Carrera de Robótica: Matemática Aplicada (Dr. Ernesto Kirchuk)
Álgebra de números complejos y Funciones de variable compleja

1. Definiciones

Un número complejo $z=(a,b)$ o $z=a+ib$, con a y b reales ($i^2=-1$) es representado en el plano complejo como se muestra en la Fig. 1. Indicaremos con Re e Im a la parte real y la parte imaginaria de z respectivamente por lo que $Re(z)=a$ e $Im(z)=b$.

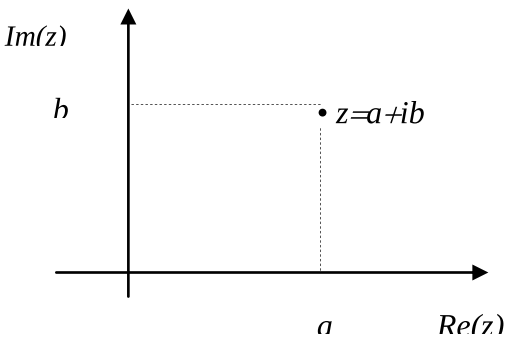

Fig. 1

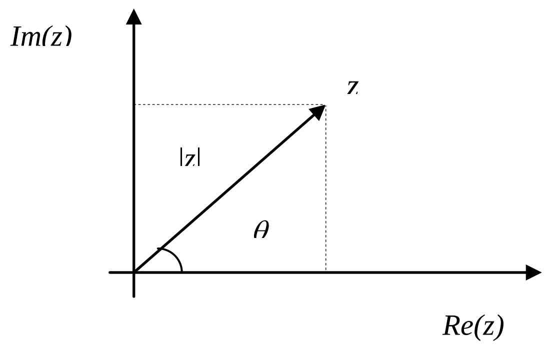

Fig. 2

Nótese que si $w=c+id$ y $w=z$, entonces $a=c$ y $b=d$. La forma anterior de escribir a un complejo la llamaremos forma cartesiana. Podemos también escribir al complejo z en forma trigonométrica (ver Fig. 2) : $z=|z|(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. El módulo y la fase (o argumento) de z son respectivamente

$$|z|=z\ ,\ arg(z)=\theta\,. \tag{1}$$

Mediante la prolongación analítica podemos extender funciones reales a complejas. En particular podemos hacer uso de la identidad de Euler (ver su deducción en la ec. (29) del ítem 7, págs. 5-6):

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\,\mathrm{sen}\,\theta\,. \tag{2}$$

De este modo, el complejo z escrito en forma trigonométrica lo podemos representar en la llamada forma exponencial o polar según

$$z=|z|\,e^{i\theta}\ . \tag{3}$$

Para pasar un complejo de la forma polar a la cartesiana o viceversa haremos uso de la identidad de Euler (2) por lo que la ec. (3) queda $z=|z|\cos\theta+i\,|z|\,\mathrm{sen}\,\theta$. Observando la parte real e imaginaria en esta última expresión obtenemos

$$a=|z|\cos\theta\,,\ b=|z|\,\mathrm{sen}\,\theta\,. \tag{4}$$

Elevando al cuadrado las expresiones (4) y sumando, o utilizando el teorema de Pitágoras (ver figuras 1 y 2) encontramos

$$|z|^2=a^2+b^2, \tag{5}$$

y dividiendo b por a en las ecs.(4)

$$\theta = arctg(b/a). \qquad (6)$$

2. Suma y resta

Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, entonces $z + w = w + z = v$; y el nuevo complejo suma resulta

$$v = (a + c) + i(b + d). \qquad (7)$$

O sea que la suma de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de los sumandos e ídem para las partes imaginarias. Las operaciones de suma y resta de complejos se muestran en el plano complejo de la Fig. 3 (regla del paralelogramo).

