Matemática Aplicada (Dr. Ernesto Kirchuk)
Unidad 0: Introducción.

- Sistemas

Definiremos a un sistema como un objeto o colección de objetos cuyas propiedades queremos estudiar. Por ejemplo: a) el sistemas solar, b) una máquina de papel, c) un capacitor con un resistor, etc., etc. Las cuestiones a investigar en los sistemas pueden ser múltiples. Por ejemplo, en a) podemos preguntarnos ¿cuándo ocurrirá el siguiente eclipse de sol? En b) uno puede preguntarse acerca de la manera de ajustar todas las válvulas a fin de producir una óptima calidad de papel. En c) la cuestión puede ser: ¿qué sucede si los conectamos?

Muchos interrogantes de este tipo se pueden contestar vía la experimentación. Pero en algunos casos es inapropiado o imposible llevar a cabo esta última. ¿Porqué?: a) puede ser muy caro (por ejemplo ajustando las válvulas en la máquina de papel podríamos producir mucho papel inservible o al menos no vendible). b) puede ser demasiado peligroso (operaciones en plantas nucleares por ejemplo). c) el sistemas no existe (cuando diseñamos una nueva máquina uno desea testear el efecto de diferentes "estímulos" sobre las propiedades dinámicas de la máquina).

- Modelos

Estas últimas cuestiones nos llevan a la idea de tener que hacer un *modelo*[1] para el sistema en cuestión sin tener que llegar a realizar un experimento. Implícitamente usamos modelos todo el tiempo. Por ejemplo, cuando tratamos a una persona, hacemos un modelo del carácter de la misma al decir que ella es "jorobada". Este modelo nos ayudará a saber como reaccionará la persona si necesitamos pedirle un favor. Si nuestro modelo es bueno será mejor no solicitarle favor alguno...Tenemos también modelos sobres sistemas técnicos basados en la intuición o la experiencia (modelo para manejar un auto, para operar un proceso industrial, etc.). Tales modelos los llamaremos *modelos mentales.*

Otro tipo de modelos es un *modelo verbal:* cuando el comportamiento de un sistema bajo diferentes condiciones es descrito en palabras. Por ejemplo, si la tasa de interés se incrementa, *entonces* el desempleo aumenta. Los sistemas expertos son ejemplos de modelos verbales formalizados. Es importante separar los modelos verbales de los mentales. Cuando andamos en bicicleta usamos un modelo mental de la dinámica del rodado. No es fácil convertirlo en un modelo verbal.

Además de los modelos mentales y verbales hay modelos que tratan e imitar al sistema. Estos podrían significar simplemente modelos físicos como los que utiliza un arquitecto o un constructor de botes a fin de testear las propiedades estéticas o hidrodinámicas de sus sistemas respectivos (casa o bote).

Pero los modelos con que trabajaremos serán de un cuarto tipo: los *modelos matemáticos.* Estos enfatizarán las relaciones entre magnitudes (distancias, corrientes, flujos, tasas de desempleo, etc.) que pueden observarse en el sistema en cuestión y son descritas como relaciones matemáticas en el modelo. La mayoría de las leyes de la naturaleza estudiadas en la escuela son modelos matemáticos en este sentido (para el sistema "una masa puntual", la 2° ley de Newton da

[1] Vocablo derivado del latín. Originalmente significa molde o patrón.

una relación entre fuerza y aceleración; para el sistema “un resistor”, la ley de Ohm describe la conexión entre corriente y voltaje).

Para la construcción de los modelos matemáticos hay en principio dos fuentes de conocimiento: i) la acumulación de experiencias de expertos y literatura en el área en cuestión (aquí están las leyes de la naturaleza las cuales llegaron a un estadio de paradigma generado por generaciones de científicos); ii) el sistema por si mismo.

Hay dos principios básicos y bastante diferentes para la construcción de modelos: 1) Modelado físico: un principio es derivar propiedades de un sistemas a partir de las propiedades de subsistemas constituyentes del mismo. Para sistemas técnicos esto significa que las leyes de la naturaleza que describen los subsistemas son usadas en general. Por ejemplo, cuando un capacitor y un resistor se conectan se sigue la ley de Ohm y la relación entre carga y corriente para el capacitor. Para sistemas no técnicos (económicos, sociológicos, etc.) las “bien establecidas” leyes de la naturaleza no están disponibles aún para simples subsistemas. Por ello tienen que ser introducidas hipótesis o usadas relaciones generalmente reconocidas. 2) El otro principio básico es usar observaciones del sistema a fin de ajustar propiedades del modelo. Este principio es usado con frecuencia como complemento del primero. Para sistemas técnicos las leyes de la naturaleza son modelos matemáticos y fueron basadas en observaciones de sistemas más pequeños.

