

# Teoría de los Circuitos I

Roberto Gastón Araguás

2 de octubre de 2014



# Índice general

<b>1. Fundamentos</b>	<b>9</b>
1.1. Circuito idealizado	10
1.1.1. Resistencia - Ley de Ohm	10
1.1.2. Autoinductancia - Ley de Faraday	11
1.1.3. Capacitancia	13
1.1.4. Fuentes ideales de tensión o corriente	14
1.2. Leyes de Kirchhoff	15
1.2.1. Ley de Kirchhoff de las corrientes	15
1.2.2. Ley de Kirchhoff de las tensiones	17
1.3. Asociación equivalente de elementos	18
1.3.1. Elementos en serie	18
1.3.2. Elementos en paralelo	20
1.4. Potencia y energía	20
1.4.1. Resistor	21
1.4.2. Inductor	21
1.4.3. Capacitor	22
<b>2. Señales</b>	<b>23</b>
2.1. Señales de excitación variables	23
2.1.1. Señales periódicas	23
2.1.2. Señales pseudoperiódicas	23
2.1.3. Señales aperiódicas	24
2.2. Parámetros característicos de una señal variable	24
2.3. Valores asociados a la amplitud	25
2.3.1. Valor instantáneo	25
2.3.2. Valor máximo	26
2.3.3. Valor pico a pico	26
2.3.4. Valor medio	26
2.3.5. Valor medio de módulo o absoluto	27
2.3.6. Valor eficaz	27
2.3.7. Factores característicos de señales periódicas	29
2.4. Señales periódicas de uso común	29
2.4.1. Rectangular	30

2.4.2.	Cuadrada . . . . .	31
2.4.3.	Diente de sierra . . . . .	31
2.4.4.	Triangular . . . . .	31
2.4.5.	PWM (Pulse Wide Modulation) . . . . .	31
2.5.	Señales aperiódicas fundamentales . . . . .	31
2.5.1.	Impulso o delta de Dirac . . . . .	32
2.5.2.	Escalón unitario . . . . .	32
2.5.3.	Rampa unitaria . . . . .	33
2.6.	Construcción de señales aperiódicas usando fundamentales . . . . .	34
2.6.1.	Pulso rectangular . . . . .	34
2.6.2.	Pulso triangular . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>Sistemas de primer y segundo orden</b>	<b>37</b>
3.1.	Sistemas de primer orden . . . . .	37
3.1.1.	Circuito sin fuente . . . . .	37
3.1.2.	Circuito $RL$ sin fuente . . . . .	38
3.1.3.	Circuito $RC$ sin fuente . . . . .	40
3.2.	Constante de tiempo $\tau$ . . . . .	42
3.2.1.	Potencia y energía . . . . .	44
3.3.	Respuesta a una fuente constante . . . . .	45
3.3.1.	Circuito $RC$ con fuente constante . . . . .	45
3.4.	Sistemas lineales . . . . .	49
3.5.	Resolución por superposición . . . . .	50
3.6.	Respuesta natural más forzada . . . . .	51
3.7.	Respuesta a una fuente no constante . . . . .	52
3.8.	Alimentación con fuente sinusoidal. Corriente alterna . . . . .	53
3.9.	Sistemas de segundo orden . . . . .	56
3.9.1.	Solución natural . . . . .	58
3.9.2.	Condiciones iniciales . . . . .	64
3.9.3.	Solución forzada . . . . .	65
3.9.4.	Soluciones linealmente dependientes . . . . .	66
3.10.	Sistemas de orden superior . . . . .	67
3.10.1.	Solución natural . . . . .	67
<b>4.</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>69</b>
4.1.	Transformada de Laplace . . . . .	69
4.1.1.	Definición . . . . .	69
4.1.2.	Propiedades de la transformada . . . . .	71
4.2.	Aplicación a la resolución de circuitos . . . . .	76
4.2.1.	Función de transferencia . . . . .	79
4.2.2.	Circuito equivalente de Laplace . . . . .	81
4.2.3.	Teorema del valor inicial . . . . .	84
4.2.4.	Teorema del valor final . . . . .	85
4.3.	Antitransformada o transformada inversa de Laplace . . . . .	86

4.3.1. Desarrollo en fracciones parciales . . . . .	87
4.3.2. Fórmula de Heaviside . . . . .	89
4.4. Respuesta al impulso . . . . .	90
4.5. Teorema de convolución . . . . .	92
<b>5. Método fasorial . . . . .</b>	<b>97</b>
5.1. Cálculo fasorial . . . . .	97
5.1.1. Fundamentación . . . . .	97
5.1.2. Fasor y fasor armónico . . . . .	98
5.1.3. Fasor eficaz . . . . .	99
5.1.4. Transformada fasor . . . . .	99
5.2. Relación tensión-corriente fasorial . . . . .	100
5.2.1. Resistor . . . . .	100
5.2.2. Inductor . . . . .	102
5.2.3. Capacitor . . . . .	102
5.3. Resolución de circuitos usando fasores . . . . .	103
5.4. Impedancia y admitancia compleja . . . . .	104
5.4.1. Conversión impedancia-admitancia . . . . .	106
5.4.2. Asociación de impedancias . . . . .	107
5.4.3. Diagrama fasorial . . . . .	107
5.5. Potencia . . . . .	108
5.5.1. Potencia instantánea . . . . .	108
5.5.2. Potencia activa, reactiva y aparente . . . . .	111
5.5.3. Triángulo de potencias . . . . .	112
5.5.4. Potencia compleja $\mathbf{S}$ . . . . .	113
5.5.5. Factor de potencia . . . . .	113
5.5.6. Corrección del factor de potencia . . . . .	114
5.6. Señales poliarmónicas . . . . .	115
<b>6. Resolución sistemática de circuitos . . . . .</b>	<b>117</b>
6.1. Método de las corrientes en las mallas . . . . .	117
6.1.1. Generalización . . . . .	120
6.1.2. Impedancia de entrada, impedancia de transferencia . . . . .	121
6.2. Método de las tensiones en los nudos . . . . .	121
6.2.1. Generalización . . . . .	123
<b>7. Teoremas circuitales . . . . .</b>	<b>125</b>
7.1. Teorema de Thevenin . . . . .	125
7.2. Teorema de Norton . . . . .	127
7.2.1. Equivalente Thevenin-Norton . . . . .	127
7.2.2. Aplicación sucesiva Thevenin-Norton . . . . .	127
7.3. Teorema de sustitución, o teorema de Miller . . . . .	127
7.4. Teorema de compensación . . . . .	127
7.5. Teorema de reciprocidad . . . . .	128

7.6.	Teorema de Millman . . . . .	129
7.7.	Teorema de transferencia de potencia máxima . . . . .	130
7.7.1.	Carga resistiva pura . . . . .	130
7.7.2.	Carga genérica . . . . .	131
7.8.	Transformación estrella - triángulo . . . . .	132
7.8.1.	Cuadripolos equivalentes . . . . .	133
7.8.2.	Impedancias de entrada, salida y transferencia . . . . .	134
<b>8.</b>	<b>Resonancia</b>	<b>137</b>
8.1.	Resonancia en un circuito serie RLC simple . . . . .	137
8.1.1.	Variación de la impedancia . . . . .	138
8.1.2.	Análisis de admitancias . . . . .	139
8.2.	Sobretensión en circuitos serie resonantes . . . . .	140
8.3.	Ancho de banda . . . . .	142
8.3.1.	$AB$ en circuito $RLC$ serie . . . . .	143
8.4.	Factor $Q_0$ . . . . .	146
8.4.1.	Factor de sobretensión . . . . .	147
8.5.	Resonancia de un circuito paralelo de 2 ramas . . . . .	151
8.6.	Lugar geométrico . . . . .	153
8.6.1.	Elementos en serie . . . . .	154
<b>9.</b>	<b>Circuitos acoplados inductivamente</b>	<b>155</b>
9.1.	Autoinducción e inducción mútua . . . . .	155
<b>10.</b>	<b>Sistemas polifásicos</b>	<b>159</b>
10.1.	Sistema bifásico . . . . .	159
10.2.	Sistema trifásico . . . . .	161
10.2.1.	Generador en configuración estrella . . . . .	161
10.2.2.	Generador en configuración triángulo . . . . .	164
10.3.	Resolución de sistemas trifásicos perfectos . . . . .	165
10.3.1.	Cargas en configuración estrella . . . . .	165
10.3.2.	Cargas en configuración triángulo . . . . .	166
10.3.3.	Cálculo de potencias . . . . .	168
10.4.	Resolución de sistemas trifásicos deformados . . . . .	171
10.4.1.	Cargas desbalanceadas en estrella con cuatro conductores	171
10.4.2.	Cargas desbalanceadas en estrella con tres conductores	171
10.4.3.	Cargas desbalanceadas en configuración triángulo . . . . .	171
10.4.4.	Potencia en cargas desbalanceadas . . . . .	171
<b>A.</b>	<b>Ecuaciones diferenciales</b>	<b>173</b>

<b>B. Serie de Fourier</b>	<b>175</b>
B.1. Desarrollo de señales en serie de Fourier . . . . .	175
B.1.1. Serie en senos y cosenos . . . . .	175
B.1.2. Serie senoidal . . . . .	176
B.1.3. Serie compleja . . . . .	177
<b>C. Uso básico de Maxima</b>	<b>179</b>
C.1. Maxima/wxMaxima . . . . .	179
C.1.1. La interfaz gráfica wxMaxima . . . . .	179
C.2. Operaciones con Maxima . . . . .	180
C.2.1. Ecuaciones diferenciales . . . . .	183





# Capítulo 1

## Fundamentos

Cualquier problema eléctrico que involucre señales que varían en el tiempo puede ser completamente resuelto usando la teoría electromagnética descrita por las ecuaciones de Maxwell. Esta teoría analiza los campos eléctricos y magnéticos del problema, y la disposición geométrica de sus partes componentes.

Teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

1. las dimensiones del circuito son suficientemente pequeñas en comparación con la longitud de onda  $\lambda$  de las señales, y
2. los efectos de disipación y almacenamiento de energía en forma de campo eléctrico y magnético que se produce a lo largo de todo el circuito pueden ser reproducidos en elementos idealizados de dos terminales, que concentran dichos efectos

entonces se puede aplicar la llamada *Teoría de los circuitos* para su análisis y resolución.

La primera de estas condiciones implica que las tensiones y corrientes instantáneas medidas a lo largo de un cable pueden ser consideradas constantes para un determinado  $t$ , es decir que no haya diferencia debido al tiempo de propagación de la onda electromagnética en diferentes puntos de la línea. Entonces los parámetros se pueden aproximar

$$\begin{aligned}v(x, t) &\approx v(t) \\ i(x, t) &\approx i(t)\end{aligned}$$

Para un sistema con una frecuencia de  $50Hz$  por ejemplo, puede aplicarse el método con gran exactitud a circuitos de varios kilómetros de longitud. En cambio a frecuencias del orden de los  $GHz$ , se debe utilizar la teoría electromagnética cuando la dimensión del circuito supera el centímetro.

La segunda condición es una consecuencia directa de la primera, ya que si la señal puede considerarse constante a lo largo del circuito los efectos de

almacenamiento y disipación de energía pueden considerarse agrupados sin alterar el comportamiento del sistema. Los elementos utilizados para representar la disipación y el almacenamiento de energía se los llama resistencia, inductancia y capacitancia.

La *Teoría de los circuitos* consiste en la aplicación de una serie de leyes obtenidas de experimentos realizados a lo largo de la historia, utilizando un modelo idealizado de circuito.

## 1.1. Circuito idealizado

El modelo idealizado de circuito se obtiene al representar los procesos energéticos presentes en un circuito eléctrico mediante diferentes elementos ideales, considerando las dos condiciones antes mencionadas. Los parámetros distribuidos a lo largo del circuito real son reemplazados por resistencias, inductores y capacitores (parámetros concentrados), las conexiones se realizan con cables ideales y las fuentes de alimentación se reemplazan por fuentes ideales de tensión o corriente. Sobre estos elementos tienen lugar todos los posibles comportamientos de la energía en un circuito a baja frecuencia. En el resistor se produce la disipación de la energía al medio en forma irreversible, en el inductor se almacena la energía en forma de campo magnético y en el capacitor se almacena la energía en forma de campo eléctrico. Las fuentes son las que introducen la energía al circuito.

Para comenzar a estudiar los circuitos y las leyes que se utilizan en la *Teoría de los circuitos*, es necesario formular las siguientes definiciones respecto de la topología de los circuitos:

**Rama** porción de circuito comprendido entre dos puntos de conexión o terminales.

**Nudo o nodo** punto donde concurren varias ramas. Si concurren tres ramas o más se llama *nudo principal*.

**Malla o lazo** cualquier trayectoria cerrada dentro del circuito que resulte de recorrerlo en un mismo sentido regresando al punto de partida sin pasar dos veces por la misma rama.

A continuación presentaremos los elementos ideales que conforman un circuito idealizado. Los comportamientos físicos que estos elementos ideales representan fueron descubriéndose a lo largo de la historia de la ciencia mediante distintos experimentos, que dieron lugar a las hoy conocidas leyes de la electricidad, como por ejemplo la Ley de Ohm.

### 1.1.1. Resistencia - Ley de Ohm

Si consideramos una rama compuesta por un elemento resistivo puro, la corriente eléctrica que circula por ella y la diferencia de potencial o caída

de tensión que aparece entre sus extremos tienen una relación lineal, que depende del valor del elemento resistivo.

Esta relación se obtuvo inicialmente en forma empírica considerando elementos reales. El físico alemán Georg Ohm publicó en 1826 que para casi todos los conductores ensayados la caída de tensión entre los extremos era mayor cuando mayor era la longitud del cable, y que a su vez era proporcional a la corriente, dando lugar a la conocida *Ley de Ohm*<sup>1</sup>.

Originalmente fue formulada en su versión vectorial, que relaciona la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  con el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  mediante la conductividad  $\sigma$  del material

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1)$$

Su forma simplificada para el uso en *Teoría de los circuitos* es

$$v_R = R i_R \quad (1.2)$$

donde  $R$  es el elemento *concentrado* que representa el intercambio (disipación) de energía con el medio en un circuito idealizado.

Esta ley es válida para todos los metales, el factor de proporcionalidad  $R$  se llama *resistencia*, se mide en ohmios  $[\Omega]$  y depende de una propiedad del material llamada *resistividad*  $\rho$  (inversa de la conductividad  $\sigma$ ), de su longitud  $\ell$  y de su sección  $A$

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (1.3)$$

La ecuación (1.2) nos dice que a mayor corriente, mayor caída de tensión en  $R$ , es decir que la corriente debe atravesar al resistor entrando por el extremo de mayor potencial para que esta igualdad sea válida, como se muestra en la figura 1.1. Si una corriente  $\tilde{i}$  atraviesa al resistor desde su extremo de menor potencial, es decir que  $\tilde{i}_R = -i_R$ , entonces la relación tensión corriente con  $\tilde{i}_R$  será

$$\tilde{i}_R = -i_R = -\frac{v_R}{R} \quad (1.4)$$

### 1.1.2. Autoinductancia - Ley de Faraday

El científico estadounidense Joseph Henry mientras experimentaba con electroimanes notó que al circular corriente eléctrica por estos circuitos se producía un fenómeno similar a la cantidad de movimiento mecánico de los cuerpos en velocidad ( $p = Masa \times vel.$ ), es decir que esa corriente eléctrica

---

<sup>1</sup>Aunque se ha demostrado que en realidad esta ecuación fue descubierta 46 años antes en Inglaterra por Henry Cavendish.

tendía a seguir circulando de forma constante en el tiempo. Este fenómeno fue denominado *momento electrocinético* y se lo representó con la letra  $\lambda$

$$\lambda = L i_L \quad (1.5)$$

la constante de proporcionalidad  $L$ , al igual que la masa  $M$  de un cuerpo, es una característica del circuito. Esta constante  $L$  se denomina *autoinductancia* y su unidad de medida es el Henrio [ $H$ ].

Del mismo modo que para modificar la cantidad de movimiento  $p$  de un cuerpo se debe aplicar una fuerza  $F$ , Henry encontró que para modificar el momento electrocinético  $\lambda$  se debe aplicar una diferencia de potencial, es decir

$$v_L = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(L i_L)}{dt} \quad (1.6)$$

donde si  $L$  es invariante en el tiempo

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.7)$$

En forma independiente, en 1831 Michael Faraday desarrolló en Inglaterra su conocida teoría de la inducción electromagnética, en la cual utilizando el concepto de campo magnético y líneas de flujo descubrió que al someter un conductor a un campo variable, o al cortar con este las líneas de flujo del campo, se origina una circulación de corriente. Por otro lado Heinrich Lenz comprobó que la corriente tiende a mantener este flujo  $\Phi$ , originándose una f.e.m. inducida de signo opuesto a la variación de flujo

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.8)$$

por lo tanto el voltaje inducido, opuesto a la f.e.m. inducida será

$$v_L (= -\mathcal{E}) = \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.9)$$

En el caso que el flujo magnético sea producido por un arrollamiento de  $N$  espiras, la ecuación anterior queda multiplicada por  $N$

$$v_L = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.10)$$

Igualando los voltajes deducidos por Henry (ec. 1.7) y Faraday (ec. 1.10) se puede relacionar el momento electrocinético con el flujo magnético

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di_L}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt} \\ L i_L &= N \Phi \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N \Phi}{i_L} \end{aligned} \quad (1.11)$$

En la figura 1.1 se muestra la relación tensión corriente en un inductor según (1.7), es decir con la corriente entrante por el extremo de mayor potencial. Por el contrario, si una corriente  $\tilde{i}_L$  atraviesa al inductor entrando por el extremo de menor potencial, tal que  $\tilde{i}_L = -i_L$ , entonces la relación tensión-corriente será

$$v_L = -L \frac{d\tilde{i}_L}{dt} \quad (1.12)$$

Según la (1.7), una variación de corriente en el inductor provoca en sus extremos una tensión  $v_L$  proporcional a esta variación, es decir que cuando más brusca sea la variación mayor será la tensión inducida  $v_L$ . Esto significa que la corriente que atraviesa un inductor no puede presentar discontinuidades, pues una discontinuidad en la corriente induciría una tensión infinita en el elemento. Esta característica propia de los inductores se conoce como *condición de continuidad de corriente en el inductor*.

### 1.1.3. Capacitancia

El almacenamiento de energía en forma de campo eléctrico fue el efecto más tempranamente observado, el experimento se conoce como “botella de Leyden” y fue realizado en el año 1746. Se descubrió que aislando dos placas metálicas, una en el interior y otra en el exterior de la botella, se podían almacenar cargas eléctricas, lo que dio lugar al primer capacitor.

Mas tarde se encontró que la cantidad de cargas acumuladas era proporcional a la diferencia de potencial entre las placas

$$q = C v_C \quad (1.13)$$

La constante  $C$  se llama capacitancia y se mide en faradios ( $F$ ).

Recordando que la corriente eléctrica  $i$  es igual a la variación de cargas por tiempo, derivando (1.13) respecto al tiempo obtenemos la relación tensión - corriente en un capacitor

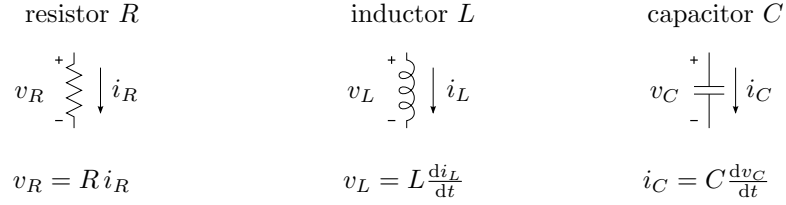
$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (1.14)$$

donde  $C$  es constante. En la figura 1.1 se muestra la relación dada por (1.14) con sus referencias. Si una corriente  $\tilde{i}_C = -i_C$  recorre el capacitor entrando por el extremo de menor potencial entonces la relación tensión corriente será

$$\tilde{i}_C = -C \frac{dv_C}{dt} \quad (1.15)$$

La relación tensión corriente (1.14) indica que una corriente en el capacitor provocará una variación de tensión en sus bornes, que será mayor cuanto mayor sea dicha corriente. Si se sigue incrementando la corriente la

variación de tensión será cada vez mayor, pero para valores reales de corrientes la variación será siempre finita. Por lo tanto la tensión a bornes del capacitor no puede ser discontinua, pues esto implica una corriente infinita, esto se conoce como *condición de continuidad de tensión en el capacitor*.



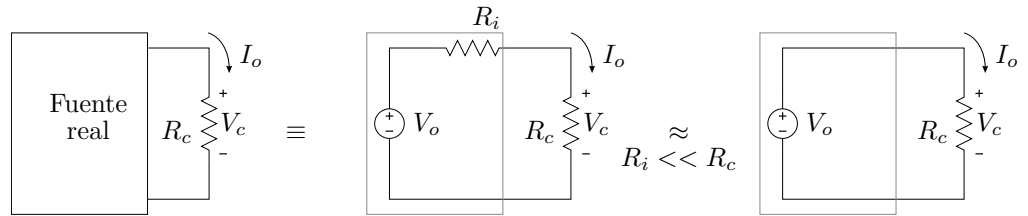
**Figura 1.1:** Relación tensión - corriente en los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$

#### 1.1.4. Fuentes ideales de tensión o corriente

Las fuentes ideales son las encargadas de aportar la energía al circuito. Una fuente ideal es un elemento capaz de proporcionar una tensión o corriente determinada, independiente de la carga. En cambio, una fuente real proporciona una tensión o corriente de salida que depende de la carga que esté alimentando. Esto se debe a que la corriente de salida debe atravesar la resistencia interna de la fuente, provocando una caída de tensión que se resta a la f.e.m. de la fuente.

Una fuente real puede ser representada entonces por una fuente ideal más una resistencia conocida como resistencia interna o resistencia de salida. Esta resistencia generalmente es considerada como parte del circuito de carga y por ende no se la dibuja asociada a la fuente.

Según sea el valor de la carga respecto de la resistencia de salida la fuente real se comporta manteniendo cuasi-constante la tensión o la corriente de salida



**Figura 1.2:** Fuente de tensión ideal

- Si la carga es mucho mayor a la resistencia de salida tal que (fig. 1.2)

$$I_o = \frac{V_o}{R_i + R_c}$$

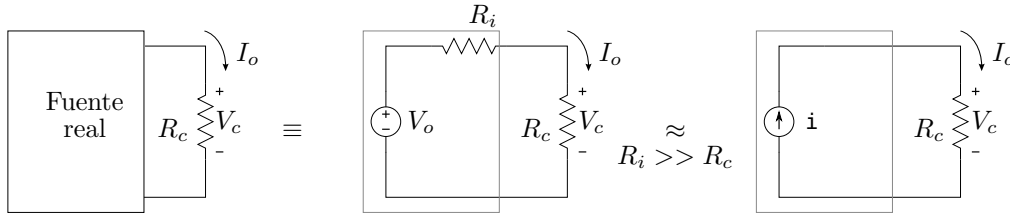
$$V_c = R_c I_o = V_o \frac{R_c}{R_i + R_c} \approx V_o \quad (1.16)$$

entonces la tensión aplicada se mantiene aproximadamente constante ante variaciones de la carga. Este comportamiento está representado por una fuente de tensión ideal cuyo símbolo se ve en la figura 1.2

- Si la resistencia de salida es mucho mayor a la carga que se está alimentando tal que

$$I_o = \frac{V_o}{R_i + R_c} \approx \frac{V_o}{R_i} \quad (1.17)$$

entonces la corriente de salida permanecerá aproximadamente constante ante las variaciones de carga. Esto se idealiza con una fuente de corriente, cuyo símbolo puede verse en la figura 1.3



**Figura 1.3:** Fuente de corriente ideal

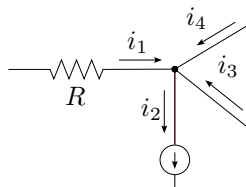
## 1.2. Leyes de Kirchhoff

Los parámetros físicos de interés en un circuito eléctrico son principalmente la tensiones entre nudos y las corrientes de rama. Conociendo estos parámetros se pueden determinar los elementos que conforman un circuito, realizar análisis de potencia y energía, estudiar los fenómenos transitorios, etc. La reglas o leyes que describen el comportamiento de estos parámetros en un circuito se las conoce como *leyes de Kirchhoff*.

### 1.2.1. Ley de Kirchhoff de las corrientes

Para representar una corriente eléctrica se necesitan un valor que represente su intensidad  $i$  más una referencia que especifica su sentido de

circulación, como se muestra en la fig. 1.4. La flecha indica el sentido positivo instantáneo que tendrá la corriente en un tiempo  $t$  dado, entonces una corriente que circula en el sentido de la flecha se la representa con un valor de intensidad  $i$  positivo, y una corriente que circula en sentido inverso se representa con un valor de intensidad negativo ( $i < 0$ ).



**Figura 1.4:** Ley de Kirchhoff de las corrientes

La ley de Kirchhoff de las corrientes (LKI), también llamada ley de los nudos, afirma que la sumatoria algebraica de las corrientes en un nudo es igual a cero

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \quad (1.18)$$

entendiéndose por suma algebraica a la suma de cada parámetro con su respectivo signo.

Luego, para realizar una sumatoria algebraica sobre un nudo se debe asignar un signo a cada corriente que indique si esta es entrante o saliente en el nudo<sup>2</sup>. Aplicando la LKI al nudo de la fig. 1.4 y tomando positivas a las corrientes entrantes al nudo tenemos:

$$i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

donde si por ejemplo  $i_1 = 3A$ ,  $i_2 = 5A$  e  $i_3 = 3A$ , entonces  $i_4$  deberá ser negativa

$$i_4 = -3 + 5 - 3 = -1A$$

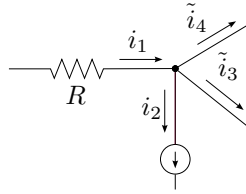
lo que significa que por la rama 4 circula una corriente de  $1A$  de sentido contrario al indicado por la flecha.

La elección de los sentidos de referencias de las corrientes es arbitraria, pero debe tenerse cuidado de elegirlos al principio del análisis y luego respetarlos durante todo el desarrollo. En efecto, si para el mismo problema elegimos las referencias como en la fig. 1.5 la ecuación de equilibrio del nudo

---

<sup>2</sup>No debe confundirse el signo asignado a cada corriente para realizar la sumatoria algebraica con el signo propio de cada corriente, el cuál indica si su sentido coincide o no con el de referencia.



**Figura 1.5:** Ley de Kirchhoff de las corrientes

será<sup>3</sup>

$$i_1 - i_2 - \tilde{i}_3 - \tilde{i}_4 = 0$$

luego, al tratarse de las mismas corrientes reales, la  $\tilde{i}_3$  valdrá  $-3A$  debido al cambio de referencia, y la  $\tilde{i}_4$  será

$$\tilde{i}_4 = 3 - 5 - (-3) = 1A$$

de donde  $i_4 = -\tilde{i}_4$ .

### 1.2.2. Ley de Kirchhoff de las tensiones

La ley de Kirchhoff de las tensiones (LKV), también llamada ley de las mallas, afirma que la suma algebraica de todas las fuerzas electromotrices aplicadas a lo largo de una malla es igual a la suma algebraica de todas las caídas de tensión en los elementos pasivos de esta malla. Se puede enunciar de forma más general sin diferenciar entre fuerzas electromotrices y elementos pasivos diciendo que la suma algebraica de las diferencias de potencial a lo largo de una malla es cero

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) = 0 \quad (1.19)$$

Recorriendo la malla de la fig. 1.6 en el sentido de la corriente  $i$  a partir del generador  $v_1$  y tomando como positivas las subidas de tensión<sup>4</sup>, la ecuación de circuito es

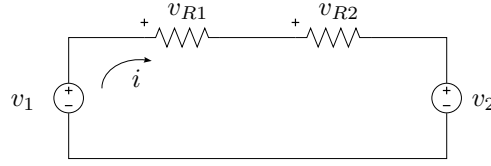
$$v_1 - v_{R1} - v_{R2} - v_2 = 0$$

Si por ejemplo se conocen las tensiones  $v_1 = 10V$ ,  $v_{R1} = 4V$  y  $v_{R2} = 16V$ , despejando  $v_2$  de 1.20 se tiene

$$v_2 = 10V - 4V - 16V = -10V$$

<sup>3</sup>Nótese que al cambiar las referencias de las variables se eligen nuevos nombres de función ( $\tilde{i}_3 \neq i_3$ , etc.) para remarcar que se tratan de diferentes funciones aunque representen el mismo parámetro físico

<sup>4</sup>La asignación de un signo determinado para las subidas o caídas de tensión es arbitrario y no altera la solución del problema, como se verá más adelante

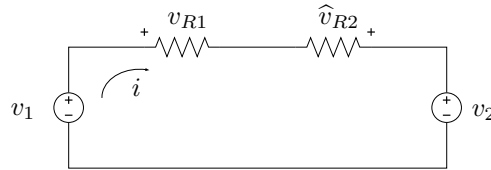
**Figura 1.6:** Ley de Kirchhoff de las tensiones

el signo menos indica que el generador  $v_2$  tiene polaridad opuesta a la indicada por la referencia.

Si se desea recorrer la malla en sentido contrario, o más aún, si se toma arbitrariamente la referencia de la tensión en el segundo elemento ( $R_2$ ) en forma contraria al caso anterior (ahora  $\hat{v}_{R2}$ ), obviamente que se debe arribar al mismo resultado. En efecto, sean las referencias como en la fig. 1.7, la nueva ecuación de equilibrio de la malla será

$$-v_1 + v_2 - \hat{v}_{R2} + v_{R1} = 0 \quad (1.20)$$

donde por tratarse del mismo problema, los valores de tensión son  $v_1 = 10V$ ,  $v_{R1} = 4V$  y  $\hat{v}_{R2} = -16V$ . Despejando  $v_2$  de 1.20 se tiene

**Figura 1.7:** Ley de Kirchhoff de las tensiones

$$v_2 = 10V + (-16V) - 4V = -10V$$

que coincide con el resultado obtenido anteriormente.

### 1.3. Asociación equivalente de elementos

Muchas veces aparecen en los circuitos ideales varios elementos de un mismo tipo que, aplicando las leyes de Kirchhoff, pueden asociarse en un único elemento de valor equivalente, de forma que no se modifiquen los parámetros eléctricos en el resto del circuito.

#### 1.3.1. Elementos en serie

Supongamos que una corriente  $i(t)$  circula por una rama de un circuito atravesando una serie de resistores  $R_i$  e inductores  $L_j$ . La suma algebraica

de las tensiones de cada elemento será igual a la tensión entre los extremos de la rama, es decir

$$\begin{aligned} v_{rama} &= v_{R_1} + v_{R_2} + v_{L_1} + v_{L_2} + v_{R_3} + \cdots + v_{R_N} + v_{L_M} \\ v_{rama} &= \sum_{i=1}^N v_{R_i} + \sum_{j=1}^M v_{L_j} \end{aligned} \quad (1.21)$$

suponiendo todas caídas de tensión para la corriente  $i(t)$ , la ecuación anterior se puede poner como

$$v_{rama} = \left( \sum_{i=1}^N R_i \right) i(t) + \left( \sum_{j=1}^M L_j \right) \frac{di(t)}{dt} \quad (1.22)$$

puesto que la corriente  $i(t)$  es común a todos los elementos por lo que puede sacarse como factor común de la sumatoria. Luego

$$v_{rama} = R_{eq} i(t) + L_{eq} \frac{di(t)}{dt} \quad (1.23)$$

es decir que un conjunto de resistores (o de inductores) en serie puede ser reemplazado por un único elemento de valor equivalente sin alterar los demás parámetros del circuito. El valor equivalente es igual a la suma de los valores de todos los elementos de la rama.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i \quad (1.24)$$

$$L_{eq} = \sum_{j=1}^M L_j \quad (1.25)$$

Consideremos ahora un conjunto de capacitores  $C_k$  conectados todos en serie que son atravesados por una corriente  $i(t)$ . Análogamente podemos expresar la sumatoria de las caídas de tensión de la rama de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v_{rama} &= \sum_{k=1}^N v_{C_k} \\ v_{rama} &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{C_k} \int i(t) dt \right) = \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k} \right) \int i(t) dt \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$v_{rama} = \frac{1}{C_{eq}} \int i(t) dt \quad (1.27)$$

es decir que el conjunto de capacitores puede ser reemplazado por uno equivalente tal que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k} \quad (1.28)$$

sin modificar los parámetros eléctricos de los demás componentes del circuito.

### 1.3.2. Elementos en paralelo

Por medio de un análisis similar al del párrafo anterior se pueden reemplazar varios elementos conectados en paralelo por uno equivalente de valor

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (1.29)$$

para el caso de resistores, o

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i} \quad (1.30)$$

para el caso de inductores, o

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (1.31)$$

para el caso de capacitores asociados en paralelo.

## 1.4. Potencia y energía

En un elemento o circuito en general, con una tensión  $v(t)$  en sus bornes y una corriente  $i(t)$  circulando por el, la potencia eléctrica  $p(t)$  en el elemento se define como

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1.32)$$

su unidad de medida es el vatio,  $[W]$ , y representa la velocidad de cambio de la energía. Si  $p(t) > 0$  entonces la energía en el circuito o elemento de circuito está aumentando, si  $p(t) < 0$  la energía está disminuyendo.

La integral de esta potencia instantánea es la energía  $w(t)$ , almacenada o disipada en el elemento según corresponda

$$w(t) = \int p(t)dt \quad (1.33)$$

cuya unidad de medida es el joule  $[J]$ , equivalente a  $[w.s]$ .

### 1.4.1. Resistor

En un elemento resistivo puro, la potencia instantánea será

$$p_R(t) = v_R(t)i_R(t) = Ri_R^2(t) = \frac{v_R^2(t)}{R} \quad (1.34)$$

como el valor de  $R$  es siempre mayor a cero, la potencia instantánea es siempre positiva ya que depende de la tensión o la corriente al cuadrado. Esto significa que la variación de energía en un resistor es siempre positiva (la función disipación de energía es monótona creciente), es decir que la energía en el elemento siempre aumenta debido a que se trata de un elemento que disipa energía al medio

$$w_R(t) = \int p_R(t)dt = R \int i_R^2(t)dt = \int \frac{v_R^2(t)}{R}dt \quad (1.35)$$

Por ejemplo, si se trata de una corriente de valor constante  $i_R(t) = I_0$ , la potencia y energía instantáneas serán

$$\begin{aligned} p_R(t) &= RI_0^2 \\ w_R(t) &= RI_0^2 t \end{aligned}$$

que como se ve la energía crece con  $t$ .

### 1.4.2. Inductor

Para un elemento inductivo puro la potencia instantánea será

$$p_L(t) = v_L(t)i_L(t) = Li_L(t)\frac{di_L(t)}{dt} \quad (1.36)$$

en general la corriente  $i_L(t)$  y su derivada pueden tener distinto signo, entonces habrá situaciones en las que la potencia instantánea será negativa. Este signo negativo de la potencia instantánea representa una disminución en la energía acumulada en el elemento.

La energía instantánea en un inductor será

$$w_L(t) = \int p_L(t)dt = L \int i_L(t)di_L(t) = \frac{1}{2}Li_L(t)^2 \quad (1.37)$$

es claro que la energía acumulada no puede tomar valores menores a cero, pero a diferencia de la energía disipada por un resistor, esta está limitada por los valores máximo y mínimo que pueda tomar el cuadrado de la corriente. Para un valor máximo de corriente  $I_{L_{max}}$  la energía acumulada en el inductor tomará su valor máximo y será igual a

$$W_{L_{max}} = \frac{1}{2}LI_{L_{max}}^2 \quad (1.38)$$

Si por ejemplo elegimos<sup>5</sup>  $i_L(t) = I_{L_{max}} e^{-\frac{t}{\tau}}$  tendremos

$$p_L(t) = -\frac{1}{\tau} L I_{L_{max}}^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L I_{L_{max}}^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

tomando ambas su valor máximo en  $t = 0$

$$P_{L_{max}} = -\frac{1}{\tau} L I_{L_{max}}^2$$

$$W_{L_{max}} = \frac{1}{2} L I_{L_{max}}^2$$

Más adelante, en la unidad que estudia los sistemas de primer orden, volveremos sobre este análisis con más detalle.

### 1.4.3. Capacitor

Para el caso de un capacitor la situación es similar a la del inductor, la energía almacenada instantánea no puede ser menor a cero pero si puede aumentar y disminuir, consecuentemente la potencia instantánea podrá tomar valores positivos y negativos. Las ecuaciones son

$$p_C(t) = v_C(t) i_C(t) = C v_C(t) \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (1.39)$$

$$w_C(t) = \int p_C(t) dt = \frac{1}{2} C v_C(t)^2 \quad (1.40)$$

$$W_{C_{max}} = \frac{1}{2} C V_{C_{max}}^2 \quad (1.41)$$

---

<sup>5</sup>Como veremos más adelante esta es una corriente muy comúnmente encontrada en un inductor ya que se trata de la respuesta natural de un sistema de primer orden.

## Capítulo 2

# Señales

Las señales más utilizadas en electrónica se pueden clasificar teniendo en cuenta su variación en el tiempo en *constantes* o *variables*. A su vez, según la regularidad de su variación temporal, se subdividen en *periódicas*, *pseudoperiódicas* y *aperiódicas*.

Las señales variables se las representa utilizando letras minúsculas como  $f(t)$ ,  $i(t)$  o  $v(t)$ , mientras que para señales invariantes en el tiempo se utilizan letras mayúsculas.

En este capítulo veremos algunas de las señales más utilizadas en electrónica, su clasificación y los parámetros que se utilizan para caracterizarlas. Luego presentaremos un conjunto de señales llamadas fundamentales que nos servirán para construir con ellas algunas formas de ondas definidas por tramos.

### 2.1. Señales de excitación variables

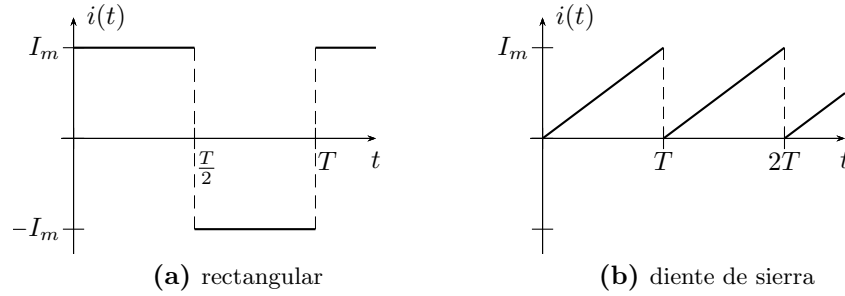
Una señal que varía en el tiempo se la representa utilizando letras minúsculas, y según la repetitividad de su variación podemos clasificarlas en periódicas, pseudoperiódicas o aperiódicas.

#### 2.1.1. Señales periódicas

Una señal periódica es una señal tal que luego de ocurrir una serie de valores determinados y en una secuencia dada, estos vuelven a repetirse de igual forma, cíclica e indefinidamente en el tiempo. La fig. 2.1 muestra dos ejemplos de señales periódicas.

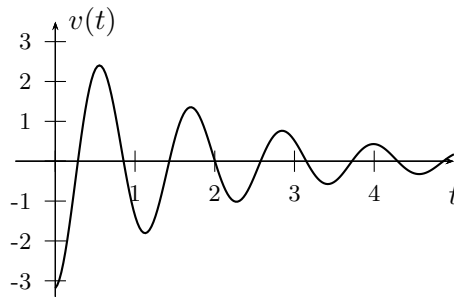
#### 2.1.2. Señales pseudoperiódicas

En las señales pseudoperiódicas ciertos arreglos de valores se repiten cíclicamente en el tiempo, pero con diferente amplitud. Estas señales son



**Figura 2.1:** Señales periódicas.

las obtenidas normalmente a partir de una atenuación variable de una señal periódica. En la figura 2.2 se muestra un ejemplo de este tipo.



**Figura 2.2:** Señal pseudoperiódica.

### 2.1.3. Señales aperiódicas

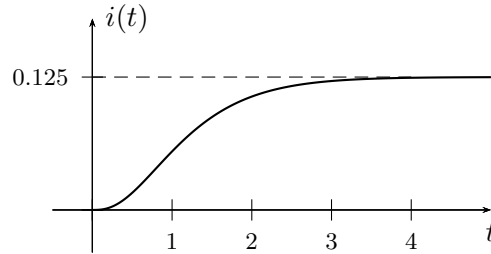
Son todas las restantes señales que varían con el tiempo, como la respuesta mostrada en la fig. 2.3.

## 2.2. Parámetros característicos de una señal variable

La siguiente nómina de parámetros son en general características de las señales periódicas y pseudoperiódicas.

**Período** tiempo mínimo que debe transcurrir para que ocurra una serie completa de valores. Se mide en segundos y se lo denota usualmente con la letra  $T$ .



**Figura 2.3:** Señal aperiódica.

**Ciclo** serie de valores contenidos en un tiempo igual a un período  $T$ .

**Frecuencia** cantidad de ciclos por unidad de tiempo, o inversa del período  $T$ .

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

**Frecuencia angular** heredada de las funciones trigonométricas, la frecuencia angular, o pulsación angular es la constante que relaciona radianes con tiempo en un ciclo. Se define como la cantidad de radianes por unidad de tiempo. Se la simboliza usualmente con la letra  $\omega$  y su unidad de medida es el radian sobre segundo  $[\frac{rad}{s}]$ .

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2.2)$$

**Fase** abscisa de un punto arbitrario de la señal que, según el eje este calibrado en tiempo o en radianes, representa un valor temporal o un ángulo. Si se trata de un valor angular se la denota generalmente con letras griegas como  $\theta$ ,  $\varphi$  o  $\phi$ .

## 2.3. Valores asociados a la amplitud

### 2.3.1. Valor instantáneo

Se denomina *valor instantáneo* de una señal temporal a la amplitud correspondiente a determinado valor de fase, por ejemplo  $f(t_0)$  o  $i(0)$ .

### 2.3.2. Valor máximo

Este valor se refiere al máximo absoluto de la señal, cuando se trata de señales pseudoperiódicas o aperiódicas, en el caso de señales periódicas el valor máximo se refiere al máximo valor de amplitud del período. Se lo representa con letras mayúsculas y subíndice  $m$  o  $max$  (por ej.  $I_m$  o  $I_{max}$ ).

Si en una señal periódica el máximo positivo es diferente del máximo negativo en valor absoluto, para diferenciarlos se los representa como  $I_{m+}$  e  $I_{m-}$  respectivamente.

### 2.3.3. Valor pico a pico

Este valor representa la excursión máxima de la señal, en el caso de una señal con máximo positivo igual al máximo negativo, el valor pico a pico es

$$I_{pp} = 2 I_{max} \quad (2.3)$$

sino

$$I_{pp} = I_{max+} - I_{max-} \quad (2.4)$$

### 2.3.4. Valor medio

El *valor medio* de una señal viene dado por el *Teorema de la media*:

**Teorema** Si la función  $i(t)$  es continua en el intervalo  $[a, b]$ , existe en este intervalo un punto  $\eta$  tal que se verifica la siguiente igualdad

$$\int_a^b i(t) dt = (b - a) i(\eta). \quad (2.5)$$

Si el intervalo  $[a, b]$  es igual a un período  $T$ , entonces el valor  $i(\eta)$  es el *valor medio* de la señal  $i(t)$ . Como este es un valor constante se lo representa con una letra mayúscula. Despejando de 2.5 el valor medio  $I_{med}$  es

$$I_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt. \quad (2.6)$$

Como la integración de una corriente  $i(t)$  a lo largo de un tiempo representa la cantidad de cargas transportadas en ese tiempo, el valor medio representa el transporte de cargas neta de una señal de corriente.

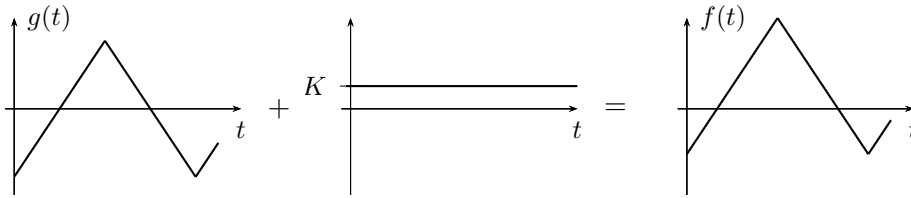
Obsérvese que la integral (2.6) puede ser nula, es el caso de señales cuya área encerrada positiva es igual al área encerrada negativa, por ejemplo las señales sinusoidales puras. En este caso, se dice que las señales son de valor medio nulo.

### Componente de continua

Si a una señal  $g(t)$  de valor medio nulo se le suma una señal constante de valor  $K$ , el valor medio de la nueva señal  $f(t) = g(t) + K$  será

$$\frac{1}{T} \int_0^T g(t) + K dt = K, \quad (2.7)$$

ya que por hipótesis el valor medio de  $g(t)$  es cero. Cualquier señal de valor medio no nulo puede ser descompuesta en una de valor medio nulo<sup>1</sup> más una constante igual a su valor medio. Se dice entonces que una señal de valor medio NO nulo tiene una componente de continua igual a su valor medio. En la fig. 2.4 se puede ver esta composición en forma gráfica.



