Cuestionario

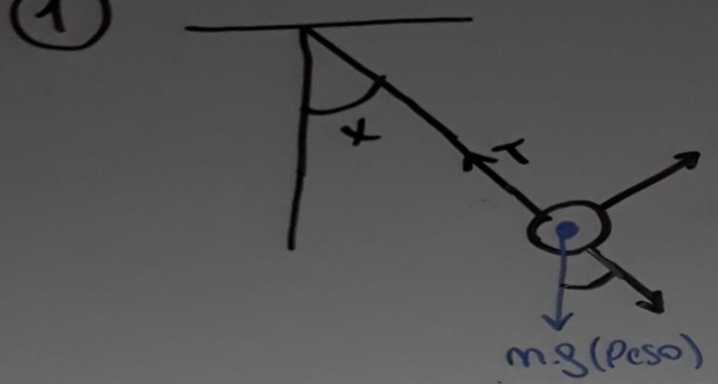
Modelización Matemática de Sistemas:

13. Escriba la ecuación diferencial que describe el comportamiento dinámico de un péndulo plano ideal de masa M, suspendido de un hilo de masa despreciable, de longitud L, cuando se lo desplaza inicialmente un ángulo θ_o. Clasifique la ecuación diferencial obtenida. ¿Es lineal? De no serlo linealizar la misma para ángulos pequeños.
14. Plantear las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento dinámico de un sistema masa-resorte-amortiguador, con condiciones iniciales nulas, y excitado por una función perturbadora de tipo impulso unitario. Obtener la función de transferencia del sistema utilizando Transformadas de Laplace (T.L.), donde la entrada al mismo es la función perturbadora, y la variable de salida es la posición de la masa. Hacer un diagrama de bloques del sistema. ¿De que dependen los tiempos de respuesta del sistema?
15. Repita el problema anterior cuando la función perturbadora es un escalón unitario.
16. Plantear las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de un circuito eléctrico L-R-C serie, excitado por una tensión, de tipo escalón unitario. Con condiciones iniciales para la carga y la corriente, nulas. Utilizando T.L. obtener la función de transferencia del mismo. Hacer un diagrama de bloques del circuito. Discutir los resultados.
17. Plantear las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento dinámico de un servo motor de dos fases, donde se quiere controlar la posición angular del eje, mediante una tensión de control aplicada en la fase fija. Hacer un esquema del sistema. Aplicando T.L. obtenga la función de transferencia del sistema. Hacer el diagrama de bloques. ¿De que dependen los tiempos de respuesta del sistema?
18. Plantear las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento dinámico, para un servomotor de corriente continua, controlado por tensión de campo. En este sistema se requiere controlar la posición angular, mediante una tensión de control. Hacer un esquema del sistema. Aplicando T.L. obtenga la función de transferencia del sistema. Hacer el diagrama de bloques. ¿De que dependen los tiempos de respuesta del sistema?
19. Plantear las ecuaciones diferenciales, para un servomotor de corriente continua, controlado por tensión de armadura. En este sistema se requiere controlar la posición angular, mediante una tensión de control. Hacer un esquema del sistema. Aplicando T.L. obtenga la función de transferencia del sistema. Hacer el diagrama de bloques. ¿De que dependen los tiempos de respuesta del sistema?
20. Plantear las ecuaciones diferenciales para un servomotor lineal hidráulico, constituido por una bomba hidráulica, una válvula piloto de tres vías, y un cilindro de potencia. Considerando como variable de entrada la posición de control de la válvula piloto, y la variable de salida, la posición de la carga Obtenga la función de transferencia del mismo. ¿De que depende el tiempo de respuesta del sistema?
21. Considere un sistema térmico, constituido por un calefactor y un mezclador en un tanque aislado térmicamente del exterior. El líquido entra al tanque con una temperatura constante, mientras que el fluido saliente del tanque tiene una temperatura mayor. Hacer un modelo matemático del sistema, planteando las ecuaciones diferenciales correspondientes.
22. Deduzca expresiones aproximadas de e^{-Ts}. Que es la aproximación de Padé, y qué ventajas tiene.
23. ¿Qué es un amplificador operacional? ¿Cuáles son las hipótesis de su funcionamiento?
24. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración buffer de tensión (seguidor de tensión).
25. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración amplificador inversor.
26. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración amplificador no inversor.
27. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración sumador inversor.
28. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración integradora (filtro pasabajos)
29. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración derivadora (filtro pasaaltos)
30. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración amplificador diferencial.

