Complementaria Metodos Computacionales 1: Punto 2

Bryan Andrés Ballesteros López

September 26, 2023

1 Regla de Simpson 3/8

La fórmula de Simpson de 3/8 consiste en dividir el intervalo en subintervalos de $m = 4$ puntos cada uno. Observemos entonces que el espacio entre los 3 intervalos (4 puntos generan 3 intervalos) esta dado por lo siguiente:

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{x_3 - x_0}{3}$$

donde x_3 es el ultimo punto y x_0 es el primero.

Entonces tenemos que:

x	y
x_0	f(x_0)
x_1	f(x_1)
x_2	f(x_2)
x_3	f(x_3)

El valor de la integral es entonces:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_3(x)dx$$

Ahora bien, tenemos que $f_3(x)$ es igual a

$$f_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

Ahora si sabemos que el espacio entre dos puntos seguidos uno del otro es h entonces el espacio entre tres puntos sera $2h$ y para 3 sera $3h$. Así que hagamos:

$$x_2 - x_0 = 2h, x_3 - x_1 = 2h, x_3 - x_1 = 2h, x_3 - x_0 = 3h$$

Ahora cuando integramos obtenemos que:

$$\int_a^b f_3(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(h)(-h)(-2h)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(h)(-h)(2h)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(h)(2h)(3h)} f(x_3)$$

Factorizando y aplicando la integral a cada suma resulta como:

$$= -\frac{f(x_0)}{6h^3} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \frac{f(x_1)}{2h^3} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$-\frac{f(x_2)}{2h^3} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + \frac{f(x_3)}{6h^3} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Resolviendo la integral se obtiene que:

$$= -\frac{f(x_0)}{6h^3}\left(-\frac{9}{4} \cdot h^4\right) + \frac{f(x_1)}{2h^3}\left(\frac{9}{4} \cdot h^4\right) - \frac{f(x_2)}{2h^3}\left(-\frac{9}{4} \cdot h^4\right) + \frac{f(x_3)}{6h^3}\left(\frac{9}{4} \cdot h^4\right)$$

$$= \frac{3hf(x_0)}{8} + \frac{9hf(x_1)}{8} - \frac{9hf(x_2)}{8} + \frac{3hf(x_3)}{8}$$

Finalmente uniendo todo tenemos:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}hf(x_0) + \frac{9}{8}hf(x_1) - \frac{9}{8}hf(x_2) + \frac{3}{8}hf(x_3)$$

Factoricemos:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) - 3f(x_2) + f(x_3)]$$