**Figura 2.4:** Señal con componente de continua.

#### 2.3.5. Valor medio de módulo o absoluto

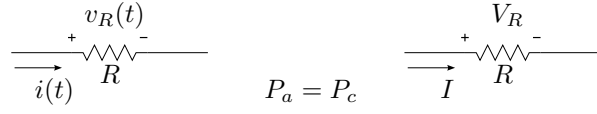
Para señales cuyo valor medio es nulo, se calcula el llamado *valor medio de módulo* tomando la integral a lo largo de un período del módulo  $|i(t)|$  de la señal. Se lo representa con mayúscula y el subíndice *med* entre signos de módulo  $I_{|med|}$

$$I_{|med|} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt \quad (2.8)$$

este valor se calcula sólo si el valor medio de la señal es nulo, y se lo utiliza en su reemplazo para las operaciones que impliquen la utilización del valor medio.

#### 2.3.6. Valor eficaz

El valor eficaz de una señal variable es igual a la amplitud de una señal continua que disipa la misma potencia media<sup>2</sup> que dicha señal variable. Por ejemplo si se trata de señales de corriente el valor eficaz asociado a la señal variable  $i(t)$  será igual al valor de amplitud de una señal continua  $I$  que al circular por una carga disipe la misma potencia media que  $i(t)$ .



**Figura 2.5:** Sistema continuo y alterno disipando la misma potencia media.

Consideremos la resistencia de valor  $R$  de la fig. 2.5. Según la definición, y tomando como ejemplo una señal de corriente, se debe encontrar el valor de corriente continua que produce la misma disipación de potencia que la señal variable, ambas actuando sobre la misma resistencia  $R$ .

La señal variable al circular por  $R$  disipa una potencia instantánea dada por

$$p_a(t) = i(t)v_R(t) = i^2(t)R$$

cuyo valor medio depende del período  $T$ ,

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)R dt. \quad (2.9)$$

Por otro lado la corriente continua sobre la misma  $R$  disipa una potencia instantánea

$$p_c(t) = I^2 R$$

cuyo valor medio coincide con el valor instantáneo por ser una señal constante

$$P_c = I^2 R.$$

Si ahora igualamos las potencias medias  $P_a = P_c$  obtenidas a partir de las dos señales

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)R dt = I^2 R \quad (2.10)$$

vemos que el valor de corriente continua que produce la misma disipación de potencia que la señal alterna es

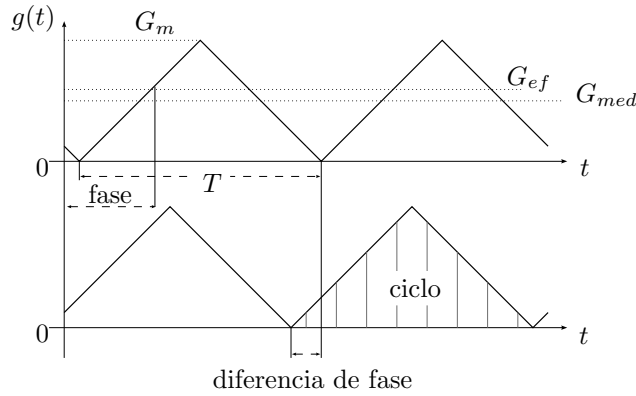
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) representa el valor eficaz de una señal y es la raíz cuadrática media de la señal  $i(t)$ , conocida también por sus siglas en inglés como *RMS* (*root mean square*).

En la figura 2.6 se pueden ver algunos parámetros y valores de los descriptos anteriormente, representados sobre una señal periódica arbitraria.

<sup>1</sup>Simplemente restando a esta su valor medio.

<sup>2</sup>Aquí potencia media se refiere al valor medio de la potencia instantánea.



**Figura 2.6:** Parámetros de señales periódicas.

### 2.3.7. Factores característicos de señales periódicas

Los siguientes factores se definen a partir de los valores característicos vistos anteriormente. Tienen como objeto representar numéricamente la forma de la señal.

#### Factor de cresta

Al cociente entre el valor máximo y el valor eficaz de la señal se lo conoce como *factor de cresta*

$$f_c = \frac{I_m}{I_{ef}}.$$

#### Factor de forma

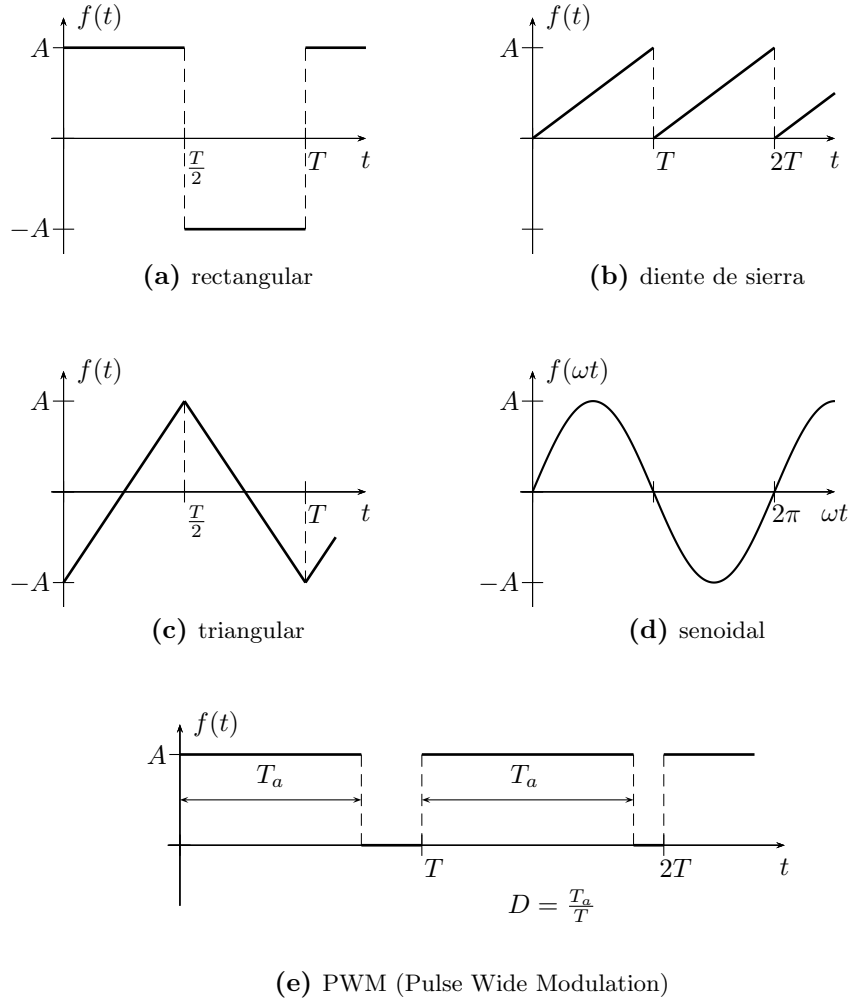
Es el más utilizado, se define como el cociente entre el valor eficaz y el valor medio de la señal. Si la señal es de valor medio nulo, se utiliza el valor medio de módulo

$$f_f = \frac{I_{ef}}{I_{med}}.$$

## 2.4. Señales periódicas de uso común

Si bien existe una gran variedad de señales periódicas de uso común en electrónica, es importante destacar que cualquier señal periódica puede ser representada mediante una serie de Fourier, compuesta por señales sinusoidales de diferentes amplitudes y frecuencias (ver apéndice B.1), por lo que el análisis de respuestas de los circuitos se concentrará mayormente a las respuestas a señales sinusoidales.

A continuación se definen algunas señales periódicas utilizadas comúnmente en electricidad.



**Figura 2.7:** Señales de excitación de uso frecuente.

### 2.4.1. Rectangular

Una señal rectangular es una señal periódica de valor medio nulo definida como (figura 2.7a)

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \text{para } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (2.12)$$

### 2.4.2. Cuadrada

Una señal cuadrada es una señal periódica de valor medio no nulo definida como

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (2.13)$$

### 2.4.3. Diente de sierra

Una señal diente de sierra es una señal periódica de valor medio no nulo definida como (figura 2.7b)

$$f(t) = At \quad \text{para } 0 < t < T \quad (2.14)$$

### 2.4.4. Triangular

Una señal triangular es una señal periódica de valor medio nulo definida como (figura 2.7c)

$$f(t) = \begin{cases} A\frac{4}{T}t - A & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A\frac{4}{T}t + 3A & \text{para } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.4.5. PWM (Pulse Wide Modulation)

Una señal PWM es una señal pseudoperiódica de valor medio no nulo definida como (figura 2.7e)

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } 0 < t < T_a \\ 0 & \text{para } T_a < t < T \end{cases} \quad (2.16)$$

La relación entre el tiempo  $T_a$  y el periodo  $T$  se conoce como ciclo de trabajo, o *Duty cycle* en inglés ( $D = \frac{T_a}{T}$ ). El ciclo de trabajo  $D$  puede variar entre 0 y 1.

## 2.5. Señales aperiódicas fundamentales

Las señales aperiódicas impulso, escalón y rampa se las conoce con el nombre de fundamentales, puesto con ellas se pueden construir una gran variedad de señales aperiódicas diferentes. Definiremos a continuación cada una de las fundamentales, determinaremos como se relacionan y luego veremos como se utilizan para construir otras.

### 2.5.1. Impulso o delta de Dirac

La función impulso o delta de Dirac se define como

$$\delta(arg) = \begin{cases} 0 & \text{si el } arg \neq 0 \\ \infty & \text{si el } arg = 0 \end{cases}$$

si el argumento de la función es  $t$  entonces

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

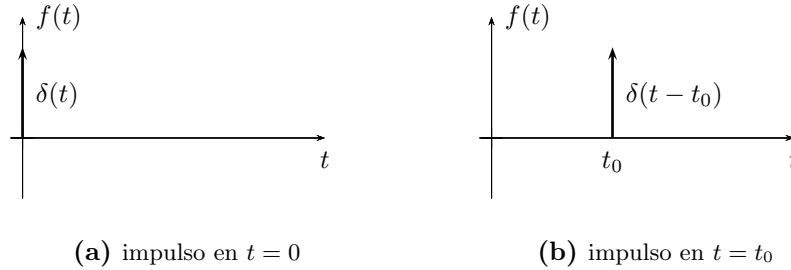
que es un impulso en  $t = 0$ . Si el argumento es  $t - t_0$  entonces tendremos un impulso en  $t = t_0$

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq t_0 \\ \infty & \text{si } t = t_0 \end{cases}$$

Un delta de Dirac cumple además con que su área total es unitaria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.17)$$

En la figura 2.8 se puede ver la representación gráfica de un impulso de Dirac, en  $t = 0$  y desplazado.



**Figura 2.8:** Función impulso o delta de Dirac.

### 2.5.2. Escalón unitario

Si definimos la función integral del impulso de forma

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \quad (2.18)$$

esta función será 0 para  $t < 0$  y 1 para  $t > 0$ . Se la conoce como función escalón unitario y se define como

$$u(arg) = \begin{cases} 0 & \text{si el } arg < 0 \\ 1 & \text{si el } arg > 0 \end{cases}$$



si el argumento es el tiempo  $t$ ,  $u(t)$  será

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t > 0 \end{cases}$$

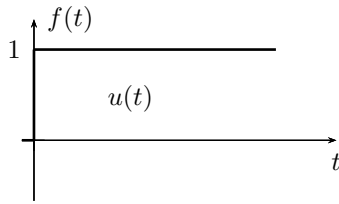
cuya gráfica se muestra en la figura 2.9a. Por su definición, la derivada de esta función escalón es un impulso unitario

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (2.19)$$

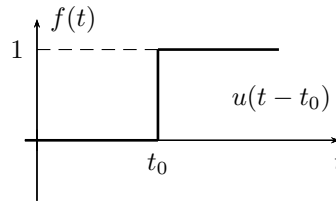
Si el argumento es  $t - t_0$ ,  $u(t - t_0)$  será

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \forall t < t_0 \\ 1 & \forall t > t_0 \end{cases}$$

lo que significa que el escalón se ve desplazado un tiempo  $t = t_0$ , como se gráfica en la figura 2.9b.



(a) escalón unitario en  $t = 0$



(b) escalón unitario en  $t = t_0$

**Figura 2.9:** Función escalón unitario.

### 2.5.3. Rampa unitaria

Tomando la integral de la función escalón entre  $-\infty$  y  $t$  definimos una nueva función aperiódica fundamental que se llama rampa

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^t u(t) dt \quad (2.20)$$

La función rampa se define como

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

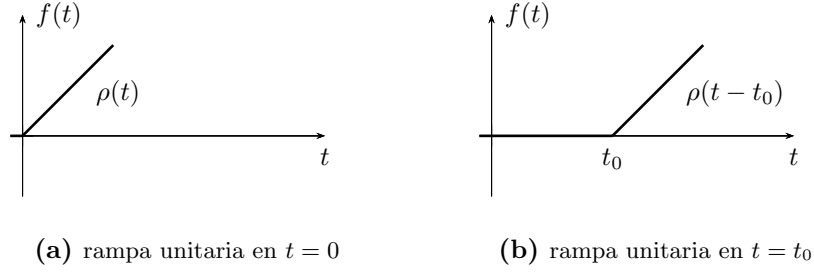
que por definición

$$u(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} \quad (2.21)$$

Si comienza en  $t = t_0$

$$\rho(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ t - t_0 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

En la fig. 2.10 se pueden ver sus gráficas.



**Figura 2.10:** Función rampa unitaria.

## 2.6. Construcción de señales aperiódicas usando fundamentales

Combinando linealmente las señales pseudoperiódicas fundamentales podemos construir nuevas señales, a continuación vemos algunos ejemplos.

### 2.6.1. Pulso rectangular

Sumando escalones desplazados de amplitudes opuestas podemos obtener pulsos de cualquier duración, amplitud y tiempo de inicio. Por ejemplo el pulso único de la figura 2.11 lo podemos obtener como la suma de dos escalones desplazados  $A u(t - t_0)$  y  $-A u(t - t_1)$  de forma que

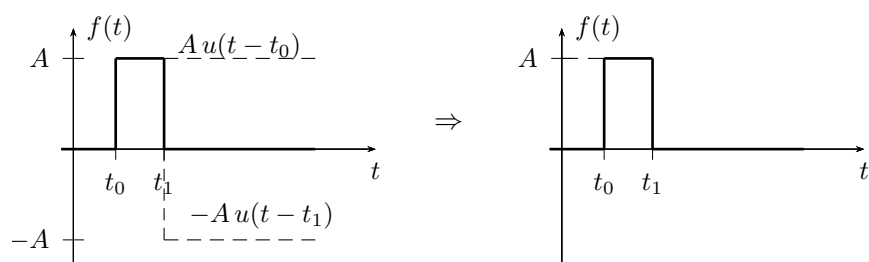
$$f(t) = A u(t - t_0) - A u(t - t_1); \quad t_0 < t_1 \quad (2.22)$$

### 2.6.2. Pulso triangular

Sumando rampas desplazadas podemos obtener un pulso triangular, por ejemplo

$$\begin{aligned} f(t) &= A \rho(t) - A \rho(t - t_0) - A \rho(t - t_0) + A \rho(t - 2t_0) \\ f(t) &= A \rho(t) - 2A \rho(t - t_0) + A \rho(t - 2t_0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

es un pulso triangular de  $2t_0$  de duración y  $A t_0$  de valor máximo.



**Figura 2.11:** Pulso formado por dos escalones desplazados



## Capítulo 3

# Sistemas de primer y segundo orden

### 3.1. Sistemas de primer orden

Un circuito eléctrico que contenga un elemento capaz de almacenar energía, como un inductor o un capacitor, tiene como ecuación de equilibrio una ecuación diferencial ordinaria (ODE) de primer orden

$$\frac{dx(t)}{dt} + \lambda x(t) = f(t); \quad x(0) = X_0$$

con  $\lambda$  una constante positiva que depende de los elementos del circuito y  $f(t)$  una función temporal que depende de la fuente de excitación.

Este tipo de sistemas descrito por una ODE de primer orden se los conoce como *sistemas de primer orden* y la respuesta está dada por la solución completa<sup>1</sup> de esta ODE.

#### 3.1.1. Circuito sin fuente

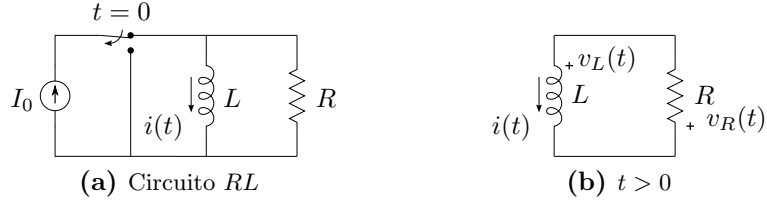
Si se excita un circuito de primer orden durante algún tiempo se almacenará en su elemento almacenador ( $L$  o  $C$ ) una determinada cantidad de energía. Si luego se quita esta fuente de excitación es posible observar la respuesta del sistema debido a la energía acumulada en el elemento almacenador. El estudio de la respuesta que aparece al dejar al circuito sin fuente es el más sencillo de realizar ya que al no existir fuente de excitación conectada al sistema este puede ser descrito por una ODE homogénea (con  $f(t) = 0$ ). Desarrollemos este caso en primer lugar utilizando un circuito  $RL$  como ejemplo.

---

<sup>1</sup>La solución completa de una ODE debe contemplar la solución particular de la ecuación no homogénea más la solución general de la ecuación homogénea.

### 3.1.2. Circuito $RL$ sin fuente

Supongamos que el circuito  $RL$  de la figura 3.1a se encuentra conectado desde hace largo tiempo a la fuente de corriente, es decir que el inductor se encuentra totalmente energizado comportandose como un corto circuito ante la fuente de corriente continua que lo alimenta.



**Figura 3.1:** Circuito  $RL$  conectado a una fuente de corriente constante

En un instante  $t = 0$  se abre el interruptor dejando al circuito  $RL$  sin fuente de alimentación. Toda la energía acumulada en el inductor se disipará en la resistencia siguiendo la respuesta de la ODE de primer orden que describe al circuito. Estamos interesados entonces en conocer la forma de la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$ .

Para encontrar esta respuesta aplicamos la LKV en la malla  $RL$  de la figura 3.1b, que resulta luego de abrir el interruptor en  $t = 0$ , según las referencias indicadas tenemos

$$v_L(t) + v_R(t) = 0 \quad (3.1)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = 0 \quad (3.3)$$

la ec. (3.3) es una ODE homogénea de primer orden, con  $\tau = \frac{L}{R}$  una constante positiva, que podemos resolver separando variables y ordenando

$$\frac{1}{i(t)} di(t) = -\frac{1}{\tau} dt \quad (3.4)$$

e integrando ambos miembros

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{i(t)} di(t) &= - \int \frac{1}{\tau} dt \\ \ln i(t) &= -\frac{1}{\tau}t + k \\ i(t) &= Ae^{-\frac{1}{\tau}t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

con  $A = e^k$  una constante a determinar.

La ec. (3.5) es la solución general de la (3.3), pues cualquier valor de  $A$  satisface la ODE. Si se asigna algún valor particular para  $A$  se dice que se particulariza la respuesta encontrada.

Del punto de vista eléctrico, encontrar la solución general significa encontrar la respuesta para cualquier valor de energía inicial acumulada en el inductor, luego particularizarla significa encontrar el valor de  $A$  de la respuesta general que corresponda según el valor energético del caso.

Para determinar el valor de  $A$  se debe considerar el estado de carga inicial del elemento almacenador de energía, y la condición de continuidad del parámetro correspondiente.

En este caso, si analizamos el circuito para  $t = 0$ , por condición de continuidad de corriente en el inductor podemos asegurar que la corriente en la malla debe cumplir

$$i(0^+) = i(0^-) \quad (3.6)$$

siendo  $0^-$  un infinitésimo de tiempo anterior a 0 y  $0^+$  un infinitésimo de tiempo posterior a 0. Esto significa que la corriente de malla en el instante posterior a la apertura del interruptor debe ser igual a la corriente circulante por el inductor en el instante anterior a dicha apertura.

Como  $i(0^-) = I_0$ , entonces

$$i(0^+) = I_0$$

este valor de corriente se conoce como *condición inicial* del circuito, ya que es el valor de la corriente en  $t = 0$  y está dado por las condiciones de contorno (en este caso la configuración anterior a  $t = 0$  del circuito). Si llevamos esta condición inicial a la respuesta general (3.5) tenemos

$$i(0) = A = I_0 \quad (3.7)$$

con lo que finalmente se obtiene la respuesta particular de la corriente de malla de este circuito  $RL$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \forall t > 0 \quad (3.8)$$

En la figura 3.2 se puede ver el gráfico de la ecuación (3.8).

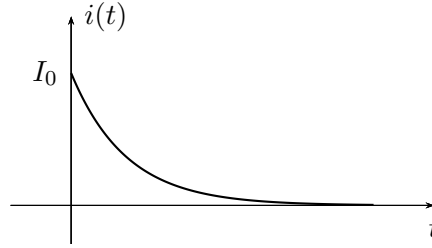
### Tensiones en los elementos

A partir de la corriente podemos encontrar la tensión de cada elemento, de acuerdo a las referencias ya elegidas (fig. 3.1b). De la ec. (3.2)

$$v_R(t) = Ri(t) = RI_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \forall t > 0$$

Para encontrar la tensión en el inductor podemos despejarla de (3.1)

$$v_L(t) = -v_R(t) = -RI_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \forall t > 0$$



**Figura 3.2:** Corriente de descarga del circuito  $RL$  de la figura 3.1a

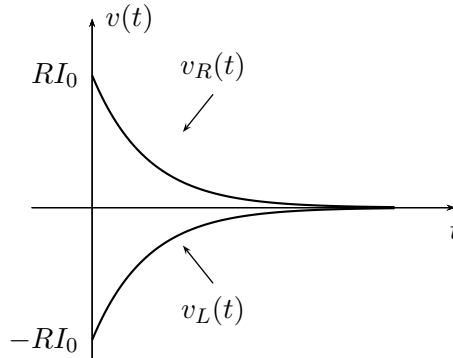
o calcularla según su relación tensión-corriente

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \left[ -\frac{R}{L} I_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \right]$$

$$v_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \forall t > 0$$

obteniendo la misma función que antes tal como se esperaba.

En la fig. 3.3 se pueden ver los gráficos de  $v_R(t)$  y  $v_L(t)$ . Observese que la suma de ambas tensiones es nula en todo instante de tiempo, de acuerdo con la (3.1).

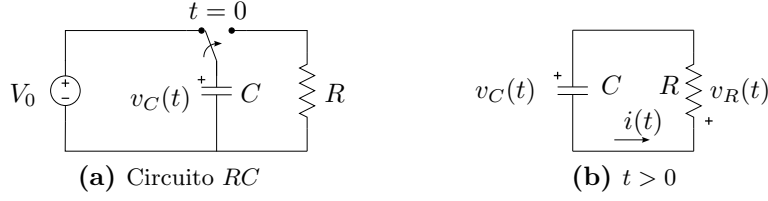


**Figura 3.3:** Tensiones en los elementos del circuito  $RL$  de la figura 3.1a

### 3.1.3. Circuito $RC$ sin fuente

Veamos ahora que ocurre con la tensión de un capacitor mientras se desenergiza. Supongamos un circuito como el de la figura 3.4a, el cuál estuvo conectado a la fuente de tensión durante un largo tiempo tal que el capacitor llegó a su carga máxima. El interruptor desconecta la fuente de tensión y conecta la resistencia al capacitor en  $t = 0$ . A partir de este momento la energía acumulada en el capacitor comienza a disiparse en la resistencia. Se





**Figura 3.4:** Circuito  $RC$  conectado a una fuente de tensión constante

desea conocer la evolución de la tensión del capacitor durante todo el tiempo de descarga, es decir para todo  $t > 0$ <sup>2</sup>.

Para resolver aplicamos la LKV a la malla de la figura 3.4b que resulta de cambiar el interruptor

$$v_C(t) + v_R(t) = 0 \quad (3.9)$$

$$v_C(t) + Ri(t) = 0 \quad (3.10)$$

la corriente  $i(t)$  puede ponerse en términos de  $v_C(t)$

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (3.11)$$

que llevada a (3.10) nos queda

$$\begin{aligned} v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

con  $\tau = RC$ .

La ec. (3.12) es una ODE homogénea de primer orden, similar a la que se obtuvo en el análisis del circuito  $RL$  de la figura 3.1a (véase ecuación (3.3)). Por lo tanto, al tratarse de la misma ODE que la (3.3), tiene la misma respuesta general, es decir

$$v_C(t) = Ae^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (3.13)$$

sólo que para este caso el valor de  $\tau$  es  $\tau = RC$ .

Para ajustar el valor que toma la función (3.13) en  $t = 0$  debemos conocer la condición inicial. Por condición de continuidad de tensión en el capacitor se sabe que la tensión en sus bornes en el instante anterior al cambio del interruptor ( $t = 0^-$ ) será igual a la tensión en el instante  $t = 0^+$ . Analizando el circuito en el tiempo  $t = 0^-$  se ve que este valor de tensión es  $V_0$ , entonces

$$v_C(0) = A = V_0 \quad (3.14)$$

<sup>2</sup>Las siguientes igualdades son validas  $\forall t > 0$ , aunque en algunos casos no se especifique para mayor claridad del texto.

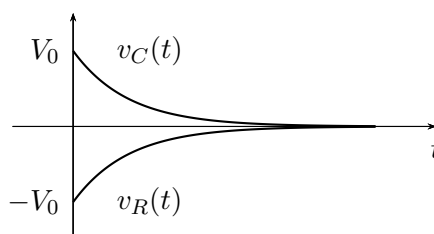
con lo que la respuesta de tensión del circuito de la figura 3.4a para todo  $t > 0$  es

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \forall t > 0 \quad (3.15)$$

Observando la ecuación de equilibrio de la malla (3.9) vemos que la tensión en  $R$  es igual en magnitud y de signo contrario a  $v_C(t)$

$$v_C(t) = -v_R(t) \Rightarrow v_R(t) = -V_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \forall t > 0 \quad (3.16)$$

En la figura 3.5 se puede ver el gráfico de las ecuaciones (3.15) y (3.16).



**Figura 3.5:** Tensión del capacitor del circuito de la figura 3.4a

### Corriente de malla

La corriente de malla puede obtenerse a partir de la tensión  $v_R(t)$  dividiendo por  $R$

$$i(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \forall t > 0 \quad (3.17)$$

y su gráfica es idéntica a la de  $v_R(t)$  en una escala de corriente. El valor negativo de la corriente nos indica que su sentido de circulación es contrario al de la referencia.

## 3.2. Constante de tiempo $\tau$

La constante de tiempo determina la velocidad de crecimiento (o de caída<sup>3</sup>) de la respuesta de un sistema de primer orden. Si se observan las soluciones obtenidas en el estudio anterior se ve que esta constante  $\tau$  depende solamente de los elementos pasivos del circuito, es decir que la velocidad

---

<sup>3</sup>Para los sistemas sin fuentes como los anteriores la respuesta será siempre una caída, ya que al desconectar la fuente de excitación la energía almacenada sólo puede disminuir (o permanecer constante, en cuyo caso la respuesta apreciada será nula).

de variación de la respuesta en un sistema de primer orden está dada por el valor de sus elementos.

Esta constante se mide en segundos [s], tal que al dividir a la variable  $t$  resulte un número adimensional como exponente de la exponencial. Por esto recibe el nombre de *constante de tiempo*.

Es muy común calcular los valores que toma la respuesta para tiempos multiples de  $\tau$ , de esta forma el análisis se independiza de los valores absolutos de tiempo y puede hablarse de los valores que toma la respuesta en cantidades de  $\tau$ . Así, por ejemplo, se sabe que la respuesta (3.15) caerá aproximadamente al 36,7 % de su valor inicial al transcurrir  $1\tau$  de tiempo, puesto que

$$v_C(\tau) = V_0 e^{-1} = 0,36788 V_0$$

y para valores sucesivos de  $\tau$

$$\begin{aligned} v_C(2\tau) &= 0,13534 V_0 \\ v_C(3\tau) &= 0,049787 V_0 \\ v_C(4\tau) &= 0,018316 V_0 \\ v_C(5\tau) &= 0,0067379 V_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Como se ve la velocidad de caída respecto de  $\tau$  es muy rápida y, si bien matemáticamente la función sólo vale cero para  $t \rightarrow \infty$ , para aplicaciones de ingeniería suele considerarse que la función vale cero para tiempos mayores a  $5\tau$ , despreciándose una cantidad menor al 1 % del valor inicial de la respuesta.

Se puede determinar la constante de tiempo de un circuito desconocido a partir del gráfico de su respuesta. Por ejemplo, si en la figura 3.5 se prolonga la recta tangente a la función en el inicio hasta cortar con el eje de tiempo, esta cortará en  $t = \tau$  (fig. 3.6), para verificarlo tomemos la derivada de la respuesta valuada en  $t = 0$

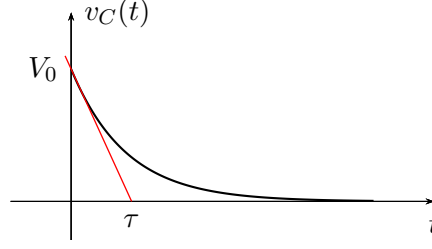
$$\left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{\tau} \quad (3.18)$$

la (3.18) es la pendiente  $m$  de la recta  $y(t) = mt + b$  que pasa por  $V_0$  en  $t = 0$ , es decir

$$y(t) = -\frac{V_0}{\tau}t + V_0 \quad (3.19)$$

esta recta corta el eje del tiempo en

$$0 = -\frac{V_0}{\tau}t + V_0 \quad \Rightarrow \quad t = \tau \quad (3.20)$$



**Figura 3.6:** Constante de tiempo en un sistema de primer orden

### 3.2.1. Potencia y energía

Consideremos el circuito  $RC$  serie anterior (fig. 3.4a), la potencia instantánea en el capacitor para  $t > 0$  será

$$\begin{aligned} p_C(t) &= v_C(t)i_C(t) \\ p_C(t) &= \left(V_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \left(-\frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \\ p_C(t) &= -\frac{C V_0^2}{\tau} e^{-\frac{2}{\tau}t} \end{aligned} \quad (3.21)$$

como se trata de un circuito sin fuente es de esperar que la potencia instantánea sea cero para  $t \rightarrow \infty$ . El valor máximo de esta potencia sobre el capacitor se obtiene en  $t = 0$  y vale

$$P_{C_{max}} = p_C(t)|_{t=0} = -\frac{C V_0^2}{\tau} \quad (3.22)$$

El signo negativo de la potencia está representando una disminución de la energía almacenada en el capacitor, y su magnitud inversamente proporcional al  $\tau$  del circuito indica que una desenergización más rápida ( $\tau$  más pequeño) requiere una mayor potencia.

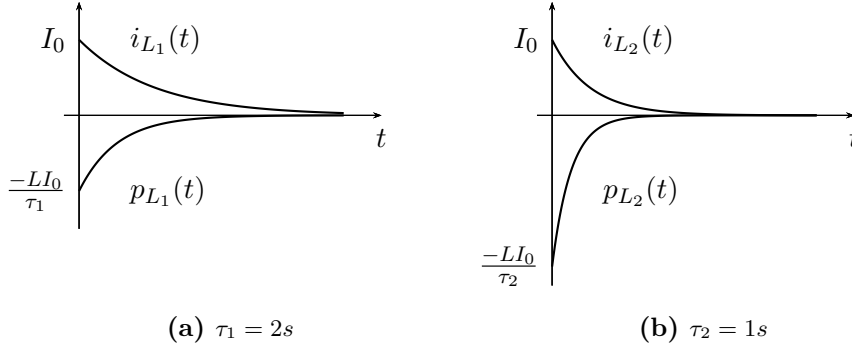
Un análisis similar nos lleva a encontrar la potencia instantánea asociada al inductor de un  $RL$  serie como

$$p_L(t) = -\frac{L I_0^2}{\tau} e^{-\frac{2}{\tau}t} \quad (3.23)$$

cuyo valor máximo en  $t = 0$  será

$$P_{max} = p_L(t)|_{t=0} = -\frac{L I_0^2}{\tau} \quad (3.24)$$

aplicando para el caso las mismas conclusiones que antes. En la fig. 3.7 se muestran las gráficas de descarga de un inductor  $L$  con diferentes constantes de tiempo (diferentes resistencias conformando el circuito), obsérvese que para ambos casos se supone la misma corriente inicial  $I_0$ .



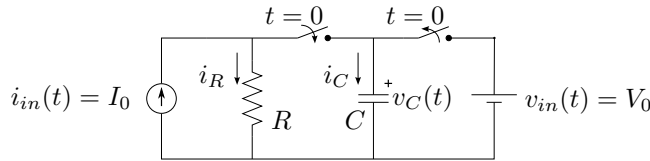
**Figura 3.7:** Potencia instantánea en un inductor para diferentes valores de  $\tau$

### 3.3. Respuesta a una fuente constante

Una fuente constante aplicada a un sistema de primer orden tiene como ecuación de equilibrio una ODE de primer orden no homogénea, cuya respuesta consta de dos partes, la solución homogénea más la solución inhomogénea. Consideremos para el análisis un circuito  $RC$  serie.

#### 3.3.1. Circuito $RC$ con fuente constante

En el circuito de la figura 3.8 se encuentra conectada una fuente de tensión desde hace un largo tiempo, tal que todo el circuito está en un estado de reposo cuando se accionan los interruptores en  $t = 0$ , es decir que el capacitor ya ha alcanzado su máxima carga. En ese instante se desconecta la fuente de tensión y se introduce una fuente de corriente. Se desea encontrar en estas condiciones la respuesta  $v_C(t) \forall t > 0$



**Figura 3.8:**  $RC$  paralelo excitado con fuente de corriente constante

El análisis se inicia aplicando alguna de las leyes de Kirchhoff, en este caso por ser un circuito paralelo se aplica LKI en el nudo principal. Obsérvese que para  $t > 0$  el circuito queda formado por tres ramas en paralelo, la rama de la fuente de corriente  $i_{in}(t)$ , la rama de la resistencia  $R$  y la rama del capacitor  $C$ . Tomando como positivas a las corrientes entrantes al nudo

tendremos

$$\begin{aligned} i_{in}(t) - i_C(t) - i_R(t) &= 0 \\ i_{in}(t) &= C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_R(t)}{R} \end{aligned} \quad (3.25)$$

como  $v_C(t) = v_R(t)$  la ecuación se puede poner en términos de la respuesta  $v_C(t)$

$$i_{in}(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} \quad (3.26)$$

reemplazando el valor de fuente  $i_{in}(t) = I_0$  y dividiendo ambos miembros por  $C$

$$\frac{I_0}{C} = \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{RC} \quad (3.27)$$

La (3.27) es una ODE de 1º orden, no homogénea, de forma general

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = k_1 \quad (3.28)$$

con  $\tau = RC$  y  $k_1 = \frac{I_0}{C}$  en este caso.

Del punto de vista del análisis matemático esta ODE tiene una solución general formada por la solución particular de la ODE no homogénea, más la solución general de la homogénea. Luego se verá cómo estas dos soluciones representan las diferentes respuestas presentes en este circuito.

Una forma de resolver esta ODE es separando variables para poder integrar

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} &= k_1 \\ \int \frac{1}{x(t) - k_1 \tau} dx(t) &= - \int \frac{1}{\tau} dt \\ \ln(x(t) - k_1 \tau) &= -\frac{t}{\tau} + k_2 \end{aligned}$$

de donde despejando  $x(t)$  se tiene

$$x(t) = k_1 \tau + k_3 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (3.29)$$

con  $k_3 = e^{k_2}$ . Este es la respuesta general de la ODE (3.27), que describe el comportamiento de un sistema de primer orden general excitado por una fuente constante. Las constantes  $k_1 \tau$  y  $k_3$  permiten ajustar la respuesta considerando diferentes valores de fuente de excitación y energía inicial. Para encontrar los valores de estas constantes, o particularizar la respuesta, se analizan los estados iniciales y finales de  $x(t)$ .

Para  $t \rightarrow \infty$  la parte exponencial de la respuesta se anula, por lo que la constante  $k_1 \tau$  debe ser igual al valor que toma la respuesta en  $t \rightarrow \infty$

$$x(\infty) = k_1 \tau + 0 \quad \rightarrow \quad k_1 \tau = x(\infty)$$

el valor que toma la respuesta  $x(\infty)$  dependerá del circuito y de la fuente de excitación.

Luego para  $t \rightarrow 0$  y sabiendo ya que  $k_1 \tau = x(\infty)$  se obtiene el valor de  $k_3$

$$x(0) = x(\infty) + k_3 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad k_3 = x(0) - x(\infty)$$

el valor de la respuesta en  $t = 0$  depende del estado energético inicial del elemento almacenador de energía, este valor es la condición inicial del sistema.

Reemplazando estas constantes en la (3.29) queda

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (3.30)$$

que es la respuesta general de la ODE (3.28).

Observando la (3.30) puede verse que está compuesta por dos términos, el primero es un término constante y el segundo un término exponencial decreciente

$$x(t) = \underbrace{x(\infty)}_{x_{fo}} + \underbrace{[x(0) - x(\infty)]}_{x_{na}} e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (3.31)$$

el término constante  $x_{fo}$  recibe el nombre de *respuesta forzada* y es el valor que toma la respuesta  $x(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta parte de la respuesta es la solución particular de la Ec. Dif. no homogénea y existe sólo si existe una fuente forzante, de ahí su nombre de *forzada*. El término exponencial  $x_{na}$  se lo conoce como *respuesta natural* del sistema y es la solución general de la Ec. Dif. homogénea. Depende exclusivamente de la naturaleza de los componentes del sistema, es decir de los elementos del circuito, y por esto se la conoce como *respuesta natural*. Las fuentes de excitación y las condiciones iniciales del sistema sólo determinan su amplitud. Esta parte de la respuesta tiende a cero con el tiempo<sup>4</sup> por esto se la llama también *respuesta transitoria* o *respuesta de régimen transitorio*. En contraparte, la respuesta forzada existe mientras exista una excitación, y recibe el nombre de *respuesta permanente* o *respuesta de régimen permanente*.

La respuesta obtenida representa la evolución completa del parámetro en cuestión partiendo de un estado inicial ( $x(0)$ ) hasta llegar a un estado estable final ( $t \rightarrow \infty$ ), donde la transición entre los dos estados se produce de una forma que sólo depende de la naturaleza del circuito, es decir de la respuesta natural.

---

<sup>4</sup>Estrictamente la función exponencial  $e^{-\frac{1}{\tau}t}$  se hace cero solo para  $t = \infty$ , pero a los fines prácticos esta función puede ser despreciada para un valor de tiempo mayor a  $5\tau$

Si no se tiene información de lo que ocurrió antes del inicio del análisis del sistema (antes de  $t = 0$ ), entonces el estado inicial se considera siempre un estado estable, es decir un estado de reposo donde todos los elementos almacenadores de energía ya están cargados al máximo o descargados por completo según corresponda.

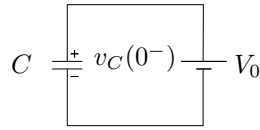
Más adelante veremos que estos estados inicial y final no necesariamente deben ser constantes como en el caso de excitación con fuente constante. Estos estados se denominan en general estados de régimen permanente, y la transición entre dos estados de régimen permanente se realiza siguiendo la respuesta natural del sistema.

Volviendo a la ecuación de equilibrio del circuito  $RC$  (3.27), según lo visto su respuesta general será como la (3.30), es decir

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)] e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (3.32)$$

los valores de las constantes se deben encontrar por análisis del circuito para  $t \rightarrow 0$  y  $t \rightarrow \infty$ .

Para  $t \rightarrow 0$ , por condición de continuidad de tensión en el capacitor el circuito tiene el estado que tenía en  $t = 0^-$  (antes de abrir el interruptor, fig. 3.9), entonces la tensión inicial será  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$



**Figura 3.9:** Estado inicial del circuito  $RC$

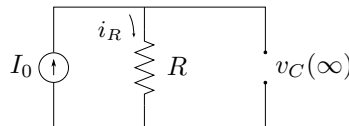
Para  $t \rightarrow \infty$  el capacitor habrá llegado a su máxima carga comportándose como un circuito abierto, la corriente a través de él será nula (fig. 3.10). Por lo tanto la tensión final del capacitor será

$$v_C(\infty) = v_R(\infty) = I_0 R$$

Reemplazando estos valores en la ec. 3.32 se obtiene

$$v_C(t) = I_0 R + [V_0 - I_0 R] e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.33)$$

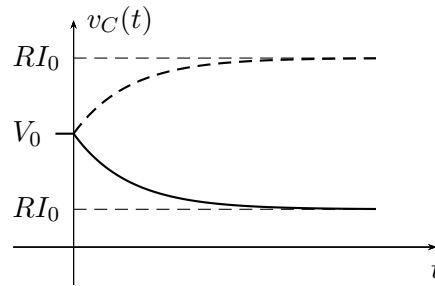
que es la función respuesta de la tensión del capacitor del circuito de la fig. 3.8



**Figura 3.10:** Estado final del circuito  $RC$



En la fig. 3.11 se pueden ver las gráficas de dos estados finales diferentes, la línea continua representa la respuesta para el caso que el estado estable final sea una tensión menor a la tensión inicial,  $RI_0 < V_0$ , y la línea a trazos es la respuesta para  $RI_0 > V_0$ . En la gráfica pueden observarse los estados estables inicial y final y la respuesta natural como transición entre los mismos.



**Figura 3.11:** Tensión del capacitor del circuito de la figura 3.8

### 3.4. Sistemas lineales

Un sistema es lineal si y sólo si se satisfacen las propiedades de superposición y homogeneidad para todas las excitaciones y respuestas

**Superposición.** La propiedad de superposición se satisface si al excitar el sistema con una excitación  $i_1$  se obtiene  $v_1$  y con una excitación  $i_2$  se obtiene  $v_2$ , entonces al excitar con la suma de las excitaciones  $i_1 + i_2$  se obtiene la suma de las respuestas

$$\begin{aligned} \text{si } i_1 &\Rightarrow v_1 \\ \text{e } i_2 &\Rightarrow v_2 \\ \text{entonces } i_1 + i_2 &\Rightarrow v_1 + v_2 \end{aligned}$$

**Homogeneidad.** La propiedad de homogeneidad se satisface si al multiplicar una excitación por un número real  $k$ , se multiplica también la respuesta por ese mismo factor

$$\begin{aligned} \text{si } i_3 &\Rightarrow v_3 \\ \text{entonces } k i_3 &\Rightarrow k v_3 \end{aligned}$$

Los circuitos tratados en *Teoría de los circuitos I* contienen sólo elementos lineales, por lo que se trata de sistemas lineales y cumplen con las propiedades de *superposición* y *homogeneidad*. Estas propiedades normalmente se presentan en forma de teorema

**Teorema de Superposición:** en un circuito lineal, constituido por elementos lineales y fuentes, se puede hallar la respuesta total hallando la respuesta a cada fuente haciendo cero todas las demás y sumando después las respuestas individuales.

Para hacer cero o *pasivar* una fuente de tensión se debe reemplazar dicha fuente en el circuito por un corto circuito.

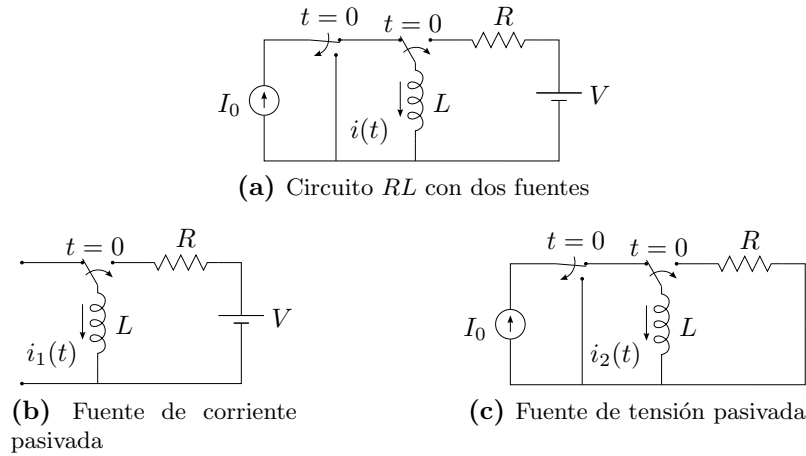
Para hacer cero o *pasivar* una fuente de corriente se debe abrir el circuito en los bornes de dicha fuente.

### 3.5. Resolución por superposición

Consideremos por ejemplo el circuito de la fig. 3.12a. Para encontrar la respuesta total del sistema aplicando el teorema de superposición se deben pasivar sistemáticamente cada fuente dejando sólo una activada por vez. Pasivando por ejemplo todas menos la fuente de tensión  $V$  nos queda el circuito de la fig. 3.12b. Luego operando para  $t > 0$  y procediendo como en la sección anterior obtenemos la respuesta completa debido a esta fuente

$$i_1(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.34)$$

notar que para esta respuesta la condición inicial es cero, ya que la fuente que provoca la condición inicial en el inductor está pasivada.



**Figura 3.12:** Análisis de circuito  $RL$  aplicando teorema de superposición

Luego pasivamos todas menos la fuente de corriente  $I_0$ , quedando el circuito como en la fig. 3.12c. Al conmutar el interruptor la fuente de corriente se desconecta quedando el circuito sin fuente, por lo que la respuesta será

$$i_2(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.35)$$

como vimos antes.

