Indicaciones

- En esta actividad se evalúa si el estudiante resuelve operaciones con matrices, incluyendo productos y cálculo de inversas; además del cálculo de determinantes de matrices y su significado en el contexto del Álgebra Lineal.
- Los ejercicios deben ser resueltos «a mano», sin ayuda de resúmenes o asistentes computacionales.
- Las resoluciones de los ejercicios deben ser entregadas en hojas de forma física al docente. No importa el orden de resolución de los ejercicios.
- Se encuentra prohibido el uso de cualquier otra fuente de información durante todo el examen.
- En caso de considerar que existe un error en la pregunta o que esta se encuentra mal planteada, se debe indicar cuál es el error y justificarlo.
- Todas las soluciones deben estar correctamente redactadas y explicadas.
- Se asignarán 4 puntos de excelencia si, a más de tener las soluciones correctas, el examen se destaca por su orden y escritura.

Ejercicios

1. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

realice las siguientes operaciones elementales por filas de forma consecutiva:

- $\frac{1}{2}F_1 \to F_1$ (1.5pt)
- $3F_1 + F_2 \to F_2$ (1.5pt)
- $-F_1 + F_3 \to F_3$ (1.5pt)
- $2F_2 + F_1 \to F_3$ (1.5pt)

Solución.

- $\frac{1}{2}F_1 \to F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $3F_1 + F_2 \to F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 10 & -11 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $-F_1 + F_3 \to F_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $2F_2 + F_1 \to F_3$: esta no es una operación elemental por filas válida. $\square$

2. Considere $k \in \mathbb{R}$ y las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2k \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ k & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

determine para qué valores de k el producto MN tiene inversa. (10pt)

Solución. Primero, calculemos el producto de las matrices; así, notemos que

$$MN = \begin{pmatrix} 2k & -2k+2 \\ 3k & 6k-3 \end{pmatrix}.$$

Luego, como la matriz MN tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero; entonces, como

$$\det(MN) = \begin{vmatrix} 2k & -2k+2 \\ 3k & 6k-3 \end{vmatrix} = -12k + 18k^2.$$

Por lo tanto, se tiene que para $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$, la matriz MN tiene inversa. $\square$

3. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ y la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\alpha \\ 4 & -2 & 2\alpha \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

Calcula el determinante de A realizando expansión por cofactores a la tercera fila. (10pt)

Solución. Aplicando la expansión por cofactores a la tercera fila, se tiene que

$$\det(A) = +(0)\begin{vmatrix} 2 & 3\alpha \\ -2 & 2\alpha \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 1 & 3\alpha \\ 4 & 2\alpha \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Resolviendo los determinantes, se obtiene que

$$\det(A) = 20\alpha + 40.$$ $\square$

4. Calcule, usando reducción por filas, la inversa de la siguiente matriz: (10pt)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para saber si es posible calcular la inversa de la matriz, primero se debe calcular el determinante de la misma. Así, se tiene que

$$\det(A) = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10.$$

Por lo tanto, la matriz A tiene inversa y se tiene que

$$(A|I_3) \sim (I_3|A^{-1}).$$

Entonces, notando que

$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y aplicando operaciones de filas, se tiene que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \frac{1}{4}F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & | & -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && -F_1 + F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && -\frac{2}{5}F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && -2F_2 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && F_3 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && F_3 + F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && -F_3 \to F_3,
\end{aligned}$$

y, por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

5. Determine si existen valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que las matrices A y B conmutan, donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1+\beta \end{pmatrix}.$$

En caso de existir, determínelos. (10pt)

Solución. Tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha & 1+\beta+\alpha\beta \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad BA = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 \\ 1+\beta & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha + \beta, \\ 1+\beta+\alpha\beta &= 1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1 &= 1+\beta,\\
\beta &= 0.
\end{aligned}
$$

Observamos entonces que la única posibilidad es que $\beta = 0$ y en tal caso, todas las ecuaciones anteriores se verifican. Por ende, para $\beta = 0$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, las matrices A y B conmutan. $\square$