

Oscilador torsional

Andrés Felipe Arias* and María Margarita Ruiz**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 27 de septiembre de 2024)

Esta práctica tenía como objetivo la observación de fenómenos de oscilación torsional, por lo cual se estudiaron oscilaciones magnéticas y amortiguadas para calcular la constante de torsión y el factor de calidad para amortiguadas. A partir del torque mecánico respecto a la desviación angular, se obtuvo la constante de torsión $k = 0,084 \pm 0,004 Nm/rad$. También se calculó esta constante observando cómo cambia el periodo cuando cambia el momento de inercia, obteniendo $k = 0,0143 \pm 0,0005 Nm/rad$. Se encontró el momento magnético de las bobinas de Helmholtz del montaje de $\mu = 10,80 \pm 0,006 NM/T$. En cuanto al factor de calidad para oscilaciones amortiguadas, el promedio de este es $4,321 \pm 0,046$ con error porcentual de 4,6 % y a 4,5 sigmas del valor real. Por último, se encontró la frecuencia natural del sistema observando la respuesta del sistema a oscilaciones forzadas, $\omega_0 = 137,420 \pm 0,3 mHz$.

I. INTRODUCCIÓN

La construcción de péndulos torsionales ha permitido la medición de fuerzas con mayor precisión que métodos análogos tales como el uso de balanzas, por lo cual han sido de gran importancia histórica para el desarrollo del pensamiento científico. Por ejemplo, Henry Cavendish calculó la constante de gravitación universal G , en 1778, haciendo uso de un péndulo de torsión de 2 metros de largo y masas compuestas de plomo en cada extremo [1]. Esto le permitió realizar estimaciones respecto a la masa y densidad de la tierra mucho más exactas a las realizadas previamente en la historia.

Un oscilador torsional se caracteriza por tener algún tipo de desplazamiento angular en un sistema mecánico o electromagnético, pudiendo ser a escala macroscópica o microscópica. Tomando el caso particular de un disco colgando de una cuerda, la rotación del sistema respecto a un punto de equilibrio genera un torque de rotación $\tau = -k\theta$, donde k es la constante de torsión.

Adicionalmente, si se toma un factor de amortiguamiento b para el disco, se obtiene una ecuación diferencial en términos del momento de inercia I y este factor. El momento de inercia representa la inercia rotacional del disco y es directamente proporcional a qué tan difícil es alterar la rotación del objeto.

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación diferencial tiene la siguiente solución:

$$\theta(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (2)$$

La manera en la que oscila el sistema depende de la frecuencia angular ω_0 y los ceros r_1 y r_2 de la solución a la ecuación diferencial dados por:

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4I^2}\right) - \omega_0^2} \quad (3)$$

Las diferentes maneras en las que puede oscilar el sistema son: amortiguada críticamente ($\omega_0^2 = b^2/4I^2$), subamortiguada ($\omega_0^2 > b^2/4I^2$) o sobreamortiguada ($\omega_0^2 < b^2/4I^2$). Las oscilaciones sobreamortiguadas se describen por una exponencial junto con cosenos y senos hiperbólicos, mientras que las críticamente amortiguadas se describen por una exponencial. Por esto, las sobreamortiguadas oscilan brevemente antes de decaer exponencialmente, mientras que las críticamente amortiguadas son las que decaen con mayor rapidez.

En el caso de las subamortiguadas se sigue la siguiente ecuación:

$$\theta(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega' t \sqrt{1 - \gamma^2} + \phi) \quad (4)$$

Si se tiene un flujo de corriente habrían interacciones magnéticas que transformarían la ecuación diferencial en una no homogénea al ser igual al torque magnético generado, $\tau_{mag}(t) = \mu B(t) = \mu k i(t)$. Con esto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + k\theta = \mu k i(t) \quad (5)$$

En la ecuación, μ se refiere al momento magnético de los imanes del rotor con un valor teórico de $13,5 A \cdot m^2$, k es la constante para las bobinas de Helmholtz con valor de $3,22 m \cdot T/A$ e $i(t)$ es la corriente a través del tiempo de forma sinusoidal. La fibra genera un torque elástico, $\tau_{elastic}$, que tiene una relación de equilibrio con el torque magnético. Al despreciar la dependencia temporal de la corriente, se obtiene que el torque magnético $\mu B \sin(\phi)$ (ϕ es un ángulo arbitrario), por lo que se obtiene que:

$$\tau_{elastic} + \tau_{mag} = \mu B \sin(\phi) - k\theta = 0 \quad (6)$$

* Correo institucional: a.ariasv@uniandes.edu.co

** Correo institucional: mm.ruiz31@uniandes.edu.co

Esta práctica tiene como objetivo la observación de fenómenos de la oscilación torsional, tales como el torque magnético, mecánico y las oscilaciones amortiguadas. Por esto, se tiene como propósito medir la constante de torsión k , la frecuencia de resonancia y el factor de calidad en casos de subamortiguamiento.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

A. Montaje

El montaje completo del oscilador, fabricado por TeachSpin, consiste en un oscilador torsional instalado sobre una carcasa de madera con base nivelada 1. Este contiene una base de aluminio y un disco de cobre de diámetro de 0.12m, además de una cuerda de piano de acero que genera la rotación de -90° a 90° en torno al eje vertical, representando la fina fibra de torsión.

