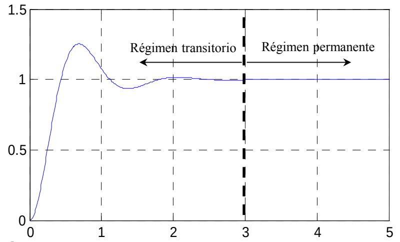
1. Introducción: Régimen transitorio vs. permanente

Todos los sistemas físicos presentan algún tipo de inercia (recordar 1ª Ley Newton).

⇩

La salida del sistema no alcanza el valor de la entrada de referencia instantáneamente sino que va evolucionando (*régimen transitorio*) antes de alcanzar un estado estacionario (*régimen permanente*).



Régimen transitorio vs. permanente (respuesta escalón)

Respuesta transitoria: Valor de la salida desde el estado inicial al estado final (una vez alcanzado el estado estacionario o régimen permanente).

Respuesta en estado estacionario: Valor de la salida conforme el tiempo → ∞.

Al analizar un sistema de control se debe examinar ambas respuestas.

Especificaciones de la respuesta transitoria:

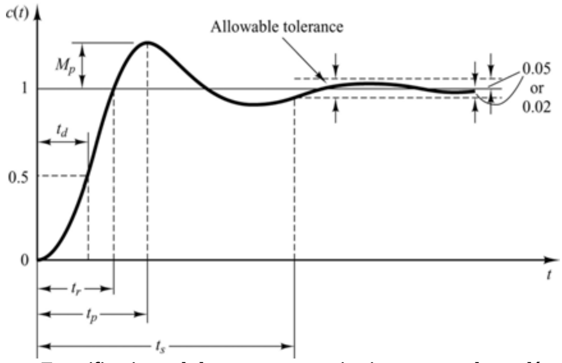
Definen la respuesta de un sistema.

Habitualmente se definen ante entrada escalón unitario.

Tiempo de retardo t_d: Tiempo necesario para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor ss.

Tiempo de subida t_r: Tiempo requerido para que la respuesta pase del 0 al 100% (10-90% en sistemas sobreamortiguados) de su valor ss.

Tiempo de pico t_p: Tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del rebose.



Especificaciones de la respuesta transitoria ante entrada escalón

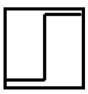
Sobreelongación o rebose máximo R: Valor pico máximo de la curva de respuesta medido a partir de la unidad.

Tiempo de asentamiento t_s: Tiempo requerido para que la curva de respuesta llegue y permanezca en un entorno del 2 ó 5% del valor ss.

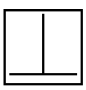
2. Tipos de señales de entrada

En el análisis y diseño de sistemas de control, se utilizan señales de entrada de prueba particulares y se estudia la respuesta del sistemas a esas señales.

Las señales de prueba más utilizadas son las siguientes (por este orden):

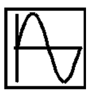


Escalón: Emula la respuesta del sistema ante un cambio brusco (entrada o perturbaciones). La más utilizada en todo tipo de sistemas.



Impulso: Emula la respuesta del sistema a entradas de choque.

Rampa: Emula la respuesta del sistema a cambios graduales en el tiempo (también parábolas en función del cambio en el tiempo deseado).

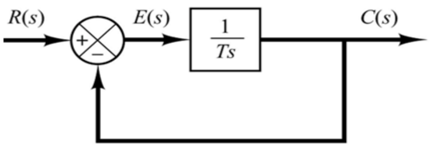


Senoidal: Emula la respuesta del sistema a cambios periódicos o de naturaleza oscilatoria.

