Puntos críticos de funciones distancia

Andrés Ahumada Gómez

La teoría de los puntos críticos de funciones distancia concebida por Karsten Grove y Katsuhiro Shiohama en 1977 al demostrar una generalización del teorema clásico de la esfera (véase [2]). El objetivo de dicha teoría es emular la teoría de Morse para funciones distancia, éstas están dadas por la estructura métrica de una variedad riemanniana.

Vamos a considerar una variedad riemanniana conexa y completa (M^n, g). Ésta induce la métrica en M:

$$d_g(p,q) = \text{ínf}\,\{\mathcal{L}(c) \mid c\colon [0,1] \to M \text{ diferrenciable a pedazos con } c(0) = p \text{ y } c(1) = q\}$$

donde

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 |\dot{c}(t)|_g \ \mathrm{d}t.$$

Antes de empezar con el desarrollo, tenemos que hacer un par de observaciones:

1. El Teorema de Hopf-Rinow nos dice que (M, g) es geodésicamente completa si y sólo si (M, d_g) es espacio métrico completo.
2. El Teorema de Arzelà-Ascoli nos dice que siempre existen segmentos geodésicos entre cualquier par de puntos.
3. Supondremos que las geodésicas están parametrizadas por longitud de arco.

Definición 1. Sea $A \subset M$ cerrado. La *función distancia a A* es:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{dist}_A: & M & \to & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & d_g(A,p), \end{array}$$

donde $d_g(A,p) = \text{mín}\,\{d_g(p,q) \mid q \in A\}$.

Un punto $q \in M$ se dice que es *punto crítico para* dist_A ó *punto crítico para* A si para cualquier vector $v \in T_qM$ hay una geodésica minimizante de $c\colon [0,1] \to M$ de q a A tal que

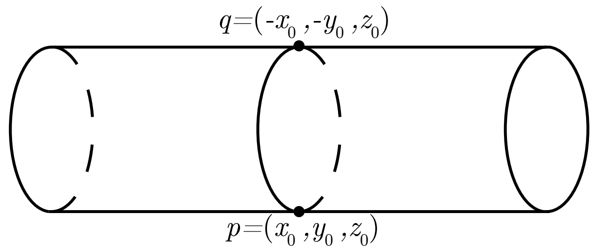
$$g(v, \dot{c}(0)) \geq 0.$$

Un punto $r \in M$ se dice que es *punto regular para* dist_A ó *punto regular para* A si existe un vector $w \in T_rM$ tal que para cualquier geodésica minimizante $c\colon [0,1] \to M$ de q a A se tiene que

$$g(w, \dot{c}(0)) < 0.$$

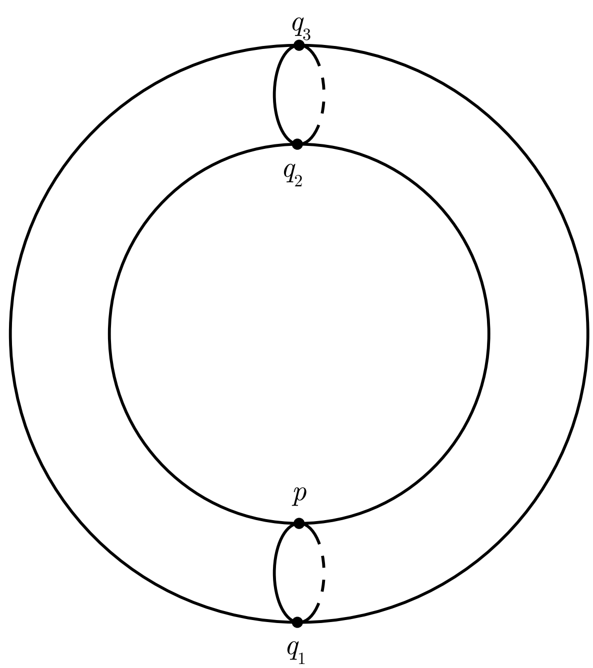
El conjunto de puntos críticos para A se denotará por $\text{crít}(A)$ y el conjunto de puntos regulares por $\mathrm{reg}(A)$.

Ejemplo. $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.



q y p son los puntos críticos de p.

Ejemplo. $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.



q_1, q_2, q_3 y p son los puntos críticos de p.

Lema 1. *Para cualquier punto regular $q \in M$ de* textdist$_A$ *hay un campo vectorial X en alguna vecindad U de q tal que*

$$g(X_{\tilde{q}}, \dot{c}(0)) < 0 \tag{1}$$

para cualquier $\tilde{q} \in U$ y cualquier geodésica minimizante de $\tilde{q}$ a A.