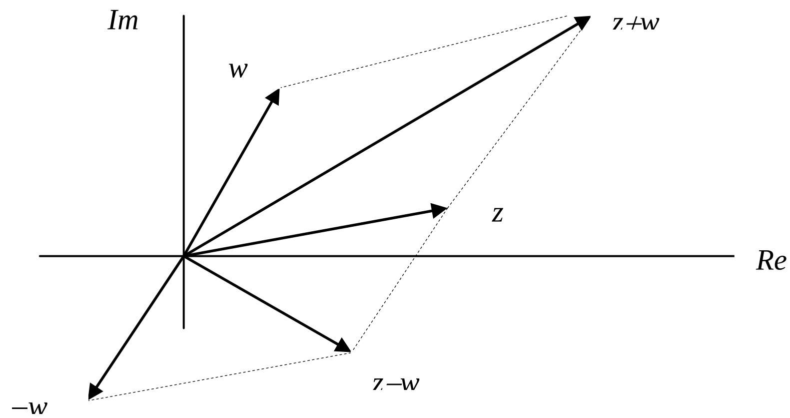

Fig. 3

Ejemplo: si $z = 1 + i2$ y Si $w = 1 - i1$, $\Rightarrow z + w = v = 2 + i1$; y $z - w = u = 0 + i3 = i3$.

3. Multiplicación

Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, entonces

$$z\,w = w\,z = (a + ib)(\,c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \qquad (8)$$

que indica que el producto de dos complejos es otro número complejo. En la forma polar o exponencial el producto entre $z = |z|\,e^{i\theta z}$ y $w = |w|\,e^{i\theta w}$ resulta

$$v = z\,w = |z||w|\,e^{i(\theta z + \theta w)}\,. \qquad (9)$$

De la expresión (9) notamos que

$$|v| = |zw| = |z||w|\ ,\ arg(v) = arg(z) + arg(w) = \theta_z + \theta_w\,. \qquad (10)$$

De las ecs. (8-10) notamos que la multiplicación de números complejos se efectúa más fácilmente en la forma polar o exponencial que en la forma cartesiana.

Dado $z = a + ib$ definamos el *conjugado* de z como $z^* = a - ib$. Observamos que

$$z\, z^* = (a+ib)\,(a-ib) = a^2 + b^2. \qquad (11)$$

La expresión (11) muestra que el producto de un complejo por su conjugado es un número real. En forma exponencial $z=|z|\, e^{i\theta}$, y $z^*=|z|\, e^{-i\theta}$ con lo que $z\, z^*=|z|^2=a^2+b^2$ de acuerdo a la ec. (11).
En la Fig. 4 se observa el conjugado de un complejo gráficamente.

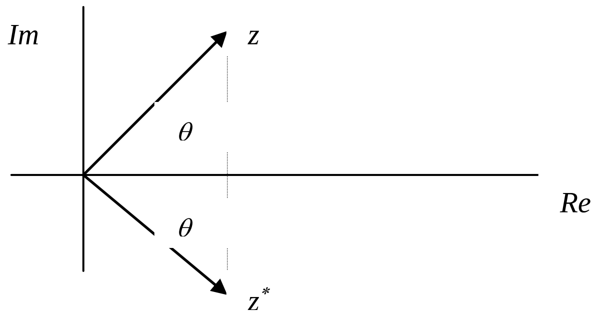

Fig. 4

4. División

Si $v.w=z$, entonces para números complejos

$$v = z/w = z\, w^*/(w\, w^*) = z\, w^*/|w|^2 \qquad (12)$$

en donde usamos el “truco” de multiplicar numerador y denominador (“arriba y abajo”) por w^*.
Luego

$$z/w = (a+ib)(\,c-id)/(c^2+d^2) = (ac+bd)/(c^2+d^2) + i(bc-ad)/(c^2+d^2). \qquad (13)$$

En la forma polar notamos también que es más fácil efectuar la división:

$$z/w = |z|\, e^{i\theta z}/|w|\, e^{i\theta w} = |z|/|w|\, e^{i(\theta z-\theta w)}\,, \qquad (14)$$

por lo que el módulo y el argumento del cociente de dos números complejos resulta respectivamente

$$|z/w| = |z|/|w|\ ,\ arg(z/w) = \theta_z - \theta_w\,. \qquad (15)$$

Ejemplo: Se desea dividir $1+i\sqrt{3}$ por i, y expresar el resultado en la forma $a+ib$. Entonces

$$(1+i\sqrt{3})/\, i = (1+i\sqrt{3}\,)(-i)/[i(-i)] = \quad 3 - i = a+ib. \qquad (16)$$

En forma polar

$$(1+i\sqrt{3})/\, i = 2e^{i60°}/1e^{i90°} = 2\, e^{-i30°} = 2(\sqrt{3}/2 - i1/2) = \sqrt{3} - i, \qquad (17)$$

obteniendo el mismo resultado que (16) como era de esperar. En esta última expresión utilizamos la identidad de Euler (ec. (2)).