3. Régimen transitorio

3.1. Respuesta de sistemas de primer orden

Considérese el sistema dado por la figura:

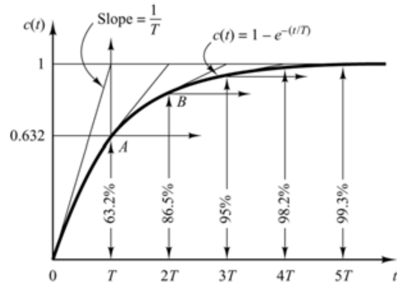


Sistema de 1er orden

Cuya Función de Transferencia viene dada por: $\frac{C(s)}{R(s)} =$ HACER!!! (30s)

Si se observa evolución de esta respuesta se puede ver que:

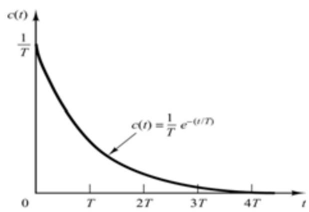
- La pendiente en *t=0*: $\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{T}e^{-t/T} = \frac{1}{T}$.
- A ↓ cte. de tiempo T ⇨ Sistema más rápido.
- Para *t=4T* ha alcanzado el 98% del valor final. Para sistemas de primer orden se suele medir el *tiempo de respuesta* por el tiempo de asentamiento (hasta alcanzar un entorno del 2 ó 5% del valor final).



Respuesta escalón de un sistema de 1er orden

Respuesta impulso unitario de sistemas de 1er orden

Dado que la T.L. de un impulso unitario es 1, la respuesta del sistema viene dada por $C(s) = \frac{1}{Ts+1}$, cuya antitransformada es: $c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$, que como puede observarse sigue una exponencial decreciente de valor $1/T$ para *t=0*.

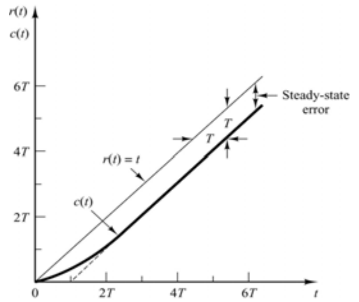


Resp. impulso de un sistema de 1er orden

Respuesta rampa unitaria de sistemas de 1er orden

Dado que la T.L. de una rampa unitaria es $1/s^2$, la respuesta del sistema viene dada por:

$C(s)=\dfrac{1}{Ts+1}\dfrac{1}{s^2}$, que expandiendo en fracciones parciales: HACER!!!

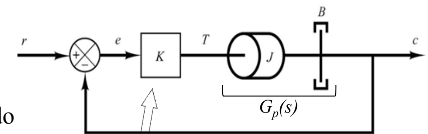


Respuesta rampa de un sistema de 1er orden

3.2. Respuesta de sistemas de segundo orden

Considérese, a modo de ejemplo representativo, el sistema dado por la figura:

consistente en un controlador proporcional encargado de que la posición *c(t)* siga la referencia *r(t)*, y los elementos de carga de un servomotor (inercia + fricción viscosa).



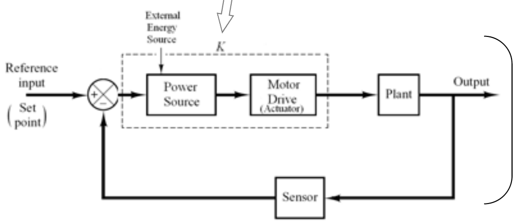
Sistema de 2º orden: Servosistema

La ec. de la planta viene dada por: $\sum T = J\,\alpha$

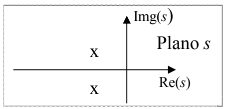
⇨ $T - B\dot{c} = J\ddot{c}$, donde T es el torque proporcionado por el controlador, con lo cual la F.T. de la planta suponiendo c.i. nulas es: $G_p(s)=\dfrac{C(s)}{T(s)}=$ HACER!!! (30s)

Obs.: Recordar Pto. 3 Tema 3:

El diagrama de bloques "- Solo interrelaciona señales, la fuente de energía para seguir esa relación no se muestra explícitamente (e.g. control proporcional)." ⇨



Respuesta escalón unitario de sistemas de 2º orden



Se considerarán 3 casos en función del amortiguamiento del sistema:

Sist. 2º orden subamortiguado $(0 < \varsigma < 1)$***:***

El sist. 2º orden tiene dos polos comp. conjugados: $s_{1,2} = -\varsigma\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2} = -\varsigma\omega_n \pm j\omega_d$

donde ω_d: *Frecuencia natural amortiguada*. De forma que: $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n + j\omega_d)(s+\varsigma\omega_n - j\omega_d)}$

Dado que la T.L. de un escalón unitario es $1/s$, la respuesta del sistema viene dada por:

$C(s) = \dfrac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2)s}$, cuya antitransf. para $0<\varsigma<1$: $c(t) = 1 - \dfrac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}\right)$.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ y sust. ω_d que es justo la F.T. sist. 2º orden · 1/s

Tablas, entrada 24

OJO: $\tan^{-1}$ = arctan ≠1/tan

Observar que la salida es oscilatoria con frecuencia ω_d.

