

1. Introducción
2. Diagrama de Bode
  - Curvas debidas a ganancia  $K$
  - Curvas debidas a términos polos y ceros en el origen
  - Curvas debidas a términos de 1<sup>er</sup> orden
  - Curvas debidas a términos de 2<sup>o</sup> orden
3. Especificaciones en el dominio de la frec. (Bode)
4. Estabilidad relativa. MG y MF (Bode)

### 1. Introducción

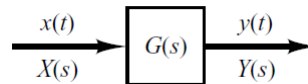
El término *respuesta en frecuencia*, se refiere a la respuesta en régimen permanente de un sistema a una entrada senoidal. Consiste en variar la frecuencia de la señal senoidal de entrada en un cierto rango para estudiar la respuesta resultante en ss, y permite obtener el comportamiento del sistema ante cualquier otra entrada tanto en el permanente como, indirectamente, en el transitorio.

Es un análisis que complementa el método del L.R. (aporta distinto tipo de información sobre el sistema), presentando la ventaja de que permite estudiar sistemas complejos de los que no se dispone de modelo, a partir de medidas directas de su respuesta.

#### Respuesta ss a entradas senoidales:

Dado el sistema LTI  $G(s)$  de la figura, donde  $x(t)$  es una entrada senoidal de la forma:  $x(t) = X \sin \omega t$ , la salida del sistema  $y(t)$  en ss es una señal senoidal de la misma frecuencia, pero con distinta fase y magnitud, de la forma:

$$y_{ss}(t) = Y \sin(\omega t + \phi) \quad \text{con:} \quad Y = X|G(j\omega)|; \quad \phi = \angle G(j\omega)$$



Dem.:

Supóngase que  $G(s)$  puede expresarse en forma polinómica como es habitual:

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)},$$

$$\begin{aligned} \text{de forma que la T.L. de la salida es: } Y(s) = G(s)X(s) &= \frac{p(s)}{q(s)} X(s) \stackrel{L[X \sin \omega t]}{=} \frac{p(s)}{q(s)} \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n} \end{aligned}$$

donde los numeradores son los residuos correspondientes a la exp. en fracciones parciales (recordar Tema 2).

$$\text{Antitransformando: } y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1 t} + b_2e^{-s_2 t} + \cdots + b_ne^{-s_n t}$$

Si el sistema es estable,  $-s_1, \dots, -s_n$  tiene parte real negativa, por tanto  $e^{-s_1}, \dots, e^{-s_n} \rightarrow 0$  en ss ( $t \rightarrow \infty$ ).

$$\text{Por tanto: } y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

Este resultado se mantiene si el sistema  $G(s)$  presenta polos múltiples.

Como se ha indicado  $a$  y  $\bar{a}$  son los residuos de los polos complejos conjugados y se obtienen directamente:

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j} \\ \bar{a} &= G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j} \end{aligned}$$

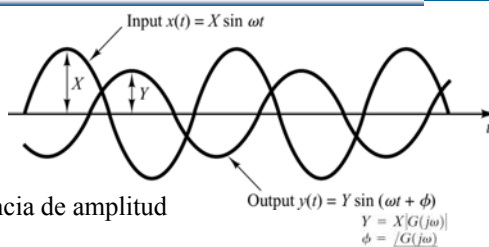
donde  $G(j\omega)$  y  $G(-j\omega)$ , al ser funciones complejas, pueden representarse de manera polar como (recordar Tema 2):  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$ ;  $G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$ .

$$\text{Por tanto: } a = -\frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}.$$

Entonces sustituyendo en la salida del sistema:

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \quad \text{con: } Y = X|G(j\omega)| \\ &= X|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad \phi = \angle G(j\omega) \quad \text{q.e.d.} \\ &= Y \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

De este resultado se observa que la salida de la misma frecuencia que la entrada, presenta un desfase  $\phi = \angle G(j\omega)$  (un sistema  $G_c(s)$  que produce un desfase positivo/negativo se dice que es una red de adelanto/atraso de fase) y una diferencia de amplitud debida a la ganancia  $|G(j\omega)|$ .