Finalmente se obtiene la respuesta total sumando  $i_1(t) + i_2(t)$

$$i_T(t) = \frac{V}{R} + \left( I_0 - \frac{V}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.36)$$

### 3.6. Respuesta natural más forzada

Aplicar el teorema de superposición como antes es una forma muchas veces útil para resolver circuitos con muchas fuentes. Pero podemos conseguir aún mayor beneficio de este teorema si observamos la forma que se construye la respuesta natural al hacer la sumatoria de todas las respuestas. Cada respuesta contribuye con su valor en  $t = 0$  a la constante de la respuesta natural, de forma que esta constante en  $t = 0$  cancele los valores de todas las fuentes y de como resultado el valor inicial del circuito, es decir

$$i_T(0) = i_{f1}(0) + i_{f2}(0) + i_{f3}(0) + \cdots + i_{fn}(0) + \quad (3.37)$$

$$+ [I_0 - i_{f1}(0) - i_{f2}(0) - i_{f3}(0) - \cdots - i_{fn}(0)] e^0 \quad (3.38)$$

Por ende la respuesta natural puede obtenerse en forma independiente cuando ya se hayan obtenido todas las respuestas forzadas debido a cada una de las fuentes forzantes, ya que su forma depende exclusivamente de los elementos del circuito (el  $\tau$  es único) y la constante se obtiene valuando la respuesta en  $t = 0$  y aplicando la condición inicial del circuito.

Es decir que podemos aplicar el teorema de superposición para obtener todas las forzadas y luego la natural única en un circuito de primer orden. Para aplicar superposición a un sistema con  $n$  fuentes de esta última forma el procedimiento es el siguiente: se comienza por pasivar todas las fuentes menos una y obtener la respuesta forzada  $i_{f1}$  debido a esta primera fuente. Luego se pasivan todas las fuentes menos la segunda con lo que se obtiene la respuesta forzada  $i_{f2}$  debido a la segunda fuente. Esto se repite hasta obtener las  $n$  respuestas forzadas debido a las  $n$  fuentes presentes en el sistema. Luego se calcula la respuesta natural  $i_{nat}(t)$ . Teniendo en cuenta que ésta depende sólo de los elementos del circuito y no de las fuentes, para obtenerla se deben pasivar TODAS las fuentes forzantes del circuito y luego operar considerando sólo las condiciones iniciales. Con estos pasos se obtiene la respuesta general completa del sistema

$$i_{total}(t) = i_{f1}(t) + i_{f2}(t) + i_{f3}(t) + \cdots + i_{fn}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

para particularizarla se hace  $t = 0$  y se aplica la condición inicial del circuito, quedando

$$i_{total}(t) = i_{f1}(t) + i_{f2}(t) + i_{f3}(t) + \cdots + i_{fn}(t) + \quad (3.39)$$

$$+ [I_0 - i_{f1}(0) - i_{f2}(0) - i_{f3}(0) - \cdots - i_{fn}(0)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

### 3.7. Respuesta a una fuente no constante

Un sistema de primer orden que es excitado por una fuente genérica, tiene como ecuación de equilibrio una ODE de primer orden no homogénea

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = y(t) \quad (3.40)$$

cuya solución completa está formada por una solución general de la homogénea ( $x_n = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$ ) más la solución particular de la no homogénea, es decir la respuesta natural más la respuesta forzada.

Esta ODE puede ser resuelta por varios métodos, uno de ellos se conoce como método de Lagrange. El método se basa en la solución propuesta para resolver la ODE de primer orden homogénea. Por analogía propone como solución una función de igual forma, pero en lugar de ser  $C$  una constante, es también una función dependiente del tiempo

$$x(t) = c(t)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.41)$$

Para probar que ésta es solución, se busca su derivada respecto del tiempo

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dc(t)}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} + c(t) \left( \frac{-e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \right)$$

y se reemplaza en la ec. (3.40)

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dc(t)}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} + c(t) \left( \frac{-e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \right) \right] + \frac{c(t)e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} &= y(t) \\ \frac{dc(t)}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} &= y(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} &= y(t)e^{\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

integrando ambos miembros se encuentra  $c(t)$

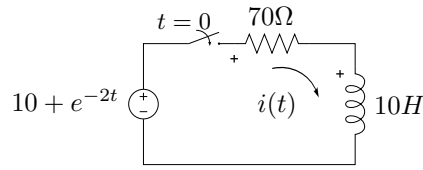
$$c(t) = \int y(t)e^{\frac{t}{\tau}} dt + C \quad (3.43)$$

siendo  $C$  la constante de integración.

Es decir, para que (3.41) sea solución de (3.40),  $c(t)$  tiene que ser como (3.43). Reemplazando

$$\begin{aligned} x(t) &= \left( \int y(t)e^{\frac{t}{\tau}} dt + C \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ x(t) &= Ce^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \int y(t)e^{\frac{t}{\tau}} dt \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.8. ALIMENTACIÓN CON FUENTE SINUSOIDAL. CORRIENTE ALTERNA 53



**Figura 3.13:** RL serie alimentado con una fuente de tensión no constante

y (3.44) es la solución completa (natural más forzada) de la ODE (3.40).

Por ejemplo, para el circuito de la fig. 3.13 la ecuación de equilibrio para  $t > 0$  es

$$\begin{aligned} v(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \\ 10 + e^{-2t} &= 70i(t) + 10 \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{10 + e^{-2t}}{10} &= 7i(t) + \frac{di(t)}{dt} \end{aligned}$$

de donde  $i(t)$  será

$$\begin{aligned} i(t) &= Ce^{-7t} + e^{-7t} \int \left( \frac{10 + e^{-2t}}{10} \right) e^{7t} dt \\ i(t) &= Ce^{-7t} + \frac{1}{7} + \frac{e^{-2t}}{50} \end{aligned}$$

como en  $t = 0$  la corriente es nula, la constante  $C$  vale

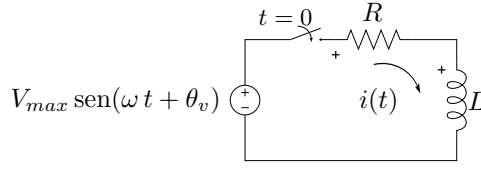
$$\begin{aligned} i(0) &= C + \frac{1}{7} + \frac{1}{50} = 0 \\ C &= -\frac{57}{350} \end{aligned}$$

finalmente  $i(t)$

$$i(t) = \frac{1}{7} - \frac{57}{350}e^{-7t} + \frac{e^{-2t}}{50}.$$

## 3.8. Alimentación con fuente sinusoidal. Corriente alterna

El caso particular de un circuito alimentado con una fuente senoidal es muy importante debido al intensivo uso de este tipo de alimentaciones en la ingeniería. Se verá en detalle su resolución aplicando el método de Lagrange visto anteriormente.



**Figura 3.14:** RL serie alimentado con una fuente de tensión senoidal

Si se alimenta un circuito  $RL$  serie con una fuente alterna como en la fig. 3.14 la ecuación de equilibrio para  $t > 0$  según la LKV será

$$\begin{aligned} v_{in}(t) - v_R(t) - v_L(t) &= 0 \\ v_{in}(t) &= v_R(t) + v_L(t) \\ V_{max} \text{sen}(\omega t + \theta_v) &= R i(t) + L \frac{d(i(t))}{dt} \\ \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) &= \frac{R}{L} i(t) + \frac{d(i(t))}{dt} \end{aligned}$$

que, según el método de Lagrange visto anteriormente, la solución integral de esta ODE tiene la forma

$$i(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) dt \quad (3.45)$$

la función integral de (3.45) se encuentra resolviendo la integral por partes<sup>5</sup>, haciendo

$$\begin{aligned} dv &= e^{\frac{R}{L}t} dt \Rightarrow v = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \\ u &= \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) \Rightarrow du = \omega \frac{V_{max}}{L} \cos(\omega t + \theta_v) dt \end{aligned} \quad (3.46)$$

y reemplazando en la integral queda

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) dt &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) - \\ &\quad \int \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \omega \frac{V_{max}}{L} \cos(\omega t + \theta_v) dt \end{aligned} \quad (3.47)$$

Esta nueva integral en el segundo miembro de (3.47) se resuelve también por partes quedando

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) dt &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) - \\ &\quad \left[ \frac{L^2}{R^2} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{\omega V_{max}}{L} \cos(\omega t + \theta_v) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_{max}}{L} \text{sen}(\omega t + \theta_v) dt \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

---

<sup>5</sup>  $\int u dv = uv - \int v du$

### 3.8. ALIMENTACIÓN CON FUENTE SINUSOIDAL. CORRIENTE ALTERNA 55

Finalmente, como esta última integral tiene la misma forma que la del primer miembro, se halla la solución por asociación de términos

$$\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right) \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \theta_v) dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \theta_v) - \frac{L^2}{R^2} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{\omega V_{max}}{L} \cos(\omega t + \theta_v) \quad (3.49)$$

es decir

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \theta_v) dt = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}} \left[ \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \theta_v) - \frac{L^2}{R^2} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{\omega V_{max}}{L} \cos(\omega t + \theta_v) \right] \quad (3.50)$$

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \theta_v) dt = \frac{V_{max} e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} [R \sin(\omega t + \theta_v) - \omega L \cos(\omega t + \theta_v)] \quad (3.51)$$

Volviendo ahora a la (3.45) de la corriente con este resultado se tiene

$$\begin{aligned} i(t) &= K e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{V_{max} e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} [R \sin(\omega t + \theta_v) - \omega L \cos(\omega t + \theta_v)] \\ i(t) &= K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} [R \sin(\omega t + \theta_v) - \omega L \cos(\omega t + \theta_v)] \end{aligned} \quad (3.52)$$

para reducir esta última ecuación se puede utilizar la igualdad trigonométrica

$$a \sin(x) - b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(x - \arctan \frac{b}{a}\right) \quad (3.53)$$

entonces (3.52) queda

$$\begin{aligned} i(t) &= K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin\left(\omega t + \theta_v - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \\ i(t) &= K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \theta_v - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Esta solución general representa la evolución de la corriente para todo  $t > 0$ , para considerar el caso particular se debe calcular la constante  $K$ . En este caso la corriente en  $t = 0$  es nula, entonces

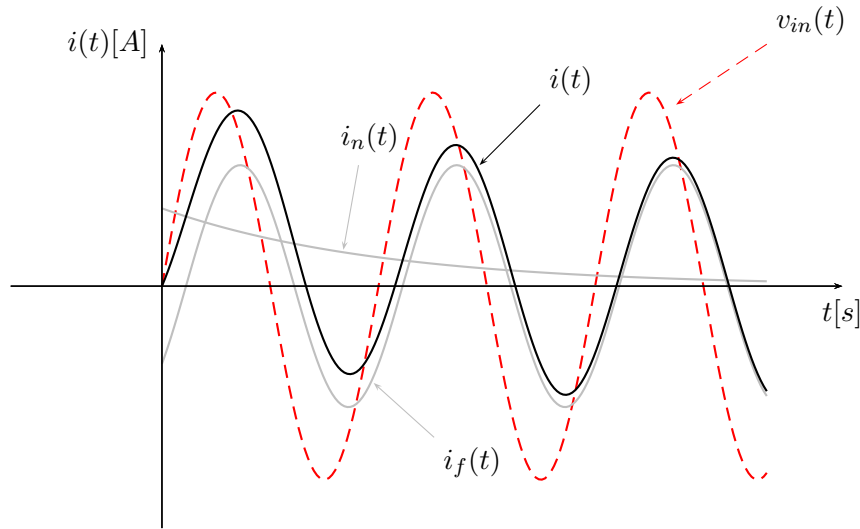
$$\begin{aligned} i(0) &= K + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\theta_v - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) = 0 \Rightarrow \\ K &= -\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\theta_v - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalmente

$$i(t) = -\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\theta_v - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \theta_v - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \quad (3.56)$$

que es el resultado particular para este circuito  $RL$  serie.

En la figura 3.15 pueden verse las graficas de la respuesta completa de corriente (en color negro) junto con las respuestas natural y forzada (en color gris), la grafica en línea de trazos representa la excitación.



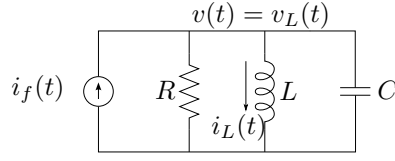
**Figura 3.15:** Corriente en un  $RL$  serie alimentado con una fuente de tensión senoidal

### 3.9. Sistemas de segundo orden

Si consideramos la interacción entre dos elementos almacenadores de energía deberemos utilizar una ODE de 2° orden para describir su comportamiento. Cada elemento almacenador introduce una condición inicial independiente en el sistema, por lo que será necesario contar con dos soluciones naturales que permitan satisfacer ambas condiciones iniciales. Como se verá a continuación, estas dos soluciones naturales son las dos soluciones generales de la ODE homogénea que describe el circuito.

Comencemos el análisis utilizando como ejemplo un circuito paralelo  $RLC$  como el de la fig. 3.16, para este circuito la ecuación de nudo según



**Figura 3.16:** Circuito RLC paralelo

LKC es

$$i_f(t) = \frac{v(t)}{R} + i_L + C \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.57)$$

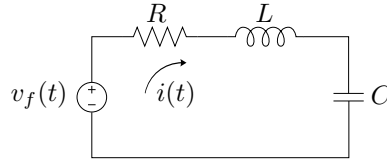
$$\text{donde } i_L = \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

$$i_f(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt}$$

esta es una ecuación integro-diferencial, que debe ser llevada a una ecuación diferencial para ser resuelta. Derivando ambos miembros respecto a  $t$ , se obtiene la Ec. Dif.

$$C \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} v(t) = \frac{di_f(t)}{dt} \quad (3.58)$$

Si se analiza otro tipo de circuito con dos elementos almacenadores de energía, como el circuito  $RLC$  serie de la fig. 3.17 por ejemplo, la ecuación de equilibrio será:

**Figura 3.17:** Circuito RLC serie

$$v_f(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t)$$

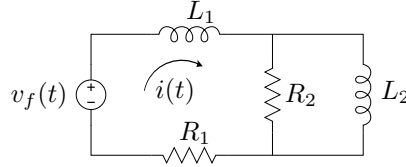
$$\text{donde } v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$v_f(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

y derivando se obtiene la Ec. Dif. de 2° orden a resolver

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dv_f(t)}{dt} \quad (3.59)$$

De igual forma, con dos elementos del mismo tipo como el circuito  $RL$  de la fig. 3.18, se obtiene una Ec.Dif. de segundo orden. Este análisis se deja como ejercicio para el lector.



**Figura 3.18:** Circuito irreductible con dos elementos que almacenan energía

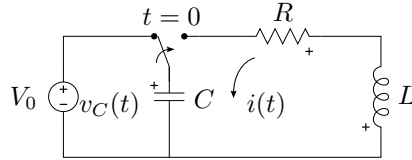
Notese que en cada ejemplo anterior la Ec.Dif. puede ser planteada en términos de cualquier parámetro del circuito, por ejemplo si en la (3.57) se pone la tensión del circuito en términos de la corriente por el inductor entonces

$$\begin{aligned} v(t) &= v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \\ i_f(t) &= \frac{1}{R} L \frac{di_L}{dt} + i_L + C \frac{d}{dt} \left[ L \frac{di_L}{dt} \right] \\ i_f(t) &= \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} \end{aligned}$$

la ODE queda en términos de la corriente por el inductor.

### 3.9.1. Solución natural

Consideremos el circuito de la figura 3.19, aplicando LKV para  $t > 0$



**Figura 3.19:** Circuito  $RLC$  sin fuente

$$\begin{aligned} v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) &= 0 \\ Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

y la corriente por el capacitor

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \tag{3.61}$$

luego, de estas dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, podemos obtener una única ecuación diferencial de segundo orden en términos de algunas de las variables de interés. En general se prefiere resolver en términos de alguna de las variables continuas del circuito, como la tensión en el capacitor  $v_C(t)$  o la corriente por el inductor, puesto que son las que cumplen con la condición de continuidad y por ende las que imponen las condiciones iniciales.

Si llevamos la ec. (3.61) a la (3.60) tendremos

$$\begin{aligned} R \left( C \frac{dv_C(t)}{dt} \right) + L \frac{d \left( C \frac{dv_C(t)}{dt} \right)}{dt} + v_C(t) &= 0 \\ RC \frac{dv_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + v_C(t) &= 0 \\ \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

una ODE homogénea de segundo orden en términos de  $v_C(t)$ . Resolviendo esta ODE se obtiene entonces la respuesta natural de la tensión del capacitor en un sistema de segundo orden.

De igual forma se puede obtener la ODE en términos de la corriente despejando la tensión  $v_C(t)$  de la ec. (3.60) y llevandola a la (3.61)

$$\begin{aligned} i(t) - C \frac{d \left( -Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} \right)}{dt} &= 0 \\ i(t) + RC \frac{di(t)}{dt} + LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

### Solución a una ODE homogénea de segundo orden

La respuesta que se obtiene de circuitos como el anterior, al igual que para los circuitos de primer orden, se la llama respuesta natural, porque es una respuesta que depende exclusivamente de la naturaleza del sistema y existe incluso sin la presencia de fuentes forzantes. La respuesta natural de un sistema de segundo orden viene dada entonces por una ODE homogénea de segundo orden, cuya solución puede encontrarse como sigue.

Sea la ODE

$$\begin{aligned} a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) &= 0 \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + p \frac{dx(t)}{dt} + qx(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

se propone como solución la función exponencial, esta función tiene la particularidad de relacionar la primitiva con sus  $n$  derivadas y es por ende la solución por excelencia de una Ec. Dif.

$$x_n(t) = A e^{st}$$

con sus derivadas

$$\begin{aligned}\frac{dx_n(t)}{dt} &= A s e^{st} \\ \frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} &= A s^2 e^{st}\end{aligned}$$

donde  $A$  y  $s$  son constantes a determinar. Reemplazando la solución propuesta y sus derivadas en la (3.64) queda

$$\begin{aligned}A s^2 e^{st} + p A s e^{st} + q A e^{st} &= 0 \\ A e^{st} (s^2 + p s + q) &= 0\end{aligned}$$

es decir que para que la función propuesta sea solución, este producto debe ser cero para cualquier  $t$ , y como  $A e^{st}$  es la solución propuesta y no puede ser cero para todo  $t$ , entonces

$$s^2 + p s + q = 0 \quad (3.65)$$

lo que se conoce como *ecuación característica*. Esta ecuación es en la variable  $s$ , que es el exponente de la solución propuesta. Entonces la solución propuesta será solución de la (3.64) si y sólo si el exponente  $s$  es raíz de la ecuación característica (ec. 3.65)

$$s_1 = \frac{-p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad ; \quad s_2 = \frac{-p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (3.66)$$

Normalmente suelen denotarse como

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad ; \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

donde  $\alpha$  se llama *coeficiente de amortiguamiento* y  $\omega_0$  *frecuencia resonante*. La solución completa de (3.64) será

$$x_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (3.67)$$

Es decir que la respuesta natural dependerá de las raíces de la ecuación característica, y será distinta según las raíces sean a) reales y distintas, b) reales e iguales o c) complejas conjugadas. Analizaremos a continuación cada uno de los casos.

### Raíces reales y distintas

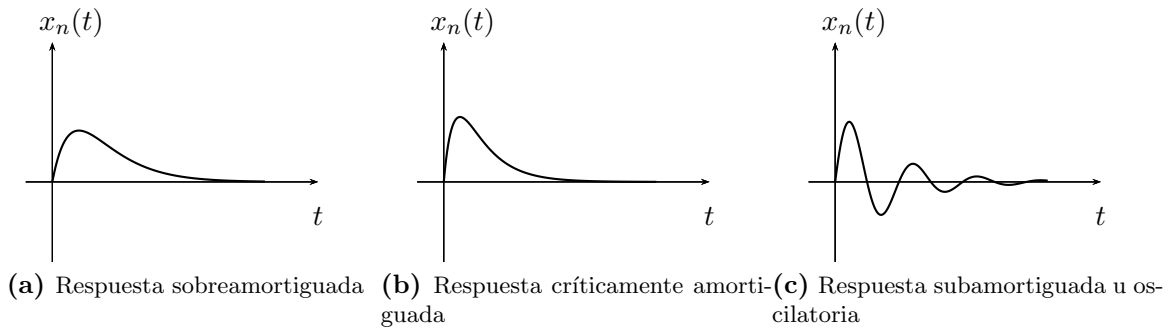
Si las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son raíces *reales y distintas*, es decir que

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

con  $\alpha^2 > \omega_0^2$ , entonces la respuesta completa de la Ec. Dif. homogénea viene dada por

$$x_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (3.68)$$

que es la respuesta natural del sistema y tendrá la forma de la fig. 3.20a. Esta respuesta se la llama *respuesta sobreamortiguada*, las raíces  $s_1$  y  $s_2$  reciben el nombre de *frecuencias naturales* del sistema y sus inversas son las *constantes de tiempo*  $\frac{1}{s_1}$  y  $\frac{1}{s_2}$ .



### Raíces reales e iguales

Si las raíces  $s_1$  y  $s_2$  de la ecuación característica son raíces *reales e iguales*, es decir que

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{p}{2} \quad (3.69)$$

esto ocurre cuando  $\alpha^2 = \omega_0^2$ , entonces

$$x_n(t) = A e^{st} \quad (3.70)$$

y la respuesta natural queda ahora incompleta, ya que lo que antes eran dos respuestas linealmente independientes (ec. 3.68), una exponencial con exponente  $s_1$  y otra con exponente  $s_2$ , se transforman en una única respuesta  $A e^{st}$ .

Como para que la respuesta de una Ec. Dif. de segundo orden esté completa se necesitan dos funciones respuestas linealmente independientes, se debe buscar una segunda función linealmente independiente de la anterior (ec. 3.70) y sumarla a ella. Una forma de encontrar la nueva función es haciendo que se cumpla el requisito de independencia lineal entre las respuestas, es decir que se cumpla que

$$\frac{x_{n2}(t)}{x_{n1}(t)} = f(t) \neq cte$$

o bien

$$x_{n2}(t) = f(t) x_{n1}(t)$$

Para que la nueva respuesta propuesta  $x_{n2}(t)$  sea también solución del sistema, se debe reemplazar en la (ec. 3.64) y comprobar que satisface la igualdad, para esto se deriva sucesivamente la función propuesta dos veces y se lleva a la ODE

$$x_{n2}(t) = f(t) x_{n1}(t) = f(t) A e^{st} \quad (3.71)$$

$$\dot{x}_{n2}(t) = \dot{f}(t) A e^{st} + f(t) A s e^{st}$$

$$\ddot{x}_{n2}(t) = (\ddot{f}(t) + \dot{f}(t) s + \dot{f}(t) s + f(t) s^2) A e^{st}$$

reemplazando y sacando factor común  $A e^{st}$  se obtiene

$$\begin{aligned} A e^{st} \left[ \ddot{f}(t) + 2 \dot{f}(t) s + f(t) s^2 + \right. \\ \left. + p (\dot{f}(t) + f(t) s) + q f(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

igual que en el caso de raíces reales y distintas esta igualdad se debe satisfacer para todo  $t$ , y como  $A e^{st}$  no puede ser cero para todo  $t$  por ser la función propuesta, debe ser cero entonces lo que queda entre corchetes

$$\ddot{f}(t) + 2 \dot{f}(t) s + f(t) s^2 + p (\dot{f}(t) + f(t) s) + q (f(t)) = 0 \quad (3.73)$$

Agrupando en términos de la  $f(t)$  y sus derivadas se tiene

$$\ddot{f}(t) + \dot{f}(t) (2s + p) + f(t) (s^2 + p s + q) = 0 \quad (3.74)$$

como  $s$  es una raíz de la ecuación característica entonces  $s^2 + p s + q = 0$ , es decir

$$\ddot{f}(t) + \dot{f}(t) (2s + p) = 0 \quad (3.75)$$

ademas, según la ec. 3.69, el coeficiente  $2s + p$  es igual a cero por tratarse de raíces reales e iguales, finalmente

$$\ddot{f}(t) = 0 \quad (3.76)$$

Una función cuya derivada segunda sea nula, debe tener como derivada primera una constante y debe ser por ende una función lineal. O sea  $f(t) = K_1 t + K_2$

Esto permite concluir diciendo que si se multiplica a la solución  $x_{n1}(t)$  por cualquier  $f(t)$  de la forma  $K_1 t + K_2$  se obtendrá otra solución linealmente independiente de la Ec. Dif. Entonces  $x_{n2}(t)$  será (ec. 3.71)

$$\begin{aligned} x_{n2}(t) &= (K_1 t + K_2) A e^{st} \\ x_{n2}(t) &= A_1 e^{st} + A_2 t e^{st} \end{aligned}$$

pero la segunda solución encontrada se compone de dos funciones linealmente independientes, es decir que esta es ya una solución completa. Entonces

$$x_n(t) = A_1 e^{st} + A_2 t e^{st} \quad (3.77)$$

que es la solución completa buscada. Este tipo de respuestas se llama *respuesta críticamente amortiguada* y su forma se grafica en la fig. 3.20b.

### Raíces complejas conjugadas

Si la ecuación características tiene raíces *complejas conjugadas*, es decir que  $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ , entonces

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + j\omega_n \\ s_2 &= -\alpha - j\omega_n \end{aligned}$$

donde  $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ , que se conoce como *frecuencia resonante amortiguada*.

Ahora las soluciones  $x_{n1}(t)$  y  $x_{n2}(t)$  formadas con los exponentes complejos  $s_1$  y  $s_2$ , son dos soluciones linealmente independientes pero complejas

$$\begin{aligned} x_n(t) &= A_1 e^{(-\alpha + j\omega_n)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_n)t} \\ x_n(t) &= e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega_n t} + A_2 e^{-j\omega_n t}) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Utilizando la igualdad de Euler se puede poner la solución en términos de las funciones trigonométricas

$$x_n(t) = e^{-\alpha t} ((A_1 + A_2) \cos(\omega_n t) + j(A_1 - A_2) \sen(\omega_n t))$$

Como las constantes  $A_1$  y  $A_2$  son constantes arbitrarias que deben ser elegidas para cumplir con las condiciones iniciales del sistema, y como estas condiciones iniciales serán siempre valores reales, entonces las  $A_1$  y  $A_2$  deberán ser tales que sumadas den un número real puro ( $A_1 + A_2 = B_1$ ) y restadas un número imaginario puro ( $A_1 - A_2 = -jB_2$ ), de tal forma que

$$\begin{aligned} x_n(t) &= e^{-\alpha t} (B_1 \cos(\omega_n t) + j(-jB_2) \sen(\omega_n t)) \\ x_n(t) &= e^{-\alpha t} (B_1 \cos(\omega_n t) + B_2 \sen(\omega_n t)) \end{aligned}$$

es decir que del conjunto de funciones complejas representadas por (3.78) y que son solución de la ODE homogénea de segundo orden solo tomamos las que son reales puras, ya que nos interesa representar parámetros físicos reales.

A este tipo de respuesta se la llama *respuesta submortiguada* y es la que da el nombre a las dos anteriores. Se trata de una función trigonométrica que es atenuada por un exponencial  $e^{-\alpha t}$ , donde  $\alpha$  se llama coeficiente de atenuación y  $\omega_n$  es la frecuencia resonante amortiguada del sistema. La gráfica de esta respuesta se puede ver en la fig. 3.20c.

### 3.9.2. Condiciones iniciales

Un sistema de segundo orden tiene entonces dos condiciones iniciales que deben ser satisfechas, una por cada elemento almacenador de energía. Las constantes que acompañan a cada solución natural deben ser establecidas de forma tal que la respuesta completa del sistema cumpla con estas dos condiciones iniciales. Es decir, debemos “particularizar” la respuesta.

Volviendo sobre el circuito *RLC* de la figura 3.19 y suponiendo por simplicidad que las raíces del sistema son reales y distintas, la tensión en el capacitor dada por la ODE (3.62) será

$$v_C(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (3.79)$$

en  $t = 0$  la tensión en el capacitor vale  $v_C(0) = V_0$ , por lo tanto

$$v_C(0) = A + B = V_0 \quad (3.80)$$

como la corriente por el inductor es nula, también lo será la corriente por el capacitor para  $t > 0$ , entonces

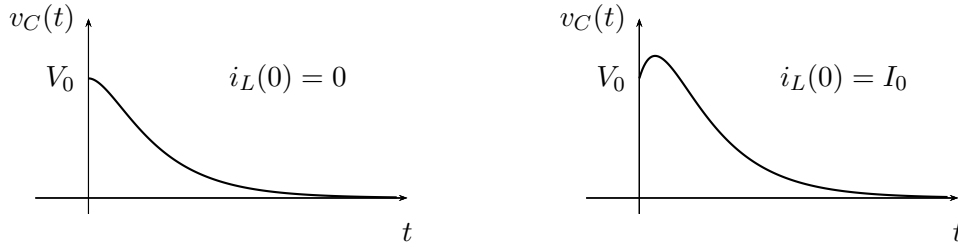
$$i_L(0) = i_C(0) = C \left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.81)$$

$$= C (As_1 + Bs_2) = 0 \quad (3.82)$$

y de las ecuaciones (3.80) y (3.82) se obtienen  $A$  y  $B$  para cumplir con ambas condiciones iniciales.

Si observamos la ecuación (3.81) vemos que la segunda condición inicial está determinando la pendiente de la respuesta de tensión en  $t = 0$ , es decir que en un sistema de segundo orden las condiciones iniciales establecen el valor y la pendiente inicial de cada respuesta. En la figura 3.20 se pueden ver dos gráficas de la respuesta  $v_C(t)$ , ambas tienen un valor inicial  $v_C(0) = V_0$  con  $V_0 > 0$  pero la primera es para  $i_L(0) = 0$  y la segunda  $i_L(0) = I_0$  con  $I_0 > 0$ .





**Figura 3.20:** Respuesta de tensión en un sistema de segundo orden.

### 3.9.3. Solución forzada

Para el caso de sistemas de segundo orden o más no es posible encontrar la solución completa utilizando el método de Lagrange propuesto para los sistemas de primer orden, por lo que la solución forzada (o la solución particular de la inhomogénea) debe buscarse utilizando otros métodos.

Encontrar la solución forzada implica: del punto de vista matemático encontrar una función que satisfaga la ODE inhomogénea, y del punto de vista eléctrico resolver el régimen permanente del sistema.

Existen varios métodos para resolver el régimen permanente de un sistema sin necesidad de resolver en forma directa la ODE, estos métodos varían según la forma de la excitación<sup>6</sup> y serán objeto de estudio en capítulos posteriores.

Los métodos para encontrar la respuesta de la ODE inhomogénea propuestos por el análisis matemático son varios, de todos vamos a utilizar el método de los coeficientes indeterminados por ser el que más se ajusta a las formas de excitación comunmente utilizadas en electricidad.

El método de los coeficientes indeterminados consiste en proponer como solución la suma de la función excitación y todas sus derivadas, multiplicando cada una de ellas por un coeficiente constante a determinar. El método se basa en el hecho de que existe un conjunto de funciones que no cambian su forma al ser derivadas, es decir al ser introducidas en una ODE. Este conjunto de funciones esta formado por las funciones de forma polinómica, exponencial, sinusoidal y producto de estos tipos<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Por ejemplo el método fasorial para resolver el régimen permanente de circuitos excitados con señales sinusoidales, o el análisis del comportamiento de los elementos ante una excitación continua.

<sup>7</sup>Notar que la función constante está incluida en el conjunto como caso particular de función polinómica, es decir una función polinómica de grado cero.

### 3.9.4. Soluciones linealmente dependientes

Como caso particular debe tenerse en cuenta que la solución propuesta no sea linealmente dependiente de las respuestas naturales del sistema. Esto puede ocurrir cuando la excitación es de tipo exponencial pura o un producto de una exponencial con una sinusoidal. Consideremos por ejemplo la siguiente ODE

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p \frac{dx(t)}{dt} + q x(t) = K e^{st} \quad (3.83)$$

si  $s$  es una frecuencia natural del sistema tal que  $s^2 + p s + q = 0$ , una de las dos respuestas naturales será de la forma

$$x_{n1}(t) = A_1 e^{st} \quad (3.84)$$

entonces no puede proponerse  $x_f(t) = A e^{st}$  como solución forzada ya que es LD de  $x_{n1}(t)$ . Para evitar esto se propone como solución forzada  $x_f(t) = t A e^{st}$ , que llevada a (3.83)

$$\begin{aligned} (s^2 t A e^{st} - 2s A e^{st}) + p (A e^{st} - s t A e^{st}) + q (t A e^{st}) &= K e^{st} \\ t A (s^2 - p s + q) + A (p - 2s) &= K \end{aligned} \quad (3.85)$$

y como  $s$  es raíz de la ecuación característica, nos queda

$$A = \frac{K}{p - 2s} \quad (3.86)$$

y la solución propuesta

$$x_f(t) = t \frac{K}{p - 2s} e^{st} \quad (3.87)$$

es solución de la ODE.

En general, si  $s$  es raíz de la ecuación característica con multiplicidad  $r$ , la solución forzada propuesta toma la forma  $x_f(t) = t^r A e^{st}$ .

En forma similar, si la excitación tiene la forma de una sinusoidal atenuada

$$f(t) = e^{-\alpha t} (A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) \quad (3.88)$$

y  $-\alpha \pm j\omega_n$  son raíces de la ecuación característica, entonces la solución forzada propuesta será

$$x_f(t) = t^r e^{-\alpha t} (M \cos(\omega_n t) + N \sin(\omega_n t)) \quad (3.89)$$

con  $r$  la multiplicidad del par de raíces  $-\alpha \pm j\omega_n$ .

En la tabla 3.1 se listan las posibles excitaciones con sus soluciones forzadas a proponer. Obsérvese que los casos en que  $s = 0$  y  $s = \pm j\omega_n$  sean raíces de la ecuación característica implican una resistencia equivalente nula en el sistema ( $R = 0$ ), estos casos particulares sólo pueden darse en sistemas ideales o sistemas no lineales.

Excitación	Solución propuesta
$f(t) = a_p t^p + \cdots a_1 t + a_0$	$x_f(t) = t^r (A_p t^p + \cdots + A_1 t + A_0)$ con $r$ la multiplicidad de 0 como raíz de la ecuación característica
$f(t) = K e^{-\alpha t}$	$x_f(t) = t^r A e^{-\alpha t}$ con $r$ la multiplicidad de $-\alpha$ como raíz de la ecuación característica
$f(t) = K_1 \cos(\omega_n t) + K_2 \sin(\omega_n t)$	$x_f(t) = t^r (A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t))$ con $r$ la multiplicidad de $\pm j\omega_n$ como raíz de la ecuación característica
$f(t) = (a_p t^p + \cdots a_1 t + a_0) e^{-\alpha t}$	$x_f(t) = t^r (A_p t^p + \cdots + A_1 t + A_0) e^{-\alpha t}$ con $r$ la multiplicidad de $-\alpha$ como raíz de la ecuación característica
$f(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos(\omega_n t) + K_2 \sin(\omega_n t))$	$x_f(t) = t^r e^{-\alpha t} (A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t))$ con $r$ la multiplicidad de $-\alpha \pm j\omega_n$ como raíz de la ecuación característica

**Cuadro 3.1:** Lista de soluciones propuestas para el método de los coeficientes indeterminados

### 3.10. Sistemas de orden superior

Cuando el circuito contiene más de dos elementos que almacenan energía la ecuación de equilibrio será una ecuación diferencial de orden  $n$ , siendo  $n$  el número de elementos irreductibles almacenadores de energía. La respuesta natural de este tipo de sistemas es una combinación lineal de algunas de las respuestas halladas para los sistemas de segundo orden (pág. 58), según sean las raíces de la ecuación característica. La solución forzada se obtendrá mediante el método de los coeficientes indeterminados, tal como se hizo para los sistemas de segundo orden (pág. 65).

#### 3.10.1. Solución natural

Según las raíces de la ecuación característica la respuesta natural del sistema será construida de la siguiente manera:

- Raíces reales: las raíces reales  $a_i$  aportarán a la respuesta natural del sistema un conjunto de respuestas de la forma

$$\sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^M A_{(i+j-1)} t^{(j-1)} e^{-a_i t} \quad (3.90)$$

siendo  $M$  la multiplicidad de la raíz  $i$ -ésima y  $R$  el número de raíces distintas. Si se trata de una raíz simple, es decir de multiplicidad  $M = 1$  la respuesta aportada será una exponencial pura.

- Raíces complejas conjugadas: las raíces complejas conjugadas  $-\alpha_i \pm j\omega_i$  aportarán a la respuesta natural del sistema un conjunto de respuestas de la forma

$$\sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^M t^{(j-1)} e^{-\alpha_i t} (B_{(i+j-1)} \cos(\omega_i) + C_{(i+j-1)} \sin(\omega_i)) \quad (3.91)$$

siendo  $C$  el número de pares de raíces complejas conjugadas distintas y  $M$  la multiplicidad del  $i$ -ésimo par de raíces complejas conjugadas.

El número de soluciones LI aportado por las raíces de la ecuación característica debe ser igual al orden de la ecuación diferencial. Por ejemplo, para un sistema de orden 5 con ecuación característica

$$(s+2)^3(s+5)(s+8) = 0 \quad (3.92)$$

tendrá como respuesta natural

$$x_{natural}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t} + A_3 t^2 e^{-2t} + A_4 e^{-5t} + A_5 e^{-8t} \quad (3.93)$$

## Capítulo 4

# Transformada de Laplace

### 4.1. Transformada de Laplace

#### 4.1.1. Definición

La *Transformada de Laplace* es un operador lineal que transforma una función  $f(t)$  de argumento real  $t$  ( $t \geq 0$ ) en una función  $F(s)$  de argumento complejo  $s$  definida como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.1)$$

donde  $s$  es una variable compleja de la forma  $s = \sigma + j\omega$  con  $\sigma > 0$ .<sup>1</sup>

Se lo representa usualmente con el símbolo  $\mathcal{L}$ , y se escribe

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) \quad (4.2)$$

La transformada de Laplace opera sobre un conjunto de funciones definidas en el *dominio del tiempo* y las lleva a otro conjunto de funciones en el *dominio de la frecuencia compleja*, en el *dominio de la pulsación compleja* o simplemente en el *dominio de la variable  $s$* . Esta transformación aplicada sobre el modelo de un sistema permite encontrar la respuesta del sistema de forma mucho más simple que en el dominio del tiempo, principalmente cuando el modelo del sistema incluye ecuaciones diferenciales, ya que éstas se transforman en ecuaciones algebraicas en el dominio de  $s$ .

Luego a la respuesta encontrada en el dominio de  $s$  se aplica la transformación inversa para obtener la respuesta en el dominio del tiempo. Esta operación se conoce como *transformada inversa de Laplace* o *antitransformada de Laplace* y se denota

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t) \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Esta restricción define lo que se llama región de convergencia de la transformada de Laplace, que asegura la existencia de esta transformada para toda función  $f(t)$  sin singularidades en el semieje positivo, cuyo valor absoluto crece a lo sumo como un polinomio en  $t$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

$\mathcal{L}^{-1}$  es también un operador lineal definido como la inversa de (4.1), este operador se verá en detalle mas adelante (sección 4.3).

Para encontrar la transformada de Laplace de una función se debe integrar sobre  $t$  entre 0 e  $\infty$  la función a transformar multiplicada por  $e^{-st}$ , según indica su definición (4.1). Como la transformación existe sólo para  $t \geq 0$ , para asegurar unicidad (ver más adelante la definición de unicidad, sección 4.1.2) la función a transformar debe ser nula para  $t < 0$ . Si  $f(t)$  no es nula para  $t < 0$  entonces se define  $g(t) = f(t)u(t)$  para poder aplicar la transformada.

**Ejemplo 4.1** Sea la función  $f(t) = e^{-at}u(t)$  vamos a encontrar su función transformada  $F(s)$ , aplicando la definición (4.1)<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[e^{-at}u(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left. \frac{-e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \right|_0^{\infty} = \frac{-e^{-(s+a)\infty}}{s+a} + \frac{e^{-(s+a)0}}{s+a} \\ \mathcal{L}[e^{-at}u(t)](s) &= \frac{1}{s+a} \end{aligned} \quad (4.4)$$

No siempre es necesario calcular esta integral para encontrar nuevas transformadas. Haciendo uso de transformadas ya calculadas y de operaciones algebraicas se pueden encontrar nuevas transformadas. Por ejemplo:

**Ejemplo 4.2** Encontrar la transformada de la función escalón  $f(t) = u(t)$  Digamos sin demostrar que para el operador  $\mathcal{L}$  vale lo siguiente<sup>3</sup>

$$\lim_{\varepsilon} \mathcal{L}[f_{\varepsilon}] = \mathcal{L}[\lim_{\varepsilon} f_{\varepsilon}] \quad (4.5)$$

Entonces, si tomamos límite al resultado del ejemplo anterior ec. (4.4) para  $a$  que tiende a cero

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}[e^{-at}u(t)](s) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{s+a} = \frac{1}{s} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}\left[\lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}u(t)\right](s) = \mathcal{L}[u(t)] \quad (4.7)$$

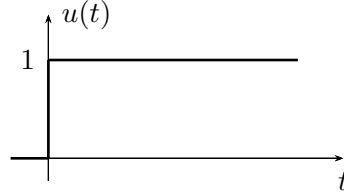
luego igualando (4.6) y (4.7) nos queda que

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (4.8)$$

que es la transformada de la función  $f(t) = u(t)$  (fig. 4.1).

<sup>2</sup>Nótese que la transformada de Laplace de esta función está bien definida, es decir la integral converge, para todo  $s$  tal que su parte real sea estrictamente mayor que  $-a$ .

<sup>3</sup>Notar que se está tomando límite de una función Lebesgue integrable, por lo tanto  $\lim_{\varepsilon} \int f du = \int \lim_{\varepsilon} f du$ .



**Figura 4.1:** Función escalón  $f(t) = u(t)$

#### 4.1.2. Propiedades de la transformada

Algunas propiedades de la Transformada de Laplace son de gran utilidad para encontrar transformadas de funciones compuestas o que de alguna forma se relacionan con funciones cuyas transformadas se conocen. Las más usadas de estas propiedades se describen a continuación.

##### Unicidad

A una función  $f(t)u(t)$  le corresponde una única función transformada  $F(s)$  y una función  $F(s)$  es transformación de una y sólo una función  $f(t)u(t)$

$$f(t)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \quad \text{y} \quad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)u(t)$$

Otra forma de enunciar esta propiedad es: si  $f(t)u(t)$  tiene como transformada a  $F(s)$ , y  $g(t)u(t)$  tiene como transformada a la misma  $F(s)$ , entonces  $f(t)u(t)$  y  $g(t)u(t)$  son iguales<sup>4</sup>. Esta propiedad es de gran importancia ya que permite formar los llamados *pares de transformadas* que se utilizan para realizar la operación de antitransformación, como se verá en detalle más adelante.

##### Linealidad

La transformada de la suma de funciones es igual a la suma de las transformadas de cada una de éstas funciones

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \rightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

donde  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  son las transformadas de Laplace de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  respectivamente.

---

<sup>4</sup>Para que la transformación sea única para todo  $t$  se debe asegurar que la función a transformar sea idénticamente nula para  $t < 0$ , ya que si  $f = g \forall t \geq 0$  pero  $f \neq g \forall t < 0$ , sus transformadas serán las mismas y no se cumple la unicidad.

**Ejemplo 4.3** Encontrar la transformada de Laplace de la función  $Ae^{-at}u(t)$ .

El cálculo de esta transformada aplicando la definición (4.1) es

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[Ae^{-at}u(t)](s) = \int_0^{\infty} Ae^{-at}e^{-st} dt \\ &= A \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ \mathcal{L}[Ae^{-at}u(t)](s) &= \frac{A}{s+a} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ahora si en lugar de resolver la integral se aplica la propiedad de **linealidad** haciendo uso de la ec. (4.4) se tiene

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}u(t)] = A\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{A}{s+a}$$

que coincide con (4.9).

**Ejemplo 4.4** Podemos hacer uso de la *igualdad de Euler* para encontrar la transformada del  $\text{sen}(\omega t)$ . Sabiendo que

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

aplicando la propiedad de **linealidad** la transformada será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)u(t)](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) u(t)\right] \\ &= \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}u(t)] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}u(t)]) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{2j\omega}{2j(s^2 + \omega^2)} \\ \mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)u(t)](s) &= \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

### Desplazamiento en $t$

Si una función  $f(t)u(t)$  se desplaza un tiempo  $t_0$  de forma que

$$f(t)u(t) \rightarrow f(t - t_0)u(t - t_0)$$

entonces su transformada<sup>5</sup> será:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)u(t - t_0)](s) = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0)e^{-st} dt$$

---

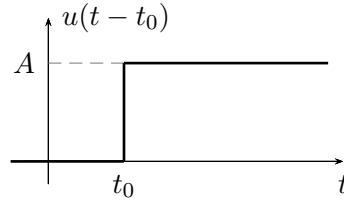
<sup>5</sup>La transformada se define para  $t \geq 0$  por lo que la integración se realiza entre 0 e  $\infty$ , si  $t$  se desplaza a  $t - t_0$  entonces la transformada queda definida para  $t - t_0 \geq 0$ , o bien  $t \geq t_0$  y la integración debe realizarse entre  $t_0$  e  $\infty$



para resolver esta integral hagamos un cambio de variable<sup>6</sup>  $q = t - t_0$  de modo que  $dq = dt$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty f(q)e^{-s(q+t_0)} dq \\
 &= \int_0^\infty f(q)e^{-sq}e^{-st_0} dq \\
 &= e^{-st_0} \underbrace{\int_0^\infty f(q)e^{-sq} dq}_{\text{transf. de } f \text{ sin desplazar}} \\
 \mathcal{L}[f(t - t_0)u(t - t_0)](s) &= e^{-st_0} F(s)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

La transformada de una función  $f(t)u(t)$  desplazada en  $t_0$  es igual a la transformada  $F(s)$  de la función sin desplazar, multiplicada por  $e^{-st_0}$ .



