

Oscilador Torsional

El premio Nobel en física en el año 1970 se otorgó a Hannes Alfvén *“por el descubrimiento de ondas torsionales magnéticas de plasma en la superficie del Sol”*.

El premio Nobel en física en el año 1989 se otorgó a Norman Foster Ramsey *“por su método de campo oscilatorio separado para la construcción del reloj atómico y comprender la frecuencia de transición de partículas a partir del fenómeno de la resonancia magnética”*.

Equipo

- Oscilador Torsional (TeachSpin)
- Generador de voltaje (Tektronix)
- Osciloscopio
- Cuadrantes de latón
- Disco de cobre del rotor con escala angular en radianes
- Estructura de amortiguamiento magnético
- Imanes
- Bobinas de Helmholtz
- Transductor de posición angular
- Computador
- Equipos de Masas del Oscilador Torsional
- Cables

Objetivos

- Entender el fenómeno de las oscilaciones torsionales.
- Medir la constante de torsión en el oscilador torsional.
- Estudiar el torque magnético y las oscilaciones armónicas simples magnéticas.
- Calcular el factor de calidad para oscilaciones amortiguadas.

Conceptos Clave

Oscilación Torsional, posición angular, momentum angular, momentum magnético, torque, bobinas de Helmholtz, amortiguamiento.

Bibliografía

[1] TeachSpin. Torsional Oscillator. Teach Spin, Inc. <https://www.teachspin.com/torsional-oscillator>.

[2] Inc. David A. Van Baak; TeachSpin. TeachSpin's Torsional Oscillator A Conceptual Introduction to the Experiment. *A Brief Introduction to Resonance in the damped, driven simple harmonic oscillator - Workshop Abstract*, 2009. https://advlabs.aapt.org/tcal/files/BriefIntro_TorsionalOscillator.pdf.

[3] James Unwin. Mark Schlossman. PHYS245: Introduction to Vibrations, Waves, and Thermal Physics. Laboratory Manual, 2020. <https://unwin.people.uic.edu/assets/files/245-Lab-manual-2020.pdf>.

[4] The Relaxation Times; TeachSpin. The Torsional Oscillator, Damped and Driven "Bringing the simple harmonic oscillator to life", 2009. <https://drive.google.com/file/d/0B1nZP55TUGJMMXJpd1RzLXpqSzg/view>.

[5] The Relaxation Times; TeachSpin. The Torsional Oscillator Again "Magnetic Torque in Action", November 2008.

Marco teórico

Las oscilaciones torsionales hacen referencia a la rotación de un cuerpo rígido de momento de inercia I con respecto a un hilo fino, a una varilla delgada o a un resorte sobre el cual se suspende. En consecuencia, un oscilador torsional puede comprender varios sistemas mecánicos y electromagnéticos que permitan el desplazamiento angular θ de diversos objetos macroscópicos o microscópicos, ya sea considerando un péndulo simple o partículas dentro de pozos de potencial [1]. Para una masa en forma de disco, sostenida de una cuerda en su centro, la rotación de este sistema con respecto a su posición de equilibrio genera un torque de restauración dado por [2]:

$$\tau = -\kappa\theta, \quad (1)$$

donde κ es la constante de torsión del sistema de laboratorio. En el caso en que consideremos un factor de amortiguamiento b sobre las oscilaciones del disco, relacionado a la velocidad angular del sistema $\frac{d\theta}{dt}$, se llega a la ecuación de movimiento del oscilador torsional [4]:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0. \quad (2)$$

La solución planteada a la ecuación de movimiento se establece de la forma

$$\theta(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad (3)$$

donde A y B son coeficientes dependientes en las condiciones iniciales del sistema y $r_{1,2}$ es dado por:

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2I}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (4)$$

El comportamiento del sistema en referencia a su amortiguamiento se ve representado por el término dentro de la raíz, de manera que en el caso particular subamortiguado en que $\left(\frac{b}{2I}\right)^2 < \omega_0^2$ se tendrá que:

$$\theta(t) = Ce^{-\gamma\omega_0 t} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \gamma^2} + \phi\right), \quad (5)$$

donde se han definido el coeficiente de amortiguamiento $\gamma = b/2\sqrt{\kappa I}$ y la frecuencia angular natural $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I}$. Considerando un torque adicional $\tau_{mag}(t) = \mu B(t) = \mu k i(t)$ generado por interacciones magnéticas debidas a un flujo de corriente a través de bobinas de Helmholtz, se obtiene la ecuación de movimiento forzado del oscilador torsional:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = \mu k i(t), \quad (6)$$

