Carrera de Robótica: Matemática Aplicada (Dr. Ernesto Kirchuk)

Ecuaciones Diferenciales – 1º parte

I. Introducción, definiciones, propiedades

Sea $f(t)$ funciones de variable real t (también vale para $f(z)$, de variable compleja z). Podemos construir una función F de dichas funciones f y sus derivadas según:

$$F(t, f(t), f\,'(t), f\,''(t), \ldots, f^{(n)}(t)) = 0 \qquad (1)$$

Donde $f\,'(t), f\,''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ denotan la derivada 1º, la derivada 2º, . . ., la derivada n-ésima respectivamente. Llamaremos a la expresión dada por (1) ecuación diferencial donde la "incógnita" es la función $f(t)$. Veamos algunos ejemplos de la expresión (1):

i) $f\,''(t)+ f(t)= sen(t)$

ii) $f\,''(t) = t\, f(t))$

iii) $t\, f\,'''(t)+ f\,''(t)+ e^t f(t)= cos(t)$

iv) $[f\,'(x)]^2 + [f(x)]^2 + t^3 = 0$

Como vemos los ejemplos i)-iii) son de la forma (1) con tal de pasar el miembro a la derecha del signo igual restando a la izquierda, con lo que quedan las ecuaciones igualadas a cero. La idea entonces en todos estos ejemplos es poder hallar que función (o funciones) $f(t)$ son soluciones.

Llamaremos *orden* de la ecuación diferencial a la máxima derivada n-ésima que aparece en la ecuación. Así la ecuación i) es de orden 2, la ecuación iii) es de orden 3. ¿De qué orden son ii) y iv)?

Algunas cuestiones que surgen en el estudio matemático de las ecuaciones diferenciales son:

a) Existencia de soluciones
b) Unicidad de la soluciones
c) Propiedades de la soluciones
d) Diferencias y similitudes según la variable sea real o compleja
e) Etc.

Para ir tratando de estudiar y "asir" a las ecuaciones diferenciales, vamos a hacer una primera clasificación. Llamaremos LINEALES a las ecuaciones diferenciales que sean del siguiente tipo:

$$a_n(t)\, f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2(t)\, f\,''(t)+ a_1(t)\, f\,'(t)+ a_0(t)\, f(t) = b(t) \qquad (2)$$

o escrita mas compactadamente:

$$\sum^{n}_{j=0} a_j(t)\, f^{(j)}(t) = b(t)\,, \qquad (2bis)$$

donde el supraíndice j denota la derivada j-ésima y $f^{(0)}(t)=f(t)$. Los $a_j(t)$ $(j=0,\ldots n,$ factores que multiplican a cada $f^{(j)}(t)$) pueden ser coeficientes variables (dependen explícitamente de t y por eso escribimos $a_j(t)$), o pueden ser coeficientes constantes (denotaremos en este caso a_j). Obviamente, si la ecuación es de orden n, se requiere que $a_n(t)\neq 0$. El segundo miembro de (2) puede ser en principio una función cualquiera $b(t)$.

Si *todos* los coeficientes $a_j(t)$ $(j=0,\ldots n)$, para la ecuación diferencial de orden n dada por (2), son constantes ($a_j(t)=a_j$), hablamos de una ecuación diferencial a coeficientes constantes.

Además la ecuación dada por (2) será:

- HOMOGÉNEA si $b(t) = 0$.
- NO HOMOGÉNEA si $b(t)\neq 0$.

Ejemplos:

1) Sea $f'(t)=1/t$ $(t\neq 0)$. Esta es una ecuación diferencial de orden 1, a coeficientes constantes y No homogenea. Como vieron en el TP. Nº 0, esta ecuación admite infinitas soluciones dadas por $f(t)=\ln|t|+C$, con infinitos valores de la constante aditiva C.

2) Dada la ecuación de 2º orden, homogénea, a coeficientes constantes $f''(t)+f(t)=0$, podemos ver que $f(t)=A\,sen(t)+B\cos(t)$ es solución de dicha ecuación (compruébelo!), donde los coeficientes A y B son cualquier par de números. O sea que volvemos a tener una infinitud de soluciones (una “doble” infinitud dada por infinitos A y B).

   Además podemos notar que si adjuntamos la condición $f(0)=0$, y $f'(0))=1$ -por ejemplo- concluimos que $A=1$ y $B=0$ (deduzca este resultado!), quedando entonces una única solución: $f(t)=sen(t)$.

