Fórmulas de primera y segunda variación, y campos de Jacobi

Andrés Ahumada Gómez

Una vez estudiada la teoría de Morse en variedades, resulta natural buscar extenderla a espacios de dimensión infinita. En este trabajo se harán algunas construcciones, análogas a las hechas en teoría de Morse en variedades, para el espacio de curvas de una variedad.

1. Fórmula de Primera Variación

Sea $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle_g)$ una variedad riemanniana suave ($\mathcal{C}^\infty$) de dimensión n.

Definición 1. Una curva continua $\gamma\colon [a,b] \to M$ es una **curva suave por pedazos** si existe una partición del intervalo $[a,b]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, tal que $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ es una curva suave para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$. Y esta une a los puntos (no necesariamente distintos) p, $q \in M$ si $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$.

Al conjunto de curvas suaves por pedazos que unen a los puntos p y q en M lo denotaremos por $\Omega(p,q;M)$ o $\Omega(p,q)$.

Definición 2. Sea $\gamma\colon [a,b] \to M$ una curva suave por pedazos, se define la **longitud** y **energía** de γ como:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\dot{\gamma}_i(t)|_g \, \mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{E}(\gamma) := \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\dot{\gamma}_i(t)|_g^2 \, \mathrm{d}t,$$

respectivamente, donde $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ son tales que $\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ es una curva suave para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$.

Observamos que si γ fuera una curva suave, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq (b-a)\,\mathcal{E}(\gamma)$$

y la igualdad se tiene si y solo si $|\dot{\gamma}(t)|$ es constante, es decir, si y solo si γ está parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco.

Así, usando la desigualdad de Cauchy- Schwarz en cada sumando tenemos que si γ es una curva suave por pedazos también se cumple $\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq (b-a)\,\mathcal{E}(\gamma)$.

Si $\omega\colon [0,1] \to M$ es una geodésica minimizante de p a q, es decir, una geodésica que minimiza $\mathcal{L}$, tenemos que

$$\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{L}(\omega)^2 \leq \mathcal{L}(\gamma)^2 \leq \mathcal{E}(\gamma),$$

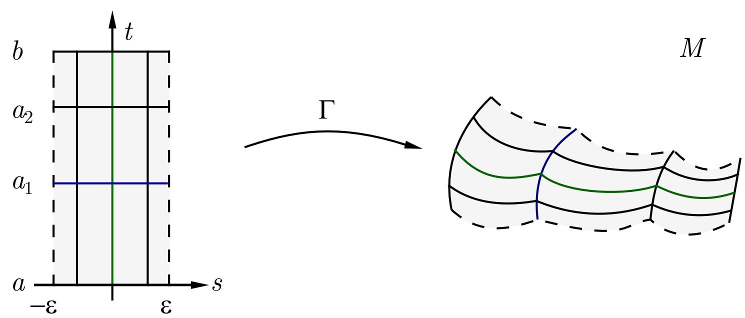
siendo γ cualquier curva que une a p con q. La igualdad $\mathcal{L}(\omega)^2 = \mathcal{L}(\gamma)^2$ se da solo si γ es una geodésica minimizante salvo reparametrización. Esto nos dice que $\mathcal{E}(\omega) < \mathcal{E}(\gamma)$ a menos que γ sea geodésica minimizante. Lo que acabamos de demostrar es lo siguiente.

Lema 3. *Si M es completa y $p, q \in M$ tienen distancia d, entonces el funcional $\mathcal{E}\colon \Omega(p,q) \to M$ alcanza su mínimo, d^2, en las geodésicas minimizantes.*

Definición 4. Una **familia suave por pedazos de curvas** es una aplicación continua

$$\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$$

que es suave en cada rectángulo de la forma $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]$ para alguna partición del intervalo $[a,b]$, $a=a_0<a_1<\ldots<a_k=b$, y tal que $\Gamma_s(t):=\Gamma(s,t)$ es una curva suave por pedazos para toda $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.



Una partición del intervalo $[a,b]$ sera denotada por $(a_0,\ldots,a_k)$ y la llamaremos una **partición admisible** para Γ si cumple las condiciones de la definición anterior.

Definición 5. Si Γ es una familia suave por pedazos de curvas, un **campo vectorial suave por pedazos a lo largo de** Γ es una función continua $V:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to TM$ tal que $V(s,t)\in T_{\Gamma(s,t)}M$ para cada (s,t) y en cada sub-rectángulo se cumple que $V|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]}$ es suave, para alguna partición $(a_0,\ldots,a_k)$ admisible para Γ.

Cualquier familia suave por pedazos Γ define dos clases especiales de curvas: las **curvas principales** definidas en $[a,b]$ con s constante, denotadas $\Gamma_s(t)$, y las **curvas transversales** definidas en $(-\varepsilon,\varepsilon)$ con t constante, denotadas $\Gamma^t(s)$. En donde Γ es suave, los dos campos vectoriales dados por las derivadas parciales son ejemplos de campos vectoriales tangentes a lo largo de Γ y se denotan como

$$T(s,t)=\partial_t\Gamma(s,t):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Gamma_s(t)\quad \text{y}\quad S(s,t)=\partial_s\Gamma(s,t):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Gamma^t(s).$$

El campo T, como se dijo antes, es un campo vectorial tangente a lo largo de Γ en cada rectángulo de la forma $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]$, sin embargo genéricamente no es continuo en cada a_i al considerarlo en todo $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$; pero esto no sucede con el campo S. Esta última afirmación se prueba a continuación.

Lema 6. *El campo S es un campo vectorial suave por pedazos a lo largo de Γ.*

Demostración. Sea $(a_0,\ldots,a_k)$ una partición admisible para Γ, así, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$ la función $S|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]}$ es suave, pues Γ lo es, y por tanto también es continua. Por lo que resta probar que S (definida por pedazos)es continua en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$.

Como $\{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]\}_{i=1}^k$ es un subconjunto de cerrados de $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$ cuya unión es el total, basta ver que las funciones $S|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]}$ coinciden en las intersecciones por el lema de pegado (lema 3.23 de [2]).

