Práctica No. 1

Mat 136- Algebra Lineal

Sistemas Lineales y Matrices

1. Encontrar una ecuación lineal en las variables x y y que tenga la solución general $x = 5+2t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$

2. Una caja contiene un total de 13 monedas distintas de 1, 5 y 10 centavos, cuyo valor total es de 83 centavos. ¿Cuántas monedas de cada denominación hay en la caja?

3. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para que valores de a el sistema tiene solución única, justifique su respuesta.
$$\begin{array}{rcrcrl} ax & + & y & + & z & = 1 \\ x & + & ay & + & z & = 1 \\ x & + & y & + & az & = 1 \end{array}$$

4. En el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para que valores de a el sistema:
   (a) No tiene solución.
   (b) Tiene exactamente una solución
   (c) Tiene soluciones infinitas
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & y & - & az & = 0 \\ x & - & y & - & 2z & = 1 \\ -x & + & 2y & & & = a \end{array}$$

5. Encuentre las condiciones sobre a, b y c tales que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones
$$\begin{array}{rcrl} ax & + & by & = c \\ bx & + & ay & = c \end{array}$$

6. ¿Para que valor(es) de λ el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales ?
$$\begin{array}{rcrl} (\lambda-3)x & + & y & = 0 \\ x & + & (\lambda-3)y & = 0 \end{array}$$

7. Encuentre las condiciones sobre a y b tales que el siguiente sistema tenga exactamente una solución.
$$\begin{array}{rcrl} ax & + & by & = c \\ ax & - & by & = c \end{array}$$

8. Hallar las condiciones sobre a, b, c y d tales que el siguiente sistema no tenga solución.
$$\begin{array}{rcrl} ax & - & by & = c \\ bx & + & ay & = d \end{array}$$

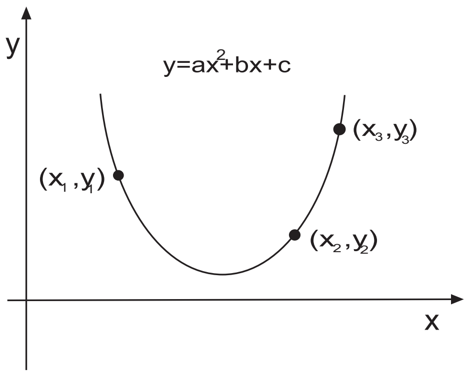
9. Considerar el sistema de ecuaciones
$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & 2z & = a \\ x & & & + & z & = b \\ 2x & + & y & + & 3z & = c \end{array}$$
Demostrar que para que el sistema sea consistente, a, b y c deben satisfacer $c = a + b$.

10. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y bestias viven en el?

11. Reducir las matrices dadas a la forma escalonada (a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

12. Reducir las siguientes matrices a la forma escalonada reducida
(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

13. La curva $y = ax^2 + bx + c$ de la figura pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demostrar que los coeficientes a, b y c son una solución del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es $\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$



14. Un viajero que acaba de regresar de Europa gasto 30\$ diarios en Inglaterra, 20\$ diarios en Francia y 20\$ diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó 20\$ diarios en Inglaterra, 30\$ diarios en Francia y 20\$ diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de 10\$ diarios en cada pais. Los registros del viajero indican que gastó un total de 340\$ en hospedaje, 320\$ en comida y 140\$ en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

15. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe, además, un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero solo 2. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base(es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo o muestre que la información del agente es incorrecta debido a su inconsistencia.

16. Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión radio y revista, se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de nuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un costo de 250000\$, en radio 5000\$ y en revista 30000\$. En el segundo presupuesto 310000\$, 4000\$ y 15000\$ y en el último presupuesto 560000\$, 10000\$ y 35000\$. Los totales por presupuesto son los siguientes: 21795000\$, 31767000\$ y 61225000\$. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

17. Considere el sistema
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & y & + & 3z & = a \\ 3x & + & y & - & 5z & = b \\ -5x & - & 5y & + & 21z & = c \end{array}$$
Demuestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

18. Considere el sistema
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & 3y & + & 5z & = 0 \\ -x & + & 7y & - & z & = 0 \\ 4x & - & 11y & + & kz & = 0 \end{array}$$
¿Para que valores de k tendrá soluciones no triviales?

19. Demostrar lo siguiente: Si A es una matriz $m \times n$, entonces
$$tr(AA^t) = tr(A^tA) = s$$
donde s es la suma de los cuadrados de los elementos de A.

