Online Algorithms and Scheduling
Profesor: Andreas Wiese.
Auxiliar: Andrés Cristi.

Clase Auxiliar 6
23 de Abril

P1. Slack Coverage Algorithm

En el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$, con d la distancia Euclideana, definimos

$$\text{slack}(x, y, r) = d(y, x) + d(x, r) - d(y, r)$$

que por la desigualdad triangular es siempre un valor no negativo.

Para el problema 2-*server* consideremos el algoritmo Slack-Coverage(γ) (que abreviamos SC_γ), con $\gamma \in [0, 1]$. Este algoritmo frente a un request r si x es el servidor más cercano, mueve el otro servidor, y, hacia el servidor x una distancia $\gamma \cdot \text{slack}(x, y, r)$ y luego sirve r con x.

Consideremos el potencial

$$\Phi = aM_{\text{mín}} + b \cdot d(x, y)$$

donde $M_{\text{mín}}$ es el valor del *matching* mínimo entre los servidores de SC_γ y OPT, y a, b son parámetros positivos.

a) Pruebe que cuando OPT sirve un request, Φ aumenta en a lo más $a \cdot c_{\text{OPT}}$, con c_{OPT} la distancia que mueve OPT.

b) Denotando x_0, y_0 a las posiciones de los servidores de SC_γ antes de servir r, pruebe que

$$\Delta d(x, y) \leq d(y_0, r) + d(x_0, y_0).$$

c) Sean s_1 y s_2 los servidores de OPT, donde s_1 es el que acaba de servir r. Suponga que antes de que SC_γ mueva, x estaba emparejado con s_1 en $M_{\text{mín}}$. Pruebe que

$$\Delta\Phi \leq a\big(\gamma \cdot \text{slack}(x, y, r) - d(x, r)\big) + b\big(d(y, r) - d(x, y)\big).$$

d) En el caso en que y era el que estaba emparejado con s_1, pruebe que

$$\Delta\Phi \leq a\big(d(x, y) - \gamma \cdot \text{slack}(x, y, r) - d(y, r)\big) + b\big(d(y, r) - d(x, y)\big)$$

e) Encuentre las condiciones sobre (a, b, γ) para que SC_γ sea a-competitivo.

f) Pruebe que SC_γ es 3-competitivo y que este es el mejor factor que permite este método.