Carrera de Robótica: Matemática Aplicada (Dr. Ernesto Kirchuk)

Guía T. P. N° 1

(Generalidades de ecuaciones diferenciales. Propiedades de ecs. lineales. Ecuaciones lineales a coeficientes constantes. Solución particular-método de coeficientes indeterminados. Condiciones iniciales y unicidad de las soluciones)

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales responda: a) ¿cuál es el orden de la ecuación, b) ¿es lineal o no lineal?, c) ¿es homogénea o no homogénea?, d) si es lineal, diga si es a coeficientes constantes:
i) $f'(t)-5f(t)=0;$ ii) $f'(t)+8f^{1/2}(t)+40=0;$ iii) $f''(t)+f(t)=sen(t);$ iv) $f'(t)=tf(t);$
v) $2f'''(t)+f''(t)+e^t f(t)=cos(t);$ vi) $[f'(t)]^2+f^2(t)+t^3=0;$ vii) $f''(t)+3sen(f(t))=0.$

2. Sea la ec. diferencial $f''(t)+f(t)=0$. a) Verifique que la función $f(t)=A\,sen(t)+B\,cos(t)$, (con A y B constantes cualesquiera), es solución de la ecuación diferencial. b) Suponga ahora que $f(0)=0, f'(0)=1$. ¿Puede determinar un único $f(t)$ (o sea hallar A y B)?

3. a) Dada la ecuación diferencial del ejercicio 2) $f''(t)+f(t)=0$, y sabiendo que $f_1(t)=sen(t)$, y $f_2(t)=cos(t)$ son soluciones de la misma (¡verifíquelo!), escriba la solución más general. b) Dada la ecuación diferencial: $(1-t)f''(t)+tf'(t)-f(t)=0;$ verifique que $f_1(t)=t$, y $f_2(t)=e^t$ son soluciones de la misma. A partir de esto último escriba la solución más general.

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones homogéneas, y lineales a coeficientes constantes, halle todas las soluciones independientes (a partir de ensayar con soluciones tipo e^{rt} encuentre el polinomio característico y halle sus ceros), y a partir de ello escriba la solución más general:
i) $f'(t)+10f(t)=0;$ ii) $f''(t)+3f'(t)+2f(t)=0;$ iii) $f'''(t)-f'(t)=0;$ iv) $2f''(t)+8f'(t)+8f(t)=0;$
v) $f''''(t)+2f''(t)+f(t)=0;$ vi) $f'''(t)-2f''(t)+f'(t)=0;$ vii) $f''(t)+f(t)=0.$
(Hint: si en algún caso le es útil, recuerde la identidad de Euler (en números complejos):
$e^{\pm it}=cos(t)\pm i\,sen(t)$, donde i es la unidad imaginaria: $i^2=-1$)

5. Encuentre las soluciones más generales de las siguientes ecuaciones no homogéneas:
i) $f'(t)+10f(t)=20;$ ii) $f''(t)+3f'(t)+2f(t)=5t;$ iii) $f''(t)+3f'(t)+2f(t)=10sen(10t);$ iv) $f'(t)+f(t)=tsen(t);$ v) $f''(t)+5f'(t)+6f(t)=te^{-t};$ vi) $f''(t)+5f'(t)+6f(t)=e^{-2t}+5e^{-3t};$ vii) $f'''(t)-f'(t)=1;$
viii) $f''(t)+f(t)=cos(t).$

6. Encuentre las soluciones de cada una de las ecuaciones del ejercicio 5), si están sujetas a su vez a las siguientes condiciones iniciales respectivamente:
i) $f(0)=5$; ii) $f(0)=0, f'(0)=1;$ iii) $f(0)=0, f'(0)=1;$ iv) $f(0)=1;$ v) $f(0)=2, f'(0)=1;$
vi) $f(0)=2, f'(0)=1;$ vii) $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0;$ viii) $f(0)=0, f'(0)=1.$
¿Son únicas estas soluciones? Justifique.