31. Plantear las ecuaciones de Kirchoff para una configuración amplificador de instrumentación.
32. ¿Cómo haría una fuente de corriente para una carga resistiva variable, con un amplificador operacional?
33. ¿Cómo haría un controlador analógico PID, con amplificadores operacionales? ¿Cómo implementaría un generador de error?

13)

1



Ecuaciones del pendulo

$P = T \rightarrow m.g.\cos x = T$ (ecuación estático)

$\rightarrow -m.g \operatorname{sen} x = m.a$ (ecuación dinámica)

$a = \frac{dv}{dt}$ (derivada de la velocidad)

$a = \frac{d^2x}{d^2t}$ (Segunda derivada de la posición)

$-(m.g.\operatorname{sen} x) = m.\frac{d^2x}{d^2t}$

$-(\cancel{m}.g.\operatorname{sen} x) = \cancel{m}.\ddot{x}$

$-g.\operatorname{sen} x = \ddot{x}$

Entonces tenemos

$m.g.\cos x = T$ (ecuación pendulo estático).

$-g.\operatorname{sen} x = \ddot{x}$ (ecuación pendulo dinamico).

Tenemos 2 ecuaciones coeficientes constantes pero no es una ecuación lineal

Linealización

Sabemos por series de Taylor que

$$\boxed{\operatorname{Sen} x = x}$$

Solo válido para ángulos pequeños → $\boxed{x < 1}$

Reemplazando

$$-g \cdot \operatorname{sen} x = \ddot{x}$$

$$-(g \cdot x) = \ddot{x}$$

$$0 = \ddot{x} + g \cdot x$$

ED. de 2do Orden

Ahora Evaluamos las Condiciones Iniciales

Suponemos para el ángulo de x.

$$x(0) = 0 \quad \wedge \quad \dot{x}(0) = 0$$

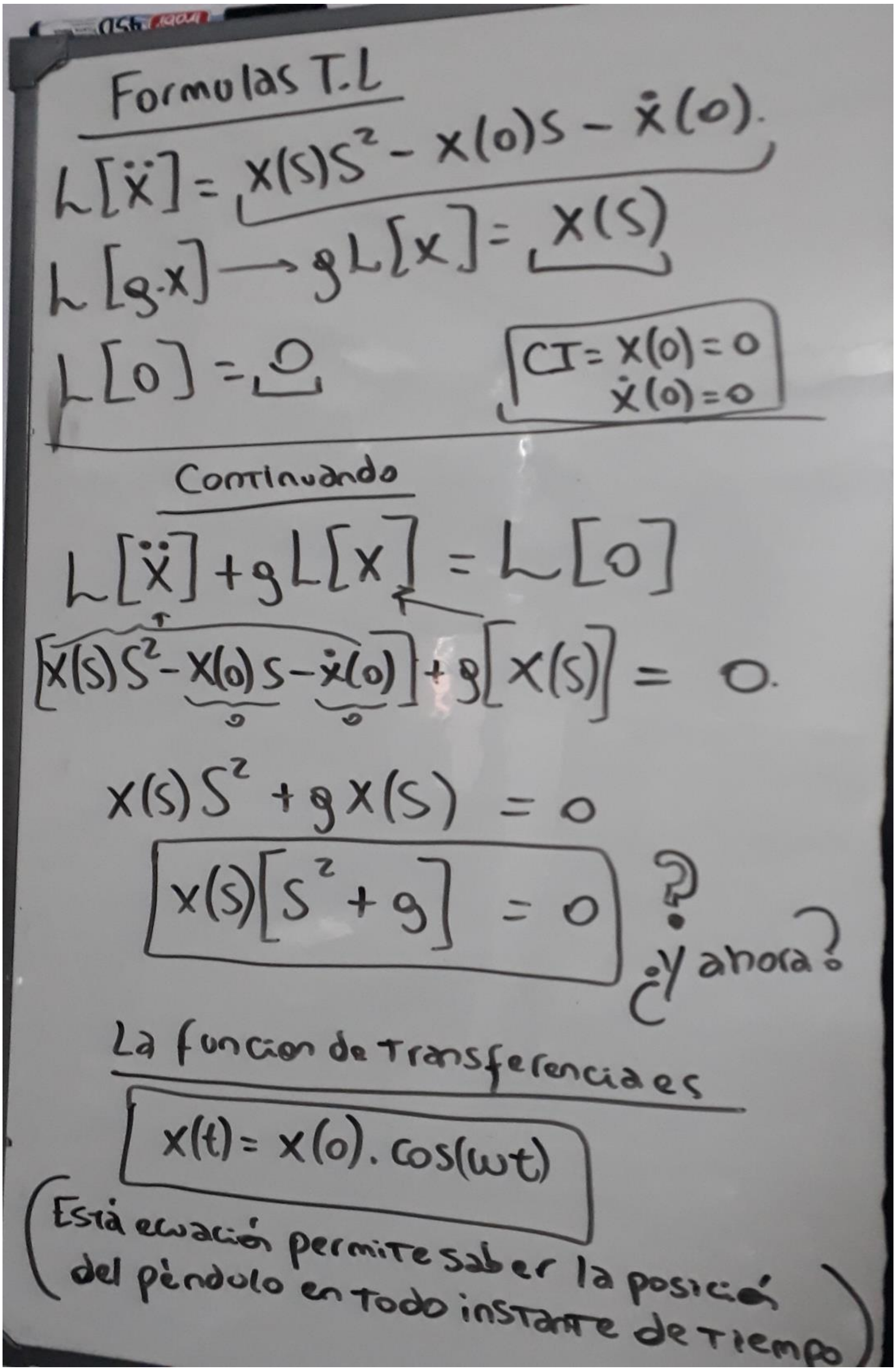
(posición inicial) (velocidad inicial)