Adicionalmente, se tiene una abrazadera sobre la fibra para evitar el contacto con el disco de cobre y afectar las oscilaciones al forzarlas.



Figura 1. Montaje completo del oscilador.

En cuanto al funcionamiento electromecánico, el montaje referente a este se observa en la figura 2. El cable sostiene un disco de cobre puro y contiene, en la parte inferior, un transductor de posición angular para traducir la posición a un pulso eléctrico que pueda ser leído por un osciloscopio. En el centro del eje del rotor se ubican imanes para que interactúen con las bobinas de Helmholtz y se genere el torque magnético forzado. De manera adicional, se tienen amortiguadores magnéticos a cada lado que son ajustables con una perilla para reducir o aumentar el grado de amortiguamiento. Para medir la variación del periodo respecto al momento de inercia del disco se usan cuadrantes de latón posicionados sobre este.

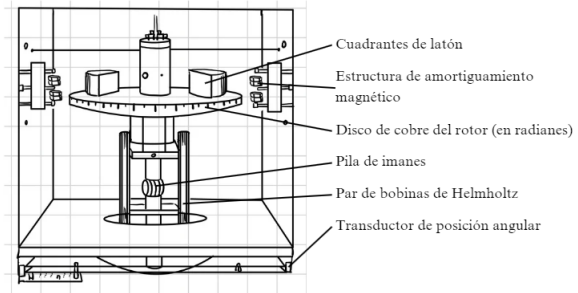


Figura 2. Diagrama de elementos electromecánicos del oscilador. En el diagrama se ilustra la organización del núcleo del oscilador torsional, con los componentes necesarios para la torsión mecánica y magnética, el amortiguamiento de la oscilación y la medición de la posición angular.

B. Procedimiento experimental

1. Calibración del rotor

Con el fin de garantizar una adecuada toma de datos, se debe encontrar el desfase de la posición de equilibrio para calibrarla con los datos. Para ello se monitorea la posición angular del rotor usando un osciloscopio conectado a la entrada ANGULAR POSITION del montaje. Luego, se desplaza el rotor en desplazamiento con un paso de 0,1 radianes en contra de las manecillas del reloj, realizando un barrido para el voltaje registrado en el osciloscopio. A partir de esto, se hace una regresión lineal entre el ángulo medido y el voltaje del rotor, donde la posición de equilibrio equivale al intercepto con el eje. Este valor se ajusta posteriormente con el parámetro ZERO ADJUST.

2. Aplicación de Torque Mecánico

Usando los hilos adicionales del montaje, estos se envuelven en el tornillo del rotor con direcciones opuestas y se pasan por las poleas a ambos lados de la carcasa de madera. Luego, se añaden las bases de los juegos de masa a cada extremo del hilo, tomando la nueva posición de equilibrio. Posteriormente, se añaden masas hasta llegar a los 450g por cada masa, anotando la variación de la posición de equilibrio. Finalmente se invierte la dirección de los hilos, es decir, la orientación de los torques, y se repite el mismo proceso.

3. Momento Inercial

Conectando el rotor al osciloscopio, se usan los cursores de escala temporal para hallar el periodo de osci-

lación original del rotor. Luego, se añaden progresivamente los cuadrantes de latón (de manera simétrica) y se registra nuevamente el valor del periodo.

4. Aplicación de Torque Magnético

Conectando el osciloscopio a la entrada ANGULAR POSITION y un generador de voltajes a las entradas COIL DRIVE, enviando una señal DC. Usando un amperímetro, se mide la corriente que pasa por la bobina y se anota la nueva posición de equilibrio del rotor, realizando un barrido de 20 valores tanto positivos como negativos.

5. Amortiguamiento

Usando la configuración inicial para la calibración, se usan las perillas de los amortiguadores magnéticos para acercarlos al rotor y realizar tomas para los 3 tipos diferentes de amortiguamiento, tomando 4 series para el subamortiguamiento.

6. Resonancia

Conectando el generador de señales a la entrada COIL DRIVE, se envía una señal sinusoidal, variando la frecuencia de 700mHz a 1Hz con un paso de 20mHz. Se registran valores de fase y amplitud, centrándose en el efecto de resonancia que se espera alrededor de la frecuencia de oscilación natural. Se repitió el proceso para 3 modos diferentes de amortiguamiento.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A. Calibración del rotor

Se realizaron las mediciones de la amplitud del voltaje de salida del oscilador, cambiando la posición angular del rotor. Los datos se muestran en la figura 3. Con una regresión lineal se puede encontrar de manera analítica el punto de equilibrio, correspondiente con el intercepto donde la amplitud medida es cero. Se encontró el valor $\theta_0 = 3,01 \pm 0,01 \text{ rad}$ el cual se tomo como el origen de los datos de posición angular.

