

### TEOREMA 1.

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz de rango  $r$ . Entonces, existen únicas matrices  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$A = U\Sigma V^T,$$

donde

- $U$  y  $V$  son matrices ortogonales.
- $\Sigma$  es una matriz diagonal con entradas no negativas en la diagonal.
- Las entradas de  $\Sigma$  están ordenadas de manera decreciente.

A los valores en la diagonal de  $\Sigma$  se les llama valores singulares de  $A$ , y las columnas de  $U$  y  $V$  se llaman vectores singulares izquierdos y derechos, respectivamente.

*Demostración.* Supongamos que la descomposición existe, es decir,  $A = U\Sigma V^T$ , nuestro objetivo es encontrar las matrices  $U$ ,  $\Sigma$  y  $V$ .

Primero, consideremos la matriz  $A^T A$ , esta es simétrica; por el teorema espectral, también es diagonalizable y todos sus valores propios son no negativos. Sea  $P$  la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales de  $A^T A$ , y sea  $D$  la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios correspondientes. Entonces, podemos escribir

$$A^T A = P D P^T.$$

Por otro lado, como suponemos que  $A = U\Sigma V^T$ , tenemos

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T.$$

Comparando ambas expresiones para  $A^T A$ , obtenemos

$$P D P^T = P \Sigma^T \Sigma P^T.$$

Así, podemos tomar

$$V = P, \quad \Sigma^T \Sigma = D.$$

Como tanto  $D$  y  $\Sigma$  son diagonales, tenemos que  $\sigma_{ii}^2 = \lambda_{ii}$ . Por otro lado, como los valores propios de  $A^T A$  son no negativos, podemos tomar

$$\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_{ii}}.$$

Ahora, tomemos  $v_i$  las columnas de  $V$  y  $u_i$  las columnas de  $U$ . Observemos que, como  $V$  es ortogonal, tenemos que  $V^T v_i = e_i$ , donde  $e_i$  es el vector canónico. Entonces, de  $A = U\Sigma V^T$ , tenemos que

$$A v_i = U \Sigma V^T v_i = U \Sigma e_i = U \sigma_{ii} e_i = \sigma_{ii} u_i,$$

así, podemos tomar

$$u_i = \frac{1}{\sigma_{ii}} A v_i.$$

De esta manera, tenemos la descomposición en valores singulares.

□