Online Algorithms and Scheduling
Profesor: Andreas Wiese.
Auxiliar: Andrés Cristi.

Clase Auxiliar 3
5 de Abril

P1. Online Bipartite Matching

Dado un grafo bipartito $G = (U, V, E)$ que posee un *matching* perfecto M^*, los vértices de U son revelados uno a uno de manera on-line, junto con sus aristas. Cada vez que llega un nuevo vértice u, debe decidirse de manera irrevocable con qué elemento de $N(u)$ se va a conectar. El objetivo es maximizar el tamaño del *matching* resultante.

a) Pruebe que el algoritmo que a la llegada de u, lo asigna a un elemento arbitrario de $N(u)$ si es posible es 2-competitivo.

b) Muestre que cualquier algoritmo determinista es en el mejor caso 2-competitivo.

c) Muestre que $4/3$ es una cota inferior para la competitividad de un algoritmo aleatorizado.

d) Considere el algoritmo Ranking: al comienzo se elige un orden al azar σ sobre V. Cada vez que llega u, se elige el primer elemento de $N(u)$ disponible según σ. Pruebe que si u no es asignado a $v = M^*(u)$ por Ranking, entonces es asignado a un vértice v' con $\sigma(v') \leq \sigma(v)$.

e) Sea $u \in U$ y $v = M^*(u)$, y considere un orden σ'. Sea σ_i la permutación que resulta de mover v a la posición i. Muestre que si v no es asignado por Ranking(σ'), entonces, para todo i, u es asignado por Ranking(σ_i) a un vértice v_i con $\sigma_i(v_i) \leq \sigma'(v)$.

f) Sea x_t la probabilidad (dada por la distribución de σ) de que el vértice de V que tiene la posición t sea asignado por Ranking. Pruebe que $1 - x_t \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq s \leq t} x_s$.

g) Muestre que en esperanza Ranking asigna a al menos

$$\sum_{s=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^s$$

parejas.

h) Concluya que Ranking es $\frac{e}{e-1}$ competitivo.