Online Algorithms and Scheduling
Profesor: Andreas Wiese.
Auxiliar: Andrés Cristi.

Clase Auxiliar 5
16 de Abril

P1. Uniform MTS

Considere un MTS uniforme de n estados, es decir, un espacio (X, d) tal que $d(x, y) = 1$ para todo $x, y \in X$; en el que las tareas toman valores sólo en $\{0, 1\}$. Estudiaremos un algoritmo online aleatorizado óptimo.

a) Para la cota inferior, considere una instancia de k tareas, cada una valiendo 1 en un estado aleatorio uniforme y 0 en el resto, todas independientes. Muestre que el costo esperado de cualquier algoritmo determinista es k/n.

b) Sea $c(k)$ el costo esperado del siguiente algoritmo offline: en el paso i, tomar $a(i)$ el primer paso después de i en el que aparecen todas las tareas asociadas a cada estado; si el algoritmo estaba en el estado asociado a τ_i, cambiar al estado asociado a $\tau_{a(i)}$, si no, quedarse en el mismo. Pruebe que $\text{lím}_k \frac{c(k)}{k} = \frac{1}{nH_n}$.

c) Concluya que ningún algoritmo aleatorizado es mejor que H_n-competitivo.

d) Para la cota inferior, estudie la forma de la función *offset* del sistema y los costos óptimos de transitar entre sus posibles valores.

e) Considere un algoritmo que toma un estado aleatorio uniforme entre los óptimos según la función *offset*. ¿Cuál sería la forma razonable de realizar las transiciones?

f) Tomando el potencial $\Phi = H_m$, donde m es el número de estados óptimos según la función *offset*, pruebe que el algoritmo es H_n-competitivo.