Aplicamos Transformada de Laplace

$$\ddot{x} + g \cdot x = 0$$

$$L[\ddot{x} + g \cdot x] = L[0]$$

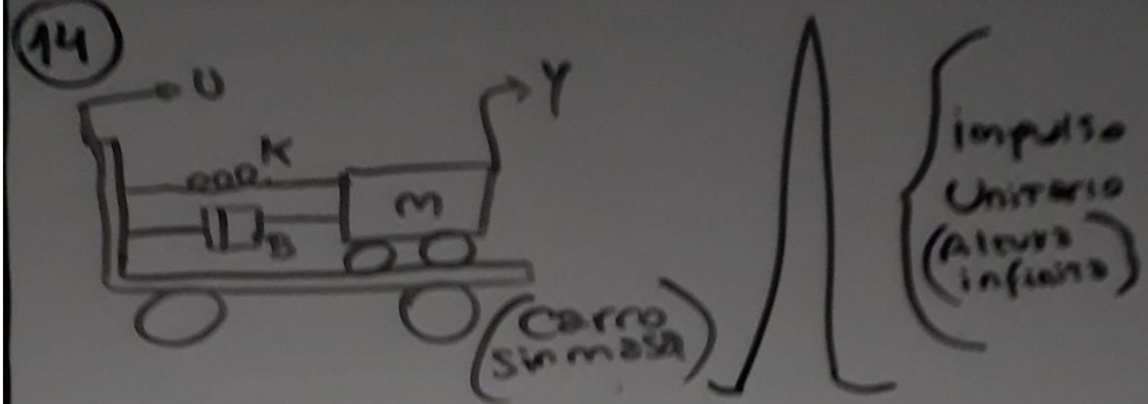
$$L[\ddot{x}] + L[g \cdot x] = L[0]$$



Formulas T.L
$L[\ddot{x}] = \underbrace{X(S)S^2 - x(0)S - \dot{x}(0)}$
$L[g.x] \longrightarrow gL[x] = \underbrace{X(S)}$
$L[0] = \underbrace{0}$
$CI = x(0) = 0$
$\dot{x}(0) = 0$
Continuando
$L[\ddot{x}] + gL[x] = L[0]$
$[X(S)S^2 - \underbrace{x(0)}_{0}S - \underbrace{\dot{x}(0)}_{0}] + g[X(S)] = 0.$
$X(S)S^2 + gX(S) = 0$
$\boxed{X(S)[S^2 + g] = 0}$?
¿y ahora?
La funcion de transferencia es
$\boxed{x(t) = x(0).\cos(\omega t)}$
(Está ecuación permite saber la posición del péndulo en todo instante de tiempo)

14)

14



K = Constante de Restitución del Resorte
B = Constante de Fricción Viscosa.
m = masa.

$$\underbrace{U}_{\text{Fuerza externa}} - \underbrace{m\ddot{x}}_{\text{2da Ley de Newton}} - \overbrace{b\dot{x}}^{\text{Fricción viscosa}} - \underbrace{Kx}_{\text{Ley de Hooke}} = 0$$

Reordenando obtenemos la EDO del sistema.

$$\boxed{U = m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx}$$

Para obtener la Ecuación de transferencia.

$$\mathcal{L}[U] = \mathcal{L}[m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx]$$

$$\mathcal{L}[U] = m\mathcal{L}[\ddot{x}] + b\mathcal{L}[\dot{x}] + K\mathcal{L}[x].$$

$$\mathcal{L}[U] = m\mathcal{L}[\ddot{x}] + b\mathcal{L}[\dot{x}] + k\mathcal{L}[x].$$