Demostración. Como q es regular para A, existe un vector unitario $X_q \in T_qM$ tal que

$$g(X_q, \dot{c}(0)) \geq 0$$

para cualquier geodésica c de q a A. Ahora se extiende X_q a un campo vectorial suave arbitrario X en alguna vecindad abierta de q. Este campo vectorial satisface la condición (1) en alguna vecindad abierta suficientemente pequeña pues de lo contrario se puede dar una sucesión $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos en M que convergen a q y una sucesión $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de geodésicas de q_i a A que satisfacen

$$g(X_{q_i}, \dot{c}_i(0)) \geq 0.$$

Una geodésica límite c de $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sería una geodésica minimizante de q a A tal que

$$g(X_q, \dot{c}) \geq 0,$$

lo cual es una contradicción. Q. E. D.

Definición 2. Un campo vectorial unitario X en una vecindad U que satisface (1) se llama *campo vectorial tipo gradiente para* dist_A.

El lema anterior muestra la existencia local de los campos vectoriales tipo gradiente para dist_A alrededor de puntos regulares.

Corolario 2 (Existencia de campos vectoriales tipo gradiente globales)**.** *Bajo las mismas condiciones del lema anterior se tiene que*

1. *El conjunto de puntos regulares para A es abierto.*

2. *En el conjunto abierto U de puntos regulares existe un campo vectorial tipo gradiente para* textdist_A.

Demostración. El inciso (a) se sigue inmediatamente del lema anterior.

Para el inciso (b), se pueden pegar los campos vectoriales locales tipo gradiente para dist_A dados por el lema anterior usando una partición de la unidad. Así, se obtiene un campo $\tilde{X}$ en U que satisface (1). Esto último se tiene de la finitud local de la partición de la unidad y de la observación: si $v_1, \cdots, v_m$ son vectores unitarios en un espacio vectorial euclidiano que satisfacen que $\langle v_i, w\rangle < 0$ para toda i, entonces cualquier combinación lineal convexa

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i,$$

con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, también satisface $\langle v, w\rangle < 0$. Finalmente, tómese

$$X = \frac{\tilde{X}}{\|\tilde{X}\|_g}. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Proposición 3. *Sea $U \subset M$ abierto y X un campo vectorial tipo gradiente para $dist_A$ en U. Sea Φ el flujo de $-X$ y Ψ el flujo de X. Entonces*

1. textdist_A *es estrictamente decreciente a lo largo de cualquier curva integral de $-X$.*

2. *En cualquier subconjunto compacto C de U la razón de decrecimiento está controlada por una constante de Lipschitz, i. e., hay una constante $\theta > 0$ tal que*

$$\operatorname{dist}_A(\Phi(q, t_0 + \tau)) \leq \operatorname{dist}_A(\Phi(q, t_0)) - \tau\theta \tag{2}$$

mientras $\Phi(q, t_0 + \sigma) \in C$ para $0 \leq \sigma \leq \tau$. Equivalentemente se tiene

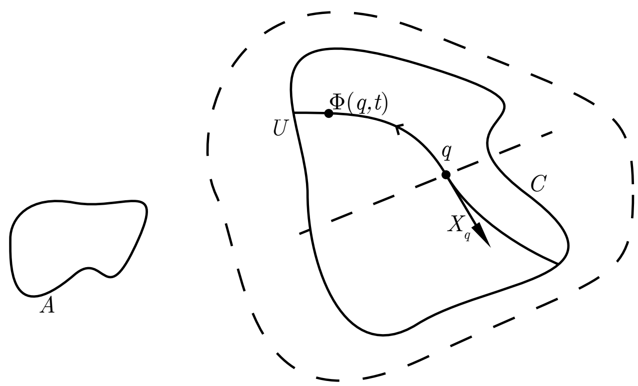
$$\operatorname{dist}_A(\Psi(q, t_0' + \tau)) \geq \operatorname{dist}_A(\Psi(q, t_0')) + \tau\theta \tag{3}$$

Demostración. Obsérvese primero que es suficiente probar *(b)* pues este implica *(a)*.

