eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco
Tema 3: Representación Externa de Sistemas

1. Modelado de sistemas: Consideraciones previas

Modelo matemático: Conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con mayor o menor precisión.

- La dinámica de muchos sistemas se describe en términos de *ecuaciones diferenciales* que se obtienen a partir de leyes físicas lo gobiernan.
- En general (no siempre) los modelos se obtienen a partir de las ecs. dif. del sistema.
- $\neq$ tipos de modelos:
  - Representación mediante *Función de Transferencia* (rep. externa o entrada-salida): Pensados para análisis frecuencial de sistemas de una entrada y una salida (SISO), lineales e invariantes con el tiempo (LTI).
  - Representación mediante *Variables de Estado* (rep. interna): Pensados para análisis temporal de sistemas de entradas y salidas múltiples (MIMO), no lineales (se suelen linealizar) o para controladores centrados en la optimización de variables concretas internas del sistema (control óptimo o robusto).

Estado: variable conocida del sistema

Nos centraremos en rep. mediante F.T.: Gran número de sistemas admiten esta representación, control SISO y pueden tratarse como LTI. No entraremos en discretización de sistemas: ecs. en diferencias en lugar de dif. y Transf. Z en lugar de Laplace (Sist. Control Tiempo Discreto. K. Ogata).

Simplicidad vs. Precisión: Objetivo: Obtener un modelo matemático razonablemente simplificado ⇨ Ignorar ciertas prop. físicas del sistema (e.g. modelo matemático lineal de parámetros concentrados ⇨ Despreciar no linealidades y parámetros distribuidos -generan ecuaciones en derivadas parciales-).

Si las aproximaciones son apropiadas, los resultados del análisis del modelo matemático y los resultados experimentales obtenidos del sistema físico real serán similares.

Sistemas lineales: Aquel en que es aplicable el *Principio de Superposición*: La respuesta producida por la aplicación simultánea de dos entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales ⇨ La respuesta a varias entradas se calcula tratando las entradas separadamente y sumando los resultados.

Modelo de parámetros concentrados: Aquel en que las propiedades del sistema se concentran en determinados elementos (e.g. R)

Sistemas lineales invariantes con el tiempo (LTI): Aquellos sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros concentrados lineales invariantes con el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo (de coeficientes constantes). Tales sistemas se denominan *sistemas LTI o lineales de coeficientes constantes.*

Los sistemas que se representan mediante ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo, se denominan *sistemas lineales variantes con el tiempo.*

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco
Tema 3: Representación Externa de Sistemas

Sistemas no lineales: Aquellos a los que no es aplicable el principio de superposición. En general los procedimientos para resolver problemas que involucran sistemas no lineales son complejos y particularizados para cada caso.

Es común utilizar sistemas lineales “equivalentes” en lugar de los no lineales originales.

Linealización de sistemas no lineales: En Ingeniería de Control, la operación normal del sistema suele ocurrir en la proximidad de uno o varios *puntos de operación o funcionamiento* (también llamados *puntos de equilibrio*), de forma que puede considerarse que las variables del sistema presentan una variación más o menos pequeña (acotada) alrededor del punto de equilibrio ⇨ Es posible aproximar el sistema no lineal a un sistema lineal, normalmente un LTI, equivalente al sistema no lineal dentro de ese rango de operación (entorno del punto de equilibrio).

2. Ec. diferencial y Función de Transferencia

Función de transferencia: Dado un sistema descrito mediante una ec. diferencial LTI, su Función de Transferencia (F.T.) se define como *cociente entre la Transformada de Laplace de la salida y la Transformada de Laplace de la entrada* para c.i. nulas y supuestas todas las demás entradas nulas en caso de sistemas multivariables.

Dado un sistema LTI descrito por la ec. dif.:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x$$

donde y es la salida y x es la entrada, la F.T. del sistema se obtiene tomando la T.L. de ambos miembros de la ecuación:

$$L[a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y] = L[b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x]$$

$$\Downarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

De manera que se tiene una representación de la dinámica del sistema mediante ecs. algebraicas en s. La potencia más alta en s del denominador marca el *orden del sistema.*

Ejemplo: Sistema de control de posición angular de un satélite

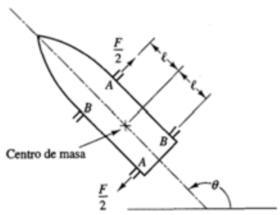


Diagrama de cuerpo libre

θ *(t)*: Ángulo elevación (solo se considera una dimensión)

A, B: Propulsores a favor/contra de θ respectivamente

J: Momento angular de inercia alrededor del eje en el C.M.