donde μ es el momentum magnético de los imanes del rotor del laboratorio, de valor teórico $13,5 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, $k \approx 3,22 \text{ m} \cdot \text{T/A}$ es la constante de las bobinas de Helmholtz, e $i(t)$ es una corriente sinusoidal dependiente del tiempo [5]. Este torque magnético se implementa de forma tal que pueda balancearse con el torque elástico $\tau_{elastic}$ generado por la torsión de la cuerda, tal que despreciando la dependencia del tiempo de la corriente $i(t)$, se llega que $\tau_{mag} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \mu B \sin(\varphi)$ para un ángulo arbitrario φ , y consecuentemente:

$$\tau_{elastic} + \tau_{mag} = -\kappa\theta + \mu B \sin(\varphi) = 0. \quad (7)$$

Ejercicio 1

1. Calcule el momento de inercial rotacional del disco I' al añadir n masas extras en forma de un cuarto de disco, cada una con masa M , radio interno R_1 y radio externo R_2 . Las masas extra determinan un momento de inercia adicional ΔI al sistema. ¿Cómo se relaciona el período de rotación T con respecto al incremento del momento de inercia ΔI ? ¿Podría determinar, por medio de esta relación, valores experimentales para el momento de inercia inicial I y la constante de torsión κ ? ¿Cómo cambia el período de rotación si las masas extra se distribuyen de forma inequitativa sobre el disco, tal que ocurra un desbalance en el sistema torsional?
2. Investigue sobre las propiedades electromagnéticas de una Bobina de Helmholtz. ¿Por qué resulta necesario usar un par de bobinas para construir la bobina de Helmholtz y no solo una? Determine la constante de Helmholtz k por medio de la geometría de las bobinas. La bobina de Helmholtz ideal se enrolla con respecto a un mismo punto sobre el centro de la bobina, tal que cada uno de los giros de la bobina se encuentran en el mismo lugar. No obstante, no todos los giros del cable pueden

ubicarse en un mismo lugar experimentalmente, por lo que resulta más preciso usar la ley de Biot-Savart para obtener el campo magnético B de la bobina de Helmholtz. Encuentre el campo magnético B debido a una bobina de único giro circular, de radio R , con respecto a un punto que se encuentra a una distancia z del plano de la bobina. Usando el resultado anterior, encuentre el campo magnético por unidad de corriente B/i para un punto al origen de coordenadas debido un par de bobinas de único giro, cada una de radio a , localizadas a z y $-z$ del punto respectivamente. El campo magnético total por unidad de corriente de la Bobina de Helmholtz será dada por el valor anterior multiplicado por N . ¿Cómo se compara este resultado con la constante de Helmholtz k encontrada anteriormente para $N = 201$ y $z = 2,8$ cm?

3. Demuestre las afirmaciones hechas para la ecuación (5). Calcule explícitamente las soluciones para el caso sobreamortiguado y encuentre, para ambos casos, una expresión para el factor de calidad Q en función del número de ciclos $N_{1/2}$ que ocurren antes de que la amplitud del sistema C se disminuya a la mitad de su valor inicial. Investigue sobre distintos métodos para determinar experimentalmente si un sistema torsional se ha ajustado a un amortiguamiento crítico.
4. Determine el cambio en el parámetro b de amortiguamiento en la ecuación (6) en el caso en que la corriente $i(t)$ sea debida solamente a una fem inducida en la bobina de Helmholtz debido al movimiento angular. Exprese sus resultados por medio de la resistencia de la bobina R y una resistencia externa R_{ext} . ¿Que tan significativo resulta este cambio?
5. ¿Qué condición debe cumplir φ con respecto al ángulo θ para llegar a la condición de equilibrio? Recuerde que en el oscilador torsional, la condición inicial se caracteriza por $\varphi = 90^\circ$, pero este debe cambiar con respecto al desplazamiento angular del rotor. Haga un diagrama que muestre su relación geométrica por medio del campo magnético B de las bobinas y el momentum magnético μ de los imanes del rotor.

Montaje y Experimento

El oscilador torsional de TeachSpin se presenta por medio de una alta carcasa de madera sobre una base plana nivelada. A lo largo del oscilador se encuentra una fina fibra de torsión, descrita por un fuerte cable de acero que soporta el peso del disco de cobre puro, para encontrar en la parte baja un transductor de posición angular. [3].

