

Ejercicios tomados del libro Matemáticas discretas con aplicaciones, de Susanna Epp.

EJERCICIO 1. Un grupo de 12 personas está formado por 5 hombres y 7 mujeres.

- I. ¿Cuántos equipos de cinco personas se pueden elegir que consten de tres hombres y dos mujeres?
- II. ¿Cuántos equipos de cinco personas contienen al menos un hombre?
- III. ¿Cuántos equipos de cinco personas contienen a lo más un hombre?

Solución.

I. Para formar un equipo con 3 hombres y 2 mujeres, se elige:

- Formas de elegir 3 hombres de los 5 disponibles: $C(5, 3)$.
- Formas de elegir 2 mujeres de las 7 disponibles: $C(7, 2)$.

Como estas elecciones son independientes, multiplicamos:

$$C(5, 3) \cdot C(7, 2) = 10 \cdot 21 = 210.$$

Hay 210 equipos posibles.

II. El número total de equipos de 5 personas de un grupo de 12 es:

$$C(12, 5) = 792.$$

Si el equipo debe contener al menos un hombre, debemos excluir los equipos que no contienen ninguno (es decir, solo mujeres). El número de equipos de 5 mujeres es:

$$C(7, 5) = 21.$$

Restamos:

$$792 - 21 = 771.$$

Existen 771 equipos con al menos un hombre.

III. «A lo más un hombre» significa: o bien 0 hombres o bien 1 hombre.

- Si hay 0 hombres: se eligen 5 mujeres de las 7:

$$C(7, 5) = 21.$$

- Si hay 1 hombre: se elige 1 hombre de los 5 y 4 mujeres de las 7:

$$C(5, 1) \cdot C(7, 4) = 5 \cdot 35 = 175.$$

Sumamos ambos casos:

$$21 + 175 = 196.$$

Hay 196 equipos con a lo más un hombre.

□

EJERCICIO 2. En un tablero de 8×8 , una torre puede moverse cualquier número de casillas horizontal o verticalmente. ¿Cuántos caminos diferentes puede seguir una torre desde la casilla *inferior izquierda* hasta la *superior derecha* si todos los movimientos son únicamente hacia la derecha o hacia arriba?

Solución. El tablero tiene 8 columnas y 8 filas. Si la torre comienza en la esquina inferior izquierda y debe terminar en la esquina superior derecha, debe avanzar exactamente 7 pasos hacia la derecha y 7 pasos hacia arriba.

Cada camino se puede descomponer en pasos unitarios de una casilla a la derecha (R) o una casilla hacia arriba (U). Por ejemplo, un movimiento de 3 casillas a la derecha equivale a RRR.

Cada camino de la torre corresponde de manera única a una secuencia de 14 movimientos unitarios (7 R y 7 U).

Por lo tanto, el problema se reduce a contar cuántas secuencias distintas de 14 posiciones se pueden formar colocando 7 R y 7 U. Para esto, en la secuencia de 14 posiciones, debemos seleccionar 6 posiciones para colocar una de las letras (por ejemplo, la R) y en el resto colocamos la otra letra. Así, el número de secuencias es

$$C(14, 7) = 3432.$$

La torre puede seguir 3432 caminos distintos.

□

EJERCICIO 3. Un consejo estudiantil consta de cuatro clases:

- A: 3 estudiantes de primer año,
- B: 4 estudiantes,
- C: 4 profesores jóvenes,
- D: 5 profesores con experiencia.

En total hay 16 miembros. ¿Cuántos comités de 8 miembros pueden formarse si cada comité debe contener **al menos un miembro de cada clase**?

Solución.

Primero contamos el número total de comités de 8 miembros tomados de 16 personas sin ninguna condición:

$$|U| = \binom{16}{8} = 12870.$$

Queremos excluir los comités que *no cumplen* con la condición de tener al menos

un miembro de cada clase. Definimos:

$$E_A = \{\text{comités que no tienen a nadie de la clase A}\},$$

y de forma análoga E_B, E_C, E_D . El problema se convierte en calcular:

$$|U| - |E_A \cup E_B \cup E_C \cup E_D|.$$

Aplicamos la fórmula del criterio de Inclusión-Exclusión:

$$|E_A \cup E_B \cup E_C \cup E_D| = \sum |E_i| - \sum |E_i \cap E_j| + \sum |E_i \cap E_j \cap E_k| - |E_A \cap E_B \cap E_C \cap E_D|.$$

Con esto, calculemos cada uno de los términos:

- Si se excluye la clase A (3 personas), quedan $16 - 3 = 13$ miembros para elegir 8:

$$|E_A| = C(13, 8) = 1287.$$

- Si se excluye la clase B (4 personas), quedan $16 - 4 = 12$ miembros para elegir 8:

$$|E_B| = C(12, 8) = 495.$$

- Si se excluye la clase C (4 personas), también:

$$|E_C| = C(12, 8) = 495.$$

- Si se excluye la clase D (5 personas), quedan 11:

$$|E_D| = C(11, 8) = 165.$$

- Excluir A y B: $16 - (3 + 4) = 9$ personas, de las que debemos elegir 8:

$$|E_A \cap E_B| = C(9, 8) = 9.$$

- Excluir A y C: $16 - (3 + 4) = 8$ personas, de las que debemos elegir 8:

$$|E_A \cap E_C| = C(8, 8) = 1.$$

- Excluir A y D: $16 - (3 + 5) = 8$ personas, de las que debemos elegir 8:

$$|E_A \cap E_D| = C(8, 8) = 1.$$

- Excluir B y C: $16 - (4 + 4) = 8$ personas, de las que debemos elegir 8:

$$|E_B \cap E_C| = C(8, 8) = 1.$$

- Excluir B y D: $16 - (4 + 5) = 7$ personas, de las cuales no podemos elegir 8, es decir, este caso es imposible:

$$|E_B \cap E_D| = 0.$$

- Excluir C y D: $16 - (4 + 5) = 7$ personas, de las cuales no podemos elegir 8, es decir, este caso es imposible:

$$|E_C \cap E_D| = 0.$$

- Excluir tres grupos o cuatro son imposibles porque quedarían menos de 8 personas para formar el comité, por lo que las intersecciones triples y cuádruple tienen 0 elementos.

Sustituimos en la fórmula:

$$\begin{aligned} |E_A \cup E_B \cup E_C \cup E_D| &= (1287 + 495 + 495 + 165) - (9 + 9 + 1 + 1) \\ &= 2442 - 20 = 2422. \end{aligned}$$

El número de comités válidos es:

$$|U| - |E_A \cup E_B \cup E_C \cup E_D| = 12870 - 2422 = 10448.$$

□