Hallar la F.T. siendo $\theta(t)$ la salida y el par $T(t)=l\,F(t)$ aplicado por los propulsores, la entrada. Considerar c.i. nulas.

Ecs. sistema:

2ª Ley Newton $\Rightarrow \sum T = J\,\alpha$

$$T(t) = J\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \text{HACER!!!}$$

Comentarios acerca de la F.T.:

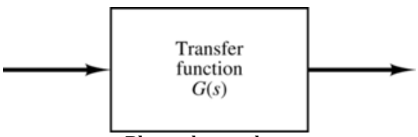
- Se aplica a sistemas LTI.
- Relaciona la salida con entrada del sistema ⇨ No proporciona información acerca de la estructura física del sistema (de ahí rep. externa). Pueden existir dos sistemas físicos diferentes con el mismo comportamiento dinámico y por tanto la misma F.T.
- Es independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada.
- La F.T. de un sistema también puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando su respuesta (modelización caja negra).
- Como se ha indicado, la $F.T. = G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ ⇨ $Y(s) = G(s)X(s)$. Recordando que el producto en el dominio de Laplace se corresponde con el Producto de Convolución en el dominio temporal, se tiene que *la salida de un sistema viene dada por el Producto de Convolución de su F.T. con la entrada*: $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau$ con $x(t)=0,\ g(t)=0$ para $t<0$.
- Si se utiliza como entrada un impulso unitario con c.i. nulas, recordando que su T.L. es la unidad, se tiene que la T.L. de la salida del sistema viene dada por $Y(s)=G(s)$, cuya antitransformada $g(t) = L^{-1}[G(s)]$ se denomina *respuesta impulso* o *función de ponderación* y contiene toda la información del comportamiento dinámico del sistema.

3. Diagramas de Bloques. Elementos básicos y reducciones

Diagrama de Bloques: Representación que muestra el funcionamiento de los componentes de un sistema interrelacionándolos mediante el flujo de señales que intercambian.

Cada componente está representado por un bloque que contiene la operación matemática que ejerce dicho componente sobre la entrada para producir la salida (i.e., *la señal de salida es igual a la señal de entrada multiplicada por la función de transferencia del bloque*).

Obs.: Al igual que la F.T., el diagrama de bloques contiene información sobre el comportamiento dinámico del sistema, pero no incluye información sobre cómo está construido físicamente:

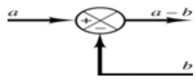


Bloque de una planta

- Diferentes sistemas pueden estar representados por el mismo diagrama.
- Solo interrelaciona señales, la fuente de energía para seguir esa relación no se muestra explícitamente (e.g. control proporcional) .

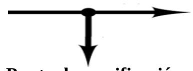
Elementos básicos:

- **Punto suma:** Suma o resta señales en función del signo. (OJO con las dimensiones).



Punto suma

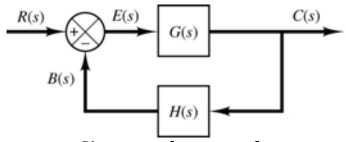
- **Punto de ramificación:** Distribuye de modo concurrente la la señal de un bloque a otros bloques o puntos suma.



Punto de ramificación

- **Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado:** La señal de salida se realimenta al punto suma para compararlo con la entrada (referencia).

  Habitualmente la salida es medida mediante algún tipo de sensor representado por el bloque de realimentación *H(s)* que además adecúa la señal para poderla comparar con la referencia si es necesario.



Sistema en lazo cerrado

La F.T. correspondiente es: HACER!!!