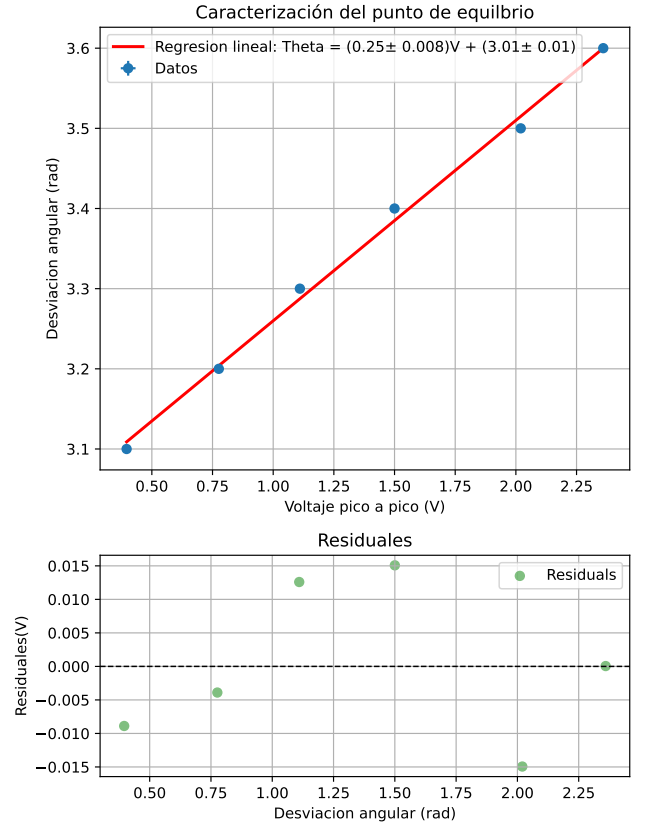


Figura 3. Amplitud del voltaje medido por el osciloscopio en función de la posición angular. Mediante un ajuste lineal se encontró el intercepto $\theta_0 = 3,01 \pm 0,01 \text{ rad}$.

B. Mediciones

1. Torque mecánico

Se observó como cambiaba la posición de equilibrio cuando se aplicaba un torque mecánico al rotor mediante las pesas. Para ello se usó un amortiguamiento magnético alto y se dejó que el rotor llegara totalmente al reposo. Los datos se muestran en la figura 4. Se ajustó una regresión lineal con pendiente $m = 0,083 \pm 0,004$ e intercepto $b = 0,0007 \pm 0,002$. Se observa que el torque muestra una tendencia no lineal lejos del origen, de forma que sugiere la necesidad de un término cúbico. Esto es de esperarse, ya que en general las fuerzas de restitución elásticas no se comportan de manera lineal, pero la aproximación a primer orden es suficiente en la mayor parte de los casos. La pendiente de la recta corresponde a la constante de torsión elástica de la cuerda:

$$K = 0,083 \pm 0,004 \text{ Nm/rad} \quad (7)$$

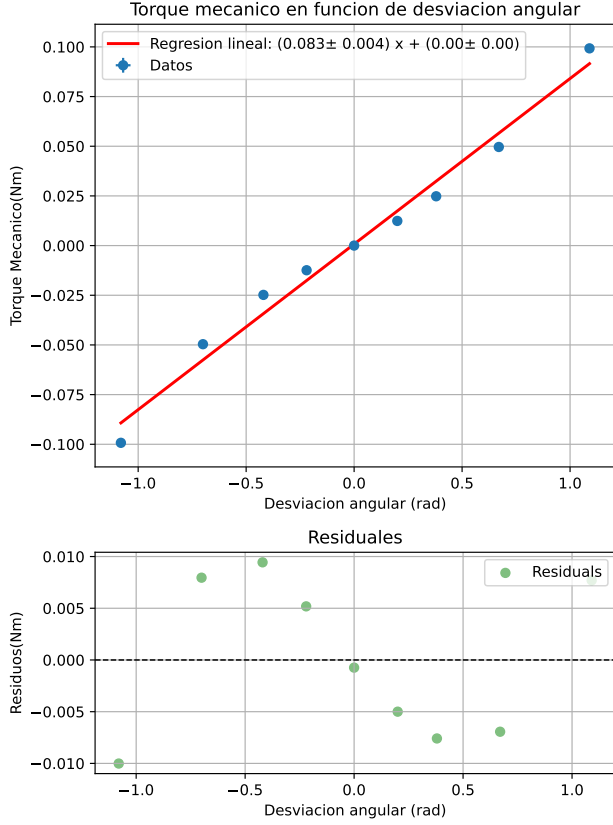


Figura 4. Torque mecánico aplicado al rotor en función de su nueva posición de equilibrio. Se ajustó un modelo lineal cuya pendiente corresponde a $K = 0,083 \pm 0,004 \text{ Nm/rad}$. Se observa por los residuales que el torque sigue una tendencia no lineal, sugiriendo la necesidad de un término de orden superior.