Por tanto, la salida ss de un sistema  $G(s)$  ante entrada senoidal puede obtenerse directamente de  $G(j\omega)$ , por lo que se denomina *F.T. senoidal*, y puede representarse gráficamente de diversas formas:

- Diagrama de Bode:  $\begin{cases} |G(j\omega)| \text{ en función de } \omega. \\ \text{Arg}(G(j\omega)) \text{ en función de } \omega. \end{cases}$
- Representación Polar (Nyquist):  $\text{Im}g(G(j\omega))$  en función de  $\text{Re}(G(j\omega))$ .
- Lugar de Black o Diagrama de Nichols:  $|G(j\omega)|$  en función de  $\text{Arg}(G(j\omega))$ .  
(Menos utilizado)

### 2. Diagrama de Bode

Se trata de dos gráficas diferentes:

*Diagrama de Módulo:*  $20 \log |G(j\omega)| \equiv G_{dB}(\omega)$  en función de  $\log \omega$ .

*Diagrama de Fase:*  $\text{Arg}(G(j\omega))$  en función de  $\log \omega$ .

(Tradicionalmente se grafican en papel semilogarítmico de manera que marcando directamente una  $\omega$  queda representado su log.)

La ventaja de este tipo de diagrama es que una F.T. genérica:

$$G(s) = \frac{K'(s+z_1) \dots (s+z_n)}{s^{j'}(s+p_1) \dots (s+p_{n-j'})} = \frac{K(1+T_a s) \dots (1+T_m s)}{s^{j'}(1+T_1 s) \dots (1+T_{n-j'} s)}, \text{ tal que } |G(j\omega)| = \left| \frac{K|1+T_a s| \dots |1+T_m s|}{|s^{j'}| |1+T_1 s| \dots |1+T_{n-j'} s|} \right|_{s=j\omega}$$

puede expresarse directamente en forma de sumas:

(OJO. No confundir:  $j'$  = tipo de sistema  
 $j$  = eje imaginario)

- $G_{dB}(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K + \sum_{i=a}^m 20 \log |1 + T_i j\omega| - [20 \log |j\omega|^{j'} + \sum_{i=1}^{n-j'} 20 \log |1 + T_i j\omega|]$
- $\phi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)) = 0 + \sum_{i=a}^m \text{Arg}(1 + T_i j\omega) - [\text{Arg}(j\omega)^{j'} + \sum_{i=1}^{n-j'} \text{Arg}(1 + T_i j\omega)],$

lo que facilita en gran medida la obtención de las gráficas como se verá a continuación.

## Tema 8: Respuesta en Frecuencia

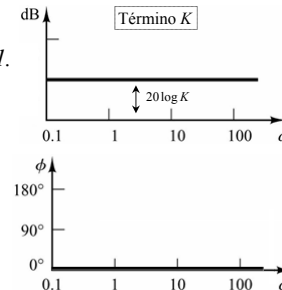


### Curvas debidas a una ganancia $K$ :

La curva de módulo para una ganancia  $K$  constante es una recta horizontal  $20\log(K)$  (en dB) de valor positivo si  $K > 1$  y negativo si  $K < 1$ . La curva de fase para una ganancia  $K$  constante es cero.

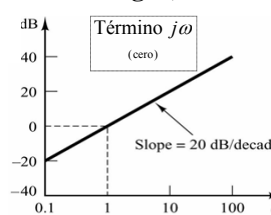
El efecto de variar la ganancia en la función de transferencia es que sube o baja la curva de magnitud logarítmica de la función de transferencia en la cantidad constante correspondiente, pero no afecta a la curva de fase.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Recordar que: } 20\log(10K) = 20\log K + 20 \\ 20\log(10^n K) = 20\log K + 20n \\ 20\log(K) = -20\log \frac{1}{K} \end{array} \right)$$



### Curvas debidas a términos del tipo $s^{\pm 1} = (j\omega)^{\pm 1}$ (polos y ceros en el origen):

La curva de módulo es  $20\log |(j\omega)^{\pm 1}| = \pm 20\log \omega$  dB, que representado frente a  $\log \omega$  resulta ser una recta de pendiente  $\pm 20$  dB/década centrada en el origen. Donde por década se entiende la unidad de medida frecuencial logarítmica igual a la banda de frecuencia  $[\omega_0, 10\omega_0]$  para una determinada frecuencia  $\omega_0$  (en escala logarítmica la distancia horizontal  $[\omega_0, 10\omega_0]$  es la misma que  $[3\omega_0, 30\omega_0]$ ), y donde el origen está en  $\omega = 1$  ( $\log 1 = 0$ ) y  $G_{dB} = 0$  ( $|G| = 1$ ).