Formulas Laplace

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = X(s)s^2 - x(0)s - \dot{x}(0).$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = X(s)s - x(0).$$

$$\mathcal{L}[x] = X(s).$$

Obtenemos

$$U(s) = m\left[X(s)s^2 - x(0)s - \dot{x}(0)\right] + b\left[X(s)s - x(0)\right] + k\left[X(s)\right]$$

Tal, que las C.I. son nulas $\rightarrow x(0)=0 \wedge \dot{x}(0)=0$

Evaluamos

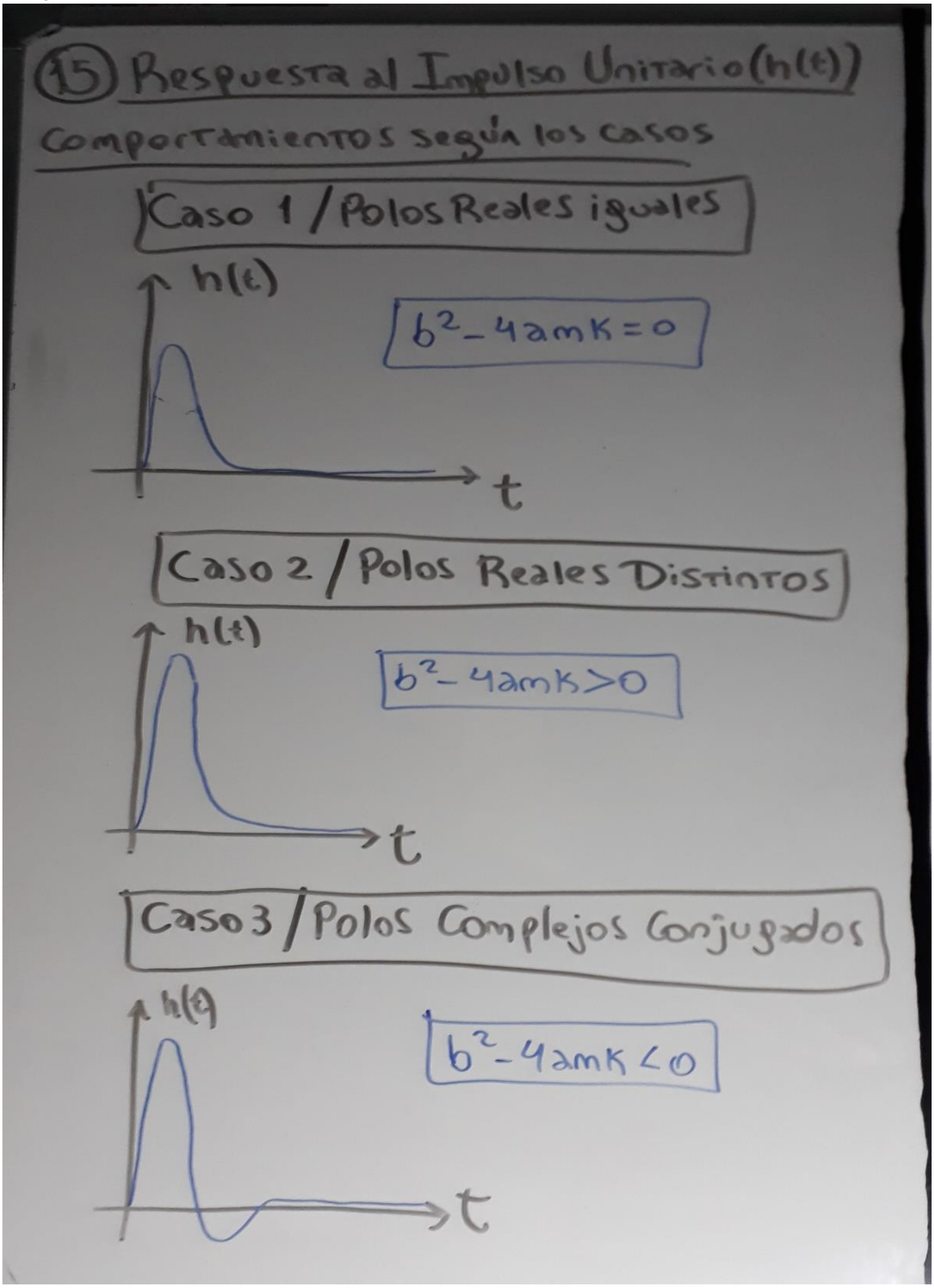
$$U(s) = m\left[X(s)s^2\right] + b\left[X(s)s\right] + k\left[X(s)\right].$$

$$U(s) = X(s)\left[ms^2 + bs + k\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{ms^2+bs+k} = \frac{X(s)}{U(s)}}$$

FUNCIÓN DE TRASFERENCIA.

