CATÁLOGO STEM
CIBERSEGURIDAD • MATEMÁTICAS DISCRETAS
RESUMEN DE CONCEPTOS DE TEORÍA DE GRAFOS
Andrés Merino • Agosto 2025

ÍNDICE

1	**Grafos**	1
2	**Grafos dirigidos**	2
3	**Isomorfismos y homeomorfismos**	3
4	**Caminos y conectividad**	3

1. GRAFOS

DEFINICIÓN 1: Grafo.
Sean V un conjunto finito y A un subconjunto de pares no ordenados de V. Se dice que $G = (V, A)$ es un grafo, al conjunto V se lo denomina vértices de grafo y al conjunto A se lo denomina aristas del grafo. Para $e \in A$, si $e = \{u, v\}$, con $u, v \in V$, se dice que la arista e une el vértice u con el vértice v.

Dado un grafo $G = (V, A)$, si e une el vértice u con el vértice v se dice también que e conecta u y v y que u y v son los extremos de e.

Dado un grafo $G = (V, A)$, si para algún $u \in V$ se tiene que e une el vértice v consigo mismo, se dice que e es un lazo. Si un grafo no contiene lazos, se dice que es un grafo simple.

DEFINICIÓN 2.
Sean $G = (V, A)$ un grafo y $u, v \in V$. Se dice que u y v son adyacentes en G si existe $e \in A$ tal que e une u con v.

DEFINICIÓN 3.
Sea $G = (V, A)$ un grafo. Para $u \in V$, se define el grado de u, denotado por $\operatorname{grad}(u)$, por el número de aristas en A que contienen a u como uno de sus extremos (en caso de que existan lazos, estos cuentan por dos).

TEOREMA 1: Apretón de manos.
Sea $G = (V, A)$ un grafo. Se tiene que

$$\sum_{u \in V} \operatorname{grad}(u) = 2|A|.$$

TEOREMA 2.
Todo grafo tiene un número par de vértices de grado impar.

2. Grafos dirigidos

Definición 4: Grafo dirigido.
Sean V un conjunto finito y A un subconjunto de pares ordenados de V. Se dice que $G = (V, A)$ es un grafo dirigido o digrafo, al conjunto V se lo denomina vértices de grafo y al conjunto A se lo denomina arcos del grafo. Para $e \in A$, si $e = (u, v)$, con $u, v \in V$, se dice que el arco e empieza en el vértice u y termina en el vértice v.

⚠ Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, si e empieza en el vértice u y termina en el vértice v se dice también que v es un sucesor de u y que u y v son los extremos inicial y final de e, respectivamente.

⚠ Sean $G = (V, A)$ un grafo dirigido y $u \in V$. Se denota por $\text{suc}(u)$ al conjunto de todos los sucesores de u, es decir,

$$\textbf{suc}(u) = \{v \in V : (u, v) \in V\}.$$

⚠ Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, si para algún $u \in V$ se tiene que e empieza y termina en el vértice u, se dice que e es un lazo. Si un grafo dirigido no contiene lazos, se dice que es un grafo simple.

Definición 5.
Sean $G = (V, A)$ un grafo dirigido y $u, v \in V$. Se dice que u y v son adyacentes en G si existe $e \in A$ tal que e une u con v o viceversa.

Definición 6.
Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido. Si los arcos o vértices de G se etiquetan con algún tipo de datos, se dice que G es un grafo dirigido etiquetado.

Definición 7.
Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido. Para $u \in V$, se define el grado de salida de u, denotado por $\text{grad}_s(u)$, por el número de aristas en A que contienen a u como su extremo inicial. De manera similar, se define el grado de entrada de u, denotado por $\text{grad}_e(u)$, por el número de aristas en A que contienen a u como su extremo final.

⚠ Dados un grafo dirigido $G = (V, A)$ y $v \in V$, si $\text{grad}_s(v) = 0$, se dice que v es un sumidero, y si $\text{grad}_e(v) = 0$, se dice que v es una fuente.

Teorema 3.
Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido. La suma de los grados de salida de los vértices de G es igual a la suma de los grados de entrada de los vértices e igual al número de aristas de G, es decir

$$|A| = \sum_{u \in V} \text{grad}_e(u) = \sum_{u \in V} \text{grad}_s(u).$$

3. Isomorfismos y homeomorfismos

Definición 8.
Sea $G = (V, A)$ un grafo. Si $B \subseteq A$ y $U \subseteq V$ son tales que (B, U) es un grafo, entonces se dice que (B, U) es un subgrafo de G.

Definición 9.
Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafos. Se dice que G_1 y G_2 son isomorfos si existe una función biyectiva $f: V_1 \to V_2$ tal que u está conectado con v en G_1 si y solo si $f(u)$ está conectado con $f(v)$ en G_2.

4. Caminos y conectividad

Definición 10: Camino.
Sean $G = (V, A)$ un grafo y $a, b \in V$. Un camino entre a y b es una secuencia

$$C = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

tal que $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$, $e_1, \ldots, e_n \in A$, $v_0 = a$, $v_n = b$ y para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e_k conecta v_{k-1} con v_k. Al número de aristas que contiene el camino se lo denomina longitud del camino y se lo denota por $\text{long}(C)$.

Dados $G = (V, A)$ un grafo, $a, b \in V$ y α un camino entre a y b, a α también se lo representará únicamente por sus aristas.

Definición 11: Camino cerrado o circuito.
Sean G un grafo y α un camino en G. Se dice que α es cerrado o que es un circuito si su vértice inicial y final coinciden.

Definición 12: Camino simple.
Sean G un grafo y α un camino en G. Se dice que α es simple si todos sus vértices son diferentes.

Definición 13: Recorrido.
Sean G un grafo y α un camino en G. Se dice que α es un recorrido si todas sus aristas son diferentes.

Definición 14: Circuito simple.
Sean G un grafo y α un circuito en G. Se dice que α es un circuito si es un recorrido.

Definición 15: Ciclo.
Sean G un grafo y α un camino en G. Se dice que α es un ciclo si todos sus vértices son diferentes menos el primero y último que son iguales. Un ciclo de longitud k se denomina un k-ciclo.

Teorema 4.
Sean $G = (V, A)$ un grafo y $a, b \in V$. Existe un camino entre a y b si y solo si existe un camino simple entre a y b.

Definición 16.
Sea $G = (V, A)$ un grafo. Se dice que G es conexo si para todo $u, v \in V$, existe un camino entre u y v.

Definición 17.
Sean $G = (V, A)$ un grafo y $u, v \in V$. Se dice que u y v están conectados si existe un camino entre u y v.

Teorema 5.
Sean $G = (V, A)$ un grafo. La relación "estar conectados" determina una relación de equivalencia.

Definición 18.
Sea G un grafo. A cada clase de equivalencia de G bajo la relación "estar conectados" se la denomina componente conexa de G.

Definición 19: Distancia entre vértices.
Sean $G = (V, A)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. Se define la distancia de u a v por

$$d(u, v) = \text{mín}\{\text{long}(C) : C \text{ es un camino entre } u \text{ y } v\}.$$

Definición 20: Diámetro.
Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo. El diámetro de G se define por

$$\text{diam}(G) = \text{máx}\{d(u, v) : u, v \in V\}.$$

Teorema 6.
Sea G un grafo con $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y matriz de adyacencia $M_G = (m_{ij})$. El número de caminos distintos de longitud k de v_i a v_j es igual al elemento en la posición (i, j) de la matriz M_G^k.