**Figura 4.2:** Función escalón desplazado  $f(t) = Au(t - t_0)$

**Ejemplo 4.5** Una función escalón de amplitud  $A$  se inicia un tiempo  $t_0 > 0$  (fig. 4.2). Calcular su transformada aplicando la propiedad del **desplazamiento en  $t$** .

Como sabemos (4.8), la transformada de un escalón es

$$\mathcal{L}[Au(t)](s) = \frac{A}{s}$$

entonces, según la propiedad anterior, la transformada del escalón que se inicia en  $t = t_0$  será:

$$\mathcal{L}[Au(t - t_0)](s) = e^{-st_0} \frac{A}{s}$$

<sup>6</sup>Esto cambia nuevamente el límite inferior de integración puesto que ahora  $q = t - t_0$  y como  $t - t_0 \geq 0$  entonces  $q \geq 0$

### Desplazamiento en $s$

Si una función  $f(t)u(t)$  es afectada por una exponencial  $e^{-at}$  su transformada de Laplace sufre un desplazamiento en  $s$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}f(t)u(t)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable de forma que  $s + a = g$ , la integral toma la forma de la transformada pero en la variable  $g$ , o bien, en la variable desplazada  $s + a$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(g)t} dt = F(g) \\ \mathcal{L}[e^{-at}f(t)u(t)] &= F(s + a)\end{aligned}\tag{4.12}$$

El desplazamiento en frecuencia de una función transformada se produce al multiplicar la función por un exponencial en el dominio del tiempo.

**Ejemplo 4.6** Si afectamos al escalón  $Au(t)$  por el exponencial  $e^{-at}$ , según la propiedad del **desplazamiento en  $s$**  la transformada de  $Au(t)$  se verá desplazada en  $s + a$

$$F(s) = \frac{A}{s} \quad \rightarrow \quad \tilde{F}(s) = F(s + a) = \frac{A}{s + a}$$

que es coincidente con la transformada  $\mathcal{L}[e^{-at}Au(t)](s)$  encontrada antes por integración (4.9).

### Derivación

La transformada de una función y la transformada de sus sucesivas derivadas mantienen una relación en el dominio de la variable  $s$  que hacen a la transformada de Laplace una herramienta muy potente en la resolución de ecuaciones diferenciales. Estas transformadas permiten incorporar las condiciones iniciales del problema en el dominio de  $s$ , lo que justifica el uso de la transformada unilateral de Laplace en sistemas con almacenamiento de energía.

Sea la función  $f(t)u(t)$  y su transformada  $F(s)$ , y sea  $g(t) = \frac{df}{dt}u(t)$ , entonces:

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

resolviendo la integral por partes

$$\int_0^{\infty} u dv = uv|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du$$

con

$$\begin{aligned} u = e^{-st} &\rightarrow du = -se^{-st} \\ dv = \frac{df}{dt} dt &\rightarrow v = f(t) \end{aligned}$$

la integral queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)](s) &= f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) (-se^{-st}) dt \\ &= \underbrace{f(\infty)e^{-\infty s}}_{=\text{cero}} - f(0)e^{-0s} + s \underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt}_{\text{transformada de } f(t)} = -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)] \end{aligned}$$

Como la variable  $s$  se definió con su parte real mayor que cero el término  $f(\infty)e^{-\infty s}$  será siempre cero ya que por hipótesis  $f(t)$  crece mas lentamente que la exponencial.

Finalmente nos queda

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = G(s) = s\mathcal{L}[f(t)u(t)] - f(0)$$

la transformada de la derivada de una función es el producto de  $s$  por la transformada de la función, menos el *valor inicial* o *condición inicial* de esta función  $f(t)$ . Este *valor inicial* es el valor que toma la función original  $f(t)$  en  $t = 0$ .

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s) = sF(s) - f(0) \quad (4.13)$$

**Ejemplo 4.7** Sabiendo que

$$F(s) = \mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)u(t)](s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$$

encontrar la transformada del  $\cos(\omega t)$  aplicando la propiedad de **derivación**.

Derivando respecto al tiempo  $t$

$$\frac{d(\text{sen}(\omega t))}{dt} = \omega \cos(\omega t)$$

la transformada será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d(\text{sen}(\omega t))}{dt}\right](s) &= \mathcal{L}[\omega \cos(\omega t)] = sF(s) - f(0) \\ &= s \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} - \text{sen}(\omega 0) \\ \mathcal{L}[\omega \cos(\omega t)] &= \frac{s\omega}{(s^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

es decir que

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \quad (4.14)$$

Obsérvese en este caso que la *condición inicial* del  $\sin(\omega t)$  es 0, pero esto no es siempre así y se debe tener cuidado de no pasar por alto el valor inicial de la función al calcular su derivada en el dominio de  $s$ .

**Ejemplo 4.8** La función  $f(t) = e^{-at}$  tiene como derivada en el tiempo a la función  $f'(t) = -ae^{-at}$  cuya  $F'(s)$  es, aplicando la propiedad de **linealidad** de la transformada de Laplace,

$$-aF(s) = \frac{-a}{s+a} \quad (4.15)$$

Resolviendo ahora a partir de la transformada de la derivada tenemos

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$$

como  $f(0) = e^{-a0} = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)](s) &= s \frac{1}{s+a} - 1 \\ &= \frac{s - (s+a)}{s+a} \\ \mathcal{L}[f'(t)](s) &= \frac{-a}{s+a} \end{aligned}$$

que concuerda con la ec. (4.15).

Esta propiedad de la transformada de Laplace permite convertir una ecuación diferencial  $(a_0f(t) + a_1f'(t) + \dots + a_nf^n(t) = g(t))$  en una simple ecuación algebraica en  $s$ , lo que facilita enormemente su resolución en el dominio de la frecuencia compleja.

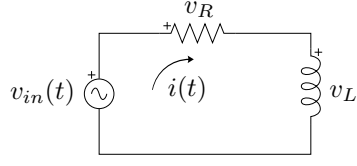
## Integración

pendiente

## 4.2. Aplicación a la resolución de circuitos

Un circuito eléctrico con elementos que almacenan energía tiene como respuesta una ecuación diferencial. El orden de esta Ec. Dif. depende de cuantos elementos inductivos o capacitivos irreductibles tenga el circuito. Por medio de la transformada de Laplace vamos a obtener una ecuación algebraica en  $s$  que representa la Ec. Dif. en el dominio de la frecuencia.

La resolución del circuito consiste por ahora en encontrar la función respuesta en el dominio de la frecuencia (más adelante veremos cómo encontrar

**Figura 4.3:** Circuito serie RL

la función respuesta en el dominio del tiempo a partir de su función anti-transformada).

Supongamos un circuito  $RL$  como el de la fig. 4.3 excitado con una fuente  $v_{in}(t)$  que tiene una corriente inicial  $i(0) = I_0$ . Se desea encontrar la función respuesta  $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$ .

Aplicando la LKV y según los signos de las tensiones tenemos

$$v_{in}(t) - v_R(t) - v_L(t) = 0$$

de donde la Ec. Dif. en términos de la respuesta será

$$v_{in}(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.16)$$

Aplicando  $\mathcal{L}$  a esta igualdad, por **unicidad** de la transformada se cumple

$$\mathcal{L}[v_{in}(t)] = \mathcal{L}\left[R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}\right]$$

luego por la propiedad de **linealidad** se cumpla también

$$\mathcal{L}[v_{in}(t)] = R\mathcal{L}[i(t)] + L\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]$$

donde

$$\mathcal{L}[v_{in}(t)] = V_{in}(s) \quad (4.17)$$

$$R\mathcal{L}[i(t)] = R I(s) \quad (4.18)$$

$$L\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] = L (sI(s) - i(0)) \quad (4.19)$$

entonces, la Ec. Dif. se transforma en la siguiente ecuación algebraica en la variable  $s$

$$V_{in}(s) = R I(s) + sL I(s) - L i(0) \quad (4.20)$$

reordenando términos y reemplazando el valor inicial de la corriente en el inductor ( $i(0) = I_0$ ), despejamos  $I(s)$

$$\begin{aligned} R I(s) + sL I(s) &= V_{in}(s) + L I_0 \\ I(s) &= \frac{V_{in}(s) + L I_0}{R + sL} \end{aligned} \quad (4.21)$$

que es la solución buscada.

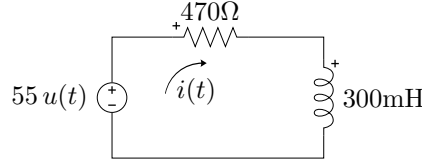
Si bien lo que tenemos hasta ahora es la transformada de la respuesta  $i(t)$ , sabemos por la propiedad de **unicidad** que esta transformada es única y por lo tanto a partir de ella podremos encontrar una y sólo una función  $i(t)$  que cumpla con

$$\mathcal{L}[i(t)](s) = I(s) \quad (4.22)$$

o bien, puesto en términos de antitransformada

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] \quad (4.23)$$

**Ejemplo 4.9** En  $t = 0$  se aplica al circuito  $RL$  serie de la fig. 4.4 una tensión continua de 55V. Encontrar la transformada de la respuesta  $i(t) \forall t > 0$ .



**Figura 4.4:** Circuito serie RL que se enciende en  $t = 0$

Según la LKV, la malla debe cumplir<sup>7</sup>

$$55 u(t) = 470 i(t) + 300 \times 10^{-3} \frac{di(t)}{dt}$$

Aplicando la transformada a ambos miembros tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[55u(t)] &= 470 \mathcal{L}[i(t)] + 300 \times 10^{-3} \mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] \\ \frac{55}{s} &= 470 I(s) + 300 \times 10^{-3} (sI(s) - i(0)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

la corriente inicial del circuito es  $i(0) = 0$  en el inductor. Despejando  $I(s)$  queda

$$\begin{aligned} I(s)(470 + 300 \times 10^{-3}s) &= \frac{55}{s} \\ I(s) &= \frac{55}{s} \left( \frac{1}{470 + 300 \times 10^{-3}s} \right) \\ I(s) &= \frac{183,33}{s(s + 1566,66)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

<sup>7</sup>La función  $u(t)$  representa la aplicación de la fuente en el tiempo  $t = 0$ .

**Ejemplo 4.10** Si ahora queremos obtener la tensión en el inductor debemos derivar la corriente  $i(t)$  en el tiempo y multiplicar por  $L$ . Pero podríamos más fácilmente obtener la transformada de la tensión en el inductor aplicando la propiedad de la **derivación**. En efecto, sabiendo que

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

la transformada será

$$V_L(s) = sLI(s) - Li(0)$$

como ya dijimos, el valor inicial de  $i(t)$  en este caso es nulo, entonces con  $L = 300\text{mH}$  nos queda

$$\begin{aligned} V_L(s) &= sL I(s) = sL \frac{183,33}{s(s + 1566,66)} \\ V_L(s) &= \frac{55}{s + 1566,66} \end{aligned} \quad (4.26)$$

#### 4.2.1. Función de transferencia

En general se define como *función de transferencia* al cociente entre la transformada de la salida y la transformada de la entrada de un sistema con todas las condiciones iniciales iguales a cero.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (4.27)$$

donde

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$$

es la transformada de la salida del sistema, y

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

es la transformada de la entrada.

En términos de circuitos eléctricos se denomina función de transferencia a la transformada de la respuesta sobre la transformada de la excitación, cuando todos los elementos inductivos y capacitivos del circuito están desenergizados.

Si analizamos por ejemplo el circuito  $RL$  serie de la figura 4.3 (página 77) donde definimos la tensión  $v_{in}(t)$  como excitación y la corriente  $i(t)$  como respuesta, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{I(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R + sL} \quad (4.28)$$

Podemos cambiar el punto de vista de la entrada y salida de este circuito, pensando al  $RL$  como una carga por la que circula una corriente  $i(t)$  provocando una caída de tensión en sus bornes  $v_{carga} = v_{in}$  como respuesta. En este caso la función de transferencia será el cociente entre la  $V_{in}(s)$  (respuesta) y la  $I(s)$  (excitación).

$$H(s) = \frac{V_{in}(s)}{I(s)} = R + sL \quad (4.29)$$

La función de transferencia definida como el cociente de las transformadas de una tensión sobre una corriente como la de la ec. (4.29) se la llama *impedancia*

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (4.30)$$

De esta forma se define la impedancia de cada uno de los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$ , considerando la caída de tensión sobre cada uno de ellos.

- Para la resistencia, la caída de tensión en el dominio de  $s$  será

$$V_R(s) = RI(s)$$

y su impedancia (función de transferencia)  $R(s)$

$$H_R(s) = \frac{V_R(s)}{I(s)} = R \quad (4.31)$$

que es la resistencia de  $s$  o de Laplace.

- Para el inductor<sup>8</sup>

$$V_L(s) = sLI(s) - Li(0)$$

entonces, su función de transferencia será

$$H_L(s) = \frac{V_L(s)}{I(s)} = sL \quad (4.32)$$

que es la impedancia inductiva de  $s$ .

- La relación tensión-corriente en un capacitor es

$$i(t) = C \frac{dv_C}{dt} \quad (4.33)$$

transformando ambos miembros

$$I(s) = C [sV_C(s) - v_C(0)]$$

---

<sup>8</sup>Recordar que la función de transferencia se define con condiciones iniciales iguales a cero.



donde  $v_C(0)$  es la tensión inicial del capacitor, como para encontrar la función de transferencia debemos hacer cero las condiciones iniciales tendremos

$$H_C(s) = \frac{V_C(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \quad (4.34)$$

que es la impedancia capacitiva de  $s$  o de Laplace.

Como puede observarse en la ec. (4.29), la impedancia total de Laplace en un circuito serie es la suma de las impedancias de Laplace de cada elemento.

#### 4.2.2. Circuito equivalente de Laplace

Si se toman en consideración las condiciones iniciales y se suponen en general distintas de cero, se puede utilizar la representación de las respuestas de cada elemento para construir lo que se conoce como *circuito equivalente de Laplace*. Este circuito equivalente debe permitirnos obtener en forma directa la ecuación de la respuesta en la variable  $s$ , sin tener que plantear primero la Ec. Dif. y luego transformar para poder resolver.

Para encontrar un circuito equivalente serie RLC partimos de la sumatoria de las tensiones en el tiempo y luego transformamos

$$\begin{aligned} v_{in}(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ V_{in}(s) &= V_R(s) + V_L(s) + V_C(s) \end{aligned}$$

como ya vimos, la transformada de las tensiones que caen en cada elemento son

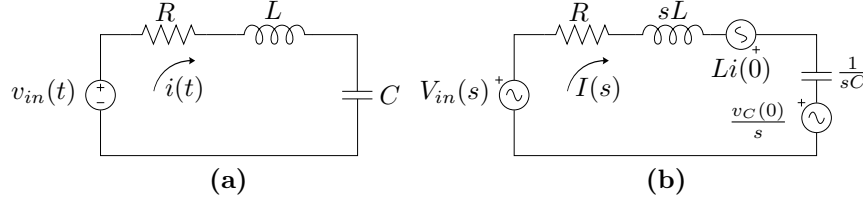
$$V_R(s) = RI(s); \quad V_L(s) = sLI(s) - Li(0); \quad V_C(s) = \frac{1}{sC} [I(s) + Cv_C(0)]$$

reemplazando

$$V_{in}(s) = RI(s) + [sLI(s) - Li(0)] + \left[ \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v_C(0)}{s} \right] \quad (4.35)$$

Analizando los diferentes términos del segundo miembro de la ec. (4.35) vemos que en algunos aparece la  $I(s)$  multiplicada por la impedancia del elemento. Según la definición de impedancia vista antes, el producto de la transformada de la corriente por esta función de transferencia nos da la transformada de la tensión a bornes del elemento. Es decir que  $R$ ,  $sL$  y  $\frac{1}{sC}$  se comportan como cargas que al ser atravesadas por una corriente producen una caída de tensión en el dominio de  $s$ . Esto es acorde a lo visto antes cuando se encontró la función de transferencia de cada elemento.

Por otro lado aparecen las condiciones iniciales, tanto del inductor como del capacitor, que no contienen el factor  $I(s)$ , y como estamos sumando transformadas de tensiones estos términos deben ser tensiones en  $s$ . En el



**Figura 4.5:** Circuito serie RLC (a), y su equivalente de Laplace(b)

circuito equivalente se los representa con generadores cuyo valor depende de la energía inicial almacenada en cada elemento.

Finalmente, agrupando generadores en un miembro y términos con el factor  $I(s)$  en el otro, la ecuación de circuito queda

$$\begin{aligned} V_{in}(s) + Li(0) - \frac{v_C(0)}{s} &= RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s) \\ V_{in}(s) + Li(0) - \frac{v_C(0)}{s} &= \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) \\ V_{in}(s) + Li(0) - \frac{v_C(0)}{s} &= Z(s)I(s) \end{aligned}$$

Nuevamente,  $Z(s)$  es la impedancia de  $s$  o impedancia de Laplace, formada por la suma de cada una de las impedancias de  $s$  del circuito.

$$Z(s) = \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) \quad (4.36)$$

El circuito de la fig. 4.5b permite obtener en forma directa la ec. (4.35) que es lo que se buscaba. Obsérvese como la polaridad de los generadores de tensión que representan las condiciones iniciales determinan el signo en la ecuación.

De igual forma, hagamos ahora el mismo análisis con un circuito  $RLC$  paralelo. Partiendo de la suma de las corrientes en el tiempo igual a la corriente total y luego transformando tendremos

$$\begin{aligned} i_{in}(t) &= i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \\ I_{in}(s) &= I_R(s) + I_L(s) + I_C(s) \end{aligned}$$

reemplazando

$$\begin{aligned} I_R(s) &= \frac{V_{in}(s)}{R} \\ I_L(s) &= \frac{1}{sL} [V_{in}(s) + Li(0)] \\ I_C(s) &= C [sV_{in}(s) - v_C(0)] \end{aligned}$$

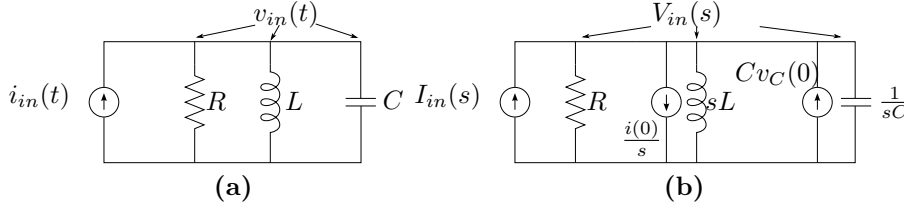
la ecuación de circuito queda

$$I_{in}(s) = \frac{V_{in}(s)}{R} + \frac{1}{sL} [V_{in}(s) + Li(0)] + C [sV_{in}(s) - v_C(0)] \quad (4.37)$$

$$I_{in}(s) = V_{in}(s) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \right) + \frac{i(0)}{s} - Cv_C(0)$$

$$I_{in}(s) = V_{in}(s) \frac{1}{R} + V_{in}(s) \frac{1}{sL} + \frac{i(0)}{s} + V_{in}(s) sC - Cv_C(0) \quad (4.38)$$

Como estamos sumando corrientes, los términos con el factor  $V_{in}(s)$  son las admitancias de Laplace y los demás son fuentes de corrientes que dependen de los valores iniciales de energía almacenada en inductores y capacitores. La ec. (4.38) puede obtenerse en forma directa del circuito de la fig. 4.6b



**Figura 4.6:** Circuito paralelo RLC (a), y su equivalente de Laplace (b) utilizando generadores de corriente para representar las condiciones iniciales

Agrupando cargas y fuentes tenemos

$$I_{in}(s) - \frac{i(0)}{s} + Cv_C(0) = V_{in}(s) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \right) \quad (4.39)$$

$$I_{in}(s) - \frac{i(0)}{s} + Cv_C(0) = V_{in}(s) \frac{1}{Z(s)}$$

es decir que la impedancia total de  $s$  en un  $RLC$  paralelo es

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$$

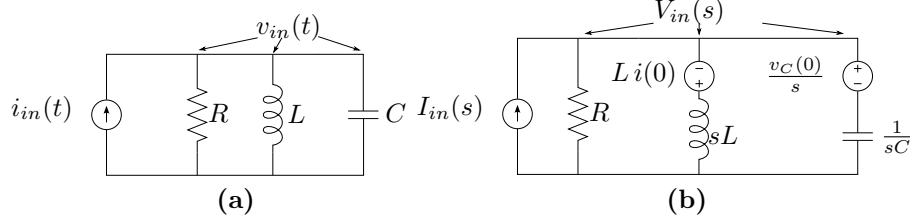
$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC}$$

Si en lugar de representar las condiciones iniciales con generadores de corriente queremos representarlas por fuentes de tensión como se hizo en el circuito equivalente serie podemos reescribir la ec. (4.37) de la siguiente forma

$$I_{in}(s) = \frac{V_{in}(s)}{R} + \frac{1}{sL} [V_{in}(s) + Li(0)] + sC \left[ V_{in}(s) - \frac{v_C(0)}{s} \right] \quad (4.40)$$

donde vemos que las condiciones iniciales son ahora tensiones que se suman o restan a la  $V_{in}(s)$  para dar la tensión aplicada  $V_L(s)$  y  $V_C(s)$  a los elementos  $sL$  y  $\frac{1}{sC}$  respectivamente, en el circuito de la fig. 4.7b se representa la ec. (4.40).

Es decir que en el circuito equivalente paralelo de Laplace cada elemento almacenador de energía tendrá asociado en serie al mismo, un generador de tensión igual al de cada elemento del circuito equivalente serie (fig. 4.5).



**Figura 4.7:** Circuito paralelo RLC (a), y su equivalente de Laplace (b) utilizando generadores de tensión para representar las condiciones iniciales

Como regla general podemos decir que la representación de cada elemento en el circuito equivalente de Laplace estará dada por su función de transferencia más un generador de tensión asociado al elemento que represente su condición inicial. Si recorremos la malla en el sentido de circulación de la corriente, en un inductor este generador debe ser una subida de tensión y en un capacitor una caída de tensión.

#### 4.2.3. Teorema del valor inicial

El *teorema del valor inicial* permite conocer el valor de inicio de la respuesta en el dominio del tiempo, estando aún en el dominio de la variable  $s$ . Esto es útil a la hora de comprobar si la respuesta encontrada cumple con las condiciones iniciales exigidas por el sistema, sin necesidad de antitransformar para la verificación.

Para encontrar la definición del teorema partimos de la transformada de la derivada de una función  $f(t)$ . Según la (4.13) la transformada de la derivada de una función  $f(t)$  es

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

si tomamos límite a ambos miembros para  $s \rightarrow \infty$  el primer miembro

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0$$

dá cero, es decir que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s) - f(0)) &= 0 \\ f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s)) \end{aligned}$$

Esta igualdad nos dice que el valor que se obtiene de tomar el límite para  $s \rightarrow \infty$  de la transformada de la respuesta, es el valor que toma dicha respuesta<sup>9</sup> en  $t = 0$ . Esto se conoce como *teorema del valor inicial*.

#### 4.2.4. Teorema del valor final

Igualmente importante al valor inicial es el valor final que tomará la respuesta en el tiempo, este valor puede conocerse mediante el *teorema del valor final* antes de pasar la respuesta al dominio del tiempo.

Si a la transformada de la derivada de una función le tomamos límite para  $s \rightarrow 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0)) \\ \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st}}_{=1} dt &= \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0)) \\ f(t) \Big|_0^{\infty} = f(\infty) - f(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0)) \\ f(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s)) \end{aligned} \quad (4.41)$$

es decir que el valor que toma el límite para  $s \rightarrow 0$  de la respuesta en el dominio de Laplace, es el valor que tomará en el dominio del tiempo para  $t = \infty$ .

La ecuación (4.41) se conoce como *teorema del valor final*. Este teorema es aplicable sólo si todos los polos de la función  $F(s)$  tienen parte real negativa, menos uno que puede ser cero. La causa de esta restricción es que si una función en el dominio de Laplace tiene polos con parte real positiva (o no negativa) la antitransformada de esta función tiene un comportamiento oscilante o inestable en el tiempo, es decir que en  $t = \infty$  no tomará un valor real finito. El análisis de estabilidad de los sistemas es materia de estudio de Teoría de los circuitos II.

**Ejemplo 4.11** Encontrar el valor que toma la función  $\sin(\omega t)$  para  $t \rightarrow \infty$  aplicando el *teorema del valor final* a su transformada.

La transformada del  $\sin(\omega t)$  es, según la ec. (4.10)

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)u(t)] = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

pero los dos polos de esta función tienen parte real igual a cero

$$\operatorname{Re}\{+j\omega\} = 0$$

$$\operatorname{Re}\{-j\omega\} = 0$$

---

<sup>9</sup>Siempre que  $f(t)$  sea continua en  $t = 0$

entonces si le aplicamos el TVF (Teorema del Valor Final) a esta función obtendremos un resultado erróneo, en efecto

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} = 0 \quad (4.42)$$

nos dice que  $\text{sen}(\omega\infty) = 0$ , lo cual no es verdadero porque el valor que toma la función senoidal en el infinito está indefinido (entre 1 y  $-1$ ).

$$\text{sen}(\omega t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \text{indefinido} \neq 0$$

### 4.3. Antitransformada o transformada inversa de Laplace

La aplicación de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales (o de sistemas cuyas respuestas se expresen mediante ecuaciones diferenciales) se completa cuando luego de obtenida la respuesta en el dominio de la variable  $s$  se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo. Esto es posible gracias a la propiedad de **unicidad** que tiene esta transformación, la cual nos asegura que existe una única función en el tiempo cuya transformada coincide con nuestra respuesta en el dominio de  $s$ .

La operación que lleva  $F(s)$  a  $f(t)$  se llama *antitransformada* o *transformada inversa de Laplace* y se define como<sup>10</sup>

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2j\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (4.43)$$

pero como esta integral es en general de difícil resolución, la transformada inversa de una función  $F(s)$  se encuentra siempre buscando una función  $f(t)$  candidata, cuya transformada sea  $F(s)$ . Para facilitar la búsqueda de esa función  $f(t)$  se puede descomponer la función original  $F(s)$  en una suma de funciones más sencillas y luego aplicar la propiedad de **linealidad**. Es decir

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s) + F_3(s)] \end{aligned}$$

donde  $F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s)$  y  $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ . Estas funciones sencillas  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$  deben ser además conocidas transformadas de modo tal que puedan asociarse fácilmente a sus funciones correspondientes en el tiempo.

---

<sup>10</sup>Siempre que  $F(s)$  no tenga singularidades con parte real positiva, si las tiene debe elegirse un camino de integración tal que contenga también estas singularidades con parte real positiva, pero no son casos que se encuentren en los sistemas que aquí se tratan

### 4.3.1. Desarrollo en fracciones parciales

Una función en el dominio de la variable  $s$  que satisface

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (4.44)$$

si se escribe como  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , entonces se puede asegurar que el grado de  $P(s)$  es siempre menor al de  $Q(s)$ .

El método de expansión en fracciones simples permite expandir un cociente de polinomios en una suma de fracciones con una constante a determinar como numerador y una raíz del polinomio  $Q(s)$  como denominador. Las fracciones simples propuestas dependen del tipo de raíces de  $Q(s)$ .

**Raíces simples.** Sea  $Q(s) = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \cdots (s + \alpha_n)$  entonces  $F(s)$  puede escribirse

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s + \alpha_1)} + \frac{A_2}{(s + \alpha_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(s + \alpha_n)}$$

Para encontrar las constantes se multiplica ambos miembros por la raíz denominador y se toma límite para  $s$  que tiende a dicha raíz. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\alpha_1} \left[ (s + \alpha_1) \frac{P(s)}{Q(s)} \right] &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_1} \left[ A_1 + (s + \alpha_1) \frac{A_2}{(s + \alpha_2)} + \cdots + (s + \alpha_1) \frac{A_n}{(s + \alpha_n)} \right] \\ \lim_{s \rightarrow -\alpha_1} \left[ (s + \alpha_1) \frac{P(s)}{Q(s)} \right] &= A_1 \end{aligned}$$

En general, cualquier constante  $i$ -ésima puede ser calculada

$$A_i = \lim_{s \rightarrow -\alpha_i} \left[ (s + \alpha_i) \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \quad (4.45)$$

y la función  $f(t)$  será

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\alpha_i t} \quad (4.46)$$

**Raíces múltiples.** Sea  $Q(s) = (s + \alpha)^n$ , entonces  $F(s)$  puede escribirse

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s + \alpha)} + \frac{A_2}{(s + \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s + \alpha)^n}$$

Para encontrar la constante  $A_n$  se multiplica ambos miembros por el denominador de  $F(s)$  y se toma límite para  $s \rightarrow -\alpha$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ (s + \alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right] &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} [A_1(s + \alpha)^{n-1} + A_2(s + \alpha)^{n-2} + \cdots \\ &\quad \cdots + A_{n-1}(s + \alpha) + A_n] \\ \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ (s + \alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right] &= A_n \end{aligned}$$

Ahora para hallar  $A_{n-1}$  se toma la derivada respecto a  $s$  de  $(s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)}$  y luego nuevamente límite para  $s \rightarrow -\alpha$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{d}{ds} \left( (s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right) \right] &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ (n-1)A_1(s+\alpha)^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + (n-2)A_2(s+\alpha)^{n-3} + \dots + A_{n-1} \right] \\ \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{d}{ds} \left( (s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right) \right] &= A_{n-1} \end{aligned}$$

En general, para encontrar la constante  $A_{n-k}$  se toma el límite de la derivada  $k$ -ésima de  $(s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)}$  para  $s \rightarrow -\alpha$  y se divide por el factorial de  $k$

$$A_{n-k} = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{1}{k!} \frac{d^{(k)}}{ds} \left( (s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right) \right]$$

y la función  $f(t)$  será

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i t^{i-1} e^{-\alpha t} \quad (4.47)$$

**Raíces complejas.** Si bien las raíces complejas pueden ser calculadas según sean simples o múltiples como se vio en los puntos anteriores, es posible simplificar las operaciones de antitransformación si se observa lo siguiente:

Sea  $Q(s) = s^2 + ps + q$ , con raíces complejas conjugadas ( $s_{1-2} = -\alpha \pm j\omega$ ) entonces la expansión en fracciones simples será

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{(s+\alpha+j\omega)} + \frac{A^*}{(s+\alpha-j\omega)} \quad (4.48)$$

donde  $A$  y  $A^*$  son constantes complejas y  $A^*$  es el conjugado de  $A$ . Según (4.46) la  $f(t)$  será entonces una función compleja, la que mediante la igualdad de Euler podrá ser expresada como una función real en términos de senos y cosenos. Por ejemplo si se desea obtener una respuesta real en términos de un único coseno se puede antitransformar y poner  $A$  en forma polar  $A = |A|e^{j\theta}$ , con lo que  $A^* = |A|e^{-j\theta}$ , entonces la  $f(t)$  será

$$\begin{aligned} f(t) &= |A|e^{j\theta}e^{(-\alpha-j\omega)t} + |A|e^{-j\theta}e^{(-\alpha+j\omega)t} = |A|e^{-\alpha t} \left( e^{j(\omega t - \theta)} + e^{-j(\omega t - \theta)} \right) \\ f(t) &= 2|A|e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Pero si operamos con (4.48) de forma que nos queden las transformadas de estos senos y cosenos, podemos obtener directamente la  $f(t)$  real.



En efecto, haciendo común denominador y luego operando tenemos

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A(s + \alpha - j\omega) + A^*(s + \alpha + j\omega)}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \\ F(s) &= \frac{(A + A^*)(s + \alpha) + j(-A + A^*)\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

pero  $(A + A^*) = 2 \operatorname{Re}\{A\}$  y  $j(A^* - A) = -2 \operatorname{Im}\{A\}$ , ambos valores reales, entonces

$$F(s) = 2 \operatorname{Re}\{A\} \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} + 2 \operatorname{Im}\{A\} \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \quad (4.51)$$

que corresponden a la transformada de un coseno y un seno multiplicados por un exponencial  $e^{-\alpha t}$

$$f(t) = 2 e^{-\alpha t} (\operatorname{Re}\{A\} \cos(\omega t) + \operatorname{Im}\{A\} \operatorname{sen}(\omega t)) \quad (4.52)$$

Esto nos permite, para el caso de raíces complejas conjugadas, plantear en forma directa la siguiente igualdad

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = A \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} + B \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \quad (4.53)$$

y encontrar las constantes  $A$  y  $B$  dando a  $s$  dos valores cualquiera distintos de  $-\alpha \pm j\omega$ .

#### 4.3.2. Fórmula de Heaviside

Si la función  $F(s)$  tiene solamente polos simples, existe una fórmula conocida como *fórmula del desarrollo de Heaviside* que permite obtener la antitransformada  $f(t)$  en forma directa.

Sea  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  y  $-\alpha_i$  las  $n$  raíces **distintas** de  $Q(s)$ , entonces la  $f(t)$  se obtiene haciendo

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{P(-\alpha_i)}{Q'(-\alpha_i)} e^{-\alpha_i t} \quad (4.54)$$

donde  $Q'$  es la derivada de  $Q$  respecto de  $s$ .

Para probar esta igualdad definamos la función  $Q_i(s)$  como

$$Q_i(s) = \frac{Q(s)}{s + \alpha_i} \quad (4.55)$$

es decir que  $Q(s)$  se puede expresar como  $Q(s) = Q_i(s)(s + \alpha_i)$  y además la (4.45) se puede escribir utilizando esta nueva función como

$$A_i = \lim_{s \rightarrow -\alpha_i} \left[ \frac{P(s)}{Q_i(s)} \right] = \frac{P(-\alpha_i)}{Q_i(-\alpha_i)} \quad (4.56)$$

Si tomamos la derivada de  $Q(s)$  respecto de  $s$

$$Q'(s) = \frac{d}{ds} [Q_i(s)(s + \alpha_i)] = Q_i(s) + (s + \alpha_i)Q'_i(s) \quad (4.57)$$

y hacemos  $s = -\alpha_i$  obtenemos que

$$Q'(-\alpha_i) = Q_i(-\alpha_i) \quad (4.58)$$

con lo que la (4.56) nos queda

$$A_i = \frac{P(-\alpha_i)}{Q'(-\alpha_i)} \quad (4.59)$$

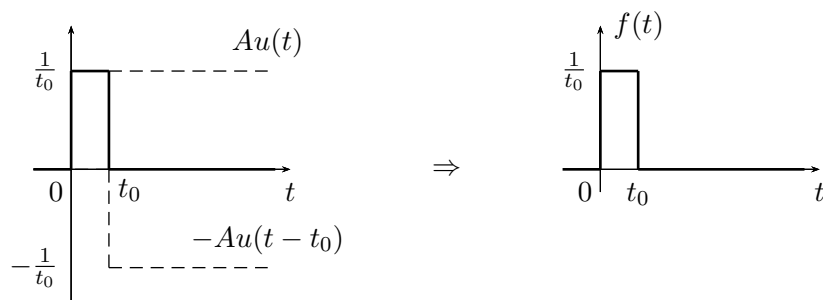
y llevando esta a (4.46) obtenemos la (4.54).

#### 4.4. Respuesta al impulso

La función delta de Dirac, o función delta, o función impulso es una función definida como<sup>11</sup>

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{para } t = 0 \\ 0 & \forall \text{ otro } t \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Si un circuito es excitado por una función como esta, se obtendrá una respuesta muy particular que analizaremos a continuación.



**Figura 4.8:** Función pulso

Empecemos por encontrar la transformada de Laplace de la función impulso. Para esto definamos previamente una función pulso como la suma de dos escalones ( $Au(t)$  y  $-Au(t - t_0)$ ) desplazados uno de otro, de igual

<sup>11</sup>Si bien esta función no es realizable físicamente, ya que su amplitud debe ser infinita y su duración en el tiempo debe ser cero, es de gran utilidad en el análisis de circuitos, como se verá más adelante.

amplitud pero de signo opuesto, de forma tal que se anulen entre sí para  $t > t_0$  (fig. 4.8). Con  $A = \frac{1}{t_0}$ , la función pulso será

$$f(t) = A u(t) - A u(t - t_0) = \frac{1}{t_0} u(t) - \frac{1}{t_0} u(t - t_0)$$

tal que, cualquiera sea el valor de  $t_0$ , el área de esta función es igual a 1

Ahora, si a esta función pulso le tomamos límite para  $t_0 \rightarrow 0$  obtenemos la función impulso, es decir

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t_0} u(t) - \frac{1}{t_0} u(t - t_0) \right) = \delta(t)$$

transformando ambos miembros de esta igualdad

$$\mathcal{L} \left[ \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t_0} u(t) - \frac{1}{t_0} u(t - t_0) \right) \right] = \mathcal{L} [\delta(t)]$$

podemos sacar el límite afuera de la transformada, por la propiedad de **linealidad**

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\delta(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \{ \mathcal{L} [u(t)] - \mathcal{L} [u(t - t_0)] \} \\ \mathcal{L} [\delta(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s} \right] \\ \mathcal{L} [\delta(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-st_0}}{s t_0} \end{aligned} \quad (4.60)$$

para resolver este límite se puede aplicar la regla de L'hospital, esto es derivar numerador y denominador respecto de la variable que se está tomando límite

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\delta(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial(1 - e^{-st_0})}{\partial t_0}}{\frac{\partial(st_0)}{\partial t_0}} \\ \mathcal{L} [\delta(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{s e^{-st_0}}{s} = \frac{s}{s} \\ \mathcal{L} [\delta(t)] &= 1 \end{aligned} \quad (4.61)$$

es decir, la transformada del delta de Dirac es la *unidad* en el dominio de la variable  $s$ .

Recordando que se definió la función de transferencia como el cociente de la transformada de la salida sobre la transformada de la entrada con todas las condiciones iniciales iguales a cero

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} \quad (4.62)$$

si aplicamos a la entrada un delta de Dirac tendremos

$$v_{in}(t) = \delta(t) \Rightarrow V_{in}(s) = 1$$

entonces

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \frac{V_{out}(s)}{1}$$

$$H(s) = V_{out}(s)$$

es decir que si a un sistema lo excitamos con un delta de Dirac, la transformada de la respuesta será su función de transferencia.

A esta particular respuesta del sistema ante una excitación delta de Dirac se la conoce como *respuesta al impulso*

$$\text{respuesta al impulso } h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (4.63)$$

Si se conoce la respuesta al impulso  $h(t)$  de un sistema se conoce entonces su función de transferencia, y por ende se puede calcular la transformada de la salida  $V_{out}(s)$  para cualquier  $V_{in}(s)$

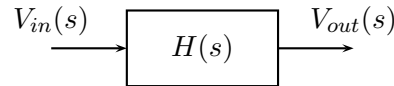
$$V_{out}(s) = V_{in}(s) H(s)$$

esto, sin embargo, no es tan sencillo como parece, debido a la imposibilidad física de obtener un delta de Dirac. En algunas aplicaciones se utiliza una aproximación al delta de Dirac, lográndose en la práctica resultados muy aproximados a los teóricos.

## 4.5. Teorema de convolución

En el campo de la ingeniería de control, un sistema se representa normalmente como un bloque con su función de transferencia, tal como se muestra en la (fig. 4.9), donde para obtener la salida  $V_{out}(s)$  se debe multiplicar la entrada  $V_{in}(s)$  por la función de transferencia del bloque  $H(s)$ .

$$V_{out}(s) = H(s) V_{in}(s)$$



**Figura 4.9:** Bloque de sistema con función de transferencia  $H(s)$

En el dominio del tiempo la salida será la antitransformada de este producto

$$v_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_{out}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) V_{in}(s)] \quad (4.64)$$

Es decir, la transformada inversa del producto de la entrada por la función de transferencia nos da directamente la salida en el dominio del tiempo.

Como sabemos

$$\begin{aligned} v_{in}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[V_{in}(s)] \\ h(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \end{aligned}$$

Veamos si operando a partir de estas igualdades podemos obtener una relación directa entre la salida, entrada y respuesta al impulso, todo en el dominio del tiempo. De esta forma, conociendo  $h(t)$  se podrá conocer  $v_{out}(t)$  para cualquier  $v_{in}(t)$  sin necesidad de transformar al dominio de  $s$ .

Partiendo de la integral de transformación<sup>12</sup> de  $H(s)$

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (4.65)$$

multipliquemos ambos miembros por  $V_{in}(s)$ , y como la integral es a lo largo de  $\tau$ , se puede introducir esta función dentro del integrando sin modificar la operación

$$V_{in}(s) H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} V_{in}(s) d\tau \quad (4.66)$$

el producto  $e^{-s\tau} V_{in}(s)$  del integrando es la transformada de la función desplazada  $v_{in}(t - \tau)$  (4.11).

$$\mathcal{L}[v_{in}(t - \tau)] = e^{-s\tau} V_{in} = \int_{\tau}^{\infty} v_{in}(t - \tau) e^{-st} dt$$

Si introducimos esta nueva integral a lo largo de  $t$  dentro de (4.66) nos queda

$$V_{in}(s) H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) \left[ \int_{\tau}^{\infty} v_{in}(t - \tau) e^{-st} dt \right] d\tau = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} h(\tau) v_{in}(t - \tau) e^{-st} dt d\tau$$

Se puede invertir el orden de integración de esta integral doble, teniendo cuidado de adecuar los límites de integración para integrar sobre el mismo dominio. Integrar a lo largo de  $t$  entre  $\tau$  e  $\infty$  y luego a lo largo de  $\tau$  entre 0 e  $\infty$ , es equivalente a integrar a lo largo de  $\tau$  entre 0 y  $t$  y luego a lo largo de  $t$  entre 0 e  $\infty$ .

$$V_{in}(s) H(s) = \int_0^{\infty} \int_0^t h(\tau) v_{in}(t - \tau) e^{-st} d\tau dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^t h(\tau) v_{in}(t - \tau) d\tau \right] dt$$

finalmente, vemos que la integral dentro de los corchetes es una función dependiente solo de  $t$  (ya que la variable  $\tau$  desaparece al ser valuada en 0 y  $t$  después de integrar). Entonces esta ecuación es la transformada de Laplace de la función de  $t$  entre corchetes

$$V_{in}(s) H(s) = \mathcal{L} \left[ \int_0^t h(\tau) v_{in}(t - \tau) d\tau \right] \quad (4.67)$$

<sup>12</sup>Se usa la variable  $\tau$  para más adelante poder usar  $t$  en otra integral

de donde, por propiedad de **unicidad**, se tiene que la integral entre corchetes es igual a la antitransformada del producto  $V_{in}(s) H(s)$

$$\mathcal{L}^{-1} [V_{in}(s) H(s)] = \int_0^t h(\tau) v_{in}(t - \tau) d\tau \quad (4.68)$$

y como vimos en (4.62) el producto de la entrada en  $s$  por la función de transferencia nos da la salida en  $s$

$$\mathcal{L}^{-1} [V_{out}(s)] = \mathcal{L}^{-1} [V_{in}(s) H(s)] = v_{out}(t) \quad (4.69)$$

reemplazando en (4.68) nos queda

$$v_{out}(t) = \int_0^t h(\tau) v_{in}(t - \tau) d\tau \quad (4.70)$$

esta integral es la operación que relaciona salida y entrada en el tiempo, y se llama *integral de convolución*. Para representarla se utiliza el símbolo  $*$

$$v_{out}(t) = h(t) * v_{in}(t) \quad (4.71)$$

Es decir, se puede obtener la respuesta en el tiempo de un sistema para una determinada excitación calculando la integral de convolución de su respuesta al impulso  $h(t)$  con la excitación deseada.

Matemáticamente, convolucionar dos funciones en el tiempo equivale a multiplicar sus transformadas en el dominio de Laplace. Y, viceversa, multiplicar dos funciones en el tiempo es equivalente a convolucionar sus transformadas en el dominio de Laplace.

La convolución es *conmutativa* (4.72), *asociativa* (4.73) y *distributiva* (4.74), propiedades que se deducen con facilidad de su definición.

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (4.72)$$

$$f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t) \quad (4.73)$$

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = (f(t) * g(t)) + (f(t) * h(t)) \quad (4.74)$$

**Ejemplo 4.12** Encontrar la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(t) = 22 e^{-2000t} u(t)$$

para las entradas  $v_{in1}(t) = 12 u(t) V$  y  $v_{in2}(t) = 12 e^{-2000t} u(t) V$

Para encontrar las salidas correspondientes a cada entrada debemos convolucionar cada una de ellas con la respuesta al impulso del sistema.

