Formulario Matricial

1. Matrices, Vectores y Operaciones

1.1. Definiciones básicas y notación

- Matriz A de dimensión m x n: Arreglo rectangular de m filas y n columnas, denotada por $A = [a_{ij}]$, donde a_{ij} es el elemento en la i-ésima fila y j-ésima columna.

- Matriz cuadrada: $m = n$.

- Matriz rectangular: $m \neq n$.

- Vector fila: Matriz de dimensión $1 \times n$, $X = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$.

- Vector columna: Matriz de dimensión $m \times 1$, $Y = (y_1\ y_2\ \vdots\ y_m)$.

- Matriz triangular superior: Matriz cuadrada donde $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

- Matriz triangular inferior: Matriz cuadrada donde $b_{ij} = 0$ para $i < j$.

- Matriz diagonal: Matriz cuadrada donde $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

- Matriz escalar: Matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a una constante k. $S = kI$.

- Matriz unidad o identidad (I): Matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en el resto.

- Matriz nula (O): Matriz donde todos los elementos son cero.

- Matriz escalonada: El número de ceros antes del primer elemento no nulo aumenta fila por fila.

- Matriz escalonada reducida: Es escalonada, el primer elemento no nulo de cada fila es 1 y es el único elemento no nulo en su columna.

1.2. Adición matricial y multiplicación matricial por un escalar

- Suma de matrices: Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ tienen la misma dimensión $m \times n$, entonces $C = A + B = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- Propiedad conmutativa: $A + B = B + A$. Demostración: Se basa en la propiedad conmutativa de la suma de números reales: $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$.

- Propiedad asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$. Demostración: Se basa en la propiedad asociativa de la suma de números reales.

- Existencia de neutro: $A + O = O + A = A$, donde O es la matriz nula.

- Existencia del opuesto: $A + (-A) = O$, donde $-A = [-a_{ij}]$.

- Multiplicación por un escalar: Si $A = [a_{ij}]$ es de dimensión $m \times n$ y $k \in \mathbb{R}$ es un escalar, entonces $C = kA = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = ka_{ij}$.

- Propiedades:

- $k(A + B) = kA + kB$. - $(k + l)A = kA + lA$. - $k(lA) = (kl)A$. - $1A = A$. - $0A = O$.

1.3. Multiplicación matricial

- Si $A = [a_{ij}]$ es de dimensión $m \times n$ y $B = [b_{jl}]$ es de dimensión $n \times p$, entonces $C = AB = [c_{il}]$ es de dimensión $m \times p$, donde $c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}$. Propiedades:

- Asociativa: $A(BC) = (AB)C$.

- Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$ y $(B + C)D = BD + CD$.

- Asociatividad con escalar: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

- Neutro: $AI = IA = A$, donde I es la matriz identidad de dimensión adecuada.

- Potencia: $A^p A^q = A^{p+q}$.

- No conmutativa en general: $AB \neq BA$.

1.4. Matrices particionadas

- Una matriz A se puede dividir en submatrices o bloques. - Suma: Si $A = [A_{ij}]$ y $B = [B_{ij}]$ tienen la misma partición, $A + B = [A_{ij} + B_{ij}]$. - Multiplicación por escalar: $kA = [kA_{ij}]$. - Transpuesta: $A^t = [A^t_{ji}]$. - Multiplicación: Si las particiones son compatibles, $(A)(B) = [\sum_j A_{ij} B_{jk}]$. - Determinante (caso especial): Si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ o $A = \begin{pmatrix} A_{11} & O\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22})$. - Complemento de Schur de A_{11} en $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ (si A_{11} es no singular): $A_{11/A} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$. - Fórmula de Schur: $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{11/A})$ si A_{11} es no singular, y $\det(A) = \det(A_{22}) \det(A_{22/A})$ si A_{22} es no singular, donde $A_{22/A} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$.

1.5. La traza de matrices cuadradas

- Para una matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$, la traza es $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. - Propiedades:

- $\operatorname{tr}(kA) = k\operatorname{tr}(A)$. - $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. - $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A)$. - $\operatorname{tr}(I_n) = n$. - $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (no aparece explícitamente en las fuentes, pero es una propiedad importante).

1.6. Matrices especiales

- Matriz transpuesta: $A^t = [a_{ji}]$. - Propiedades: $(A^t)^t = A$, $(kA)^t = kA^t$, $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$, $(AB)^t = B^t A^t$. - Matriz simétrica: $A = A^t$ (implica A es cuadrada y $a_{ij} = a_{ji}$). - Propiedades: $A + B$ y kA son simétricas si A y B lo son. Si A es invertible, A^{-1} es simétrica. DD^t y $D^t D$ son simétricas para cualquier matriz D. - Matriz antisimétrica: $A = -A^t$ (implica A es cuadrada y $a_{ij} = -a_{ji}$, elementos diagonales son cero). - Matriz normal: $AA^t = A^t A$ (matrices simétricas, antisimétricas y ortogonales son normales). - Matriz idempotente: $A^2 = A$. - Matriz periódica (de periodo p): $B^{p+1} = B$ (si $p = 1$, es idempotente). - Matriz involutiva: $A^2 = I$ (implica $A = A^{-1}$). - Matriz nilpotente: $A^p = O$ para algún entero positivo p. - Matriz elemental: Resultado de aplicar una operación elemental a la matriz identidad I_n. Toda matriz elemental es invertible, y su inversa también es elemental. - Matriz inversa: Si A es cuadrada de dimensión $n \times n$, B es su inversa A^{-1} si $AB = BA = I_n$. La inversa, si existe, es única. - Propiedades: $(A^{-1})^{-1} = A$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ (si $k \neq 0$), $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. - Matriz ortogonal: Matriz cuadrada A tal que $AA^t = A^t A = I$, lo que implica $A^{-1} = A^t$.

