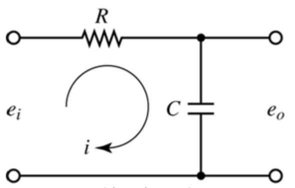
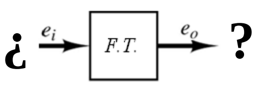
eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco
Tema 2: Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace: ¿Para qué?



Circuito RC



Planta

Mallas (sist. ecs. dif.):

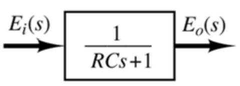
$$e_i(t) = e_o(t) + i(t)R$$
$$e_o(t) = \frac{\int i(t)dt}{C}$$

$\mathcal{L}$

$$E_i(s) = E_o(s) + I(s)R$$
$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

Sist. ecs. algebraicas :)

Necesitamos: $F.T. = \frac{e_o}{e_i}$ Uff!!!



Ventajas de la ***Transformada de Laplace***:

- Operaciones tales como diferenciación e integración se sustituyen por operaciones algebraicas en el plano complejo → Fácil resolución de **ecs. diferenciales** lineales que habitualmente modelan sistemas físicos, mediante transformación en **ecs. algebraicas**.
- Permite uso de técnicas gráficas para predecir el funcionamiento del sistema, sin tener que resolver sus ecuaciones diferenciales.
- Al resolver las ecs. del sistema se obtiene la respuesta tanto del régimen transitorio como del estacionario.

2. Variables y funciones complejas

Variable de Laplace: $s = \sigma + j\omega$ (compleja)

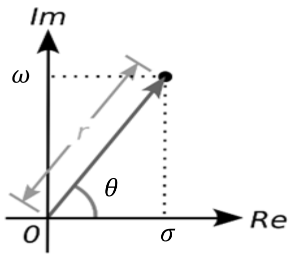
Función compleja: $G(s)=G_x+jG_y$

Función compleja ***analítica*** en una región: Si la función y todas sus derivadas existen en tal región. Se demuestra que *G(s)* es analítica si satisface las dos condiciones Cauchy-Riemann: $\frac{dG_x}{d\sigma} = \frac{dG_y}{d\omega}; \quad \frac{dG_y}{d\sigma} = -\frac{dG_x}{d\omega}$

De manera que su derivada: $\frac{d}{ds}G(s) = \frac{d}{d\sigma}G(s) = \frac{d}{d\omega}G(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{G(s+\Delta s)-G(s)}{\Delta s}$ (Ogata)

Puntos ***ordinarios***: Aquellos del plano complejo *s* en los cuales *G(s)* es analítica.
Puntos ***singulares***: Aquellos del plano complejo *s* en los cuales *G(s)* no es analítica.
Polos: Puntos singulares en los cuales la función *G(s)* o sus derivadas tiende a infinito (denom. = 0).
Ceros: Puntos singulares en los cuales la función *G(s)* = 0.

Ejemplo: $G(s)=\dfrac{K(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$



Plano complejo *s*

Polos: s=0, s=-1, s=-5, s=-15 (doble).
Ceros: s=-2, s=-10.

Plano complejo *s*:

Representación cartesiana: $s = \sigma + j\omega$

Representación polar: $s = r(\cos\theta + j\sin\theta) \underset{(1)}{=} re^{j\theta}$ con $\begin{cases} r = |s| = \sqrt{\sigma^2+\omega^2} \\ \theta = arg(s) \end{cases}$

(1) *Formula de Euler:* $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Demo: Expandiendo en serie de potencias (serie de Taylor alrededor de 0 o serie Maclaurin)

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \cdots = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) = \cos\theta + j\sin\theta$$

Análogamente: $\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$; $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco
Tema 2: Transformada de Laplace

3. Transformada de Laplace

Dada $f(t)$ | $f(t)$=0 para t<0, se define su **Transformada de Laplace** como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

donde: s es la variable compleja de Laplace
F(s) es una función compleja que representa la Transformada de Laplace de *f(t)*
$\mathcal{L}$ es un operador que representa la Integral de Laplace