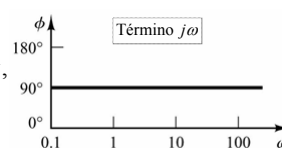


## Tema 8: Respuesta en Frecuencia



La curva de fase es constante e igual a  $\pm 90^\circ$ .

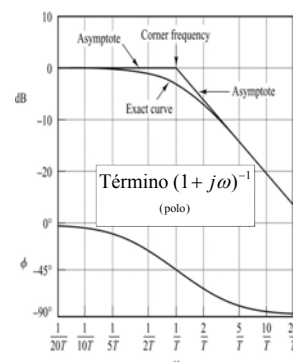
Si el término es múltiple con multiplicidad  $n$  del tipo  $s^{\pm n} = (j\omega)^{\pm n}$ , la curva de módulo presentará una pendiente  $\pm 20n$  dB/década, y la curva fase será una constante de valor  $\pm n 90^\circ$ .



### Curvas debidas a términos de 1º orden $(1 + Ts)^{\pm 1} = (1 + Tj\omega)^{\pm 1}$ :

La curva de módulo es  $20\log |(1 + Tj\omega)^{\pm 1}| = \pm 20\log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$  dB. Para frecuencias bajas, tales que  $\omega \ll 1/T$ , la curva de módulo se aproxima mediante la recta de 0 dB, mientras que para frecuencias altas, tales que  $\omega \gg 1/T$ ,  $\pm 20\log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx \pm 20\log \omega T$  dB, es decir, una recta de pendiente  $\pm 20$  dB/década centrada en  $\omega = 1/T$ . La frecuencia  $\omega = 1/T$  en la cual se encuentran las dos asíntotas se denomina *frecuencia de esquina*, por lo que el valor de la curva de módulo en ese punto se aproxima a 0 dB (obs. que en realidad es  $\pm 20\log \sqrt{2} = \pm 3$  dB).

El ángulo de fase exacto de este tipo de términos viene dado por  $\phi = \pm \tan^{-1} \omega T$ . Para frecuencia cero, el ángulo de fase es  $0^\circ$ . En la frecuencia de esquina  $\phi = \pm \tan^{-1} 1 = \pm 45^\circ$ . Y para  $\omega \rightarrow \infty$   $\phi = \pm 90^\circ$ .



## Tema 8: Respuesta en Frecuencia



Obs. que un término como el de la figura:  $(1+j\omega)^{-1}$ , i.e. un polo simple, se comporta como un filtro paso-baja. Para frecuencias  $\omega > 1/T$  la curva logarítmica de módulo disminuye rápidamente hacia  $-\infty$  (hacia modulo 0).

Si el término es múltiple con multiplicidad  $n$  del tipo  $(1+j\omega)^{\pm n}$ , para la curva de módulo se hace una construcción asintótica similar con una pendiente  $\pm 20n$  dB/década, y el ángulo de fase es  $n$  veces el de  $(1+j\omega)^{\pm 1}$  para cada frecuencia.

**Curvas debidas a términos de 2º orden**  $(1+as+bs^2)^{\pm 1} = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1} = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$ :

En ocasiones la F.T. del sistema presenta términos cuadráticos.

$$\text{En este caso, la curva de módulo es } 20\log \left| \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1} \right| = 20\log \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1} \right| =$$

$$\pm 20\log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Para frecuencias bajas, tales que  $\omega \ll \omega_n$ , la curva de módulo se aproxima mediante la recta  $\pm 20\log 1 = 0$ dB, mientras que para frecuencias altas, tales que  $\omega \gg \omega_n$ ,  $\pm 20\log \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$  dB, es decir, una recta de pendiente  $\pm 40$ dB/década centrada en  $\omega = \omega_n$ .

