

1. Introducción
2. Construcción del lugar de las raíces
  - 2.1. Condiciones de módulo y argumento
  - 2.2. Procedimiento y reglas
3. Topología del lugar de las raíces
  - 3.1. LR más comunes y definiciones
  - 3.2. Efecto de la adición de  $x$  y  $o$  al LA sobre el LR
4. Consideraciones sobre el LR

### 1. Introducción

La respuesta transitoria de un sistema está directamente relacionada con la ubicación de los polos en LC, que son las raíces de la *ec. característica* (denominador=0) de la F.T. del sistema en LC.

PERO, los polos de esta *ec. característica* varían al cambiar la ganancia del sistema en LA (lo cual ocurre al ajustar el controlador). Por tanto, es importante conocer cómo se mueven los polos LC en el plano  $s$  conforme varía la ganancia de lazo.

Para ello, Walter R. Evans diseñó en 1950 un método para obtener:

**El lugar de las raíces (LR):** Gráfica en la que se representa la evolución de los polos ( $x$ ) del sistema en LC al variar su ganancia LA de 0 a  $\infty$ , a partir de la F.T. en LA.

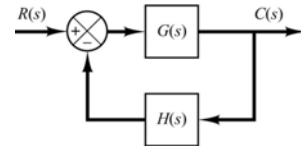
### 2. Construcción del lugar de las raíces

#### 2.1. Condiciones de módulo y argumento

Considere el sistema de control de la figura, cuya F.T.

$$\text{LC es: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

La ec. característica se obtiene haciendo el denom. = 0,  
i.e.:  $G(s)H(s) = -1$ .



Sistema de control genérico en LC

Puesto que la variable de Laplace es un número complejo,  $G(s)H(s)$  también es complejo y puede expresarse en forma polar como  $re^{j\theta}$  (recordar Tema 2). Por tanto la ec. característica puede descomponerse en:

$$\text{Condición del módulo: } |G(s)H(s)| = 1$$

$$\text{Condición del argumento: } \angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\angle G(s)H(s) = -\pi \text{ para abreviar})$$

Los valores de  $s$  que cumplen ambas condiciones son solución de la ec. característica y por tanto, polos del sistema LC.

En general  $G(s)H(s)$  contiene un parámetro de ganancia  $K$ , de forma que la ec. característica -y por tanto los x del sist. LC- varía con  $K$ :

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0$$

Supóngase que en particular que  $m=1$ ,  $n=4$  de forma que  $G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$  donde  $-p_2$  y  $-p_3$  son polos complejos conjugados.

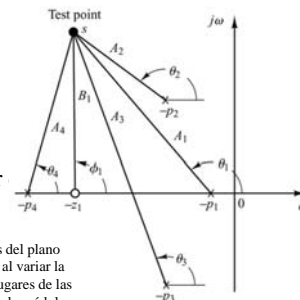
Entonces, el módulo y argumento de  $G(s)H(s)$  se mide respecto de un punto de prueba  $s$  de la siguiente manera:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

$$|G(s)H(s)| = KB_1 / A_1 A_2 A_3 A_4$$

donde se ha utilizado que  $s+p_i = A_i e^{j\theta_i}$  (ver figura).

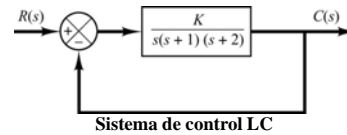
Si el módulo y argumento hallados cumplen las condiciones correspondientes, entonces el punto de prueba  $s$  pertenece al lugar las raíces. Se trata pues de encontrar esos puntos.



*A saber:* En inglés se distingue entre *root locus* (lugar de las raíces) que es el lugar geométrico de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de argumento (i.e., el lugar de las raíces tal y como lo conocemos al variar la ganancia, puesto que la condición de argumento es independiente de la ganancia  $\angle K=0^\circ$ ), y los *root loci* (lugares de las raíces) que son los lugares geométrico de los puntos del plano complejo que satisfacen también la condición de módulo (i.e., las gráficas de polos y ceros una vez fijada la posición de los polos por la ganancia mediante la condición de módulo).

### 2.2. Procedimiento y reglas

Considérese, a modo de ejemplo ilustrativo, el sistema en LC que se muestra en la figura:



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s) = 1; \quad \text{con } K \in \mathbb{R} \text{ y } \geq 0.$$

Hállese su lugar de las raíces.

En este sistema las condiciones de módulo y de argumento quedan:

$$|G(s)| = 1; \quad \angle G(s) = \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = \pm(2k+1)\pi$$

Aún en sist. complejos es sencillo dibujar el LR si se sigue el sgte. procedimiento basado en reglas:

I. N° ramas = N° polos F.T. LA  $\equiv n$ .

II. Puntos de salida y llegada de las n ramas  $\equiv$  polos y ceros de la F.T. LA respectivamente.

Def.:  $n-m \equiv$  Exceso polo-cero: N° de ramas que van al  $\infty$ .



