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

4. Muestre que si A es triangular, entonces $\det(A) \neq 0$ si y solo si todos los elementos en la diagonal de A son diferentes de cero.

5. Dado que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, calcular

   ❶ $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

   ❷ $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

   ❸ $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

   ❹ $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

6. Suponiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8$ Calcule

   $$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2b-3e & 2c-3f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

7. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

   Demuestre que $\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31}$

8. Demuestre que si α es un escalar y A una matriz $n \times n$, entonces $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

9. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

   Suponiendo que $\det(A) = -7$, determinar

   (a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$

10. Sin evaluar directamente, demostrar que $\det\begin{pmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

11. Sean A y B matrices $n \times n$. Demostrar que si A es invertible, entonces $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$

12. Expresar

    $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$

    como una suma de cuatro determinantes cuyos elementos no contengan sumas.

13. Demuestre que si

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{pmatrix}$$

entonces

$|A| = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

14. Demuestre que si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \\ a_o & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

entonces $|A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda^1 + a_o$

15. demostrar que si $\det(A) = 1$ y todos los elementos de A son enteros, entonces todos los elementos de A^{-1} son enteros.

16. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si la suma de todos los elementos de cada columna de A es cero, entonces $|A| = 0$

17. Determinante de Vandermonde 4×4

Demuestre que si

$$D_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{pmatrix}$$

entonces

$|D_4| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$

18. La matriz A de $n \times n$ se llama **nilpotente** si $A^k = 0$ para algún entero $k \geqslant 1$. Demuestre que las siguientes matrices son nilpotentes y encuentre la k más pequeña.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19. Demuestre que si A es nilpotente, entonces $\det(A) = 0$

20. La matriz A se llama **idempotente** si

$$A^2 = A$$

¿Cuáles son los valores posibles para $\det(A)$ si A es idempotente?

21. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible para todos los valores de θ, luego hallar A^{-1} empleando la fórmula: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)$.

22. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

23. Demostrar: Si A es invertible, entonces $\operatorname{adj}(A)$ es invertible y

$$[\operatorname{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \operatorname{adj}(A^{-1})$$

24. Demostrar: Si A es una matriz $n \times n$, entonces $\det[\operatorname{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$

25. Sea A una matriz de $n \times n$. Suponer que B_1 se obtiene al sumar el mismo número t a cada elemento en el í-ésimo renglón de A, y que B_2 se obtiene al restar t de cada elemento en el i-ésimo renglón de A. Demostrar que $\det(A) = \dfrac{1}{2}[\det(B_1) + \det(B_2)]$

26. Sin evaluar directamente el determinante, demostrar que

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

27. Determine si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule su inversa.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

28. Utilice determinantes para demostrar que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y solo si A^t es invertible.

29. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ verifique que

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

30. ¿Para cuales valores de α la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ es no invertible?

31. Calcular

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

32. Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

33. Resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & & = & 2 \end{array}$$

Historia de los Determinantes

Los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes que las matrices. El término matriz fue utilizado por primera vez por James Joseph Silvestre, cuya intención era que su significado fuera ”madre de los determinantes“ El matemático frances Augustin-Louis Cauchy $(1789 - 1857)$ contribuyó de manera importante en la teoría de los determinantes. Cauchy redactó una memoria de 84 páginas, en 1812, el cuál contenía la primera prueba del teorema $|AB| = |A||B|$. En 1840 definió la ecuación característica de la matriz A como la ecuación polinomial $|A - \lambda I| = 0$ el cuál se estudiara posteriormente. Se otorga a Cauchy el crédito de establecer un nuevo estándar de rigor en las publicaciones matemáticas. Después de Cauchy, se tornó más difícil publicar un artículo basado en la intuición; se pedía adhesión estricta a las demostraciones formales. La expansión por cofactores de un determinate fue utilizada por primera vez por un matemático francés, Pierre- Simon Laplace $(1749 - 1827)$. Laplace es más conocido por la transformada de Laplace que se estudia en ecuaciones diferenciales (Matemática Aplicada). Una aportación importante a la teoría de los determinantes (después de Cauchy) lo hizo el matemático alemán Carl Gustav Jacobi $(1804 - 1851)$. Fue con él que la palabra ”determinante“ ganó su aceptación final. Jacobi uso primero un determinante aplicado a las funciones para establecer la teoría de funciones de diversas variables. Más tarde , Sylvester bautizó a este determinate el Jacobiano. Finalmente, ninguna historia de determinantes estaría completa sin el libro de An Elementary Theory of Determinants, escrito en 1867 por Charles Dogdson. En dicho libro se dan las condiciones bajo las cuales los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. Estas condiciones están escritas en términos de los determinantes de los menores de las matrices de coeficientes. Charles Dogson es más conocido por su seudónimo de escritor, Lewis Carroll. Con ese nombre publicó su famoso libro *Alicia en el país de las maravillas*.