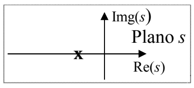
Se puede observar también que la señal de error $e(t) = r(t) - c(t) = \dfrac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}\right)$ se hace 0 cuando $t\to\infty$.

Y que si el sistema no tuviera ningún amortiguamiento de ningún tipo $(\varsigma = 0)$ oscilaría con su ω_n:

$c(t) = 1 - \sin\left(\omega_d t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos(\omega_d t) = 1 - \cos(\omega_n t)$. En este caso sí ∃ un e_{ss} debido a la oscilación.

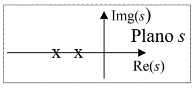
(polos imaginarios puros⇨ sistema críticamente estable (Tema 7: L.R.))

Sist. 2º orden críticamente amortiguado $(\varsigma = 1)$***:***



El sist. 2º orden tiene un polo doble: $s_{1,2} = -\omega_n$.

La respuesta del sistema viene dada por: $C(s) = \dfrac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s}$, cuya antitransformada (entrada 18 tablas): $c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$.



Sist. 2º orden sobreamortiguado $(\varsigma > 1)$***:***

El sist. 2º orden tiene polos reales negativos también pero diferentes: $s_{1,2} = -\varsigma\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}$.

La respuesta del sistema viene dada por: $C(s) = \dfrac{\omega_n^2}{\left(s+\varsigma\omega_n + \omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}\right)\left(s+\varsigma\omega_n - \omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}\right)s}$,

cuya antitransformada (entrada 17 tablas): $c(t) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{\varsigma^2-1}\left(\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1}\right)}e^{-\left(\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1}\right)\omega_n t} - \dfrac{1}{2\sqrt{\varsigma^2-1}\left(\varsigma-\sqrt{\varsigma^2-1}\right)}e^{-\left(\varsigma-\sqrt{\varsigma^2-1}\right)\omega_n t}$

corresponde a dos exponenciales que decaen.

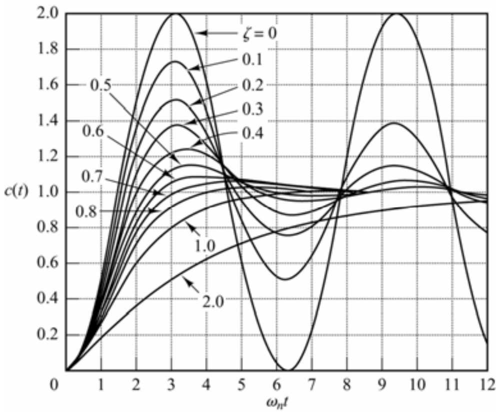
Siempre una de ellas decae más rápido que la otra, que puede despreciarse (e.g., si ς es apreciablemente >1, el primer término decae muy rápido y puede despreciarse), de manera que el sistema presenta un solo polo y puede asimilarse a un sistema de primer orden.

Tema 4: Régimen Transitorio y Permanente

Las respuestas de los tres casos se pueden dibujar para diferentes amortiguamientos.

Se puede observar que:

- Un sistema subamortiguado es más rápido que uno crít. amortiguado o sobreamortiguado. En particular para $0.5 \le \varsigma \le 0.8$ el tiempo en llegar al ss es similar al $\varsigma = 1$, y presentan una respuesta más rápida (y un pequeño rebose).
- Entre los sistemas que responden sin oscilación, el crít. amortiguado presenta la respuesta más rápida. Los sistemas subamortiguados resultan lentos para muchas aplicaciones.



