Ecuaciones Diferenciales- 2º Parte

IV. Ecuaciones lineales a coeficientes constantes **no homogéneas**

IV.1: Introducción

Como vimos en II, para hallar la solución de

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = b(t) \qquad (14)$$

con $b(t)\neq 0$, primero tenemos que resolver la ecuación homogénea (con $b(t)=0$) y hallar su solución más general (como se vio en III) y luego sumarle una solución *particular* de la ecuación (NH) (14). Por lo tanto en esta sección veremos como hallar la solución particular para (14).

Veremos un método de utilidad cuando $b(t)$ es de determinado tipo. Esto abarcará ampliamente las aplicaciones a utilizar. La idea se basa en que para ciertos $b(t)$ es posible predecir el aspecto que tendrá la solución particular. El método que veremos se denomina "método de los coeficientes indeterminados" y consistirá en plantear –para ciertos $b(t)$- una solución que tiene determinada forma funcional pero con coeficientes o parámetros que se determinarán posteriormente.

A modo de introducción, tomemos la ecuación diferencial (NH),

$$f''(t) - f(t) = cos(t) + 3sen(t). \qquad (15)$$

En II. ya estudiamos como encontrar la solución general de (H) (hacerlo!). Queremos ahora hallar la solución particular $g(t)$ para (NH): una función tal que si la "ponemos" en el miembro izquierdo de la ecuación diferencial (15) nos da exactamente $b(t)=cos(t)+3sen(t)$.

Observando atentamente $b(t)$, y sabiendo (o "avivándonos") que $[cos(t)]''=-cos(t)$ y $[sen(t)]''=-sen(t)$, entonces parecería "sensato" plantear como solución particular

$$g(t) = A\ sen(t) + B\ cos(t).$$

Como a "ojo" no me doy cuenta que números A y B poner en la $g(t)$ propuesta para que esta sea solución (A y B serán los coeficientes indeterminados), "metamos" la $g(t)$ propuesta en la ecuación diferencial y hallemos luego los A y B para que esta $g(t)$ sea solución. Poniendo esta $g(t)$ en el miembro izquierdo de (15) resulta

$$-A\ sen(t) - B\ cos(t) - A\ sen(t) - B\ cos(t) = cos(t) + 3sen(t), \text{ o} \qquad (16)$$
$$-2B\ cos(t) - 2A\ sen(t) = cos(t) + 3sen(t). \qquad (16bis)$$

Como $cos(t)$ y $sen(t)$ son independientes, para que se sostenga esta igualdad los coeficientes de $cos(t)$ y $sen(t)$ en cada miembro deben ser iguales. Se debe satisfacer la siguientes dos condiciones

$$-2B = 1 \qquad (17)$$
$$-2A = 3 \qquad (17bis)$$

Las ecuaciones (17-17bis) representan un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (A y B) que son los coeficientes a determinar. Fácilmente obtenemos $A=-3/2$ y $B=-1/2$. De modo que la solución particular será $\boxed{g(t)= -3/2\ sen(t)-1/2\ cos(t).}$ Para comprobar que no nos equivocamos en alguna cuenta podemos reemplazar esta $g(t)$ hallada en el miembro izquierdo de (15) para ver si nos da efectivamente $cos(t)+3sen(t)$. (Hacerlo!).

IV.2: <u>Método de los coeficientes indeterminados</u> (para ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes)

En el ejemplo anterior vimos como fue "sensato" ensayar con un tipo de solución particular dado el $b(t)$ específico. La idea será ahora que para algunos tipos de $b(t)$ en la ecuación diferencial (14), podamos ensayar o proponer una solución con coeficientes a determinar posteriormente. Usaremos el método a analizar cuando $b(t)$ sea una sumatoria de funciones polinómicas $q_j(t)$ multiplicados por funciones exponenciales $e^{(\lambda j)t}$:

$$b(t)= \sum_{j=1}^{k} q_j(t)\, e^{(\lambda j)t} = q_1(t)\, e^{(\lambda 1)t} + q_2(t)\, e^{(\lambda 2)t} +\ldots q_k(t)\, e^{(\lambda k)t} . \qquad (18)$$

Los polinomios $q_j(t)$ pueden ser en principio de cualquier grado, y los coeficientes λ_j pueden ser números reales o complejos. Veamos algunos ejemplos de $b(t)$ dados por (18) y remarquemos que, dados que los $b(t)$ representarán funciones de "entrada" o excitación del sistema a estudiar (fuentes de tensión, etc.), para las aplicaciones técnicas la forma funcional (18) será más que suficiente.