En el centro del eje del rotor se encuentran algunas discos planos montados sobre este: estos discos funcionan como fuertes imanes permanentes colocados idealmente para interactuar con el sistema de la bobina de Helmholtz por medio de dos soportes plásticos de color negro para cada bobina. Se buscará dar uso a esta amalgama entre imanes y bobinas para obtener un transductor de velocidad angular, así como para ejercer un torque externo forzado sobre el oscilador.



Figura 1: Oscilador torsional fabricado por TeachSpin. La estructura principal consiste de una base de aluminio con diferentes componentes conectadas a este. Entre estas se encuentra un disco de cobre con un diámetro de $0,12m$ al igual que una cuerda de piano a base de acero que le permite girar $\pm 90^\circ$ alrededor de este eje vertical. Este sistema permite generar torques por medio de masas que cuelgan de poleas al costado del cuerpo [4]. Tomado de [1].

Con motivo de no tocar directamente el disco de cobre y afectar las oscilaciones del mismo, se incluye una abrazadera de alambre aislada en la parte inferior de la carcasa. Para excitar el movimiento rotacional del oscilador, haga contacto con las yemas de los dedos sobre los extremos de la abrazadera mientras observa a la vez el disco de cobre, de manera tal que advierta como varía la posición cada vez que presiona la abrazadera. Nótese que en la medida que inyecta energía a este sistema comprende cada vez más el concepto de resonancia al tratar de encontrar la frecuencia correcta (la frecuencia natural del oscilador) a la cual se consigue “bombear” esta energía. Sobre el disco de cobre se encuentran, además, amortiguadores magnéticos montados a ambos lados de la carcasa de madera. Use las perillas afuera de la carcasa para acercar o alejar los amortiguadores al disco.

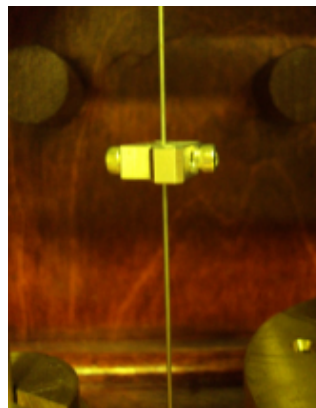


Figura 2: Acercamiento del montaje a la abrazadera de alambre del oscilador torsional. Tomado de [3].

El hilo fino tensado en el montaje funciona como soporte y da lugar a un torque de restauración, en tanto que el disco de cobre provee la mayor parte de la inercia rotacional. El disco posee en su periferia un transportador que permite medir los desplazamientos de la posición angular. Se incorporan factores de amortiguamiento, forzamiento y torques externos por medio de las bobinas de Helmholtz y los imanes localizados bajo la estructura.

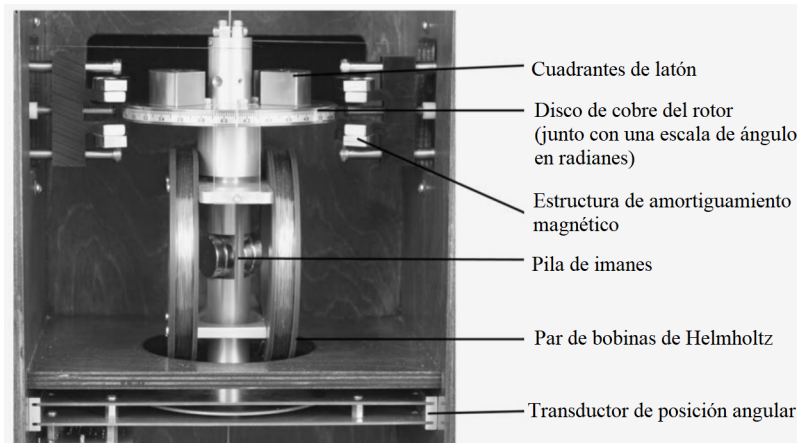


Figura 3: Acercamiento del montaje en el que se resalta la posición de los elementos electromecánicos del sistema. Modificado de [4].

Se emplean dispositivos electrónicos adicionales al oscilador, tal y como un osciloscopio en el que se divise la señal voltaica dada por el oscilador y un generador de voltaje que permita la transmisión de corriente a través de las bobinas de Helmholtz.



Figura 4: Montaje experimental completo. Se observa el oscilador junto al osciloscopio y generador de voltaje. De igual manera se incluyen los aditamentos del oscilador, como las masas y los cuadrantes utilizados.