Nótese ahora que X satisface la desigualdad

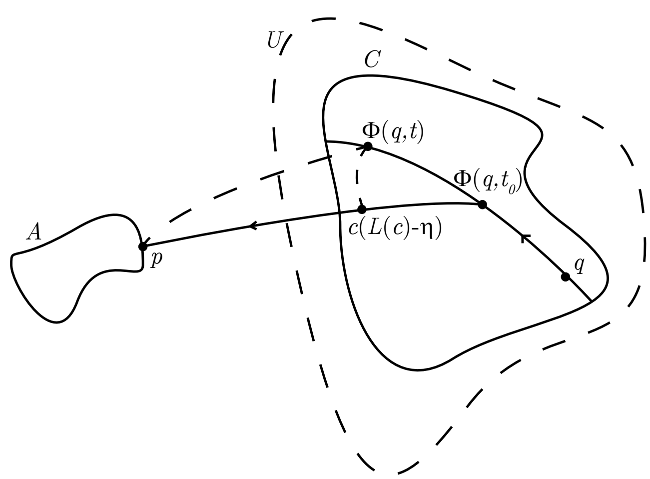
$$g(-X_q, \dot{c}(0)) \geq \theta$$

para algún $\theta > 0$, para cualquier $q \in C$ y cualquier geodésica minimizante c de q a A. Si esto no fuera cierto, habría una sucesión $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos en C y geodésicas minimizantes c_i de q_i a A tal que $g(X_{q_i}, \dot{c}_i(0)) \geq 0$. Por compacidad se tendría una subsucesión convergente que se denotará igual, $q_i \to q \in C$, y una geodésica límite c de q a A tal que $g(X_q, \dot{c}(0)) \geq 0$, lo cual contradice que q es regular.



Considérese la función $h(t) := \mathrm{dist}_A(\Phi(q,t))$. A partir de ésta se va a construir $\tilde{h}$ como sigue. Sea $p \in A$ tal que $d_g(p, \Phi(q, t_0)) = \mathrm{dist}_A(\Phi(q, t_0))$, con $q \in C$ y t_0 de manera que $\Phi(q, t_0) \in C$. Sea c geodésica minimizante unitaria, i.e., parametrizada por longitud de arco, de $\Phi(q, t_0)$ a p. Sea $\eta \in (0, L(c))$ fijo y sea

$$\tilde{h}(t) := \eta + d_g(c(L(c) - \eta), \Phi(q, t)).$$



Esta función satisface

- $\tilde{h}$ es diferenciable en una vecindad de t_0 si η es lo suficientemente grande de manera que $\Phi(q, t_0)$ pertenezca a una vecindad normal de $c(L(c) - \eta)$.

- $\tilde{h}(t) \overset{(*)}{\geq} d_g(p, \Phi(q, t)) \overset{(**)}{\geq} \operatorname{dist}_A(\Phi(q, t)) = h(t)$. (*) se cumple por la desigualdad del triángulo y (**) por definición.

- $\tilde{h}(t_0) = L(c) = d_g(p, \Phi(q, t_0)) = h(t_0)$.

Usando las coordenadas normales mencionadas antes, se calcula la derivada de $\tilde{h}$ en t_0:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{h}'(t_0) & = & g(\operatorname{grad}\operatorname{dist}_{c(L(c)-\eta)}(\Phi(q, t_0)), -X(\Phi(q, t_0))) \\ & = & g(-\dot{c}(0), -X(\Phi(q, t_0))) \\ & \leq & -\theta \end{array}$$

Así, $\tilde{h}$ es decreciente cerca de t_0 y como $\tilde{h}(t) \geq h(t)$:

$$\frac{h(t_0 + \tau) - h(t_0)}{\tau} \leq \frac{\tilde{h}(t_0 + \tau) - \tilde{h}(t_0)}{\tau}.$$

Esto implica que

$$\frac{h(t_0 + \tau) - h(t_0)}{\tau} \leq \lim_{\tau \to 0} \frac{\tilde{h}(t_0 + \tau) - \tilde{h}(t_0)}{\tau} = \tilde{h}(t_0) \leq -\theta.$$

Luego

$$h(t_0 + \tau) \leq h(t_0) - \tau\theta.$$

Es decir, la condición (2) se cumple en una vecindad de t_0. Sin embargo esta construcción es válida para cualquier t_0 tal que $\Phi(q, t) \in C$ en una vecindad de t_0 contenida en C. La otra condición es análoga. Q. E. D.

Corolario 4. *(Lema de Berger) Los máximos locales de d_A son puntos críticos.*

Corolario 5 (Teorema de la Función Implícita)**.** *Sea $r > 0$ un valor regular de $dist_A = d_A$, i. e., $d_A^{-1}(r) \cap crít(A) = \emptyset$. Entonces $d_A^{-1}(r) = S_A(r)$ es una variedad topológica de dimensión $n - 1$.*

Demostración. Sean $p \in S_A(r)$, X un campo vectorial tipo gradiente definido en una vecindad U de p y H una subvariedad "local" de dimensión $n - 1$ que sea transversal a X, por ejemplo, la imagen bajo $\exp_p$ de una vecindad V del origen en el $(n - 1)$-espacio vectorial ortogonal a X_p en T_pM.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se puede suponer que el flujo de X define un difeomorfismo

$$\Phi \colon H \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to W \subset M,$$

donde W es una vecindad abierta de p.

