

*Mestrado Integrado em
Engenharia Eletrotécnica e de Computadores
2021/2022 – P2*

Modelação e Simulação

TRABALHO 3

Bola saltitante



Fonte da imagem: Flickr, <https://www.flickr.com/photos/136944338@N05/29963974833>

Preparado por

João Miranda Lemos



Instituto Superior Técnico

Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Área Científica de Sistemas, Decisão e Controlo

Declaração de Ética

Ao entregar a resolução deste trabalho, o grupo de alunos que o assina garante, por esse ato, que o texto e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

Objetivo

Simular um sistema dinâmico híbrido (em que o estado é constituído por estados contínuos e estados discretos).

Conceitos envolvidos

- Sistema híbrido

Organização deste enunciado

Este enunciado está organizado em três partes. Na primeira parte explica-se o contexto do problema e a sua formulação. Na segunda parte sugere-se uma estrutura para o programa de simulação. Finalmente, na terceira parte formulam-se as questões a responder no relatório. Estas questões estão numeradas, sendo identificadas pela letra P (P1, P2, ...).

Formato do relatório a entregar

O relatório a entregar deve satisfazer o seguinte formato:

- Formato pdf
- Ter na 1ª página:
 - O nome da unidade curricular e o ano letivo
 - O título e número do trabalho
 - O número de aluno, o nome e o email de todos os alunos do grupo
 - Um compromisso de ética de originalidade com o seguinte texto:

O grupo de alunos acima identificado garante que o texto deste relatório e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

- As respostas devem ser dadas sequencialmente a partir da página 2 do relatório, indicando no início de cada uma o número respetivo (P1, P2, ...) em tipo negrito (*bold*).
- O número máximo de páginas do relatório a entregar, incluindo a página de rosto é 10, com texto de tipo 12, podendo ser usado LATEX ou outro processador de texto.
- As páginas devem ser numeradas sendo, preferencialmente, os números colocados no centro da linha inferior.

1 - Descrição do problema

O objetivo deste trabalho consiste na simulação de uma bola que se desloca por ação da força da gravidade. Assume-se que a bola é um ponto material.

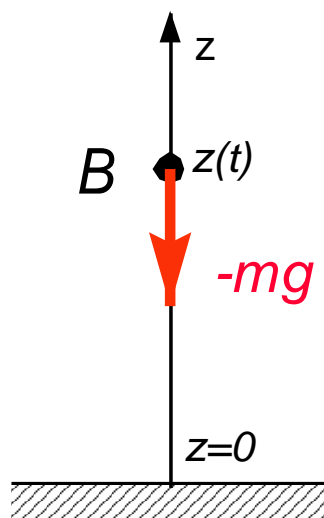


Figura 1 – Uma bola que cai na vertical.

A figura 1 mostra um esquema da bola num referencial vertical, definido pelo eixo z , definido no sentido positivo para cima e com o zero ao nível de uma superfície plana em que a bola vai impactar. No instante t (s), a bola está na posição $z(t)$ (m).

Movimento livre numa direção

Em movimento livre (ou seja, sempre que não há impacto), o movimento da bola é descrito pela lei de Newton

$$m\ddot{z} = -mg, \quad (1)$$

em que $m=0,1\text{kg}$ é a massa da bola e $g = 9,81\text{ ms}^{-2}$ é a aceleração da gravidade, suposta constante na gama de posições possíveis para a bola. Ou seja,

$$\ddot{z} = -g. \quad (2)$$

Tomando como variáveis de estado a posição, z , e a sua derivada, v_z , têm-se as seguintes equações de estado

$$\dot{z} = v_z, \quad (3)$$

$$\dot{v}_z = -g. \quad (4)$$

Este modelo corresponde à ausência de impactos e tem como diagrama de blocos a série de dois integradores que se mostra na figura 2.

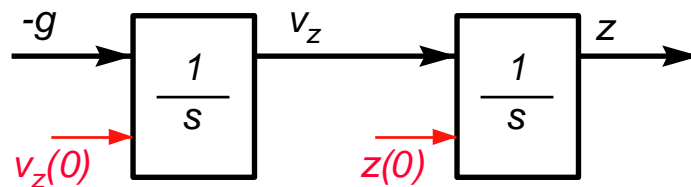


Figura 2 – Diagrama de blocos do modelo de estado da bola sem impacto. As setas vermelhas representam as condições iniciais de cada um dos integradores, que correspondem aos valores iniciais da velocidade e da posição.

Ocorrência de impactos

Quando há um impacto, o movimento pode ser modelado pelo modelo híbrido da figura 3.