2. Momento de inercia

El momento de inercia de cada sección circular de masa $M = 212g$ se puede calcular como $I_n = \frac{M}{2}(R1^2 + R2^2)$. Usando la conservación de momento angular podemos llegar a la siguiente relación entre el periodo del rotor T y el numero de secciones que se añaden N :

$$T^2 = \frac{\pi^2 M (R1^2 + R2^2)}{2K_t} N + \frac{4\pi^2}{k} \quad (8)$$

Así podemos calcular la constante de torsion utilizando la regresión lineal de la figura 5:

$$k_t = 0,0143 \pm 0,005 \text{ Nm/rad} \quad (9)$$

De manera similar usando el intercepto podemos calcular el momento de inercia del rotor:

$$I = (4,7 \pm 0,002) \times 10^{-4} \text{ kgm}^2 \quad (10)$$

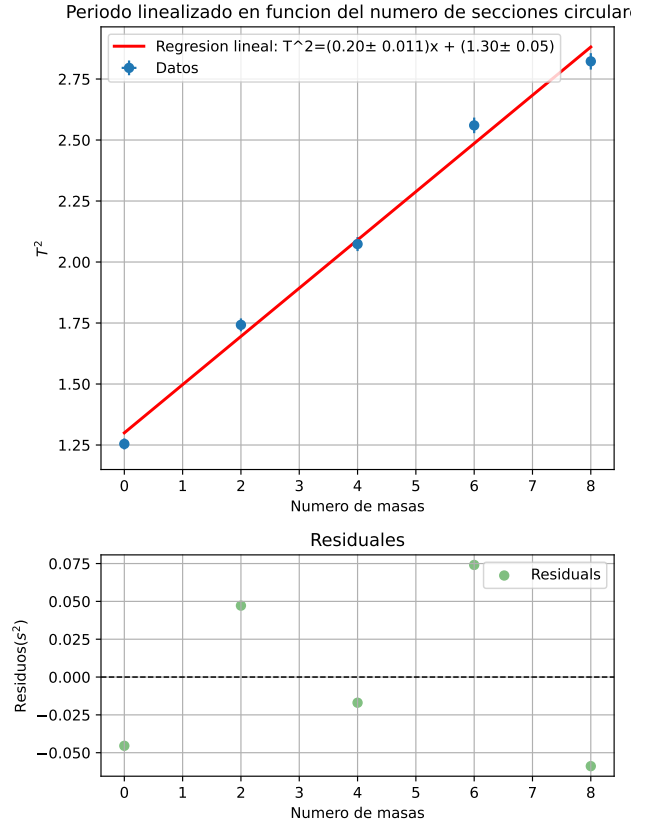


Figura 5. Cuadrado del periodo en función del numero de secciones circulares añadidas al rotor. Se ajusto un modelo lineal con pendiente $m = 0,20 \pm 0,1$ e intercepto $b = 1,30 \pm 0,05$, de los cuales es posible obtener la constante de torsión y el momento de inercia del disco según la ecuación 8

3. Torque magnético

Se realizaron 20 medidas de la desviación angular en función de la corriente de las bobinas. Como el torque mecánico generado por la torsión debe igualarse con el torque magnético de la bobina de momento magnético μ en un campo magnético B :

$$\theta \tau = \mu B \quad (11)$$

Así mismo, conociendo la geometría de las bobinas podemos relacionar el campo magnético de la bobina con su corriente con la relación $B = kI$ donde k se conoce como la constante de Helmholtz [2], y para el

