

EJERCICIO 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -v + 3w = 1 \\ u + v + w = 1 \\ u - v - w = -1 \end{cases}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Ahora, procedemos a realizar la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) & F_1 \leftrightarrow F_2 \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right) & -1F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right) & -1F_2 \rightarrow F_2 \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right) & -1F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & -8 & | & -4 \end{pmatrix} & 2F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & -\frac{1}{8}F_3 \rightarrow F_3 \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & -4F_3 + F_1 \rightarrow F_1 \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & 3F_3 + F_2 \rightarrow F_2
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

con esto, tenemos que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$, de donde el sistema tiene solución, además, $\text{rang}(A) = 3$, por lo tanto, la solución es única. Además, los sistemas

$$\begin{cases} -v + 3w = 1 \\ u + v + w = 1 \\ u - v - w = -1 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = \frac{1}{2} \\ w = \frac{1}{2} \end{cases}$$

tienen las mismas soluciones, es decir, la solución es $u = 0$, $v = \frac{1}{2}$ y $w = \frac{1}{2}$. Es decir, el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(0, 1/2, 1/2)\}.$$

□

EJERCICIO 2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -v + 3w = 1 \\ u + v + w = 1 \end{cases}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Ahora, luego de realizar la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right),$$

con esto, tenemos que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$, de donde el sistema tiene solución, además, $\text{rang}(A) = 2 < 3$, por lo tanto, tiene infinitas soluciones. Además, los sistemas

$$\begin{cases} -v + 3w = 1 \\ u + v + w = 1 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u + 4w = 2 \\ v - 3w = -1 \end{cases}$$

tienen las mismas soluciones, así, se tiene que

$$\begin{aligned} u &= 2 - 4\alpha \\ v &= -1 + 3\alpha \\ w &= \alpha, \end{aligned}$$

es solución del sistema para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, de donde el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(2 - 4\alpha, -1 + 3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

□