Mestrado Integrado em
Engenharia Eletrotécnica e de Computadores
2021/2022 – P2

Modelação e Simulação

TRABALHO 2

Simulação de Monte Carlo do jogo do Monopólio

Fonte das imagens acima: Wikipedia

Preparado por

João Miranda Lemos

Instituto Superior Técnico

Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Área Científica de Sistemas, Decisão e Controlo

Declaração de Ética

Ao entregar a resolução deste trabalho, o grupo de alunos que o assina garante, por esse ato, que o texto e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

Objetivo

Simular um sistema estocástico de Markov discreto usando o método de Monte Carlo.

Conceitos envolvidos

- Sistema de acontecimentos discretos
- Probabilidade do estado de um sistema estocástico
- Método de Monte Carlo
- Modelos importantes:
    - Cadeia de Markov

Organização deste enunciado

Este enunciado está organizado em três partes. Na primeira parte explica-se o contexto do problema e a sua formulação. Na segunda parte sugere-se uma estrutura para o programa de simulação. Finalmente, na terceira parte formulam-se as questões a responder. Estas questões estão numeradas, sendo identificadas pela letra P (P1, P2, …).

Formato do relatório a entregar

O relatório a entregar deve satisfazer o seguinte formato:

- Formato pdf
- Ter na 1ª página:
    - O nome da unidade curricular e o ano letivo
    - O título e número do trabalho
    - O número de aluno, o nome e o email de todos os alunos do grupo
    - Um compromisso de ética de originalidade com o seguinte texto:

O grupo de alunos acima identificado garante que o texto deste relatório e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

- As respostas devem ser dadas sequencialmente a partir da página 2 do relatório, indicando no início de cada uma o número respetivo (P1, P2, ...) em tipo negrito (*bold*).
- O número máximo de páginas do relatório a entregar, incluindo a página de rosto é 10, com texto de tipo 12, podendo ser usado LATEX ou outro processador de texto.
- As páginas devem ser numeradas sendo, preferencialmente, os números colocados no centro da linha inferior.

1 - Descrição do problema

O objetivo deste trabalho consiste em simular o jogo de Monopólio simplificado que se mostra na figura 1, recorrendo ao Método de Monte Carlo para determinar a distribuição de probabilidade de equilíbrio de cair nas várias "casas".

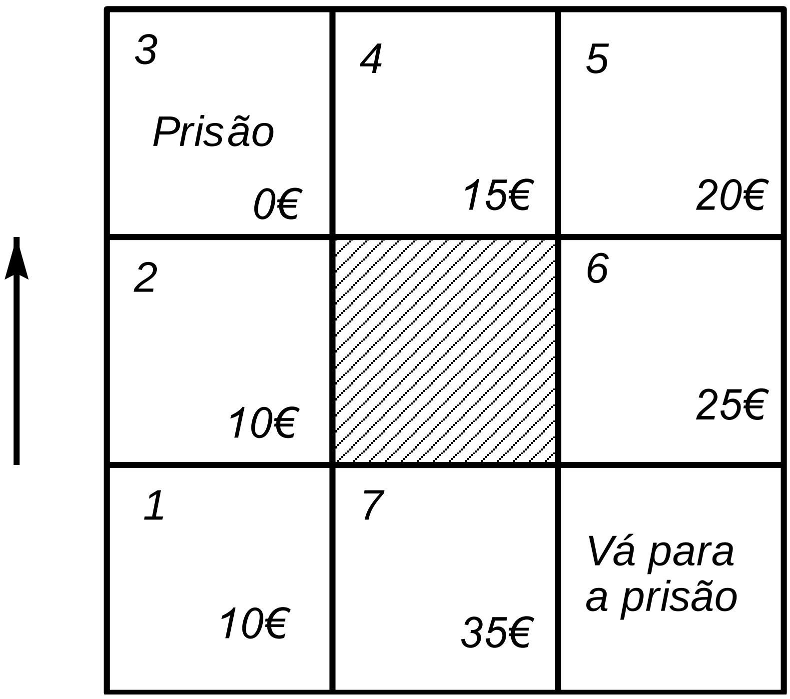

Figura 1. Tabuleiro do jogo de Monopólio simplificado.

As regras do jogo são as seguintes: O jogador tem uma marca que parte da casa 0 (não representada) e atira uma moeda ao ar. Se sair "cara" a marca avança uma casa. Se sair "coroa" avança duas casas no sentido da seta. O jogador deve pagar uma renda correspondente à casa em que cai. Quando se cai em "Vá para a prisão" é-se transferido imediatamente para a prisão, pelo que "Vá para a prisão" não é considerada uma "casa" (estado no sentido das cadeias de Markov).