5. Potencia y raíz n-ésima

Para efectuar estas operaciones nos conviene escribir al número complejo en su forma polar y hacer uso de las propiedades de las exponenciales. Así

$$z^n = (|z|\, e^{i\theta})^n = |z|^n\, e^{in\theta} \ . \tag{18}$$

La raíz n-ésima de z será un w tal que $w^n = z$. O sea $w = z^{1/n}$. Análogamente a la ec. (18) obtenemos

$$z^{1/n} = (|z|\, e^{i\theta})^{1/n} = |z|^{1/n}\, e^{i(\theta + k2\pi)/n} \ ; \text{ con } k \text{ entero: } k = 0, 1, ..., n\text{-}1, \tag{19}$$

donde observamos que $\theta = \theta + k2\pi$, expresando θ en radianes. Por ello notemos que hay n raíces n-ésimas. La raíz con $k = 0$ es conocida como el valor principal. La expresión (19) es llamada teorema de De Moivre.

Ejemplo: Determinar las raíces cúbicas de la unidad. Notemos que $z = 1 = 1 + i0$. Usando (19) hallamos que $1 = 1^{1/3} = \{\ 1e^{i0°}, 1e^{i120°}, 1e^{i240°}\ \}$. En la Fig. 5 se grafican estas tres raíces en el plano complejo, Observe la simetría de las tres raíces halladas

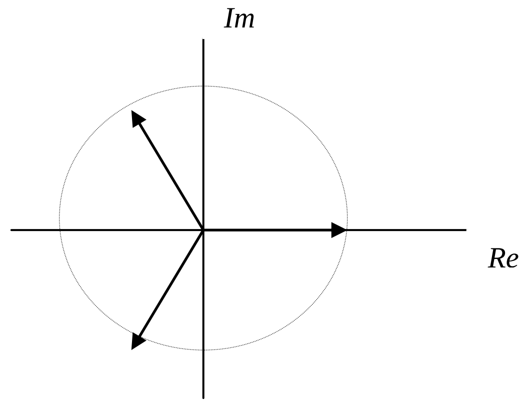

Fig. 5

6. Funciones en el campo complejo

Al conjunto de números complejos lo denotaremos con C. Estudiaremos funciones tales que $f: C \to C$. Si $z \ \varepsilon\, C$ ($z = x + iy$),

$$f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y). \tag{20}$$

Las funciones u y v serán funciones cuyos elementos del Dominio son pares ordenados (x,y) del plano y cuyo Codominio son los reales.

Se puede extender para este tipo de funciones el concepto de límite, de continuidad y de derivabilidad. Por ejemplo decimos que $f(z)$ es derivable en el punto $z_o = x_o + iy_o$, si existe el límite del cociente incremental, es decir, existe $lim_{z \to zo}\ (f(z) - f(z_o))/(z - z_o) \equiv f'(\ z_o)$. No nos detendremos demasiado en esto pues tendríamos que introducirnos en análisis de funciones de dos variables, derivadas parciales, etc. Solo diremos algunas definiciones y proposiciones.

Decimos que $f(z)$ es *holomorfa* en z_o si existe un disco abierto centrado en z_o tal que f es derivable en ese disco.

Son equivalentes las siguientes proposiciones: i) f es derivable en z_o ; ii) u y v (ver expresión (20)) son diferenciables y además se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemman: $\partial u/\partial x=\partial v/\partial y$; $\partial u/\partial y=-\partial v/\partial$, donde el símbolo ∂ indica la derivada parcial ($\partial u/\partial x$ denota la du/dx tomando la variable y constante, $\partial u/\partial y$ denota la du/dy tomando la variable x constante).

7. Prolongación analítica (extensión de funciones reales al campo complejo)

En analogía a algunas funciones reales, algunas funciones complejas $f(z)$ las podemos escribir como una serie de potencias. Decimos que $f(z)$ es *analítica* en el punto z_o si

$$f(z)=a_o+a_1(z-z_o)+a_2(z-z_o)^2+a_3(z-z_o)^3+\cdots\cdots=\Sigma\, a_n(z-z_o)^n \qquad (21)$$

y esta serie converge absolutamente en un entorno de z_o (una serie $\Sigma\, b_n$ converge absolutamente *si y sólo si* la serie $\Sigma\,|b_n|$ converge).

Sin demostrar nada diremos dos resultados importantes: i) Analiticidad $\Rightarrow$ holomorfía (si una función es analítica *entonces* es derivable); ii) Analiticidad permite extender funciones reales a complejas.