Con  $v_{in1}(t) = 12 u(t) V$  será

$$v_{out1}(t) = \int_0^t h(t - \tau) v_{in1}(t) d\tau = \int_0^t 22 e^{-2000(t-\tau)} u(t - \tau) 12 u(\tau) d\tau$$

$$v_{out1}(t) = 264 e^{-2000t} \int_0^t e^{2000\tau} u(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

ambos escalones,  $u(t-\tau)$  y  $u(\tau)$ , valen 1 entre los límites de integración 0 y  $t$ , entonces nos queda

$$v_{out1}(t) = 264 e^{-2000t} \int_0^t e^{2000\tau} d\tau = 264 e^{-2000t} \frac{e^{2000\tau}}{2000} \Big|_0^t$$

$$v_{out1}(t) = \frac{264}{2000} - \frac{264}{2000} e^{-2000t}$$

Con  $v_{in2}(t) = 12 e^{-2000t} u(t)$   $V$  la integral será

$$v_{out2}(t) = \int_0^t 22 e^{-2000(t-\tau)} u(t-\tau) 12 e^{-2000\tau} u(\tau) d\tau$$

$$v_{out2}(t) = 264 e^{-2000t} \int_0^t d\tau = 264 e^{-2000t} \tau \Big|_0^t$$

$$v_{out2}(t) = 264 t e^{-2000t}$$





## Capítulo 5

# Método fasorial

### 5.1. Cálculo fasorial

El cálculo fasorial es un método que permite obtener de una forma sencilla la respuesta de régimen permanente de un circuito excitado con señales sinusoidales. Es decir, resuelve en forma directa la respuesta forzada de la ODE de equilibrio del circuito cuando la fuente forzante es de tipo sinusoidal. El método se basa en la representación de la señal eléctrica mediante un vector complejo o fasor, lo cual permite transformar la ODE en una ecuación algebraica.

#### 5.1.1. Fundamentación

Supóngase un circuito excitado con una fuente senoidal de la forma

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta_v) \quad (5.1)$$

esta fuente, según la igualdad de Euler, también puede escribirse como

$$v(t) = \text{Im} \left[ V_m e^{j(\omega t + \theta_v)} \right] \quad (5.2)$$

si se trata de una fuente cosenoidal se puede escribir tomando la parte real de la exponencial anterior

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) = \text{Re} \left[ V_m e^{j(\omega t + \theta_v)} \right] \quad (5.3)$$

Es decir que si se alimenta al sistema con una fuente exponencial de forma

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta_v)} = V_m \cos(\omega t + \theta_v) + j V_m \text{sen}(\omega t + \theta_v) \quad (5.4)$$

se estará alimentando con dos fuentes sinusoidales, una real y otra imaginaria, las que por teorema de superposición generarán dos respuestas independientes, una real debida a  $V_m \cos(\omega t + \theta_v)$  y la otra imaginaria debida a

$jV_m \sin(\omega t + \theta_v)$ . Luego, la respuesta de interés será la parte imaginaria o la parte real de la respuesta encontrada, según sea la fuente de alimentación que excite al circuito de tipo senoidal o cosenoidal respectivamente.

Utilizar una fuente exponencial como la (5.4) para excitar un circuito presenta ciertas ventajas de cálculo que facilitan la obtención de la respuesta forzada, ya que no se necesita resolver la ODE de equilibrio del sistema.

### 5.1.2. Fasor y fasor armónico

En ingeniería, se llama fasor armónico a la representación compleja de una señal sinusoidal (como la (5.4)). Este fasor armónico se compone de un vector fijo ( $e^{j\theta_v}$ ) y un vector rotante que gira a  $\omega$  radianes por segundo ( $e^{j\omega t}$ ). La parte fija junto con el módulo del vector se lo llama simplemente fasor, y es la representación en  $t = 0$  del fasor armónico.

Tomando como ejemplo la (5.4) tenemos

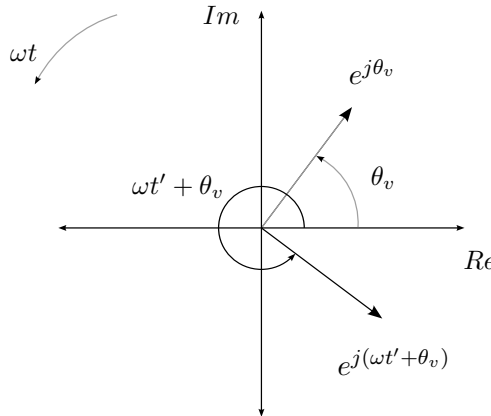
$$\underbrace{V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}}_{\text{fasor armónico}} = \underbrace{\bar{\mathbf{V}}_m}_{\text{fasor}} e^{j\omega t} \quad (5.5)$$

con

$$\bar{\mathbf{V}}_m = V_m e^{j\theta_v} \quad (5.6)$$

el fasor formado por la amplitud  $V_m$  y la fase inicial  $\theta_v$  de la señal que representa el fasor armónico<sup>1</sup> (5.5).

En la figura 5.1 se puede ver gráficamente un fasor armónico, un incremento de tiempo positivo se representa por convención como una rotación antihoraria del vector. Para  $t = 0$  el fasor armónico vale  $\bar{\mathbf{V}}_m$



**Figura 5.1:** Fasor armónico en  $t = 0$  y  $t = t'$

<sup>1</sup>En este caso las señales (5.1) o (5.3), según se tome, respectivamente, la parte imaginaria o real del fasor armónico.

### 5.1.3. Fasor eficaz

Para simplificar la notación, el fasor habitualmente se escribe en notación polar<sup>2</sup>

$$\bar{\mathbf{V}}_m = V_m \angle \theta_v \quad (5.7)$$

Debido a que en las aplicaciones eléctricas se utilizan normalmente los valores eficaces de tensiones y corrientes, se prefiere la utilización del valor eficaz de la señal sinusoidal en la representación fasorial, es decir

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta_v = V_{ef} \angle \theta_v = \frac{\bar{\mathbf{V}}_m}{\sqrt{2}} \quad (5.8)$$

En adelante se utiliza esta convención para la representación fasorial, que se la suele llamar *fasor eficaz*. Luego, suponiendo que  $v(t)$  es una función cosenoidal, la función temporal en términos del fasor eficaz será

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) = \text{Re}[\sqrt{2} \bar{\mathbf{V}} e^{j\omega t}] \quad (5.9)$$

### 5.1.4. Transformada fasor

En general, y según lo anterior, una señal sinusoidal tiene asociado un fasor cuyo módulo es el valor eficaz de la señal y cuyo argumento es el argumento de la señal en  $t = 0$ , es decir la señal

$$y(t) = A \cos(\omega t \pm \eta) \quad (5.10)$$

tiene asociado el fasor

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \angle \pm \eta \quad (5.11)$$

Podemos poner esta asociación en términos de una transformada de forma que

$$\mathcal{P}[A \cos(\omega t \pm \eta)] = \bar{\mathbf{Y}} \quad (5.12)$$

la transformación (5.12) se conoce con el nombre de *transformada fasor*. Esta transformada mapea una función sinusoidal (dominio del tiempo) en un vector complejo (que se dice está en el dominio de la frecuencia compleja  $j\omega$ ). Notar que tanto una señal senoidal como una cosenoidal tiene el mismo fasor asociado, por lo que la transformada fasor no es única y para poder recuperar adecuadamente la señal temporal asociada a un fasor debe conocerse la excitación.

---

<sup>2</sup>Aunque para operaciones de suma o resta se prefiere la notación rectangular

### Derivada de un fasor

Consideremos la función cosenoidal anterior  $y(t)$  en términos de su fasor

$$y(t) = \text{Re}[\sqrt{2}\bar{\mathbf{Y}}e^{j\omega t}] = \text{Re}[Ae^{j(\omega t + \eta)}] \quad (5.13)$$

derivando respecto a  $t$  tenemos

$$\frac{dy(t)}{dt} = \text{Re}[j\omega Ae^{j(\omega t + \eta)}] = \text{Re}[j\omega\sqrt{2}\bar{\mathbf{Y}}e^{j\omega t}] \quad (5.14)$$

es decir que la función derivada tiene asociado el mismo fasor que la función primitiva multiplicado por  $j\omega$ .

En términos de la transformada fasor tenemos

$$\mathcal{P}[y(t)] = \bar{\mathbf{Y}} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{P}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = j\omega\bar{\mathbf{Y}} \quad (5.16)$$

Esta propiedad de la transformada fasor hace que una ODE en el dominio del tiempo se transforme en una ecuación algebraica en el dominio de  $j\omega$ .

El fasor asociado a la función integral se obtiene de forma similar como se verá mas adelante.

## 5.2. Relación tensión-corriente fasorial

Para poder aplicar esta nueva representación compleja de las señales de excitación, debemos determinar cuál será la respuesta de corriente de cada elemento ante una excitación como ésta, es decir determinar la relación tensión-corriente fasorial para cada elemento.

### 5.2.1. Resistor

La relación tensión-corriente en un elemento resistivo puro, según Ley de Ohm es

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (5.17)$$

Si la excitación  $v(t)$  es una señal cosenoidal, según lo visto en el párrafo anterior, esta señal puede ser representada mediante un fasor armónico

$$v(t) = \text{Re}\left[\bar{\mathbf{V}}\sqrt{2}e^{j\omega t}\right] \quad (5.18)$$

luego

$$i(t) = \frac{\text{Re}\left[\bar{\mathbf{V}}\sqrt{2}e^{j\omega t}\right]}{R} = \text{Re}\left[\frac{\bar{\mathbf{V}}\sqrt{2}e^{j\omega t}}{R}\right] \quad (5.19)$$

que también es un fasor armónico, ya que al dividir un complejo por el escalar  $R$  se obtendrá otro complejo con su módulo escalado. Este nuevo fasor armónico que representa a la corriente  $i(t)$  se puede escribir

$$Re \left[ \frac{\bar{\mathbf{V}}\sqrt{2}e^{j\omega t}}{R} \right] = Re \left[ \bar{\mathbf{I}}\sqrt{2}e^{j\omega t} \right] \quad (5.20)$$

Si ahora consideramos una excitación senoidal, las ecuaciones anteriores serán idénticas sólo que se deberá tomar la parte imaginaria de cada fasor armónico.

En general podemos decir que en un resistor la relación fasorial tensión-corriente será

$$\frac{\bar{\mathbf{V}}\sqrt{2}e^{j\omega t}}{R} = \bar{\mathbf{I}}\sqrt{2}e^{j\omega t} \quad (5.21)$$

de donde

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{R} = \frac{V_{ef}}{R} \angle \theta_v = I_{ef} \angle \theta_i \quad (5.22)$$

y el fasor corriente tiene el módulo del fasor tensión dividido  $R$ ,  $I_{ef} = \frac{V_{ef}}{R}$ , y ambos están en fase,  $\theta_i = \theta_v$ .

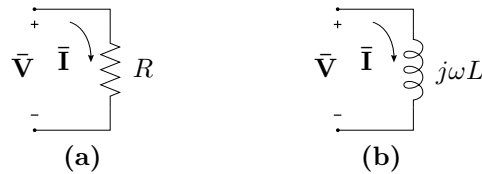
De (5.22) vemos que la relación tensión-corriente fasorial en un resistor es

$$\frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}} = R \quad (5.23)$$

En base a las ecuaciones anteriores podemos escribir una nueva propiedad de la transformada fasor, si se multiplica una función sinusoidal por un escalar, el fasor asociado también se multiplica por el mismo escalar

$$\mathcal{P}[i(t)] = \bar{\mathbf{I}} \quad (5.24)$$

$$\mathcal{P}[Ri(t)] = R\bar{\mathbf{I}} \quad (5.25)$$



**Figura 5.2:** Relación tensión-corriente fasorial en una resistencia y un inductor

### 5.2.2. Inductor

Para el caso de una carga inductiva pura de valor  $L$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \quad (5.26)$$

si la excitación es un fasor armónico entonces la corriente será

$$i(t) = \frac{1}{L} \int \bar{\mathbf{V}} \sqrt{2} e^{j\omega t} dt = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{j\omega L} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (5.27)$$

esto es un cociente entre dos complejos, donde el denominador es un imaginario puro. Operando

$$i(t) = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{j\omega L} \sqrt{2} e^{j\omega t} = \left[ \frac{V_{ef}}{\omega L} \angle (\theta_v - \frac{\pi}{2}) \right] \sqrt{2} e^{j\omega t} = \bar{\mathbf{I}} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (5.28)$$

que es otro fasor armónico donde

$$\bar{\mathbf{I}} = I_{ef} / \theta_i \quad (5.29)$$

con  $I_{ef} = \frac{V_{ef}}{\omega L}$  y  $\theta_i = \theta_v - \frac{\pi}{2}$ . Notar el atraso de fase de  $\frac{\pi}{2}$  de la corriente respecto de la tensión aplicada, tal como se espera en un inductor ideal.

De (5.28), la relación tensión-corriente fasorial en un inductor será

$$\frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}} = j\omega L \quad (5.30)$$

Observando la relación tensión-corriente del elemento en el dominio del tiempo (5.26) y en el dominio de la frecuencia compleja (5.30) podemos establecer la regla de integración de la transformada fasor. La transformada fasor de la integral de una función sinusoidal se obtiene dividiendo por  $j\omega$  al fasor de la función

$$\mathcal{P}[v(t)] = \bar{\mathbf{V}} \quad (5.31)$$

$$\mathcal{P} \left[ \int v(t) dt \right] = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{j\omega} \quad (5.32)$$

### 5.2.3. Capacitor

Finalmente, si se trata de una carga capacitiva pura de valor  $C$  tendremos

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (5.33)$$

$$i(t) = j\omega C \bar{\mathbf{V}} \sqrt{2} e^{j\omega t} = \bar{\mathbf{I}} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (5.34)$$

de donde el fasor corriente será

$$\bar{\mathbf{I}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}} = I_{ef} / \theta_i \quad (5.35)$$

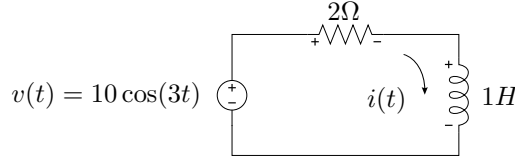
con  $I_{ef} = \omega C V_{ef}$  y  $\theta_i = \theta_v + \frac{\pi}{2}$ . Notar en este caso el adelanto de fase de  $\frac{\pi}{2}$  de la corriente respecto de la tensión aplicada, tal como se espera de un capacitor ideal.

De (5.34) se obtiene la relación tensión-corriente fasorial en un capacitor

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (5.36)$$

### 5.3. Resolución de circuitos usando fasores

La aplicación del método fasorial a la resolución de circuitos implica la utilización de las relaciones tensión corriente fasoriales deducidas anteriormente. Para esto se plantea antes la ecuación de equilibrio en el dominio del tiempo para después transformarla al dominio de la frecuencia.



**Figura 5.3:** RL excitado con fuente de tensión senoidal

La ecuación de equilibrio del circuito de la figura 5.3 es

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.37)$$

reemplazando las relaciones temporales por las relaciones fasoriales deducidas anteriormente, se obtiene la ecuación de equilibrio en el dominio de la frecuencia.

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} \quad (5.38)$$

Como vemos, la ecuación diferencial se convierte en una ecuación algebraica en términos de los fasores de excitación y respuesta, llamada *ecuación de equilibrio fasorial*. De esta ecuación podemos obtener la respuesta  $\bar{I}$  simplemente dividiendo ambos miembros por  $R + j\omega L$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{(R + j\omega L)} = \frac{V_{ef}/\theta_v}{Z/\varphi} = I_{ef}/\theta_i \quad (5.39)$$

donde  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$  y  $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ . Igualando módulos y argumentos de (5.39) vemos entonces que el módulo del fasor corriente será

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (5.40)$$

y su argumento

$$\theta_i = \theta_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \theta_v - \varphi \quad (5.41)$$

Nótese que el argumento del fasor corriente  $\theta_i$  se forma restando al argumento del fasor tensión el ángulo  $\varphi$ , que es el argumento del número complejo del denominador de (5.39). Este complejo depende de los elementos que conforman el circuito y su argumento  $\varphi$  puede tomar valores entre  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ <sup>3</sup>. Si  $\varphi > 0$  se dice que la corriente *atrás* a la tensión, y si  $\varphi < 0$  se dice que la corriente *adelanta* a la tensión. Si  $\varphi = 0$  la corriente y la tensión están *en fase*, este efecto se conoce con el nombre de *resonancia* y es motivo de estudio del capítulo 8.

Siguiendo con el ejemplo, el fasor de tensión del circuito de la figura 5.3 es

$$\bar{V} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \quad (5.42)$$

el módulo  $Z$  y la fase  $\varphi$  del denominador (5.39) valen

$$Z = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6056\Omega \quad (5.43)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 0,98279\text{rad} = 56,31^\circ \quad (5.44)$$

entonces el fasor corriente será

$$\bar{I} = \frac{10}{3,6056\sqrt{2}} \angle -56,31^\circ = 1,9611 \angle -56,31^\circ \quad (5.45)$$

Finalmente a partir del fasor  $\bar{I}$  se obtiene la respuesta de corriente en el tiempo

$$i(t) = \text{Re}[\bar{I}\sqrt{2}e^{j\omega t}] = \frac{10}{3,6056} \cos(\omega t - 56,31^\circ) \quad (5.46)$$

donde puede verse que la corriente atrasa a la tensión aplicada, ya que se trata de un circuito resistivo-inductivo. Notar en (5.46) que se utiliza la parte real del resultado fasorial para obtener la respuesta en el dominio del tiempo, esto se debe a que la excitación es una fuente cosenoidal.

## 5.4. Impedancia y admitancia compleja

La relación fasorial entre tensión y corriente es un número complejo, puesto que  $\bar{V}$  e  $\bar{I}$  son complejos.

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = Z \quad (5.47)$$

<sup>3</sup>Ya que su parte real viene dada por el valor  $R$  del resistor que es siempre mayor a cero.



La ecuación (5.47) se conoce con el nombre de *Ley de Ohm Fasorial* y el cociente se denomina *impedancia compleja* o simplemente *impedancia*, la unidad de medida es el *ohm*  $[\Omega]$  y se la representa con la letra **Z**.

La relación tensión-corriente en un elemento resistivo puro es, como se vio en (5.23), el valor resistivo  $R$ . Este cociente es la impedancia de un resistor, que usualmente se la llama también *resistencia* por tratarse del mismo valor numérico que en el dominio del tiempo. Si el cociente de dos complejos, o dos fasores, es un número real, significa que los fasores están en fase ( $\theta_i = \theta_v$ ), tal como se espera que ocurra en los fasores de tensión y corriente en un resistor.

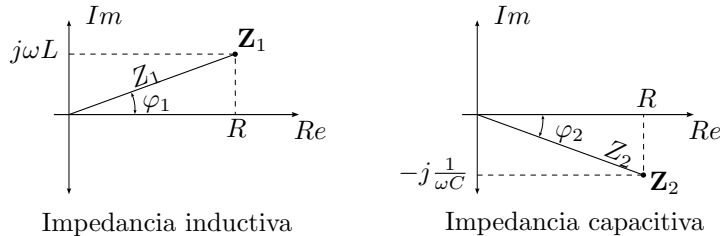
En el caso de un inductor la impedancia será un número imaginario puro (ec. 5.30). Este cociente siempre positivo (ya que ni  $\omega$  ni  $L$  pueden ser negativos) se denota como  $jX_L$ . Si el cociente entre el fador tensión y el fador corriente da un número imaginario mayor a 0, significa que entre ellos hay un desfase de  $\frac{\pi}{2}$ , es decir que la corriente atrasa  $90^\circ$  a la tensión en el inductor ( $\theta_i = \theta_v - \frac{\pi}{2}$ ).

Para un capacitor será también un imaginario puro pero menor a 0 (ec. 5.36). A esta impedancia se la representa con  $-jX_C$ . El desfase entre el fador tensión y el fador corriente es de  $-\frac{\pi}{2}$  lo que significa que la corriente adelanta a la tensión en  $90^\circ$  ( $\theta_i = \theta_v + \frac{\pi}{2}$ ).

En un circuito con varios elementos combinados, la impedancia será en general un número complejo

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \mathbf{Z} = R \pm jX \quad (5.48)$$

a la parte real de la impedancia se la llama *parte resistiva* y a la parte imaginaria *parte reactiva*. La parte imaginaria puede ser positiva o negativa, si es mayor a 0 se llama *reactancia inductiva* y se dice que la impedancia es de *carácter inductivo* (o simplemente *impedancia inductiva*), si es menor a 0 se llama *reactancia capacitiva* y se dice que la impedancia es de *carácter capacitivo* (*impedancia capacitiva*). Gráficamente se la representa en un *diagrama de impedancias* sobre un plano complejo, en el cual se marcan las componentes resistivas y reactivas (fig. 5.4).



**Figura 5.4:** Diagrama de impedancias

Si se tiene que  $\bar{\mathbf{V}} = V/\underline{\theta}_v$  e  $\bar{\mathbf{I}} = I/\underline{\theta}_i$ , entonces

$$\mathbf{Z} = \frac{V}{I} \angle \theta_v - \theta_i = Z \angle \varphi \quad (5.49)$$

donde la relación entre la parte real e imaginaria de la  $\mathbf{Z}$  determinan el desfase entre el fasor tensión y el fasor corriente, o sea el ángulo  $\varphi$  de (5.49). Este ángulo está definido entre  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , según el circuito sea capacitivo puro o inductivo puro en los extremos, pasando por resistivo puro cuando  $\varphi = 0$ .

La inversa de la impedancia se define como *admitancia compleja*. Su símbolo es  $\mathbf{Y}$ , se mide en *Siemens* [S] o *Mhos* [U]

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{Z} \angle -\varphi \quad (5.50)$$

las partes real e imaginaria de este complejo se las representa con las letras  $G$  y  $B$  respectivamente, donde  $G$  se llama *conductancia* y  $B$  *susceptancia*. La susceptancia, al igual que la reactancia, puede ser positiva o negativa. Si es positiva se trata de una susceptancia capacitiva, y si es negativa se trata de una susceptancia inductiva.

$$\mathbf{Y} = G \pm jB \quad (5.51)$$

En términos de tensión y corriente fasorial, por ser la inversa de la impedancia, la admitancia se define como el cociente fasorial entre la corriente y tensión, de donde

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{V}} \mathbf{Y} \quad (5.52)$$

En la ecuación 5.52 se observa que, para el caso de sistemas alimentados con tensión constante<sup>4</sup> la admitancia es directamente proporcional a la corriente fasorial. Por lo tanto conociendo la admitancia de un circuito, o la variación de la admitancia de un circuito cuando en este varía algún parámetro, como por ejemplo la frecuencia  $\omega$ , se conoce también la variación de la corriente. Esto será utilizado más adelante para análisis de variación de corriente en circuitos alimentados con un fasor de tensión constante.

#### 5.4.1. Conversión impedancia-admitancia

Dada la relación que existe entre impedancia y admitancia, pasar de una a otra consiste simplemente en hacer la inversa del módulo y tomar el argumento opuesto (5.50). La misma conversión realizada en forma rectangular permite expresar una impedancia en términos de conductancia y

<sup>4</sup>Es decir, sistemas alimentados con fuentes no variables de tensión, como es el caso de la distribución eléctrica domiciliaria.

susceptancia y una admitancia en términos de resistencia y reactancia. Por ejemplo

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad (5.53)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{(R + jX)} = \frac{1}{(R + jX)} \frac{R - jX}{R - jX} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \left( \frac{R}{R^2 + X^2} \right) - j \left( \frac{X}{R^2 + X^2} \right) \quad (5.55)$$

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad (5.56)$$

donde

$$G = \left( \frac{R}{R^2 + X^2} \right) \quad (5.57)$$

$$B = - \left( \frac{X}{R^2 + X^2} \right) \quad (5.58)$$

#### 5.4.2. Asociación de impedancias

Al aplicar la transformada fasor a la ODE de equilibrio de cualquier circuito, ésta se transforma en una ecuación algebraica, al igual que las ecuaciones de equilibrio que resultan de un circuito resistivo puro en el dominio del tiempo. Por lo tanto la asociación de impedancias en serie o en paralelo sigue las reglas de asociación de resistencias en el dominio del tiempo.

Por ejemplo en el circuito  $RL$  serie resuelto antes, si dividimos (5.38) por el fasor corriente  $\bar{\mathbf{I}}$  obtenemos

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_R}{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{\bar{\mathbf{V}}_L}{\bar{\mathbf{I}}} = R + j\omega L \quad (5.59)$$

donde se ve que la impedancia total, definida como el cociente entre el fasor tensión aplicada y el fasor corriente total del circuito, se puede formar sumando las dos impedancias que conforman el circuito serie, quedando

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L \quad (5.60)$$

#### 5.4.3. Diagrama fasorial

Se llama diagrama fasorial a la representación de los fasores de tensión y/o corrientes de un circuito en un plano complejo. Un diagrama fasorial puede ser de tensiones, de corrientes o de tensiones y corrientes (utilizando diferentes escalas). Este último suele ser el más usado, ya que permite visualizar fácilmente la relación de fase entre tensión y corriente.

Se dice que un diagrama fasorial de tensiones y corrientes es completo cuando se representan en el los fasores de tensión y corriente de todos los elementos que conforman el circuito. Así por ejemplo, en el circuito de la

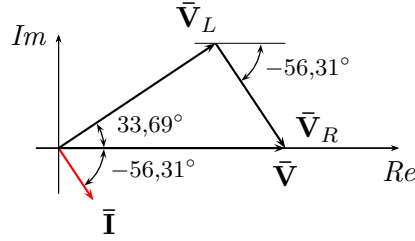
figura 5.3, los fasores de tensión de cada elemento son  $\bar{\mathbf{V}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}_R$  y  $\bar{\mathbf{V}}_L$ , mientras que por ser un circuito serie todos los elementos comparten un único fasor de corriente  $\bar{\mathbf{I}}$ .

Para poder construir el diagrama fasorial completo del ejemplo es necesario calcular los fasores de tensión  $\bar{\mathbf{V}}_R$  y  $\bar{\mathbf{V}}_L$

$$\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}} = 3,92/-56,31^\circ \quad (5.61)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_L = j\omega L\bar{\mathbf{I}} = (j3)1,96/-56,31^\circ = 5,88/33,69^\circ \quad (5.62)$$

En la figura 5.5 se grafica el diagrama fasorial completo de este ejemplo. Como puede verse, la corriente total está atrasada respecto de la tensión total debido al carácter inductivo de la carga. Además la suma del fasor tensión en el inductor (que está adelantado  $90^\circ$  respecto del fasor corriente) más el fasor tensión en la resistencia (que está en fase con el fasor corriente) es igual al fasor tensión aplicado. Notar que para construir el diagrama fasorial, los fasores se dibujan uno a continuación del otro, para mostrar en forma explícita que la suma vectorial da el fasor resultante (como en este caso que al sumar los fasores de tensión en  $R$  y en  $L$  se obtiene el fasor de tensión total).



**Figura 5.5:** Diagrama fasorial de tensiones y corriente del circuito de la figura 5.3

## 5.5. Potencia

Un circuito en régimen permanente constituido por resistencias, inductores y capacitores toma y devuelve energía del generador en cada ciclo. De toda la energía presente en un circuito parte será transformada en trabajo y parte será intercambiada periódicamente con el generador, dependiendo exclusivamente de los elementos que compongan el circuito.

### 5.5.1. Potencia instantánea

Una señal senoidal de la forma

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t) \quad (5.63)$$

que excita a un circuito genérico de impedancia equivalente  $\mathbf{Z} = R + jX = Z \angle \varphi$ , produce una corriente eléctrica de forma

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (5.64)$$

la potencia instantánea producida por esta fuente se obtiene

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (5.65)$$

$$p(t) = V_m \text{sen}(\omega t) I_m \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (5.66)$$

Utilizando la igualdad trigonométrica

$$\text{sen } \alpha \text{sen } \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \quad (5.67)$$

se puede expresar la potencia anterior como suma de cosenos

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\varphi) - \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) \quad (5.68)$$

con  $\alpha = \omega t$  y  $\beta = \omega t - \varphi$ . Además, como  $\frac{V_m}{\sqrt{2}} = V$  e  $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I$  se puede poner en términos de los valores eficaces

$$p(t) = VI \cos(\varphi) - VI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (5.69)$$

La ecuación (5.69) está compuesta de un término constante en el tiempo y otro variable. La amplitud del término constante  $VI \cos(\varphi)$  depende del valor de  $\varphi$ , es decir del carácter inductivo-capacitivo del circuito. Cuando  $\varphi = 0$  el término  $VI \cos(\varphi)$  tomará su valor máximo. Analicemos los diferentes casos según la naturaleza del circuito.

### Circuito resistivo puro

Si el circuito es de tipo resistivo puro, la impedancia es  $\mathbf{Z} = R$  y  $\varphi = 0$ . Entonces la potencia instantánea queda

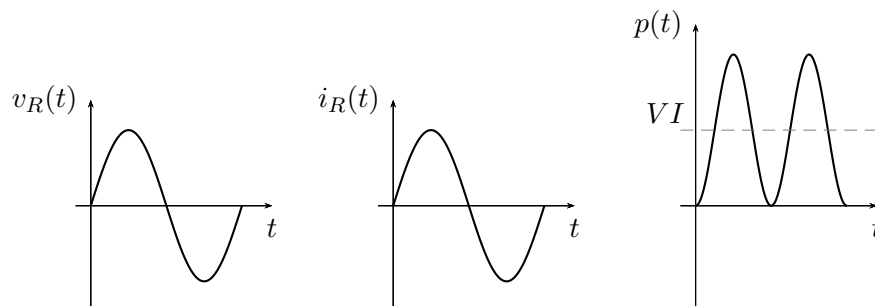
$$p(t) = VI - VI \cos(2\omega t) \quad (5.70)$$

En la figura 5.6 puede verse graficada esta potencia instantánea. La potencia en un circuito resistivo puro es siempre positiva y su valor medio es  $P = VI$ . Esto es característico de los elementos disipadores en los cuales toda la energía entregada por el generador es disipada en forma de calor.

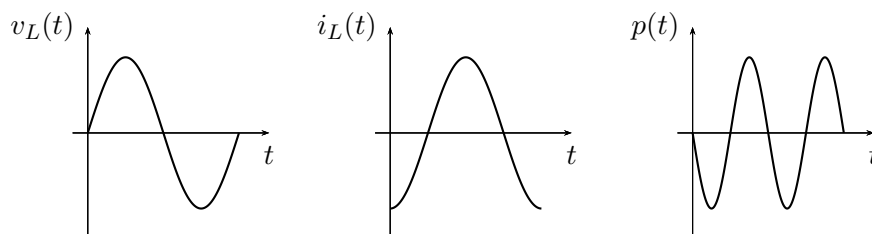
### Circuito inductivo puro

Si el circuito es inductivo puro, entonces la impedancia es  $\mathbf{Z} = j\omega L$  y  $\varphi = 90^\circ$ . En este caso la potencia instantánea se hace

$$p(t) = -VI \cos(2\omega t - 90^\circ) = -VI \text{sen}(2\omega t) \quad (5.71)$$



**Figura 5.6:** Potencia instantánea en un circuito resistivo puro.



**Figura 5.7:** Potencia instantánea en un circuito inductivo puro.

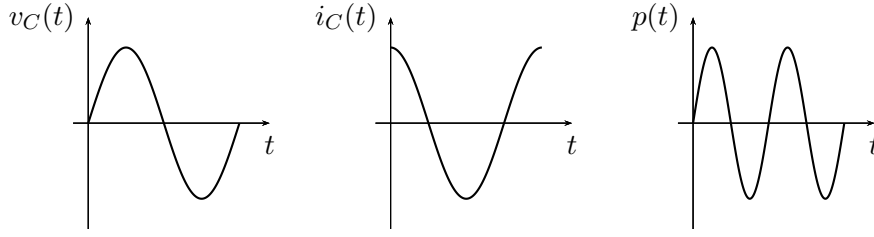
En la figura 5.7 se grafica la potencia instantánea sobre un circuito inductivo puro. Como se ve en este caso el valor medio de la señal es nulo, es decir la potencia media. Por otro lado la potencia instantánea toma valores positivos y negativos, esto representa el intercambio energético que se produce entre el elemento inductivo y el generador. Cuando la tensión  $v(t)$  y corriente  $i(t)$  tienen igual signo, la potencia es positiva lo que significa que la energía se está trasladando desde el generador a la carga inductiva. Cuando tensión y corriente tienen distinto signo, la potencia es negativa y la energía está siendo devuelta desde la carga al generador. Evidentemente las cantidades de energía recibidas y devueltas por la carga inductiva son iguales debido a que se trata de un elemento idealizado y no hay disipación alguna.

### Circuito capacitivo puro

Para el caso de un circuito capacitivo puro el ángulo de fase es  $\varphi = -90^\circ$  y la potencia instantánea será

$$p(t) = -VI \cos(2\omega t + 90^\circ) = VI \sin(2\omega t) \quad (5.72)$$

al igual que el caso anterior la potencia instantánea tiene valor medio nulo lo que muestra un intercambio completo de energía entre el generador y el elemento, sin producirse disipación.



**Figura 5.8:** Potencia instantánea en un circuito capacitivo puro.

### 5.5.2. Potencia activa, reactiva y aparente

El valor medio de la potencia instantánea está directamente relacionado con la cantidad de energía que un circuito disipa, y por ende con la componente resistiva del mismo. Este valor medio recibe el nombre de *potencia activa* de un circuito. La componente reactiva de un circuito determina la cantidad de energía que se intercambiará en cada ciclo, el valor escalar asociado a esta cantidad recibe el nombre de *potencia reactiva*, y por último se considera un escalar asociado a la potencia instantánea total que se lo denomina *potencia aparente*. A continuación deduciremos cada uno de estos escalares utilizando el método fasorial.

#### Potencia en un elemento resistivo

En el cálculo fasorial la circulación de una corriente  $\bar{\mathbf{I}}$  y la caída de tensión en cada elemento del circuito desarrollan una potencia, que por definición, es el producto de los módulos de ambos fasores eficaces.

En un elemento resistivo, la potencia será

$$P = |\bar{\mathbf{V}}_R| |\bar{\mathbf{I}}_R| = V_R I_R \quad (5.73)$$

$$P = |\bar{\mathbf{V}}_R| \frac{|\bar{\mathbf{V}}_R|}{R} = \frac{(V_R)^2}{R} \quad (5.74)$$

$$P = |\bar{\mathbf{I}}_R| R |\bar{\mathbf{I}}_R| = (I_R)^2 R \quad (5.75)$$

como  $R = |\mathbf{Z}| \cos \varphi$ , la última de estas igualdades se puede poner<sup>5</sup>

$$P = (I_R)^2 |\mathbf{Z}| \cos \varphi \quad (5.76)$$

$$P = VI \cos \varphi \quad (5.77)$$

donde  $V = I_R |\mathbf{Z}|$  e  $I_R = I$ . Es decir, debido a los elementos resistivos del circuito se desarrolla una potencia activa  $P$ , medida en vatios  $[W]$ , dada por el producto de los valores eficaces de tensión y corriente total multiplicado

<sup>5</sup>Esto es cierto si se trata de un circuito serie, donde  $I_R = I$ , corriente total en el circuito. Si se trata de un circuito paralelo entonces  $V_R = V$ , tensión aplicada total, llegándose al mismo resultado que ec. (5.77)

por el coseno del ángulo de desfase  $\varphi$  que hay entre ellos. Esta potencia es igual al valor medio de la potencia instantánea obtenida en la ec. (5.69), también llamada potencia media  $P$ , y representa la capacidad del circuito para realizar un trabajo en un tiempo dado.

### Potencia en un elemento reactivo

En un elemento inductivo o capacitivo la potencia viene dada por

$$Q = |\bar{\mathbf{V}}_X| |\bar{\mathbf{I}}_X| = V_X I_X \quad (5.78)$$

$$Q = |\bar{\mathbf{V}}_X| \frac{|\bar{\mathbf{V}}_X|}{X} = \frac{(V_X)^2}{X} \quad (5.79)$$

$$Q = |\bar{\mathbf{I}}_X| X |\bar{\mathbf{I}}_X| = (I_X)^2 X \quad (5.80)$$

como el módulo de la parte reactiva  $X$  de una impedancia es  $|\mathbf{Z}| \sin \varphi$

$$Q = (I_X)^2 Z \sin \varphi \quad (5.81)$$

$$Q = VI \sin \varphi \quad (5.82)$$

es decir, debido a los elementos reactivos de la carga se desarrolla una potencia reactiva  $Q$ , medida en volt-amperios reactivos  $[VAR]$ . Esta potencia  $Q$  es una medida de la energía almacenada que es devuelta hacia la fuente durante cada ciclo de la corriente alterna.

### Potencia en una impedancia

En general, un fasor de corriente que atraviesa una impedancia  $\mathbf{Z}$  como consecuencia de un fasor de tensión aplicada  $\bar{\mathbf{V}}$ , desarrolla una potencia

$$S = |\bar{\mathbf{V}}| |\bar{\mathbf{I}}| = VI \quad (5.83)$$

esta potencia se llama *potencia aparente*, se la denomina con la letra  $S$  y se mide en volt-amperios  $[VA]$ , representa las potencias disipadas e intercambiadas por los elementos del circuito. Como se ve, este producto de la tensión por la intensidad, será siempre igual o mayor que la potencia activa.

#### 5.5.3. Triángulo de potencias

Las potencias activas, reactivas y aparente están vinculadas entre sí, de forma que si sumamos las potencias activas y reactivas al cuadrado

$$P^2 + Q^2 = (VI \cos \varphi)^2 + (VI \sin \varphi)^2 = (VI)^2 \quad (5.84)$$

obtenemos la potencia aparente al cuadrado,

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (5.85)$$



es por esta relación que se utiliza un triángulo rectángulo para representarlas, lo que se conoce como *triángulo de las potencias*.

La construcción del triángulo se puede desprender del diagrama fasorial de tensión y corriente del circuito en cuestión. Considerando la tensión total con fase cero y la descomposición de la corriente en sus partes activas y reactivas, es decir,  $\bar{\mathbf{V}} = V \angle 0$  e  $\bar{\mathbf{I}} = I \angle \varphi$ , la potencia  $P$  será el producto de  $V$  por la proyección de  $\bar{\mathbf{I}}$  sobre  $\bar{\mathbf{V}}$  ( $VI \cos \varphi$ ) y la potencia  $Q$  el producto  $V$  por la proyección de  $\bar{\mathbf{I}}$  sobre la perpendicular a  $\bar{\mathbf{V}}$  ( $VI \sin \varphi$ ).

De esta forma la orientación de la potencia reactiva  $Q$  en el triángulo determina el carácter inductivo o capacitivo del circuito, ya que una potencia reactiva dibujada hacia los negativos del eje de ordenadas se obtiene de un diagrama fasorial en el que la corriente atrasa a la tensión, y viceversa.

#### 5.5.4. Potencia compleja $\mathbf{S}$

Se conoce como potencia compleja a un operador complejo que permite encontrar en forma directa las potencias activas, reactivas y aparente de un circuito conociendo el fasor tensión y corriente total. Sea  $\bar{\mathbf{V}}_T$  el fasor de la tensión aplicada total y sea  $\bar{\mathbf{I}}_T$  el fasor de la corriente total, entonces la potencia compleja  $\mathbf{S}$  se calcula como

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\mathbf{I}}_T^* \quad (5.86)$$

con  $\bar{\mathbf{I}}_T^*$  el conjugado del fasor corriente.

Desarrollando (5.86) tenemos

$$\mathbf{S} = V_T \angle \theta_V I_T \angle -\theta_I \quad (5.87)$$

$$\mathbf{S} = V_T \angle \theta_V \frac{V_T}{Z_T} \angle -(\theta_V - \varphi) \quad (5.88)$$

$$\mathbf{S} = V_T I_T \angle \varphi = V_T I_T \cos \varphi + j V_T I_T \sin \varphi = P + jQ \quad (5.89)$$

#### 5.5.5. Factor de potencia

El factor de potencia de un sistema de corriente alterna en régimen permanente se define como la relación entre la potencia activa  $P$  y la potencia aparente  $S$ .

$$\text{fp} = \frac{P}{S} \quad (5.90)$$

En un circuito puramente resistivo recorrido por una corriente alterna, la intensidad y la tensión están en fase, esto es cambian de polaridad en los mismos instantes en cada ciclo. Cuando están presentes cargas reactivas existe almacenamiento de energía. Debido a que esta energía almacenada retorna a la fuente y no es útil para realizar trabajo en la carga, un circuito

con un bajo factor de potencia tendrá que transferir corrientes más altas, para una potencia dada, que un circuito con un factor de potencia alto.

Si  $\varphi$  es el ángulo de fase entre la corriente y la tensión, el factor de potencia es igual a  $|\cos \varphi|$ , y

$$P = S \cos \varphi \quad (5.91)$$

Por definición, el factor de potencia es un número adimensional, comprendido entre 0 y 1. Cuando el factor de potencia es igual a 0, la energía que fluye es enteramente reactiva y la energía almacenada en las cargas retorna a la fuente en cada ciclo. Cuando el factor de potencia es igual a 1, toda la energía suministrada por la fuente es consumida por la carga. Los factores de potencia son expresados normalmente como *adelanto* o *retraso*, para indicar el signo del ángulo de fase.

Por ejemplo, para conseguir 1kW de potencia activa si el factor de potencia es la unidad, necesitaremos transferir 1kVA de potencia aparente ( $1\text{kVA} = 1\text{kW} \cdot 1$ ). Con valores bajos del factor de potencia, necesitaremos transferir más potencia aparente para conseguir la misma potencia activa. Así para conseguir 1kW de potencia activa con un factor de potencia igual a 0,2 necesitamos transferir 5kVA de potencia aparente.

### 5.5.6. Corrección del factor de potencia

La energía transportada que no se consume produce pérdidas, sobrecarga los transformadores y disminuye la eficiencia. Si el factor de potencia es alto estas pérdidas serán pequeñas, aumentando el rendimiento del sistema. A veces se hace necesario corregir el factor de potencia para aumentar el rendimiento del sistema, sobre todo en sistemas de grandes potencias instaladas como las industrias.

La corrección del factor de potencia se logra conectando al sistema cargas reactivas (generalmente en paralelo para no modificar la tensión disponible) de naturaleza contraria a la que el sistema tiene, es decir en un sistema resistivo-inductivo se conectarán cargas capacitivas y viceversa. Normalmente se trata de sistemas resistivo-inductivos los que se necesita compensar, debido al uso de motores en la industria.

El cálculo de la potencia reactiva necesaria se realiza en base al factor de potencia deseado como sigue.

Supongamos se desea llevar el factor de potencia actual  $\text{fp}_0$  al factor de potencia  $\text{fp}_f$

$$\text{fp}_0 = \cos \varphi_0 \quad \text{y} \quad (5.92)$$

$$\text{fp}_f = \cos \varphi_f \quad (5.93)$$

ambos en atraso, sin que varíe la potencia activa  $P$ . Para compensar un sistema en atraso se conecta entonces una carga capacitiva de potencia reactiva

$Q_C$  tal que

$$Q_f = Q_0 - Q_C \quad \Rightarrow \quad Q_C = Q_0 - Q_f \quad (5.94)$$

reemplazando las potencias reactivas según (5.82) tenemos

$$Q_C = VI_0 \sin \varphi_0 - VI_f \sin \varphi_f \quad (5.95)$$

$$= VI_0 \cos \varphi_0 \tan \varphi_0 - VI_f \cos \varphi_f \tan \varphi_f \quad (5.96)$$

donde la tensión permanece constante porque la carga se conecta en paralelo. Como la potencia activa no cambia,  $P = VI_0 \cos \varphi_0 = VI_f \cos \varphi_f$ , entonces

$$Q_C = P (\tan \varphi_0 - \tan \varphi_f) \quad (5.97)$$

de donde se puede hallar la capacidad necesaria para la corrección

$$\frac{V^2}{X_C} = V^2 \omega C = P (\tan \varphi_0 - \tan \varphi_f) \quad (5.98)$$

$$C = \frac{P (\tan \varphi_0 - \tan \varphi_f)}{V^2 \omega} \quad (5.99)$$

## 5.6. Señales poliarmónicas

a desarrollar...



## Capítulo 6

# Resolución sistemática de circuitos

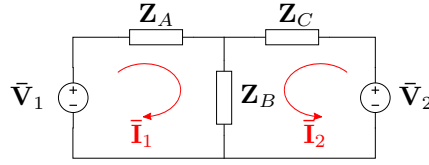
Las transformaciones de Laplace y fasorial vistas en los capítulos anteriores permiten llevar las ecuaciones de equilibrio de un circuito en el dominio del tiempo a un dominio (de  $s$  o de  $j\omega$  respectivamente) donde las ecuaciones de equilibrio son puramente algebraicas. A continuación se desarrollan dos métodos aplicables a circuitos con ecuaciones de equilibrio puramente algebraicas que permiten encontrar las variables incógnitas en forma sistemática.

### 6.1. Método de las corrientes en las mallas

El método se basa en operar utilizando las llamadas *corrientes de mallas* o *corrientes de Maxwell* en lugar de las corrientes en cada rama. Una corriente de malla es una corriente ficticia que circula por todas las ramas que forman una malla sin dividirse en los nudos. Estas corrientes ficticias deben elegirse de forma tal que todos los elementos del circuito sean atravesados por lo menos por una de ellas, de esta forma cualquier corriente de rama puede obtenerse a partir de las corrientes de malla. La cantidad de corrientes de malla que se deben definir para operar es igual a la cantidad de mallas independientes que contenga el circuito. Una forma práctica de encontrar el número de mallas independientes es contando la cantidad mínima de cortes que deben realizarse sobre un circuito para abrir todas las mallas. El número de cortes realizados es igual a la cantidad de corrientes de malla independientes que conforman el circuito.

Supongamos el circuito de la figura 6.1, representado en el dominio fasorial. En este circuito la cantidad de cortes que deben practicarse para abrir todas las mallas es igual a dos, por lo tanto para resolverlo se deben elegir dos corrientes de malla.

