INFERENCIA ESTADISTICA II EST 243, PRACTICA No. 1, FECHA DE ENTREGA 26 /02/2025

1. Sea $X_1, X_2, \dots \dots \dots \dots X_n$, una muestra aleatoria que proviene de una población con función de densidad uniforme en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, a) Halle una estadística suficiente para $\theta = (\mu, \sigma)$, b) Halle una estadística suficiente para $\sigma, si\ \mu$ es conocido, c) Halle una estadística suficiente para μ, $si\ \sigma$ es conocido.

2.Sea $X_1, X_2, \dots \dots \dots \dots X_n$, una muestra aleatoria que proviene de una distribución Normal N(θ, θ^2). Halle la estadística Minimal suficiente para el par (θ, θ^2).

3.Hallar una estadística Minimal suficiente para a, y b, en base a una muestra aleatoria de la población: $f(x/a\,, b) = \frac{1}{b}\ e^{-\frac{x-a}{b}}\ , x > a\ , a \in \mathbb{R}, b > 0$ y cero en otra parte.

4.Sea X, Y una muestra aleatoria de tamaño dos, extraída de una población de Poisson truncada Z, es decir, P (Z=0/ $\theta) = e^{-\theta}$, $P(Z = 1/\theta) = \theta e^{-\theta}$, $P(Z = 2/\theta) = 1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta}$,y $P(Z = z/\theta) = 0$, para todo Z distinto de 0,1,2. $\theta > 0$. Probar que T=X+Y, no es una estadística suficiente.

5. Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$,..........(X_n, Y_n), una muestra aleatoria que proviene de una función de densidad conjunta, dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \theta^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1 - \theta^2)}[x^2 - 2\theta xy + y^2]\}, -\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty$$

Halle la estadística Minimal suficiente para θ, determine si es una estadística completa.

6. Sea $X_1, X_2, \dots \dots \dots \dots X_n$, una muestra aleatoria que proviene de una población con función de densidad dada por: $f(x/\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\ , si\ 0 < x < \theta$, halle si existe, una estadística completa para θ.

7. Sea $X_1, X_2, \dots \dots \dots \dots X_n$, una muestra aleatoria que proviene, que es extraída de una población con función de densidad Beta de parámetros $\alpha\ y\ \beta$, compruebe que esta densidad pertenece a la familia de funciones completas, y halle las estadísticas completas para $\alpha\ y\ \beta$.

8. Probar que si X es una variable aleatoria con función de probabilidad o función de densidad que pertenece a la familia de funciones exponenciales, entonces:

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial w_i(\theta) t_i(x)}{\partial \theta_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial \theta_j} ln\ C(\theta$$

9.Haciendo uso de la formula del ejercicio 8. Encuentre el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con función de probabilidad geométrica de parámetro p.

10. Sea $X_1, X_2, \dots \dots \dots \dots X_n$, una muestra aleatoria que proviene de una población con función de densidad Gaussiana inversa, es decir, $f(x/\mu\,, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\}, x > 0.$

Muestre que las estadísticas: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, y $T = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}}}$ son suficientes y completos