Deber de la semana 1

Nombres y apellidos

Carrera de Ciencia de Datos

18 de abril de 2024

1. Ejercicios de matrices

Ejercicio 1. *Considere la siguiente matriz de 3×3:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule el determinante de A (puede utilizar directamente Python). ¿Por qué la matriz tiene inversa?

b) Utilizando el método de Gauss-Jordan, calcule la matriz inversa de A, indicando cada paso (puede utilizar directamente Python para las operaciones por filas).

Demostración.

a) El determinante de A está dado por

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 2 + 33 = 32 \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es invertible pues $\det(A) \neq 0$.

b) Puesto que A es invertible, se tiene que

$$(A|I_3) \sim (I_3|A^{-1}).$$

Por lo tanto, aplicando operaciones por filas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad F_2 - 3F_1 \to F_2,$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad F_3 - 4F_1 \to F_3,$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -7 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad -\frac{1}{8}F_2 \to F_2,$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad -F_3 \to F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad F_1 - 2F_2 \to F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{11}{8} & \frac{7}{8} & -1 \end{array}\right) \qquad F_3 - 7F_2 \to F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{32} & \frac{7}{32} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \qquad \frac{1}{4}F_3 \to F_3$$

Dirección: Avenida 12 de Octubre 1076 y Vicente Ramón Roca
Código postal: 170525 / **Teléfono:** (593-2) 299 1700
Quito - Ecuador / www.puce.edu.ec

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{32} & -\frac{11}{32} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{32} & \frac{7}{32} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \qquad F_2 - F_3 \to F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{32} & -\frac{11}{32} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{32} & \frac{7}{32} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \qquad F_1 - F_3 \to F_1.$$

Por lo tanto, la matriz inversa de la matriz A está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{32} & -\frac{11}{32} & \frac{1}{4} \\ \frac{11}{32} & \frac{7}{32} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Dirección: Avenida 12 de Octubre 1076 y Vicente Ramón Roca
Código postal: 170525 / **Teléfono:** (593-2) 299 1700
Quito - Ecuador / www.puce.edu.ec