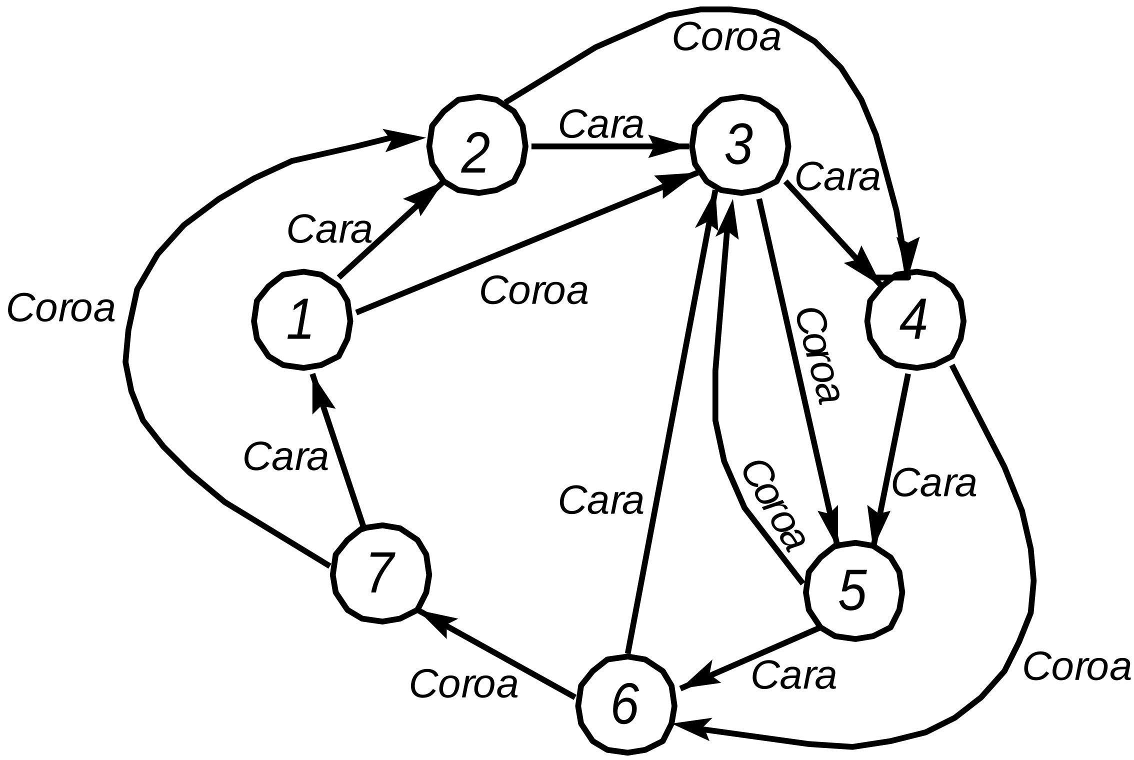

Figura 2. Diagrama de transição de estado.

O jogo do monopólio pode ser modelado como um conjunto finito de estados (neste caso associados a cada casa) transitando o sistema de estado quando ocorre um acontecimento (o lançamento da moeda). É o que se chama um sistema de acontecimentos discretos (ou de eventos discretos; em Inglês, *discrete event system*). Repare-se que, ao contrário dos sistemas modelados por equações diferenciais, ou de diferenças, em que o estado se altera quando o tempo passa, guiado pelo campo da equação diferencial, nos sistemas de acontecimentos discretos, o que faz evoluir o estado é o acontecimento externo (o lançamento da moeda) e não o tempo.

A figura 2 mostra o diagrama de transição de estado que representa o jogo do monopólio simplificado. Cada um dos estados está representado por um pequeno círculo e a transição de estados por setas que têm associado o acontecimento que provoca as transições. Compare as duas figuras para ver que, de facto, a figura 2 representa o diagrama de transição de estado do sistema da figura 1.

Neste caso, o sistema de acontecimentos discretos é estocástico pois depende de um acontecimento definido probabilísticamente (o lançamento da moeda). De facto, este sistema de acontecimentos discretos constitui uma cadeia de Markov pois a transição a partir de um dado estado depende apenas de qual é esse estado e de qual o valor do evento que leva à transição, e não da sequência de estado percorrida até chegar ao estado presente.