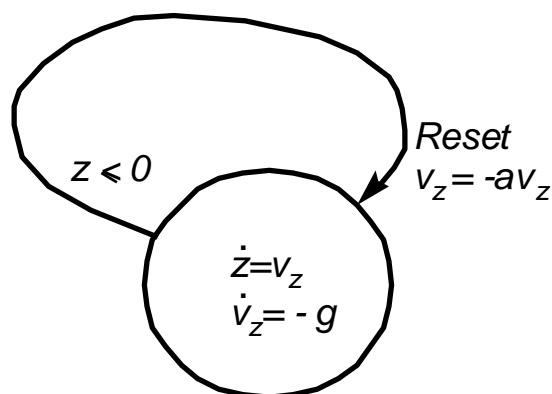


Figura 3 – Modelo híbrido da bola com um impacto.

Neste modelo, além dos estados contínuos z e v_z , existe um estado discreto, representado pela bola na figura 3. O estado discreto define qual o modelo dinâmico do estado contínuo que está ativo em cada momento, bem como as condições iniciais a aplicar.

Neste caso, o modelo é sempre o mesmo pois a transição do estado discreto é sempre para ele próprio, mas a condição inicial é alterada na transição. A transição do estado discreto ocorre quando a posição verifica $z \leq 0$. Quando esta transição ocorre, a velocidade altera o sinal (a bola passa de descer, o que corresponde a uma velocidade negativa, a subir, o que corresponde a uma velocidade positiva) e é multiplicada por um fator de atenuação α , que verifica $0 < \alpha < 1$, o qual traduz a perda de energia ocorrida durante o choque, devida a dissipação.

Movimento num plano

Suponha agora que a bola se desloca no plano vertical, com coordenada horizontal y , tal como se mostra na figura 4.

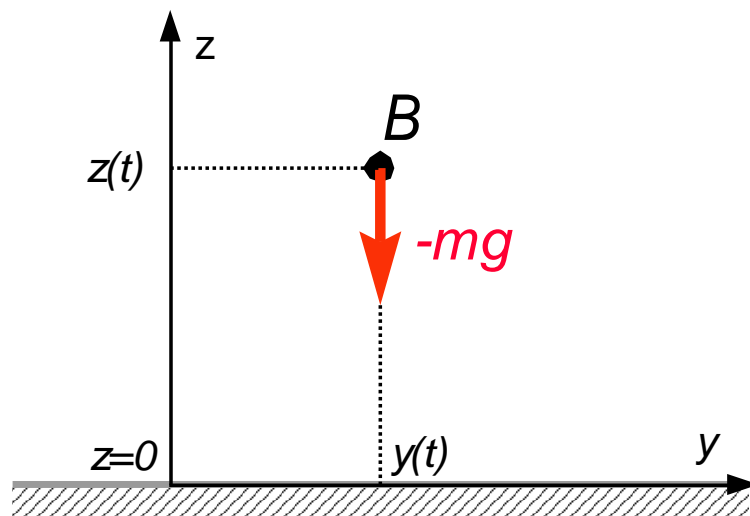


Figura 4 – Movimento da esfera em duas dimensões. Segundo a horizontal (eixo y) a velocidade é uniforme.

Supõe-se que a velocidade segundo a horizontal é constante.

Choque numa parede vertical

Finalmente, considere a situação em que a bola pode chocar com uma parede vertical, sofrendo também uma atenuação da velocidade, agora na componente horizontal.

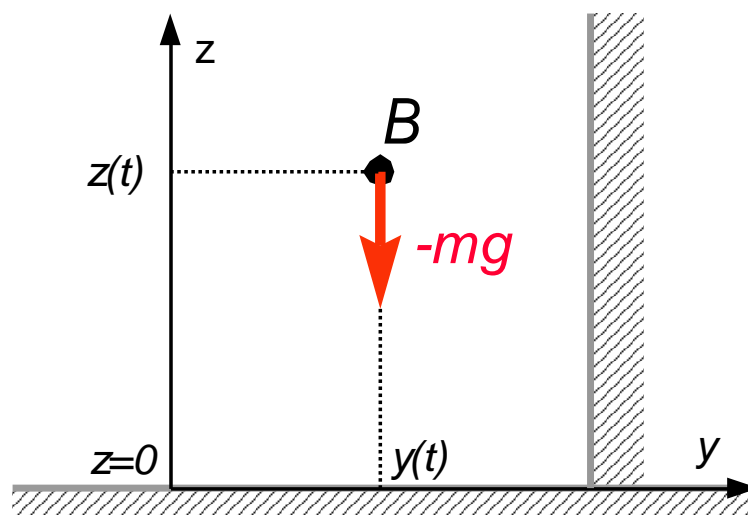


Figura 5 – Choque com uma parede vertical.