Recuerde: Para A, $n \times n$ $tr(A)$ =Traza de $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

20. Muestre que el sistema homogéneo de ecuaciones
$$\begin{array}{rcrl} ax & + & by & = 0 \\ cx & + & dy & = 0 \end{array}$$
tiene un numero infinito de soluciones si y solo si $ad - bc = 0$

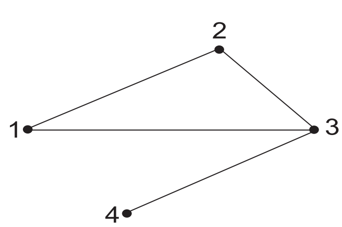
21. Considerar el sistema de ecuaciones
$$\begin{array}{rcrl} ax & + & by & = 0 \\ cx & + & dy & = 0 \end{array}$$

   ❶ Demostrar que si $x = x_o$, $y = y_o$ es cualquier solución del sistema y k es cualquier constante, entonces $x = kx_o$, $y = ky_o$ también es una solución.

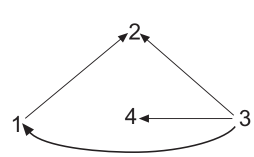
   ❷ Demostrar que si $x = x_o$, $y = y_o$ y $x = x_1$, $y = y_1$ son dos soluciones cualesquiera, entonces $x = x_o + x_1$, $y = y_o + y_1$ también es una solución.

22. Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación para X: $3(2A + B + X) = 5(X - A + B)$

23. (Matriz de incidencia) Considere el grafo de la figura. Construya una matriz de 4×4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si el punto i no está conectado (unido por una linea) con el punto j y $a_{ij} = 1$ si el punto i está conectado con el punto j.



24. Encuentre la matriz de incidencia del grafo dirigido (similar al problema anterior)



25. Demuestre que $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

26. Un fabricante de joyería de diseño tiene órdenes por dos anillos, tres pares de aretes, cinco prendedores y un collar. El fabricante estima que le llevará 1 hora de mano de obra hacer un anillo, $1\frac{1}{2}$ horas hacer un par de aretes, $1/2$ para un prendedor y dos horas para un collar.

   ❶ Exprese las órdenes del fabricante como un vector renglón.

   ❷ Exprese los requerimientos en horas para los distintos tipos de joyas como un vector columna.

   ❸ Utilice el producto escalar para calcular el número total de horas que requerirá para terminar las órdenes.

27. Una compañía paga un salario a sus ejecutivos y les da un porcentaje de sus acciones como un bono anual. El año pasado el presidente de la compañía recibió $80{,}000\$$ y 50 acciones, se pagó a cada uno de los vicepresidentes $45{,}000\$$ y 20 acciones y el tesorero recibió $40{,}000\$$ y 10 acciones.

   ❶ Exprese los pagos a los ejecutivos en dinero y acciones como una matriz de 2×3.

   ❷ Exprese el número de ejecutivos de cada nivel como un vector columna.

   ❸ Utilice la multiplicación de matrices para calcular la cantidad total de dinero y el número total de acciones que pagó la compañía a los ejecutivos el año pasado.

28. Una matriz A de $n \times n$ tiene la propiedad de que AB es la matriz cero para cualquier matriz B de $n \times n$. Pruebe que A es la matriz cero.

29. Encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo dado encontrando primero una solución (si es posible) y después todas las soluciones al sistema homogéneo asociado.

   ❶ $$\begin{array}{rcrl} x & - & 3y & = 2 \\ -2x & + & 6y & = -4 \end{array}$$

❷ $\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & + & 2w & = 3 \\ 3x & + & 2y & + & z & - & w & = 5 \end{array}$

30. Determine si la matriz es invertible. de ser así, calcule la inversa.

❶ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

❷ $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$

❸ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

❹ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

31. Muestre que si A, B y C son matrices inversibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

32. La suma de dos matrices invertible, ¿necesariamente es invertible?

33. Si $A_1, A_2, \cdots, A_m$ son matrices invertibles de $n \times n$, muestre que $A_1 A_2 . \cdots A_m$ es invertible y calcule su inversa

34. Demuestre que para todo número real θ la matriz $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

35. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama diagonal si todos sus elementos fuera fuera de la diagonal principal son cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Demuestre que una matriz diagonal es invertible si y solo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

36. ❶ Encontrar matrices A y B 2×2 tales que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

    ❷ Demostrar que si A y B son matrices cuadradas tales que $AB = BA$, entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

37. Sean A, B, F y M matrices invertibles de $n \times n$. Si $M = I + F(\lambda I - A_F)^{-1}B$ y $A_F = A + BF$. Demuestre que $M^{-1} = B^{-1}(\lambda I - A_F)(\lambda I - A)^{-1}B$

38. Una fabrica de muebles de calidad tiene dos divisiones: un taller de máquinas herramientas donde se fabrican las partes de los muebles, y una división de ensamble y terminado en la que se unen las partes para obtener el producto final. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división y que cada empleado trabaja 8 horas. Suponga también que se producen únicamente dos artículos: sillas y mesas. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinado y $\frac{480}{17}$ horas de ensamble y terminado. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinado y $\frac{640}{17}$ horas de ensamble y terminado. Suponiendo que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante desea mantener ocupados a todos sus empleados, ¿cuantas sillas y cuántas mesas puede producir está fabrica al día?

