Online Algorithms and Scheduling
Profesor: Andreas Wiese.
Auxiliar: Andrés Cristi.

Clase Auxiliar 7
07 de Mayo

P1. Si w es la *work function* actual, r es el siguiente request y w' es la actualización de w con r, decimos que la configuración A es máximo con respecto a w si maximiza $\max_X\{w'(X) - w(X)\}$ y que es mínimo para r con respecto a w si minimiza $\min_X\{w(X) - \sum_{x\in X} d(x,r)\}$. En cátedra probamos que si A es mínimo entonces también es máximo. Considere el espacio métrico dado por los puntos en un círculo y la distancia sobre éste.

a) Muestre que si $\bar{r}_i$ es el punto opuesto en el círculo a r_i, entonces la configuración $\bar{r}_i^k$ (k copias de $\bar{r}_i$) es mínimo para r_i con respecto a w_{i-1}.

b) Pruebe que las siguientes desigualdades son equivalentes (para ciertas C, C' constantes que no dependen de la instancia)

$$\sum_{i=1}^{n} \max_X\{w_i(X) - w_{i-1}(X)\} \leq (c+1)\min_Y\{w_n(Y)\} + C \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(w_i(\bar{r}_i^k) - w_{i-1}(\bar{r}_i^k)\right) \leq (c+1)w_n(\bar{r}_n^k) + C' \tag{2}$$

c) Pruebe que si $i < j$, entonces $w_i(\bar{r}_i^k) \leq w_{j-1} + kd(\bar{r}_i, \bar{r}_j)$.

d) Sea $OPT_h(\sigma)$ el óptimo offline al servir σ con h servidores. Pruebe que hay exactamente h requests i tales que el servidor que sirve i no se mueve más hasta el final de la instancia.

e) Pruebe que existe una constante C que no depende de σ, tal que para todo h

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(\bar{r}_i^k) \leq \sum_{i=1}^{n} w_{i-1}(\bar{r}_i^k) + k\cdot OPT_h(\sigma) + h\cdot OPT_k(\sigma) + C \tag{3}$$

f) Concluya que el WFA$_k$ es $2k-1$ competitivo en el círculo, y muestre una cota más ajustada para el caso en que se compara contra un óptimo offline con menos servidores.

g) Qué tan necesario es que el espacio fuera un círculo? Considere un espacio en el que para todo punto a existe un punto opuesto $\bar{a}$ tal que para todo punto b, $d(a,b) + d(b,\bar{a}) = \Delta$.