Sea $i\in\{1,\ldots,k-1\}$, para cada punto $p\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times\{a_i\}=(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]\cap(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_i,a_{i+1}]$ tenemos que

$$S|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]}(p)=\frac{d}{ds}\Gamma((-\varepsilon,\varepsilon)\times\{a_i\})|_{\Gamma(p)}=S|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_i,a_{i+1}]}(p)$$

pues $(-\varepsilon,\varepsilon)\times\{a_i\}$ esta totalmente contenido tanto en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]$ como en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_i,a_{i+1}]$. De donde concluimos que S es continua en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$.

$\square$

Ahora bien, si V es un campo vectorial a lo largo de Γ, se pueden calcular la derivadas covariantes a lo largo de las curvas principales o a lo largo de las curvas transversales, en donde éstas son suaves, y son denotadas por D_tV y D_sV respectivamente. Estas derivadas covariantes dan una relación de simetría entre los campos vectoriales tangentes a las curvas principales y transversales, heredada de la conexión riemanniana. Esta relación está descrita en el siguiente lema.

Lema 7 (Lema de Simetría)**.** *Sea $\Gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ una familia suave por pedazos de curvas en una variedad riemanniana. En cualquier rectángulo $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$ donde Γ es suave se tiene*

$$D_s\partial_t\Gamma = D_t\partial_s\Gamma.$$

Demostración. Como el valor de la conexión y, por tanto, de la derivada covariante depende del valor de los campos localmente, mostraremos la fórmula en coordenadas.

Sean $(x_1,\ldots,x_n)$ coordenadas alrededor de $\Gamma(s_0,t_0)$. Escribiendo las coordenadas de Γ como

$$\Gamma(s,t)=(\gamma_1(s,t),\ldots,\gamma_n(s,t))$$

tenemos que

$$\partial_t\Gamma=\sum_{k=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial t}\,\partial_k \quad \text{y} \quad \partial_s\Gamma=\sum_{k=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\,\partial_k.$$

Ahora usamos la expresión en coordenadas de la derivada covariante a lo largo de curvas (véase fórmula (4.15) en [4])

$$\begin{aligned} D_s\partial_t\Gamma &= \sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2\gamma_k}{\partial s\partial t}+\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}\frac{\partial\gamma_j}{\partial s}\Gamma_{ji}^k\right), \\ D_t\partial_s\Gamma &= \sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2\gamma_k}{\partial t\partial s}+\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial\gamma_i}{\partial s}\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\Gamma_{ji}^k\right). \end{aligned}$$

Si en la segunda ecuación cambiamos i por j, usamos la simetría de los símbolos de Christoffel y usamos la suavidad de Γ tenemos que las dos ecuaciones coinciden. $\square$

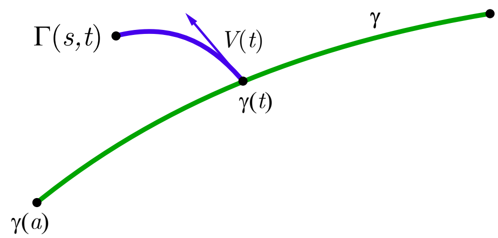
Definición 8. Sea $\gamma\colon[a,b]\to M$ una curva suave por pedazos. Una **variación** de γ es una familia suave por pedazos de curvas Γ tal que $\Gamma_0(t)=\gamma(t)$ para todo $t\in[a,b]$. Se llama **variación propia** si además $\Gamma_s(a)=\gamma(a)$ y $\Gamma_s(b)=\gamma(b)$ para todo s.

Si Γ es una variación de γ, el **campo de variación** de Γ es el campo vectorial $V(t)=\partial_s\Gamma(0,t)$ a lo largo de γ. Si además $V(a)=V(b)=0$, entonces se dice que es **propio**.

Lema 9. *Si $\gamma\colon[a,b]\to M$ es una curva suave por pedazos y V es un campo vectorial suave por pedazos a lo largo de γ, entonces V es el campo de variación de alguna variación de γ. Si V es propio, la variación también puede se tomada propia.*

Demostración. Consideramos

$$\Gamma(s,t)=\exp_{\gamma(t)}(sV(t)).$$



Por la compacidad de $\gamma[a,b]$, existe $\varepsilon > 0$ tal que Γ está definida en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$. Por regla de la cadena, Γ es suave en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]$ para cada subintervalo $[a_{i-1},a_i]$ donde V es suave y es continua en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$. Por propiedades de la aplicación exponencial (véase Proposición 5.19 de [4]), el campo de variación de Γ es V. Si V es propio, $\Gamma(s,a)=\gamma(a)$ y $\Gamma(s,b)=\gamma(b)$, es decir, Γ es propia. $\square$

Ahora podemos calcular la derivada del funcional de longitud. Dicha derivada se calcula en la siguiente proposición en donde, la variación Γ de γ que se considera es tal que para cada $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ se cumple que $\Gamma_s(t)=\Gamma(s,t)$, ademas de ser suave por pedazos, es una curva regular, lo que significa que en cada subintervalo de $[a,b]$ en donde es suave su derivada es distinta de cero. A este tipo de variación la llamaremos **variación regular** de γ. Además, utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\dot\gamma(a_i^-) &= \text{lím}_{t\to a_i^-}\dot\gamma(t),\\ \dot\gamma(a_i^+) &= \text{lím}_{t\to a_i^+}\dot\gamma(t).\end{aligned}$$

Proposición 10 (Fórmula de Primera Variación)**.** *Sea $\gamma\colon[a,b]\to M$ una curva suave por pedazos de velocidad unitaria, Γ una variación de γ y V su campo de variación. Entonces $\mathcal{L}(\Gamma_s)$ es una función suave de s y su derivada es:*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\mathcal{L}(\Gamma_s) = -\int_a^b\langle V(t),D_t\dot\gamma\rangle_g\,\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{k-1}\langle V(a_i),\Delta_i\dot\gamma\rangle_g+\langle V(b),\dot\gamma(b)\rangle_g-\langle V(a),\dot\gamma(a)\rangle_g, \tag{1}$$

*donde $(a_0,\ldots,a_k)$ es una partición admisible para V y $\Delta_i\dot\gamma=\dot\gamma(a_i^+)-\dot\gamma(a_i^-)$ es el "brinco" en el campo vectorial $\dot\gamma$ en a_i, para cada $i\in\{1,\ldots,k-1\}$. A la derivada del funcional se le llama **primera variación**.*

Demostración. Primero observamos que en cada rectángulo $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]$ la variación Γ es suave respecto a s. Esto implica que el integrando de $\mathcal{L}(\Gamma_s)$ es suave (y dado que la derivada de cada curva es distinto de cero) y como el dominio de integración es compacto entonces $\mathcal{L}(\Gamma_s)$ es suave (respecto a s) y podemos diferenciar dentro del signo de integración tantas veces como queramos por el teorema C.14 de [3]. Y como $\mathcal{L}(\Gamma_s)$ es una suma finita de dichas integrales, obtenemos que $\mathcal{L}(\Gamma_s)$ es una función suave de s.

