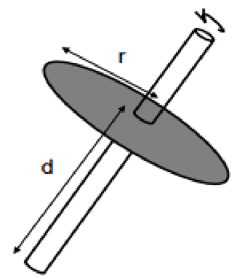
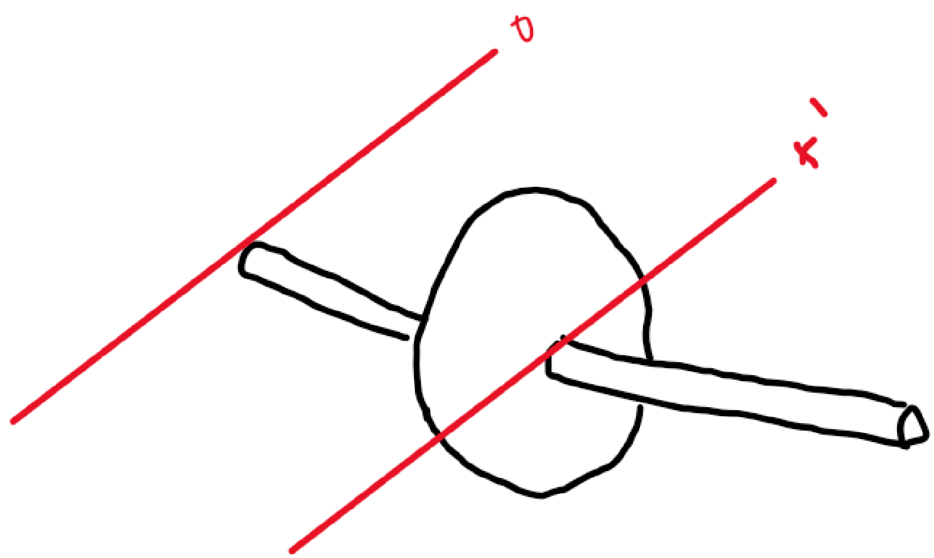
a)

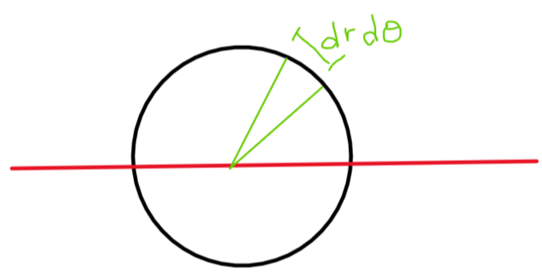


Tomando el anterior trompo simétrico, considerando que su momento de inercia solo depende de la masa del disco

El momento de inercia alrededor de la dirección azimutal se puede comprender mejor de la siguiente imagen



Donde sería el momento alrededor del eje x. Para ello primero se determina el momento de inercia del disco alrededor de x' y después se determina mediante el teorema de ejes paralelos para determinar el momento alrededor de x



Fijémonos que cada elemento de área está alejado del eje x’ por la componente vertical, es decir, $r \sin\theta$ entonces

$$I_x' = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dA$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2 r dr d\theta = \rho\pi \int_0^R r^3 dr$$

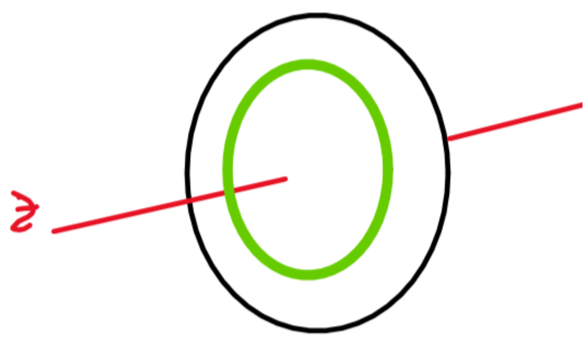
Como $m = \rho A = \rho\pi R^2$

$$I_x' = \rho\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} m R^2$$

Por el teorema de ejes paralelos se tiene entonces

$$I_0 = I_x' + md^2 = \frac{1}{4} m r^2 + md^2$$

b) Ahora el momento de inercia I_Z que es aquel alrededor del eje perpendicular al disco es simplemente



Integramos elementos de área como el anillo verde, donde se puede ver como un rectángulo de largo $2\pi r$ (perímetro) y alto dr

$$dA = 2\pi r dr$$

$$I_z = \rho \int r^2 dA = \rho \int_0^R r^2 2\pi r dr = \rho 2\pi \int_0^R r^3 dr$$

$$I_Z = \rho 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

c) La ecuación de Euler-Lagrange es de la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ son los momentos generalizados del sistema de las coordenadas generalizadas q_i. Además, sabemos que el lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_z\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - mgd\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_z(\dot{\phi}^2\cos^2\theta + 2\dot{\phi}\cos\theta\,\dot{\psi} + \dot{\psi}^2) - mgd\cos\theta$$

Las coordenadas generalizadas son $\phi, \psi\ y\ \theta$. Si nos fijamos el lagrangiano no depende de las primeras dos coordenadas sino de sus derivadas. Por lo tanto, a partir de la ecuación de Euler-Lagrange se puede suponer desde ya que sus momentos generalizados $p_\phi\ y\ p_\psi$ se conservan.

Se tiene entonces:

$$\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta) = \frac{d}{d\theta}(sin\,\theta\sin\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta) = \frac{d}{d\theta}(cos\,\theta\cos\theta) = -2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = I_0\dot{\phi}\sin^2\theta + I_z\dot{\phi}\cos^2\theta + I_z\dot{\psi}\cos\theta = \dot{\phi}(I_0\sin^2\theta + I_z\cos^2\theta) + I_z\dot{\psi}\cos\theta = p_\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_z\dot{\phi}\cos\theta + I_z\dot{\psi} = I_z\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) = p_\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_0\dot{\theta} = p_\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} I_0\dot{\phi}^2(2\sin\theta\cos\theta) + \frac{1}{2} I_z\dot{\phi}^2(-2\sin\theta\cos\theta) - I_z\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + mgd\sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,(I_0 - I_z) - I_z\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + mgd\sin\theta$$

Recordando que la ecuación de Euler-Lagrange es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ se llega

$$\frac{d}{dt}(p_\theta) = I_0\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,(I_0 - I_z) - I_z\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + mgd\sin\theta$$

d) Como se mencionó antes, los momentos generalizados de $\phi\ y\ \psi$ se conservan, pues a partir de Euler las ecuaciones de movimiento son:

Ecuación de movimiento para $\boldsymbol{\phi}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

$$\ddot{\phi}(I_0 \sin^2\theta + I_z \cos^2\theta) + \dot{\phi}\left[I_0 2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta} - I_z 2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta}\right] - I_z \dot{\psi}\dot{\theta} \sin\theta + I_z \ddot{\psi} \cos\theta$$

$$\ddot{\phi}(I_0 \sin^2\theta + I_z \cos^2\theta) + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta\, [I_0 - I_z] - I_z \dot{\psi}\dot{\theta} \sin\theta + I_z \ddot{\psi} \cos\theta = 0$$

Ecuación de movimiento para $\boldsymbol{\psi}$

$$I_z\left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta\right) = 0$$

Ecuación de movimiento para $\boldsymbol{\theta}$

$$I_0 \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta\, (I_0 - I_z) - I_z \dot{\phi}\dot{\psi} \sin\theta + mgd \sin\theta$$