

TEOREMA 1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango r . Entonces, existen únicas matrices $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$A = U\Sigma V^T,$$

donde

- U y V son matrices ortogonales.
- Σ es una matriz diagonal con entradas no negativas en la diagonal.
- Las entradas de Σ están ordenadas de manera decreciente.

A los valores en la diagonal de Σ se les llama valores singulares de A , y las columnas de U y V se llaman vectores singulares izquierdos y derechos, respectivamente.

Demostración. Supongamos que la descomposición existe, es decir, $A = U\Sigma V^T$, nuestro objetivo es encontrar las matrices U , Σ y V .

Primero, consideremos la matriz $A^T A$, esta es simétrica; por el teorema espectral, también es diagonalizable y todos sus valores propios son no negativos. Sea P la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales de $A^T A$, y sea D la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios correspondientes. Entonces, podemos escribir

$$A^T A = P D P^T.$$

Por otro lado, como suponemos que $A = U\Sigma V^T$, tenemos

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T.$$

Comparando ambas expresiones para $A^T A$, obtenemos

$$P D P^T = V\Sigma^T \Sigma V^T.$$

Así, podemos tomar

$$V = P, \quad \Sigma^T \Sigma = D.$$

Como tanto D y Σ son diagonales, tenemos que $\sigma_{ii}^2 = \lambda_{ii}$. Por otro lado, como los valores propios de $A^T A$ son no negativos, podemos tomar

$$\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_{ii}}.$$

Ahora, tomemos v_i las columnas de V y u_i las columnas de U . Observemos que, como V es ortogonal, tenemos que $V^T v_i = e_i$, donde e_i es el vector canónico. Entonces, de $A = U\Sigma V^T$, tenemos que

$$Av_i = U\Sigma V^T v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_{ii} e_i = \sigma_{ii} u_i,$$

así, podemos tomar

$$u_i = \frac{1}{\sigma_{ii}} A v_i.$$

De esta manera, tenemos la descomposición en valores singulares. □