Tarea 2

2. Estabilidad II Para el algoritmo de Verlet

a) Muestre que el error del método está descrito por:

$$\epsilon_{n+1} - (2 + h^2 a_n') \epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \qquad a_n' = \frac{\partial a}{\partial x}$$

Veamos la fórmula iterativa:

$$\vec{r}_{n+1} = 2\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1} + \vec{a}(\vec{r}_n) h^2$$

Sin embargo, el punto nos habla del error asociado así que modificándolo queda como

$$\vec{r}_{n+1} + \epsilon_{n+1} = 2\vec{r}_n + 2\epsilon_n - \vec{r}_{n-1} - \epsilon_{n-1} + \vec{a}(\vec{r}_n + \epsilon_n) h^2$$

Cuando vemos la expansión de $\vec{a}(\vec{r}_n + \epsilon_n)$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

Que da

$$\vec{a}(\vec{r}_n + \epsilon_n) = \vec{a}(\vec{r}_n) + \epsilon_n \vec{a}'(\vec{r}_n) \quad / \text{se trunca}$$

Por lo que:

$$\vec{r}_{n+1} + \underline{\epsilon_{n+1}} = 2\vec{r}_n + \underline{2\epsilon_n} - \vec{r}_{n-1} - \underline{\epsilon_{n-1}} + [\vec{a}(\vec{r}_n) + \underline{\epsilon_n \vec{a}'(\vec{r}_n)}] h^2$$

Veamos solo los errores!!

$$\epsilon_{n+1} = 2\epsilon_n - \epsilon_{n-1} + \epsilon_n \vec{a}'(\vec{r}_n) h^2$$

Agrupando:

$$\epsilon_{n+1} = -\epsilon_{n-1} + \epsilon_n (2 + a'(\vec{r}_n) h^2)$$

$$\epsilon_{n+1} + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n (2 + a'(\vec{r}_n) h^2) \checkmark$$

b) Para el caso de un oscilador armonico clásico muestre que:

$$\epsilon_{n+1} - 2(1-R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0$$

donde $2R = h^2 w^2 \Rightarrow R = \frac{h^2 w^2}{2}$

Para un o.a. $a_x = -w^2 x \Rightarrow a'x = -w^2$

$$\epsilon_{n+1} - 2\left(1 - \frac{h^2 w^2}{2}\right)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0$$

$$\epsilon_{n+1} - 2(1-R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0$$

c)

$$\lambda^{n+1} - (2-2R)\lambda^n + \lambda^{n-1} = 0$$

$$\lambda^n \cdot \lambda - (2-2R)\lambda^n + \frac{\lambda^n}{\lambda} = 0$$

Divida todo por λ^n

$$\lambda - (2-2R) + \frac{1}{\lambda} = 0$$

Para tener de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$\lambda^2 - (2-2R)\lambda + 1 = 0$$

Veamos las raíces

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_\pm = \frac{(2-2R) \pm \sqrt{4R^2 - 8R}}{2}$$

$$x_\pm = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}$$