Respuesta escalón de un sistema de 2º orden

Tema 4: Régimen Transitorio y Permanente

Especificaciones de la respuesta transitoria para sistemas de 2º orden:

Considérese la respuesta escalón de un sistema de 2º orden con oscilaciones (subamortiguada) hallada anteriormente:

$$c(t) = 1 - \overset{(1)}{\frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}\right) \overset{(2)}{=} 1 - e^{-\varsigma\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\omega_d t\right)$$

sin(a+b)=sin a cos b + cos a sin b

de **(1)** y puesto que $e^{-\varsigma\omega_n t} \neq 0$

Tiempo de subida t_r: $c(t_r)=1 \Rightarrow \sin\left(\omega_d t_r + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}\right) = 0 \Rightarrow t_r = \frac{-1}{\omega_d}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}$

de **(2)**

Tiempo de pico t_p: $\frac{dc(t_p)}{dt} = 0 \Rightarrow \varsigma\omega_n e^{-\varsigma\omega_n t_p}\left(\cos\omega_d t_p + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\omega_d t_p\right) + e^{-\varsigma\omega_n t_p}\left(\omega_d \sin\omega_d t_p - \frac{\varsigma\omega_d}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\cos\omega_d t_p\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}} e^{-\varsigma\omega_n t_p}\sin\omega_d t_p = 0 \Rightarrow \sin\omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \ldots \Rightarrow t_p = \frac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Obs.: Existe un pico para $k=0 \Rightarrow t_p=0$
$\Rightarrow$ la pte. en el origen es nula

Sobreelongación o rebose máximo R: Se da en el primer pico y se mide sobre el valor en estado estacionario ⇨ de (2)

$$R = c(t_p) - 1 = -e^{-\varsigma\omega_n(\pi/\omega_d)}\left(\cos\pi + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\pi\right) = e^{-\pi\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}$$

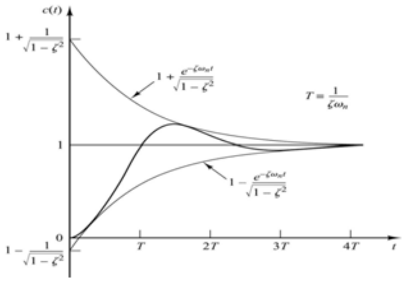
Tiempo de asentamiento t_s: Observando la gráfica de la respuesta del sistema hallada anteriormente, se ve que se trata de una sinusoide modulada por dos exponenciales.

Se puede demostrar gráficamente que el t_s en este tipo de sistemas viene dado por:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\varsigma\omega_n} \quad \text{(criterio del 2\%)}$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\varsigma\omega_n} \quad \text{(criterio del 5\%)}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}\right)$$



Resp. escalón de un sist. 2º orden subamortiguado

Respuesta impulso unitario de sistemas de 2º orden

Sist. 2º orden subamortiguado **($0 < \varsigma < 1$):**

Como se ha visto, el sist. 2º orden tiene dos polos comp. conjugados: $s_{1,2} = -\varsigma\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2} = -\varsigma\omega_n \pm j\omega_d$

De forma que: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n + j\omega_d)(s+\varsigma\omega_n - j\omega_d)}$, y dado que la T.L. del impulso unitario es 1, la respuesta del sistema es justo la F.T. del sist. 2º orden: $C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2)}$, cuya antitransf. para 0<ς<1 (entrada 22 tablas): $c(t) = e^{-\varsigma\omega_n t}\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}\,t$.

Sist. 2º orden críticamente amortiguado **($\varsigma = 1$):**

El sist. 2º orden tiene un polo doble: $s_{1,2} = -\omega_n$.

La respuesta del sistema viene dada por: $C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$, cuya antitransformada (entrada 7 tablas): $c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$.

***Sist. 2º orden sobreamortiguado* ($\varsigma > 1$):**

Sist. 2º orden polos reales negativos diferentes: $s_{1,2} = -\varsigma\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}$.