Análogamente se define la **Transformada Inversa de Laplace** como:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st}ds$$

donde c (abscisa de convergencia) es una constante real > parte real de todos los puntos singulares de *F(s)* y el contorno de integración deja fuera a la izquierda dichas singularidades

3. Transformada de Laplace

Dada *f(t)* | *f(t)*=0 para *t*<0, se define su **Transformada de Laplace** como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Nota: La T.L. existe si la integral converge, i.e., si es continua en cada intervalo finito en el rango $t \geq 0$ (al menos continua a trozos) y si es de orden exponencial conforme $t \to \infty$.
Una función *f(t)* es *de orden exponencial* si existe una constante real positiva c | la función $|f(t)|e^{-ct} \to 0$ para todo $c_0 < c$ cuando $t \to \infty$. *c* se denomina *abscisa de convergencia*.

donde: *s* es la variable compleja de Laplace
F(s) es una función compleja que representa la Transformada de Laplace de *f(t)*
$\mathcal{L}$ es un operador que representa la Integral de Laplace

Análogamente se define la **Transformada Inversa de Laplace** como:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Para funciones que crecen más rápido que la función exponencial, no es posible encontrar valores convenientes de la abscisa de convergencia . Funciones tales como e^{t^2} no poseen T.L. excepto en intervalos de tiempo acotados.

donde *c* (abscisa de convergencia) es una constante real > parte real de todos los puntos singulares de *F(s)* y el contorno de integración deja fuera a la izquierda dichas singularidades

4. Ejemplos de cálculo de algunas funciones

- **Función exponencial:**

  Sea la función $f(t) = Ae^{-at}\ t \geq 0$ y $f(t) = 0,\ t < 0$, donde *a* y *A* son ctes.

  Entonces: $L[Ae^{-at}] = \int_0^{\infty} Ae^{-at} e^{-st} dt = A\int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt =$ HACER!!!

- **Función escalón:**

  Sea la función $f(t) = A,\ t \geq 0$ y $f(t) = 0,\ t < 0$, donde *A*=cte.

  – Es un caso particular de función exponencial (a=0) $\Longrightarrow$ $L[Ae^{-0t}] = \frac{A}{s}$
  – Físicamente se corresponde a una señal constante aplicada al sistema en *t*=0
  – Para *A*=1 se denomina *Escalón Unitario o Función de Heaviside:* 1*(t)*

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Función rampa:**

Sea la función $f(t) = At,\ t \geq 0$ y $f(t) = 0,\ t < 0$, donde A=cte.

Entonces: $L[At] = A\int_0^{\infty} te^{-st}dt =$ HACER!!!

Recordar integración por partes: $\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$ "*Un Día Vi Una Vaca sin rabo* (menos integral) *Vestida De Uniforme*".

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-st}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{cases}$$

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Función pulso:**

Sea la función $f(t) = \frac{A}{t_0},\ 0 < t < t_0$ y $f(t) = 0,\ t < 0,\ t > t_0$, donde A y t_0 son ctes.

Esta función pulso puede descomponerse como una función escalón de altura A/t_0 que comienza en $t=0$, superpuesta con una función escalón negativo de la misma magnitud que comienza $t=t_0$: $f(t) = \frac{A}{t_0}1(t) - \frac{A}{t_0}1(t-t_0)$

Entonces: $L[f(t)] = L\left[\frac{A}{t_0}1(t)\right] - L\left[\frac{A}{t_0}1(t-t_0)\right] =$ HACER!!!

$\Uparrow$

Prop. T.L.: Desplazamiento temporal (Pto. 5):
$L[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$

- **Función impulso:**

Sea la función : $f(t) = \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0},\ 0 < t < t_0$ y $f(t) = 0,\ t < 0,\ t > t_0$, donde A y t_0 son ctes.