Polos ( $K=0$ ):  $s=0, s=-1, s=-2$ ; Ceros ( $K=\infty$ ): Ninguno.

$$n-m=3.$$

III. Simetría respecto al eje real: Puesto que los polos y ceros solo pueden ser reales o complejos conjugados, el LR es simétrico respecto al eje real.

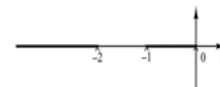
IV. Comportamiento en el eje real: Un punto de prueba  $s$  sobre el eje real  $\in$  LR sii a su derecha  $\exists$  un N° impar de x y o de la F.T. LA.

Comprobación: - Si el punto de prueba está en el eje real positivo  $\Rightarrow \angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ$   
 $\Rightarrow$  no se satisface la condición del argumento ( $\angle G(s)H(s) = -\pi$ )  $\Rightarrow$  no pertenece al LR.

- Si el punto de prueba está sobre el eje real negativo entre  $-1 \leq s \leq 0 \Rightarrow \angle s = \pi, \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ$   
 $\Rightarrow \angle G(s)H(s) = -\pi \Rightarrow$  sí pertenece al LR.

- Si el punto de prueba está sobre el eje real negativo entre  $-2 \leq s \leq -1 \Rightarrow \angle s = \angle(s+1) = \pi, \angle(s+2) = 0^\circ$   
 $\Rightarrow \angle G(s)H(s) = -2\pi = 0^\circ \Rightarrow$  no pertenece al LR.

- Si el punto de prueba está sobre el eje real negativo entre  $-\infty \leq s \leq -2$   
 $\Rightarrow \angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = \pi \Rightarrow \angle G(s)H(s) = -3\pi = -\pi \Rightarrow$  sí pertenece al LR.



V. Asíntotas: Las  $n-m$  ramas correspondientes a  $x$  que no tienen o, van a  $\infty$  siguiendo asíntotas que forman con el eje real positivo un determinado ángulo. Para hallarlo se selecciona un punto de prueba muy lejano al origen, de forma que se pueden considerar todos los x LA como x en el origen:

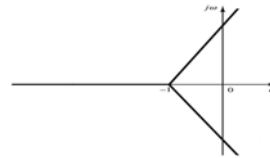
$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3} \Rightarrow \text{la condic. del arg.: } -3\theta_{0,\dots,2} = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\Rightarrow \theta_{0,\dots,2} = \pm \frac{\pi}{3}; \pi. \quad \text{De manera genérica: } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, \dots, n-m-1 \quad \left( \theta_{0,\dots,2} = \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \right)$$

**VI. Centroide:** Punto de intersección de las asíntotas. Se puede demostrar fácilmente que viene dado por la siguiente expresión (Ogata):

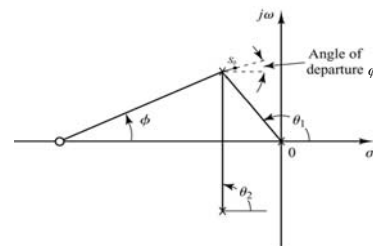
$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{(0-1-2)-0}{3} = -1,$$

con lo cual ya es posible dibujar las asíntotas.



**VII. Ángulos de salida de los x y llegada a los o:** En caso de x o o complejos conjugados es necesario calcular en ángulo con que las ramas salen o llegan respectivamente (si no son complejos conjugados el ángulo de salida o llegada siempre es  $\pi$  ó  $-\pi$ , es decir, está sobre el eje real).

Para hallar el ángulo se selecciona un punto de prueba  $s_0$  muy cercano al x o o en cuestión, de manera que el ángulo de los demás x y o respecto a  $s_0$  es el mismo que respecto al x o o en cuestión, como se muestra en la figura.



Entonces se aplica la condición del argumento:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_0 - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_0 - p_i) = -\pi,$$

donde el único parámetro no conocido es el ángulo  $\varphi$ .

Cálculo ángulo de salida

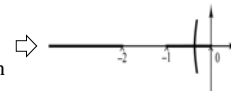
**VIII. Punto de dispersión o ruptura:** Aquel en que el LR se divide en 2 o más ramas.

Se demuestra que vienen dados por  $\frac{dK}{ds} = 0$  siempre que los puntos resultantes pertenezcan al LR (Ogata), donde la expresión de  $K$  se obtiene despejando la ganancia de la ec. característica:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow K = -s(s+1)(s+2) \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

$$s = -0.4226 \quad (\text{para } K=0.3849) \quad \text{Sí pertenece al LR (Regla IV)} \Rightarrow \text{Es un punto de dispersión}$$

$$s = -1.5774 \quad (\text{para } K=-0.3849) \quad \text{No pertenece al LR (Regla IV)} \Rightarrow \text{No es un punto de dispersión}$$



Si los puntos no están sobre el eje real, se comprueba su pertenencia al LR con la condic. del argumento.