Destaquemos también que todos los modelos tienen un limitado dominio de validez. Por ejemplo, las leyes de Newton son válidas dentro de un amplio espectro de velocidades pero cuando nos acercamos a la velocidad de la luz son incapaces de describir el movimiento de las partículas. De la misma forma la relación lineal entre voltaje e intensidad de corriente en un resistor es válida dentro de un rango limitado de temperatura.

Los modelos matemáticos pueden tener diferentes características dependiendo de las propiedades del sistema y de las herramientas usadas. Podemos tener por un lado los modelos determinísticos si estos trabajan con una exacta relación entre variables medidas y derivadas. En contraposición un modelo es estocástico si trabaja con conceptos de incerteza o probabilidad. Un modelo estocástico contiene variables que son descritas usando variables o procesos estocásticos

Por otra parte podemos clasificar los modelos en dinámicos o estáticos. Un sistema es generalmente caracterizado por variables que cambian con el tiempo (posición de cuerpos, corriente, voltaje, número de desempleados, azúcar en sangre, etc.). Si existe una conexión directa o instantánea entre estas variables el sistema es llamado *estático*. Por ejemplo un resistor es un sistema estático dado que la corriente y el voltaje están directamente relacionados (ley de Ohm). La corriente depende sólo del voltaje presente y no de valores anteriores. En contraposición, para otros sistemas las variables pueden cambiar sin directa influencia externa, y sus valores dependerán de anteriores señales aplicadas. Tales sistemas se llamarán *dinámicos*. Por ejemplo, la economía nacional es un sistema dinámico dado que la presente situación económica depende de las intervenciones socioeconómicas de años anteriores.

Como veremos, y para lo que nos interesa en este curso, un sistema dinámico es un sistema que es descrito por **ecuaciones diferenciales**.

- Ejemplos de modelos matemáticos de diferentes sistemas técnicos

Resumamos las relaciones matemáticas más comunes de algunos modelos de sistemas eléctricos, mecánicos y térmicos. Repase más abajo el sistema que más le guste o que sienta que más conoce. La idea es presentar que diferentes sistemas los podemos modelar con el mismo tipo de ecuaciones matemáticas.

1) Circuitos eléctricos consistentes de resistores, capacitores, inductores y transformadores. Las relaciones básicas que los describen consisten de relaciones entre las cantidades: voltaje (V) medido en volts y corriente (i) medida en amperes.

Un inductor ideal es descrito por:

$$V(t) = L\, di(t)/dt \tag{1}$$

donde $V(t)$ e $i(t)$ son los voltajes y corriente al instante t respectivamente. La constante L es la inductancia (medida en Henry). Recíprocamente podemos escribir (1) como

$$i(t) = (1/L) \int_o^t V(t')dt'. \tag{2}$$

De manera análoga un capacitor ideal es descrito por:

$$i(t) = C\, dV(t)/dt \tag{3}$$

donde C es la capacidad (en Faradios). Podemos escribir (3) como

$$V(t) = (1/C) \int_o^t i(t')dt'. \tag{4}$$

Para un resistor lineal con resistencia R (Ohm) tenemos la ley de Ohm

$$V(t) = R\, i(t). \tag{5}$$

Para un resistor no lineal tendremos

$$V(t) = f_1(\, i(t)) \tag{6}$$

o

$$i(t) = f_2(\, V(t)) \tag{7}$$

para funciones no lineales f. Por ejemplo, un rectificador ideal tiene $f_2(x)=x,\ si\ x>0$ y $f_2(x)=0,\ si\ x\leq 0.$

En un resistor la energía es perdida (como calor) y la potencia (medida en watts) es

$$P(t) = V(t).i(t) \tag{8}$$

De manera similar el inductor y el capacitor representan energía almacenada (energía del campo magnético y eléctrico respectivamente). Para el inductor tenemos

$$E(t) = (1/2)Li^2(t) \qquad (9)$$

Donde $E(t)$ está medida en Joules. Para el capacitor tenemos

$$E(t) = (1/2)CV^2(t) \qquad (10)$$

Cuando conectamos elementos del circuito eléctrico las reglas son las leyes de Kirchhoff para corrientes (ley de nodos) y para voltajes (ley de mallas).