- Si $b(t)=K$ (constante), => $b(t)=K\, e^{0t}$, es decir una polinomio de grado 0 (K) por 1 ($e^{0t}=1$) y estamos en el caso de algún sumando de (18).
- Si $b(t)=Kt\, e^{\lambda t}$, => estamos con un polinomio de grado 1 (Kt) *por* una exponencial como algún sumando de (18).
- Si $b(t)=K\cos(\omega t)$, como $\cos(\omega t)=(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$, => $b(t)=K/2\, e^{i\omega t} + K/2\, e^{-i\omega t}$, resultando en una suma de dos términos de la forma (18).
- Si $b(t)=K\, e^{\lambda t}\, sen(\omega t)$, como $sen(\omega t)=(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$, => $b(t)=K/(2i)\, e^{(\lambda+i\omega)t} - K/(2i)\, e^{(\lambda-i\omega)t}$ resultando otra vez una suma de dos términos de la forma (18).

Como vimos en el ejemplo de IV.1, al ser las funciones trigonométricas (*sen* y *cos*) combinaciones lineales de exponenciales complejas (y viceversa) las podemos tratar con este método.

Teniendo en cuenta el ppio. de superposición (ver d) de sección II., pág. 4), basta ver el método con un $b(t)=q(t)\, e^{\lambda t}$ (pues las soluciones particulares a encontrar serán la suma de las soluciones particulares al ir agregando sumandos con este tipo de $b(t)=q(t)\, e^{\lambda t}$); o sea un polinomio por una exponencial.

El método para hallar la solución particular cuando tenemos

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = b(t)=q(t)\, e^{\lambda t} , \qquad (19)$$

nos dice que debemos distinguir *dos* casos para ensayar soluciones particulares (con coeficientes indeterminados) según:

I. Si el exponente λ no es raíz del polinomio característico $P(r)$ de la ecuación homogénea (H) (ver sección III y lo hecho para llegar a la fórmula (11)).; es decir $P(\lambda \neq 0)$, se ensaya con una solución

$$g(t)=F(t)\, e^{\lambda t} \tag{21}$$

siendo $F(t)$ el polinomio general del mismo grado que $q(t)$. Los coeficientes del polinomio $F(t)$ serán los coeficientes indeterminados a determinar.

II. Si el exponente λ sí es raíz del polinomio característico $P(r)$ de la ecuación homogénea (H); es decir $P(\lambda=0)$, se ensaya con una solución

$$g(t)=t^m\, F(t)\, e^{\lambda t} \tag{22}$$

siendo m la multiplicidad de la raíz λ del polinomio característico (o sea si es raíz simple, doble, etc.), y $F(t)$ el polinomio general del mismo grado que $q(t)$. Los coeficientes del polinomio $F(t)$ serán los coeficientes indeterminados a determinar.

IV.3: Ejemplos

1) Sea la ecuación

$$f''(t)+3f'(t)+2f(t)=20 \tag{23}$$

Veamos como hallar la solución particular (que sumada a la solución más general de la ecuación homogénea nos dará la solución general de la ecuación). En el 2º miembro tenemos $b(t)=20=20\ e^{0t}$, con lo cual podemos utilizar el método de coeficientes indeterminados bosquejado en IV. 2. El coeficiente que aparece en el exponente de la exponencial es el número 0 que claramente no es raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea (H) (Notar que $P(r)= r^2 + 3r + 1$). Por lo tanto estamos en el caso I de IV.2 y ensayaremos con la solución particular $g(t)= F(t)\, e^{0t} =F(t)$ con $F(t)$ el polinomio más general de grado *cero* (ver (21)). O sea que podemos poner $F(t)=K$ (una constante es el polinomio más general de grado cero). “Metiendo” $g(t)= K$ en (23) obtenemos este coeficiente indeterminado:

$$0+0+2K=20, \tag{24}$$

con lo cual $\boxed{K=10}$. Por lo tanto en este caso la solución particular será $g(t)=10$.