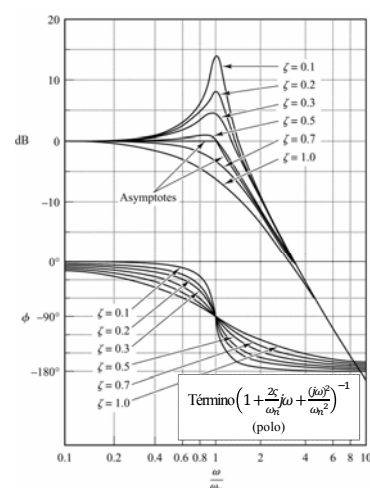
Para la frecuencia  $\omega = \omega_n$  se encuentran las dos asintotas y el valor de la curva de módulo en ese punto se aproxima a 0dB (en realidad es  $\pm 20\log 2\zeta$  por lo que se produce un pico de resonancia en función del coef. de amortiguamiento  $\zeta$ ).

## Tema 8: Respuesta en Frecuencia



El ángulo de fase del término cuadrático viene dado por:  $\phi = \pm \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$ . Para frecuencia cero, el ángulo de fase es  $0^\circ$ . En la frecuencia de esquina  $\omega = \omega_n$  el ángulo de fase es igual a  $\phi = \pm \tan^{-1} 2\zeta/0 = \pm 90^\circ$ . Y para  $\omega \rightarrow \infty$   $\phi = \pm 180^\circ$ .

Componiendo las curvas de módulo y fase debidas a los distintos términos de la F.T. se puede obtener fácilmente y de manera bastante aproximada el Diagrama de Bode de un sistema.

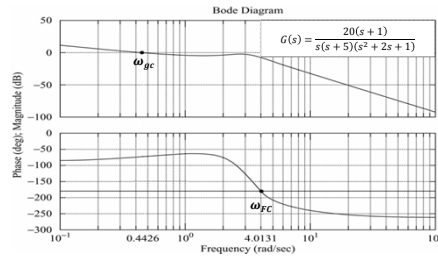


### 3. Especificaciones en el dominio de la frec. (Bode)

Aunque se pueden definir también para otro tipo de diagramas frecuenciales, aquí se refieren al D. Bode:

**Frec. de Ganancia Crítica ( $\omega_{gc}$ ):** Frec. para la cual el mód. de la F.T. es 1 ( $|G(j\omega_{gc})|=1 \Rightarrow G_{dB}(\omega_{gc}) = 0$ ).

**Frec. de Fase Crítica ( $\omega_{FC}$ ):** Frec. para la cual la fase de la F.T. es  $-\pi \Rightarrow \text{Arg}(G(j\omega_{FC})) = -180^\circ$ .

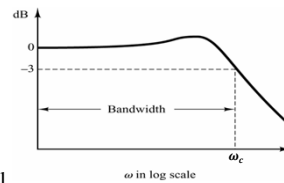


**Frec. de Corte ( $\omega_c$ ):** Frec. para la cual el módulo de la F.T. es 3dB inferior al módulo a frec. nula.

**Ancho de Banda (AB):** Rango de frec. entre 0 y  $\omega_c$ .

$AB \uparrow \Rightarrow \omega_c \uparrow \Rightarrow$  Sistema más rápido (deja pasar más componentes de alta frec.).

Más sensible a perturbaciones (en general de muy alta frec.).



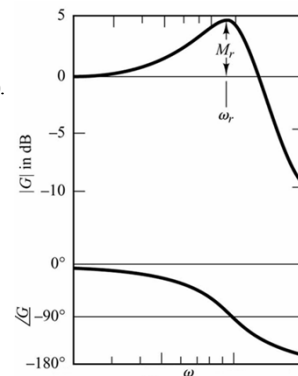
**Velocidad de Corte ( $v_c$ ):** Pte. de la curva de módulo en  $\omega_c$ :  $v_c = \left( \frac{d}{d\omega} |G(j\omega)| \right) \Big|_{\omega_c}$

$v_c \uparrow \Rightarrow$  Mayor capacidad del sistema para diferenciar señal y ruido (e.g. filtro paso-baja).  
Mayor atenuación del ruido pero a costa de  $\uparrow M_r$ .

**Máximo de Resonancia ( $M_r$ ):** Máx. de la curva de módulo:

$M_r = \max(|G(j\omega)|) = |G(j\omega_r)|$ , donde  $\omega_r \equiv$  Frec. de Resonancia.