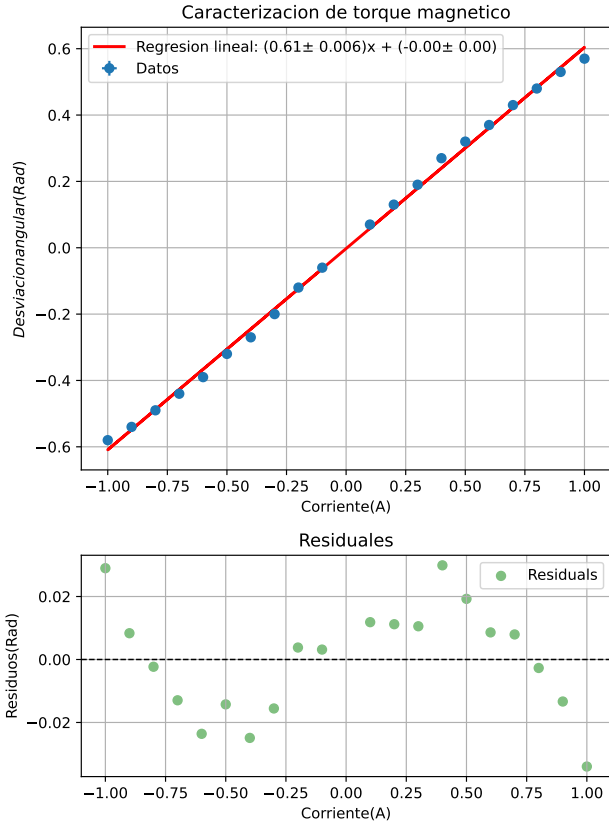


Figura 6. Desviación angular del rotor en función de la corriente aplicada por las bobinas de Helmholtz. se realizó un ajuste lineal con pendiente $0,606 \pm 0,006$ con la cual se calculó el momento magnético de la bobina (13)

montaje experimental de $N = 201$ vueltas y radio $a = 0,05588m$ tiene un valor de:

$$k_H = 3234 \text{ times } 10^{-6} T/A \quad (12)$$

Con ello podemos calcular el momento magnético de la bobina, mediante la regresión lineal de la 6. De los residuales de esta gráfica podemos observar que de manera similar a el torque mecánico, la tendencia se vuelve no lineal para valores altos de desviación angular. Teniendo en cuenta que la pendiente de la regresión corresponde a $m = \frac{k_t \mu}{k_H}$, obtenemos usando la constante de torsión teórica de $K_t = 0,0576 Nm/rad$ [3]:

$$\mu = 10,80 \pm 0,06 NM/T \quad (13)$$

4. Amortiguamiento

Inicialmente, se tomaron los valores de voltaje respecto al tiempo para oscilamiento crítico y sobreamortiguado.

do, obteniendo el comportamiento visible en las figuras 7 y 8.

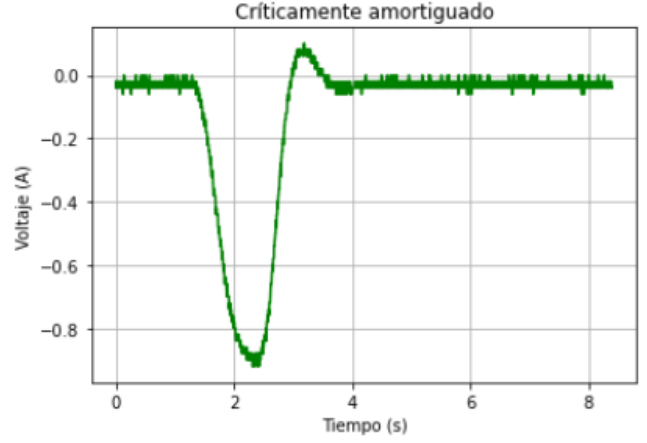


Figura 7. Oscilación críticamente amortiguada. Gráfica de voltaje respecto a tiempo para amortiguamiento crítico; se observa un decaimiento exponencial rápido acorde a la solución a la ecuación diferencial.



Figura 8. Oscilación sobreamortiguada. Gráfica de voltaje respecto a tiempo para sobreamortiguamiento; tiene decaimiento en forma exponencial y de cosenos y senos hiperbólicos

Posteriormente, se realizaron 4 tomas de datos para el caso subamortiguado, alterando el grado de amortiguamiento con las perillas para los amortiguadores magnéticos. A cada caso subamortiguado se realizó un ajuste con la forma de la solución de la ecuación diferencial:

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma/2} \cos(\omega t + \delta) \quad (14)$$

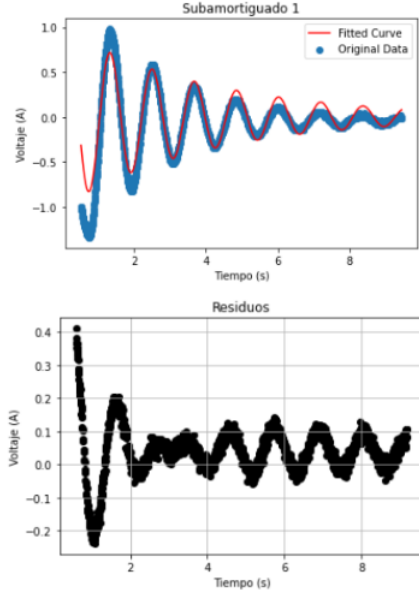


Figura 9. *Toma 1: Subamortiguamiento.* Se realizó el ajuste exponencial y cosenoidal, obteniendo $\gamma = 0,61 \pm 7,61 \cdot 10^{-5}$, $\omega = -5,42 \pm 8,10 \cdot 10^{-5}$ y $\delta = 4,22 \pm 2,11 \cdot 10^{-4}$.

Se observa que para todos los casos de subamortiguamiento los residuos se encuentran centrados en 0 en su mayor parte, lo que indica que el ajuste realizado junto con los parámetros predichos son adecuados para la tendencia de datos en las figuras 9, 10, 11, 12.