2 - Estrutura do programa de simulação

A modelação no SIMULINK de sistemas híbridos em que há alteração das condições iniciais requer o uso de blocos, e de opções no bloco integrador, que normalmente não são usados.

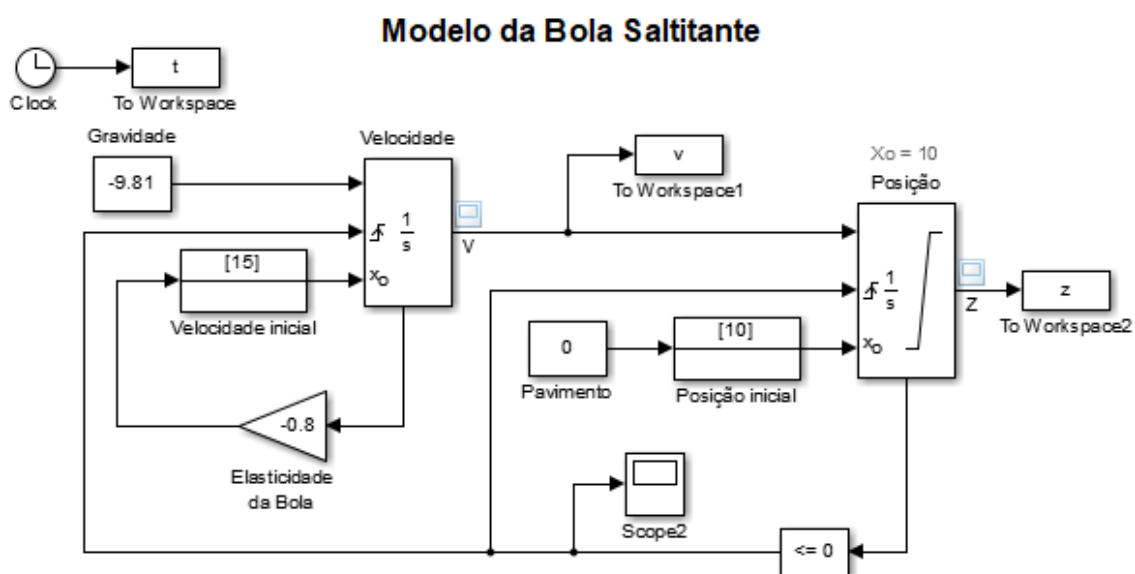


Figura 6 – Diagrama de blocos do SIMULINK para simulação da bola saltitante.

A figura 6 mostra o diagrama de blocos do SIMULINK para simulação da bola saltitante na vertical.

O primeiro comentário a fazer é sobre os integradores. Normalmente os integradores têm uma única entrada (que corresponde ao sinal a integrar) e uma única saída (que corresponde ao sinal integrado. Neste caso há 3 entradas e 2 saídas.

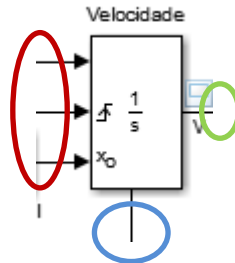


Figura 7 – Entradas e saídas do integrador.

A figura 7 mostra o bloco integrador com os sinais identificados com ovais coloridas. A oval vermelha engloba os sinais de entrada. De cima para baixo, tem-se:

- O sinal de entrada a integrar (no topo);
- Um sinal que define o instante em que se faz *reset* da condição inicial (no meio). Quando este sinal tem um flanco ascendente, o valor do estado do integrador é atualizado com o valor que se encontra no terceiro sinal.
- Um sinal que define a condição inicial a aplicar quando o sinal de *reset* é atuado.

A oval verde representa a saída do integrador. A oval azul indica um sinal que é dado pelo estado do integrador. Este sinal é igual ao sinal de saída. No entanto, este sinal permite evitar um *loop* algébrico na interpretação do diagrama quando é ligado ao sinal de condições iniciais.

A figura 8 mostra como deve ser preenchido o menu de configuração do integrador:

- Em *External reset* escolher *rising*. É esta escolha que permite mostrar o pino de input com o sinal de *reset*, e de definir que este sinal ativa o carregamento da condição inicial no flanco ascendente do sinal a ele ligado.
- Em *Initial condition* escolher *external*. É esta escolha que permite criar o pino de entrada para o sinal de condição inicial.
- *Tick* em *Show state port*, por forma a tornar acessível o sinal de estado.