**IX. Cortes con el eje imaginario.** Se trata de hallar los valores de  $K$  para los cuales el sistema es críticamente estable. Esto se puede lograr mediante R-H viendo cuando la 1ª columna se hace 0:

Ec. Caract.:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

1ª colum. 0 para:

-  $K=0 \Rightarrow 1$  cambio ( $+\rightarrow 0$ )  $\Rightarrow 1$  raíz imag. (ya se sabía, es el x en el origen en LA  $s=0$ ).

-  $K=6 \Rightarrow 2$  cambios ( $+\rightarrow 0 \rightarrow +$ )  $\Rightarrow 2$  raíces imag.

Para hallarlas se resuelve la ec. auxiliar para ese valor de  $K$ :

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s & \frac{6-K}{3} & \\ 1 & K & \end{array} \Rightarrow$$

$$3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

Recopilando la información recogida en cada uno de los pasos anteriores ya es posible dibujar el LR del sistema como se muestra en la figura.

Si se quiere encontrar la ganancia para que un polo esté en una determinada posición no hay más que aplicar la condición del módulo.

Ej.: Colocar los polos complejos conjugados del sistema en la posición:  $s_{1,2} = -0.3337 \pm j0.5780$ .

Hay que establecer una ganancia que cumpla:

$$|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1$$

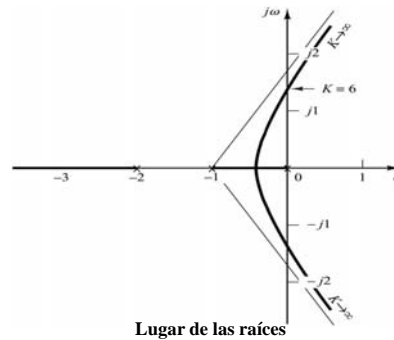
$$\Rightarrow K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0.3337 \pm j0.5780} = 1.0383$$

Además es posible conocer la posición del tercer polo para aplicando la misma condición del módulo:

$$|s||s+1||s+2| = K \Rightarrow |s_1||s_2||s_3| = K \Rightarrow |-0.3337 + j0.5780| |-0.3337 - j0.5780| |s_3| = 1.0383 \Rightarrow |s_3| = 2.3326$$

(sobre el eje real)

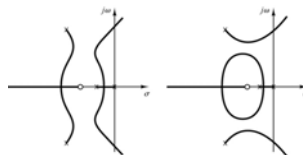
Para estas tareas resulta especialmente útil la herramienta Matlab.



### 3. Topología del lugar de las raíces

#### 3.1. LR más comunes y definiciones

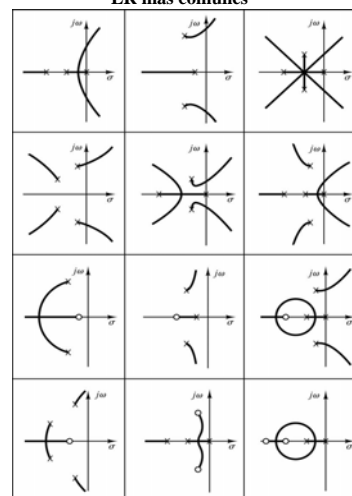
A continuación se muestra una serie de configuraciones de x y o, y sus LR correspondientes. El patrón del LR sólo depende de la distancia entre x y o LA. De hecho se puede observar cómo un pequeño cambio en la posición relativa entre ellos da lugar a LR completamente diferentes:



En general, si el número de x excede el número de o en 3 o más, las ramas del LA saldrán al semiplano derecho. Estos sistemas se denominan *sistemas de estabilidad condicional*.

Aquellos sistemas que siempre tienen todos sus x y o en el semiplano derecho se denominan *sistemas de fase mínima* (por la forma de las curvas de fase ante entradas senoidales). Si es un o el que está en el SD será *de fase no mínima*, y si es un x será además inestable.

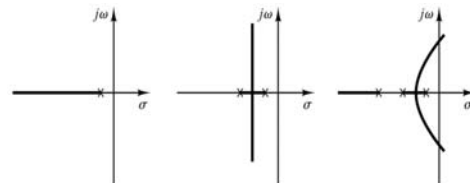
LR más comunes



### 3.2. Efecto de la adición de x y o al LA sobre el LR

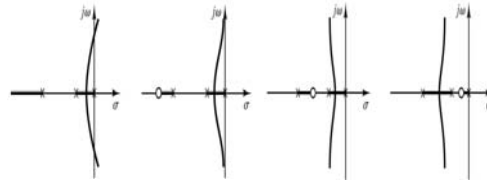
Suele ser de utilidad conocer su efecto, pues es precisamente lo que se hace al introducir un controlador (además de establecer la ganancia).