Notemos que en este ejemplo, podíamos “avivarnos”, sin usar todo este procedimiento, de cuál era la solución particular: tiene que ser una función tal que el miembro izquierdo de (23) resulte igual a 20. Cómo los primeros dos sumandos del lado izquierdo de (23) presentan derivadas de la función, si proponemos una constante (K) como solución particular estos dos sumandos dan cero. Quedando sólo el tercer sumando como $2K$ igual a 20, con lo cual que $K=10$.

La solución general de la ecuación (23) será entonces la suma de la solución general de (H) más esta solución particular resultando (hacerlo!):

$$f(t)= c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^{-t} +10 \tag{25}$$

2) Sea la ecuación

$$f'(t)+f(t)=tsen(t). \qquad (26)$$

Veamos como hallar la solución particular (que sumada a la solución más general de la ecuación homogénea nos dará la solución general de la ecuación). Usando el método esbozado en IV. 2, escribibimos $tsen(t)=t(e^{it} - e^{-it})/2i = t/2i\, e^{it} - t/2i\, e^{-it} = b_1(t) + b_2(t)$, con $b_1(t)= t/2i\, e^{it}$ y $b_2(t)= - t/2i\, e^{-it}$. Si $g_1(t)$ es la solución con 2º miembro $b_1(t)$, y $g_2(t)$ es la solución con 2º miembro $b_2(t)$ (ppio. de superposición), entonces la solución particular será $g_1(t) + g_2(t)$.

Estudiemos primeramente entonces a la ecuación

$$f'(t)+f(t)=b_1(t)= t/2i\, e^{it}. \qquad (27)$$

Como sabemos deducir (hágalo!) el polinomio característico de (H) es $P(r)=r+1$ cuya única raíz es $r_1 =-1$. En este caso el exponente $\lambda=i$ no es por lo tanto raíz de $P(r)$. Estamos en el caso I de IV. 2 y ensayaremos para hallar $g_1(t)$ con $F(t)\, e^{it}$ siendo $F(t)$ el polinomio general de grado 1 (el mismo grado que $q(t)= t/2i$, ver (21)). Por lo tanto $F(t) = At+B$. O sea que $g_1(t)= (At+B)\, e^{it}$. Como dijimos, A y B serán los coeficientes a determinar. "Metiendo" esta $g_1(t)$ en al ecuación (24) resulta (hágalo!):

$$Ae^{it} +i(At+B)\, e^{it} +(At+B)\, e^{it} = t/2i\, e^{it}. \qquad (28)$$

Asociando y sacando factor común e^{it} en el miembro izquierdo, (28) queda:

$$(i+1)At+(i+1)B +A= t/2i. \qquad (29)$$

Para que (29) se satisfaga para todo t se debe cumplir que

$$(i+1)A=1/2i \qquad (30)$$
$$(i+1)B +A= 0. \qquad (30bis)$$

En (30-30bis) tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas (complejas): A y B. Se propone al lector que las resuelva. Se obtiene (hágalo, trabajando con cuentas de nºs complejos) $\boxed{A=-¼(1+i); B=¼}$. Resulta entonces que $g_1(t)= [-¼\,(1+i)t+¼]e^{it}$.

En segundo lugar tenemos que hallar la solución de

$$f'(t)+f(t)=b_2(t)= -t/2i\, e^{-it}. \qquad (31)$$

Procediendo de la misma forma; o sea planteando $g_2(t)= (Ct+D)\, e^{-it}$, dejo al lector obtener $\boxed{C=-¼(1-i); D=¼}$. Resulta entonces que $g_2(t)= [-¼\,(1-i)t+¼]e^{-it}$.
Por lo tanto la solución particular $g(t)= g_1(t) + g_2(t)$ será

$$g(t)=[-¼\,(1+i)t+¼]e^{it} + [-¼\,(1-i)t+¼]e^{-it}. \qquad (32)$$

Dado que el término inhómogeneo $b(t)$ de (26) es una función trigonométrica, sería coherente que la solución particular también sea una función real. Si desarrollamos (32) y usamos la relación de las funciones trigonométricas con las exponenciales complejas[1] se obtiene (hacerlo!):

$$g(t)=-\tfrac{1}{2}\, t\cos(t)+\tfrac{1}{2}\, t\, sen(t)+\tfrac{1}{2}\cos(t)\,. \qquad (30)$$

Dejo al lector comprobar que esta es la solución particular (reemplazar en el lado izquierdo de (26) y obtener el lado derecho).