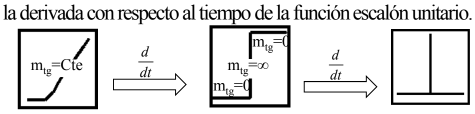
La respuesta del sistema viene dada por: $C(s) = \dfrac{\omega_n^2}{\left(s+\varsigma\omega_n+\omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}\right)\left(s+\varsigma\omega_n-\omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}\right)}$,

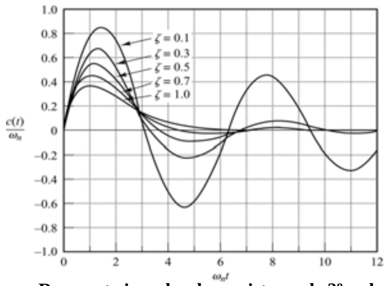
cuya antitransformada (entrada 17 tablas): $c(t) = \dfrac{\omega_n}{2\sqrt{\varsigma^2-1}}e^{-\left(\varsigma-\sqrt{\varsigma^2-1}\right)\omega_n t} - \dfrac{\omega_n}{2\sqrt{\varsigma^2-1}}e^{-\left(\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1}\right)\omega_n t}$.

La resp. impulso de un sistema 2º orden toma la forma que se muestra en la figura. Para el caso subamortiguado oscila en torno a cero, mientras que para los casos crít. amortiguado o sobreamortiguado no oscila y permanece siempre positiva.

Obs.: La respuesta impulso también se podía haber obtenido diferenciando la respuesta escalón unitario correspondiente, dado que la función impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función escalón unitario.

Recordar:





Respuesta impulso de un sistema de 2º orden

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco
Tema 4: Régimen Transitorio y Permanente

3.3. Respuesta de sistemas de orden superior

Considérese un sistema genérico cuya F.T. en LC es: $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$, que en general toma la forma de polinomios en s: $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{p(s)/q(s)}{1+p(s)/q(s)n(s)/d(s)} = \dfrac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$.

En principio, la respuesta ante cualquier entrada se obtiene mediante *simulación numérica*. Si se quiere obtener una *expresión analítica* se procederá de manera análoga a sist. 1^er y 2º orden:

- Factorizando el denominador (se puede utilizar Matlab -comando roots(den)-):

  $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$, cuya resp., e.g., escalón: $C(s) = \dfrac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)s}$

- Como paso previo a antitransformar, la expansión en fracciones parciales considerando el caso más general (polos reales y complejos) es de la forma:

  $$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{q}\frac{a_i}{s+p_i} + \sum_{k=1}^{r}\frac{b_k(s+\varsigma_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\varsigma_k^2}}{s^2+2\varsigma_k\omega_k s+\omega_k^2} \quad \text{con } q+2r=n \quad \text{(orden del sistema)}$$

  donde a_i, b_k y c_k son los residuos de los polos correspondientes (recordar Pto. 6 Tema 2).

OJO confusiones:
Polo=raíz
$1/(s+p)$ ⇨ Polo = - p

- La expresión en el dominio temporal de esta respuesta escalón es:

$$c(t) = a + \sum_{i=1}^{q} a_i e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\varsigma_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1-\varsigma_k^2}\, t + \sum_{k=1}^{r} c_k e^{-\varsigma_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1-\varsigma_k^2}\, t$$

Como se ve, la respuesta de un sistema de orden superior es la suma de las respuestas de sistemas de primer y segundo orden, esto es, suma de funciones exponenciales y funciones senoidales amortiguadas. Se observa que, los polos afectan a los términos exponenciales y/o a los términos senoidales amortiguados de la respuesta transitoria. Los ceros en cambio solo afectan a sus coeficientes (residuos) ⇨ *Los polos determinan el tipo de respuesta transitoria, mientras que los ceros modulan su forma.*

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el *semiplano izquierdo del plano s*, (i.e., todos los polos tienen parte real negativa), los términos exponenciales y los términos senoidales amortiguados $\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ ⇨ La salida en ss $c(\infty)=a$ ⇨ Se dice que el sistema es *estable* (Tema 7).