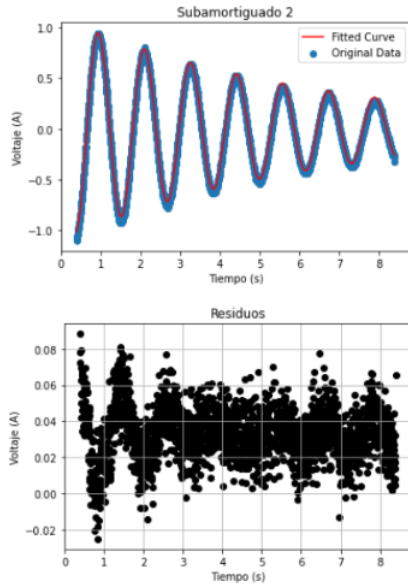


Figura 10. *Toma 2: Subamortiguamiento.* Se realizó el ajuste exponencial y cosenoidal, obteniendo $\gamma = 0,32 \pm 6,10 \cdot 10^{-5}$, $\omega = -5,42 \pm 4,20 \cdot 10^{-5}$ y $\delta = 1,96 \pm 8,81 \cdot 10^{-4}$.

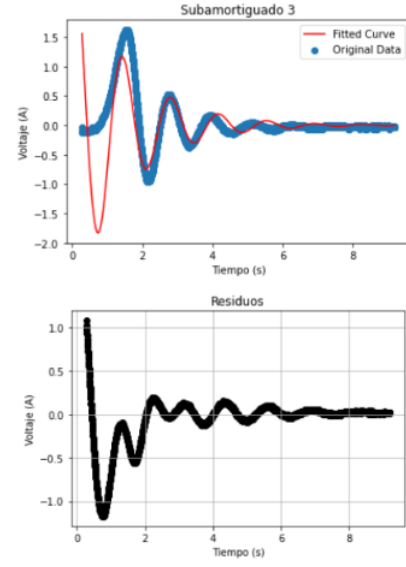


Figura 11. *Toma 3: Subamortiguamiento.* Se realizó el ajuste exponencial y cosenoidal, obteniendo $\gamma = 1,314 \pm 5,50 \cdot 10^{-4}$, $\omega = -4,59 \pm 2,10 \cdot 10^{-4}$ y $\delta = -3,58 \pm 1,10 \cdot 10^{-4}$.

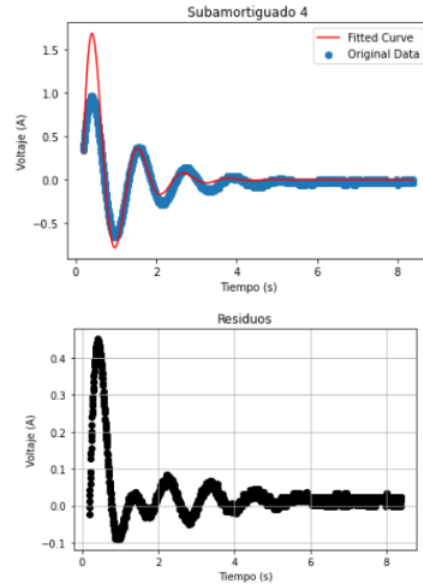


Figura 12. *Toma 4: Subamortiguamiento.* Se realizó el ajuste exponencial y cosenoidal, obteniendo $\gamma = 2,71 \pm 8,11 \cdot 10^{-4}$, $\omega = 5,54 \pm 3,41 \cdot 10^{-4}$ y $\delta = -5,62 \pm 2,20 \cdot 10^{-4}$.

A partir de las regresiones realizadas se encuentran los valores para γ y ω , con lo que se calcula el factor de calidad para cada caso I, siguiendo la ecuación $Q = \omega_0/\gamma$, donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + (\gamma/2)^2} \quad (15)$$

Subamortiguamiento	$N_{1/2}$	$QN_{1/2}$
1	2	$4,439 \pm 0,001$
2	4	$4,241 \pm 0,003$
3	0.8	$4,406 \pm 0,001$
4	0.5	$4,2 \pm 0,006$

Cuadro I. *Factor de calidad.* Usando los valores calculados para γ y ω con las regresiones, se obtiene el valor del factor de calidad en términos de los ciclos antes de que la amplitud disminuya a la mitad.

El valor calculado para el factor de calidad es cercano al teórico de $4.53 N_{1/2}$, donde $N_{1/2}$ corresponde a la cantidad de ciclos que ocurren antes de que la amplitud disminuya por un factor 1/2 de la amplitud original. Los residuales tienen forma similar a la ecuación de ajuste pero se encuentran centrados en 0, por lo que se concluye que el ajuste realizado es adecuado 9, 10, 11, 12.

Finalmente, se obtiene un valor de $Q = 4,321 \pm 0,046$ para el promedio de los 4 casos del oscilamiento amortiguado, teniendo un error porcentual de respecto al valor real, reportado como $Q = 4,53N_{1/2}$.