Remarquemos ahora una manera más compacta y sencilla de resolver este ejercicio. Lo que hicimos más arriba fue hallar $g(t)$ proponiendo una suma $g_1(t) + g_2(t)$ donde cada uno de estos dos sumandos es una polinomio de grado *1* por una exponencial compleja. Por lo tanto esto será equivalente a proponer una suma de polinomios de grado *1* (con otros coeficientes a determinar) por las funciones trigonométricas (*sen* y cos). O sea podemos probar o ensayar con el siguiente tipo de solución:

$$g(t)=(K_1 t+ K_2)\, sen(t)+ (K_3 t+ K_4)\cos(t). \qquad (31)$$

Si uno se pudiera "avivar" a priori cuáles son los coeficientes K_i de modo que esta $g(t)$ sea solución, sólo tendríamos que comprobar que esta es la solución (que por supuesto es lo mismo que (30) pues ya lo dedujimos). Como no me doy cuenta a priori cuáles son estos K_i "metemos" (31) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial (26) y determinamos los valores de los cuatro K_i . Para ello tenemos que derivar $g(t)$ *de* (31) y sumarles $g(t)$ e igualarlo a $t\,sen(t)$ (ver (26)). Si se hace esto (hacerlo!), se llega a

$$(K_1-K_4+K_2)\,sen(t) +(K_2-K_3+K_4)\cos(t)+ t(K_1+K_3)\cos(t)+t(-K_3+K_1)\,sen(t)=t\,sent.$$

Para que esta igualdad se sostenga, se debe cumplir:

$K_1-K_4+K_2=0$

$K_2-K_3+K_4=0$

$K_1+K_3=0$

$K_1-K_3=1$

Este es un sistema de *4* ecuaciones con *4* incógnitas pero fácil de resolver. Por ej. De las últimas dos ecuaciones, sumando y restando miembro a miembro obtenemos $K_1=\tfrac{1}{2}$, $K_3=-\tfrac{1}{2}$. Colocando estos valores en las dos primeras ecuaciones obtenemos $K_2=0$ y $K_4=\tfrac{1}{2}$. De este modo $g(t)$ dada por (31) resulta

$$g(t)= \tfrac{1}{2}\, t\, sen(t)+ (-\tfrac{1}{2}t+ \tfrac{1}{2})\cos(t). \qquad (32)$$

Podemos notar que (32) es la misma expresión que (30) como tenía que suceder.

La solución general de (26) se obtiene entonces sumando la solución de (H) a la solución particular hallada recién:

$$f(t)= c_1 e^{-t} +\tfrac{1}{2}\, t\, sen(t)+ (-\tfrac{1}{2}t+ \tfrac{1}{2})\cos(t). \qquad (33)$$

3) Sea la ecuación

$$f''(t)+f(t)=sen(t). \qquad (34)$$

[1] $e^{\pm it}=\cos(t) \pm i\, sen(t)$

La solución de la ecuación homogénea (H) (obtenerla!) la podemos escribir de dos maneras (utilizando la relación entre exponenciales complejas y funciones trigonométricas[2]):

$$f_H(t)= c_1\, e^{it} + c_2\, e^{-it} = K_1 \cos(t)+ K_2\, sen(t), \qquad (35)$$

donde es sencillo hallar la relación entre K_1 y K_2 con c_1 y c_2 (o viceversa) resultando (hacerlo!): $K_1=c_1+c_2$; $K_2=i(c_1-c_2)$. Señalemos además que el polinomio característico de (H), a partir del cual obtenemos la solución (35), es $P(r)= r^2 + 1$ (cuyas raíces son $\pm i$ que aparecen en (35)).

Para hallar la solución particular, como $b(t)=sen(t)=1/2i\, e^{it} - 1/2i\, e^{-it} = b_1(t) + b_2(t)$, podemos usar el método de los coeficientes indeterminados. O sea deberíamos hallar la solución particular $g_1(t)$ con 2º miembro $b_1(t)= 1/2i\, e^{it}$,y también hallar la solución particular $g_2(t)$ con 2º miembro $b_2(t)= - t/2i\, e^{-it}$. Luego la solución particular, usando el ppio. de superposición, será $g(t)=g_1(t) + g_2(t)$. Acá, entonces estamos en el caso II. de IV. 2 ya que los exponentes que aparecen en $b_1(t)$ y $b_2(t)$ ($\pm i$ respectivamente) son las soluciones del polinomio característico $P(r)$ de la ecuación homogénea (H).