Así, obtenemos que en cada subintervalo $[a_{i-1},a_i]$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{\partial}{\partial s}\langle T,T\rangle_g^{1/2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{1}{2}\langle T,T\rangle_g^{-1/2}\,2\langle D_sT,T\rangle_g\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{1}{|T|}\langle D_tS,T\rangle_g\,\mathrm{d}t. \end{aligned}\tag{2}$$

La primera igualdad se da por lo dicho en el primer párrafo, la segunda por la regla de la cadena y de la compatibilidad de la métrica con la conexión riemanniana en campos sobre curvas (véase fórmula (5.3) de [4]) y, finalmente, la tercera igualdad se da por el lema de simetría.

Notamos que $S(0,t) = V(t)$ por ser V campo de variación de Γ, $T(0,t) = \dot{\gamma}(t)$ por ser Γ variación de γ y que $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ pues γ tiene velocidad unitaria. Por lo tanto, al evaluar en $s = 0$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t V, \dot{\gamma}\rangle_g \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, \dot{\gamma}\rangle_g - \langle V, D_t\dot{\gamma}\rangle_g \right) \mathrm{d}t \\ &= \langle V(a_i), \dot{\gamma}(a_i^-)\rangle_g - \langle V(a_{i-1}), \dot{\gamma}(a_{i-1}^+)\rangle_g \\ &\quad - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t\dot{\gamma}\rangle_g \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se obtiene de la compatibilidad de la métrica con la conexión riemanniana en campos sobre curvas y la tercera igualdad se obtiene con el teorema fundamental del cálculo.

Finalmente, sumando sobre i obtenemos la fórmula (1). □

Observación. En particular, si Γ es una variación propia, entonces la formula (1) se reduce a:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = -\int_a^b \langle V(t), D_t\dot{\gamma}\rangle_g \,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i\dot{\gamma}\rangle_g. \tag{3}$$

Además, considerando Γ propia y siguiendo la demostración de la proposición anterior, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathcal{E}(\Gamma_s) = -\int_a^b \langle V, D_t\dot{\gamma}\rangle_g \,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i\dot{\gamma}\rangle_g. \tag{4}$$

Esta última ecuación en algunos libros es conocida como la formula de primera variación y en la demostración no es necesaria la condición de regularidad sobre Γ.

Definición 11. La curva suave por pedazos γ es **punto crítico** de $\mathcal{L}$ si para toda variación regular propia Γ de γ tenemos que:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = 0.$$

Definición 12. La curva suave por pedazos γ es **punto crítico** de $\mathcal{E}$ si para toda variación propia Γ de γ tenemos que:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathcal{E}(\Gamma_s) = 0.$$

Definición 13. Una curva suave γ es una **geodésica** si su vector aceleración es cero a lo largo de ella, es decir, $D_t\dot{\gamma}(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Corolario 14. *Una curva suave por pedazos $\gamma\colon [a,b] \to M$ de velocidad unitaria es punto crítico de $\mathcal{L}$ si y solo si γ es geodésica.*

Demostración. Por un lado, si γ es una geodésica, el primer término de (3) se anula por ser geodésica y el segundo término se anula porque no hay saltos.

Por otro lado, si γ es un punto crítico de $\mathcal{L}$, entonces γ es suave por pedazos, así consideramos $(a_0, \ldots, a_k)$ una partición admisible de $[a,b]$. Entonces

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = 0$$

para cualquier variación regular propia de γ. Y como todo campo vectorial propio V a lo largo de γ es el campo de variación de una variación propia Γ de γ por el lema 9, entonces, el lado derecho de (3) se anula para todo campo propio V.

Lo que vamos a demostrar primero es que γ es geodésica en cada $[a_{i-1}, a_i]$, es decir, $D_t\dot{\gamma} = 0$ en cada subintervalo. Tomamos uno de estos intervalos y tomamos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función flan tal que $\varphi > 0$ en (a_{i-1}, a_i) y cero en el complemento. Si tomamos $V = \varphi D_t\dot{\gamma}$ y sustituimos en (3), por lo dicho en el parrafo anterior tenemos que

$$0 = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi \, |D_t\dot{\gamma}|_g^2 \, \mathrm{d}t.$$

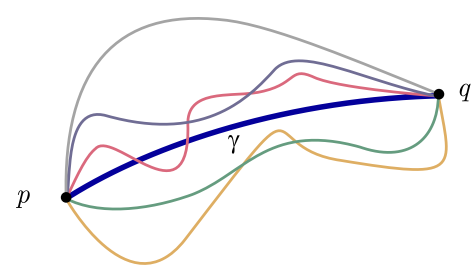
Como el integrando es no-negativo y $\varphi > 0$ en (a_{i-1}, a_i), $D_t\dot{\gamma} = 0$ en cada subintervalo.

Ahora vamos a mostrar que $\dot{\gamma}$ no tiene "saltos", es decir, $\Delta_i\dot{\gamma} = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Sea $i \in \{1, \dots, k-1\}$, consideramos una carta coordenada (U, ψ) alrededor de $\gamma(a_i)$ con U suficientemente pequeño para que $\gamma(a_j) \notin U$ para $j \neq i$ y para poder extender el vector $\Delta_i\dot{\gamma}$ (basado en $\gamma(a_i)$) suavemente a un campo vectorial en U, usamos una función flan en esta carta coordenada para construir un campo vectorial $\tilde{V}$ suave por pedazos a lo largo de γ tal que $\tilde{V}(a_i) = \Delta_i\dot{\gamma}$ y $\tilde{V}(t) = 0$ para $\gamma(t) \notin U$. Entonces, usando que $D_t\dot{\gamma} = 0$ en cada subintervalo, el lema 9 y sustituyendo en (3) el campo $\tilde{V}$, tenemos que

$$-|\Delta_i\dot{\gamma}|_g^2 = 0.$$

De donde concluimos que $\Delta_i\dot{\gamma} = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Finalmente, como no hay saltos, es decir los vectores velocidad de cada lado de cada a_i coinciden se sigue, de la unicidad de las geodésicas, que la geodésica $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es la continuación de la geodésica $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ y, por lo tanto, γ es suave. $\square$



Observación. Los resultados que usamos para probar el resultado anterior fueron la formula de primera variación y el lema 9, por tanto, siguiendo nuevamente la prueba anterior tenemos que una curva suave por pedazos $\gamma\colon [a, b] \to M$ de velocidad unitaria es punto crítico de $\mathcal{E}$ si y solo si γ es geodésica.