Las corrientes de malla se deben elegir de forma que TODOS los ele-

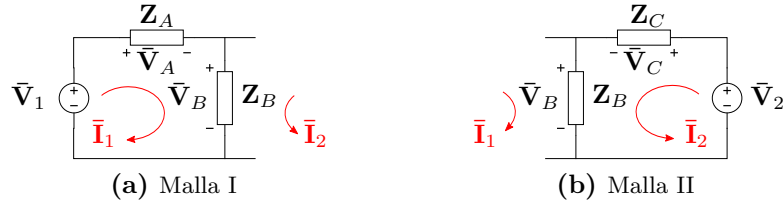


**Figura 6.1:** Resolución por método de las mallas.

mentos sean atravesados por al menos una corriente y que cada corriente no pase dos veces por una misma rama.

Supongamos que elegimos  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  como se muestra en el circuito, que cumplen con los requisitos antes planteados. La aplicación del método permite resolver estas corrientes ficticias en forma sistemática, con las que luego podrá calcularse cualquier otro parámetro de interés. Por ejemplo la corriente total circulante por la impedancia  $Z_A$  será  $\bar{I}_1$ , la corriente total circulante por la impedancia  $Z_B$  será  $\bar{I}_1 + \bar{I}_2$ , etc.

Luego de elegidas las corrientes de malla se plantean las ecuaciones de equilibrio<sup>1</sup>.



**Figura 6.2:** LKV en cada una de las mallas.

### Malla I

Aplicando LKV para la malla I según las referencias de la figura 6.2a tenemos

$$\bar{V}_1 - \bar{V}_A - \bar{V}_B = 0 \quad (6.1)$$

donde

$$\bar{V}_A = Z_A \bar{I}_1 \quad (6.2)$$

$$\bar{V}_B = Z_B (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \quad (6.3)$$

<sup>1</sup> Notar que si bien el número de cortes necesarios para abrir todas las mallas en un circuito es único (en este caso dos), no es única la forma de elegir las mallas, es decir que no son únicas las corrientes de malla. Se podría elegir por ejemplo la malla II de forma que atravesase la rama de la fuente  $\bar{V}_1$  en lugar de la rama central.

luego

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{Z}_A \bar{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{Z}_B (\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2) = \bar{\mathbf{I}}_1 (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B) + \bar{\mathbf{I}}_2 \mathbf{Z}_B \quad (6.4)$$

### Malla II

Repitiendo lo anterior sobre la malla II y según las referencias de la figura 6.2b obtenemos

$$\bar{\mathbf{V}}_2 = \bar{\mathbf{I}}_1 \mathbf{Z}_B + \bar{\mathbf{I}}_2 (\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C) \quad (6.5)$$

Finalmente se obtiene el sistema de ecuaciones que permite resolver  $\bar{\mathbf{I}}_1$  e  $\bar{\mathbf{I}}_2$

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = \bar{\mathbf{I}}_1 (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B) + \bar{\mathbf{I}}_2 \mathbf{Z}_B \quad (6.6)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_2 = \bar{\mathbf{I}}_1 \mathbf{Z}_B + \bar{\mathbf{I}}_2 (\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C) \quad (6.7)$$

o bien, en forma matricial el sistema de ecuaciones queda<sup>2</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B & \mathbf{Z}_B \\ \mathbf{Z}_B & \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 \\ \bar{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

la matriz de coeficientes está formada por las impedancias del circuito y es una matriz simétrica. Nótese que los elementos de la diagonal principal son la suma de las impedancias de cada malla y los elementos restantes son las impedancias compartidas entre la malla I y II. El vector de datos del sistema contiene todas las fuentes de excitación del circuito, y cada elemento del vector se forma con las fuentes de la malla correspondiente.

Como se dijo, la elección de las corrientes de malla no es única, y una elección diferente implica un sistema de ecuaciones diferente. Si por ejemplo se elige como corriente de la malla II una  $\bar{\mathbf{I}}'_2$  de sentido contrario a  $\bar{\mathbf{I}}_2$ , siguiendo la figura 6.3 la LKV en cada malla nos da

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = \bar{\mathbf{I}}_1 (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B) - \bar{\mathbf{I}}'_2 \mathbf{Z}_B \quad (6.9)$$

$$-\bar{\mathbf{V}}_2 = -\bar{\mathbf{I}}_1 \mathbf{Z}_B + \bar{\mathbf{I}}'_2 (\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C) \quad (6.10)$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B & -\mathbf{Z}_B \\ -\mathbf{Z}_B & \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 \\ -\bar{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

como se ve en la matriz de coeficientes los elementos que no pertenecen a la diagonal principal aparecen multiplicados por  $-1$  ( $\mathbf{Z}_B$ ), igual que la fuente de tensión de la malla II en el vector de datos. Este “cambio de signo” refleja el hecho de que las corrientes de malla atraviesan la impedancia compartida  $\mathbf{Z}_B$  en sentido contrario, y que la corriente  $\bar{\mathbf{I}}_2$  atraviesa la fuente  $\bar{\mathbf{V}}_2$  como una caída de tensión.

<sup>2</sup>Un sistema lineal de  $n$  con  $n$  incógnitas puede representarse matricialmente como  $A\vec{x} = \vec{b}$  donde  $A$  es una matriz  $n \times n$  llamada *matriz de coeficientes*,  $\vec{x}$  es un vector de  $n$  elementos llamado *vector incógnita* y  $\vec{b}$  se llama *vector de datos*

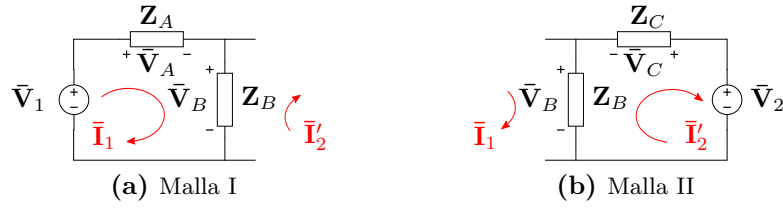


Figura 6.3: LKV en cada una de las mallas.

### 6.1.1. Generalización

La resolución anterior puede extenderse al caso general de un circuito con  $n$  mallas independientes, donde las ecuaciones de equilibrio del circuito serán

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \pm z_{12} & \dots & \pm z_{1n} \\ \pm z_{21} & z_{22} & \dots & \pm z_{2n} \\ & \vdots & & \\ \pm z_{n1} & \pm z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{I}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_I \\ \bar{\mathbf{V}}_{II} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{V}}_n \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

a esta representación matricial se la conoce como *ecuación de equilibrio matricial* del circuito o *Ley de Ohm matricial*

$$[\mathbf{Z}] [\bar{\mathbf{I}}] = [\bar{\mathbf{V}}] \quad (6.13)$$

la matriz de coeficientes se llama *matriz de impedancias* y el vector de datos *vector de tensiones*. Los elementos de la diagonal principal de la matriz de impedancias se llaman *impedancias propias* de cada malla y los elementos restantes son las llamadas *copedancias* entre mallas.

La ecuación matricial de equilibrio (6.12) puede obtenerse en forma directa siguiendo las siguientes reglas:

- Las impedancias propias de cada malla se forman sumando las  $N$  impedancias pertenecientes a la malla, para la malla  $k$  será

$$z_{ij}|_{i=j=k} = \sum_{n=1}^N \mathbf{Z}_{kn} \quad (6.14)$$

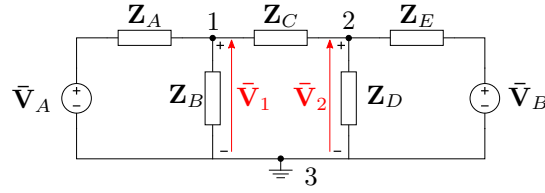
- Las copedancias se forman sumando todas las impedancias compartidas entre la malla  $k$  y la malla  $l$ , es decir todas las impedancias que son atravesadas por las corrientes  $\bar{\mathbf{I}}_k$  e  $\bar{\mathbf{I}}_l$ . Si las corrientes atraviesan las impedancias compartidas en sentido contrario, la copedancia se debe multiplicar por  $-1$ .
- Los elementos del vector de tensiones se obtienen sumando todas las fuentes de tensión que pertenecen a la malla, tomando como positivas las que son atravesadas como una subida por las corrientes de malla, y como negativas las demás.



### 6.1.2. Impedancia de entrada, impedancia de transferencia

## 6.2. Método de las tensiones en los nudos

Consideremos las tensiones en los nudos principales del circuito de la figura 6.4. Estas tensiones están referidas al nudo 3 (tomado como nudo de referencia) con la polaridad indicada. Si se desarrollan las ecuaciones de equilibrio de las corrientes en cada nudo se obtiene



**Figura 6.4:** Resolución por método de las tensiones en los nudos.

$$\frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_A}{Z_A} + \frac{\bar{V}_1}{Z_B} + \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{Z_C} = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{Z_C} + \frac{\bar{V}_2}{Z_D} + \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_B}{Z_E} = 0 \quad (6.16)$$

Para explicar la constitución de la ecuación (6.15) veamos la figura 6.5 donde se reproduce en detalle las referencias de las tensiones y corrientes en el nudo 1. Las corrientes que se muestran se eligen arbitrariamente para el desarrollo como entrantes o salientes al nudo. En este caso al ser todas salientes se tiene

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

Luego, para encontrar cada una de estas corrientes planteamos las ecuaciones de malla considerando las referencias de tensión mostradas en la figura 6.5. Por ejemplo, la circulación de la corriente  $\bar{I}_a$  por la impedancia  $Z_A$  produce una caída de tensión  $\bar{V}_{Z_A}$  con la polaridad indicada, de forma que la ecuación de malla es

$$\bar{V}_A + \bar{V}_{Z_A} - \bar{V}_1 = 0 \quad (6.17)$$

$$\bar{V}_{Z_A} = \bar{V}_1 - \bar{V}_A \quad (6.18)$$

con lo que

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_A}{Z_A} \quad (6.19)$$

La corriente  $\bar{\mathbf{I}}_b$  se obtiene directamente de hacer la tensión de nudo sobre la impedancia  $\mathbf{Z}_B$ , ya que  $\bar{\mathbf{V}}_{Z_B} = \bar{\mathbf{V}}_1$

$$\bar{\mathbf{I}}_b = \frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\mathbf{Z}_B} \quad (6.20)$$

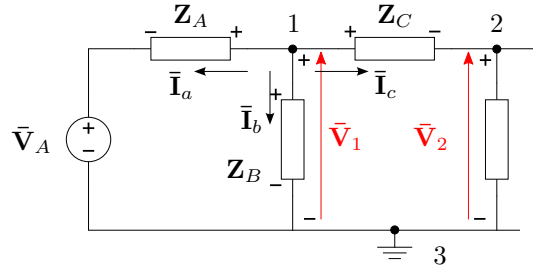
por último se obtiene la corriente  $\bar{\mathbf{I}}_c$  de la misma forma que se obtuvo  $\bar{\mathbf{I}}_a$ , es decir calculando la tensión en  $\mathbf{Z}_C$  a partir de la ecuación de equilibrio de la malla central

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_2 - \bar{\mathbf{V}}_{Z_C} - \bar{\mathbf{V}}_1 &= 0 \\ \bar{\mathbf{V}}_{Z_C} &= \bar{\mathbf{V}}_2 - \bar{\mathbf{V}}_1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

y luego la corriente es

$$\bar{\mathbf{I}}_c = \frac{\bar{\mathbf{V}}_2 - \bar{\mathbf{V}}_1}{\mathbf{Z}_C} \quad (6.22)$$

Finalmente sumando las tres corrientes obtenidas se tiene la ecuación 6.15, y operando de la misma forma sobre el nudo 2 se llega a la ecuación 6.16.



**Figura 6.5:** Referencia de tensiones y corrientes en el nudo 1.

Agrupando términos y reemplazando impedancias por admitancias podemos poner las ecuaciones 6.15 y 6.16 de forma

$$(\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C)\bar{\mathbf{V}}_1 - (\mathbf{Y}_C)\bar{\mathbf{V}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_A}{\mathbf{Z}_A} \quad (6.23)$$

$$-(\mathbf{Y}_C)\bar{\mathbf{V}}_1 + (\mathbf{Y}_C + \mathbf{Y}_D + \mathbf{Y}_E)\bar{\mathbf{V}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_B}{\mathbf{Z}_E} \quad (6.24)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C & -\mathbf{Y}_C \\ -\mathbf{Y}_C & \mathbf{Y}_C + \mathbf{Y}_D + \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 \\ \bar{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

donde el vector de datos es un vector de corrientes que se obtiene sumando con su signo todas las corrientes aportadas por las fuentes al nudo correspondiente, en este caso  $\bar{\mathbf{I}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_A}{\mathbf{Z}_A}$  y  $\bar{\mathbf{I}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_B}{\mathbf{Z}_E}$ . La corriente aportada por una fuente de tensión a un nudo se calcula dividiendo a la fuente por la impedancia total de la rama que la contiene, y se considera positiva si la polaridad de la fuente es opuesta a la polaridad del nudo (ver ec. (6.18)).

**6.2.1. Generalización**



## Capítulo 7

# Teoremas circuitales

### 7.1. Teorema de Thevenin

Un circuito lineal activo cualquiera con terminales de salida  $A - B$  puede sustituirse por una fuente de tensión  $\bar{\mathbf{V}}_{Th}$  en serie con una impedancia  $\mathbf{Z}_{Th}$ , donde el valor de la fuente  $\bar{\mathbf{V}}_{Th}$  es la tensión a circuito abierto entre los terminales  $A - B$  y la impedancia  $\mathbf{Z}_{Th}$  es igual al cociente entre la tensión  $\bar{\mathbf{V}}_{Th}$  y la corriente de corto circuito  $\bar{\mathbf{I}}_{cc}$  de los terminales  $A - B$ . Para calcular el valor de la fuente  $\bar{\mathbf{V}}_{Th}$ , llamada *tensión de Thevenin*, se calcula la tensión a circuito abierto entre los terminales  $A$  y  $B$ , y para calcular la corriente  $\bar{\mathbf{I}}_{cc}$  se unen los terminales  $A - B$  y se calcula la corriente que circula por ellos. Luego la impedancia  $\mathbf{Z}_{Th}$  llamada *impedancia de Thevenin* será

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{Th}}{\bar{\mathbf{I}}_{cc}}, \quad (7.1)$$

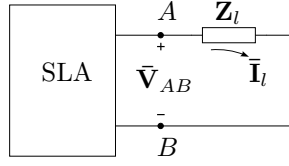
en la figura 7.1 se ve esta equivalencia esquemáticamente.



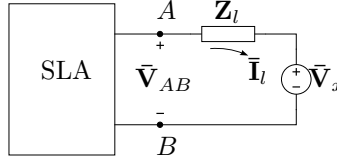
**Figura 7.1:** Equivalente de Thevenin

Para demostrar la equivalencia de Thevenin supongamos un circuito activo con una impedancia  $\mathbf{Z}_l$  entre los terminales  $A - B$  como el de la figura 7.2. Llamemos  $\bar{\mathbf{I}}_l$  a la corriente que circula por  $\mathbf{Z}_l$ , y  $\bar{\mathbf{V}}_{AB}(\bar{\mathbf{I}}_l)$  a la tensión entre los terminales  $A - B$ , enfatizando su dependencia de la corriente  $\bar{\mathbf{I}}_l$ . Si se conecta una fuente  $\bar{\mathbf{V}}_x$  de polaridad opuesta a la tensión  $\bar{\mathbf{V}}_{AB}(\bar{\mathbf{I}}_l)$  como en la figura 7.3 y se varía la tensión de esta fuente hasta que la corriente por la impedancia se anule tendremos

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB}(0) - \bar{\mathbf{V}}_x = 0 \quad (7.2)$$

**Figura 7.2:** Circuito activo de terminales  $A - B$ 

ya que la tensión que cae en  $Z_l$  es nula. Como la corriente total es cero, la tensión que aparece entre los terminales  $A - B$  es la tensión  $\bar{V}_{AB}$  a circuito abierto. Es decir que esta fuente de prueba  $\bar{V}_x$  que anula la corriente tiene el valor de la tensión  $\bar{V}_{AB}$  a circuito abierto,  $\bar{V}_x = \bar{V}_{AB}(0)$ .

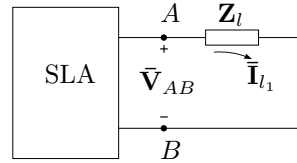
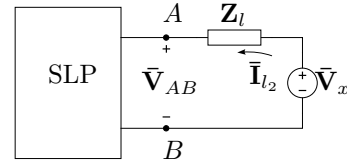
**Figura 7.3:** Fuente de prueba  $\bar{V}_x$  de valor igual a la tensión  $\bar{V}_{AB}$  a circuito abierto

Si en estas condiciones analizamos el circuito por superposición, tendremos lo siguiente: llamemos  $\bar{I}_{l_1}$  a la corriente que resulta de pasivar la fuente de prueba  $\bar{V}_x$  e  $\bar{I}_{l_2}$  a la que resulta de pasivar todas las demás fuentes, tal como se indica en la figura 7.4a y 7.4b. Luego, como  $\bar{I}_{l_1} - \bar{I}_{l_2} = \bar{I}_l = 0$ , se tiene que  $\bar{I}_{l_1} = \bar{I}_{l_2}$ .

La corriente  $\bar{I}_{l_2}$  del circuito 7.4b viene dada por

$$\bar{I}_{l_2} = \frac{\bar{V}_x}{Z_l + Z_o} \quad (7.3)$$

donde  $Z_o$  es la impedancia del circuito pasivado visto desde los terminales  $A - B$ .

**(a)** Fuente de prueba pasivada**(b)** Todas las fuentes pasivadas menos la de prueba**Figura 7.4:** Resolución aplicando superposición

Pero al pasivar  $\bar{V}_x$  la corriente  $\bar{I}_{l_1}$  es igual a la que circulaba antes de colocar la fuente de prueba, es decir la corriente por  $Z_l$  de la figura 7.2. Por lo tanto podemos utilizar el circuito equivalente de la figura 7.4b para

calcular la corriente  $\bar{\mathbf{I}}_{l_1}$

$$\bar{\mathbf{I}}_{l_1} = \bar{\mathbf{I}}_{l_2} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_x}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_o} \quad (7.4)$$

donde la fuente de pruebas  $\bar{\mathbf{V}}_x$  es la fuente de Thevenin y la impedancia  $\mathbf{Z}_o$  es la impedancia de Thevenin.

Finalmente, haciendo tender  $\mathbf{Z}_l \rightarrow 0$  podemos observar dos cosas: primero que la corriente  $\bar{\mathbf{I}}_{l_1}$  de la figura 7.4a es la corriente de corto circuito de los terminales  $A - B$ , y segundo que la impedancia  $\mathbf{Z}_o$  es la impedancia de salida del circuito de la figura 7.4b definida como el cociente entre la tensión y corriente de salida con las demás fuentes pasivadas. Combinando ambas observaciones tenemos que la impedancia de Thevenin es igual a la impedancia de salida del circuito de bornes  $A - B$  y viene dada por

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{AB \text{ circuito abierto}}}{\bar{\mathbf{I}}_{l \text{ corto circuito}}} \quad (7.5)$$

## 7.2. Teorema de Norton

### 7.2.1. Equivalente Thevenin-Norton

### 7.2.2. Aplicación sucesiva Thevenin-Norton

## 7.3. Teorema de sustitución, o teorema de Miller

Una rama cualquiera por la cual circula una corriente  $\bar{\mathbf{I}}$  y cae una tensión  $\bar{\mathbf{V}}$ , puede ser reemplazada por cualquier otra rama que contenga elementos activos, pasivos o una combinación de ambos, siempre y cuando circule por ella la misma corriente  $\bar{\mathbf{I}}$  y tenga a sus bornes la misma tensión  $\bar{\mathbf{V}}$ .

La demostración de este teorema es directa y se basa en la ley de Kirchhoff de las tensiones. La suma algebraica de tensiones en una malla no se modifica si se suma y resta un generador ideal de igual tensión  $\bar{\mathbf{V}}$ , si los generadores incorporados se conectan ambos en la misma rama tampoco se verán afectadas las corrientes del circuito, en estas condiciones todos los elementos de la rama que provocan la caída de tensión  $\bar{\mathbf{V}}$  pueden ser eliminados de la malla junto con el generador incorporado en forma de subida de tensión de valor  $\bar{\mathbf{V}}$  sin que se modifiquen las corrientes del circuito, quedando la rama en cuestión formada solamente por el generador incorporado en forma de caída de tensión de valor  $\bar{\mathbf{V}}$ .

## 7.4. Teorema de compensación

Como una aplicación muy común del *teorema de sustitución* surge este *teorema de compensación*. Se trata del caso de un circuito que contiene una

impedancia variable como carga, donde el cálculo de la variación de corriente que provoca la variación de esta impedancia es de interés. Mediante este teorema el cálculo puede hacerse sin necesidad de recalcular el circuito completo.

Sea una impedancia  $\mathbf{Z}$  variable en torno a un delta, si se reemplaza la variación de esta impedancia por una fuente de tensión de forma que compense la variación de tensión producida, la corriente circulante por la rama seguirá valiendo lo mismo que antes de la variación de impedancia. Llamemos  $\delta\mathbf{Z}$  a la variación de impedancia,  $\bar{\mathbf{I}}$  a la corriente circulante para  $\delta\mathbf{Z} = 0$  y  $\delta\bar{\mathbf{I}}$  a la variación de corriente provocada por  $\delta\mathbf{Z}$ , entonces la fuente de compensación deberá valer  $\bar{\mathbf{V}}_s = \bar{\mathbf{I}}(\delta\mathbf{Z})$ . Si ahora analizamos el circuito utilizando el teorema de superposición vemos que al pasivar la fuente de compensación  $\bar{\mathbf{V}}_s$  la corriente será  $\bar{\mathbf{I}} + \delta\bar{\mathbf{I}}$  y al pasivar todas las demás fuentes del circuito excepto la de compensación la corriente será  $-\delta\bar{\mathbf{I}}$ , de forma que al actuar en conjunto con las otras fuentes la corriente total es  $\bar{\mathbf{I}}$ .

Es decir que la fuente de compensación actuando con todas las demás fuentes pasivadas nos permite calcular la variación de corriente provocada por la variación de la impedancia  $\mathbf{Z}$

$$\delta\bar{\mathbf{I}} = \frac{-\bar{\mathbf{V}}_s}{\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_o} = \frac{-\bar{\mathbf{I}}\delta\mathbf{Z}}{\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_o} \quad (7.6)$$

donde  $\mathbf{Z}_o$  es la impedancia de salida del circuito visto desde los bornes de  $\mathbf{Z}$ .

## 7.5. Teorema de reciprocidad

En un circuito lineal con una sola fuente la relación entre la excitación y la respuesta se mantienen al intercambiar las posiciones dentro del circuito de la excitación por la respuesta. Para demostrarlo podemos recurrir al método de las tensiones en una malla.

Sea  $\bar{\mathbf{V}}_i$  la fuente de tensión en la rama  $i$ , que produce una corriente  $\bar{\mathbf{I}}_j$  como respuesta en la rama  $j$ , la relación entre ambas viene dada por la impedancia de transferencia  $\mathbf{Z}_{ij}$  de tal forma que:

$$\bar{\mathbf{V}}_i = \mathbf{Z}_{ij} \bar{\mathbf{I}}_j = \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{\Delta_{ij}} \bar{\mathbf{I}}_j \Rightarrow \bar{\mathbf{I}}_j = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} \bar{\mathbf{V}}_i \quad (7.7)$$

si ahora trasladamos esta fuente a la rama  $j$ , la corriente que produce en la rama  $i$  según la impedancia de transferencia  $\mathbf{Z}_{ji}$  será:

$$\bar{\mathbf{V}}_j = \mathbf{Z}_{ji} \bar{\mathbf{I}}_i = \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{\Delta_{ji}} \bar{\mathbf{I}}_i \Rightarrow \bar{\mathbf{I}}_i = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} \bar{\mathbf{V}}_j \quad (7.8)$$

si comparamos las ecuaciones de las corrientes  $\bar{\mathbf{I}}_i$  e  $\bar{\mathbf{I}}_j$  vemos que solo se diferencian por el determinante sustituto de las respectivas impedancias de



transferencia,  $\Delta_{ij}$  y  $\Delta_{ji}$ . Pero en una matriz simétrica, como es el caso de la matriz de impedancias, los determinantes de la fila y columna intercambiada son iguales<sup>1</sup>, es decir  $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$ , y por ende la corriente generada en la rama  $i$  será igual a la corriente que antes se generó en la rama  $j$ ,  $\bar{\mathbf{I}}_i = \bar{\mathbf{I}}_j$

Las corrientes desarrolladas en las otras ramas del circuito para uno y otro caso no son necesariamente iguales, puesto que las impedancias de transferencias entre ramas diferentes no se mantendrán iguales.

El mismo *teorema de reciprocidad* puede aplicarse en circuitos que contengan una sola fuente de corriente.

## 7.6. Teorema de Millman

El *teorema de Millman* establece que varios generadores *reales* de tensión a circuito abierto  $\bar{\mathbf{V}}_G$  e impedancia interna  $\mathbf{Z}$  conectados en paralelo pueden ser remplazados por uno equivalente de tensión  $\bar{\mathbf{V}}_M$  en serie con una impedancia  $\mathbf{Z}_M$ , con

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\bar{\mathbf{V}}_i}{\mathbf{Z}_i}}{\sum_{i=0}^N \mathbf{Z}_i^{-1}} \quad (7.9)$$

$$\mathbf{Z}_M = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i^{-1} \right)^{-1} \quad (7.10)$$

La demostración de este teorema puede hacerse fácilmente representando cada generador real por su equivalente de Norton y después de agrupar todas las impedancias y generadores reemplazarlo por su equivalente de Thevenin como se muestra en la fig. 7.5.

Si la tensión a circuito abierto del generador  $i$ -ésimo es  $\bar{\mathbf{V}}_{G_i}$  y su impedancia interna  $\mathbf{Z}_i$  entonces la corriente de Norton será

$$\bar{\mathbf{I}}_{N_i} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{G_i}}{\mathbf{Z}_i} \quad (7.11)$$

luego todas las corriente de Norton en paralelo darán como resultado una corriente total equivalente

$$\bar{\mathbf{I}}_{N_{eq}} = \sum \bar{\mathbf{I}}_{N_i} \quad (7.12)$$

---


$$^1 \text{ sea } \mathbf{Z} = \begin{vmatrix} d_{11} & a & c \\ a & d_{22} & b \\ c & b & d_{33} \end{vmatrix}$$

el adjunto del elemento  $i = 2, j = 3$  es  $\Delta_{23} = - \begin{vmatrix} d_{11} & a \\ c & b \end{vmatrix}$  y el adjunto del elemento  $i = 3, j = 2$  es  $\Delta_{32} = - \begin{vmatrix} d_{11} & c \\ a & b \end{vmatrix} = -(d_{11}b - ac) = \Delta_{23}$

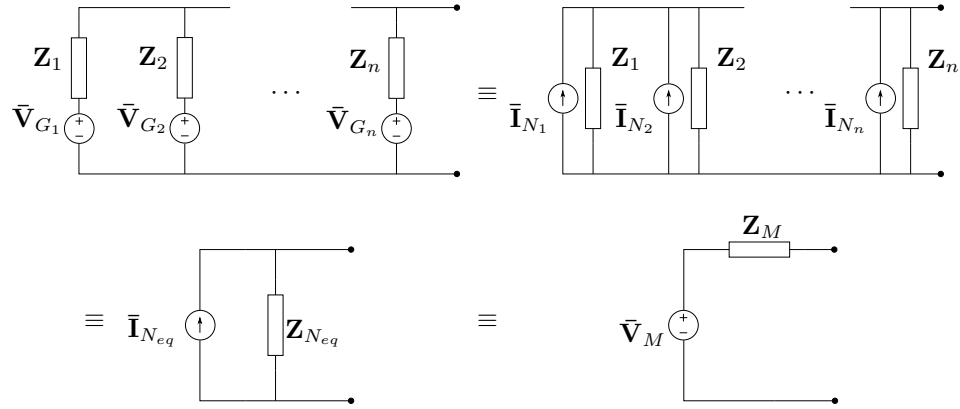


Figura 7.5: Teorema de Millman

y la impedancia será el equivalente paralelo de las anteriores

$$\mathbf{Z}_{N_{eq}} = \frac{1}{\sum^N \mathbf{Z}_i^{-1}} \quad (7.13)$$

Finalmente, el circuito equivalente de Norton obtenido se pasa a su equivalente de Thevenin con tensión

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \bar{\mathbf{I}}_{N_{eq}} \mathbf{Z}_{N_{eq}} \quad (7.14)$$

$$\mathbf{Z}_M = \mathbf{Z}_{N_{eq}} \quad (7.15)$$

y llevando la (7.12) a la (7.15) se obtiene la (7.10).

## 7.7. Teorema de transferencia de potencia máxima

La potencia activa transferida a una carga  $\mathbf{Z}_C$  depende del valor de la carga frente a la impedancia de salida del circuito o generador real al cuál está conectada dicha carga.

### 7.7.1. Carga resistiva pura

Supongamos una carga resistiva pura  $R_{\text{carga}}$  conectada a un circuito con impedancia de salida  $\mathbf{Z}_o$ . Modelando el circuito mediante su equivalente de Thevenin como en la figura 7.6 tendremos que la corriente por la carga será

$$\bar{\mathbf{I}}_{\text{carga}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{\text{Th}}}{\mathbf{Z}_o + R_{\text{carga}}} = \frac{V_{\text{Th}}}{\sqrt{(R_o + R_{\text{carga}})^2 + (X_o)^2}} \angle \theta_1 \quad (7.16)$$

donde  $\mathbf{Z}_o = R_o \pm jX_o$ . Luego, la potencia activa disipada en la carga será

$$P = (I_{\text{carga}})^2 R_{\text{carga}} = \frac{(V_{\text{Th}})^2 R_{\text{carga}}}{(R_o + R_{\text{carga}})^2 + X_o^2} \quad (7.17)$$

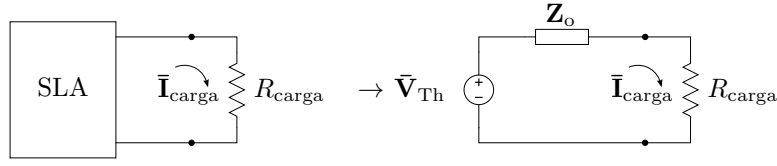


Figura 7.6: Carga resistiva pura

En la figura 7.7 se grafica (7.17), donde se ve que si  $R_{\text{carga}} \rightarrow 0$  la potencia  $P \rightarrow 0$ , y si  $R_{\text{carga}} \rightarrow \infty$  también la potencia  $P \rightarrow 0$ , ya que la corriente  $I_{\text{carga}} \rightarrow 0$ , por lo que la potencia activa pasará por un valor máximo.

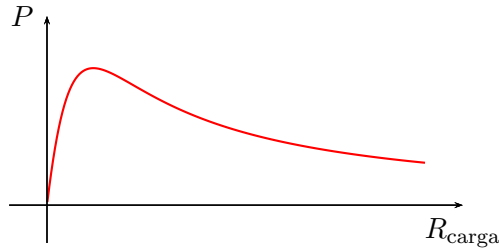


Figura 7.7: Potencia activa versus resistencia de carga

El valor de resistencia que disipará la máxima potencia puede obtenerse derivando  $P$  respecto de la  $R_{\text{carga}}$  y buscando el valor de  $R_{\text{carga}}$  que anule esta derivada

$$\frac{dP}{dR_{\text{carga}}} = (V_{\text{Th}})^2 \frac{(R_o + R_{\text{carga}})^2 + X_o^2 - 2R_{\text{carga}}(R_o + R_{\text{carga}})}{((R_o + R_{\text{carga}})^2 + (X_o)^2)^2} = 0 \quad (7.18)$$

de donde operando se tiene

$$(R_o)^2 + (X_o)^2 - (R_{\text{carga}})^2 = 0 \quad (7.19)$$

o bien

$$R_{\text{carga}} = \sqrt{(R_o)^2 + (X_o)^2} = |Z_o| \quad (7.20)$$

es decir que con una carga resistiva pura se logrará transferir la potencia máxima si el valor de esta resistencia es igual al módulo de la impedancia de salida del circuito alimentador.

### 7.7.2. Carga genérica

Si la carga contiene una parte reactiva,  $Z_{\text{carga}} = R_{\text{carga}} \pm jX_{\text{carga}}$ , la corriente será

$$\bar{I}_{\text{carga}} = \frac{\bar{V}_{\text{Th}}}{Z_o + Z_{\text{carga}}} \quad (7.21)$$

$$\bar{I}_{\text{carga}} = \frac{V_{\text{Th}}}{\sqrt{(R_o + R_{\text{carga}})^2 + (X_o \pm X_{\text{carga}})^2}} \angle \theta_1 \quad (7.22)$$

para maximizar esta corriente la parte reactiva de la impedancia  $\mathbf{Z}_{\text{carga}}$  debe ser igual en módulo pero de signo opuesto a la reactancia de la  $\mathbf{Z}_o$ , tal que  $(X_o \pm X_{\text{carga}})^2 = 0$ . Luego, la potencia será

$$P = (I_{\text{carga}})^2 R_{\text{carga}} = \frac{(V_{\text{Th}})^2 R_{\text{carga}}}{(R_o + R_{\text{carga}})^2} \quad (7.23)$$

que, haciendo el mismo análisis que para (7.17),  $P$  será máxima cuando  $R_{\text{carga}} = R_o$ .

Por lo tanto, para lograr transferir la máxima potencia a una carga genérica, su valor deberá ser igual al conjugado de la impedancia de salida del circuito

$$\mathbf{Z}_{\text{carga}} = \mathbf{Z}_o^* \quad (7.24)$$

### Carga genérica con reactancia fija

Si se tiene una carga genérica cuya parte reactiva no puede ser modificada entonces en general no se podrá conseguir que su valor sea igual al conjugado de la impedancia  $\mathbf{Z}_o$ , por lo que la potencia que logrará transferirse no será la máxima. En estas condiciones, la carga que logra transferir la máxima potencia posible se obtiene considerando su parte reactiva como parte de la impedancia de salida del circuito alimentador, y su parte resistiva igual a

$$R_{\text{carga}} = |\mathbf{Z}_o \pm jX_{\text{carga}}| \quad (7.25)$$

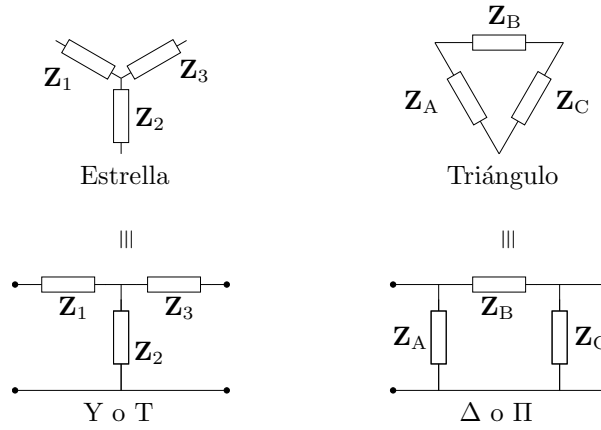
### Carga genérica con resistencia fija

Si la carga tiene su parte resistiva fija tal que solo puede elegirse la parte reactiva que maximize la potencia transferida, igual que en el caso anterior no se logrará elegir  $\mathbf{Z}_{\text{carga}} = \mathbf{Z}_o^*$  para asegurar máxima transferencia de potencia. En este caso se logrará maximizar la potencia transferida eligiendo una carga cuya parte reactiva sea de igual módulo y signo opuesto a la parte reactiva de la impedancia de salida del circuito alimentador

$$jX_{\text{carga}} = -jX_o \quad (7.26)$$

## 7.8. Transformación estrella - triángulo

La topología de un circuito genérico con  $N$  ramas (o nudos) puede ser particionada en dos configuraciones básicas, de tres ramas cada una. Estas particiones o configuraciones elementales reciben distintos nombres según el ámbito de uso. Por ejemplo en sistemas trifásicos se llaman *estrella* y *triángulo*, en teoría de cuadripolos se conocen como *Delta* y *Pi*, etc. La configuración estrella se obtiene interconectando las tres ramas a un punto

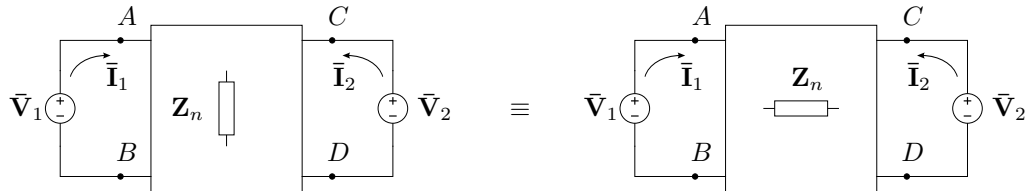


**Figura 7.8:** Configuraciones equivalentes Estrella, Y o T; y Triángulo,  $\Delta$  o  $\Pi$

común, mientras que la configuración triángulo se forma conectando una rama a continuación de la otra (figura 7.8). La transformación entre una y otra configuración es de interés porque permite modificar la topología del circuito, lo cual aporta diferentes beneficios en el análisis y diseños de sistemas. Esta transformación recibe el nombre de *Teorema de Kenelly*, o *transformación estrella-triángulo* o *transformación Y- $\Delta$* , y se basa en la equivalencia entre cuadripolos.

### 7.8.1. Cuadripolos equivalentes

Dado un circuito con varios elementos pasivos, y definidos unos bornes de entrada y unos bornes de salida del circuito, si se modifica la topología de forma tal que al conectar dos fuentes genéricas a los bornes de entrada y salida del circuito original y el modificado las corrientes de entrada y salida no cambian, entonces los circuitos son equivalentes. Esta equivalencia es válida de los bornes de entrada y salida hacia “afuera” del circuito, es decir, las corrientes de entrada y de salida no cambiarán pero si pueden cambiar otras corrientes “internas” que no se ven desde los bornes de entrada y de salida. En la figura 7.9 se ve esquemáticamente esta equivalencia, donde  $Z_n$  repre-



**Figura 7.9:** Cuadripolos equivalentes

senta los diferentes elementos que conforman, en diferente configuración, al circuito original y modificado. Esta representación circuital se conoce con el nombre de *cuadripolo*, y se utiliza para analizar el circuito desde sus bornes de entrada y salida y su interacción con los elementos externos.

Para representar esta equivalencia mediante parámetros, analicemos el cuadripolo de la figura 7.9 por superposición. Llamando  $\bar{\mathbf{I}}_{11}$  e  $\bar{\mathbf{I}}_{12}$  a las corrientes de entrada y salida debidas a la fuente  $\bar{\mathbf{V}}_1$  respectivamente (con  $\bar{\mathbf{V}}_2$  pasivada), los cocientes entre la tensión aplicada  $\bar{\mathbf{V}}_1$  y cada una de estas corrientes determina un parámetro del cuadripolo

$$\frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\bar{\mathbf{I}}_{11}} = \mathbf{Z}_i; \quad \frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\bar{\mathbf{I}}_{12}} = \mathbf{Z}_{\text{tr}12} \quad (7.27)$$

donde  $\mathbf{Z}_i$  se llama *impedancia de entrada* del cuadripolo y  $\mathbf{Z}_{\text{tr}12}$  *impedancia de transferencia entrada-salida*.

Considerando ahora la fuente  $\bar{\mathbf{V}}_2$  (con  $\bar{\mathbf{V}}_1$  pasivada) tendremos las corrientes  $\bar{\mathbf{I}}_{22}$  y  $\bar{\mathbf{I}}_{21}$  en la salida y en la entrada del cuadripolo respectivamente, y los cocientes definidos como antes serán

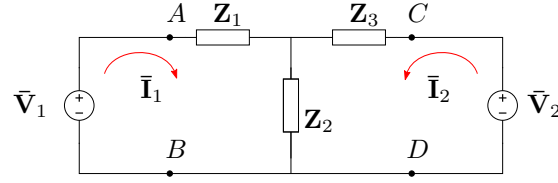
$$\frac{\bar{\mathbf{V}}_2}{\bar{\mathbf{I}}_{22}} = \mathbf{Z}_o; \quad \frac{\bar{\mathbf{V}}_2}{\bar{\mathbf{I}}_{21}} = \mathbf{Z}_{\text{tr}21} \quad (7.28)$$

donde  $\mathbf{Z}_o$  es la impedancia de salida y  $\mathbf{Z}_{\text{tr}21}$  la *impedancia de transferencia salida-entrada*. Puede demostrarse que para circuitos bilaterales la impedancia de transferencia entrada-salida es idéntica a la de salida-entrada,  $\mathbf{Z}_{\text{tr}12} = \mathbf{Z}_{\text{tr}21}$ , y se llama simplemente impedancia de transferencia. Luego, la corriente de entrada con ambas fuentes activas será  $\bar{\mathbf{I}}_1 = \bar{\mathbf{I}}_{11} + \bar{\mathbf{I}}_{21}$ , y la de salida  $\bar{\mathbf{I}}_2 = \bar{\mathbf{I}}_{12} + \bar{\mathbf{I}}_{22}$ . Por lo tanto para lograr que en la entrada y salida de ambos cuadripolos circulen idénticas corrientes cuando se excitan con las mismas fuentes se debe cumplir que la impedancia de entrada, impedancia de transferencia e impedancia de salida sean iguales. En particular, para que las configuraciones de la figura 7.8 sean equivalentes, la impedancia de entrada, salida y transferencia deben ser iguales. Calculando estas impedancias de una configuración y poniéndola en términos de la otra se tiene la transformación buscada.

### 7.8.2. Impedancias de entrada, salida y transferencia

Para calcular las impedancias de entrada, salida y transferencia de las configuraciones estrella podemos aplicar el método de las mallas como en la figura 7.10 y luego pasivar cada una de las fuentes de excitación. De la figura se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 \\ \bar{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$



**Figura 7.10:** Análisis de la configuración en estrella por método de las mallas

de donde

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \bar{\mathbf{V}}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} + \bar{\mathbf{V}}_2 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} \quad (7.30)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_2 = \bar{\mathbf{V}}_1 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} + \bar{\mathbf{V}}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} \quad (7.31)$$

pasivando la fuente  $\bar{\mathbf{V}}_2$  se tendrán las corrientes de entrada y salida debido a la fuente  $\bar{\mathbf{V}}_1$ , que en la sección 7.8.1 llamamos  $\bar{\mathbf{I}}_{11}$  e  $\bar{\mathbf{I}}_{12}$  respectivamente

$$\bar{\mathbf{I}}_{11} = \bar{\mathbf{V}}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} \quad (7.32)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{21} = \bar{\mathbf{V}}_1 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}} \quad (7.33)$$

es decir que la impedancia de entrada y de transferencia de la configuración estrella vienen dadas por

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{\Delta_{11}} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \quad (7.34)$$

$$\mathbf{Z}_{tr} = \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{\Delta_{21}} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2} \quad (7.35)$$

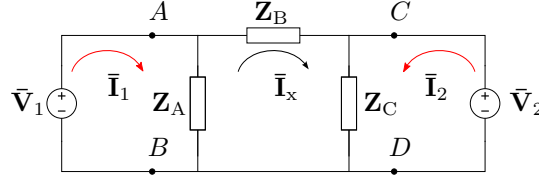
De igual forma, pasivando ahora  $\bar{\mathbf{V}}_1$  se obtienen las corrientes de salida y de entrada debido a  $\bar{\mathbf{V}}_2$ , y de estas la impedancia de salida<sup>2</sup>

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{\Delta_{22}} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}. \quad (7.36)$$

Operando ahora con el circuito en configuración triángulo de la figura 7.11 se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_A & -\mathbf{Z}_A & 0 \\ -\mathbf{Z}_A & \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C & \mathbf{Z}_C \\ 0 & \mathbf{Z}_C & \mathbf{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_x \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 \\ 0 \\ \bar{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

<sup>2</sup>Ya que como se mencionó la impedancia de transferencia es idéntica a la calculada pasivando  $\bar{\mathbf{V}}_2$ .

**Figura 7.11:** Análisis de la configuración triángulo por método de mallas

de donde las corrientes de interés son  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  solamente. Desarrollando de igual forma que para la configuración estrella se tiene

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\Delta \mathbf{Z}}{\Delta_{11}} = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B} \quad (7.38)$$

$$\mathbf{Z}_{tr} = \frac{\Delta \mathbf{Z}}{\Delta_{13}} = \mathbf{Z}_B \quad (7.39)$$

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\Delta \mathbf{Z}}{\Delta_{33}} = \frac{\mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \quad (7.40)$$

Finalmente, para que los cuadripolos sean equivalentes se debe cumplir que

$$\frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B} = \frac{\Delta \mathbf{Z}}{\Delta_{11}} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \quad (7.41)$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\Delta \mathbf{Z}}{\Delta_{21}} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2} \quad (7.42)$$

$$\frac{\mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{\Delta \mathbf{Z}}{\Delta_{22}} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2} \quad (7.43)$$

de donde despejando la impedancia correspondiente se puede construir la tabla 7.1

Transf. $Y \rightarrow \Delta$	Transf. $\Delta \rightarrow Y$
$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}$	$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$
$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$	$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$
$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}$	$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$

**Cuadro 7.1:** Relación entre impedancias para configuraciones estrella-triángulo equivalentes



## Capítulo 8

# Resonancia

En ingeniería se conoce con el nombre de *resonancia* a un particular efecto relacionado con el intercambio energético entre los elementos almacenadores de energía, que ocurre cuando la frecuencia de excitación coincide con la llamada *frecuencia natural* o de *resonancia* del sistema. Para que la resonancia tenga lugar el sistema en cuestión debe contener elementos que almacenen energía en contra fase, como un capacitor y un inductor en un sistema eléctrico, o una masa y un resorte en un sistema mecánico. La frecuencia de resonancia de un sistema depende de los elementos almacenadores de energía que lo componen.