Un transformador ideal transforma voltaje y corriente (del primario y secundario) de manera tal que su producto es constante:

$$V_1\, i_1 = V_2\, i_2 \qquad (11)$$
$$v_1 = \alpha\, v_2$$
$$i_1 = (1/\alpha)\, i_2.$$

2) <u>Traslaciones Mecánicas</u>: gobernada por leyes de la mecánica las cuales las podemos expresar por medio de relaciones entre las variables fuerza (F) y velocidad (v). Estas cantidades son magnitudes vectoriales por lo que las relaciones que siguen pueden ser formuladas como ecuaciones vectoriales. Por simplicidad trataremos todo como escalares.
La ley de fuerza (Newton) queda

$$F(t) = m\, dv(t)/dt \qquad (12)$$

donde m (kg) es la masa del cuerpo. También podemos escribir (12) como

$$v(t) = (1/m)\int_o^t F(t')dt'. \qquad (13)$$

Para cuerpos elásticos (por ejemplo un resorte lineal) la fuerza es proporcional a la elongación (o compresión): $F(t) = k\, \Delta x(t)$. O sea

$$F(t) = k \int_o^t v(t')dt'. \qquad (14)$$

Aquí k es la constante del resorte (en Newton/m). En muchos casos hay una relación mas complicada entre la fuerza y la elongación (importante en ciencia de materia les por ejemplo). En general podemos escribir

$$F(t) = g(\int_o^t v(t')dt'). \qquad (15)$$

Para alguna función no lineal g.

Un importante problema en sistemas mecánicos es la descripción del fenómeno de la *fricción*. En general la descripción es una relación directa entre fuerza (de fricción) y velocidad:

$$F(t) = h(v(t)). \qquad (16)$$

La función *h* puede ser de diferentes formas. Por ejemplo el arrastre de aire es descrito con frecuencia mediante $h(v)= cv^2 signo(v);$ mientras para la fricción por viscosidad (por ejemplo en amortiguadores) tenemos que $h(v)= \gamma v$.

La potencia total perdida como calor a través de la fricción es

$$P(t) = F(t).v(t). \tag{17}$$

De manera similar (ecs. (9-10)), la velocidad del cuerpo y la compresión del resorte representan energía almacenada (cinética y potencial respectivamente). Para la energía cinética tenemos

$$E(t) = (1/2)mv^2(t), \tag{18}$$

y para la energía elástica del resorte lineal

$$E(t) = (1/2k)F^2(t) \tag{19}$$

Relaciones análogas a la ec. (11) pueden obtenerse para palancas y máquinas similares entre las variables fuerza y velocidad.

3) <u>Rotaciones mecánicas</u> en motores o cajas de engranajes son muy comunes. Para estos sistemas las leyes mecánicas relacionan las variables básicas torque *M* (en Newton-metro) y velocidad angular ω (en Hertz). La contraparte de la ley de Newton dice que la aceleración angular es proporcional al torque :

$$M(t) = J\, d\omega(t)/dt \tag{20}$$

Donde la constante *J* es el momento de inercia. Podemos escribir (20) como

$$\omega(t) = (1/J)\int_o^t M(t')dt'. \tag{21}$$

La torsión de un eje ocasiona un torque descrito por

$$M(t) = k \int_o^t \omega(t')dt'. \tag{22}$$

La integral corresponde al desplazamiento angular entre las puntas; donde *k* representa la rigidez de torsión. La fricción rotacional es una función de la velocidad angular:

$$M(t) = h(\omega(t)) \tag{23}$$

Con distintas funciones *h* análogamente a la fricción traslacional (ec. (16)). La disipación de potencia en la rotación (como la ec. (17) de las traslaciones) es

$$P(t) = M(t)\omega(t); \tag{24}$$

Y la energía rotacional almacenada es

$$E(t) = (1/2)J\omega^2(t). \tag{25}$$

Un par de engranajes transforman torque y velocidad angular análogamente a las ecs. (11):

$$M_1\,\omega_1 = M_2\,\omega_2 \qquad (26)$$
$$M_1 = \alpha\, M_2$$
$$\omega_1 = (1/\alpha)\,\omega_2.$$

4) <u>Flujo de fluidos</u> en tubos y tanques (sistemas hidráulicos). Para fluidos incompresibles estos sistemas están descritos por dos cantidades básicas: presión p y flujo Q (en m^3/s). Si multiplicamos por la densidad podemos trabajar con flujos másicos.