3) Sea la ecuación diferencial $f'(t)=3\,t^{2/3}$. Como resolvieron en el TP Nº 0 esta ecuación admite como soluciones $f(t)=0$, y $f(t)=t^3$. Ambas soluciones verifican la condición $f(0)=0$.

4) La función $f(t)=1/(1-t)$, definida en el intervalo $(-\infty\ ,\ 1)$ verifica la ecuación $f'(t)-f^2(t)=0$; y la condición $f(0)=1$.

Podemos notar que:

a) Una ecuación diferencial puede carecer de soluciones o tener varias. En este último caso a veces hay unicidad (cuando se agregan ciertas condiciones).

b) Hay resultados (teoremas) muy generales acerca de la existencia y unicidad de las soluciones.

c) También con frecuencia en muchos problemas tiene sentido hablar de la solución “local”; o sea de resolver la ecuación *cerca* de un punto determinado.

d) Estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales, pero notemos que hay *no* lineales en abundancia. Por ejemplo, uno de los más simples sistemas mecánicos, el péndulo simple mostrado más abajo, lo podemos modelar utilizando las leyes de Newton. En particular aplicando la 2º ley de Newton en la dirección de movimiento, tenemos

$$F_{\text{tang}}=-mg\,sen(\theta)=m\,a_{\text{tang}}$$

donde el signo negativo tiene en cuenta que la F_{tang} tiene dirección opuesta a la del desplazamiento angular positivo (hacia la derecha, en la figura). Considerando la relación existente entre la aceleración tangencial y la aceleración angular

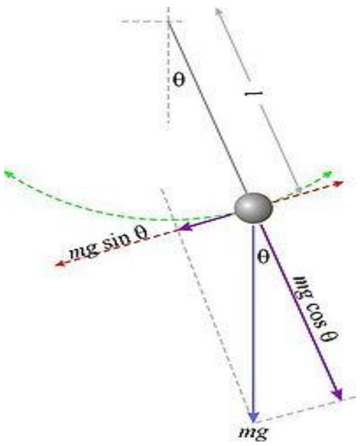
$$a_{\text{tang}} = l\,\theta''(t),$$

tenemos que

$$l\,\theta''(t) + g\,sen(\theta) = 0\,,$$

que es la ecuación diferencial que modela el movimiento del péndulo. Lo que hay que hallar es el ángulo $\theta(t)$ (cumple el rol de la función incógnita $f(t)$ de más arriba). Claramente la ecuación diferencial anterior es no lineal (porqué?) y lo que se hace como en los cursos elementales de mecánica es primeramente estudiar el péndulo para pequeñas oscilaciones alrededor de la vertical (alrededor de $\theta=0$). En este caso $sen(\theta)\approx\theta$ quedando entonces la ecuación diferencial lineal (y resoluble fácilmente analíticamente):

$$l\,\theta''(t) + g\;\theta(t) = 0$$



II. Ecuaciones diferenciales lineales

Como definimos más arriba, son del tipo:

$$a_n(t)\,f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2(t)\,f''(t) + a_1(t)\,f'(t) + a_0(t)\,f(t) = b(t) \qquad (2)$$

Si $b(t) = 0$ son homogéneas **(H)**.
" $b(t) \neq 0$ son no homogéneas **(NH).**

Proposiciones (fáciles de demostrar)[1]:

a) Dadas $f_1, \ldots, f_k$, k soluciones de (H), y las constantes o números $c_1, \ldots, c_k$, => $c_1 f_1 + \ldots c_k f_k$ es solución de de (H). Es decir que si tengo k soluciones de (H), una combinación lineal de esas soluciones también es solución.
b) Sea f solución de (H) y g solución de (NH); => $f + g$ es solución de (NH).
c) Si f y g son soluciones de (NH), => $f - g$ es solución de (H).
d) Ppio. de superposición:
Sea f_1 solución de (NH) con 2º miembro $b(t) = b_1(t)$.
Sea f_2 solución de (NH) con 2º miembro $b(t) = b_2(t)$.
=> $c_1 f_1 + c_2 f_2$ es solución de (NH) con 2º miembro $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$.
e) Para (H) se puede en hallar tantas soluciones *independientes* como el orden de la ecuación (n). Sean estas n soluciones $f_1, \ldots, f_n$. Teniendo en cuenta a), la expresión $c_1 f_1$

[1] En lo que sigue, el símbolo => significa "entonces" o "implica".

