Escuela de Ciencias Físicas y Matemática
Ciencia de datos • Álgebra lineal
Material extra no. 3: Cómputo de bases
Andrés Merino • Semestre 2024-1

Ejercicio 1. En $\mathbb{R}^2$, consideremos la siguiente base ordenada

$$T = \{(1,0), (-1,1)\}.$$

Determine $[(1,1)]_T$.

Solución. Llamemos

$$v_1 = (1,0) \qquad \text{y} \qquad v_2 = (-1,1),$$

con esto se tiene que

$$T = \{v_1, v_2\}.$$

Para determinar $[(1,1)]_T$, debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} (1,1) &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ &= \alpha_1(1,0) + \alpha_2(-1,1) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2), \end{aligned}$$

es decir, debemos debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ que sean solución del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ \qquad\ \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$\alpha_1 = 2, \qquad \text{y} \qquad \alpha_2 = 1,$$

por lo tanto

$$[x]_T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ □

Ejercicio 2. En $\mathbb{R}^2$, consideremos las siguientes bases ordenadas

$$S = \{(1,1), (0,1)\} \qquad \text{y} \qquad T = \{(1,0), (-1,1)\}.$$

Determine la matriz de cambio de base $P_{T\leftarrow S}$.

Solución. Llamemos

$$\begin{aligned} u_1 = (1,1), &\qquad u_2 = (0,1) \\ v_1 = (1,0) \qquad \text{y} &\qquad v_2 = (-1,1), \end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$S = \{u_1, u_2\} \qquad \text{y} \qquad T = \{v_1, v_2\}.$$

Dado que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, buscamos una matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$[x]_T = P_{T\leftarrow S}[x]_S$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Vamos a utilizar los elementos de la base de S para determinar $P_{T\leftarrow S}$. Notemos que

$$[u_1]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad [u_2]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(esto siempre ocurre con los elementos de la base). Con esto, si

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$[u_1]_T = P_{T\leftarrow S}[u_1]_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

y

$$[u_2]_T = P_{T\leftarrow S}[u_2]_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

es decir, la primera columna de $P_{T\leftarrow S}$ es $[u_1]_T$ y la segunda columna de $P_{T\leftarrow S}$ es $[u_2]_T$, por lo tanto, basta calcular

$$[u_1]_T \qquad \text{y} \qquad [u_2]_T.$$

Tal como se realizó en el ejercicio anterior, debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ que sean solución de los sistemas

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ \qquad \alpha_2 = 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 0, \\ \qquad \beta_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas, tenemos que

$$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \beta_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \beta_2 = 1$$

por lo tanto

$$[u_1]_T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [u_1]_T = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

así, se obtiene que

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

> ⚠ Notemos que el razonamiento realizado en el ejercicio anterior se cumple de manera general, es decir, dado un espacio vectorial y dos bases ordenadas de este:
>
> $$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \qquad \text{y} \qquad T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

se tiene que, para $j = 1, \dots, n$, la j-ésima columna de la matriz $P_{T\leftarrow S}$ es $[u_j]_T$, así,

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [u_1]_T & [u_2]_T & \dots & [u_n]_T \end{pmatrix}.$$

Notemos que los sistemas de ecuaciones resueltos en el ejercicio anterior son similares, esto también pasa de manera general, así, podemos plantear todos los sistemas y resolverlos simultáneamente como se muestra en el siguiente ejercicios.

EJERCICIO 3. En $\mathbb{R}^3$, consideremos las siguientes bases ordenadas

$$S = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\} \qquad \text{y} \qquad T = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}.$$

I. Dado el vector $x = (-1,2,0)$, determine $[x]_S$.

II. Determine la matriz de cambio de base $P_{T\leftarrow S}$.

III. Con los literales anteriores, calcule $[x]_T$.

IV. Compruebe el resultado anterior utilizando la definición de $[x]_T$.

Solución. Llamemos

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,1,0), & u_2 &= (0,1,1), & u_3 &= (0,1,0) \\ v_1 &= (1,0,1) & v_2 &= (0,1,0) \quad \text{y} & v_3 &= (0,1,1), \end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$S = \{u_1, u_2, u_3\} \qquad \text{y} \qquad T = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