Tema 3: Representación Externa de Sistemas

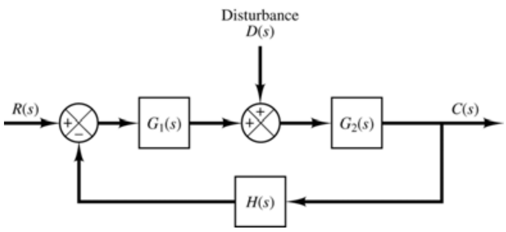
- **Sistema en LC + perturbación:** (Prob. Control Generalizado Tema 1)

  Suponiendo nula la perturbación, la respuesta del sistema frente a la referencia:

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

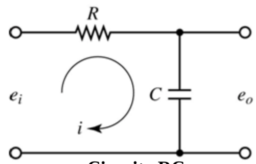
  Suponiendo nula la entrada, la respuesta frente a la perturbación:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \text{HACER!!!}$$



Sistema en LC + perturbación

Ejemplo: Construcción del diagrama de bloques de un circuito RC

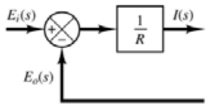


Circuito RC

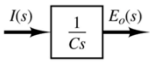
$e_i(t)$: Entrada
$e_o(t)$: Salida

Ecs. sistema:

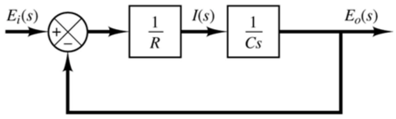
$e_i(t) = e_o(t) + i(t)R$
⇨ $i(t)=\frac{e_i(t)-e_o(t)}{R}$ $\xRightarrow{\mathcal{L}}$ $I(s)=\frac{E_i(s)-E_o(s)}{R}$ ⇨



$e_o(t) = \frac{\int i(t)dt}{C}$ $\xRightarrow{\mathcal{L}}$ $E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$ ⇨



HACER!!! ⇦



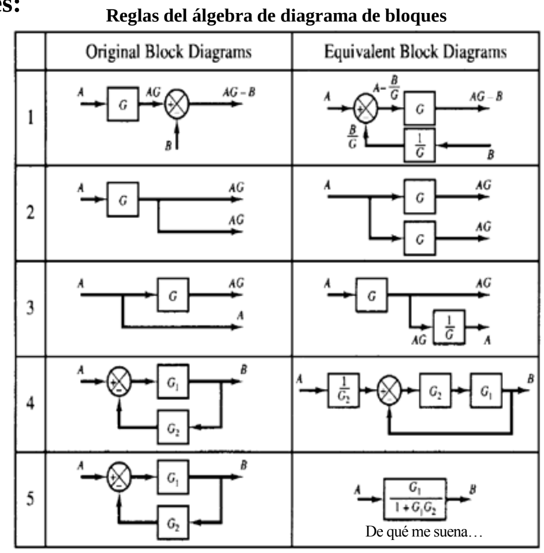
Reducción de diagramas de bloques:

Un diagrama de bloques complejo puede simplificarse mediante un reordenamiento utilizando las reglas del álgebra de los diagramas de bloques.

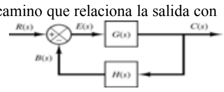
A tener en cuenta:

- Si la entrada de un bloque se ve afectada por el bloque siguiente, i.e. si existe realimentación entre ellos, deben combinarse en un solo bloque.
- El producto de las funciones de transferencia de la cadena directa[1] debe ser el mismo.
- El producto de las funciones de transferencia alrededor de un lazo cerrado debe ser el mismo.

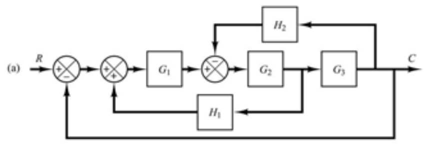
Reglas del álgebra de diagrama de bloques



[1] *Cadena directa*: Aquel camino que relaciona la salida con el error, i.e., sin tener en cuenta la realimentación (se verá más adelante)



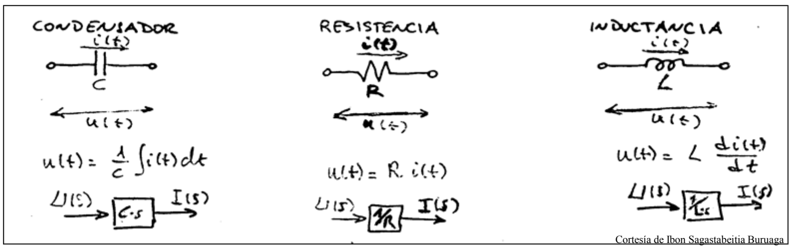
Ejemplo: Reducción de diagrama de bloques