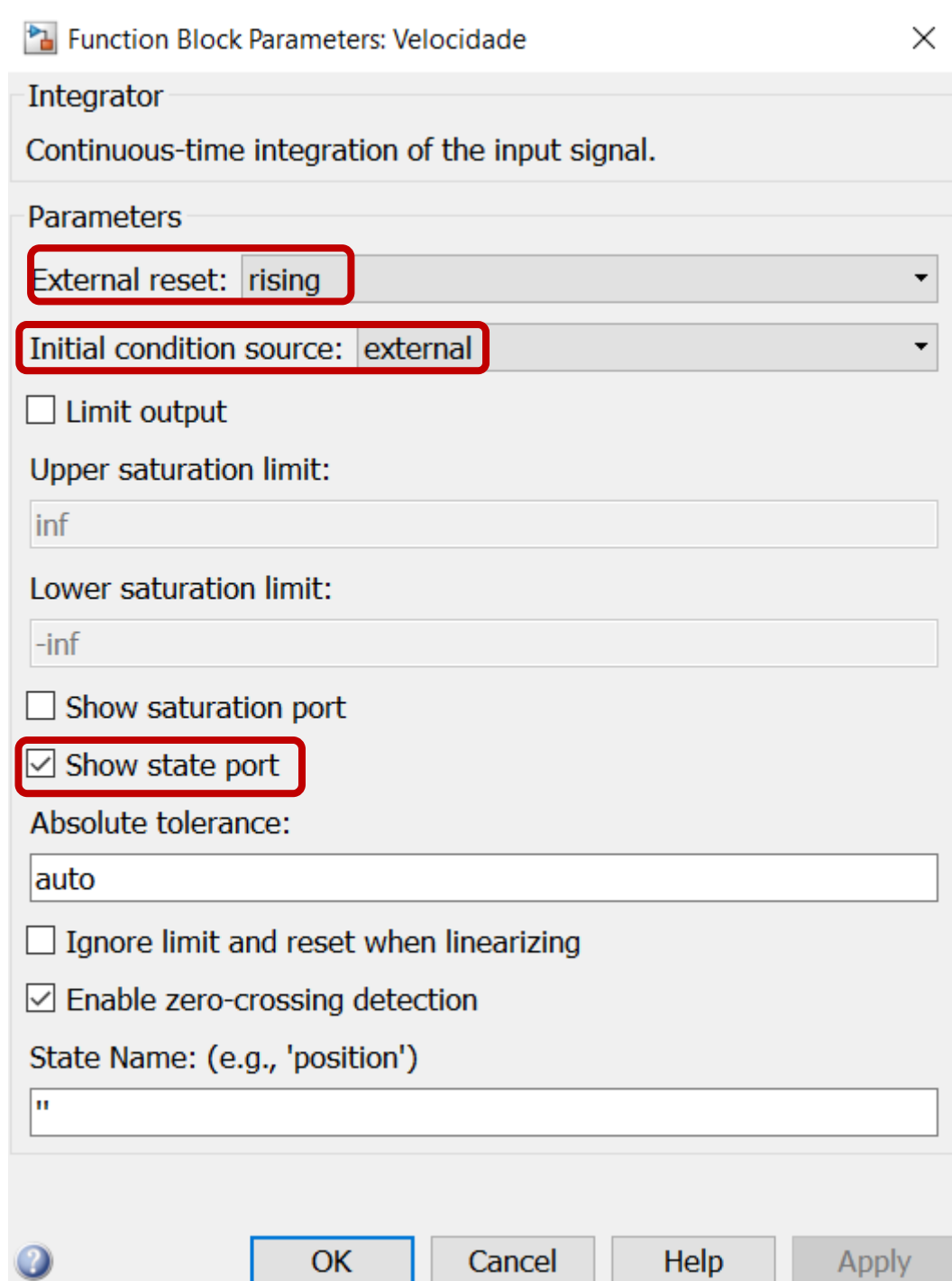


Figura 8 – Menu de configuração do integrador.

Os blocos assinalados a vermelho na figura 9 permitem impor uma condição inicial que se sobrepõe ao sinal de entrada e evitam um *loop* algébrico. Estes blocos têm a designação IC e podem ser encontrados na secção *Signal attributes* do SIMULINK.