$M_r \uparrow \Rightarrow$  Mayor  $R$  (el sistema amplifica más la señal  $\Rightarrow$  resp. más abrupta).



### 4. Estabilidad relativa. MG y MF (Bode)

**Estabilidad relativa:** Indica el grado de estabilidad de un sistema, principalmente mediante el Margen de Ganancia y Margen de Fase.

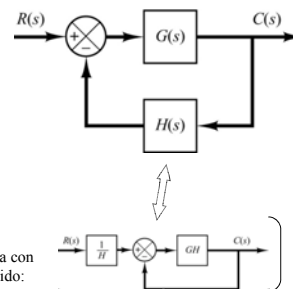
Estos indicadores, inicialmente definidos para el Diagrama de Nyquist, se pueden definir sobre el D. Bode y dan información sobre la *estabilidad del sistema en LC a partir de la F.T. en LA*.

A partir del sistema de control de la figura, cuya F.T. en

$$LC \text{ es: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

Es posible obtener estudiar la *estabilidad relativa del sistema LC a partir del D. Bode de la F.T. en LA:  $G(s)H(s)$* .

(En ocasiones este estudio se hace considerando realimentación unitaria. En la práctica es lo mismo pues cualquier sistema se puede expresar como un sistema con realimentación unitaria multiplicado por el término de la realimentación invertido:



**Margen de Ganancia (MG):** Módulo máximo en dB que se puede añadir a la F.T. en LA para que el sistema, si es estable, siga siendo estable (i.e., para hacerlo críticamente estable <sup>(1)</sup>), o lo que es lo mismo:

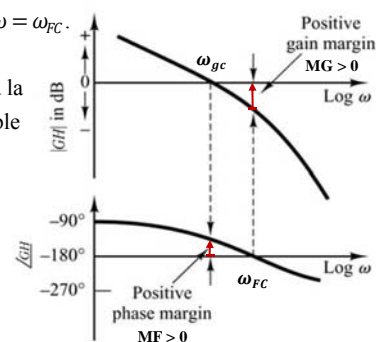
$$MG = 20\log(1) - 20\log(|G(j\omega_{FC})H(j\omega_{FC})|) = 0 - 20\log(|G(j\omega_{FC})H(j\omega_{FC})|)$$

Viene representado en el D. Bode por el módulo en dB para  $\omega = \omega_{FC}$ .

**Margen de Fase (MF):** Fase máxima que se le puede añadir a la F.T. en LA para que el sistema, si es estable, siga siendo estable (i.e., para hacerlo críticamente estable <sup>(1)</sup>):

$$MG = -\pi - \arg(G(j\omega_{FC})H(j\omega_{FC})) = \pi + \arg(G(j\omega_{FC})H(j\omega_{FC}))$$

Viene representado en el D. Bode por la fase para  $\omega = \omega_{gc}$ .



<sup>(1)</sup> Recordar que:

$|G(j\omega_{gc})H(j\omega_{gc})|=1$  es precisamente la condic. del módulo (Tema7) y se satisface por definición para  $\omega_{gc}$ .

$\arg(G(j\omega)H(j\omega)) = \pi$  es precisamente la condic. del argumento (Tema7) y se satisface por definición para  $\omega_{FC}$ .

## Tema 8: Respuesta en Frecuencia



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License](#).

**You are free:**

**To Share** — to copy, distribute and transmit the work

**Under the following conditions:**

**Attribution** — You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).

**Noncommercial** — You may not use this work for commercial purposes.

**No Derivative Works** — You may not alter, transform, or build upon this work.

**With the understanding that:**

**Waiver** — Any of the above conditions can be waived if you get permission from the copyright holder.

**Public Domain** — Where the work or any of its elements is in the public domain under applicable law, that status is in no way affected by the license.

**Other Rights** — In no way are any of the following rights affected by the license:

- Your fair dealing or fair use rights, or other applicable copyright exceptions and limitations;
  - The author's moral rights;
  - Rights other persons may have either in the work itself or in how the work is used, such as publicity or privacy rights:
- Some of the figures used in this work has been obtained from the Instructor Resources of *Modern Control Engineering*, Fifth Edition, Katsuhiko Ogata, copyrighted ©2010, ©2002, ©1997 by Pearson Education, Inc.

**Notice** — For any reuse or distribution, you must make clear to others the license terms of this work.