Lo que hemos logrado en esta sección es que si pensamos a $\Omega(p, q; M)$ como una variedad de dimensión infinita, cada punto en esta "variedad" es una curva suave por pedazos, y podemos pensar al conjunto de todos los campos vectoriales suaves por pedazos y propios a lo largo de la curva como el espacio tangente a la variedad en este punto.

Además, hemos logrado identificar los puntos críticos de los dos funcionales $\mathcal{L}\colon \Omega(p, q) \to M$ y $\mathcal{E}\colon \Omega(p, q) \to M$ que son las geodésicas de M, en ambos casos.

Continuando con la analogía desarrollada el siguiente paso es definir un funcional bilineal para cada punto critico (para cada geodesica). Construiremos dicho funcional y lo llamaremos el hessiano del funcional de longitud (o del funcional de energía). Pero, para esto, primero necesitamos estudiar los campos de Jacobi.

2. Campos de Jacobi

Estudiar los campos de Jacobi nos sera útil ya que estos serán precisamente en donde el hessiano (que definiremos en la última sección) es degenerado. Para comenzar su estudio nos centraremos en una clase de variaciones que es la siguiente.

Definición 15. Sean $\gamma\colon [a,b] \to M$ un segmento geodésico (una geodésica con dominio compacto) y $\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ una variación de γ. Se dice que Γ es una **variación por geodésicas** si cada curva principal $\Gamma_s(t)$ es un segmento geodésico.

De esta definición tenemos que, en particular, Γ es suave, cuando esto suceda diremos que Γ es una *familia suave de curvas*, y para Γ de este tipo tenemos el siguiente resultado.

Lema 16. *Si Γ es una familia suave de curvas y V es una campo vectorial suave a lo largo de Γ, entonces*

$$D_s D_t V - D_t D_s V = \mathcal{R}(S,T)V.$$

Demostración. Al igual que en el lema de simetría mostraremos la fórmula en coordenadas, dado que el valor de la conexión y, por tanto, de la derivada covariante depende del valor de los campos localmente.

Tomamos coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ alrededor de $\Gamma(s,t)$ y consideramos $\{\partial_i|_{\Gamma(s,t)}\}_{i=1}^n$. Así, podemos escribir

$$V(s,t) = \sum_{i=1}^n V_i(s,t)\partial_i|_{\Gamma(s,t)}$$

y calculamos su derivada usando la regla de Leibniz de la derivada covariante (teorema 4.24 de [4]),

$$D_t V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V_i}{\partial t}\,\partial_i + V_i\, D_t \partial_i \right).$$

Volviendo a derivar tenemos

$$D_s D_t V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial s \partial t}\partial_i + \frac{\partial V_i}{\partial t}\, D_s\partial_i + \frac{\partial V_i}{\partial s}\, D_t \partial_i + V_i\, D_s D_t \partial_i \right).$$

Ahora, si cambiamos s pot t y restamos, obtenemos

$$D_s D_t V - D_t D_s V = \sum_{i=1}^n V_i (D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i), \tag{5}$$

pues los demás términos se cancelan.

Necesitamos calcular lo que está entre paréntesis y para ello primero escribimos a Γ en coordenadas:

$$\Gamma(s,t) = (\gamma_1(s,t), \cdots, \gamma_n(s,t)),$$

de donde

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \gamma_k}{\partial s}\partial_k \quad \text{y} \quad T = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j}{\partial t}\partial_j.$$

Ahora usamos que los campos ∂_i son extendibles y propiedades de la derivada covariante (véase Teorema 4.24 de [4]):

$$D_t \partial_i = \nabla_T \partial_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i.$$

También los campos $\nabla_{\partial_j}\partial_i$ son extendibles y tenemos que

$$\begin{aligned}
D_s D_t \partial_i &= D_s\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\gamma_j}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i+\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\,D_s\nabla_{\partial_j}\partial_i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\gamma_j}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i+\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\,\nabla_S\nabla_{\partial_j}\partial_i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\gamma_j}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\,\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\,\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i\right).
\end{aligned}$$

Si cambiamos s por t y j por k y restamos los primeros términos se cancelan y obtenemos

$$\begin{aligned}
D_s D_t\partial_i - D_t D_s\partial_i &= \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\,\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\,\left(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i-\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_k}\partial_i\right)\\
&= \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\,\frac{\partial\gamma_k}{\partial s}\,\mathcal{R}(\partial_k,\partial_j)\partial_i\\
&= \mathcal{R}(S,T)\partial_i.
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo esto en (5) obtenemos el resultado. □

En el siguiente teorema presentamos la ecuación de Jacobi y probamos que los campos de variación de variaciones por geodésicas la satisfacen.

Teorema 17 (Ecuación de Jacobi)**.** *Sean γ una geodésica y V el campo de variación de una variación Γ por geodésicas, entonces V satisface la siguiente ecuación, llamada* ***ecuación de Jacobi***

$$D_t^2 V + \mathcal{R}(V,\dot\gamma)\dot\gamma = 0. \tag{6}$$

Demostración. Como Γ es variación por geodésicas entonces cada curva principal $\Gamma_s(t)$ es una geodésica y por tanto, para todo (s,t)

$$D_t T = 0.$$

Tomamos la derivada covariante de esta ecuación con respecto a s y obtenemos

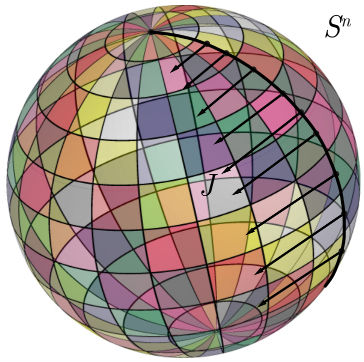
$$D_s D_t T = 0.$$

Ahora usamos el lema 16 y el lema de simetría, en ese orden, para hacer el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
0 &= D_s D_t T\\
&= D_t D_s T + \mathcal{R}(S,T)T\\
&= D_t D_t S + \mathcal{R}(S,T)T.
\end{aligned}$$