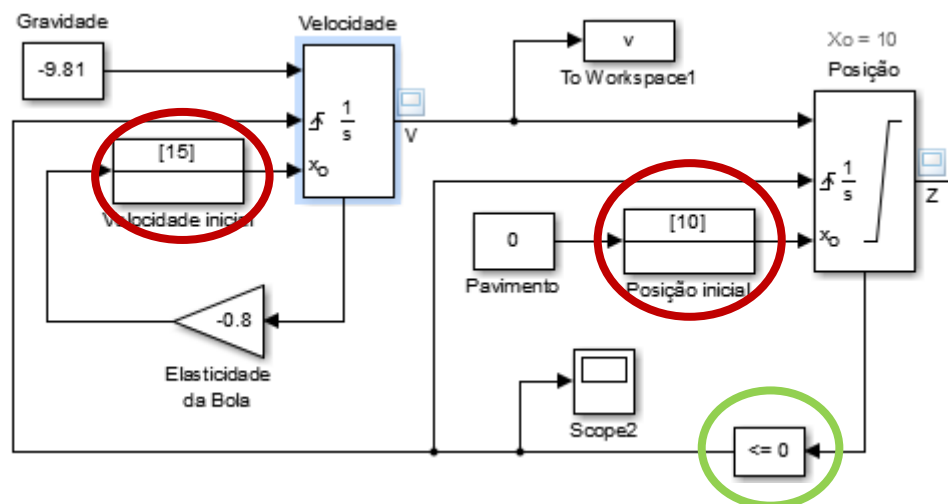


Figura 9 – Blocos de condição inicial assinalados a vermelho. O bloco assinalado a verde é um bloco lógico que permite gerar o sinal de *reset* das condições iniciais a partir da posição (estado do integrador de saída).

O sinal de *reset* dos integradores é gerado com o bloco lógico denominado *Compare to zero*, que está indicado a verde na figura 9. Este bloco pode ser obtido no grupo *Logic and Bit Operations* da biblioteca do SIMULINK. Quando a posição é igual a zero (ou mesmo ligeiramente negativa por razões numéricas), a saída deste bloco transita para o valor 1, sendo esta transição que ativa os sinais de *reset* dos dois integradores. A entrada deste bloco está ligada ao sinal de estado do integrador de posição para evitar um *loop* algébrico.

3 - Trabalho a realizar

P1. Escreva um diagrama de blocos no SIMULINK que permita simular o movimento da bola na vertical quando esta choca no solo. Use as sugestões da secção 2 deste guia para programar o diagrama no SIMULINK. Considere um fator de atenuação $\alpha = 0,8$ e suponha que a bola é inicialmente largada de 10m de altura, com uma velocidade inicial nula. Mostre o efeito da variação do fator de atenuação e da velocidade inicial. Mostre o que acontece quando a simulação dura muito tempo (efeito de Zeno, que ocorre quando um número infinito de transições do estado discreto ocorre num intervalo de tempo finito). Nesta pergunta os traçados devem ser feitos em função do tempo.

Para além dos gráficos “estáticos” pode fazer um gráfico animado de uma maneira simples colocando os dados nos vetores t e z no espaço de trabalho do MATLAB e correndo o código seguinte

```
figure
Tfinal=20;
axis([0 Tfinal 0 25])
hold on
curve=animatedline;
set(gca,'Xlim',[0 Tfinal])
for ii=1:length(t)
    addpoints(curve,t(ii),z(ii));
    drawnow
    pause(0.01)
end
hold off
```

P2. Modifique a situação considerada em P1 para o caso em que há perdas por atrito viscoso (proporcional à velocidade). Mostre o efeito do atrito no movimento da bola. Pode supor que o meio em que a bola cai não é o ar, existindo um atrito elevado.

P3. Simule agora a situação em que a bola tem uma velocidade constante segundo a horizontal. Suponha que há uma zona do plano de impacto em que a atenuação é maior do que a outra. Defina valores de impacto para cada uma das zonas e simule. Mostre a evolução (ou seja, a trajetória) da posição da bola no espaço.

P4. Considere agora a situação em que a bola se desloca com velocidade horizontal constante (além do movimento segundo a vertical) e que choca com uma parede. Simule esta situação e mostre a trajetória da bola.

Referência

Para saber mais sobre sistemas híbridos e fenómeno de Zeno pode ver-se o seguinte artigo, que se encontra disponível no IEEEExplore, acessível com o IP do Técnico:

- R. Goebel, R. Sanfelice and A. Teel. Hybrid Dynamical Systems. *IEEE Control Systems*, 29 (2): 28-93, Abril 2009.

– **Fim do trabalho** –