Los polos alejados del eje imaginario tienen partes reales grandes y negativas ⇨ Los términos exponenciales correspondientes a estos polos $\rightarrow 0$ rápidamente. La distancia de un polo al eje imaginario está relacionada con la duración del transitorio producido por ese polo (↓distancia, ↓parte real, ↓decaimiento de la exponencial, ↑influencia en la respuesta del sistema). Los polos más cercanos al eje imaginario se denominan *polos dominantes.*

Como regla general si un polo está 5 veces más alejado del eje imaginario que otro, puede despreciarse. De igual manera, un polo apenas influye en el sistema si hay un cero cercano (se cancelan en la F.T.).

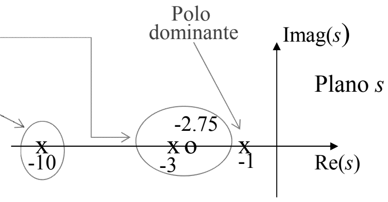
Las magnitudes de los residuos determinan la relevancia de los polos correspondientes: Si hay un cero cerca de un polo (cancelación polo-cero) el residuo en ese polo es pequeño. De la misma forma si un polo está muy alejado del origen su residuo es pequeño. Puesto que como se ha visto, los residuos son los coeficientes de los términos de respuesta transitoria, la contribución de estos términos a esta respuesta transitoria es pequeña y los polos correspondientes pueden despreciarse, de manera que es posible *aproximar un sistema de orden superior a uno de orden reducido solo con los polos y ceros relevantes*.

Ejemplo:

Dada la siguiente F.T.: $G(s)=\dfrac{s+2.75}{(s+1)(s+3)(s+10)}$, hállese su sistema equivalente simplificado.

Simplificaciones posibles:

1) Cancelación polo s=-3 con cero polo s=-2.75.
2) Polo s=-10 está alejado más de 5 veces del polo dominante (s=-1) ⇨ Se desprecia.



Por tanto el sistema equivalente será de primer orden: $\boxed{G(s)=\dfrac{0.092}{(s+1)}}$

donde se ha conservado la ganancia la ganancia del sistema original (Th. Valor Final: $\lim_{s\to 0}\left(sG(s)\frac{1}{s}\right)=\lim_{s\to 0}(G(s))=0.092$).

A modo de comprobación, la respuesta escalón del sistema inicial es: HACER!!!

Y la del sistema simplificado: HACER!!!

Recordar cálculo residuos (Tema 2): $a_k=\left[(s+p_k)\dfrac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$

4. Régimen permanente

4.1. Tipos de sistema

Los sist. control se pueden clasificar según su capacidad para seguir entradas escalón, rampa, parábola, etc. (las entradas reales en general pueden expresarse como combinación de estas entradas). Las magnitudes de los errores en estado estacionario producidos por estas entradas individuales indican la bondad del sistema.

Considérese un sist. control con la siguiente F.T. en LA:

$$G_{LA}(s)=G(s)H(s)=\frac{K(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

Recordar Pto. 5 Tema 2: $L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}$ ⇨ $\frac{1}{s}$ es un *integrador* en el dom. Laplace

donde el término s^N del denominador representa un polo de multiplicidad N en el origen. Un *sistema se denomina de tipo N* si éste es el número de integradores de la F.T. en LA (OJO: tipo ≠ orden).

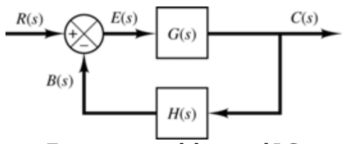
Conforme ↑ tipo de un sistema, ↑ precisión pero ↓ estabilidad (polo en el origen). E.g.: acción integral PID (Tema 6). ⇨ Es necesario un equilibrio entre precisión (error) en ss y estabilidad (dinámica oscilat.). En la práctica, es raro tener sistemas de tipo 3 o sup. pues suelen ser inestables.

4.2. Coeficientes de e_{ss}

Considérese el sist. de control de la figura donde cuya F.T. LC es: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$.

Y la de la señal de error respecto de la entrada:

$\frac{E(s)}{R(s)} =$ HACER!!! (30seg)



Esquema general de control LC

A continuación se definen los diferentes coeficientes de e_{ss} en función del tipo de entrada. En general cuanto más altos son estos coef., menor es el e_{ss}.