Por lo tanto debemos proponer $g_1(t)=tA\, e^{it}$ y $g_2(t)=tB\, e^{-it}$ siguiendo lo indicado en II. de IV. 2 (ver (22)) pues la raíces $\pm i$ tienen multiplicidad *1* (son raíces simples de $P(r)$), y las constantes A y B (los coeficientes a determinar) son los polinomios más generales de grado *cero* que hay que poner de acuerdo a (22) (pues en $b_1(t)$ y $b_2(t)$ las exponenciales están multiplicadas por números o polinomios de grado *cero).*

Ensayando con $g_1(t)=tA\, e^{it}$ ("metiéndolo" en la ecuación diferencial con 2º miembro $b_1(t)= 1/2i\, e^{it}$) podemos hallar A (hacerlo!) obteniéndose $\boxed{A=-¼}$. Análogamente ensayando con $g_2(t)=tB\, e^{-it}$ para $b_2(t)= - t/2i\, e^{-it}$, hallamos (hacerlo!) $\boxed{B=-¼}$. Por lo tanto la solución particular $g(t)=g_1(t) + g_2(t)$ resulta:

$$g(t)= -¼t\, e^{it} \; -¼t\, e^{-it} . \qquad (36)$$

Podemos ver que $-¼t\, e^{it} \; -¼t\, e^{-it} = -¼\, t\, (e^{it} + e^{-it})= -¼\, t\, .2 \cos(t)= -½\, t \cos(t)$ por lo que

$$g(t)= -½\, t \cos(t). \qquad (37)$$

En efecto si reemplazamos (37) en el miembro izquierdo de (34) (hacerlo!) se obtiene el 2º miembro de (34) ($sen(t)$).

Como hicimos en el ejemplo 2) podríamos hallar esta solución particular (escrita como una función trigonométrica en lugar de exponenciales complejas) de una manera más sencilla y compacta. Como el 2º miembro de (34) es $b(t)=sen(t)$, que es una combinación lineal de exponenciales complejas: $1/2i\, e^{it} - 1/2i\, e^{-it}$, y las exponenciales complejas la podemos poner como combinación lineal de funciones trigonométricas, será equivalente proponer o ensayar con

$$g(t) = C\, t \cos(t) + D\, t\, sen(t) \qquad (38)$$

donde seguimos de alguna manera lo propuesto en II de IV. 2: proponemos una suma de polinomios de grado *cero* (los coeficientes C y D a determinar) multiplicados por t (que $\pm i$ sean soluciones del polinomio característico $P(r)$ de (H), es equivalente a que e^{it} y e^{-it} sean

[2] $e^{\pm it} = \cos(t) \pm i\, sen(t)$

soluciones independientes de (H) y por lo tanto a que *cos(t)*, y *sen(t)* también lo sean), y multiplicados por las funciones trigonométricas (*sen* y cos). “Metiendo” (38) en el miembro izquierdo de (34) podemos determinar los coeficientes indeterminados C y D: derivando dos veces (38) y sumándole (38) sin derivar e igualándolo a *sen(t)* (hacerlo!) se obtiene $-2C\ sen(t) + 2D\ cos(t) = sen(t)$, por lo que $\boxed{C=-\tfrac{1}{2}\,t;\quad D=0}$. De manera que obtenemos $g(t)= -\tfrac{1}{2}\,t\ cos(t)$ (como era de esperar igual a (37)).

La solución general de (34) (la solución de (H) más la particular *g(t)*) resulta entonces (con K_1 y K_2 constantes cualesquiera):

$$f(t)= K_1\, cos(t)+ K_2\, sen(t) -\tfrac{1}{2}\, t\ cos(t). \tag{39}$$

IV.4: Resumen de soluciones particulares a ensayar mediante el “Método de los coeficientes indeterminados”

En vista a los ejemplos de arriba y considerando el tipo de “inhomogeneidades” *b(t)* con las que vamos a trabajar (la cuales son abarcadas por las tratadas con el método de coeficientes indeterminados aquí expuesto), podemos resumir y compactar las soluciones particulares a ensayar en el siguiente cuadro