Si consideramos un fluido de densidad ρ, moviéndose a través de un tubo de longitud l y área transversal A, la ley de Newton queda

$$p\,A = \rho\, l\, A\, dv(t)/dt \qquad (27)$$

donde $v(t)$ es la velocidad del fluido. La velocidad corresponde al flujo $Q(t)=v(t).A$ (m^3/s). Tenemos:

$$p(t) = (\rho\, l/A)\, dQ(t)/dt \qquad (28)$$

o

$$Q(t) = (1/L_f)\int_o^t p(t')dt', \qquad (29)$$

donde $L_f = \rho\, l/A$ es la inertancia del tubo.

Para un fluido en un tanque, el volumen e el tanque es la integral del flujo: $V=\int Qdt$. La presión en la base del tanque es igual al nivel ($h=V/A$) multiplicado por la densidad y la aceleración de la gravedad g,

$$p(t) = (\rho g/A)\int_o^t Q(t')dt'. \qquad (30)$$

El coeficiente $C_f = \rho g/A$ es llamado capacitancia. Si el área del tanque depende del nivel tenemos una relación no lineal:

$$p(t)= f(\int_o^t Q(t')dt'). \qquad (31)$$

Cuando un líquido atraviesa un tubo hay normalmente una pérdida de potencia por fricción interna y contra las paredes. Esto lleva a una caída de presión. También podemos decir que una caída de presión se necesita para mantener un cierto flujo (ver ec. (29). La caída de presión depende del flujo. En general podemos escribir

$$p(t) = f_1(Q(t)) \qquad (32)$$

Las propiedades de la función f_1 depende de las propiedades del tubo. Si el tubo es delgado o lleno con un medio poroso vale (ley de Arcy)

$$p(t) = R_f\, Q(t) \qquad (33)$$

donde R_f es la resistencia.

Podemos también escribir pérdidas de potencia por fricción, y acumulación de energía para el caso del tubo y tanque respectivamente, con ecs. Análogas a las (8-10, 17-19, 24-25).

5) Sistemas térmicos involucran calentamiento de objetos y transporte de energía térmica. Las leyes son típicamente expresadas como relaciones entre la temperatura T y tasa de flujo de calor q (en Watt). Calentamiento de un cuerpo significa que la temperatura aumenta cuando el flujo de calor penetra.

$$q(t) = C\, dT(t)/dt. \tag{34}$$

Aquí C es la capacidad térmica. La ec. (34) podemos escribirla como

$$T(t) = (1/C)\int_o^t q(t')dt'. \tag{35}$$

Si la capacidad térmica depende de la temperatura la ec. (35) es reemplazada por una expresión no lineal. Normalmente $T(t)$ representa la desviación de un temperatura de referencia (distinta al cero absoluto) y entonces (35) puede ser una buena aproximación.

La transferencia de calor entre dos cuerpos con diferentes temperaturas es considerada con frecuencia proporcional a la diferencia de temperatura $T(t)$:

$$q(t) = W\, T(t). \tag{36}$$

El coeficiente W es el coeficiente de transferencia de calor.

6) Observaciones: obviamente hay similaridades entre las ecs. básicas de los diferentes sistemas tratados arriba. Hemos visto que casi todas las ecs. son relaciones entre dos tipos de variables: A) variables de esfuerzo e; B) variables de flujo f. Las relaciones tienen las siguientes características: C) esfuerzo almacenado $f=\alpha^{-1}\int e$; D) flujo almacenado $e=\beta^{-1}\int f$; F) relación estática $e=h(f)$; G) potencia disipada $P= e.f$; H) energía almacenada vía (C) $T=(1/2\alpha) f^2$; I) energía almacenada vía (D) $T=(1/2\beta)\, e^2$; J) Suma de flujos nula $\Sigma f_i=0$; K) suma de esfuerzos (con signo) nula $\Sigma e_i=0$; L) transformación de variables $e_1 f_1= e_2 f_2$.

En ciertos casos las analogías no son completas. La relación G) por ejemplo no es válida para sistemas térmicos (tendríamos que usar la tasa de flujo de entropía en lugar de la del flujo de calor para su validez). Podemos resumir las analogías en la tabla siguiente:

Sistema	**Esfuerzo**	**Flujo**	**C**	**D**	**F**
Eléctrico	Voltaje	Corriente	Inductor	Capacitor	Resistor
Mecánico: Traslacional Rotacional	Fuerza Torque	Velocidad Vel. Angular	Cuerpo Ejes	Resorte Torsión del resorte	Fricción Fricción
Hidráulico	Presión	Flujo	Tubo	Tanque	Orificio
Térmico	Temperatura	Tasa flujo de calor	-	Calentamiento	Flujo de calor