<u>Matemática Aplicada</u> (Dr. E. Kirchuk)

<u>Guía T. P. N° 0</u>
(Introducción a ecuaciones diferenciales. Ecuaciones de 1° orden en distintos sistemas dinámicos. Métodos de integración directa.)

1. Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo. La cantidad de una cierta sustancia radiactiva que va quedando al pasar el tiempo t viene dada por la siguiente ecuación diferencial $M(t)=-(1/\lambda)dM(t)/dt$. Es decir que la variación de cantidad de sustancia radiactiva por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de sustancia que había en el instante t ($dM(t)/dt=-\lambda M(t)$), donde el signo negativo indica que $M(t)$ va decreciendo con el paso del tiempo y λ es la constante de proporcionalidad . a) Halle explícitamente la función $M(t)$ mediante integración directa de la expresión de arriba. b) La rapidez de la desintegración se mide por el *período de desintegración*, que es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa inicial y que naturalmente, no depende del instante inicial. ¿Qué relación tiene con la constante λ? c) Si el período de desintegración del Radio (Ra) es de *1620* años, grafique la evolución de *1 gr* de masa de Ra a lo largo del tiempo tomando como unidad de tiempo *1000* años y como origen de tiempo el año *1800*. ¿Qué cantidad de Ra quedará en los años *3000* y *5000*? ¿Que cantidad de Ra había en el año *0*? ¿Cuándo quedarán *0.8 gr* de Ra?

2. El crecimiento poblacional de un país en función del tiempo puede aproximarse según el siguiente modelo: la variación poblacional por unidad de tiempo es proporcional a la población que hay en el tiempo t. a) Si $N(t)$ es la población (en millones) del país, escriba la ecuación diferencial que modela el sistema. b) Resuelva –por integración directa- la ecuación diferencial de a). c) Si la población en un año “cero” o inicial tomado como referencia (suponga 1980) era de *227* millones, y la constante de proporcionalidad mencionada implícitamente más arriba es de *0.007*, ¿en qué año habrá 350 millones de habitantes?

3. En publicidad se estima que el número de personas $N(t)$ en una población P_o que conocen un producto nuevo está modelado por la siguiente ecuación diferencial: $dN(t)/dt = k(P_o - N(t))$, es decir que el número de personas que va conociendo el producto aumenta proporcionalmente al número de personas que lo desconocen; donde k es un número fijo y conocido, y se ha partido del supuesto que en el instante $t=0$ nadie conocía el producto. a) Halle $N(t)$ por integración directa y grafique $N(t)$ vs. t. b) ¿Cuándo el producto será conocido por la mitad de la población? ¿Y por las 3/4 partes de la población?

4. Sea la ecuación diferencial $f'(x)= 1/x\ (x\neq 0)$ donde $f'(x)$ indica la derivada 1° de f respecto a x. Compruebe que existen infinitas soluciones dadas por $f(x)= \ln|x| + c$ (donde c, es una constante cualquiera).

5. Sea la ecuación diferencial $f'(x)=x^{2/3}$. Encuentre las soluciones que verifiquen que $f(0)=0$.

6. Sea la ecuación diferencial $f'(x) - f^2(x)= 0$ y la condición $f(0)= 1$. Encuentre la solución definida en el intervalo $(-\infty,1)$.

7. Considere un tanque de sección transversal *A* (m^2), que presenta un flujo de salida libre por un orificio de área *a* (m^2) (ver figura). El nivel del líquido en el tanque es *h* (m), el flujo de entrada es *u* (m^3/s), el flujo de salida es *q* (m^3/s). a) Construya un modelo –vía la ecuación diferencial correspondiente- que relacione el nivel del líquido *h(t)* con el flujo de entrada *u(t).* b) Luego encuentre como depende el flujo de salida *q(t)* con el flujo de entrada *u(t).* c) ¿Puede hallar por integración directa *h(t),* para *u(t)=1* ($t \geq 0$) y *h(t=0)=0,* o *h(t=0)=2*? Grafique *h(t)* vs. *t* para estos dos últimos casos. (Datos: aceleración de la gravedad *g* , $A=1$, $a.(2g)^{1/2}=1$).