#	**b(t)**	**g(t) propuesto**	**Consideraciones**
1	cte.	K	Si 0 no es raíz de $P(r)$
2	$A\,t$	$K_1\,t+ K_0$	“
3	$A\,t^n$	$K_n\,t^n + K_{n-1}\,t^{n-1} + \ldots + K_1 t + K_0$	“
4	$A sen(\omega t)$	$K_1\, sen(\omega t) + K_2\, cos(\omega t)$	Si $\pm i$ *no son* raíces de $P(r)$ (o si $sen(\omega t)$, $cos(\omega t)$ *no son* soluciones independientes de (H))
5	$A cos(\omega t)$	“	“
6	$A\, e^{\lambda t}$	$K\, e^{\lambda t}$	Si λ no es raíz de $P(r)$
7	$At\ sen(\omega t)$	$(K_1\,t+ K_0)\ sen(\omega t)+(C_1\,t+ C_0)\ cos(\omega t)$	Si $\pm i$ *no son* raíces de $P(r)$ (o si $sen(\omega t)$, $cos(\omega t)$ *no son* soluciones independientes de (H))
8	$At\ cos(\omega t)$	“	“
9	$A\,t^n\ sen(\omega t)$	$[K_n\,t^n + K_{n-1}\,t^{n-1} + \ldots + K_1 t + K_0]\ sen(\omega t)$ $+[C_n\,t^n + C_{n-1}\,t^{n-1} + \ldots + C_1 t + C_0]\ cos(\omega t)$	“
10	$A\,t^n\ cos(\omega t)$	“	“
11	cte.	Kt	Si 0 es raíz de $P(r)$ (de multiplicidad 1)
12	$A\,t$	$(K_1\,t+ K_0)t$	“
13	$A\,t^n$	$(K_n\,t^n + K_{n-1}\,t^{n-1} + \ldots + K_1 t + K_0)t$	“
14	$A sen(\omega t)$	$[K_1\, sen(\omega t) + K_2\, cos(\omega t)]t$	Si $\pm i$ *son* raíces simples de $P(r)$ (o si $sen(\omega t)$, $cos(\omega t)$ *son* soluciones independientes de (H))
15	$A cos(\omega t)$	“	“
16	$A\, e^{\lambda t}$	$Kt\, e^{\lambda t}$	Si λ es raíz de $P(r)$ (de multiplicidad 1)
17	$At\ sen(\omega t)$	$[(K_1\,t+ K_0)\ sen(t)+(C_1\,t+ C_0)\ cos(t)]t$	Si $\pm i$ son raíces simples de $P(r)$ (o si $sen(\omega t)$, $cos(\omega t)$ son soluciones independientes de (H))
18	$At\ cos(\omega t)$	“	“

En las soluciones particulares *g(t)* propuestas se hallan los coeficientes indeterminados a determinar "metiendo" estas soluciones en la ecuación diferencial. El polinomio *P(r)* es el polinomio obtenido al resolver la ecuación homogénea (H).

En el ejemplo 1) de IV. 3 (ver (23)), $b(t)=20$ con lo cual estamos en la 1º fila del cuadro.

En el ejemplo 2) de IV. 3 (ver (26)), $b(t)= t\,sen(t)$ y hemos utilizado la fila 7 del cuadro.

En el ejemplo 3) de IV. 3 (ver (34)), $b(t)=sen(t)$, habiendo utilizado la fila 14 del cuadro (ya que $\pm i$ son raíces simples de *P(r)* (o *sen(t), cos(t)* son soluciones independientes de (H)).

V. Condiciones o valores Iniciales

Como vimos hasta ahora dada la ecuación diferencial lineal

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = b(t) \qquad (40)$$

la solución general de la misma estará dada por la combinación lineal de las *n* soluciones independientes de (H) más la solución particular *g(t) de* (NH)

$$c_1 f_1(t)+ c_2 f_2(t)+ \ldots + c_n f_n(t)+g(t) \qquad (41)$$

.O sea que la solución es "*n* veces infinita" (infinitas constantes $c_1, \ldots, c_n$).

Sólo agregándole ciertas condiciones se puede hallar una <u>única</u> solución. O sea determinar un solo valor para cada constante c_j ,$(j=1,\ldots,n)$. Estas condiciones se llaman condiciones iniciales o valores iniciales y constituyen las siguientes ***n*** condiciones (igual al orden de la ecuación):

$$f(t=0) = v_0,\ f'(t=0) = v_1,\ f''(t=0)= v_2,\ \ldots\ldots, f^{(n-1)}(t=0)= v_{n-1}, \qquad (42).$$

En (42) se da un valor concreto para la función, su derivada 1º, …, hasta la derivada (*n-1*) valuadas en $t=0$ (de ahí el nombre de condiciones iniciales si *t* es el tiempo).