Neste trabalho pretende-se simular o avanço de uma marca que parte da casa 0 e avança sucessivamente durante *Njogadas*, por exemplo 100, 1000 ou mais jogadas. Estas 100 (ou mais) jogadas são repetidas (em simulação) durante um certo número de "corridas" (ou "*runs*"), anotando-se o número de vezes que a marca caiu em cada um dos estados. A partir daí, é calculada a frequência relativa com que a marca cai em cada casa (número de vezes que caiu na casa, a dividir pelo número total de jogadas que se consideram), o que permite estimar a probabilidade de cair em cada casa (em regime estacionário).

É nisto que consiste o método de Monte Carlo: A repetição de uma experiência aleatória simulada em computador, com recurso a um gerador de números aleatórios, a partir dos resultados das quais são calculadas médias das quantidades que se pretendem estimar.

Embora tenha raízes mais antigas, que vão até aos trabalhos de Rayleigh e de Buffon, que o utilizou em meados do século XIX para determinar uma estimativa do número π as origens do nome (que evoca o Casino de Monte Carlo) e da aplicação sistemática do método remontam a 1944, quando foi utilizado no Projeto Manhatan (em que se construiu a primeira bomba atómica) para modelar a difusão de neutrões em bombas atómicas de fissão nuclear. O Método de Monte Carlo é aplicável a uma grande variedade de problemas matemáticos e de engenharia. O cálculo numérico do valor de integrais ligados à Estimação Bayesiana é uma das principais aplicações em Engenharia, estando ligado a métodos de grande importância para a tecnologia do séc. XXI.

2 - Estrutura do programa de simulação

Um programa de computador para aplicar o método de Monte Carlo ao jogo do Monopólio pode estar estruturado do modo explicado a seguir.

O programa está dividido nas seguintes secções:

1. Definição de dados e inicialização das variáveis.
2. Simulação propriamente dita.
3. Representação de resultados.

As principais variáveis são:

- *Njogadas* – Número total de jogadas simulado em cada *run*.
- *NMC* – Número de runs
- *Ndiscard* – Número de jogadas iniciais descartadas para eliminar o transitório. A probabilidade de se atingir um dado estado varia com o tempo, existindo um transitório inicial, que dura um certo número de jogadas, até que se atinja uma solução de equilíbrio. Por exemplo, na jogada 1, nunca se pode atingir a casa 5 (porque se parte sempre da casa 0), mas ao fim de algumas jogadas, pode estar-se em qualquer casa (embora com probabilidades diferentes). Assim, se quisermos estimar a distribuição de probabilidade de equilíbrio de se estar em cada estado, há um certo número de jogadas iniciais que devem ser realizadas, mas que não devem ser contabilizadas na estatística dos estados atingidos.
- *Ncasas* – Número total de estados do jogo ("casas").
- *z* – Vetor, com dimensão igual ao número de estados do jogo, que indica o número de vezes que se caiu em cada casa.
- *y* – Vetor, com dimensão igual ao número de jogadas em cada *run* de Monte Carlo, que indica as casas em que se caiu em cada jogada (por exemplo, num determinado *run*, *y(36)* indica a casa que se atingiu na jogada 36 desse *run*).
- *Aluguer* – Valor do aluguer instantâneo de cada casa.

- *x* – variável escalar que indica o número do estado em que a marca do jogador está em cada instante;
- *avanca* – variável escalar que indica o resultado do lançamento da moeda ao ar, simulado através de um gerador de números aleatórios, e que toma os valores 1 ou 2.

Para traçar os gráficos, sugere-se a instrução *bar*, uma vez que se trata de estados e de tempo discretos.

A simulação consiste em dois ciclos, um dentro do outro. O ciclo externo consiste em ir repetindo o jogo (*run* de Monte Carlo) durante *NMC* vezes. No início de cada *run*, o estado da marca é inicializado em 0. Começa-se então um ciclo interno de *Njogadas* em que se simula o lançamento de uma moeda e, consoante o resultado, se atualiza a variável que traduz o estado da marca. Para além disso, é atualizado o vetor *z* que tem o número de vezes que se atingiu cada casa, acumulado de *run* para *run*, e o vetor *y*. Repare-se que:

- O vetor *y* é refeito de *run* para *run*. No fim, terá apenas os dados do *run* final.
- O vetor *z* tem os dados acumulados de todos os *runs*.
- Repare-se que as primeiras *Ndiscard* jogadas de cada *run* não contam para atualizar *z*.