15)



15 Respuesta al Impulso Unitario (h(t))
Comportamientos según los casos
Caso 1 / Polos Reales iguales
h(t)
b²-4amK=0
t
Caso 2 / Polos Reales Distintos
h(t)
b²-4amK>0
t
Caso 3 / Polos Complejos Conjugados
h(t)
b²-4amK<0
t

La salida del sistema es

$$y(t) = h(t) \,.\, u(t)$$

La convolución está dada

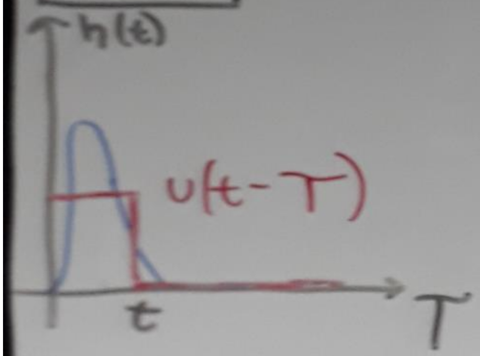
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(T)\, u(t-T)\, dt$$

entrada escalon

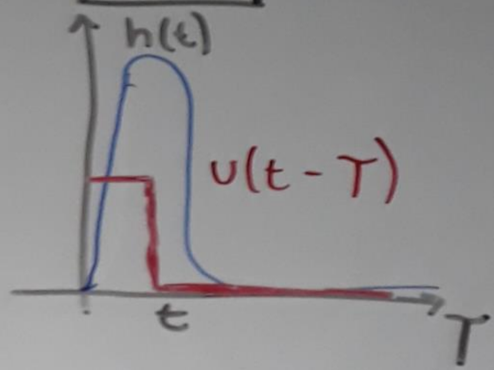
$$u(t) = 1(t).$$

Entonces......