– Es un caso particular de la función pulso

Recordar: *Regla de L´Hôpital* (indet. 0/0 ó ∞/∞)
Sean *f* y *g* funciones definidas en [*a*,*b*] y derivables en ese intervalo, y | *f*(*c*)=*g*(*c*)=0 con $c \in (a,b)$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq c$. Entonces, si existe el límite *f′*/*g′* en *c*, el límite de *f*/*g* en *c* existe y es igual al anterior: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$L[f(t)] = \lim_{t_0 \to 0} \frac{A}{t_0 s}\left(1 - e^{-st_0}\right) = \underset{\text{(L´Hôpital)}}{\lim_{t_0 \to 0}} \frac{\frac{d}{dt_0}\left[A\left(1 - e^{-st_0}\right)\right]}{\frac{d}{dt_0}(t_0 s)} = \frac{As}{s} = A$$

– La magnitud del impulso se mide por su área A (altura A/t_0, duración t_0)

– Si el área A=1 se denomina *función impulso unitario* o *delta de Dirac*:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases} ;\quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1 \implies L[\delta(t - t_0)] = 1$$

Muy útil para diferenciar funciones discontinuas: Representa la derivada de la función escalón unitario en el punto de discontinuidad: $\delta(t - t_0) = \dfrac{d}{dt}\mathbf{1}(t - t_0)$

Transformadas de Laplace más comunes

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Tema 2: Transformada de Laplace

Transformadas de Laplace más comunes

12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s + a)}$
15	$\frac{1}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$
16	$\frac{1}{b - a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s + a)(s + b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a - b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s + a)(s + b)}$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s + a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s + a)}$
20	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, t \quad (0 < \zeta < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Tema 2: Transformada de Laplace

Transformadas de Laplace más comunes

23	$-\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, \quad 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, \quad 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \qquad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$

Transformadas de Laplace más comunes

31	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
Pulse function $f(t) = \frac{A}{t_0}1(t) - \frac{A}{t_0}1(t-t_0)$		$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s}e^{-st_0}$
Impulse function $g(t) = \lim_{t_0\to 0}\frac{A}{t_0}$, for $0 < t < t_0$ $= 0$, for $t < 0$, $t_0 < t$		$\mathscr{L}[g(t)] = \lim_{t_0\to 0}\left[\frac{A}{t_0 s}(1-e^{-st_0})\right]$ $= \lim_{t_0\to 0}\frac{\frac{d}{dt_0}[A(1-e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0}(t_0 s)}$ $= \frac{As}{s} = A$

5. Propiedades de la Transformada de Laplace

- **Linealidad:**

$$L[Af(t)] = AL[f(t)]\ ,\quad \text{donde } A\text{=cte y si } F(s)\ \exists$$

$$L[f_1(t)+f_2(t)] = L[f_1(t)]+L[f_2(t)]\ ,\quad \text{si } F_1(s) \text{ y } F_2(s)\ \exists$$

- **Diferenciación**

Si $F(s)$ ∃ y $f(0+)=f(0-)=f(0)$:

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s)-f(0)$$

Si $f(t)$ es discontinua en t=0, deben calcularse por separado:

$$L_+\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s)-f(0+)\qquad L_-\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s)-f(0-)$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = sL\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]-\dot{f}(0) = s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

Tema 2: Transformada de Laplace

Ejemplo: Obtención de $L[\cos(\omega t)]$ mediante derivación

Sea la función $f(t) = \cos(\omega t), t \geq 0$ (y tal que $f(t) = 0,\ t < 0$).

Entonces $L[\cos(\omega t)] = L\left[\frac{1}{\omega}\left(\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right)\right] = \frac{1}{\omega}\left(sL[\sin(\omega t)] - \sin(0)\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\Uparrow$$

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Integración:**

  Si *f(t)* es de orden exponencial y $f(0+) = f(0-) = f(0)$:

  $$L\left[\int f(t)dt\right] = \int_0^\infty \left[\int f(t)dt\right]e^{-st}dt = \left[\int f(t)dt\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt = \frac{1}{s}\int f(t)dt\Big|_{t=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

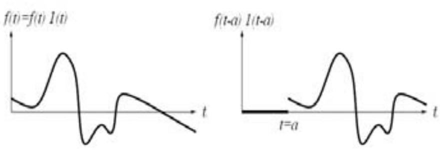
  Integral es definida:

  $$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = L\left[\int f(t)dt\right] - L\left[f^{-1}(0)\right] = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