No fim, deve calcular-se *zfreq* e o lucro médio por jogada de cada casa.

Algumas sugestões:

Para simular o avanço da marca, fazendo um *if* com múltiplas possibilidades, pode usar-se a instrução *switch* (consulte o *help* do MATLAB).

Para simular o "atirar da moeda", usar a instrução *rand*, que gera números aleatórios com distribuição uniforme entre 0 e 1. Convém inicializar o gerador com a instrução *rand('state',0)*, por forma a que a sequência de números aleatórios seja sempre a mesma (embora se possa usar outras inicializações).

Para um número de *runs* elevado, o computador pode levar um tempo apreciável. Para ver o tempo que falta pode gerar-se uma "barra de espera". Para isso use o comando *hh=waitbar(espera)* em que *espera* é um número entre 0 e 1 que traduz o comprimento da barra e *hh* é um handle da janela onde é criada a barra. No fim, pode fechar a janela com o comando *close(hh)*.

3 - Trabalho a realizar

P1. Escreva um programa em MATLAB para estudar a distribuição de probabilidades de equilíbrio dos estados do Monopólio simplificado. Use este programa para traçar gráficos que representam:

a) Os estados percorridos num *run* de Monte Carlo em função da jogada realizada, desde a jogada inicial à jogada final, (num subgráfico) e (noutro subgráfico) os valores simulados para o resultado do lançamento da moeda nas sucessivas jugadas desse *run*;
b) Um gráfico de barras com as frequências relativas dos diferentes estados quando se realizam muitas jogadas, e descartando um transitório inicial;
c) Um gráfico de barras com as rendas médias espectáveis das diversas casas nas condições da alínea b) (ou seja, a renda média em regime estocástico estacionário).

P2. Discuta a validação do seu programa. Sugere-se que considere vários aspetos:

i. A coerência entre a sequência dos estados ao longo das várias jogadas e a sequência de eventos que a determinam (o resultado do lançamento da moeda);
ii. A convergência da distribuição das probabilidades dos diferentes estados quando aumenta o número de *runs* de Monte Carlo. Repare que esta convergência se dá com a raiz quadrada do número de runs. Repare ainda que os resultados obtidos dependem da maneira como se inicializa o gerador de números aleatórios
iii. Discuta o valor adequado da variável *Ndiscard*.
iv. Eventualmente outros aspetos que considere importantes relativamente à validação do programa e dos resultados.

P3. Modifique o seu programa para estimar, pelo método de Monte Carlo, a probabilidade de estar no estado 4 ao longo das sucessivas jogadas, ou seja, a probabilidade de estar no estado 4 ao fim da jogada 1, ao fim da jogada 2, ao fim da jogada 3, etc. Represente graficamente esta variável em função do número de jogadas. Repare que deve haver uma "jogada zero", que corresponde à condição inicial do estado na casa da partida.

P4. Explique como é que se modificava o diagrama de transição de estado da figura 2 na situação em que, se o jogador for enviado para a prisão, ele terá de permanecer lá após a próxima jogada. Desenhe o novo diagrama. Não tem de escrever um programa para esta nova situação nem de mostrar resultados de simulação.

Referências

D. G. Luenberger (1979). *Introduction to Dynamic Systems – Theory, Models, and Applications*. John Wiley and Sons. Cap. 7.

O exemplo do Monopólio simplificado é apresentado neste livro para ilustrar uma cadeia de Markov. A abordagem feita não se baseia no Método de Monte Carlo, mas sim numa abordagem analítica que permite calcular exatamente as probabilidades dos vários estados à medida que se vão fazendo jogadas. Este cálculo é feito com base numa equação de diferenças. Com base em propriedades dos sistemas positivos (de estado contínuo, descritos por equações de diferenças) em que se pode garantir que as variáveis de estado são sempre positivas, pode mostrar-se que as probabilidades dos vários estados convergem para um valor de equilíbrio. A demonstração pode ser vista no excelente livro de Luenberger que, sendo um manual universitário, de carater tutorial, é citado por vários trabalhos de investigação pela maneira compacta e imaginativa com que faz a demonstração. A fotografia mostra Andrey Markov (1856 – 1922) que lançou as bases da teoria dos dos processos de Markov, sem a qual não haveria muitas das deliciosas inutilidades que povoam as nossas vidas (o telemóvel, o GPS, …). Markov estudou na Academia de S. Petersburgo, onde foi colega de um outro gigante em que assenta a tecnologia do século XXI – Alexander Lyapunov (1857 – 1918).

– Fim do trabalho –