Por la Proposición 3 ,

$$d_A(\Phi(\tilde{q}, \varepsilon)) > d_A(\Phi(\tilde{q}, 0)) > d_A(\Phi(\tilde{q}, -\varepsilon)).$$

Así, tal vez restringiendo H un poco más, $\Phi(\tilde{q}, t)$ cruza una sola vez a $S_A(r)$ en un punto $\Phi(\tilde{q}, f(\tilde{q}))$ con $\tilde{q} \in H$ y la función $f \colon H \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ es continua. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} H \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & M \\ (q, t) & \longmapsto & \Phi(q, f(q) + t) \end{array}$$

da la carta de subvariedad buscada. Q. E. D.

Corolario 6 (Lema de Isotopía)**.** *Sea $A \subset M$ compacto y supongamos que $[r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_{>0}$ contiene solo valores regulares de d_A. Entonces todos los niveles $d_A^{-1}(r)$ con $r \in [r_1, r_2]$ son homeomorfos y el anillo*

$$\begin{aligned} R(r_1, r_2) &= D_A(r_2) \smallsetminus B_A(r_1) \\ &= \{q \in M \mid d_A(q) \leq r_2\} \smallsetminus \{q \in M \mid d_A(q) < r_1\} \\ &= \{q \in M \mid r_1 \leq d_A(q) \leq r_2\}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

es homeomorfo a $d_A^{-1}(r_1) \times [r_1, r_2]$.

Demostración. Usando particiones de la unidad podemos construir un cammpo vectorial X tipo gradiente en una vecindad W de $R(r_1, r_2)$ con $\bar{W} \subset V$ y $X\,|_{M \smallsetminus V} = 0$. Como $r_2 < \infty$, existe $\theta > 0$ tal que la condición (1) se satisface en $R(r_1, r_2)$ y el homeomorfismo nos lo da el flujo de $-X$. Q. E. D.

Corolario 7 (Lema del Tipo Finito)**.** *Sean M una variedad no compacta y $A \subset M$ compacto. Si d_A no tiene puntos críticos en $M \smallsetminus B_A(r)$, entonces $D_A(r)$ es una variedad compacta con frontera $S_A(r)$ y M es difeomorfa al interior $B_A(r)$ de $D_A(r)$.*

Demostración. Es totalmente análogo al anterior con $r_2 = \infty$. Q. E. D.

Corolario 8 (Teorema de la Esfera)**.** *Sea M^n una variedad cerrada. Si hay un punto p tal que $dist_p$ no tiene puntos críticos distintos a $\{p, q\}$, entonces M es homeomorfa a $\mathbb{S}^n$.*

Demostración. Solo hay un punto q a máxima distancia de p, sea $r_0 = d(p, q)$. Sea $\varepsilon > 0$ más pequeño al radio de inyectividad. Del Lema de Isotopía tenemos que $D_p(r)$ es homeomorfo a $\bar{B}(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ para $0 < r < r_0$.

Si para algún r se tiene que $M \smallsetminus B_p(r) \subset B_q(\varepsilon)$, entonces se tiene el resultado por el teorema de la función implícita (Corolario 5) y el teorema generalizado de Schönflies pues $S_p(r)$ sería una esfera encajada dentro del disco $D_q(\varepsilon)$.

Ahora, supongamos que $M \smallsetminus B_p(r) \not\subseteq B_q(\varepsilon)$ para cualquier $r < r_0$, i. e., existe una sucesión $x_n \in M$ con $d(p, x_n) \to r_0$ y $d(x_n, q) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M es compacta, existe un punto de acumulación $x \in M$ con $d(x, p) = r_0$ y $d(x, q) \geq \varepsilon$. Lo cual es una contradicción. Q. E. D.

En el artículo de Grove y Shiohama (véase [2]) se da la primera aplicación de esta teoría demostrando el siguiente resultado:

Teorema generalizado de la esfera. *Sea (M, g) una n-variedad riemanniana completa y conexa, cuya curvatura seccional K es tal que*

$$0 < \delta \leq K$$

y

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < diam(M).$$

Entonces M es homeomorfa a $\mathbb{S}^n$.

Para hacer eso, ellos usan el Teorema de Toponogov para aplicar el Corolario 8. Se prueba que si p y q dos puntos son diametralmente opuestos, entonces q es el único a máxima distancia de p.

Referencias

[1] K. Grove, *Critical point theory for distance functions.*, in Differential geometry. Part 3: Riemannian geometry. Proceedings of a summer research institute, held at the University of California, Los Angeles, CA, USA, July 8-28, 1990, Providence, RI: American Mathematical Society, 1993, pp. 357–385.

[2] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem.*, Ann. Math. (2), 106 (1977), pp. 201–211.