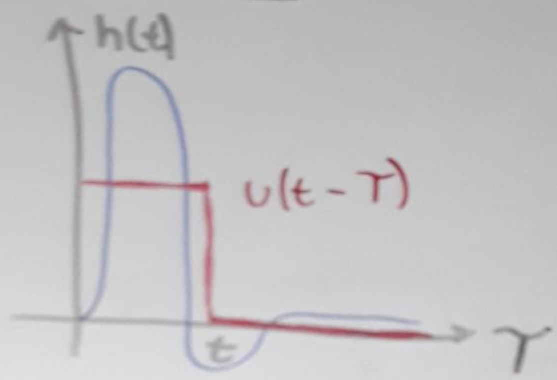
Caso 1

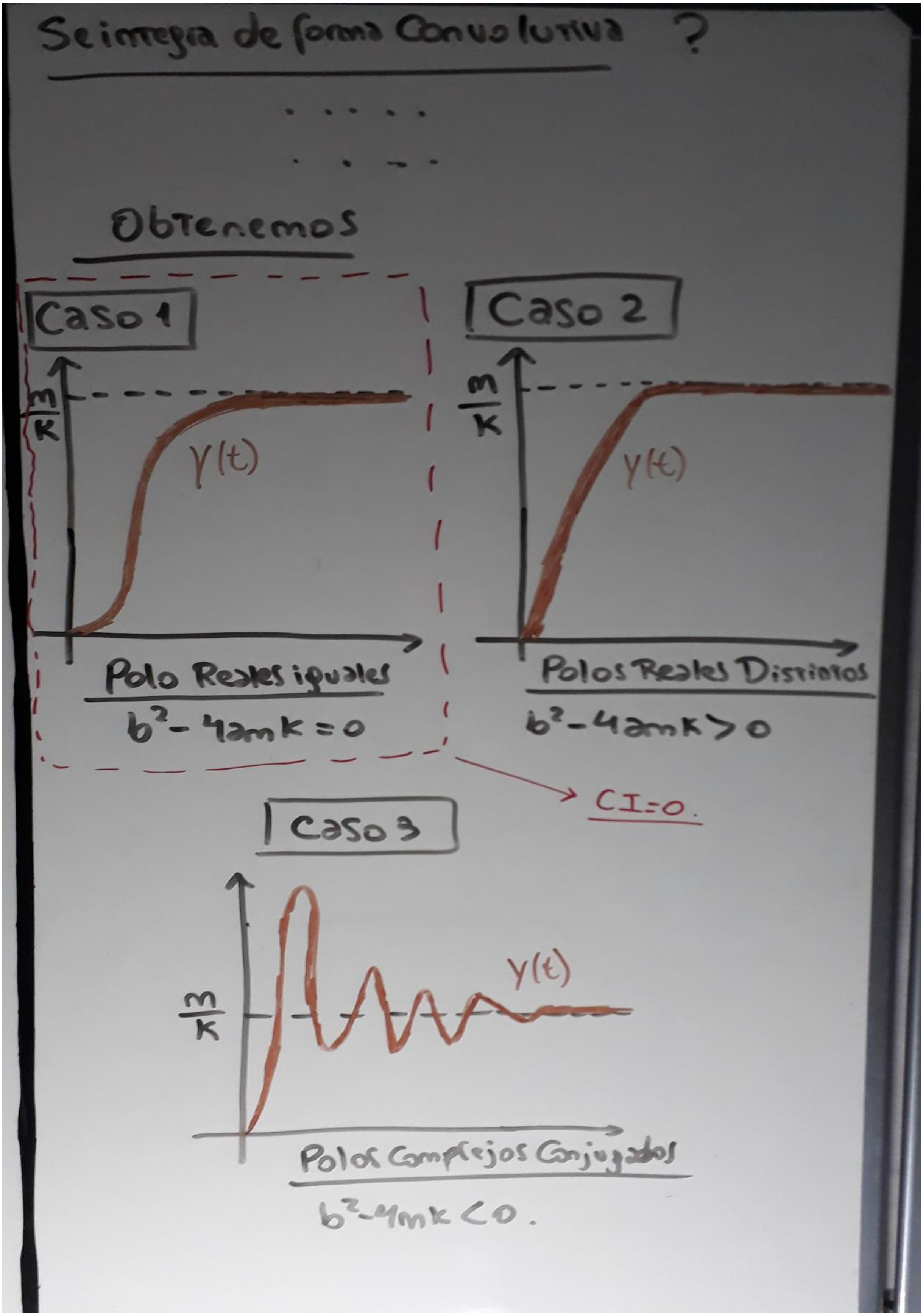


Caso 2



Caso 3

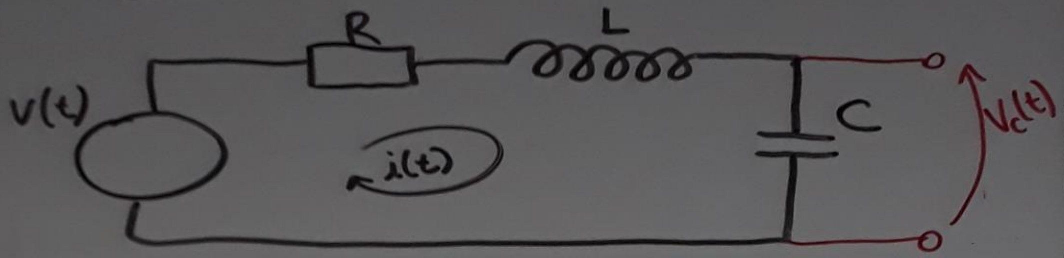




Se integra de forma Convolutiva ?
Obtenemos
Caso 1
$\frac{m}{K}$
y(t)
Polo Reales iguales
$b^2 - 4amk = 0$
Caso 2
$\frac{m}{K}$
y(t)
Polos Reales Distintos
$b^2 - 4amk > 0$
CI=0.
Caso 3
$\frac{m}{K}$
y(t)
Polos Complejos Conjugados
$b^2 - 4mk < 0.$

16)

16 Función de Transferencia
Circuito RLC



$$\boxed{\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}}$$

Función de Transferencia

Obtención Función de Transferencia

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

Tal que

$$V_R(t) = R.i(t) \; ; \; V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

Despejando i(t)

$$V_c(t).C = \int i(t)\,dt$$

$$V_c(t).C = \frac{i(t)^2}{2} + C$$

$$(V_c(t).C)' = \left(\frac{i(t)^2}{2} + C\right)'$$

$$(V_c(t) . C)' = \left(\frac{i(t)^2}{2} + c\right)'$$

$$c\,(V_c(t))' = \left(\frac{i(t)^2}{2}\right)' + (c)'$$

$$c\,\frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{\cancel{2}\, i(t)}{\cancel{2}\ 1}$$

$$\boxed{C . \frac{dv_c(t)}{dt} = i(t)}$$

Tenemos $i(t)$, ahora sustituimos

$$v(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_c(t)$$

$$V(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + V_c(t)$$

$$V(t) = R.\left(C.\frac{dV_c(t)}{dt}\right) + L\,\frac{d\left(\frac{C\,dV_c(t)}{dt}\right)}{dt} + V_c(t)$$

$$V(t) = R.\left(\frac{C\,dV_c(t)}{dt}\right) + L\,C\,\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + V_c(t)$$

$$\boxed{V(t) = LC\left(\frac{d^2V_c(t)}{dt^2}\right) + RC\left(\frac{dV_c(t)}{dt}\right) + V_c(t).}$$

¡EDO 2do Orden!