### 8.1. Resonancia en un circuito serie RLC simple

Si se alimenta un circuito serie  $RLC$  con una fuente de frecuencia  $\omega$  variable, los valores de las reactancias inductivas y capacitivas varían en función de la frecuencia. Es decir, la impedancia  $\mathbf{Z}(j\omega)$  compuesta por

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (8.1)$$

se modifica mientras varía la frecuencia de excitación. Observando la parte reactiva de (8.1) vemos que para algún valor de  $\omega = \omega_0$  los módulos de las reactancias serán iguales

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (8.2)$$

despejando  $\omega_0$  de la igualdad (8.2) obtenemos

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8.3)$$

con  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Como  $L$  y  $C$  son siempre positivos, de (8.3) se sigue que siempre existe una frecuencia real que satisfaga (8.2), es decir que anule

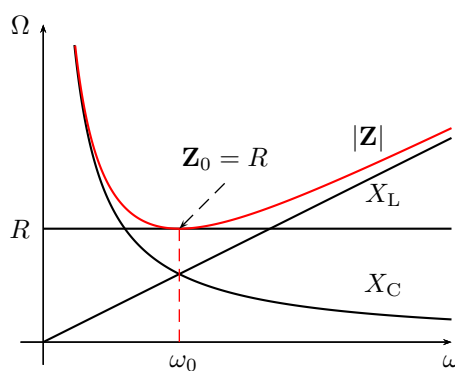
la parte reactiva de un circuito  $RLC$  serie. La frecuencia  $\omega_0$  que produce la anulación de la parte reactiva de un circuito se la llama *frecuencia de resonancia*.

A la frecuencia de resonancia la impedancia total equivalente del circuito se hace  $\mathbf{Z}_0 = R$ , entonces el fasor tensión de alimentación  $\bar{\mathbf{V}}$  aparece en fase con el fasor de corriente  $\bar{\mathbf{I}}$ , y el circuito tendrá en resonancia un factor de potencia  $fp = 1$  ( $\cos \varphi = 1$ ).

Desde el punto de vista físico, que se anule la parte reactiva de la impedancia equivalente de un circuito significa que ya no se produce un intercambio de energía entre la fuente de excitación y el circuito, sino que el intercambio ocurre internamente en el circuito entre los elementos reactivos. Este intercambio se realiza de forma que cuando la energía en el inductor es máxima, en el capacitor es cero y viceversa, manteniéndose constante la energía total almacenada.

### 8.1.1. Variación de la impedancia

En la figura 8.1 podemos ver la variación de cada parámetro de impedancia en función de la frecuencia. La resistencia  $R$  se mantiene constante mientras que las reactancias inductiva y capacitiva, y el módulo de la impedancia  $|\mathbf{Z}(j\omega)|$  varían a lo largo de todo el eje de  $\omega$ . Para frecuencias bajas y menores a la frecuencia de resonancia, vemos que el módulo de la reactancia inductiva es menor que el módulo de la reactancia capacitiva, esto hace que la fase de  $\mathbf{Z}(j\omega)$  sea negativa, como se observa en la figura 8.2, y el circuito presenta carácter capacitivo. Para frecuencias mayores a  $\omega_0$  la reactancia inductiva se hace mayor que la capacitiva y el circuito adquiere carácter inductivo.



**Figura 8.1:** Variación de los parámetros de impedancia de un  $RLC$  serie en función de la frecuencia

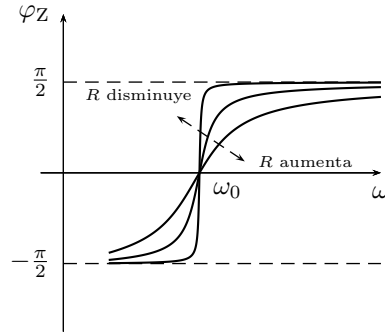
También puede observarse en la gráfica de la figura 8.1 que en el punto de resonancia el módulo de la impedancia pasa por un mínimo de valor  $R$ .

En este punto la corriente del circuito tendrá su máximo módulo ya que

$$|\bar{\mathbf{I}}| = \frac{|\bar{\mathbf{V}}|}{|\mathbf{Z}|} \quad (8.4)$$

y en nuestro caso  $|\bar{\mathbf{V}}|$  es constante. En el caso límite de  $R \rightarrow 0$  el módulo de  $\mathbf{Z}$  también tenderá a cero y el de la corriente a infinito. La variación de corriente con la frecuencia se verá en mayor detalle en la sección 8.1.2, con el análisis de las admitancias.

En la figura 8.2 vemos que la fase de  $\mathbf{Z}(j\omega)$  pasa por cero en resonancia, es decir que  $\mathbf{Z}_0$  es un número real puro. Además se observa que el cambio de fase será más abrupto cuanto menor sea el valor de  $R$ , en el caso límite de  $R \rightarrow 0$  la fase pasará de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$  en  $\omega = \omega_0$ .



**Figura 8.2:** Fase de la impedancia de un circuito resonante serie en función de la frecuencia

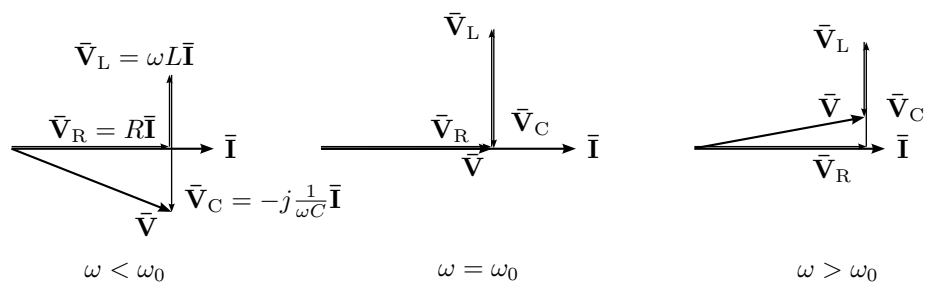
Un análisis fasorial a diferentes frecuencias alrededor de resonancia puede verse en la figura 8.3. Para  $\omega < \omega_0$  la tensión está atrasada respecto de la corriente, por el carácter capacitivo del circuito a estas frecuencias. Para  $\omega = \omega_0$  los fasores de tensión  $\bar{\mathbf{V}}_C$  y  $\bar{\mathbf{V}}_L$  tienen igual módulo pero con  $180^\circ$  de desfase, por lo que su suma es nula. Los fasores tensión aplicada y corriente total están en fase. La caída de tensión en  $R$  es por ende igual a la tensión aplicada,  $\bar{\mathbf{V}}_R = \bar{\mathbf{V}}_T$ . Por último, para  $\omega > \omega_0$  la tensión adelanta a la corriente por el carácter inductivo del circuito a estas frecuencias.

### 8.1.2. Análisis de admitancias

El módulo de la corriente es el producto del fador tensión por su admitancia equivalente  $|\bar{\mathbf{I}}| = |\bar{\mathbf{V}}||\mathbf{Y}|$ , si se mantiene  $|\bar{\mathbf{V}}| = \text{cte}$  la variación del módulo de la corriente será idéntica a la variación del  $|\mathbf{Y}(j\omega)|$ .

Para graficar  $\mathbf{Y}(j\omega)$ , definida como la inversa de la impedancia  $\mathbf{Z}(j\omega)$ , debemos conocer su módulo y fase

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \frac{1}{\mathbf{Z}(j\omega)} = \frac{1}{|\mathbf{Z}| \angle \varphi_Z} = \frac{1}{|\mathbf{Z}|} \angle -\varphi_Z \quad (8.5)$$



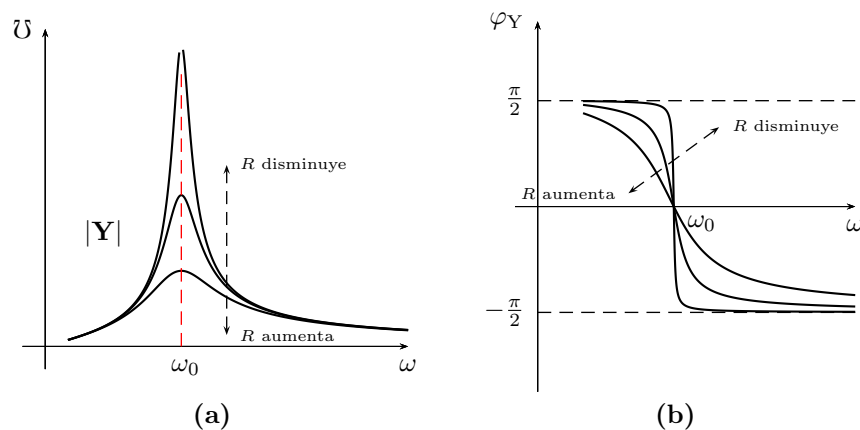
**Figura 8.3:** Diagrama fasorial de un circuito serie  $RLC$  para  $\omega < \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$  y  $\omega > \omega_0$

es decir

$$|\mathbf{Y}| = \frac{1}{|\mathbf{Z}|} \quad (8.6)$$

$$\varphi_Y = -\varphi_Z \quad (8.7)$$

La figura 8.4a corresponde a la gráfica de módulos de admitancias con distintos valores de resistencia de un circuito resonante serie. En el punto de resonancia  $\omega = \omega_0$  la corriente toma su máximo valor y es limitada sólo por la resistencia, por lo tanto cuanto menor es el valor resistivo, mayor es este máximo.



**Figura 8.4:** Variación de la admitancia en módulo y fase de un circuito resonante serie para distintos valores de resistencia

## 8.2. Sobretenación en circuitos serie resonantes

Ciertos valores de impedancias en circuitos resonantes serie producen un fenómeno muy particular al variar la frecuencia, este fenómeno se da cuando el módulo de la impedancia total se hace menor al módulo de las reactivas

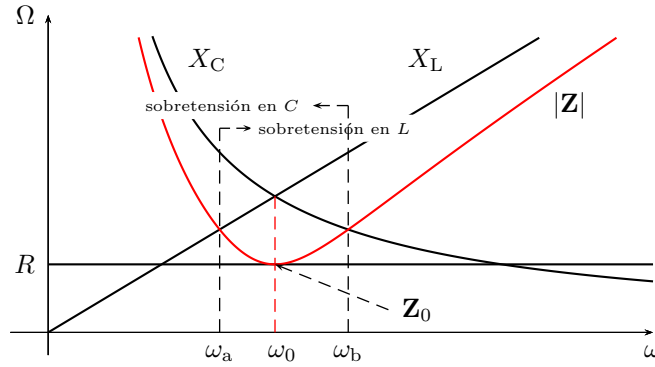
inductiva o capacitiva. Como el módulo de la tensión aplicada es igual al producto del módulo de la impedancia por el módulo de la corriente, y el módulo de la caída de tensión en el inductor o el capacitor es otra vez el producto del módulo de su impedancia reactiva por el  $|\bar{\mathbf{I}}|$ , entonces si para algunos valores de frecuencia el  $|\mathbf{Z}|$  se hace menor al  $|\mathbf{X}_L|$  o al  $|\mathbf{X}_C|$  se tendrá

$$|\bar{\mathbf{I}}||\mathbf{Z}| < |\bar{\mathbf{I}}||\mathbf{X}| \quad (8.8)$$

$$|\bar{\mathbf{V}}_T| < |\bar{\mathbf{V}}_X| \quad (8.9)$$

y habrá sobretensión en el inductor o en el capacitor, según sea la frecuencia.

Un análisis mas detallado puede hacerse con la ayuda del gráfico de los módulos de las impedancias, eligiendo valores de resistencia, inductancia y capacitancia adecuados para lograr la sobretensión. En la figura 8.5 se grafica esta situación. Como se ve, el  $|\mathbf{Z}|$  es para algunas frecuencias menor a los módulos de las reactivas. Analicemos cada elemento por separado



**Figura 8.5:** Módulos de impedancias de un circuito con sobretensión

empezando por el inductor. Sea  $\omega_a$  la frecuencia a la cual el módulo de la impedancia total se hace igual al módulo de la inductancia (figura 8.5), entonces de la igualdad  $|\mathbf{Z}(j\omega_a)| = \omega_a L$

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega_a L - \frac{1}{\omega_a C}\right)^2} = \omega_a L \quad (8.10)$$

$$(8.11)$$

despejamos  $\omega_a$

$$\omega_a = \frac{1}{C\sqrt{2\frac{L}{C} - R^2}} \quad (8.12)$$

En  $\omega = \omega_a$  el  $|\mathbf{Z}|$  se cruza con el  $|\mathbf{X}_L|$ , es decir que en este punto el módulo de la caída de tensión en el inductor será igual al módulo de la tensión aplicada.

Para frecuencias mayores a  $\omega_a$ , el  $|\bar{\mathbf{V}}_L|$  será siempre mayor al  $|\bar{\mathbf{V}}_T|$  y habrá sobretensión en el inductor.

Si  $2\frac{L}{C} - R^2 = 0$  entonces la ecuación (8.12) tiende a  $\infty$ , lo que significa que no habrá sobretensión a ninguna frecuencia. El valor crítico de resistencia que inicia la sobretensión en el inductor es entonces

$$R_c = \sqrt{2\frac{L}{C}}$$

y para todo valor de  $R < R_c$  habrá sobretensión en  $L$ .

Haciendo el mismo análisis ahora sobre el capacitor en la frecuencia  $\omega_b$  tenemos que

$$|\mathbf{Z}(j\omega_b)| = \frac{1}{\omega_b C} \quad (8.13)$$

$$(8.14)$$

y despejando

$$\omega_b = \frac{\sqrt{2\frac{L}{C} - R^2}}{L}. \quad (8.15)$$

La ecuación (8.15) indica el valor de frecuencia para el cual los módulo de la impedancia total y reactancia capacitiva se igualan. Esta frecuencia  $\omega_b$  se indica en la figura 8.5. Para todo  $\omega < \omega_b$  hay sobretensión en el capacitor.

Si  $2\frac{L}{C} - R^2 = 0$  entonces la ecuación (8.15) se hace cero, es decir que no existe sobretensión para ninguna frecuencia. La resistencia crítica obtenida de esta ecuación es

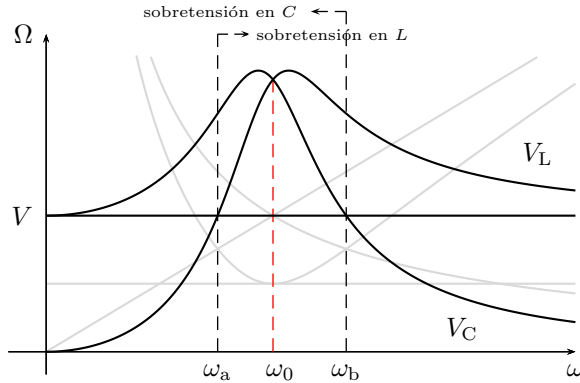
$$R_c = \sqrt{2\frac{L}{C}} \quad (8.16)$$

idéntica a la obtenida para el caso del inductor, concluyendo que el efecto de sobretensión aparece simultáneamente en ambos elementos reactivos y la condición para la existencia del mismo viene dada por la ecuación (8.16).

En la figura 8.6 se grafican los módulos de los fasores tensión de cada elemento, donde se ve cómo el módulo de la tensión en el capacitor  $\bar{\mathbf{V}}_C$  es mayor que el módulo de la tensión aplicada  $\bar{\mathbf{V}}_T$  desde  $\omega = 0$  hasta  $\omega = \omega_b$ , y el módulo de la tensión  $\bar{\mathbf{V}}_L$  en el inductor es menor que  $|\bar{\mathbf{V}}_T|$  hasta  $\omega = \omega_a$  y luego se hace mayor para todas las frecuencias superiores. Para los valores de frecuencia  $\omega_a < \omega < \omega_b$ , incluso en resonancia, existe sobretensión en ambos elementos reactivos.

### 8.3. Ancho de banda

Según lo visto en la sección anterior, la amplitud de la respuesta de un determinado circuito ante una señal variable depende de la frecuencia de



**Figura 8.6:** Sobretensión en los elementos reactivos provocada por el valor de  $R < \sqrt{2\frac{L}{C}}$

la señal. Esta respuesta tiene una amplitud máxima para la frecuencia de resonancia y decrece para frecuencias fuera de la resonancia. A medida que la frecuencia de la señal se aleja de la de resonancia la amplitud de la respuesta disminuye, pero sin llegar nunca a ser nula. A los fines prácticos es útil definir una frecuencia de excitación a partir de la cual la amplitud de la respuesta puede no ser adecuada para el funcionamiento del sistema. Esta frecuencia se conoce como *frecuencia de corte* y se elige en términos de potencia, de forma tal que superando esta frecuencia de corte (o por debajo, según la configuración del circuito) la potencia de la respuesta es menor a un valor determinado. El valor elegido para establecer la frecuencia de corte es la mitad de la máxima potencia que puede transferir la respuesta a cualquier frecuencia, llamado normalmente *potencia mitad*.

Luego, se define como ancho de banda de un circuito al rango de frecuencias dentro del cual un señal disipa una potencia mayor a la potencia mitad, es decir sean  $\omega_1$  y  $\omega_2$  las frecuencias de corte inferior y superior respectivamente el ancho de banda  $AB$  se define como

$$AB = \omega_2 - \omega_1 \quad (8.17)$$

### 8.3.1. $AB$ en circuito $RLC$ serie

Para determinar el ancho de banda de un circuito  $RLC$  serie debemos primero conocer la potencia máxima que la corriente puede transferir al variar la frecuencia de excitación, para determinar luego la potencia mitad. Analizando la respuesta en frecuencia<sup>1</sup> de la figura 8.4a vemos que el módulo de la corriente es máximo para  $\omega = \omega_0$ , por lo tanto la máxima disipación

<sup>1</sup>A la relación entre la frecuencia de excitación y la respuesta de un sistema se la llama *respuesta en frecuencia*, la figura 8.4a por ejemplo muestra la respuesta en frecuencia de corriente de un circuito  $RLC$  excitado por una fuente de tensión de módulo constante, ya que  $|\bar{\mathbf{I}}| = |\bar{\mathbf{V}}||\mathbf{Y}|$ .

de potencia tiene lugar a la frecuencia de resonancia  $\omega_0$

$$P_{\text{máx}} = |\bar{\mathbf{I}}_0|^2 R \quad (8.18)$$

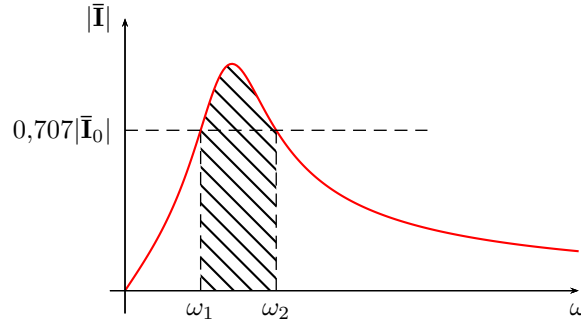
si llamamos  $P_2$  a la potencia mitad e  $\bar{\mathbf{I}}_2$  a la corriente que disipa esa potencia tenemos

$$P_2 = \frac{P_{\text{máx}}}{2} = \frac{|\bar{\mathbf{I}}_0|^2 R}{2} = |\bar{\mathbf{I}}_2|^2 R \quad (8.19)$$

de donde

$$|\bar{\mathbf{I}}_2| = \frac{|\bar{\mathbf{I}}_0|}{\sqrt{2}} \quad (8.20)$$

es decir que la corriente que logra disipar la mitad de la potencia máxima tiene un módulo  $\sqrt{2}$  veces menor al de la corriente  $\bar{\mathbf{I}}_0$  que disipa la potencia máxima. En la figura 8.7 se muestra el ancho de banda de un circuito  $RLC$  serie, donde se muestran los valores de frecuencia para los cuales se tiene una corriente de módulo  $\frac{|\bar{\mathbf{I}}_0|}{\sqrt{2}}$ .



**Figura 8.7:** Respuesta en frecuencia y ancho de banda de un  $RLC$  serie

Según la ec. (8.20), el módulo de la corriente en los puntos de potencia mitad es  $\sqrt{2}$  veces menor que la corriente máxima, por lo tanto a esta frecuencia el módulo de la impedancia será  $\sqrt{2}$  mayor que en resonancia,  $|\mathbf{Z}_2| = \sqrt{2}R$ . Por trigonometría podemos concluir que para lograr dicho aumento en el módulo de la impedancia la parte reactiva debe ser igual en módulo a la parte resistiva del circuito

$$R = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|. \quad (8.21)$$

La igualdad (8.21) se cumple para dos frecuencias distintas, una menor a la de resonancia donde la impedancia total equivalente tendrá carácter capacitivo, y otra mayor a  $\omega_0$  que corresponde a la  $\mathbf{Z}$  de carácter inductivo.



Para  $\omega = \omega_1 < \omega_0$  la reactancia total equivalente es de carácter capacitiva, entonces podemos escribir la igualdad anterior de forma

$$R = \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L \quad (8.22)$$

y operando se obtienen dos valores que cumplen con (8.22)

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (8.23)$$

de los cuales el valor mayor a cero será la *frecuencia de corte inferior* o *frecuencia inferior de potencia mitad* buscada.

Mediante un análisis similar para  $\omega_2$ , donde el circuito es de carácter inductivo, se obtiene

$$R = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \quad (8.24)$$

de donde

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (8.25)$$

y el valor mayor a cero de éstos corresponde a la *frecuencia de corte superior* o *frecuencia superior de potencia mitad*.

Luego, el ancho de banda de un *RLC* serie es

$$AB = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad (8.26)$$

Observando las ecuaciones (8.23) y (8.25) se ve que sólo hay una diferencia de signo, por lo que de

$$\omega_{1,2} = \left| \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right| \quad (8.27)$$

se obtienen las dos frecuencias de corte, superior e inferior.

La relación entre las frecuencias de potencia mitad y la frecuencia de resonancia puede verse fácilmente haciendo el producto entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (8.28)$$

es decir que  $\omega_0$  es la media geométrica de  $\omega_1$  y  $\omega_2$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}. \quad (8.29)$$

### 8.4. Factor $Q_0$

En un circuito resonante se define  $Q_0$  como un factor representativo de las características energéticas del circuito. Este factor viene dado por el cociente entre la energía máxima almacenada y la energía disipada por ciclo, por una constante de normalización  $2\pi$

$$Q_0 = 2\pi \frac{\text{Energía máxima almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} \quad (8.30)$$

como en resonancia la energía máxima almacenada en el inductor es igual a la energía máxima almacenada en el capacitor, se puede usar una u otra en el cálculo de  $Q_0$ .

La energía instantánea almacenada en el inductor es

$$w_L(t) = \frac{1}{2}L(i_L)^2 \quad (8.31)$$

tomando su máximo valor cuando la corriente  $i_L$  sea máxima

$$W_{L_{\text{máx}}} = \frac{1}{2}L(I_{L_{\text{máx}}})^2 \quad (8.32)$$

y en el capacitor

$$w_C(t) = \frac{1}{2}C(v_C)^2 \Rightarrow W_{C_{\text{máx}}} = \frac{1}{2}C(V_{C_{\text{máx}}})^2 \quad (8.33)$$

La energía instantánea disipada es

$$w_R(t) = R \int (i_R)^2 dt = \frac{1}{R} \int (v_R)^2 dt \quad (8.34)$$

supongamos una corriente por  $i_R = I_{R_{\text{máx}}} \cos(\omega_0 t)$ , la energía disipada por ciclo en términos de la corriente será

$$W_R = R \int_0^T \left( \frac{I_{R_{\text{máx}}}^2}{2} - \frac{I_{R_{\text{máx}}}^2}{2} \cos(2\omega_0 t) \right) dt = \frac{1}{2}R(I_{R_{\text{máx}}})^2 T \quad (8.35)$$

con  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  el período de la señal en resonancia. Luego, llevando (8.32) y (8.35) a (8.30)

$$Q_0 = \frac{w_0 L (I_{L_{\text{máx}}})^2}{R (I_{R_{\text{máx}}})^2} \quad (8.36)$$

si se trata de un circuito serie la corriente por  $R$  y por  $L$  será la misma, entonces el  $Q_0$  de un  $RLC$  serie queda

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (8.37)$$

o

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (8.38)$$

ya que en resonancia  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$

Observando (8.37) y (8.38) vemos que el factor  $Q_0$  puede calcularse también como el cociente entre la reactancia inductiva o capacitiva en resonancia y la resistencia  $R$

$$Q_0 = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} \quad (8.39)$$

o como el cociente entre la potencia reactiva y la potencia activa

$$Q_0 = \frac{Q}{P} \quad (8.40)$$

ya que la potencia reactiva en el inductor o en el capacitor es  $Q = X_L I^2 = X_C I^2$ .

De igual forma podemos poner la energía disipada por ciclo en términos de la tensión en  $R$ ,

$$W_R = \frac{\pi}{2\omega_0} \frac{(V_{R_{\max}})^2}{R} \quad (8.41)$$

y utilizando la energía máxima almacenada en el capacitor (8.33) para el cálculo de  $Q_0$  tendremos

$$Q_0 = \frac{\omega_0 RC (V_{C_{\max}})^2}{(V_{R_{\max}})^2}. \quad (8.42)$$

Si consideramos un circuito  $RLC$  paralelo, la tensión en  $R$  será igual a la tensión en  $C$ , por lo tanto el factor  $Q_0$  de un  $RLC$  paralelo es

$$Q_0 = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (8.43)$$

análogamente al circuito serie, el factor  $Q_0$  de un circuito paralelo puede calcularse como el cociente entre la susceptancia inductiva o capacitiva y la conductancia  $\frac{1}{R}$ .

#### 8.4.1. Factor de sobretensión

Multiplicando y dividiendo a (8.39) por el módulo de la corriente, se puede poner a  $Q_0$  en término de las tensiones en  $L$  (o en  $C$ ) y en  $R$

$$Q_0 = \frac{X_L}{R} \frac{I}{I} = \frac{V_L}{V_R} \quad (8.44)$$

y observando que la tensión en la resistencia de un  $RLC$  serie en resonancia es igual a la tensión aplicada  $V_T = V_R$  tenemos

$$Q_0 = \frac{V_L}{V_T} = \frac{V_C}{V_T} \quad (8.45)$$

es decir que el módulo de la tensión en resonancia a bornes de los elementos reactivos puede obtenerse a partir del factor  $Q_0$

$$V_L = V_C = Q_0 V_T. \quad (8.46)$$

En (8.46) se ve que si  $Q_0 > 1$  entonces el módulo de la tensión en  $L$  y en  $C$  será mayor al de la tensión aplicada, por lo tanto habrá sobretensión. Es por esto que el factor  $Q_0$  recibe también el nombre de *factor de sobretensión*.

Notar sin embargo que  $Q_0 > 1$  no es condición necesaria para que haya sobretensión en el circuito. Si se observa la figura 8.8a el valor máximo de sobretensión no se da en resonancia, por lo tanto es posible que aún no existiendo sobretensión en resonancia, sí exista en otras frecuencias. Para verificar esto hagamos un análisis de la tensión de los elementos reactivos en función de la frecuencia.

La tensión del capacitor en el dominio fasorial para una dada frecuencia será

$$\bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = \frac{1}{j\omega C} \frac{\bar{V}_T}{\mathbf{Z}} \quad (8.47)$$

y su módulo

$$V_C = \frac{1}{\omega C} \frac{V_T}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (8.48)$$

$$V_C = \frac{V_T}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}} \quad (8.49)$$

con  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Sea  $\omega_c$  la frecuencia para la cuál la sobretensión en el capacitor es máxima (figura 8.8), derivando  $V_C$  respecto de  $\omega$  e igualando a 0 se tiene

$$\left. \frac{dV_T}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = 0 \Rightarrow \omega_c = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2 R^2 C^2}{2} \right) \quad (8.50)$$

luego, llevando (8.38) a (8.50) tenemos

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}} \quad (8.51)$$

y llevando (8.51) a (8.49) se obtiene el valor máximo del módulo de la tensión en el capacitor

$$V_{C_{\text{máx}}} = Q_0 \frac{V_T}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}. \quad (8.52)$$

Mediante un análisis similar de la tensión en el inductor se tiene

$$V_L = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}} \quad (8.53)$$

haciendo 0 la derivada de  $V_L$  con respecto a  $\omega$  se obtiene  $\omega_1$ , a la frecuencia para la cuál la tensión en el inductor es máxima

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}} \quad (8.54)$$

con la que se obtienen el valor máximo de  $V_L$

$$V_{L_{\text{máx}}} = Q_0 \frac{V_T}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}} \quad (8.55)$$

que como se ve, es idéntica a la ecuación de  $V_{C_{\text{máx}}}$ .

#### Sobretensión con $Q_0 < 1$

Si  $Q_0 < 1$  entonces la tensión en los elementos reactivos en resonancia será menor a la tensión aplicada, lo cual, como se ve en (8.52) y (8.55), no implica que no haya sobretensión a otra frecuencia. Por ejemplo si  $Q_0 = 0,9$ , la tensión máxima en el capacitor será

$$V_{C_{\text{máx}}} = 0,9 \frac{V_T}{\sqrt{1 - \frac{1}{3,24}}} \approx 1,08 V_T \quad (8.56)$$

a la frecuencia  $\omega_c$

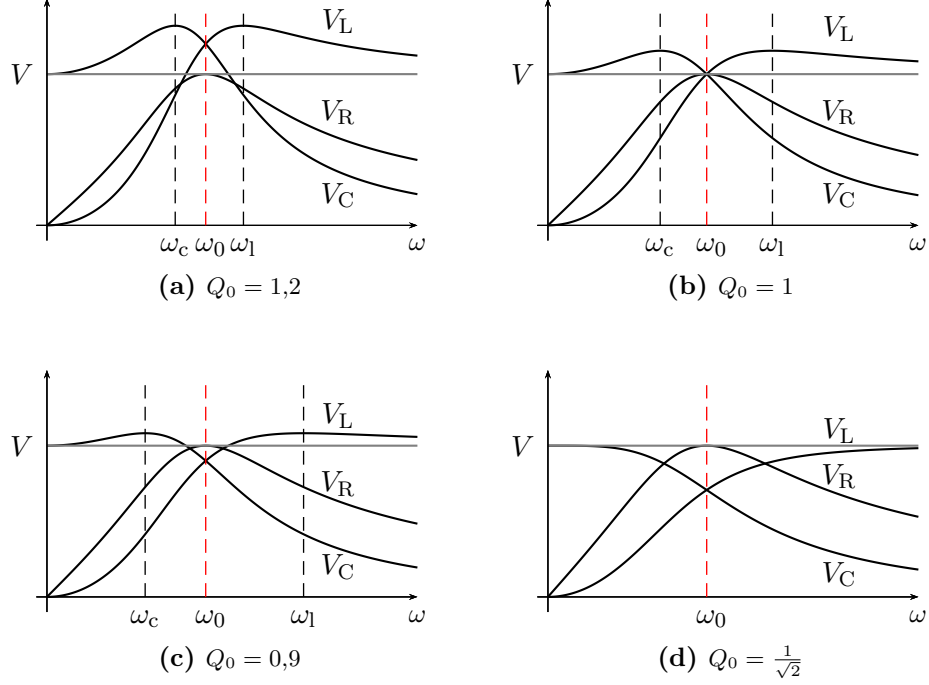
$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{1,62}} \approx 0,62 \omega_0. \quad (8.57)$$

En la figura 8.8b se muestra la gráfica de las tensiones en los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$  para el caso particular de  $Q_0 = 1$ , y en 8.8c las tensiones correspondientes a un  $Q_0 = 0,9$ .

Para  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  el cociente  $\frac{Q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}$  de (8.52) y (8.55) se hace igual a 1,

lo que significa que las tensiones máximas en el capacitor y en el inductor serán iguales a  $V_T$ . La frecuencia para la cual  $V_{C_{\text{máx}}} = V_T$  es

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\frac{1}{2}}} = 0.. \quad (8.58)$$



**Figura 8.8:** Módulo de las tensiones en los elementos de un  $RLC$  serie para diferentes valores de  $Q_0$

Para el caso de  $\omega_1$ , si  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  se tiene una indeterminación, que se salva tomando límite para  $Q_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\lim_{Q_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \omega_1 = \lim_{Q_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}} = \infty. \quad (8.59)$$

La figura 8.8d muestra las tensiones para un valor de  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , donde puede observarse que los valores máximos de tensión en el capacitor y en el inductor se dan para  $\omega \rightarrow 0$  y  $\omega \rightarrow \infty$  respectivamente. Para valores de  $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$  el efecto de sobretensión desaparece. Notar que  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  corresponde a un valor de  $R$  igual a la resistencia crítica (8.16).

### Sobretensión para $Q_0 \gg 1$

Observando (8.51) y (8.52) se ve que si  $Q_0 \gg 1$ , la frecuencia a la cual se obtiene el valor máximo de tensión en el capacitor tiende a  $\omega_0$ , y  $V_{C_{\text{máx}}}$

tiende a  $Q_0 V_T$ , es decir

$$\omega_c|_{Q_0 \gg 1} \approx \omega_0 \quad (8.60)$$

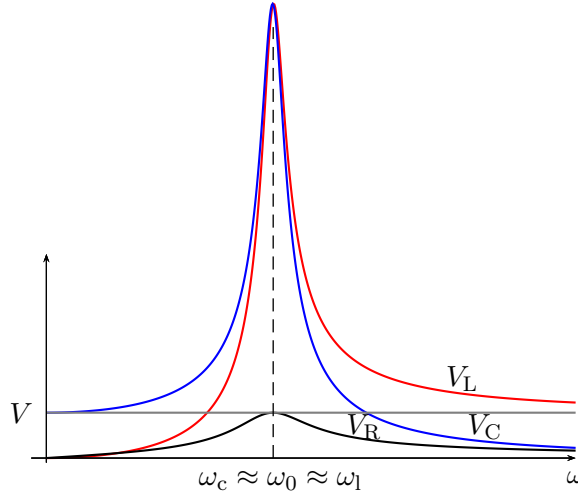
$$V_{C_{\max}}|_{Q_0 \gg 1} \approx Q_0 V_T. \quad (8.61)$$

Lo mismo ocurre con la tensión en el inductor y su frecuencia correspondiente (ecuaciones (8.55) y (8.54)),

$$\omega_l|_{Q_0 \gg 1} \approx \omega_0 \quad (8.62)$$

$$V_{L_{\max}}|_{Q_0 \gg 1} \approx Q_0 V_T. \quad (8.63)$$

Un valor usualmente elegido para considerar válidas las aproximaciones anteriores es  $Q_0 \geq 10$ . En la figura 8.9 se puede ver como varían los módulos de las tensiones de los elementos pasivos para un  $Q_0 = 10$ .

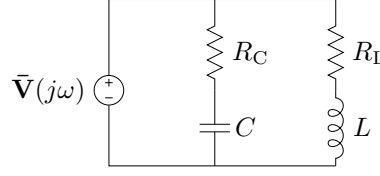


**Figura 8.9:** Módulo de las tensiones en los elementos de un  $RLC$  serie para un valor de  $Q_0 = 10$

## 8.5. Resonancia de un circuito paralelo de 2 ramas

Como complemento al estudio del circuito  $RLC$  simple presentado antes vamos a analizar un circuito paralelo de dos ramas, una  $RL$  y una  $RC$ . Esta configuración permite estudiar algunos comportamientos importantes del efecto de resonancia que no se presentan en circuitos resonantes simples.

Supongamos un circuito de dos ramas en paralelo como el de la figura 8.10, es probable que exista un valor de frecuencia para el cual este circuito entre en resonancia. Es decir una frecuencia  $\omega_0$  a la cual la tensión de alimentación  $\bar{V}(j\omega_0) = \bar{V}_0$  esté en fase con la corriente total  $\bar{I}(j\omega_0) = \bar{I}_0$ . Si el

**Figura 8.10:** Circuito paralelo de dos ramas

fasor tensión y el fasor corriente están en fase, su cociente será un número real puro

$$\mathbf{Z}_0 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_0}{\bar{\mathbf{I}}_0} \quad ; \quad \mathbf{Z}_0 \in \mathbb{R} \quad (8.64)$$

o bien

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{\bar{\mathbf{I}}_0}{\bar{\mathbf{V}}_0} \quad ; \quad \mathbf{Y}_0 \in \mathbb{R} \quad (8.65)$$

donde  $\mathbf{Z}_0$  y  $\mathbf{Y}_0$  son la impedancia y admitancia equivalente en resonancia del circuito de la figura 8.10.

Para averiguar si la condición de resonancia es posible se debe verificar si existe algún valor real de frecuencia para el cual se anule la parte imaginaria de la impedancia o admitancia equivalente.

Si llamamos  $\mathbf{Y}_1$  a la admitancia de la primera rama y  $\mathbf{Y}_2$  a la de la segunda, la admitancia equivalente del circuito será

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{R_C - jX_C} + \frac{1}{R_L + jX_L} \quad (8.66)$$

separando parte real e imaginaria

$$\mathbf{Y}_T = \left( \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \right) + j \left( \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right) \quad (8.67)$$

como la condición para resonancia es  $Im[\mathbf{Y}_T] = 0$ , entonces en (8.67) se debe cumplir

$$\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \quad (8.68)$$

reemplazando las reactancias y operando

$$\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R_C^2 + (\frac{1}{\omega_0 C})^2} = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \quad (8.69)$$

$$\frac{1}{\omega_0 C} [R_L^2 + (\omega_0 L)^2] = \omega_0 L \left[ R_C^2 + (\frac{1}{\omega_0 C})^2 \right] \quad (8.70)$$

$$\frac{R_L^2}{\omega_0 C} + \omega_0 L \frac{L}{C} = \omega_0 L R_C^2 + \frac{1}{\omega_0 C} \frac{L}{C} \quad (8.71)$$



luego despejando  $\omega_0$  tenemos

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}} \quad (8.72)$$

esta es la frecuencia de resonancia del circuito de la figura 8.10. Para que esta frecuencia exista, debe ser un número real positivo, es decir que el radicando de la ec. (8.72) debe ser mayor que cero. Habrá entonces resonancia si

$$R_L^2 - \frac{L}{C} > 0 \quad \text{y} \quad R_C^2 - \frac{L}{C} > 0 \quad (8.73)$$

o si

$$R_L^2 - \frac{L}{C} < 0 \quad \text{y} \quad R_C^2 - \frac{L}{C} < 0 \quad (8.74)$$

de lo contrario el circuito no entrará en resonancia a ninguna frecuencia.

Si los valores  $R_L^2$ ,  $R_C^2$  y  $\frac{L}{C}$  son iguales, tendremos una indeterminación en la ec. (8.72) y no se puede determinar si habrá o no resonancia a alguna frecuencia. Para analizar que ocurre volvamos unos pasos atrás, supongamos  $R_L^2 = R_C^2 = \frac{L}{C} = \beta$  y reemplacemos esta constante en (8.71)

$$\frac{\beta}{\omega_0 C} + \omega_0 L \beta = \omega_0 L \beta + \frac{1}{\omega_0 C} \beta \quad (8.75)$$

obtenemos una igualdad que se cumple para cualquier frecuencia, y como esta igualdad implica  $\text{Im}[\mathbf{Y}_T] = 0$  entonces para cualquier frecuencia la admitancia total será un número real puro y habrá resonancia a todas las frecuencias.

## 8.6. Lugar geométrico

Se conoce como lugar geométrico al conjunto de puntos que satisfacen una propiedad. Por ejemplo el conjunto de valores que una función paramétrica puede tomar al variar el parámetro. En el caso de análisis de circuitos se presentan muchas situaciones donde un parámetro del circuito puede variar, y la variación de este parámetro determina el lugar geométrico de otro, como por ejemplo de la impedancia o de la admitancia total del circuito.

El lugar geométrico de admitancia de un circuito suele ser de particular interés porque como normalmente la tensión aplicada es constante, entonces la corriente  $\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{V}}\mathbf{Y}$  tiene igual lugar geométrico que la admitancia.

### 8.6.1. Elementos en serie

Supongamos un circuito con una impedancia  $\mathbf{Z}$ , cuya parte imaginaria  $jX$  puede variar. La impedancia total del circuito será

$$\mathbf{Z} = R_1 \pm jX$$

con  $R_1$  constante. Todos los valores que puede tomar  $\mathbf{Z}$  forman en el plano  $\mathbf{Z}$  una recta paralela al eje imaginario, que corta al eje real en  $R_1$ , esto es el lugar geométrico de  $\mathbf{Z}$  con reactancia variable.

En el plano  $\mathbf{Y}$ , este lugar de  $\mathbf{Z}$  representará un lugar de  $\mathbf{Y}$  en función de la conductancia  $G$  y de la susceptancia  $B$ . Para encontrar el lugar geométrico de  $\mathbf{Y}$  tenemos que encontrar la inversa de  $\mathbf{Z}$ , en terminos de  $G$  y  $B$

$$\mathbf{Z} = R_1 \pm jX = \frac{1}{G \pm B} = \frac{G}{G^2 + B^2} \mp \frac{B}{G^2 + B^2} \quad (8.76)$$

## Capítulo 9

# Circuitos acoplados inductivamente

### 9.1. Autoinducción e inducción mútua

La tensión inducida en un inductor es, por ley de Faraday, proporcional a la variación de flujo que abraza las espiras y a su número de espiras  $N$

$$V = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.1)$$

la variación de flujo con respecto a la corriente es proporcional al coeficiente de autoinducción  $L$

$$L = N \frac{d\Phi}{di} \quad (9.2)$$

de forma que llevando (9.2) a (9.1) tenemos la ya conocida ecuación de la tensión autoinducida en un inductor

$$V = L \frac{di}{dt} \quad (9.3)$$

La ecuación (9.3) nos da la tensión autoinducida en un inductor provocada por el flujo que genera la circulación de corriente por el propio inductor. Si ahora acercamos un segundo inductor por el cuál circule una corriente  $i_2$ , de forma tal que parte del flujo generado por esta corriente se concatene con el del primer inductor, la tensión inducida en este será

$$V_{L_1} = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad (9.4)$$

con  $\Phi_1$  el flujo generado por la propia corriente  $i_1$  del primer inductor y  $\Phi_{21}$  la porción de flujo generado por el segundo inductor que por proximidad abraza las espiras del primero.

La concatenación de flujo puede ser positiva o negativa, es decir el flujo  $\Phi_1$  propio del primer inductor puede verse reforzado o debilitado por el flujo  $\Phi_{21}$  aportado por el segundo inductor, dependiendo de la dirección de las líneas de flujo. La dirección de las líneas de flujo en un arrollamiento viene dado por la regla de la mano derecha y depende del sentido del arrollamiento y de la corriente que lo atraviese. Para el caso que los flujos se debiliten la ec. (9.4) será

$$V_{L_1} = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} - N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad (9.5)$$

Ya sea que los flujos se refuercen o debiliten la tensión ahora a bornes del inductor aparece formada por dos términos: la tensión autoinducida (que depende del flujo  $\Phi_1$  que se genera por la circulación de la corriente  $i_1$ ) y la tensión inducida por el acercamiento del segundo inductor. Esta tensión se conoce como *tensión inducida mútua*

$$V_{L_{1Mutua}} = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad (9.6)$$

La tensión inducida mútua depende del flujo inducido mútuo  $\Phi_{21}$ , que es generado por la corriente  $i_2$  que circula por el segundo inductor. Esta tensión se relaciona con la corriente  $i_2$  por medio de un coeficiente llamado *coeficiente de inductancia mútua* que se simboliza como  $M_{21}$  y al igual que el coeficiente de autoinducción  $L$  se mide en Henrios.

$$V_{L_{1Mutua}} = \frac{di_2}{dt} M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dt} N_1 \quad (9.7)$$

Llevando (9.7) a (9.4) y (9.5) podemos poner la tensión en el inductor en términos de las corrientes  $i_1$  e  $i_2$ , quedando

$$V_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (9.8)$$

Si consideramos ahora la tensión inducida  $V_{L_2}$  en el segundo inductor de cantidad de espiras  $N_2$  observamos que al acercarlo al primero también aparecerá en el una tensión inducida mútua, que dependerá de la corriente  $i_1$  o del flujo inducido mútuo  $\Phi_{12}$ , es decir

$$V_{L_{2Mutua}} = \frac{di_1}{dt} M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dt} N_2 \quad (9.9)$$

tal que la tensión total inducida en el segundo inductor estará también compuesta por su tensión autoinducida y esta tensión inducida mútua

$$V_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (9.10)$$

Es decir que en el conjunto de inductores acoplados la concatenación de flujos es mútuo, y por conservación de energías puede demostrarse que esta mútua inducción es idéntica

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (9.11)$$

luego, las tensiones en uno y otro inductor serán

$$V_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (9.12)$$

$$V_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (9.13)$$



## Capítulo 10

# Sistemas polifásicos

La transmisión de energía de un generador a una carga mediante una línea bifilar constituye lo que se denomina un *sistema monofásico*. Si se interconectan varios sistemas monofásicos de manera definida se obtendrá lo que se llama un *sistema polifásico*. Un sistema polifásico está constituido por  $n$  tensiones sinusoidales de la misma frecuencia, conectadas a  $n$  cargas a través de  $n$  pares de conductores. La palabra fase se emplea para denominar una parte del sistema polifásico como se verá más adelante, así los sistemas reciben un nombre de acuerdo al número de fases que los componen, dando lugar a sistemas bifásicos, trifásicos, tetrafásicos, etc. El más utilizado de los sistemas polifásicos es el trifásico por tener marcadas ventajas frente a los otros, como mejor aprovechamiento del cobre y hierro en los generados y también del cobre en los cables de distribución, debido a un eficiente transporte de energía.