- **Desplazamiento temporal:**

  Si *f(t)*=0 para *t*<0, o lo que es lo mismo: *f(t)*1*(t)* $\forall t$,

  la T.L. de la función retrasada un tiempo a $\geq$ 0:



$$L[f(t-a)1(t-a)] = \int_0^\infty f(t-a)1(t-a)e^{-st}dt = \int_{-a}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau = e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-as}F(s)$$

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Desplazamiento complejo (o frecuencial):**

$$L\left[e^{-at} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt = F(s+a)$$

Obs. simetría desplaz. temporal vs. complejo:

$$L\left[f(t-a)\right] = e^{-as}F(s) \text{ vs } L\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$$

$$Ej.: \quad L\left[e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

- **Diferenciación compleja (o frecuencial):**

Obs. similitud dif. temporal vs. compleja:

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0) \text{ vs } L\left[tf(t)\right] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$L\left[tf(t)\right] = \int_0^{\infty} tf(t) e^{-st} dt = -\int_0^{\infty} f(t)\frac{de^{-st}}{ds} dt = -\frac{d}{ds}\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s),\ n = 1,2,\ldots$$

Excepto en los polos de *F(s)*
(recordar definición polo)

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea – universidad del país vasco

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Integración compleja (o frecuencial):**

$$L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds \text{ sii } \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] \exists$$

Obs. similitud int. temporal vs. compleja:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} \text{ vs. } L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds$$

- **Escalado temporal:**

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-s_1 t_1} d(at_1) = a\int_0^{\infty} f(t_1) e^{-s_1 t_1} dt_1 = aF(s_1) = aF(as)$$

donde $t_1 = t/a$ y $s_1 = as$.

$$Ej.: \quad L\left[e^{-t/5}\right] = \frac{5}{5s+1}$$

- **Convolución:**

Def. *Convolución:* $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$

Prop.: Para $t-\tau=\lambda$, se tiene que $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) = -\int_t^0 f_2(\lambda) f_1(t-\lambda) d\lambda = f_2(t) * f_1(t)$

Entonces, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son al menos continuas a trozos y de orden exponencial (condic. $\exists\ F_1(s)$ y $F_2(s)$):

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = L\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) 1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) 1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\lambda+\tau)} f_1(\lambda) 1(\lambda) f_2(\tau) d\tau d\lambda = \int_0^\infty e^{-s\tau} f_2(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-s\lambda} f_1(\lambda) d\lambda = F_1(s) F_2(s)$$

- **Producto (Convolución compleja):**

$\left[\begin{array}{l}\text{Obs. simetría convoluc. temporal vs. compleja:} \\ f_1(t) * f_2(t) = F_1(s) F_2(s) \text{ vs. } f_1(t) f_2(t) = F_1(s) * F_2(s)\end{array}\right]$

$$L[f(t) g(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) g(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} F(p) dp\right] dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \int_0^\infty e^{-(s-p)t} g(t) dt\, dp$$

donde c es la abscisa de convergencia de $f(t)$.

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) G(s-p) dp = F(s) * G(s)$$

- **Teorema del valor final:**

Si $L[f(t)]$ y $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]\ \exists$ y $\exists \lim_{t\to\infty} f(t)$, entonces $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

- Relaciona el comportamiento de $f(t)$ en ss con el de $sF(s)$ en el entorno de s=0.
- La $\exists$ del $\lim_{t\to\infty} f(t)$ implica que $f(t)$ converge a un valor definido para $t \to \infty$ $\Leftrightarrow$ $sF(s)$ tiene todos los polos en el semiplano izquierdo del plano complejo s.

Dem.: $\lim_{s\to 0}[sF(s)] = \lim_{s\to 0}[sF(s)] - f(0) + f(0) = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] + f(0) = \lim_{s\to 0}\left[L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right]\right] + f(0)$

$$= \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] e^{-st} dt + f(0) = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] dt + f(0) = f(t)\Big|_0^\infty + f(0) = f(\infty) - f(0) + f(0) = f(\infty)$$

Ej.: Obtención del valor en ss de $f(t)$ a partir de $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

Polo de $sF(s) = \frac{1}{(s+1)}$ en el semiplano izquierdo $\Rightarrow$ Th. valor final es aplicable: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = 1$

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Teorema del valor inicial:**

  Si $L[f(t)]$ y $L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}\right]$ $\exists$ y $\exists \lim_{s\to\infty} sF(s)$, entonces $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

  – Relaciona el comportamiento de $f(t)$ en $t = 0^+$ con el de $sF(s)$ para $s \to \infty$.