$\boxed{\text{Aplicamos T.L}}$

$$\mathcal{L}[v(t)] = \mathcal{L}\left[LC\left(\frac{d^2 V_c(t)}{dt}\right) + RC\left(\frac{dV_c(t)}{dt}\right) + V_c(t)\right]$$

$$\mathcal{L}[v(t)] = LC.\mathcal{L}\left[\frac{d^2 V_c(t)}{dt}\right] + RC\mathcal{L}\left[\frac{dV_c(t)}{dt}\right] + \mathcal{L}[V_c(t)].$$

$\boxed{\text{Formulas T.L}}$ Recordar que $t \longrightarrow s$

$$\mathcal{L}''[v_c(t)] = S^2 V_c(s) - S V_c(0) - V_c'(0)$$

$$\mathcal{L}'[v_c(t)] = S V_c(s) - V_c(0)$$

$$\mathcal{L}[v_c(t)] = V_c(S) \quad ; \quad \mathcal{L}[v(t)] = V(S)$$

$\boxed{\text{Reescribiendo}}$

$$V(s) = LC\left[S^2 V_c(s) - S V_c(0) - V_c'(0)\right] + RC\left[S V_c(s) - V_c(0)\right] + V_c(s)$$

$\boxed{\text{CI Nulas}} \longrightarrow V_c(0) = V_c'(0) = 0.$

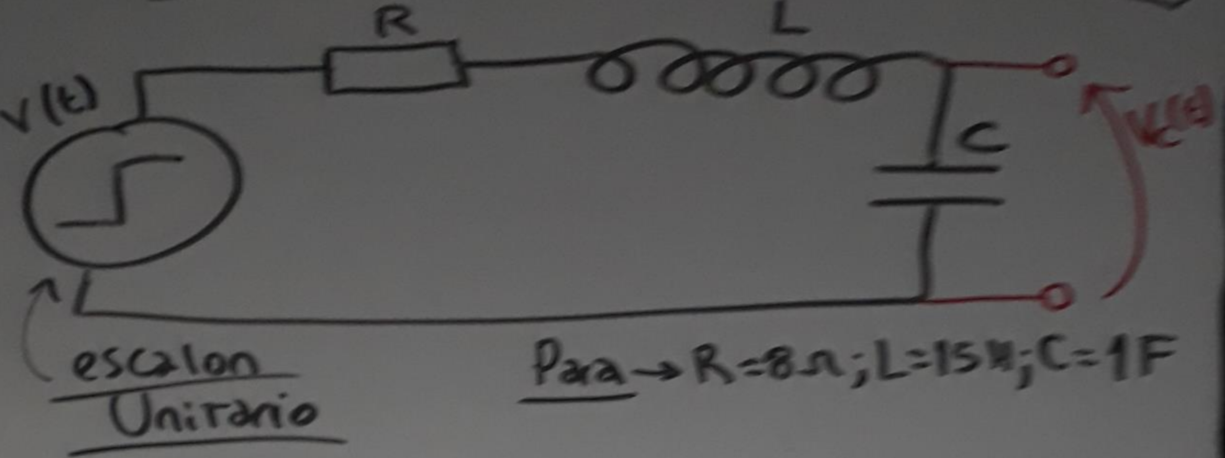
$\boxed{\text{Sustituimos}}$

$$V(S) = LC\left[S^2 V_c(s)\right] + RC\left[S V_c(S)\right] + V_c(S).$$

$$V(S) = V_c(S)\left(LC.S^2 + RCS + 1\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{(LCS^2 + RCS + 1)} = \frac{V_c(S)}{V(S)}}$$

16B **Función de Transferencia Circuito RLC entrada escalon Unitario**



Para → $R = 8\,\Omega$; $L = 15\,H$; $C = 1\,F$

Ya Obtuvimos la Función de Transferencia del Circuito RLC

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{(15)(1)s^2 + (8)(1)s + 1}$$

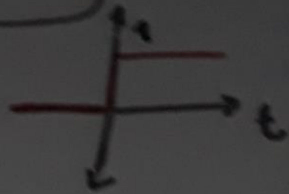
$$\boxed{\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{15s^2 + 8s + 1}}$$