$+ \ldots c_n f_n$ se llama *solución general de (H)* (donde $c_1, \ldots, c_n$, son números constantes cualesquiera)

f) Sea $g(t)$ una solución particular de (NH). Entonces cualquier solución de (NH) se obtiene como:

$$c_1 f_1 + \ldots c_n f_n + g \tag{3}$$

En resumen para hallar la solución más general de la ecuación diferencial lineal (NH) (ecuación (2)), se debe proceder de la siguiente manera:

1º) Hay que encontrar n soluciones linealmente *independientes*[2] para (H). Así encuentro la solución general para (H) como combinación lineal de dichas soluciones (ver e)): $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$.
2º) Hay que hallar una solución particular para (NH) que llamaremos g.
3º) La solución más general de (NH) se obtiene como $c_1 f_1 + \ldots c_n f_n + g$. O sea como suma de la solución general de (H) más la solución particular de (NH).

- Notemos que la solución general de (H), y por ende la solución más general de (NH), es "n veces infinita" y esto está dado por los infinitos valores de los n valores $c_1, \ldots, c_n$.
- No siempre es fácil hallar n soluciones independientes para (H).
- Hay criterios (que no veremos) por los cuales podemos saber si n funciones del "espacio" de soluciones son independientes.
- Veremos ecuaciones lineales donde sea relativamente sencillo hallar n soluciones independientes para (H).

En base a esto último las ecuaciones lineales que estudiaremos son las de coeficientes constantes.

III. Ecuaciones lineales a coeficientes constantes **homogéneas**

Como ya sabemos son del tipo:

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0, \tag{4}$$

donde, como ya vimos, los coeficientes a_j $(j=0,\ldots n)$ son constantes.

Tomemos el caso $n=2$ par hallar la solución y ejemplificar. Si $n=2$ la ecuación diferencial (4) resulta:

$$a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0 \tag{5}$$

Para hallar soluciones ensayemos con $f(t)=e^{rt}$ donde r será algún parámetro a determinar para que e^{rt} sea solución de (5). "Metiendo" e^{rt} en (5) (y teniendo en cuenta que $f'(t)= re^{rt}$; $f''(t)= r^2e^{rt}$) resulta

$$a_2 r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0 \tag{6}$$

Sacando factor común e^{rt} en (6) obtenemos

[2] Brevemente n funciones son linealmente independientes si ninguna de ellas la puedo escribir como combinación lineal de las otras.

$$e^{rt}\,(r^2\,a_2 + r\,a_1 + a_0\,) = 0 \qquad (7)$$

Como $e^{rt} \neq 0$ la expresión (7) es equivalente a

$$r^2\,a_2 + r\,a_1 + a_0 \;= 0 \qquad (8)$$

El polinomio dado en (8) $P(r) = r^2\,a_2 + r\,a_1 + a_0$ es un polinomio de grado 2 y el problema, al ensayar soluciones tipo e^{rt} , pasó a ser equivalente a encontrar los ceros o raíces del polinomio $P(r)$ (llamado polinomio característico). Los ceros de este polinomio son los que van en el exponente de e^{rt} para que esta exponencial sea solución de (5).

Como sabemos, un polinomio de grado n tiene a los sumo n raíces o ceros distintas (en el campo complejo). En el caso de $n=2$ podemos tener las dos raíces distintas, o tener una sola raíz (podemos decir en este caso que las dos raíces son iguales, y que la *multiplicidad* de esta raíz es 2, o que esta raíz es una raíz doble). Analicemos esto un poco más detenidamente. Llamemos r_1 y r_2 a las raíces de $P(r) = r^2\,a_2 + r\,a_1 + a_0$.

Podemos tener dos casos: 1º caso): $r_1 \neq r_2$; 2º caso): $r_1 = r_2$. Veámoslos:

1º caso): $r_1 \neq r_2$. Se puede demostrar entonces (no lo haremos) que las soluciones provistas por estas raíces son linealmente independientes. O sea que nuestra "base" de soluciones será $\{e^{r1t}; e^{r2t}\}$ y la solución más general de (5), como vimos en II. será

$$f(t) = c_1\,e^{r1t} + c_2\,e^{r2t}\,, \qquad (9)$$

con c_1 y c_2 constantes cualesquiera.