  Dem.: Directamente de la propiedad de diferenciación:

$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0^+)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\right] = \lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]e^{-st}dt = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\frac{1}{e^\infty}dt = f(t)\Big|_0^\infty \frac{1}{e^\infty} = 0$$

Recordar que para $\exists\ L[f(t)]$, $f(t)$ debe ser de orden exponencial

Los Ths. del valor final e inicial permiten predecir el *comportamiento del sistema en el dominio temporal sin tener que antitransformar*. Útil, e.g., para verificar la solución.

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

Tema 2: Transformada de Laplace

Resumen de Propiedades de Laplace

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
4	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
5	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\overset{(k-1)}{f}(0\pm)$ where $\overset{(k-1)}{f}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
6	$\mathcal{L}_\pm\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}$
7	$\mathcal{L}_\pm\left[\int\cdots\int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int\cdots\int f(t)(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
8	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s\to 0} F(s) \quad \text{if } \int_0^\infty f(t)\,dt \text{ exists}$

Resumen de Propiedades de Laplace

10	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
11	$\mathcal{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s) \qquad \alpha \ge 0$
12	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
13	$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \dfrac{d^2}{ds^2}F(s)$
14	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$
15	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds \qquad \text{if } \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t) \text{ exists}$
16	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$
17	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
18	$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \dfrac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp$

Initial value theorem	$f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
Final value theorem	$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

6. T. inversa de Laplace: Expansión en fracciones parciales

Habitualmente la T. Laplace se obtiene directamente de las ecs. del sistema y la T. inv. Laplace se calcula mediante tablas $\Longrightarrow$ Se necesitan expresiones sencillas que aparezcan en las tablas

$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$ | las T. inv. L. de $F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)$ son conocidas

Entonces: $L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] + \cdots + L^{-1}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$

En sistemas de control la T.L. suelen tomar la forma: $F(s) = B(s)/A(s)$ donde $A(s)$, $B(s)$ son polinomios en s de orden n y m respectivamente, y | $n \ge m$ (Ppio. de Causalidad[1])

[1] Para que un sistema sea *físicamente realizable o causal*, el número de polos n debe ser mayor o igual que el número de ceros m: $(n \ge m)$.
Demostración (reducción al absurdo): $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = s \Rightarrow Y(s) = sU(s) \Rightarrow y(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

Esto implica que la salida es derivada de la entrada, lo que está en contradicción con el Principio de Causalidad, puesto que la salida del sistema en un instante no puede depender de entradas futuras.
E.g.: Para $u(t)=t$ y condiciones iniciales nulas, se tiene que y(t)=1. En el instante inicial la salida toma un valor $\neq 0$ mientras la entrada aún es nula. Es decir, el sistema proporciona salida sin existir todavía excitación.

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Expansión en fracciones parciales con polos diferentes:**

Dada la forma factorizada de $F(s)$:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)},\quad m<n\text{, con }\; s=-p_1,-p_2,\ldots,-p_n\text{ y}$$

$s=-z_1,-z_2,\ldots,-z_m$ polos y ceros respectivamente, reales o complejos.

Si $F(s)$ solo involucra polos distintos, puede expandirse en suma de fracciones parciales simples de la forma:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{(s+p_1)}+\frac{a_2}{(s+p_2)}+\ldots+\frac{a_n}{(s+p_n)},$$ donde a_k=cte con k=1,…,n, se denomina residuo del polo s=- p_k y se calcula de la forma: $$a_k=\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

Obs.: Si p_k y p_{k+1} son conjugados, los residuos a_k y a_{k+1} también lo son ⇒ Solo es necesario calcular uno de ellos.