Calibración del Rotor

Resulta necesario encontrar el punto de equilibrio exacto para disminuir la incertidumbre en los cálculos. Consecuentemente, es menester hacer una calibración por medio de un osciloscopio para el rotor. En la figura 5 se muestra la conexión que se debe realizar al sistema electrónico del oscilador torsional, tal que se conecta la entrada de **ANGULAR POSITION** con un canal del osciloscopio.

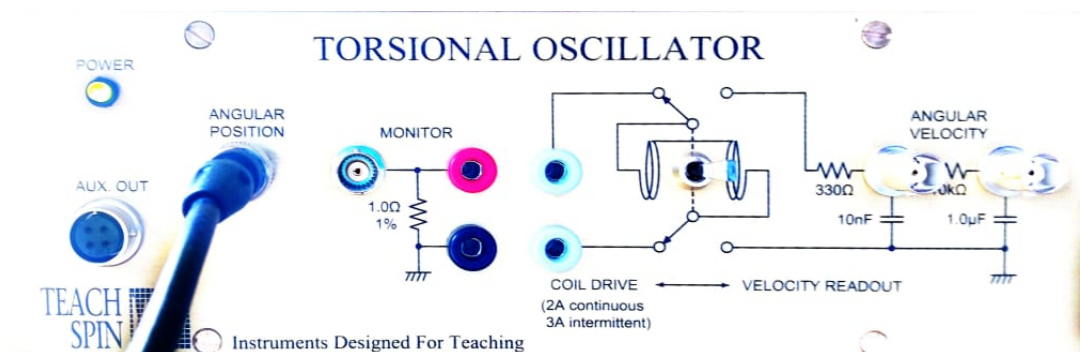


Figura 5: Conexión del tablero electrónico del oscilador torsional para la calibración del rotor.

En el osciloscopio se debe mostrar la señal proveniente del oscilador torsional en formato XT. Una vez completadas las conexiones, se realizan los siguientes pasos:

1. Desplace el rotor 0,1 radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj y observe cómo este busca regresar a su posición de inicio.
2. Inmediatamente después revise el osciloscopio y tome nota del voltaje pico a pico del sistema.
3. Repita los anteriores pasos incrementando la amplitud de la oscilación en 0.1 radianes tras cada repetición. Recuerde determinar una medida positiva como referencia en sus cálculos.
4. Con la ayuda de estos datos haga una regresión lineal y calcule el punto de intersección con respecto al eje horizontal. Este valor determinará el ángulo θ en radianes, según la escala del disco, en el cual el voltaje pico a pico es nulo.
5. Desplace el rotor hacia el ángulo calculado y luego use el parámetro **ZERO ADJUST** para ajustar el punto de equilibrio.

Actividad 1: Aplicación de Torque Mecánico

Use la misma configuración de la calibración del rotor, incluyendo ahora las masas extras del Oscilador Torsional. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Tome un largo hilo adicional que se encuentra en el equipo del Oscilador Torsional y páselo por las dos poleas que se encuentran los laterales de la carcasa, como se muestra en la figura 6.

- Encontrará dos tornillos en la parte superior del eje del rotor en donde se debe envolver el hilo. **Nota:** Debe envolver la cuerda en cada tornillo en sentidos contrarios para que el torque no se cancele. Luego, se colocan las bases de las masas en los dos extremos del hilo, observando que se encuentren en todo momento nivelados.

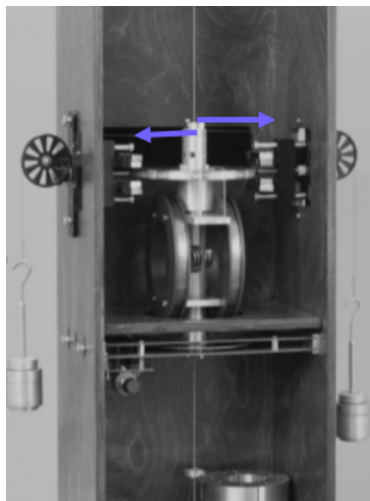


Figura 6: Diagrama del montaje experimental para el torque mecánico. Haciendo un zoom en el rotor y se presentan las direcciones de torsión debidas a las masas adicionales. Tomado de [4].