Utilicemos esto para unificar las soluciones de los ejemplos de IV. 3.

1) En la ecuación diferencial (23) $f''(t)+3f'(t)+2f(t)=20$, hallamos la solución general como (ver (25)):

$$f(t)= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} +10. \qquad (43)$$

Si se agregaran por ejemplo las siguientes *dos* condiciones (ecuación diferencial de orden *2*): $f(0) = 10$, y $f'(0) = 3$, podemos hallar las constantes c_1 y c_2 , y unificar la solución. De la 1º condición obtenemos $c_1 + c_2 +10=10$, y de la 2º condición (primero hay que derivar y después valuar $t= 0$) obtenemos $-2c_1 - c_2 =3$. O sea tenemos las siguientes *dos* ecuaciones con *2* incógnitas: (c_1 y c_2):

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &=0 \\ -2c_1 - c_2 &=3 \end{aligned}$$

sumando miembro a miembro obtenemos que $c_1 = -3$, y de la primera ecuación por ejemplo hallamos entonces que $c_2 = 3$. De la doble infinitud de soluciones dada por (43) hallamos una única solución:

$$f(t) = -3\, e^{-2t} + 3\, e^{-t} + 10. \tag{44}$$

2) En la ecuación diferencial (26) $f'(t) + f(t) = t sen(t)$, hallamos la solución más general como (ver (33)):

$$f(t) = c_1\, e^{-t} + \tfrac{1}{2}\, t\, sen(t) + (-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2})\, cos(t). \tag{45}$$

Al ser la ecuación de orden *1*, necesitamos *una* condición inicial a fin de unificar la solución. Sea esta condición $f(0) = 3/2$. Se obtiene entonces de (45) una ecuación con una incógnita: $f(0) = c_1\, 1 + 0 + (-0 + \tfrac{1}{2})\, 1 = 3/2$. De acá resulta $c_1 = 2$, por lo que la única solución es

$$f(t) = 2\, e^{-t} + \tfrac{1}{2}\, t\, sen(t) + (-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2})\, cos(t). \tag{46}$$

3) En la ecuación diferencial (34) $f''(t) + f(t) = sen(t)$, obtuvimos su solución general como (ver (39))

$$f(t) = K_1\, cos(t) + K_2\, sen(t) - \tfrac{1}{2}\, t\, cos(t). \tag{47}$$

Al ser la ecuación diferencial de orden *2* necesitamos *2* condiciones iniciales a fin de unificar la solución. Sean estas *dos* condiciones $f(0) = 5$, y $f'(0) = -\tfrac{1}{2}$. Se obtiene (hacerlo!) el siguiente sistema de *dos* ecuaciones con *2* incógnitas (K_1 y K_2):

$$K_1 = 5$$
$$K_2 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

Por lo cual $K_1 = 5$ y $K_2 = 0$; de modo tal que la solución única resulta

$$f(t) = 5\, cos(t) - \tfrac{1}{2}\, t\, cos(t). \tag{48}$$

Resumiendo, para hallar la solución única de una ecuación diferencial de orden *n*, lineal, a coeficientes constantes, procedemos de la siguiente manera:

a) Hallamos *n* soluciones independientes de la ecuación diferencial homogénea (H), y la solución general de (H) será una combinación lineal de estas *n* soluciones
b) Hallamos la solución particular de la ecuación no homogénea (NH).
c) La solución general de la ecuación diferencial será la suma de la solución de (H) más la solución particular de (NH).
d) Empleando *n* condiciones iniciales a la solución general unificamos la solución. O sea determinamos los parámetros o constantes que aparecen en la solución de (H). Pero esto lo debemos efectuar después de sumarle la solución particular de (NH). La *n* condiciones iniciales son los valores de la función, de la derivada 1º, …, hasta la derivada *(n-1)* en $t=0$. O sea –por ejemplo- que si el orden de la ecuación fuera $n=2$, tendríamos 2 condiciones iniciales: $f(0) = v_0$, $f'(0) = v_1$.