

Punto 7

Estabilidad de la ecuación de Onda

Partamos de la ecuación de onda

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$U_i^{e+1} = (1 - \lambda^2) U_i^e + \lambda^2 (U_{i+1}^e + U_{i-1}^e) - U_i^{e-1}$$

Ahora usamos el hecho que las componentes de Fourier varían en el espacio y tiempo como

$$U_{e,i \pm 1} = e^{\pm jK \Delta x} U_{e,i}$$

Con esto al reemplazar

$$U_{i+1}^e + U_{i-1}^e = e^{j\alpha^2 \Delta x} + e^{-j\alpha^2 \Delta x} U_i^e = 2 \cos(\alpha^2 \Delta x) U_i^e$$

$$e^{w \Delta t} U_i^e = [2 - 2\lambda^2 + 2 \cos(\alpha^2 \Delta x)] U_i^e - e^{-w \Delta t} U_i^e$$

$$\cos(w \Delta t) U_i^e = [1 - \lambda^2 + \cos(\alpha^2 \Delta x)] U_i^e$$

En el peor de los casos tenemos  
 $\cos(w \Delta t) = \pm 1$   
 $2 - \lambda^2 \leq 1$   
por lo que  
 $\lambda \leq 1$