2º caso): $r_1 = r_2$ (raíz doble o de multiplicidad 2). Se puede demostrar (no lo haremos) que el conjunto de 2 soluciones linealmente independientes está dado por

$$\{e^{r1t}; te^{r1t}\}. \qquad (10)$$

Es decir que la solución más general de (5) está dada por

$$f(t) = c_1\,e^{r1t} + c_2\,t\,e^{r1t}\,. \qquad (10bis)$$

En el caso más general de la ecuación diferencial de orden n (ecuación (4)), el procedimiento es similar y al ensayar con una solución del tipo e^{rt} desembocaremos obviamente en un polinomio característico de grado n (hágalo!):

$$P(r) = r^n\,a_n + r^{n-1}\,a_{n-1} + \ldots\; r^2\,a_2 + r\,a_1 + a_0\,, \qquad (11)$$

del cual tendremos que hallar las raíces o ceros; es decir resolver $P(r)=0$. Vamos a tener (en el campo complejo) a los sumo n raíces distintas. Pero podemos tener *menos* de n raíces distintas. En este caso hay raíces que son iguales o se repiten, o dicho de otra forma tienen multiplicidad mayor que 1 (pueden ser raíces dobles, triples, etc.). La suma de las multiplicidades de las raíces tiene que ser n.

Si todas las n raíces son distintas (o sea tenemos al conjunto de ceros dado por$\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$), el conjunto de soluciones independientes está dado por $\{e^{r1t}; e^{r2t}; \ldots, e^{rnt}\}$, y la solución más general está dada por

$$f(t)= c_1 e^{r1t} + c_2 e^{r2t} + \ldots + c_2 e^{rnt} , \qquad (12)$$

con $\{c_1 ; c_2 \ldots c_n\}$ constantes cualesquiera.

Si las raíces distintas son menos que n, podemos tener algunas repetidas, es decir que sean dobles, triples, etc. (o de multiplicidad $2, 3$, etc.). Por ejemplo si las raíces distintas son k (menor que n), tendremos al conjunto de ceros dado por $\{r_1 , r_2, \ldots, r_k\}$. Para ilustrar, supongamos que $\boldsymbol{r_2}$ tiene multiplicidad **3,** y $\boldsymbol{r_k}$ multiplicidad **2**. Entonces el conjunto de n soluciones independientes (recordemos que tenemos que tener tantas soluciones independientes como el orden de la ecuación) está dado por

$$\{e^{r1t}; \boldsymbol{e^{r2t}; t e^{r2t}; t^2 e^{r2t}}; e^{r3t}; \ldots ; \boldsymbol{e^{rkt} ; te^{rkt}}\}. \qquad (13)$$

La solución más general de la ecuación diferencial estará dada por la suma de los siguientes n términos:

$$f(t)= c_1 e^{r1t} + c_2 e^{r2t} + c_3 t e^{r2t} + c_4 t^2 e^{r2t} + \ldots + c_{n-1} e^{rkt} + c_n t e^{rkt} , \qquad (13bis)$$

con $\{c_1 ; c_2 ; \ldots ; c_n\}$ constantes cualesquiera.

<u>Ejemplos</u>

1) Sea la ecuación diferencial $f'(t)+3 f(t)= 0$. Esta ecuación de 1º orden es similar a algunas vistas en el TP. Nº 0 y resueltas por integración directa. Hallemos la solución con lo visto más arriba. Ensayando con $f(t)=e^{rt}$ llegamos al polinomio característico (hágalo!) de grado 1, $P(r)= r +3=0$ cuya única raíz es $r_1 =-3$. Por lo tanto el "espacio" de soluciones está sólo generado por $\{e^{-3t}\}$ y la solución general está dada por $f(t)= c_1 e^{-3t}$ con c_1 una constante cualquiera.

2) Sea la ecuación diferencial $f'''(t)- f'(t)= 0$. Esta es una ecuación como la (4), de orden 3, lineal a coeficientes constantes y homogénea). Para hallar la solución ensayamos con $f(t)=e^{rt}$. Metiendo e^{rt} en la ecuación diferencial llegamos (hágalo!) a que el polinomio característico de grado 3 se hace cero:

$$P(r)= r^3 - r = 0.$$

Para hallar las raíces de $P(r)$ (grado 3 en este caso), notemos que

$$r^3 - r =r.(r^2 - 1);$$

Esta última expresión es nula si y sólo si $r=0$, o $(r^2 - 1)=0$. Por otro lado $(r^2 - 1)=0 \leftrightarrow r^2 =1 \leftrightarrow r =1, o\ r = -1$. Por lo tanto hallamos que las raíces de $P(r)$ son $\{0,1,-1\}$. Son 3 raíces distintas (y por ende de multiplicidad 1 pues $P(r)$ es de grado 3). El conjunto de soluciones independientes estará dado entonces por $\{e^{0t}; e^{t}; e^{-t} \}$, y la solución más general de la ecuación diferencial será:

$$f(t)= c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{-t}$$

donde usamos que $e^{0t} =1$, y $\{c_1 ; c_2 ; c_3\}$ son constantes cualesquiera.