5. Resonancia

Las amplitudes de las oscilaciones se graficaron en función de la frecuencia angular de la señal de forzamiento para tres valores de amortiguamiento magnético diferentes (Figura 13). Para realizar la medición de amplitud fue necesario esperar a que el movimiento se estabilizara en un movimiento puramente sinusoidal, ya que la superposición de oscilaciones al cambiar la frecuencia de la señal externa hace que se observe el fenómeno de pulsaciones. Las oscilaciones forzadas con una señal externa de frecuencia ω siguen soluciones estacionarias sinusoidales de la forma $\theta(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \phi)$, con amplitud[4]:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (16)$$

Donde ω_0 es la frecuencia natural de oscilación del sistema. Esta función se maximiza en el valor $\omega\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$. A las series de datos de la forma de la ecuación 16 se les ajustó un modelo Lorentziano de la forma de la ecuación 16. De los residuales de la figura 13 podemos observar que el modelo se ajusta de manera muy acertada a los

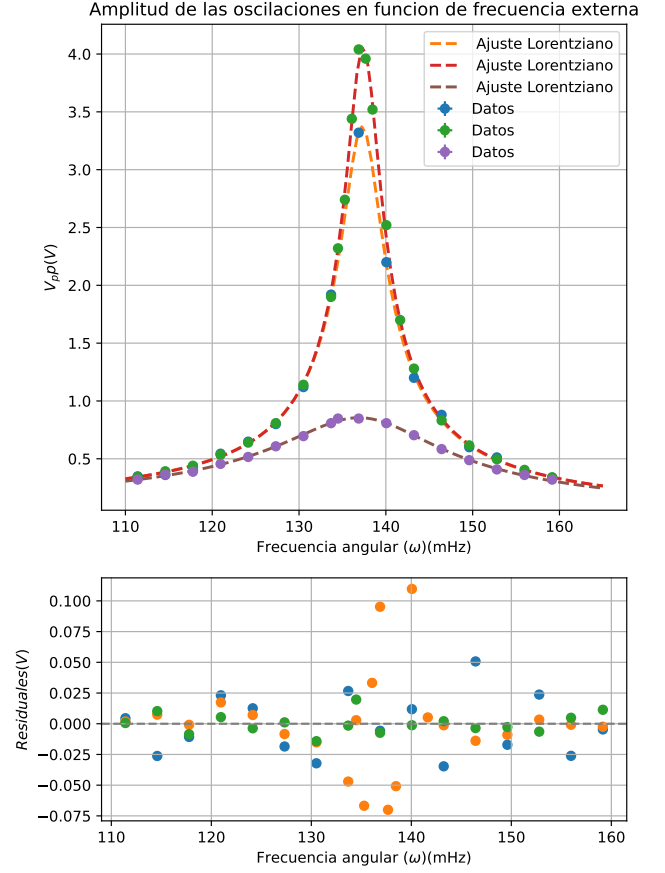


Figura 13. Amplitud de las oscilaciones del rotor en función de la frecuencia angular de la señal externa: Se observan claramente las curvas de resonancia de forma lorentziana, de acuerdo con el modelo teórico. Del fit obtenemos los factores de calidad para cada curva, de mayor a menor amplitud: $Q = 34,6 \pm 0,5 \times 10^{-3}$, $Q = 28,6 \pm 0,4 \times 10^{-3}$, $Q = 7,40 \pm 0,09 \times 10^{-3}$. De las curvas también obtenemos la frecuencia natural del sistema de $\omega_0 = 137,42 \pm 0,03 \text{ mHz}$

datos experimentales. Así mismo, se observa claramente el fenómeno de resonancia para frecuencias cercanas a la frecuencia natural de oscilación del sistema. Se observa que de acuerdo a la ecuación 16 la amplitud de oscilación crece rápidamente para regiones cercanas a la frecuencia natural del sistema, pero alcanza su valor máximo antes que esta frecuencia. Así mismo, podemos observar que los máximos se acercan a ω_0 a medida que la amplitud de la serie aumenta, es decir, su amortiguamiento disminuye. Con la ecuación 16 podemos encontrar los valores de ω_0 y γ directamente del ajuste. Así mismo podemos calcular el factor de calidad como $Q = \omega_0/\gamma$. Los resultados se muestran en la tabla II.