Evaluando en $s=0$ tenemos $S(0,t)=V(t)$, $T(0,t)=\dot\gamma(t)$ y por tanto se cumple (6). □

Definición 18. Un campo vectorial suave a lo largo de una geodésica que satisface la ecuación de Jacobi se llama **campo de Jacobi**



Proposición 19 (Existencia y Unicidad de Campos de Jacobi)**.** *Sea* $\gamma\colon (b,c) \to M$ *una geodésica,* $a \in (b,c)$ *y* $p = \gamma(a)$*. Para cualesquiera* $X, Y \in T_pM$*, existe un único campo de Jacobi,* J*, tal que*

$$J(a) = X \quad y \quad D_t J(a) = Y.$$

La demostración de la proposición anterior es una aplicación del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias en un sistema obtenido a partir de la ecuación de Jacobi (ver proposición 10.2 de [4]).

Corolario 20. *A lo largo de una geodésica* γ*, el conjunto de campos de Jacobi* $\mathcal{J}(\gamma)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathfrak{X}(\gamma)$ *de dimensión* $2n$*, donde* $\mathfrak{X}(\gamma)$ *es el espacio de campos vectoriales suaves sobre* γ*.*

Demostración. Como la ecuación de Jacobi es lineal, $\mathcal{J}(\gamma)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(\gamma)$. Sea $p = \gamma(a)$ un punto cualquiera sobre γ y consideremos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}(\gamma) & \to & T_pM \oplus T_pM \\ J & \mapsto & (J(a), D_t J(a)). \end{array}$$

La proposición anterior nos dice que esta aplicación es biyectiva y por tanto $\mathcal{J}(\gamma)$ es un subespacio vectorial de dimensión $2n$. $\square$

Del teorema 17 tenemos que $S(0,t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ cuando Γ es una variación por geodésicas, así, tenemos una forma de conseguir campos de Jacobi. Inversamente, la siguiente proposición muestra que cada campo de Jacobi a lo largo de un segmento geodésico describe el comportamiento de una familia de geodesicas, al menos a primer orden, a lo largo de γ (ver figura 1).

Proposición 21. *Sea* $\gamma\colon I \to M$ *una geodésica. Si* M *es completa o* I *es compacto, entonces todo campo de Jacobi a lo largo de* γ *es el campo de variación de una variación por geodésicas de* γ*.*

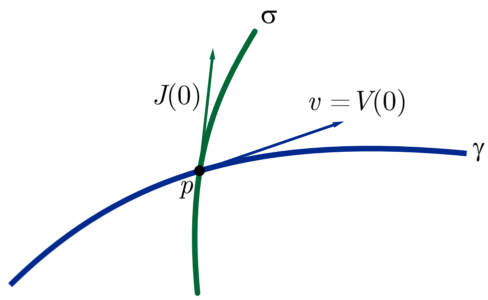
Demostración. Sea J un campo de Jacobi a lo largo de γ. Podemos suponer que $0 \in I$ porque en caso contrario podemos reparametrizar con una traslación que no afecta la natulareleza de la geodésica. Sea $p = \gamma(0)$ y $v = \dot\gamma(0)$. Notamos que, por la definición de $\exp_p$ y por ser γ geodésica, $\gamma(t) = \exp_p(t\,v)$ para todo $t \in I$.

Escogemos una curva suave $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ y un campo vectorial suave V a lo largo de σ que satisfagan

$$\begin{array}{rcl} \sigma(0) & = & p, \\ \dot\sigma(0) & = & J(0), \\ V(0) & = & v, \\ D_s V(0) & = & D_t J(0), \end{array}$$

donde D_s y D_t denotan la derivada covariante a lo largo de σ y γ, respectivamente. Estas pueden ser elegidas fácilmente en coordenadas. Y definimos

$$\Gamma(s,t) := \exp_{\sigma(s)}(tV(s)). \tag{7}$$



Queremos que esta sea una variación por geodésicas y lo primero que veremos es el dominio de definición. Si M es completa entonces, por el teorema de Hopf-Rinow, es geodésicamente completa, así Γ está de definida para todo $(s,t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times I$. Por otro lado, si I es compacto, el hecho de que el dominio de la aplicación exponencial es un abierto en TM que contiene al conjunto compacto $\{(p,tv) \colon t \in I\}$ asegura que existe $\delta > 0$ tal que Γ está definida en $(-\delta, \delta) \times I$.

Ahora notamos que

$$\begin{aligned} \Gamma(0,t) &= \exp_{\sigma(0)}(tV(0)) = \exp_p(tv) = \gamma(t), && (8)\\ \Gamma(s,0) &= \exp_{\sigma(s)}(0) = \sigma(s). && (9) \end{aligned}$$

La ecuación (8) nos muestra que Γ es una variación de γ. Y por definición de la aplicación exponencial Γ es variación por geodésicas. Además, por el teorema 17, su campo de variación $W(t) = \partial_s \Gamma(0,t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ.

Por (9)

$$W(0) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \Gamma(s,0) = \dot{\sigma}(0) = J(0).$$

Por (7) tenemos que cada curva principal $\Gamma_s(t)$ es una geodésica con vector velocidad inicial $V(s)$ y así

$$\partial_t \Gamma(s,0) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \Gamma_s(t) = V(s).$$

Del lema de simetría y de como escogimos V se sigue que

$$D_t W(0) = D_t \partial_s \Gamma(0,0) = D_s \partial_t \Gamma(0,0) = D_s V(0) = D_t J(0).$$

Finalmente, como $W(0) = J(0)$ y $D_t W(0) = D_t J(0)$, por la unicidad de los campos de Jacobi, $J = W$. Y por tanto el campo J es el campo de variación de una variación por geodésicas de γ.

$\square$

Definición 22. Un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es un **campo vectorial tangencial** a lo largo de γ si $V(t)$ es un múltiplo de $\dot{\gamma}(t)$ para toda t; y es un **campo vectorial normal** a lo largo de γ si $V(t)$ es ortogonal a $\dot{\gamma}(t)$ para todo t.