- Anote la nueva posición del equilibrio cuando se añade las bases de las masas a cada lado. Encuentre el radio del eje del rotor sobre el cual se engancha el hilo. Su valor debe encontrarse entre los valores de 12,7 mm y 25,4 mm. ¿Por qué el radio nominal del eje varía entre estos valores?
- Comience por colocar en las bases laterales masas de 500 gramos a ambos lados, e incremente los valores de las masas forma coherente hasta llegar 900 gramos, anotando en cada caso el punto de equilibrio.
- Repita los pasos anteriores cambiando la orientación de envoltura del hilo en los tornillos. Obtendrá de esta forma un torque negativo con respecto a sus datos iniciales. Nótese de esta forma que el signo del torque depende de la orientación de la envoltura.
- Haga una gráfica de τ versus $\Delta\theta$. ¿En qué magnitud afecta el torque gravitacional al sistema? Halle la constante de torsión κ del oscilador torsional y compare con su resultado con el valor teórico $\kappa_{teo} = 0,058 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$.

Actividad 2: Momento Inercial

Por medio de los cuadrantes de latón del equipo del oscilador torsional se verificará la dependencia del periodo del Oscilador Torsional con respecto a su momento inercial. Tome nota del radio interior y exterior de los cuadrantes de latón que utilizará y siga los siguientes pasos:

- Use la configuración de la calibración del rotor para conectar el osciloscopio al equipo del oscilador torsional. Ubique en el osciloscopio los cursores sobre la escala temporal para la medición de periodos.
- Tome nota del periodo de la oscilación con respecto a su momento de inercial inicial usando los cursores temporales del osciloscopio para cada ciclo. Cuando tenga una medida clara del período de oscilación, use el botón **STOP** para pausar la toma de datos.
- Coloque los cuadrantes del latón sobre el rotor y registre el período usando nuevamente los cursores temporales.
- Use estos datos para graficar el periodo de oscilación T con respecto al número de masa añadidas N . Determine el momento de inercia inicial I y el valor de la constante de torsión κ . ¿Concuerdan sus resultados con la actividad anterior?

Actividad 3: Aplicación Torque Magnético

Para la realización de un torque magnético externo al Oscilador Torsional, use la configuración mostrada en la figura 7, debe conectar una fuente de corriente DC. Realice las siguientes medidas:



Figura 7: Esquema de las conexiones del generador de voltajes y el oscilador torsional. Conecte la entrada de **ANGULAR POSITION** a un canal del osciloscopio, a la vez que las conexiones del diagrama del circuito del Oscilador Torsional se ubican por medio de la entrada **COIL DRIVE** al generador de voltajes.

- Mida con un amperímetro la corriente y anote la nueva posición de equilibrio del Oscilador Torsional. Tome al menos 20 valores diferentes con corrientes positivas y negativas respetando los rangos permitidos para la deformación angular.
- Grafique los datos de la corriente $i(t)$ con respecto a la posición angular $\Delta\theta$. Comente sobre sus resultados. ¿Para qué valores de $\Delta\theta$ obtiene una regresión lineal? ¿Cómo puede mejorar la relación lineal entre ambas variables? Determine el valor experimental del momentum magnético μ para el imán que se encuentra entre las bobinas.

Actividad 4: Amortiguamiento

Utilice nuevamente la configuración de la calibración y considere las perillas de los amortiguadores magnéticos para que estos se acerquen simétricamente al rotor:

- Primeramente, desplace al disco de cobre de su posición de equilibrio y observe en el osciloscopio la evolución de las oscilaciones con respecto al amortiguamiento. Determine el tipo de amortiguamiento que observa.
- Pause la señal por medio del botón **STOP** y calcule las posiciones y los tiempos respectivos para las crestas y valles del amortiguamiento.
- Realice los anteriores pasos para otras 2 posiciones distintas de los amortiguadores magnéticos.
- Realice con estos datos una regresión para hallar los valores del factor de calidad Q de cada amortiguamiento. Comente sobre sus resultados. ¿Son iguales los factores de calidad para cada caso? ¿Por qué?

Actividad 5: Resonancia

- Conecte un generador de señales a las entradas de las bobinas y tome medidas de amplitud y fase como función de la frecuencia colocada en el generador. Para medir la amplitud y fase use el osciloscopio. Tome los suficientes datos para ver el comportamiento de resonancia cerca del valor de la frecuencia natural de oscilación del sistema. No olvide tener el sistema amortiguado y esperar un tiempo antes de tomar los datos de amplitud. Si ve un fenómeno de batido (beats) debe esperar más tiempo a que desaparezca.
- Indique la solución a la ecuación (6) para una corriente que oscila y realice el ajuste correspondiente a los datos tomados de la fase y la amplitud. A partir del ajuste encuentre la frecuencia de resonancia y el amortiguamiento γ .
- Repita la medición para al menos 3 valores diferentes de amortiguamiento. Es decir, debe cambiar la estructura de amortiguamiento.