IN6228 - Teoría de Juegos
Profesor: José Correa.
Auxiliares: Carlos Bonet, Andrés Cristi.

Tarea 2

P1. Remate casi óptimo.

Suponga que debe rematar un ítem (que usted valora en 0) entre n agentes con valoraciones no negativas, independientes y regulares pero no idénticamente distribuidas. Como el remate de Myerson puede ser bastante complicado en este caso, se le propone el siguiente mecanismo más simple:

- Eliminar a todos los agentes con $c_i(v_i) < 0$.
- Asignar el ítem al agente con mayor valoración entre los que quedan.

donde $c_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ es la valoración virtual del agente i. Compararemos este mecanismo con el remate óptimo (de Myerson).

a) Determine los pagos para que el mecanismo propuesto sea compatible en incentivos.

b) Muestre que si en uno de los mecanismos nadie gana el ítem, entonces en el otro tampoco.

c) Denotemos por I al ganador en el mecanismo óptimo y por J al ganador del propuesto, iguales a 0 si nadie gana. Pruebe que

$$\mathbb{E}(c_I(v_I)|I = J) \cdot \mathbb{P}(I = J) \leq \mathbb{E}(c_J(v_J)) \tag{1}$$

d) Use el hecho de que para todo i, $c_i(v_i) \leq v_i$ para probar que

$$\mathbb{E}(c_I(v_I)|I \neq J) \cdot \mathbb{P}(I \neq J) \leq \mathbb{E}(\bar{p}_J) \tag{2}$$

donde $\bar{p}_i$ es el pago del agente i bajo el mecanismo propuesto.

e) Use las ecuaciones (1) y (2) para concluir que la ganancia esperada bajo el mecanismo óptimo es a lo más el doble de la ganancia esperada del mecanismo propuesto.

P2. Elección Social.

Suponga que los candidatos en una elección se representan por elementos de $\mathbb{R}$, i.e. los candidatos son un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{R}$. En esta elección cada votante $i \in N$ tiene un candidato favorito $p_i \in A$ y prefiere $p' \in A$ por sobre $p'' \in A$ (denotado por $p' \succ_i p''$) si $p'' < p' \leq p_i$ o bien $p'' > p' \geq p_i$ (si ninguna de estas condiciones se cumple entonces cualquier preferencia es posible).

a) Interprete esta condición. ¿Qué situación razonable de elección modela esto?

b) Suponga que hay un número impar de votantes. Muestre que la mediana de los $\{p_i\}_{i\in N}$ es siempre un ganador de Condorcet.

c) Considere el sistema que, dados los rankings de todos los votantes encuentra la mediana de los favoritos declarados de cada uno. ¿Es efectivo que, independiente de lo que declaren el resto de los votantes, a un votante en particular no le conviene mentir en su ranking?

d) Compare su respuesta con el teorema de Gibbard-Satterthwaite.

e) Considere la siguiente versión del sistema de *approval voting*. El votante $i \in N$ vota por todos los candidatos $p \in A$ tales que $|p - p_i| \leq 1$. El sistema luego elige al candidato mas votado. Muestre un ejemplo en donde el único ganador con este sistema no resulta ser ganador de Condorcet.

P3. Licitación de Abastecimiento.

Considere una empresa con 2 plantas, A y B, que debe comprar 1 unidad de insumo para cada planta. Existen n proveedores, y el proveedor i tiene un costo marginal de producción c_i. Además, existe un costo de transporte (conocido) d_{ij} por llevar una unidad de insumo del proveedor i a la planta j. Éste costo lo paga la empresa.

a) Encuentre el mecanismo con Pivote de Clarke que alcanza la eficiencia (en este caso, eficiencia corresponde a la minimización de costo total).

b) Ahora consideramos el caso en que la empresa está interesada en minimizar el costo total esperado a pagar. Para esto, suponga que el costo c_i está distribuido de acuerdo a F_i en el intervalo $C = [\underline{c}, \bar{c}]$. Un mecanismo estará dado por funciones de asignación $x_{iA} : C^n \to \mathbb{R}$, $x_{iB} : C^n \to \mathbb{R}$ y pagos $t : C^n \to \mathbb{R}^n$.

   a) Escriba la función $U_i(c_i, c_i')$ que representa la utilidad del proveedor i si su verdadero costo es c_i pero declara un costo c_i', en términos de x_{iA}, x_{iB} y t_i.

   b) Escriba el problema de maximización que debe resolver la empresa

   c) Muestre que $V_i(c_i) = \max_{c_i' \in [\underline{c}, \bar{c}]} U_i(c_i, c_i')$ es una función convexa y luego pruebe que si un mecanismo es compatible en incentivos entonces

$$R_i(c_i) := E_{c_{-i}}[x_{iA}(c_i, c_{-i}) + x_{iB}(c_i, c_{-i})]$$

   es no-creciente en c_i y $V_i(c_i) = V_i(\bar{c}) - \int_{c_i}^{\bar{c}} R_i(s)ds$.

   d) Reescriba la función objetivo de la empresa de forma que sea sólo función de x_{iA} y x_{iB}.

   e) Encuentre el mecanismo óptimo (puede asumir propiedades necesarias sobre F_i).

P4. Remate de dos Bienes.

Dos bienes indistinguibles serán rematados entre n agentes cuya valoración por el bien sigue una distribución F y son independientes. Cada agente desea obtener solo uno de los bienes, es decir, nunca se asigna dos veces al mismo comprador. En este contexto:

a) Describa la asignación y los pagos de un mecanismo VCG.

b) Pruebe que sigue siendo válido el teorema de equivalencia de ingresos.

c) Asumiendo F regular, encuentre la regla de asignación para un remate de Myerson.

d) Mecanismo de posted price: formule una expresión para encontrar el mejor precio fijo (el precio que maximiza la utilidad del martillero cuando su estrategia es cobrar el mismo precio a todos los clientes interesados).

e) Calcule el ingreso del martillero en las partes **a)**, **c)** y **d)** cuando $n = 3$ y $F \sim U[0, 1]$.