Cualquier campo vectorial V a lo largo de γ se puede descomponer de manera única en suma de un campo vectorial tangencial $V^\top$ y un campo vectorial normal $V^\perp$. Explícitamente,

$$V^\top = \dot{\gamma}\,\langle V, \dot{\gamma}\rangle_g \quad \text{y} \quad V^\perp = V - V^\top.$$

Definición 23. Si $\gamma\colon [a,b] \to M$ es un segmento geodésico que une a p y q en M, se dice que q es **conjugado a p a lo largo de** γ si existe un campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $J(a) = J(b) = 0$ pero que no es idénticamente cero. La **multiplicidad** de p y q como puntos conjugados es la dimensión del espacio vectorial de todos los campos de Jacobi que los hacen conjugados.

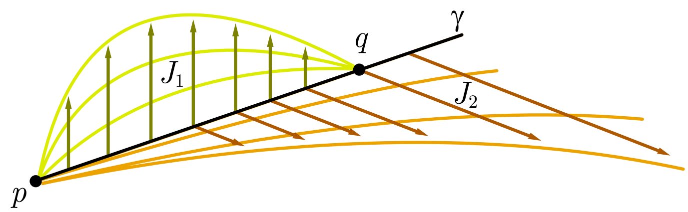


Figura 1: Puntos conjugados y comportamiento de familias de geodésicas

Estas definiciones nos serán útiles en la última sección para clasificar los puntos críticos no degenerados de los funcionales de longitud y de energía.

3. Fórmula de la Segunda Variación

En esta sección calculamos la segunda derivada del funcional de longitud y de energía, ya que ésta nos ayudara a definir el hessiano de cada uno de estos funcionales.

Teorema 24 (Fórmula de Segunda Variación)**.** *Sea $\gamma\colon [a,b] \to M$ una geodésica de velocidad unitaria, $\Gamma\colon J \times [a,b] \to M$ una variación propia y regular de γ y V su campo de variación. La segunda derivada del funcional de longitud o la* ***segunda variación*** *está dada por la fórmula:*

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = \int_a^b \left(|D_t V^\perp|_g^2 - \mathcal{RM}(V^\perp, \dot\gamma, \dot\gamma, V^\perp) \right) \mathrm{d}t, \tag{10}$$

donde $V^\perp$ es la componente normal de V.

Demostración. Sea $(a_0, \ldots, a_k)$ una partición admisible para Γ. Como hicimos para formula de primera variación, nos vamos a restringir a cada rectángulo $J \times [a_{i-1}, a_i]$ donde Γ es suave. De la ecuación 2 (de la demostración de la fórmula de primera variación) tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\langle D_t S, T\rangle_g}{\langle T, T\rangle_g^{1/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Si derivamos de nuevo con respecto a s usando la compatibilidad de la métrica y luego usamos el lema de simetría y el lema 16, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\mathcal{L}(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{\langle D_s D_t S, T\rangle_g}{\langle T, T\rangle_g^{1/2}} + \frac{\langle D_t S, D_s T\rangle_g}{\langle T, T\rangle_g^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{\langle D_t S, T\rangle_g\, 2\,\langle D_s T, T\rangle_g}{\langle T, T\rangle_g^{3/2}} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{\langle D_t D_s S + \mathcal{R}(S,T)S, T\rangle_g}{|T|_g} + \frac{\langle D_t S, D_t S\rangle_g}{|T|_g} - \frac{\langle D_t S, T\rangle_g^2}{|T|^3} \right) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Si evaluamos en $s = 0$, tenemos que $|T|_g = 1$ y por las propiedades de simetría de $\mathcal{RM}$ (proposición 7.12 de [4])

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\langle D_t D_s S, T\rangle_g - \mathcal{RM}(S,T,T,S) + |D_t S|_g^2 - \langle D_t S, T\rangle_g^2\right) \mathrm{d}t|_{s=0}. \quad (11)$$

Como $D_t T = D_t \dot\gamma = 0$ si $s = 0$, el primer término de la igualdad anterior se puede integrar de la siguiente manera usando la compatibilidad de la métrica:

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t D_s S, T\rangle_g \,\mathrm{d}t = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle D_s S, T\rangle_g \,\mathrm{d}t = \left.\langle D_s S, T\rangle_g\right|_{t=a_{i-1}}^{t=a_i}. \quad (12)$$

Notamos que $S(s, a_0) = 0 = S(s, a_k)$ porque Γ es propia, así que $D_s S = 0$ si $t = a_0$ ó $t = a_k$. Más aún, en las fronteras $\{t = a_i\}$ de las regiones de suavidad de Γ, $D_s S$ solo depende del valor de Γ cuando $t = a_i$ y como S es suave hasta la línea $\{t = a_i\}$ desde los dos lados, $D_s S$ es continuo para todo (s, t). Por lo tanto, si sustituimos (12) en (11) y sumamos con respecto a i, tenemos

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) &= \int_a^b \left(|D_t S|_g^2 - \langle D_t S, T\rangle_g^2 - \mathcal{RM}(S,T,T,S)\right) \mathrm{d}t|_{s=0} \\ &= \int_a^b \left(|D_t V|_g^2 - \langle D_t V, \dot\gamma\rangle_g^2 - \mathcal{RM}(V,\dot\gamma,\dot\gamma,V)\right) \mathrm{d}t. \qquad (13)\end{aligned}$$

Ahora tomamos la descomposición de V en su parte tangencial y normal

$$V^{(\top)} = \langle V, \dot\gamma\rangle_g \,\dot\gamma \quad \text{ y } \quad V^\perp = V - V^\top.$$

Como $D_t\dot\gamma = 0$, usando la regla de Leibniz y la compatibilidad de la métrica, se sigue que

$$\begin{aligned} D_t V^\top &= D_t(\langle V, \dot\gamma\rangle_g \,\dot\gamma) \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, \dot\gamma\rangle_g\right)\dot\gamma + \langle V, \dot\gamma\rangle_g \, D_t\dot\gamma \\ &= \langle D_t V, \dot\gamma\rangle_g \,\dot\gamma \\ &= (D_t V)^\top \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_t(V^\perp) &= D_t(V - V^\top) \\ &= D_t V - D_t(V^\top) \\ &= D_t V - (D_t V)^\top \\ &= (D_t V)^\perp. \end{aligned}$$