Se puede ver que la *adición de un x a la F.T. LA* “pliega y desplaza” el LR hacia la drch., haciendo el sistema más inestable y aument. el tiempo de asentamiento (recordar que una acción integral añade un x en el origen haciendo el sistema menos estable -tema 6-).



Adición de x en LA al LR  
(creación de nuevas ramas)

Por el contrario, la *adición de un o a la F.T. LA* “pliega y desplaza” el LR hacia la izq., haciendo el sistema más estable y dismin. el tiempo de asentamiento (recordar que la adición de un o implica una acción derivativa que se vió que tenía ese efecto -tema 6-)



Adición de un o en LA al LR

### 4. Consideraciones sobre el LR

- Como se ha visto, el LR proporciona la evolución de los x LC en función de los parámetros de la F.T. LA. Pero, puesto que se construye a partir de la ec. característica (denom. de la F.T. LC) NO se tiene en cuenta los o de la FT LC. Considérese e.g., dos sistemas LC con:

$$G_1(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2+2s+2)}; H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad FT_{LC1} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+2)(s+1)}{s(s+1)(s^2+2s+2)+K(s+2)}$$

$$G_2(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}; H_2(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad FT_{LC2} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)+K(s+2)}$$

Es decir, pueden existir dos sistemas LC  $\neq$  con la misma F.T. LA y por tanto el mismo LR.

Para hacer un estudio completo del LR hay que considerar también los o LC (que son fijos y no se mueven), pues pueden afectar a la respuesta del sistema (pto. 3.3 tema 4) e incluso pueden provocar cancelaciones entre x y o del LC.

- También puede darse el caso de que se produzcan cancelaciones entre  $G(s)$  y  $H(s)$ , dando lugar a una ec. característica reducida que no contempla todas las singularidades.

Considérese, e.g., el sistema LC con:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}; H(s) = s+1 \Rightarrow \text{Ec. caract.: } 1+G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= 1 + \frac{K}{s(s+2)} = \frac{s(s+2)+K}{s(s+2)} = 0$$

$$\Rightarrow s(s+2)+K=0 \text{ (ec. caract. reducida)}$$

Y sin embargo está claro que  $(s+1)$  es un x del sistema en LC:

$$FT_{LC} = \frac{K}{s(s+1)(s+2)+K(s+1)}$$

Para obtener el conjunto completo de x LC deben añadirse los polos cancelados de  $G(s)H(s)$  al LR, puesto que al calcularlo no se tienen en cuenta.

Esto puede generalizarse a cualquier FT en la que se produzcan cancelaciones x-o: el sistema resultante es de orden reducido y ha perdido información (e.g., si se produce un desplazamiento del polo la cancelación ya no será válida y la FT no representará al sistema inicial).

- En la construcción del LR se ha considerado un sist. típico LC con realimentación negativa. Aunque es menos común, existe un procedimiento análogo para sist. con realimentación positiva (Ogata).
- También es posible estudiar la evolución de los x LC al variar otros parámetros distintos que la  $K$ . El diagrama resultante se denomina *Lugar de las raíces generalizado* o *Contorno de las raíces*. Asimismo es mismo posible variar varios parámetros si el sistema tiene parámetros múltiples, el CR se construye en tal caso variando un parámetro cada vez y fijando el resto.

## Tema 7: El lugar de las raíces



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License](#).

**You are free:**

**To Share** — to copy, distribute and transmit the work

**Under the following conditions:**

**Attribution** — You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).

**Noncommercial** — You may not use this work for commercial purposes.

**No Derivative Works** — You may not alter, transform, or build upon this work.

**With the understanding that:**

**Waiver** — Any of the above conditions can be waived if you get permission from the copyright holder.

**Public Domain** — Where the work or any of its elements is in the public domain under applicable law, that status is in no way affected by the license.

**Other Rights** — In no way are any of the following rights affected by the license:

- Your fair dealing or fair use rights, or other applicable copyright exceptions and limitations;
- The author's moral rights;
- Rights other persons may have either in the work itself or in how the work is used, such as publicity or privacy rights;

Some of the figures used in this work has been obtained from the Instructor Resources of *Modern Control Engineering*, Fifth Edition, Katsuhiko Ogata, copyrighted ©2010, ©2002, ©1997 by Pearson Education, Inc.

**Notice** — For any reuse or distribution, you must make clear to others the license terms of this work.

