Tarea 3

Punto 1

Sea el sistema autónomo definido por:

$$\dot{q} = f(q,p)$$
$$\dot{p} = g(q,p)$$

Puntos fijos $f(q_0, p_0) = 0$

Muestre que la estabilidad de los estados [illegible] definidos por esos puntos conduce a la siguiente ecuación matricial

$$\frac{dE}{dt} = ME$$

M matriz de estabilidad

a) Solucione numericamente el sistema de ecuaciones

Definamos

$$q(t) = q_0 + \alpha(t) \qquad p(t) = p_0 + \beta(t)$$

Entonces con la expansión de series de Taylor tenemos

$$\dot{\epsilon} = f(q_0+\alpha, p_0+\beta) = f(p_0+q_0) + \alpha \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial q} + \beta \frac{\delta f(q_0,p_0)}{\partial p}$$

$$\dot{\delta} = g(q_0+\epsilon, p_0+\delta) = h(p_0+q_0) + \alpha \frac{\partial g(q_0 p_0)}{\partial q} + \beta \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial p}$$

Ahora sabemos por el enunciado que $f(q_0,p_0)=0$
$g(q_0 p_0) = 0$

Entonces queda

$$\dot{\alpha} = \alpha \frac{\partial f(q_0, p_0)}{\partial q} + \beta \frac{\delta f(q_0, p_0)}{\partial p}$$

Por otro lado

$$\dot{\beta} = \beta \frac{\partial g(q_0, p_0)}{\partial q} + \beta \frac{\partial g(q_0, p_0)}{\partial p}$$

Ahora si vemos la forma matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial p} \\ \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial g(q_0 p_0)}{\partial p}\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$$

b) Sistema autónomo lineal:

$$x' = 2x - y$$

$$y' = x + 2y$$

Al comparar con la matriz de estabilidad M en el punto (0,0) se define por los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$