3) Sea la ecuación diferencial $f''''(t)+2f''(t)+f(t)=0$. Esta ecuación, de orden 4, es lineal a coeficientes constantes y homogénea. Por lo tanto, a fin de hallar la solución, ensayamos con $f(t)=e^{rt}$. De esta manera llegamos (hacerlo!) a

$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = 0.$$

Para hallar los ceros de $P(r)$, notemos que es un polinomio de grado 4 al que le faltan los términos de r^3 y r . Definiendo (o cambiando de variable) $r^2=x$, el polinomio $P(r)$ pasa a ser $P(x) = x^2 + 2x + 1$. Este es un polinomio de 2º grado ($ax^2 + bx + c$) cuyas raíces sabemos calcular según la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro caso hallamos (hacerlo!) que $P(x)$ tiene sólo un cero: $x_0=-1$ (raíz doble o de multiplicidad 2 para $P(x)$). Como $r^2=x$, las raíces de $P(r)$ serán $\sqrt{-1} = \pm i$ (donde i es la unidad imaginaria de los nºs complejos). Por lo tanto tenemos para $P(r)$ *dos* raíces (c/u de multiplicidad 2): $\{i; -i\}$. Que $x_0=-1$ es raíz doble de $P(x)$ (y consiguientemente $i; -i$ sean raíces dobles de $P(r)$) es lo mismo que decir que

$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = (r^2 + 1)^2.$$

El conjunto de soluciones (ver fórmulas (10) y/o (13) más arriba) estará dado entonces por $\{e^{it}; te^{it}; e^{-it}; te^{-it}\}$; y la solución más general será entonces:

$$f(t) = c_1 e^{it} + c_2 t e^{it} + c_3 e^{-it} + c_4 t e^{-it},$$

con $\{c_1; c_2; c_3; c_4\}$ constantes cualesquiera.

Si quisiéramos expresar la solución anterior con funciones reales (y no exponenciales complejas) podemos utilizar identidad $e^{\pm it} = \cos(t) \pm i\,\mathrm{sen}(t)$, para reemplazar las exponenciales por *cos y sen*. Haciendo esto (hacerlo!) y reagrupando resulta:

$$f(t) = (c_1 + c_3)\cos(t) + (c_2 + c_4)t\cos(t) + (c_1 - c_3)i\,\mathrm{sen}(t) + (c_2 - c_4)i\,t\,\mathrm{sen}(t).$$

Renombrando $(c_1 + c_3)=k_1$; $(c_2 + c_4)= k_2$; $(c_1 - c_3)i= k_3$; $(c_2 - c_4)i = k_4$, resulta

$$f(t) = k_1\cos(t) + k_2 t\cos(t) + k_3\,\mathrm{sen}(t) + k_4 t\,\mathrm{sen}(t),$$

con $\{k_1; k_2; k_3; k_4\}$ constantes cualesquiera.

4) Sea la ecuación diferencial $f'''(t) - 2f''(t) + f'(t) = 0$. Nuevamente, ensayando con $f(t)=e^{rt}$, desembocamos en el polinomio característico $P(r) = r^3 - 2r^2 + r = 0$. Notemos –para poder hallar las raíces de $P(r)$- que en este caso en $P(r)$ (de grado 3 igual al orden de la ecuación diferencial por supuesto) podemos sacar factor común r: $P(r) = r^3 - 2r^2 + r = r(r^2 - 2r + 1)$. Esta última expresión será nula si y sólo si $r=0$ o $(r^2 - 2r + 1) = 0$. De la última igualdad, usando la formulita de los ceros de una cuadrática, se obtiene una sola raíz $r_1=1$ (raíz doble o de multiplicidad 2 ya que $(r^2 - 2r + 1) = (r-1)^2$). Por lo tanto obtenemos que los ceros de $P(r)$ son $\{0; 1\}$, el segundo de multiplicidad 2. El conjunto de soluciones estará dado entonces por $\{e^{0t}; e^t; te^t\}$ y la solución más general será

$$f(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 t e^t$$

donde usamos que $e^{0t}=1$, y $\{c_1; c_2; c_3\}$ son constantes cualesquiera.