Supongamos con C.I

$V_c(0) = 0$; $V_c'(0) = 0$

Sabiendo que en la entrada tenemos un Escalon Unitario

$$v(t)=u(t)=1(t)\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$



Fórmula TP

Escalon Unitario $\longrightarrow L[v(t)]=\frac{1}{s}$

$$\boxed{V(s)=\frac{1}{s}}$$

Reescribiendo y reemplazando V(s)

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{1}{15s^2+8s+1}$$

$$V_c(s)=\frac{1}{15s^2+8s+1}\cdot V(s)$$

$$V_c(s)=\frac{1}{15s^2+8s+1}\cdot\frac{1}{s}$$ / Factorizamos

$$\boxed{V_c(s)=\frac{1}{(5s+1)(3s+1)s}}$$

Aplicamos Fracciones Parciales Para la Transformada inversa

$$L^{-1}[V_c(s)]$$

Antitransformamos

$$L^{-1}[V_c(s)] = \frac{1}{(5s+1)(3s+1)(s)}$$

$$\frac{A}{5s+1} + \frac{B}{3s+1} + \frac{C}{s}$$

$$\frac{1}{(5s+1)(3s+1)(s)} = \frac{A}{5s+1} + \frac{B}{3s+1} + \frac{C}{s}$$

$$1 = \frac{A}{5s+1} + \frac{B}{3s+1} + \frac{C}{s}\left[(5s+1)(3s+1)(s)\right]$$

$$1 = \frac{A}{\cancel{5s+1}}\left[(\cancel{5s+1})(3s+1)(s)\right] + \frac{B}{\cancel{3s+1}}\left[(5s+1)(\cancel{3s+1})(s)\right]$$

$$\frac{C}{\cancel{s}}\left[(5s+1)(3s+1)(\cancel{s})\right]$$

$$1 = A(3s+1)(s) + B(5s+1)(s) + C(5s+1)(3s+1)$$

$$\boxed{1 = A(3s^2+s) + B(5s^2+s) + C(15s^2+5s+3s+1)}$$

$$s=0;\ s=-1;\ s=1$$

$\boxed{s=0}$

$$1 = A(0) + B(0) + C(1)$$

$$\boxed{1=C}$$

$\boxed{s=-1}$

$$1 = A\left[3(-1)^2+(-1)\right] + B\left[5(-1)^2+(-1)\right] + C\left[15(-1)^2+8(-1)+1\right]$$

$$1 = A(3-1) + B(5-1) + C(15-8+1)$$

$$1 = 2A + 4B + 8C \quad / \quad C=1$$

$$1 = 2A + 4B + 8$$

$$\frac{1-8-4B}{2} = A$$

$$\boxed{\frac{-7-4B}{2} = A}$$

$\boxed{s=1}$

$$1 = A(3+1) + B(5+1) + C(15+8+1)$$

$$1 = 4A + 6B + 24C \quad \Big| \quad C=1,\ A = \frac{-7-4B}{2}$$

$$1 = 4\left(\frac{-7-4B}{2}\right) + 6B + 24$$

$$1 = 4\cdot\left(\frac{-7}{2}\right) + 4\left(\frac{-4B}{2}\right) + 6B + 24$$

$$1 = -14 - 8B + 6B + 24$$

$$1 = -2B + 10$$

$$\frac{1-10}{-2} = B \rightarrow \boxed{B = 9/2}$$

Tenemos $A=\frac{-7-4B}{2}$; $\boxed{B=\frac{9}{2}}$; $\boxed{C=1}$

$$A=\frac{-7-4(9/2)}{2}$$

$$\boxed{A=-25/2}$$

$$\frac{A}{5s+1}+\frac{B}{3s+1}+\frac{C}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{-25/2}{5s+1}+\frac{9/2}{3s+1}+\frac{1}{s}=V_c(s)}$$

$$V_c(s)=L^{-1}\left[\frac{-25/2}{5s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{9/2}{3s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$V_c(s)=\frac{-25}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{5s+1}\right]+\frac{9}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{3s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

Fórmulas T.L

$$L\left[\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\right]=\frac{1}{5s+1}\ ;\ L\left[\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}\right]=\frac{1}{3s+1}\ ;\ L[1]=\frac{1}{s}$$

Reemplazamos

$$V_c(s)=\frac{-\cancel{25}^{\,5}}{2}\left(\frac{1}{\cancel{5}}e^{-\frac{1}{5}t}\right)+\frac{\cancel{9}^{\,3}}{2}\left(\frac{1}{\cancel{3}}e^{-\frac{1}{3}t}\right)+1$$

$$\boxed{V_c(s)=-\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{5}t}+\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}t}+1}$$

17)