Entonces: $f(t)=L^{-1}[F(s)]=a_1e^{-p_1t}+a_2e^{-p_2t}+\cdots+a_ne^{-p_nt}$ para $t\geq0$.

Tema 2: Transformada de Laplace

Ejemplo: Obtención de $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ para $F(s)=\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}$

Expansión en fracciones parciales: $F(s)=\frac{a_1}{(s+1)}+\frac{a_2}{(s+2)}$

donde $a_1=(s+1)\left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-1}$ = HACER!!! ; a_2 = HACER!!!

Por tanto: $f(t)=L^{-1}[F(s)]=$ HACER!!!

Tema 2: Transformada de Laplace

- **Expansión en fracciones parciales con polos múltiples:**

Se utilizará el siguiente caso a modo de *ejemplo*: $F(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$,

que presenta un polo triple en s =-1, pero que puede expandirse en fracciones parciales tabuladas de la forma: $\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\dfrac{b_1}{(s+1)}+\dfrac{b_2}{(s+1)^2}+\dfrac{b_3}{(s+1)^3}$

Donde b_3 se puede hallar por el método de los residuos como en el caso de polos diferentes, y b_1 y b_2 por identificación de coeficientes(1) (o los tres por ident. de coef.):

$$\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{b_1(s+1)^2+b_2(s+1)+b_3}{(s+1)^3}=\frac{b_1 s^2+(2b_1+b_2)s+b_1+b_2+b_3}{(s+1)^3} \Longrightarrow \begin{aligned} b_1&=1\\ 2b_1+b_2&=2\\ b_1+b_2+b_3&=3\end{aligned}$$

CALCULAR!!!
(1 min)

(1) Obs.: b_1 y b_2 no se pueden hallar calculando su residuo, puesto que al corresponder a parte de un polo múltiple de orden superior, éste va a dar siempre ∞.

Tema 2: Transformada de Laplace

Expansiones en fracciones parciales más comunes

(i) Factored roots

$$\frac{K}{s(s+a)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+a)}$$

(ii) Repeated roots

$$\frac{K}{s^2(s+a)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{(s+a)}$$

(iii) Second-order real roots ($b^2>4ac$)

$$\frac{K}{s(as^2+bs+c)}=\frac{K}{s(s+d)(s+e)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+d)}+\frac{C}{(s+e)}$$

(iv) Second-order complex roots ($b^2<4ac$)

$$\frac{K}{s(as^2+bs+c)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{as^2+bs+c}$$

Completing the square gives

$$\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\ ; \text{ being } s_{1,2}=-\alpha\pm j\omega$$

Note: In (iii) and (iv) the coefficient a is usually factored to a unity value.

- **Expansión en fracciones parciales utilizando Matlab:**

Dada la F.T.: $\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}$, los coef. del numerador y denominador se representan en forma de vectores: $num=[b_0\ b_1\ldots b_m]$, $den=[1\ a_1\ldots a_n]$ de manera que los residuos, polos y términos directos de la expansión se pueden obtener directamente mediante el comando: $[r,p,k]=residue(num,den)$

El comando $[num,den]=residue(r,p,k)$ produce la operación inversa.

Ejemplo: Dada $F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{2s^3+5s^2+3s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$

la expansión en fracciones parciales correspondiente se obtiene mediante los comandos:

$num=[2\ 5\ 3\ 6]$; $den=[1\ 6\ 11\ 6]$; $[r,p,k]=residue(num,den)$,

resultando: $\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{2s^3+5s^2+3s+6}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{-6}{s+3}+\frac{-4}{s+2}+\frac{3}{s+1}+2$

7. Resolución ecs. dif. lineales (sistemas LTI)

Mediante el método de la transformada de Laplace se puede hallar la solución completa de *ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo*.

Pasos:

1- Se toma la T.L. de la ec. dif. término a término

2- Se resuelve la ec. algebraica resultante

3- Se halla la T. Inversa de Laplace de la solución

Tema 2: Transformada de Laplace

Ejemplo: Resolver la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5$

con condiciones iniciales: $\dot{x}(0) = 2$ y $x(0) = -1$

HACER!!!

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

Tema 2: Transformada de Laplace