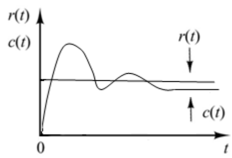
Observar que se denomina posición a la salida del sistema y velocidad a la razón de cambio de ella con independencia de la naturaleza física de las señales. (e.g., sist. térmico ⇨ posición = Tª).

Coeficiente estático de error de posición (K_p)

El e_{ss} de un sistema frente a entrada escalón unitario es:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)H(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)}$$

$$= \frac{1}{1+G(0)H(0)} = \frac{1}{1+K_p}$$



Respuesta escalón de sist. tipo 0

Sist. tipo 0: $K_p = \lim_{s\to 0}\frac{K(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K \quad ⇨ \quad e_{ss} = 1/(1+K)$

Sist. tipo 1 o superior: $K_p = \lim_{s\to 0}\frac{K(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty; \quad N \geq 1 \quad ⇨ \quad e_{ss} = 0$

En general, si no existe ningún integrador en el LA (sistema tipo 0), va a existir e_{ss} frente a entrada escalón.

Coeficiente estático de error de velocidad (K_v)

El e_{ss} de un sistema frente a entrada rampa unitaria es:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sG(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v}$$

Respuesta rampa de sist. tipo 1

Sist. tipo 0: $K_v = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = 0 \;\Rightarrow\; e_{ss} = \infty$

Sist. tipo 1: $K_v = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K \;\Rightarrow\; e_{ss} = 1/K$

Sist. tipo 2 o superior: $K_v = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty;\; N\geq 2 \;\Rightarrow\; e_{ss} = 0$

Un sistema de tipo 0 es incapaz de seguir una entrada rampa en ss.

Un sist. de tipo 1 sigue la entrada rampa con un e_{ss} finito (i.e., la salida presenta la misma velocidad -misma pte.- que la entrada, pero siempre con un error).

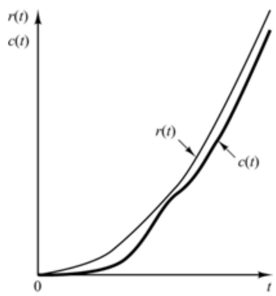
Tema 4: Régimen Transitorio y Permanente

Coeficiente estático de error de aceleración (K_a)

El e_{ss} de un sistema frente a entrada parábola unitaria:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a}$$

OJO: $L^{-1}[1/s^3] = t^2/2$ (tablas)



Respuesta parábola sist. tipo 2

Sist. tipo 0: $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2K(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = 0 \;\Rightarrow\; e_{ss} = \infty$

Sist. tipo 1: $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2K(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = 0 \;\Rightarrow\; e_{ss} = \infty$

Sist. tipo 2: $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2K(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K \;\Rightarrow\; e_{ss} = 1/K$

Sist. tipo 3 o superior: $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2K(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty;\; N\geq 3 \;\Rightarrow\; e_{ss} = 0$

Tanto los sistemas de tipo 0 como los de tipo 1 son incapaces de seguir una entrada parábola en ss.

Un sist. de tipo 2 sigue la entrada parábola con e_{ss} finito (i.e., la salida presenta la misma aceleración -misma derivada 2ª- que la entrada, pero siempre con un error).

Tema 4: Régimen Transitorio y Permanente

Tabla resumen: e_{ss} en función del tipo de sistema y tipo de entrada (en términos de la ganancia del sist. en LA)

	Step Input $r(t) = 1$	Ramp Input $r(t) = t$	Acceleration Input $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Type 0 system	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Type 1 system	0	$\frac{1}{K}$	∞
Type 2 system	0	0	$\frac{1}{K}$

A mayor tipo de sistema, mayor capacidad de eliminar e_{ss} ante entradas de más alto orden (más cambiantes) ⇨ Para eliminar un e_{ss} se puede incrementar el tipo del sistema agregando uno o más integradores al LA. PROBLEMA: ↓ estabilidad ⇨ Peor transitorio del sistema.

Tema 4: Régimen Transitorio y Permanente