### 10.1. Sistema bifásico

Una espira en rotación en un campo magnético constante genera una señal de forma sinusoidal con una frecuencia dada por la velocidad angular de la espira

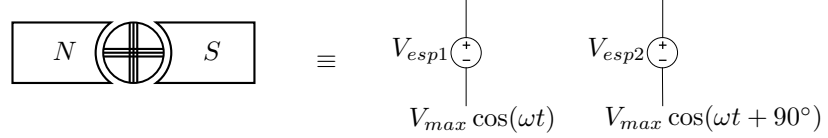
$$V_{esp1} = V_{max} \cos(\omega t) \quad (10.1)$$

Si se hace rotar una segunda espira en el mismo campo dispuesta a  $90^\circ$  físicos de la primera, se inducirá en ésta una tensión con la misma frecuencia angular  $\omega$  pero desfasada  $90^\circ$  eléctricos de la anterior, si además ambas espiras tiene la misma geometría la tensión máxima inducida en cada una será la misma

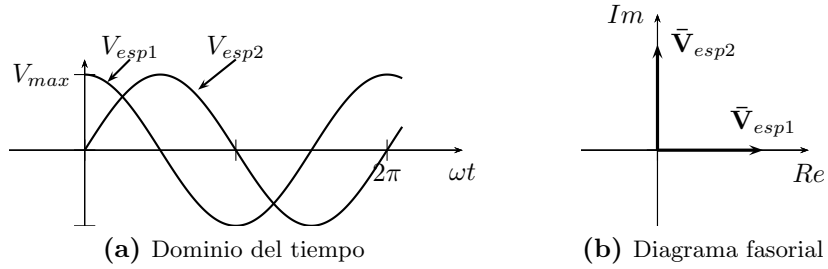
$$V_{esp2} = V_{max} \cos(\omega t + 90^\circ) \quad (10.2)$$

Esta máquina con dos arrollamientos idénticos devanados en cuadratura genera entonces dos tensiones sinusoidales desfasadas  $90^\circ$  entre sí. Es decir

que puede ser representada por dos generadores de tensión sinusoidal de igual frecuencia angular, igual tensión máxima y con una diferencia de fase de  $90^\circ$ , tal como se indica en la fig. 10.1.



**Figura 10.1:** Máquina generadora bifásica con sus generadores de tensión equivalente



**Figura 10.2:** Tensiones en el dominio del tiempo y diagrama fasorial de un sistema bifásico

Como se trata de señales sinusoidales y estamos interesados en resolver el régimen permanente de estos sistemas, podemos utilizar el cálculo fasorial para su resolución. Estas dos tensiones tienen su representación en el dominio del tiempo y fasorial como se muestra en la figura 10.2

Denotemos con  $A$  y  $A'$  los bornes del primer arrollamiento (o generador sinusoidal) y con  $B$  y  $B'$  a los bornes del segundo. Si conectamos los bornes  $A'$  y  $B'$  de los generadores obtendremos un sistema bifásico de tensión  $\bar{V}_{AB} = \bar{V}_{AA'} + \bar{V}_{BB'}$ . Al punto de unión de ambos generadores se lo llama punto neutro y se lo denota con  $N$ , es decir  $\bar{V}_{AA'} = \bar{V}_{AN}$  y  $\bar{V}_{BB'} = \bar{V}_{BN}$ . Entonces, suponiendo  $\bar{V}_{AN} = V \angle 0^\circ$  con  $V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$  tendremos

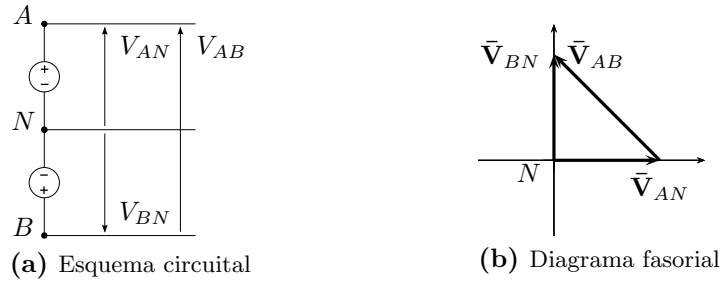
$$\bar{V}_{AN} = V \angle 0^\circ \quad (10.3)$$

$$\bar{V}_{BN} = V \angle 90^\circ \quad (10.4)$$

$$\bar{V}_{AB} = V \angle 0^\circ - V \angle 90^\circ = \sqrt{2}V \angle -45^\circ \quad (10.5)$$

siendo  $\bar{V}_{AN}$  y  $\bar{V}_{BN}$  las llamadas *tensiones de fase* y  $\bar{V}_{AB}$  la *tensión de línea* del sistema. En la figura 10.3 se muestran estas tensiones en el esquema circuital del sistema y en el diagrama fasorial. El punto neutro se utiliza en la práctica como referencia, y normalmente se lo vincula a la tierra.





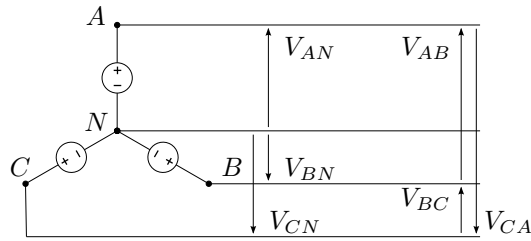
**Figura 10.3:** Sistema bifásico y sus tensiones en el dominio del tiempo y dominio fasorial

## 10.2. Sistema trifásico

Si consideramos un nuevo arrollamiento dentro de nuestra máquina dispuestos ahora los tres de forma tal que generen tres tensiones de igual amplitud y desfasadas  $\frac{2\pi}{3}$  entre sí podremos obtener un sistema trifásico. Las tensiones generadas en este caso serán por ejemplo

$$\begin{aligned}\bar{V}_{AA'} &= V \angle 90^\circ \\ \bar{V}_{BB'} &= V \angle -30^\circ \\ \bar{V}_{CC'} &= V \angle -150^\circ\end{aligned}$$

Estos tres arrollamientos pueden ser interconectados de dos formas distintas, dando lugar a las llamadas conexión en estrella y conexión en triángulo del generador.



**Figura 10.4:** Esquema circuital trifásico en configuración estrella

### 10.2.1. Generador en configuración estrella

Los tres generadores anteriores pueden ser conectados entre sí por medio de un terminal, como se muestra en la figura 10.4. Esta configuración recibe el nombre de *configuración en estrella*. Como se ve, en esta configuración se dispone de cuatro terminales llamados  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $N$ <sup>1</sup> de los que se obtienen

<sup>1</sup>O también se los suele llamar  $R$ ,  $S$ ,  $T$  y  $N$ , o 1, 2, 3 y  $N$ .

las cuatro líneas que forman el sistema. La tensión entre cada terminal  $A$ ,  $B$  o  $C$  y el terminal de neutro  $N$  es igual a la tensión generada por cada arrollamiento y son llamadas *tensiones de fase*, las tensiones entre cualquiera de los terminales  $A$ ,  $B$  o  $C$  es una tensión compuesta por dos tensiones de fase y son llamadas *tensiones de línea*. Puede mostrarse fácilmente que el módulo de las tensiones de línea es  $\sqrt{3}$  veces más grande que el módulo de las tensiones de fase. En concreto, si las tensiones de fase para este sistema son

$$\bar{V}_{AN} = V \angle 90^\circ \quad (10.6)$$

$$\bar{V}_{BN} = V \angle -30^\circ \quad (10.7)$$

$$\bar{V}_{CN} = V \angle -150^\circ \quad (10.8)$$

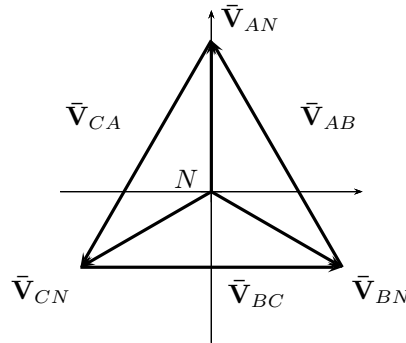
las tensiones de línea serán

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V}_{AN} - \bar{V}_{BN} = \sqrt{3}V \angle 120^\circ \quad (10.9)$$

$$\bar{V}_{BC} = \bar{V}_{BN} - \bar{V}_{CN} = \sqrt{3}V \angle 0^\circ \quad (10.10)$$

$$\bar{V}_{CA} = \bar{V}_{CN} - \bar{V}_{AN} = \sqrt{3}V \angle 240^\circ \quad (10.11)$$

En la figura 10.5 se puede ver el diagrama fasorial de esta configuración. Nótese que para arribar a estas tensiones se eligió arbitrariamente la fase inicial de los generadores, del mismo sistema trifásico se puede obtener un diagrama fasorial equivalente al de la figura 10.5 pero rotado un ángulo arbitrario  $\theta$ . Para poder homogeneizar la forma de representación de las tensiones de un sistema trifásico se utiliza la convención de elegir la fase de la tensión de línea  $\bar{V}_{BC}$  igual a cero.



**Figura 10.5:** Diagrama fasorial de tensiones de un sistema trifásico de secuencia  $ABC$

Si se observan las tensiones generadas en el dominio del tiempo, considerando como positiva la rotación en el sentido antihorario, se verá que la ocurrencia de los valores máximos de cada señal sigue la secuencia  $ABC$  (figura 10.6). Si se invierte el sentido de giro de la máquina, o se intercambian

dos de los tres terminales de conexión, la secuencia será  $CBA$ . La secuencia  $ABC$  recibe el nombre de *secuencia directa* mientras que la  $CBA$  se la llama *secuencia inversa*. Siguiendo la convención anterior, un sistema de secuencia inversa tiene las siguientes tensiones de fase

$$\bar{V}_{AN} = V \angle -90^\circ \quad (10.12)$$

$$\bar{V}_{BN} = V \angle 30^\circ \quad (10.13)$$

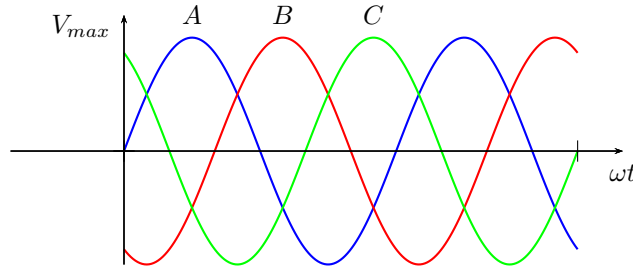
$$\bar{V}_{CN} = V \angle 150^\circ \quad (10.14)$$

y línea

$$\bar{V}_{AB} = \sqrt{3}V \angle 240^\circ \quad (10.15)$$

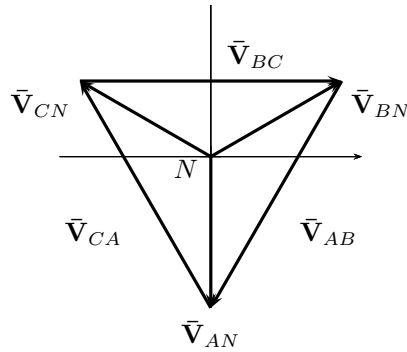
$$\bar{V}_{BC} = \sqrt{3}V \angle 0^\circ \quad (10.16)$$

$$\bar{V}_{CA} = \sqrt{3}V \angle 120^\circ \quad (10.17)$$



**Figura 10.6:** Tensiones de un sistema trifásico de secuencia  $ABC$ .

En la figura 10.7 se representa el diagrama fasorial de tensiones de un sistema trifásico de secuencia  $CBA$ .



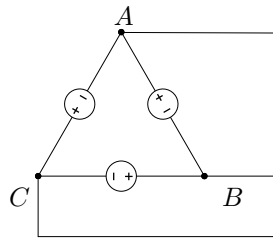
**Figura 10.7:** Diagrama fasorial de tensiones de un sistema trifásico de secuencia  $CBA$ .

Si observamos los diagramas fasoriales de estos sistemas trifásicos, sean secuencia  $ABC$  o  $CBA$ , vemos que la suma de los fasores de tensión de línea como de fase es siempre nula (figuras 10.5 y 10.7). En general todo sistema de tensiones o corrientes polifásico cuya resultante sea siempre nula se lo llama *sistema equilibrado*. Si además de ser equilibrado el sistema es simétrico, es decir que todos los fasores tienen igual amplitud y una diferencia de fase constante, se dice que el sistema es un *sistema perfecto*<sup>2</sup>. Por el contrario, un sistema de tensiones o corrientes polifásico asimétrico, se lo denomina *sistema deformado*.

Atendiendo a la convención de la fase nula de la tensión de línea  $\bar{V}_{BC}$  mencionada antes, especificando el módulo de la tensión de línea, su frecuencia y la secuencia del sistema, un sistema trifásico queda unívocamente determinado. Así por ejemplo el sistema trifásico de distribución domiciliar utilizada en Argentina se especifica completamente diciendo que es un sistema de tensión  $V = 380V$ , frecuencia  $f = 50Hz$  y secuencia  $ABC$ .

### 10.2.2. Generador en configuración triángulo

Otra forma de interconectar los generadores es en una configuración serie, formando un circuito cerrado, tal como se muestra en la figura 10.8. Esta configuración se la denomina *configuración triángulo*, y por simple inspección se ve que las tensiones de línea coinciden con las tensiones de fase del sistema.



**Figura 10.8:** Generador trifásico en configuración triángulo.

Esta configuración no es muy ventajosa ya que carece de punto neutro y por lo tanto el sistema no puede ser conectado a tierra para su protección. Además, los arrollamientos se conectan formando un circuito cerrado, y si bien en principio se trata de un sistema equilibrado cuya resultante debería ser nula, esto puede no ocurrir en la realidad y una pequeña asimetría en el sistema de tensiones puede derivar en una corriente compensadora muy

<sup>2</sup>Lo contrario no siempre ocurre, es decir un sistema equilibrado puede no ser perfecto, que es el caso de los sistemas sin neutro cuya componente de corriente debe ser obligatoriamente nula y en consecuencia las tensiones y corrientes en el sistema de cargas se hacen asimétricas, como se verá más adelante.

grande en los arrollamientos del generador, que sólo se verá limitada por la muy baja resistencia de los devanados. Debido a esto no se utilizará esta configuración en el generador en los análisis de carga siguientes.

### 10.3. Resolución de sistemas trifásicos perfectos

Considerando ahora un generador trifásico como el de la figura 10.4, si se conectan cargas entre los terminales  $A-N$ ,  $B-N$  y  $C-N$ , las cargas quedarán interconectadas en configuración estrella. Si en cambio se conectan cargas a los terminales  $A-B$ ,  $B-C$  y  $C-A$  estas quedarán interconectadas en configuración triángulo. Si las cargas conectadas al sistema son todas iguales se dice que se trata de un sistema de cargas *balanceado*, sino será un sistema de cargas *desbalanceado*. Cuando se conecta un sistema de cargas balanceado a un generador trifásico se obtiene un sistema de tensiones y corrientes perfecto. Analizaremos primero el caso de cargas balanceadas en ambas configuraciones para luego estudiar los sistemas desbalanceados.

#### 10.3.1. Cargas en configuración estrella

Cuando se conectan cargas en configuración estrella a un sistema trifásico (figura 10.9) las tensiones aplicadas a cada carga son las tensiones de fase del sistema. Por lo tanto, suponiendo una carga inductiva de valor  $Z\angle\varphi$  y un sistema de tensión  $V$  y secuencia  $ABC$ , por cada carga circulará una corriente dada por<sup>3</sup>

$$\bar{\mathbf{I}}_{AN} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{AN}}{Z\angle\varphi} = \frac{V}{\sqrt{3}Z}\angle(90^\circ - \varphi) \quad (10.18)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{BN} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{BN}}{Z\angle\varphi} = \frac{V}{\sqrt{3}Z}\angle(-30^\circ - \varphi) \quad (10.19)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{CN} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{CN}}{Z\angle\varphi} = \frac{V}{\sqrt{3}Z}\angle(-150^\circ - \varphi) \quad (10.20)$$

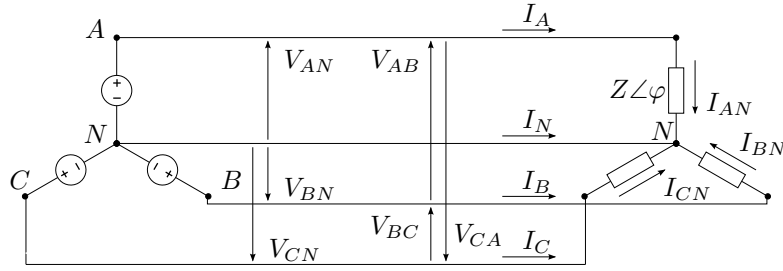
estas corrientes son llamadas *corrientes de fase* y las corrientes que circulan por cada línea son llamadas *corrientes de línea*. Se ve en el circuito de la figura 10.9 que para esta configuración de cargas las corrientes de línea son iguales a las corrientes de fase

$$\bar{\mathbf{I}}_A = \bar{\mathbf{I}}_{AN} \quad (10.21)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_B = \bar{\mathbf{I}}_{BN} \quad (10.22)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_C = \bar{\mathbf{I}}_{CN} \quad (10.23)$$

<sup>3</sup>Recordar que en la tensión de fase para esta configuración tiene un módulo  $\sqrt{3}$  veces menor al de la tensión de línea, es decir  $V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ .



**Figura 10.9:** Esquema circuital trifásico con carga en configuración estrella

La corriente por el neutro  $\bar{I}_N$  será

$$\bar{I}_N = -\bar{I}_A - \bar{I}_B - \bar{I}_C = 0 \quad (10.24)$$

es decir, el sistema de corrientes para este caso es también un sistema perfecto. Si la corriente de neutro es nula como en este caso entonces el sistema puede prescindir de la línea de neutro, ya que esta no transporta corriente alguna, un sistema de este tipo se lo llama sistema trifásico de tres conductores. En la figura 10.10 se puede ver el diagrama fasorial de tensiones y corrientes para esta configuración.

### 10.3.2. Cargas en configuración triángulo

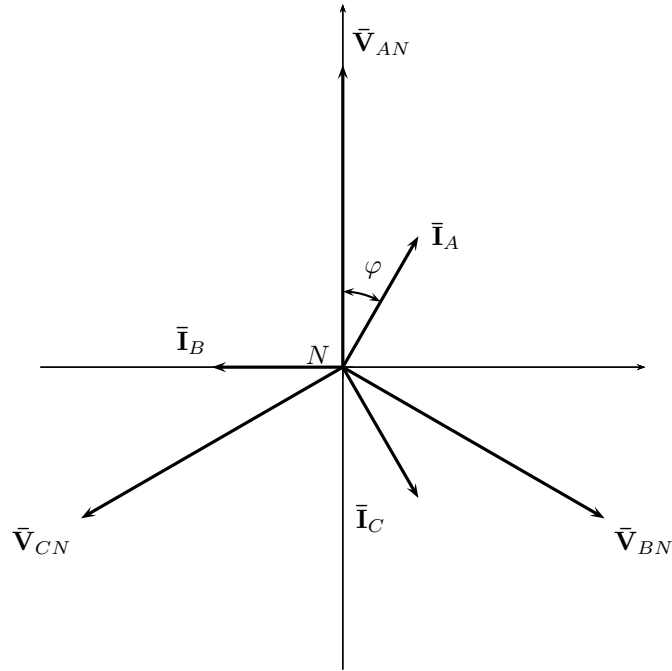
Si las cargas se conectan entre los terminales  $A-B$ ,  $B-C$  y  $C-A$  de nuestro generador trifásico tendremos una configuración triángulo (figura 10.11). En esta configuración la tensión aplicada a cada carga es la tensión de línea del sistema. Suponiendo entonces un sistema trifásico de secuencia  $ABC$ , tensión  $V$  y una carga inductiva de valor  $Z\angle\varphi$ , las corrientes de fase vienen dadas por

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_{AB}}{Z\angle\varphi} = \frac{V}{Z}\angle(120^\circ - \varphi) \quad (10.25)$$

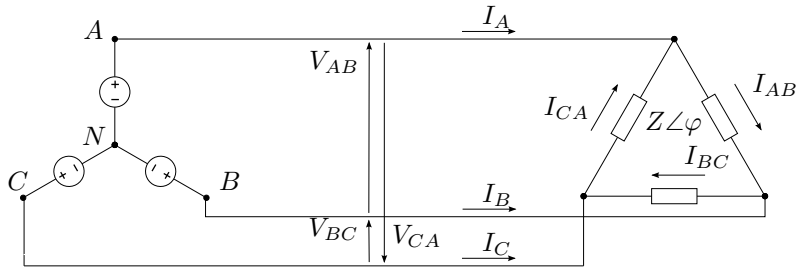
$$\bar{I}_{BC} = \frac{\bar{V}_{BC}}{Z\angle\varphi} = \frac{V}{Z}\angle(-\varphi) \quad (10.26)$$

$$\bar{I}_{CA} = \frac{\bar{V}_{CA}}{Z\angle\varphi} = \frac{V}{Z}\angle(240^\circ - \varphi) \quad (10.27)$$

Para esta configuración las corrientes de línea son una composición de las corrientes de fase. Por trigonometría simple puede mostrarse que el módulo de una corriente de línea es  $\sqrt{3}$  veces más grande que el módulo de las corrientes de fase y su argumento se obtiene restando  $30^\circ$  al argumento de la corriente de fase saliente del nudo en cuestión. En el diagrama fasorial de



**Figura 10.10:** Diagrama fasorial de tensiones y corrientes en una carga balanceada en configuración estrella



**Figura 10.11:** Esquema circuital trifásico con cargas balanceadas en configuración triángulo

tensiones y corrientes de la figura 10.12 se puede ver esta composición en forma gráfica. Así por ejemplo la corriente de línea  $\vec{I}_A = \vec{I}_{AB} - \vec{I}_{CA}$  será

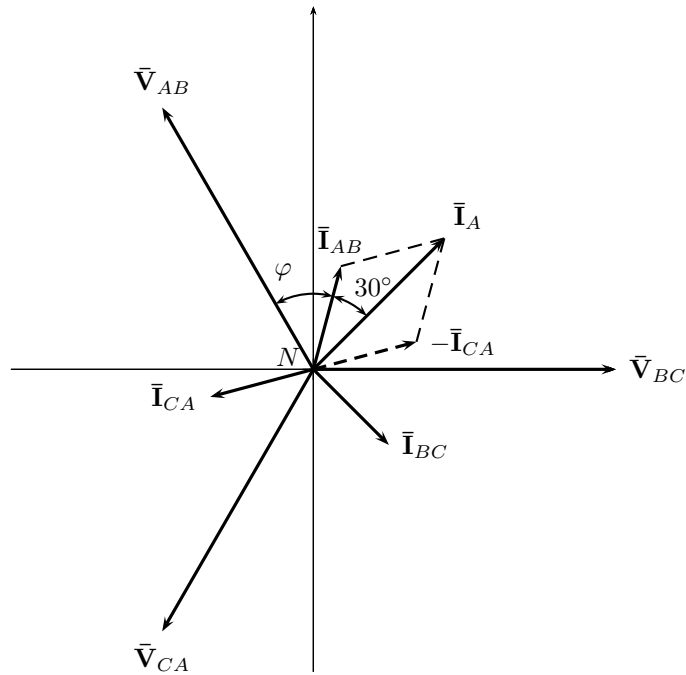
$$\vec{I}_A = \sqrt{3} \frac{V}{Z} \angle (120^\circ - \varphi - 30^\circ)$$

Finalmente

$$\bar{\mathbf{I}}_A = \sqrt{3} \frac{V}{Z} \angle (90^\circ - \varphi) \quad (10.28)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_B = \sqrt{3} \frac{V}{Z} \angle (-30^\circ - \varphi) \quad (10.29)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_C = \sqrt{3} \frac{V}{Z} \angle (210^\circ - \varphi) \quad (10.30)$$



**Figura 10.12:** Diagrama fasorial de tensiones y corrientes en cargas balanceadas en configuración triángulo.

### 10.3.3. Cálculo de potencias

Como vimos en capítulos anteriores, la potencia activa en una carga está dada por  $P = VI \cos \varphi$ , siendo  $V$  e  $I$  los módulos de los fasores tensión y corriente en la carga y  $\varphi$  la diferencia de fase entre ellos. Veámos ahora como se aplica este cálculo a los sistemas trifásicos con cargas balanceadas.

#### Cargas balanceadas en estrella

Denotemos con  $V_f$  al módulo de las tensiones de fase y con  $V_L$  al de las tensiones de línea, y con  $I_f$  e  $I_L$  a los módulos de las corrientes de fase y línea



respectivamente. En configuración estrella la tensión aplicada a cada carga es la tensión de fase cuyo módulo es en relación al de la tensión de línea  $V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$  y la corriente en las cargas es la corriente de fase cuyo módulo es igual al módulo de la corriente de línea,  $I_f = I_L$ , quedando  $P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi$ . Como las tres cargas son iguales la potencia total será tres veces la anterior, es decir

$$P_T = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \quad (10.31)$$

Procediendo de forma similar encontramos las potencias reactiva y aparente obteniendo para un sistema de cargas balanceado las siguientes expresiones

$$P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \quad (10.32)$$

$$Q_T = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \quad (10.33)$$

$$S_T = \sqrt{3} V_L I_L \quad (10.34)$$

nótese que  $\varphi$  es el argumento de la carga  $Z \angle \varphi$  y no la diferencia de fase entre las tensiones y corrientes de línea.

### Cargas balanceadas en triángulo

En esta configuración las cargas tienen aplicada la tensión de línea y la corriente de fase que circula por ellas tiene un módulo  $\sqrt{3}$  veces menor al módulo de las corrientes de línea. Entonces las potencias por cada carga en terminos de las corrientes y tensiones de línea será

$$P = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi \quad (10.35)$$

$$Q = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \sin \varphi \quad (10.36)$$

$$S = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad (10.37)$$

y las potencias totales

$$P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \quad (10.38)$$

$$Q_T = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \quad (10.39)$$

$$S_T = \sqrt{3} V_L I_L \quad (10.40)$$

que como vemos se calculan de la misma forma que para el caso de cargas balanceadas en configuración estrella.

### Potencia instantánea

La potencia instantánea en un sistema perfecto presenta una particularidad que hace de estos sistemas los más eficientes para el transporte de energía. Un pequeño análisis nos permitirá mostrar que su eficiencia es incluso mayor que la de un sistema monofásico.

Supongamos un sistema perfecto con las siguientes tensiones instantáneas

$$v_A(t) = V_f \sqrt{2} \sin(\omega t) \quad (10.41)$$

$$v_B(t) = V_f \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (10.42)$$

$$v_C(t) = V_f \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \quad (10.43)$$

que al ser aplicado a un sistema de cargas balanceado en configuración estrella<sup>4</sup> se originarán las siguientes corrientes

$$i_A(t) = I_f \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \quad (10.44)$$

$$i_B(t) = I_f \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \quad (10.45)$$

$$i_C(t) = I_f \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \quad (10.46)$$

las potencias instantáneas en cada carga serán

$$p_A(t) = 2V_f I_f \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \quad (10.47)$$

$$p_B(t) = 2V_f I_f \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \quad (10.48)$$

$$p_C(t) = 2V_f I_f \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \quad (10.49)$$

utilizando la igualdad trigonométrica  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  las potencias instantáneas quedan

$$p_A(t) = V_f I_f \cos \varphi - V_f I_f \cos(2\omega t - \varphi) \quad (10.50)$$

$$p_B(t) = V_f I_f \cos \varphi - V_f I_f \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \quad (10.51)$$

$$p_C(t) = V_f I_f \cos \varphi - V_f I_f \cos\left(2\omega t - \frac{8}{3}\pi - \varphi\right) \quad (10.52)$$

sumando las potencias anteriores se verifica que la potencia total instantánea es

$$p_T(t) = 3V_f I_f \cos(\varphi) = P_T \quad (10.53)$$

---

<sup>4</sup>Se puede arribar al mismo resultado si la configuración de las cargas es triángulo simplemente transformando el sistema a uno equivalente en configuración estrella mediante el teorema de Rosen (transformación estrella-triángulo) que se vió en el capítulo de *Teoremas circuitales*.

es decir que la potencia instantánea en un sistema perfecto es constante e igual a la potencia media total. Esto crea condiciones ventajosas respecto al funcionamiento de las máquinas trifásicas desde el punto de vista mecánico, ya que se eliminan las vibraciones producidas por los sistemas de potencia pulsantes como el monofásico.

El sistema trifásico es el sistema perfecto que requiere menor cantidad de fases y es por eso que es el sistema de distribución de energía más utilizado en el mundo. Un sistema de distribución domiciliario trifásico sin embargo no es un sistema perfecto en general, porque las cargas conectadas a él, es decir los hogares, son cargas monofásicas diferentes que si bien se van conectando en forma equilibrada a cada fase, nunca puede lograrse un sistema de cargas balanceado debido a la variabilidad de las mismas. En cambio en una industria las cargas son en general balanceadas, lograndose sistemas muy cercanos a un sistema perfecto y por ende con una alta eficiencia en el transporte de energía.

## **10.4. Resolución de sistemas trifásicos deformados**

Si las cargas conectadas al generador trifásico no son todas iguales, las corrientes que circulan por ellas serán también diferentes, en módulo y/o en fase, con lo cuál se tendrá entonces un sistema deformado. Analizaremos a continuación los problemas de sistemas de cargas desbalanceados en ambas configuraciones, con tres y cuatro conductores.

### **10.4.1. Cargas desbalanceadas en estrella con cuatro conductores**

### **10.4.2. Cargas desbalanceadas en estrella con tres conductores**

#### **Corrimiento del neutro**

### **10.4.3. Cargas desbalanceadas en configuración triángulo**

### **10.4.4. Potencia en cargas desbalanceadas**

#### **Cargas en estrella con cuatro conductores**

#### **Cargas en triángulo - Método de los dos vatímetros**

#### **Método de los dos vatímetros aplicado a cargas balanceadas**



## Apéndice A

# Ecuaciones diferenciales

Una Ecuación Diferencial (Ec.Dif.) es una ecuación que establece una relación entre una variable, una función incognita en esa variable y las derivadas de esta función incognita

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^n(t)) = 0 \quad (\text{A.1})$$

si la función incognita  $x(t)$  es de una sola variable la Ec.Dif. se llama ordinaria, sino se llama Ec.Dif. en derivadas parciales.

El orden de derivación mas alto presente en la Ec.Dif. determina el orden de la Ec.Dif.

Toda funcion  $x(t)$  que introducida en la Ec.Dif. la transforme en una identidad se llama *solución* o *integral* de la Ec.Dif.

Una Ec.Dif. de n-esimo orden es *lineal* si la función incognita y todas sus derivadas estan elevadas a la primera potencia (Piskunov 616)

La solución general completa de una Ec.Dif. lineal no homogénea de orden  $n$  se expresa como la suma de cualquier solución particular  $x_{nh}(t)$  de la no homogénea, mas las  $n$  soluciones generales  $x_{ho}(t)$  de la Ec.Dif. homogénea correspondiente (Piskunov 631). Para que la solución sea completa se debe formar con tantas soluciones generales de la homogénea como orden tenga la Ec.Dif.

En la *Teoría de los circuitos* la solución particular de la Ec.Dif. no homogénea representa la *respuesta forzada* o de *régimen permanente* del circuito, mientras que las soluciones generales de la Ec.Dif. homogénea correspondiente representan las *respuestas naturales* o de *régimen transitorio* del sistema. La cantidad de respuestas naturales necesarias para representar el transitorio de un sistema vendrá dado entonces por el orden de la Ec.Dif. que lo represente.



## Apéndice B

# Serie de Fourier

### B.1. Desarrollo de señales en serie de Fourier

Una señal  $f(t)$  cuadrado integrable<sup>1</sup> puede ser representada en un intervalo  $[a, b]$  en diferentes bases o conjuntos de funciones (vectores) ordenados y linealmente independientes en un espacio de Hilbert. Por ejemplo la representación en serie de Taylor utiliza como base las derivadas sucesivas de la función. La serie de Fourier permite representar una señal en un intervalo  $[a, b]$  mediante la combinación de senos y cosenos oscilando a distintas frecuencias. Es decir representa la función en términos de una base ortonormal<sup>2</sup> formada por

$$(1, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)) \quad (\text{B.1})$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots \infty$ .

La serie resulta periódica de período  $2\pi$ , por estar formada por senos y cosenos, y aproxima a la función en el intervalo  $[a, b]$ . Si la función  $f(t)$  es también periódica de período  $T = b - a$ , entonces la serie aproxima a la función para todo  $t$ .

#### B.1.1. Serie en senos y cosenos

La función periódica  $f(t)$  de período  $T$  puede ser representada por la serie infinita

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (\text{B.2})$$

---

<sup>1</sup>Una función es cuadrado integrable la integral de su valor absoluto al cuadrado es finita, es decir una función de energía finita.

<sup>2</sup>Decimos que la base es ortonormal porque cada componente tiene producto interno nulo con cualquier otro componente de la base y además el producto interno por sí mismo es igual a 1, por lo que su norma  $\|f(t)\| = 1$ .

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\omega_0 t) d\omega_0 t \quad (\text{B.3})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(n\omega_0 t) d\omega_0 t \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{B.5})$$

Para que la igualdad (B.2) sea verdadera, la serie debe converger a  $f(t)$ , si la función  $f(t)$  es cuadrado integrable entonces la serie converge y la igualdad se cumple. Una función que represente cualquier parámetro de circuitos como tensión o corriente es siempre cuadrado integrable, por lo que para teoría de los circuitos la igualdad (B.2) se cumple siempre.

El término constante de (B.2) se obtiene de (B.3) haciendo  $n = 0$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\omega_0 t \quad (\text{B.6})$$

que es el valor medio de la función  $f(t)$

Para  $n = 1$  se obtienen los términos que oscilan a menor frecuencia

$$a_1 \cos(\omega_0 t) \quad \text{y} \quad b_1 \sin(\omega_0 t)$$

esta frecuencia  $\omega_0$  se llama frecuencia fundamental de la señal. Las frecuencias superiores a  $\omega_0$  son todas múltiplos de la fundamental, puesto que  $n = 2, 3, 4 \dots$  y se llaman armónicas (para  $n = 2$  tenemos la primera armónica  $\omega_1 = 2\omega_0$ , para  $n = 3$  la segunda armónica  $\omega_2 = 3\omega_0$ , etc.). La relación del período de la serie en radianes ( $2\pi$ ) y el período de la  $f(t)$  en segundos ( $T$ ) determina la frecuencia fundamental  $\omega_0$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{B.7})$$

### B.1.2. Serie senoidal

Suele ser muy útil representar la serie (B.2) sólo con senos o cosenos, para lo que se necesita conocer la amplitud y fase de cada armónica. Si ponemos la serie en términos de senos, de forma

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (\text{B.8})$$

podemos expandir el  $\sin(n\omega_0 t + \phi_n)$  en

$$\sin(n\omega_0 t + \phi_n) = \sin(n\omega_0 t) \cos(\phi_n) + \cos(n\omega_0 t) \sin(\phi_n) \quad (\text{B.9})$$



y llevando a (B.8) nos queda

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \sin(n\omega_0 t) \cos(\phi_n) + c_n \cos(n\omega_0 t) \sin(\phi_n)] \quad (\text{B.10})$$

igualando (B.10) con (B.2)

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n \cos(\phi_n) &= a_n \\ c_n \sin(\phi_n) &= b_n \end{aligned}$$

y despejando  $c_n$  y  $\phi_n$  tenemos

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= \tan^{-1} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \end{aligned}$$

### B.1.3. Serie compleja

Una forma mas compacta y moderna de representar la serie de Fourier es utilizando la función exponencial compleja  $e^{jn\omega_0 t}$  como base. Utilizando las igualdades

$$\begin{aligned} \cos(n\omega_0 t) &= \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \\ \sin(n\omega_0 t) &= \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \end{aligned}$$

en la serie trigonométrica (B.2) y operando nos queda

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{B.11})$$

con

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jn\omega_0 t} d\omega_0 t \quad (\text{B.12})$$

Los coeficientes de la serie trigonométrica y la exponencial se relacionana como

$$a_n = C_n + C_{-n} \quad (\text{B.13})$$

$$b_n = j(C_n - C_{-n}) \quad (\text{B.14})$$

Los coeficientes de Fourier de la serie exponencial  $C_n$  se representan normalmente con otra notación, por ejemplo en matemática se utiliza normalmente la notación

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{B.15})$$

y en ingeniería

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[n]e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{B.16})$$

## Apéndice C

# Uso básico de Maxima

### C.1. Maxima/wxMaxima

El sistema de álgebra computacional (o CAS por sus siglas en inglés) Maxima es un motor de cálculo simbólico escrito en lenguaje Lisp publicado bajo licencia GNU GPL. Maxima está basado en el sistema original de Macsyma desarrollado por MIT en los años 70.

Cuenta con un amplio conjunto de funciones para manipulación simbólica de polinomios, matrices, funciones racionales, integración, derivación, manejo de gráficos en 2D y 3D, manejo de números de coma flotante muy grandes, expansión en series de potencias y de Fourier, entre otras funcionalidades.

Maxima funciona en modo consola, sin embargo incluye las interfaces gráficas xMaxima y wxMaxima para facilitar su uso, estos disponen de menús para acceder a los comandos disponibles de Maxima.

#### C.1.1. La interfaz gráfica wxMaxima

wxMaxima permite crear documentos matemáticos que incluyan textos, cálculos y gráficos. Estos documentos consisten en celdas que se representan por un corchete en la parte izquierda de la interfaz gráfica de wxMaxima; dichas celdas constan de partes como el título, texto, entrada de comandos Maxima y la salida o resultado. En la figura C.1 se muestra una celda de ejemplo

El triángulo en la parte superior del corchete que delimita la celda sirve para ocultar la celda. Una vez introducido uno o varios comandos mediante SHIFT+ENTER las entradas se hacen efectivas y cada una de ellas se representa por %i y el resultado por %o, seguidos por un número, como

```
(%i58) 1 + 1;
```

```
(%o58)                                     2
```

Las líneas terminadas con “;” indican a Maxima que muestre el resultado y las líneas terminadas con “\$” le indican que no muestre el resultado (útil

```

--> /* this is an input cell - it holds Maxima code and can be
    evaluated with SHIFT-ENTER. The code entered in this cell
    will be sent to Maxima when you press SHIFT-ENTER. Before
    wxMaxima sends code to Maxima, it checks if the contents
    of an input cell ends with a ';' or a '$' - if it doesn't,
    wxMaxima adds a ';' at the end. Maxima requires that lines
    end with either ';' or '$'.

    Any output wxMaxima gets from Maxima will be attached into
    the output part of the input cell. Try clicking in this cell
    and pressing SHIFT-ENTER. */

/*example Maxmima code: */

print("Hello, world!")$
integrate(x^2, x);

```

**Figura C.1:** Ejemplo de celda de wxMaxima

para resultados largos).

## C.2. Operaciones con Maxima

Para mantener la precisión de los cálculos Maxima, a diferencia de los programas de cálculo numérico (como MATLAB, GNU/Octave, etc.) no evalúa las expresiones como por ejemplo  $1/3$  o  $\sqrt{2}$  al menos que se le indique mediante el comando `float`

```
(%i61) sqrt(2 * %pi);
```

```
(%o61)  $\sqrt{2}\sqrt{\pi}$ 
```

```
(%i62) float(%);
```

```
(%o62) 2,506628274631001
```

La línea “`float(%)`” es una forma abreviada de aplicar una operación a la última línea visible, el símbolo `%` significa *la última línea*. La forma explícita para este ejemplo sería “`float(%i61)`” o “`float(%o61)`”.

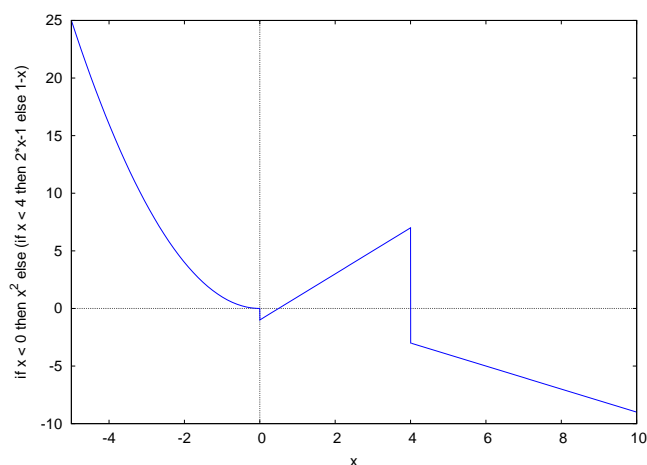
El operador `:` se utiliza para etiquetar números o expresiones, la forma de uso es “`nombre_variable:`”, por ejemplo

```
(%i68) radius: 10 $
```

```
(%i69) height: 100 $
```

```
(%i70) area: %pi * radius^2;
```





**Figura C.2:** Función definida por tramos

## Integrales

Otras de las operaciones que realiza Maxima incluye integrales definidas e indefinidas

```
(%i73) integrate( sin(x), x);
```

```
(%o73)                                      $-\cos(x)$ 
```

```
(%i74) integrate( sin(x), x, 0, %pi);
```

```
(%o74)                                     2
```

A veces Maxima necesita información adicional para evaluar una expresión, en cuyo caso pregunta, por ejemplo para evaluar una integral con una constante positiva

```
(%i79) integrate( 1 / (x^2 + a), x);
      Is a positive or negative?p;
```

```
(%o79)                                      $\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}}$ 
```

O bien se le indica de antemano utilizando la función “assume” y “forget” para revertir la operación

```
(%i80) assume(a > 0)$
```

```
(%i81) integrate( 1 / (x^2 + a), x);
```

```
(%o81)                                      $\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}}$ 
```

```
(%i82) forget(a > 0)$
```

### C.2.1. Ecuaciones diferenciales

Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, y particularizar la respuesta asignando un valor conocido de la función con “atvalue”

```
(%i84) eq1: L*diff(i(t),t,1)+R*i(t) = V;
```

```
(%o85) 
$$i(t)R + \frac{di(t)}{dt}L = V$$

```

```
(%i86) atvalue(i(t),t=0,0)$
```

```
(%i87) desolve(eq1,i(t));
```

```
(%o87) 
$$i(t)\frac{V}{R} - \frac{Ve^{-\frac{R}{L}t}}{R}$$

```

o de segundo orden

```
(%i96) ode2( 'diff(y, t, 2) + omega^2 * y = 0, y, t );
```

```
(%o96) 
$$y = \%k1 \sin(\omega t) + \%k2 \cos(\omega t)$$

```

```
(%i97) ic2(% , t = 0, y = A, 'diff(y,t) = 0 );
```

```
(%o97) 
$$y = A \cos(\omega t)$$

```

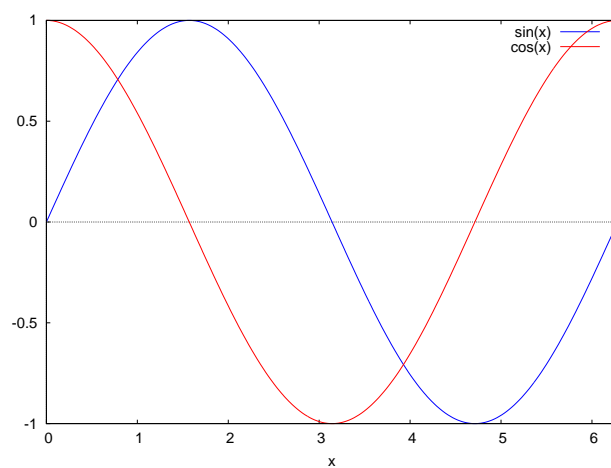
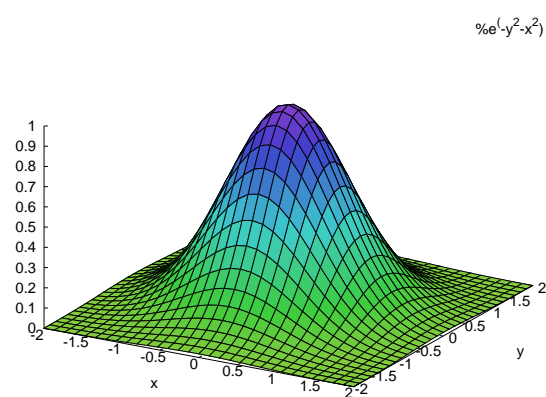
### Gráficos

Se pueden realizar gráficos 2D o 3D

```
(%i98) plot2d([sin(x), cos(x)], [x,0, 2*%pi]);
```

```
(%i99) plot3d( exp(-x^2 - y^2), [x,-2,2],[y,-2,2]);
```

los resultados se muestran en la figura C.3 y C.4. Las funciones “wxplot2d” y “wxplot3d” insertan el gráfico dentro de la celda de wxMaxima.

**Figura C.3:** Gráfico 2D**Figura C.4:** Gráfico 3D