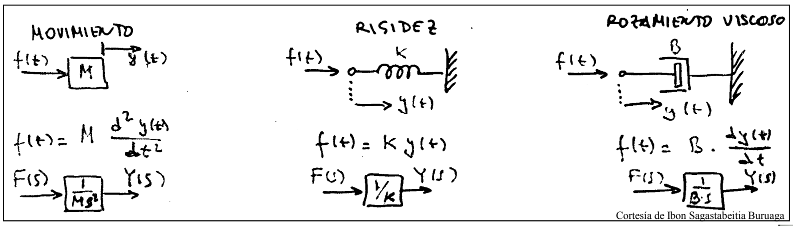
HACER!!!

4. Modelización de sistemas físicos

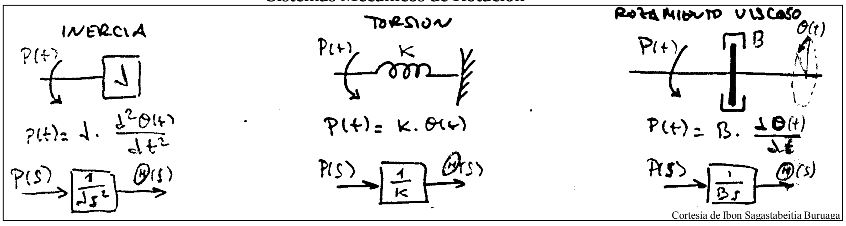
Sistemas Eléctricos



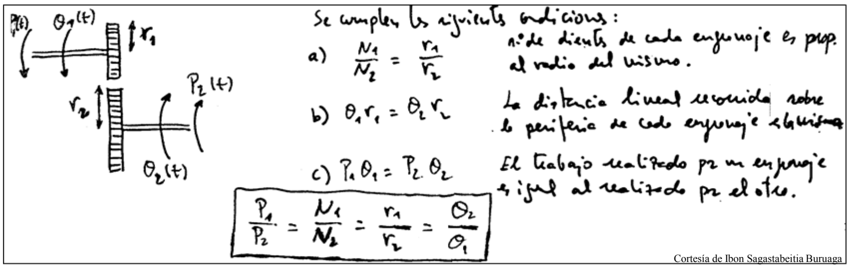
Sistemas Mecánicos de Traslación



Sistemas Mecánicos de Rotación

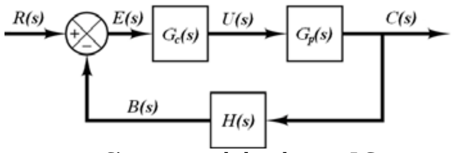


Trenes de Engranajes



5. Teoría de la realimentación. Señales. F.T. en LA y LC

Dado el diagrama de control de la figura, se define:



Sistema controlador-planta en LC

- *R(s)*: Referencia o salida deseada.
- *C(s)*: Salida real del sistema.
- *U(s)*: Señal de control.
- *B(s)*: Señal medida (*H(s)C(s)*).
- *E(s)*: Señal de error del sistema (*R(s)-B(s) = R(s)-H(s)C(s)*). OJO: ≠ Error del sistema (*R(s)-C(s)*).

- F.T. controlador: $G_c(s)$
- F.T. planta: $G_p(s)$
- F.T. realimentación: $H(s)$
- F.T. de la cadena directa: $G_c(s)G_p(s)$
- F.T. en lazo abierto: $G_{LA}(s)=G_c(s)G_p(s)H(s)$
- F.T. en lazo cerrado: $G_{LC}(s)=\dfrac{G_c(s)Gp(s)}{1+G_c(s)Gp(s)H(s)}$

En general, se busca *diseñar el controlador para que el sistema se comporte de una determinada forma*, i.e., tenga una $G_{LC}(s)$ determinada (error, rebose, tiempo llegada, etc.):

$$G_c(s) = \frac{G_{LC}(s)}{G_p(s)-G_p(s)H(s)GLC(s))}$$

Posibles problemas:

- Grado num. > grado denom.⇨ irrealizable.
- Falta de validez ante variaciones en la planta (robustez).

