1. Tipos de estabilidad. Definiciones

2. Criterio de Routh-Hurwitz

1. Tipos de estabilidad. Definiciones

El análisis de la estabilidad es uno de los problemas más importantes en los sist. control:

Preguntas fundamentales:
-¿Es estable el sistema? (*Estabilidad absoluta*) ⇨ Routh-Hurwitz
-¿Qué grado de estabilidad tiene el sistema? (*Estabilidad relativa*) ⇨ Estudios frecuenciales del MF y MG mediante Nyquist, Bode, Nichols…

Definiciones de estabilidad: (todas equivalentes)

- *Def1:* Un sistema lineal es estable si la salida permanece acotada para una entrada acotada. (Criterio de estabilidad BIBO).
- *Def2:* Un sistema lineal es estable si el módulo de su respuesta impulso es absolutamente integrable de rango ∞. Es decir: $\int_0^{\infty}|g(t)| < \infty$
  O lo es lo mismo: Un sistema lineal es estable si su respuesta impulso decae a 0 cuando $t\rightarrow\infty$.
- *Def3:* Un sistema lineal es estable si todos los polos de la F.T. LC están en el semiplano izquierdo del plano *s*.

2. Criterio de Routh-Hurwitz [1]

Dado un sistema LTI típico , cuya F.T. LC viene dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$, donde a_i y b_i son ctes. y $m \leq n$,

el criterio de Routh-Hurwitz (R-H) permite calcular la cantidad de polos que se encuentran en el semiplano derecho del plano *s* sin necesidad de factorizar el polinomio. Es decir, proporciona información sobre la estabilidad absoluta del sistema.

Definición:
Polinomio de Hurwitz: Si todas las raíces del polinomio tienen parte real negativa.
⇨ Por la *Def3* anterior, un sistema es estable si el denominador de su F.T. es un polinomio de Hurwitz.

[1] Routh publicó originalmente el algoritmo que conduce a la construcción de las tablas que se utilizan en el Criterio de Routh-Hurwitz, no obstante de manera independiente Hurwitz publicó un criterio de estabilidad más laborioso basado en un análisis matricial del sistema, que esencialmente coincide con el de Routh. Por ello el criterio lleva conjuntamente el nombre de los dos autores.

Procedimiento:

Para que un polinomio $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$ sea de Hurwitz:

- Condición necesaria:

  $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_i > 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n$

- Condición suficiente:

Tabla de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{l|c|cccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ s^2 & k_1 & k_2 & & & \\ s^1 & l_1 & & & & \\ s^0 & m_1 & & & & \end{array}$$

donde:

$$b_1 = \frac{-1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \frac{-1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad ..$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{-1}{b_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$\vdots$$

$$m_1 = \frac{-1}{l_1}\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

El polinomio D(s) es de Hurwitz sii todos los coef. de la 1ª columna son positivos.

Tema 5: Estabilidad en Términos de Entrada-Salida

Si hay algún coef. negativo en la 1ª columna el polinomio **no** *es de Hurwitz, y tendrá tantas raíces en el semiplano derecho como cambios de signo haya en la 1ª columna.*

Si hay algún coef. nulo en la 1ª col. el polinomio **no** *es de Hurwitz. Dos posibilidades:*

- *Hay algún coef. negativo ⇨ Igual tratamiento que antes considerando los 0 como elementos positivos a efectos de cambio de signo.*
- *Todas las demás raíces son positivas ⇨ Habrá tantas raíces en el eje imaginario (imag. puro) como cambios de + a nulo y viceversa.*

Tema 5: Estabilidad en Términos de Entrada-Salida

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es estable:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4s^3 + 8s + 1}{s^6 + s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

HACER!!!

Casos especiales:

Un término de la 1ª columna es 0 pero los demás de la fila son ≠0 o no hay más eltos.:

Los elementos de la siguiente fila no se podrían calcular (div. por 0) ⇨ Se sustituye el 0 por un término positivo ε.

Ejemplo1: $s^3+2s^2+s+2=0$

$a_i \in \mathbb{R}$ y $a_i > 0$ Ok

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \approx \varepsilon$	
s^0	2	

⇩

1 coef. nulo (⇨ NO es de Hurwitz) y los demás positivos ⇨ "Tantas raíces imag. puras como cambios de + a nulo y viceversa" (=2)

(En efecto: $s^3+2s^2+s+2=(s+j)(s-j)(s+2)$)

Todos los términos de una fila son 0:

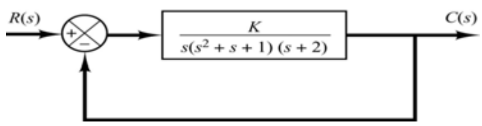
La evaluación del resto la tabla continúa mediante el uso de una ec. auxiliar, cuya derivada proporciona los coeficientes para la siguiente fila.

Ejemplo: $s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$

HACER!!!

Ejemplo:

Calcular los valores de la ganancia K para los cuales es estable el sistema en LC de la figura



La F.T. LC del sistema es:

HACER!!!

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco
Tema 5: Estabilidad en Términos de Entrada-Salida