- Propiedades: $|A| = \pm 1$, A^t es ortogonal, sus valores propios tienen módulo 1.

1.7. Aplicación práctica

- La teoría matricial es fundamental en estadística para modelos de gran dimensión, identificación de probabilidades, matrices de transición, análisis factorial, cadenas de Markov, correlaciones, etc..

2. Factorización Matricial

2.2. Descomposición LU

- Para una matriz A, se busca $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior (generalmente con unos en la diagonal) y U es una matriz triangular superior. Se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones resultante del producto.

2.3. Descomposición LDU

- $A = LDU$, donde L es triangular inferior con unos en la diagonal, D es diagonal (con los pivotes de la descomposición LU), y U es triangular superior con unos en la diagonal.

2.4. Descomposición Cholesky

- Para una matriz simétrica A con valores propios positivos, $A = LL^t$, donde L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos. Se relaciona con la descomposición LDU donde $U = L^t$ y D tiene elementos positivos.

2.5. Descomposición en Valores Singulares (SVD)

- Para una matriz A de dimensión $m \times n$ y rango r, $A = USV^t$, donde U es una matriz ortogonal $m \times m$, S es una matriz diagonal $m \times n$ con valores singulares no negativos $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_r > 0$ en la diagonal, y V es una matriz ortogonal $n \times n$. Los valores singulares son las raíces cuadradas de los valores propios de A^tA (o AA^t).

2.6. Descomposición Espectral y Matrices Raíces Cuadradas

- Para una matriz simétrica A de dimensión $n \times n$, $A = PDP^{-1} = PDP^t$, donde P es una matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios normalizados de A, y D es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios correspondientes. - Matriz raíz cuadrada: $\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^t$, donde $\sqrt{D}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son las raíces cuadradas de los valores propios de A (solo si los valores propios son no negativos).

2.8. Descomposición de Schur

- Para una matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^tAQ = T$, donde T es una matriz triangular superior con los valores propios de A en la diagonal. Si A es real y simétrica, entonces T es diagonal (la descomposición espectral).

2.9. Diagonalización simultánea de matrices simétricas

- Dos matrices simétricas A y B son simultáneamente diagonalizables por congruencia si existe una matriz no singular P tal que P^tAP y P^tBP son ambas diagonales. - Una matriz cuadrada A es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = PDP^t$ es diagonal. Las columnas de P son los vectores propios ortonormales de A, y los elementos de D son los valores propios de A.

2.10. Normas matriciales

- Norma de Frobenius: $|A|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^H)}$ (en el caso real, $|A|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^t)}$). - Propiedades: - $|A| \geq 0$, $|A| = 0 \iff A = O$. - $|kA| = |k||A|$. - $|A+B| \leq |A| + |B|$ (desigualdad triangular). - $|AB| \leq |A||B|$ (submultiplicatividad).

3. Inverso Generalizado

3.2. Inversa generalizada

- Una matriz G es una inversa generalizada de A si $AGA = A$. - Pseudoinversa por la derecha (R): Si rango$(A) = m$, existe R tal que $AR = I_m$, y $R = A^t(AA^t)^{-1}$ (si AA^t es invertible). - Pseudoinversa por la izquierda (L): Si rango$(A) = n$, existe L tal que $LA = I_n$, y $L = (A^tA)^{-1}A^t$ (si A^tA es invertible). - Inversa generalizada de Moore-Penrose (A^+): Para cualquier matriz A de dimensión $m \times n$, existe una única matriz A^+ de dimensión $n \times m$ que satisface las siguientes cuatro condiciones:

- $AA^+A = A$ - $A^+AA^+ = A^+$ - $(AA^+)^t = AA^+$ (simétrica) - $(A^+A)^t = A^+A$ (simétrica)

3.3. Propiedades básicas de la inversa de Moore-Penrose

- Si A es invertible, $A^+ = A^{-1}$. - $(A^+)^+ = A$. - $(A^t)^+ = (A^+)^t$. - $(kA)^+ = k^{-1}A^+$ para $k \neq 0$.

3.4. Producto matricial de inversas de Moore-Penrose

- $(AD)^+ = D^+A^+$ si se cumplen ciertas condiciones (por ejemplo, si las columnas de D son linealmente independientes y las filas de A son linealmente independientes). - $(A^+A)(DD^+) = (DD^+)(A^+A)$ (no siempre cierto, la condición dada en la fuente parece incompleta o requiere más contexto sobre A y D).

3.8. Otras inversas generalizadas (Pseudoinversa de Bott-Duffin)

- Para un sistema $Ax + y = b$ con restricciones en y (por ejemplo, $y \in L^\perp$), la pseudoinversa de Bott-Duffin se define como $A_{(L)}^{-1} = P_LA(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}$, donde P_L y $P_{L^\perp}$ son proyectores sobre los subespacios L y su complemento ortogonal. Si $AP_L + P_{L^\perp}$ es no singular, una solución es $x = A_{(L)}^{-1}b$ y $y = (I - AA_{(L)}^{-1})b$.