I. Para determinar $[x]_S$, debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} x = (-1,2,0) &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ &= \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,1,0) \\ &= (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2), \end{aligned}$$

es decir, debemos debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ que sean solución del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 & = -1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 2, \\ \alpha_2 & = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$\alpha_1 = -1, \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3 = 3,$$

por lo tanto

$$[x]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

II. Tenemos que la matriz de cambio de base es

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [u_1]_T & [u_2]_T & [u_3]_T \end{pmatrix},$$

por lo cual, debemos encontrar $[u_1]_T$, $[u_2]_T$ y $[u_3]_T$, por lo tanto, debemos determinar escalares tales que

$$\begin{aligned} u_1 = (1,1,0) &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \\ &= \beta_1(1,0,1) + \beta_2(0,1,0) + \beta_3(0,1,1) \\ &= (\beta_1, \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = (0,1,1) &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 \\ &= \gamma_1(1,0,1) + \gamma_2(0,1,0) + \gamma_3(0,1,1) \\ &= (\gamma_1, \gamma_2 + \gamma_3, \gamma_1 + \gamma_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 = (0,1,0) &= \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 \\ &= \delta_1(1,0,1) + \delta_2(0,1,0) + \delta_3(0,1,1) \\ &= (\delta_1, \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_3), \end{aligned}$$

es decir, se deben resolver los sistemas

$$\begin{cases} \beta_1 & = 1, \\ \beta_2 + \beta_3 & = 1, \\ \beta_1 + \beta_3 & = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 & = 0, \\ \gamma_2 + \gamma_3 & = 1, \\ \gamma_1 + \gamma_3 & = 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \delta_1 & = 0, \\ \delta_2 + \delta_3 & = 1, \\ \delta_1 + \delta_3 & = 0. \end{cases}$$

Podemos colocar estos tres sistemas en una matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Realizando reducción por filas tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

De donde obtenemos que

$$[u_1]_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad [u_2]_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [u_3]_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto, tenemos que

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [u_1]_T & [u_2]_T & [u_3]_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III. Tenemos que

$$[x]_T = P_{T\leftarrow S}[x]_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

IV. Para comprobar el resultado anterior utilizando la definición, debe ser verdad que

$$x = -1v_1 + 1v_2 + 1v_3,$$

por lo tanto, calculemos el lado derecho:

$$\begin{aligned} -1v_1 + 1v_2 + 1v_3 &= -1(1,0,1) + 1(0,1,0) + 1(0,1,1) \\ &= (-1,2,1) \\ &= x, \end{aligned}$$

por lo tanto, queda comprobado. □

EJERCICIO 4. En $\mathbb{R}_2[t]$, consideremos las siguientes bases ordenadas

$$S = \{t^2+1, 2t, 2\} \qquad \text{y} \qquad T = \{t^2-1, t^2+t, t\}.$$

Determine la matriz de cambio de base $P_{T\leftarrow S}$.

Solución. Llamemos

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^2+1, & p_2(t) &= 2t, & p_3(t) &= 2 \\ q_1(t) &= t^2-1 & q_2(t) &= t^2+t \quad \text{y} & q_3(t) &= t, \end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$S = \{p_1(t), p_1(t), p_1(t)\} \qquad \text{y} \qquad T = \{q_1(t), q_1(t), q_1(t)\}.$$

Tenemos que la matriz de cambio de base es

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [p_1(t)]_T & [p_2(t)]_T & [p_3(t)]_T \end{pmatrix},$$

por lo cual, debemos encontrar $[p_1(t)]_T$, $[p_2(t)]_T$ y $[p_3(t)]_T$, por lo tanto, debemos determinar escalares tales que

$$\begin{aligned} p_1(t) = t^2+1 &= \alpha_1 q_1(t) + \alpha_2 q_2(t) + \alpha_3 q_3(t) \\ &= \alpha_1(t^2-1) + \alpha_2(t^2+t) + \alpha_3(2) \\ &= (\alpha_1+\alpha_2)t^2 + \alpha_2 t + (2\alpha_3 - \alpha_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(t) = 2t &= \beta_1 q_1(t) + \beta_2 q_2(t) + \beta_3 q_3(t) \\ &= \beta_1(t^2 - 1) + \beta_2(t^2 + t) + \beta_3(2) \\ &= (\beta_1 + \beta_2)t^2 + \beta_2 t + (2\beta_3 - \beta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(t) = 2 &= \gamma_1 q_1(t) + \gamma_2 q_2(t) + \gamma_3 q_3(t) \\ &= \gamma_1(t^2 - 1) + \gamma_2(t^2 + t) + \gamma_3(2) \\ &= (\gamma_1 + \gamma_2)t^2 + \gamma_2 t + (2\gamma_3 - \gamma_1), \end{aligned}$$

es decir, se deben resolver los sistemas

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = 1, \\ \quad\ \ \alpha_2 & = 0, \\ -\alpha_1 \qquad + 2\alpha_3 & = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 & = 0, \\ \quad\ \ \beta_2 & = 2, \\ -\beta_1 \qquad + 2\beta_3 & = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 & = 0, \\ \quad\ \ \gamma_2 & = 0, \\ -\gamma_1 \qquad + 2\gamma_3 & = 2, \end{cases}$$

Podemos colocar estos tres sistemas en una matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Realizando reducción por filas tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

De donde obtenemos que

$$[p_1(t)]_T = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad [p_2(t)]_T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [p_3(t)]_T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con esto, tenemos que

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [p_1(t)]_T & [p_2(t)]_T & [p_3(t)]_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \square$$