Así,

$$|D_t V|_g^2 = |(D_t V)^\top|_g^2 + |(D_t V)^\perp|^2 = \langle D_t V, \dot\gamma\rangle_g^2 + |D_t V^\perp|_g^2.$$

También como $\mathcal{RM}$ es tensor y $\mathcal{RM}(\dot\gamma, \dot\gamma, \cdot, \cdot) = 0 = \mathcal{RM}(\cdot, \cdot, \dot\gamma, \dot\gamma)$, tenemos que

$$\mathcal{RM}(V^\perp, \dot\gamma, \dot\gamma, V^\perp) = \mathcal{RM}(V - V^\top, \dot\gamma, \dot\gamma, V - V^\top) = \mathcal{RM}(V, \dot\gamma, \dot\gamma, V).$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (13) obtenemos (10). □

Observación. Como en el caso de la primera variación, la fórmula de segunda variación de $\mathcal{E}$ (o su segunda derivada) es

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \mathcal{E}(\Gamma_s) = \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s).$$

Esta puede obtenerse siguiendo la demostración anterior y, nuevamente, la hipótesis de regularidad de Γ no es necesaria.

Como acabamos de probar, la segunda variación depende solo de la componente normal del campo V, por esta razón nos restringiremos a variaciones del siguiente tipo.

Definición 25. Sea $\gamma\colon [a,b] \to M$ una curva suave por pedazos. Una variación Γ de γ es una **variación normal** si su campo de variación es un campo vectorial normal a lo largo de γ.

4. Hessiano

Finalmente en esta sección definiremos el hessiano para el funcional de longitud (y el de energía). Para comenzar recodamos las siguientes definiciones generales de formas bilineales.

Definición 26. Dada una forma bilineal simétrica B sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$, definimos la **nulidad de** B como la dimensión del subespacio de $\mathcal{V}$ formado por los elementos $V \in \mathcal{V}$ tales que $B(V,W) = 0$ para todo $W \in \mathcal{V}$. Este subespacio se llama el **espacio nulo de** B**.**

Decimos que B es **no degenerada** si la nulidad es cero.

Inspirados en la fórmula de segunda variación definimos el Hessiano de la siguiente manera.

Definición 27. Si V y W son campos vectoriales propios y normales a lo largo de una geodésica $\gamma\colon [a,b] \to M$, se define la forma bilineal simétrica, llamada **forma de índice** o **Hessiano**, como

$$I(V,W) := \int_a^b \langle D_t V, D_t W\rangle_g - \mathcal{RM}(V,\dot\gamma,\dot\gamma,W)\,\mathrm{d}t,$$

para el funcional de longitud y

$$\tilde I(V,W) := 2\int_a^b \langle D_t V, D_t W\rangle_g - \mathcal{RM}(V,\dot\gamma,\dot\gamma,W)\,\mathrm{d}t,$$

para el funcional de energía.

En estos términos podemos reescribir el teorema 24 como sigue.

Proposición 28. *Sea $\gamma\colon [a,b] \to M$ una geodésica de velocidad unitaria. Si Γ es una variación normal, propia y regular de γ y V es su campo de variación, entonces*

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = I(V,V).$$

En particular, si γ es minimizante, entonces $I(V,V) \geq 0$ para cualquier campo vectorial normal y propio a lo largo de γ.

Demostración. Solo falta ver la última afirmación. Si γ es minimizante entonces para cada s:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\Gamma_0) \leq \mathcal{L}(\Gamma_s).$$

Esto implica que $s = 0$ es un mínimo de la función $\mathcal{L}(\Gamma_s)$ y, por lo tanto, $I(V,V) \geq 0$. $\square$

Observación. Análogamente para el funcional de energía tenemos que, bajo las mismas hipótesis

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \mathcal{E}(\Gamma_s) = \tilde I(V,V),$$

y si γ es minimizante, entonces $I(V,V) \geq 0$ para cualquier campo vectorial normal y propio a lo largo de γ. Esta última afirmación se sigue del lema 3.

De esto tenemos que cada una de las formas bilineales I e $\tilde{I}$ es semi-definida positiva.

En el siguiente lema damos otra expresión para I que después nos sera útil.

Lema 29. *Sea $\gamma\colon [a,b] \to M$ un geodésica. Para todo par de campos vectoriales suaves por pedazos y normales a lo largo de γ, V y W, tenemos*

$$I(V,W) = -\int_a^b \langle D_t^2 V + \mathcal{R}(V,\dot\gamma)\dot\gamma, W\rangle_g \,\mathrm{d}t + \langle D_t V, W\rangle_g\big|_{t=a}^{t=b} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \Delta_i D_t V, W(a_i)\rangle_g, \tag{14}$$

donde $(a_0,\ldots,a_k)$ es una partición admisible para V y W, y $\Delta_i D_t V = D_t V(a_i^+) - D_t V(a_i^-)$ es el brinco de $D_t V$ en $t = a_i$.

Demostración. En cada intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ donde V y W son suaves, usando la compatibilidad de la métrica, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle D_t V, W\rangle_g = \langle D_t^2 V, W\rangle_g + \langle D_t V, D_t W\rangle_g.$$

Así, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t V, D_t W\rangle_g \,\mathrm{d}t = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t^2 V, W\rangle_g \,\mathrm{d}t + \langle D_t V, W\rangle_g\big|_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

Sumando sobre i y notando que W es continuo en $t = a_i$ para $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, tenemos (15). ☐

Observación. Además, como $\tilde{I}(V,W) = 2I(V,W)$ por definición, entonces

$$\frac{1}{2}\tilde{I}(V,W) = -\int_a^b \langle D_t^2 V + \mathcal{R}(V,\dot\gamma)\dot\gamma, W\rangle_g \,\mathrm{d}t + \langle D_t V, W\rangle_g\big|_{t=a}^{t=b} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \Delta_i D_t V, W(a_i)\rangle_g, \tag{15}$$

Ahora veremos cuando el hessiano de cada uno de estos funcionales es no degenerado.