Hagamos uso de esto último para definir la exponencial compleja y hallar la identidad de Euler. Sabemos que la función real e^x puede ser escrita en serie de potencias como

$$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots\cdots \;=\Sigma\, x^n/n!. \qquad (22)$$

donde $n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1$. Aquí x es una variable real que puede ser reemplazada por una variable compleja z: $e^z=\Sigma\, z^n/n!$. De este modo se puede ver que todas las operaciones que conocemos para las exponenciales reales las aplicamos para la complejas: $e^{z+w}=\; e^z\, e^w$; $e^z=e^x\, e^{iy}$; $|e^z|=e^x$.

En particular sustituyendo x por el imaginario puro $i\theta$ en (22) obtenemos

$$e^{i\theta}=1+i\theta\;+(i\theta)^2/2!+(i\theta)^3/3!+\cdots\cdots=\Sigma\,(i\theta)^n/n!. \qquad (23)$$

Notemos que $i^2=-1$ por lo que $i^3=-i$, $i^4=1$, etc.. Usando estas identidades y agrupando las partes reales e imaginarias de la ec. (23) resulta

$$e^{i\theta}=1-\theta^2/2!+\theta^4/4!-\cdots\cdots+i\;[\theta-\theta^3/3!+\cdots\cdots]. \qquad (24)$$

Las partes reales e imaginarias de la serie dada por (24) se pueden identificar con otras series conocidas:

$$cos\;\theta=1-\theta^2/2!+\theta^4/4!-\cdots\cdots, \qquad (25)$$

$$sen\;\theta=\theta-\theta^3/3!+\theta^5/5!-\;\cdots\cdots \qquad (26)$$

Por lo tanto la ec. (24) puede ser escrita como

$$e^{i\theta} = cos\ \theta + i\ sen\ \theta\,. \tag{27}$$

Observemos que reemplazando θ por $-\theta$ en esta última ecuación obtenemos

$$e^{-i\theta} = cos(-\theta) + i\ sen(-\theta) = cos\ \theta - i\ sen\theta\,. \tag{28}$$

Las ecs. (27) y (28) pueden ser combinadas en la conocida identidad de Euler:

$$e^{\pm i\theta} = cos\ \theta \pm i\ sen\ \theta\,. \tag{29}$$

Como otro ejemplo de prolongación analítica, veamos el logaritmo de un complejo *z*. Para ello expresemos al complejo en su forma polar observando que $\theta = \theta + k2\pi$ para cualquier entero *k*, y θ en radianes. Entonces

$$ln\ z = ln\ |z|\ e^{i\theta} = ln\ |z|\ e^{i(\theta + k2\pi)} = ln\ |z| + i(\theta + k2\pi). \tag{30}$$

Ejemplo: Queremos hallar y escribir al $ln(3+i4)$ en la forma de $= a+ib$. De acuerdo a (30)

$$ln(3+i4) = ln\ 5 + i(arctg\ 4/3 + k2\pi),\ \ k=0, 1, \cdots\cdots$$

8. Ejercicios

1) i) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$: $z_1 = 2e^{i45°}$, $z_2 = 5e^{-i30°}$.
   ii) Expresar los siguientes números complejos en forma exponencial: $z_1 = 2 - i2$, $z_2 = -1 - i$.

2) Dados los siguientes complejos $z = 1+i$, $w = 3+i2$, $v = -2+i$. Determine analítica y gráficamente las siguientes cantidades: a) $z+w+v$, b) $2z-w$.

3) Usando los mismo complejos que en el ejercicio 2), determine las siguientes cantidades expresándolas tanto en forma cartesiana como en forma polar: a) $z.w$; b) $z.w.v$; c) $z.w^*$; d) $(z.w)^*$; e) $(z-z)^*.w\ w^*$.

4) Usando los mismo complejos que en el ejercicio 2), determine las siguientes cantidades expresándolas tanto en forma cartesiana como en forma polar: a) z/w; b)) $z.w^*/v$; c)$(z+w)/v$.

5) Si $1/(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = a + ib$, determine a y b (en función de θ).

6) Encuentre las potencias o raíces indicadas en las siguientes expresiones y grafíquelas en el plano complejo: a) $(-1)^{1/4}$; b) $(-32)^{1/5}$; c) $(i32)^{1/5}$; d) $[(1+i\sqrt{3})/(1-i\sqrt{3})]^{10}$.