$\omega_0(mHz)$	$\gamma(1/s)$	$Q \times 10^3$
$137,41 \pm 0,02$	$3,96 \pm 0,06$	$34,6 \pm 0,5$
$137,31 \pm 0,04$	$4,80 \pm 0,07$	$28,6 \pm 0,4$
$137,53 \pm 0,09$	$18,5 \pm 0,2$	$7,40 \pm 0,09$

Cuadro II. Frecuencia natural de oscilación, factor de amortiguamiento y factor de calidad obtenidos a partir del fit Lorentziano de las series de la figura 13. Obtenemos una frecuencia natural de oscilación promedio de $\omega_0 = 137,42 \pm 0,03mHz$

IV. CONCLUSIONES

Inicialmente, observamos que los valores de la constante de torsión para la toma de datos de torque mecánico y la de momento de inercia no concuerdan entre sí. Así mismo, ambas bastante alejadas del valor teórico de $k_{teo} = 0,0576Nm/rad$, con una desviación de $\approx 6\sigma$ y $\approx 11\sigma$ respectivamente. Esto puede ser debido a que los datos no se ajustan adecuadamente a la tendencia lineal que propone el modelo. Así mismo, existió un gran error experimental en la medición de la desviación angular y los radios de los elementos debido a que se usaron métodos análogos poco precisos. Es posible que en la toma de datos de momentos de inercia no se haya removido completamente el amortiguamiento magnético del rotor, haciendo inválida la suposición de la conservación de momento angular. Por otro lado, las corrientes inducidas en la bobina por los imanes del rotor también generan un campo magnético que interactúa con el oscilador, afectando las mediciones del periodo.

Por otro lado, la medición del momento magnético también se aleja significativamente del valor teórico de $\mu_{teo} = 13,5Am^2$ con una desviación de 45σ . Esto indica que el procedimiento experimental fue inadecuado, o que en la propagación de errores no se consideró adecuadamente las incertidumbres de las mediciones experimentales. Otro factor que puede afectar las medidas es la respuesta no lineal de la bobina de Helmholtz.

En cuanto a las oscilaciones amortiguadas, gráficamente se observa que el comportamiento es coherente con la solución a la ecuación diferencial para caso. En especial para el caso subamortiguado se observa que el promedio para el factor de calidad es cercano al real al tener un bajo error porcentual y alta precisión, demostrando la relación entre la energía almacenada y liberada por el oscilador durante el movimiento amortiguado. Adicionalmente, los ajustes realizados con el método Nelder-Mead de Scipy resultan adecuados para modelar el movimiento amortiguado con forma exponencial y cosenoidal.

Por ultimo, se observó al someter el sistema a oscilaciones forzadas la curva característica del fenómeno de resonancia, a una precisión experimental aceptable, ya que el ajuste del modelo teórico concuerda muy bien con los datos medidos. Se observó como la amplitud de las oscilaciones aumenta súbitamente alrededor de una frecuencia específica, correspondiente a un valor cercano a la frecuencia natural de oscilación del sistema. Así mismo, se observó como la posición de los máximos se acercaba a el valor de la frecuencia natural cuando se disminuía el amortiguamiento. En adición, los valores calculados de ω_0 son muy cercanos entre las tres series, obteniendo un promedio con una precisión alta y un error porcentual bajo del 0,02%.

-
- [1] H. Cavendish, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **88**, 469 (1798), <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1798.0033>.
 - [2] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to quantum mechanics*, third edition ed. (Cambridge University Press, Cambridge ; New York, NY, 2018).
 - [3] U. de los Andes, *Oscilador Torsional, Guías de laboratorio intermedio* (2024).
 - [4] J. P. S. y Yenny Hernández, *Ondas y fluidos* (Facultad de Ciencias Universidad de los Andes, 2023).
 - [5] K. W. Vugrin, L. P. Swiler, R. M. Roberts, N. J. Stucky-Mack, and S. P. Sullivan, Water Resources Research **43** (2007), <https://doi.org/10.1029/2005WR004804>.

APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

Los códigos donde se realizan los ajustes con su respectiva incertidumbre se encuentran a conti-

nuación: https://github.com/andresarias1105/Experimentos/blob/main/Oscilador_fit.ipynb, https://github.com/margarita1509/intermedio_mmrui31

Las incertidumbres de los parámetros de las regresiones son obtenidos directamente de la función *Curvefit* de Scipy, la cual estima el error basándose en una aproximación lineal a la función modelo alrededor de los valores óptimos.[5].

Para la propagación de error se usó la formula:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \sigma_z\right)^2 + \dots} \quad (17)$$

Para la regresión lineal se utilizaron las siguientes formulas:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (18)$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (19)$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{n \sum (y_i - mx_i - b)^2}{(n-2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)}} \quad (20)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\left(1 + \frac{(\sum x_i)^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\right) \frac{\sum (y_i - mx_i - b)^2}{n(n-2)}} \quad (21)$$

Para los valores promedios, se tomó el error como la desviación estándar de los valores experimentales, dividido por la raíz del doble del numero de datos -1:

$$s = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}}{\sqrt{2N-1}} \quad (22)$$

De acuerdo con la ecuación de propagación de errores, los errores de las variables calculadas son:

$$\sigma_{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\sqrt{w^2 + \gamma^2/4}} \sigma_\omega\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\sqrt{w^2 + \gamma^2/4}} \sigma_\gamma\right)^2} \quad (23)$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma} \sigma_{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\gamma^2} \sigma_\gamma\right)^2} \quad (24)$$