Teorema 30. *Sean $\gamma\colon [a,b] \to M$ una geodésica y V un campo suave por pedazos propio y normal a lo largo de γ. $I(V,W) = 0$ ($\tilde{I(V,W)}=0$) para todo campo vectorial suave por pedazos propio y normal W a lo largo de γ si y solo si V es un campo de Jacobi.*

Demostración. Sea γ es una geodésica. Primero probaremos que si V es un campo suave por pedazos propio y normal a lo largo de γ tal que $I(V,W) = 0$ para todo campo vectorial suave por pedazos propio y normal W a lo largo de γ entonces V es un campo de Jacobi.

Para eso tomamos una partición $(a_0,\ldots,a_k)$ de $[a,b]$ de modo que $V|_{[a_{i-1},a_i]}$ es suave para todo i. Sea $f\colon [a,b] \to [0,1]$ una función suave tal que es cero en cada a_i y es positiva en el complemento. Así, consideramos el campo

$$W(t) = f(t)\left(D_t^2 V(t) + \mathcal{R}(V(t),\dot\gamma(t))\dot\gamma(t)\right),$$

que es suave por pedazos pues V lo es y es propio pues $f(a) = 0 = f(b)$. Ahora probaremos que es un campo normal a lo largo de γ.

Dado que V es normal a lo lardo de γ entonces $\langle V(t), \dot\gamma(t)\rangle_g = 0$ para todo t y por tanto (usando la compatibilidad de la métrica con la conexión):

$$0 = \frac{d}{dt}\langle V(t), \dot\gamma(t)\rangle_g = \langle D_t V(t), \dot\gamma(t)\rangle_g + \langle V(t), D_t\dot\gamma(t)\rangle_g,$$

al ser γ una geodésica el ultimo sumando es cero, pues $D_t\dot\gamma(t) = 0$, así, $\langle D_t V(t), \dot\gamma(t)\rangle_g = 0$ y por tanto, si V es normal a lo largo de γ entonces $D_t\gamma$ también lo es. Aplicando este argumento dos veces obtenemos que $D_t^2 V(t)$ es normal a lo largo de γ.

Por otro lado, por la antisimetría de $\mathcal{RM}$ en sus dos últimas variables tenemos

$$0 = \mathcal{RM}(V(t), \dot\gamma(t), \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \langle \mathcal{R}(V(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_g,$$

y por tanto $\mathcal{R}(V(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t)$ es normal a lo largo de γ. De esto y de lo anterior concluimos que W es un campo normal a lo largo de γ.

Así, por hipótesis, por el lema 29 y por como definimos f tenemos

$$0 = I(V, W) = \int_a^b f(t)|D_t^2 V + \mathcal{R}(V, \dot\gamma)\dot\gamma|_g^2 \,\mathrm{d}t,$$

de donde, $D_t^2 V + \mathcal{R}(V, \dot\gamma)\dot\gamma = 0$, es decir, $V|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es de Jacobi para cada i, pues V es suave en estos intervalos. Ahora veamos que V es suave en todo $[a, b]$.

Tomamos un campo suave propio W' que sea normal a lo largo de γ y tal que

$$W'(a_i) = \Delta_i D_t V$$

para $i \in \{1, \dots k-1\}$. Este puede ser construido tomando una vecindad suficientemente pequeña alrededor de cada $\gamma(a_i)$ para $i \in \{1, \dots k-1\}$, de tal forma que sea el único $\gamma(a_j)$ en la vecindad y que ésta esté contenida en el dominio de alguna carta. En cada una de estas vecindades consideramos el campo constante $\Delta_i D_t V$ y luego el campo resultante de tomar la componente normal de cada uno de estos vectores, tomamos una función flan en cada vecindad de tal manera que sea positiva en un abierto que contenga a $\gamma(a_i)$ que este contenido propiamente en la vecindad, y multiplicamos el campo normal que ya teníamos por esta función; finalmente definimos en cada vecindad el campo como acabamos de describir y como cero fuera de estas vecindades.

Así, por hipótesis

$$0 = I(V, W') = \sum_{i=1}^{k-1} |\Delta_i D_t V|_g^2 + \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t^2 V + \mathcal{R}(V, \dot\gamma)\dot\gamma, W'\rangle_g \,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{k-1} |\Delta_i D_t V|_g^2.$$

La última igualdad se satisface porque en cada pedazo V es campo de Jacobi. Por lo tanto, $D_t V$ no tiene saltos. Por la unicidad e los campos vectoriales, los k campos de Jacobi $V|_{[a_{i-1}, a_i]}$ se pegan suavemente.

Por otro lado, si V es campo de Jacobi, entonces es suave y al ser W propio tenemos

$$I(V, W) = -\int_a^b \langle 0, W\rangle_g \,\mathrm{d}t + -\sum_{i=1}^{k-1} \langle \Delta_i 0, W(a_i)\rangle_g = 0.$$

Es decir, I es degenerada.

Por último, notar que todo lo desarrollado se sigue para $\tilde{I}$. □

De este teorema tenemos que un campo vectorial V pertenece al espacio nulo del hessiano tanto del funcional de longitud como del funcional de energía si y solo si V es un campo de Jacobi. Así, si γ es una geodésica que une a los puntos p y q, entonces el hessiano (del funcional de longitud como el de energía) en γ es degenerado si y solo si p y q son conjugados a lo largo de γ, además su nulidad sera igual a la multiplicidad de p y q como puntos conjugados. Por tanto, su nulidad es finita ya que, por el corolario 20, la dimensión de $\mathcal{J}(\gamma)$ es $2n$.

Como conclusión tenemos que si $\gamma\colon [a, b] \to M$ es una curva que une a p con q en M entonces, γ es punto crítico de $\mathcal{L}$ (o de $\mathcal{E}$) si es geodésica, y es no degenerado si p y q no son conjugados; es decir, los puntos críticos no degenerados de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{E}$ son las geodésicas en M que unen a puntos que no son conjugados a lo largo de éstas.

Referencias

[1] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry. Translated from the Portuguese by Francis Flaherty.*, Boston, MA etc.: Birkhäuser, 1992.

[2] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds. 2nd ed.*, vol. 202, New York, NY: Springer, 2nd ed. ed., 2011.

[3] ——, *Introduction to smooth manifolds. 2nd revised ed.*, vol. 218, New York, NY: Springer, 2nd revised ed ed., 2013.

[4] ——, *Introduction to Riemannian manifolds. 2nd edition.*, vol. 176, Cham: Springer, 2nd edition ed., 2018.

[5] J. W. Milnor, *Morse theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.*, vol. 51, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.