Habitualmente se utilizan controladores con $G_c(s)$ prefinida y parámetros ajustables, e.g. PID (tema 6).

Anexo: Modelado en el Espacio de Estados

Variables de estado: Conjunto más pequeño de variables de modo que el conocimiento de estas variables en $t=t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Vector de estado: Dadas *n* variables de estado necesarias para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, éstas conforman las componentes de un vector que se denomina vector de estado.

Espacio de estados (State-Space): Espacio *n*-dimensional cuyos ejes de coordenadas corresponden a cada una de las *n* variables de estado. Cualquier estado del sistema puede ser representado por un punto en el SS.

Ecuaciones en el espacio de estados: En el análisis en el SS intervienen tres tipos de variables: *variables de entrada, variables de salida* y *variables de estado*.

La representación en el SS para un sistema determinado no es única (excepto en el número de variables de estado que debe ser igual para cualquier representación SS del mismo sistema).

Un sistema dinámico que involucre ecuaciones diferenciales debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para un cierto $t \geq t_1$. Dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico ⇨ Las salidas de los integradores funcionan como variables de estado y el número de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que contiene el sistema.

Considérese un sistema de entradas y salidas múltiples con *n* integradores. Supóngase también que existen *r* entradas $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$ y *m* salidas $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$. Entonces, si se definen las salidas de los integradores como variables de estado $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, la dinámica del sistema se describe de la forma:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t),\quad \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t),\ \ldots,\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t).$$

Y las salidas del sistema $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ se obtienen a partir de las variables del estado mediante:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t),\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t),\ \ldots,\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t).$$

Expresándolo en forma vectorial: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

Si se linealizan estas ecuaciones en torno al estado de operación del sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned},$$

donde *A(t)* se denomina matriz de estado, *B(t)* matriz de entrada, *C(t)* matriz de salida y *D(t)* matriz de transferencia directa.

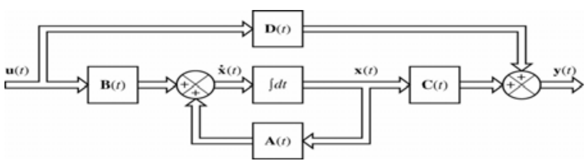


Diagrama de bloques de un sistema lineal en el SS

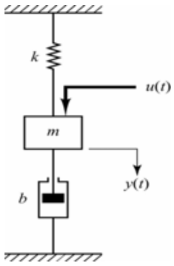
Si las funciones vectoriales **f** y **g** no involucran el tiempo explícitamente, el sistema es invariante en el tiempo -y como además se ha linealizado se trata de un LTI-, de forma que puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}(t) \end{aligned},$$

que constituyen las *ecuaciones de un sistema LTI en el SS.*

Ejemplo: Modelado de un sistema mecánico en el SS

Dado el sistema masa-muelle-amortiguador de la figura y suponiendo comportamiento lineal, hallar su representación en el SS.
La entrada al sistema es la fuerza aplicada a la masa y la salida es el desplazamiento de la mismo.



Ecs. sistema:

2ª Ley Newton : $\sum F(t) = m\,a(t)$

HACER!!!

Correlación entre F.T. y ecs. en el SS:

Considérese un sistema SISO representado en el SS como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}(t)$$

donde **x** es el vector de estado, **u** es la entrada e **y** la salida.

Aplicando la T. Laplace a las ecs. de estado:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Dado que la F.T. se define como el cociente entre la Transformada de Laplace de la salida y la Transformada de Laplace de la entrada para c.i. nulas, se tiene que: $sX(s) - AX(s) = BU(s)$, o bien $(sI - A)X(s) = BU(s)$.

Y premultiplicando por $(sI - A)^{-1}$ en ambos miembros: $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$.

Sustituyendo ahora en la segunda ecuación: $Y(s) = C(s)(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$.

De manera que la F.T. queda expresada en función de las matrices de estado de la forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(s)(sI - A)^{-1}B + D$$

Ejemplo: Utilizando las ecuaciones en el SS para el sistema mecánico del ejemplo anterior, hallar su F.T.

Se tenía:
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}}_{B}u \qquad y=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Entonces:
$$G(s)=C(s)(sI-A)^{-1}B+D=$$ HACER!!!