39. Si A y B son matrices invertibles, resuelva para X.

    (a) $BXA = B$

    (b) $A^{-1}X = A$

40. Sean A y B matrices $n \times m$. Demuestre, usando la definición, que $(A+B)^t = A^t + B^t$

41. Una matriz A de $n \times n$ es normal si $AA^t = A^tA$. Pruebe que la siguiente matriz es normal.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

42. Encuentre los números α y β tales que $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica.

43. Si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, pruebe que $A + B$ es simétrica.

44. Verdad o falso? justifique su respuesta. Si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, $(AB)^t = B^tA^t$

45. Demuestre que para cualquier matriz A la matriz producto AA^t esta definida y es una matriz simétrica.

46. Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica.

47. Una matriz se denomina **antisimétrica** si $A^t = -A$ (es decir $a_{ij} = -a_{ji}$). ¿Cuales de las siguientes matrices es antisimétrica?

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

48. Sean A y B dos matrices antisimétricas de $n \times n$. Demuestre que $A + B$ es antisimétrica.

49. Si A es una matriz real antisimétrica, demuestre que toda componente en la diagonal principal de A es cero.

50. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz $1/2(A + A^t)$ es simétrica.

51. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz $1/2(A - A^t)$ es antisimétrica.

52. Demuestre que cualquier matriz cuadrada se puede escribir de una forma única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

53. Determine cuáles matrices son matrices elementales.

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

54. Encuentre la matriz elemental E tal que $EA = B$

    (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

    (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

55. Demostrar que si

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

    es una matriz elemental, entonces por lo menos un elemento en el tercer renglón debe ser igual a cero.

56. Encuentre la inversa de la matriz elemental dada.

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

57. Demuestre que cada matriz es invertible y escríbalo como un producto de matrices elementales.

    (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

58. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donde $ac \neq 0$. Escriba A como un producto de tres matrices elementales y concluya que A es invertible.

59. Sea A una matriz triangular superior de $n \times n$. Pruebe que si toda componente en la diagonal de A es diferente de cero, entonces A es invertible.[Sugerencia: Considere el problema anterior].

60. Demuestre que si A es una matriz triangular superior de $n \times n$ con n componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A^{-1} es triangular superior.

61. Resuelva el sistema dado usando la factorización LU

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

62. Encuentre una factorización LU para cada matriz singular.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

63. Encuentre una factorización LU para cada matriz no cuadrada.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

1. Karl Friedrich Gauss(1777–1855)

Fue un matemático y científico Alemán. Algunas veces nombrado “príncipe de los matemáticos”. Gauss es considerado junto con Isaac Newton y Arquímedes como uno de los tres mas grandes matemáticos que han existido. En toda la historia de las matemáticas quizá nunca ha habido un niño tan precoz como Gauss: según cuenta el mismo, ya dominaba las bases de la matemáticas aún antes de poder hablar. Un día, cuando aún no tenía tres años de edad, su genio se manifestó a su padres de manera bastante elocuente. Su padre estaba preparando la nomina semanal de los obreros a su cargo mientras el niño lo observaba en silencio desde un rincón de la habitación. Al final de los cálculos largos y tediosos. Gauss dijo a su padre que había un error en el resultado y le dijo la respuesta, a la que había llegado mentalmente. Para sorpresa de sus padres,se dieron cuenta de que Gauss tenía razón. En su disertación doctoral, Gauss proporcionó la primera demostración completa del teorema fundamental del algebra, que establece que toda ecuación polinómica tiene cuando mucho tantas soluciones como su grado. A los 19 años de edad resolvió un problema que desconcertó por así decirlo a Euclides:inscribir un polígono regular de 17 lados en una circunferencia usando solo regla y compás ; y en 1801, a los 24 años de edad, publicó su primera obra maestra. Disquisitiones Arithmeticae considerado por muchos como uno de los logros más brillantes en matemática. En este documento Gauss sistematizo el estudio de la teoría de números (propiedades de los enteros) y formuló los conceptos básicos que constituyen los cimientos de este tema. Entre la multitud de logros alcanzados Gauss descubrió la curva acampanada o gaussiana que es fundamental en probabilidad, proporcionó la primera interpretación geométrica de los complejos y estableció el papel fundamental de estos en la matemática, descubrió la geometría no euclidiana 30 años antes de que estas ideas fueran publicados por otros, etc.. Se ha afirmado que si Gauss hubiera publicado todos sus descubrimientos, el estado actual de la matemática habría avanzado 50 años. Sin duda alguna es el matemático más grande de la época moderna.