

Torque Magnético

Andrés Felipe Arias* and María Margarita Ruiz**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 7 de noviembre de 2024)

Este experimento tiene como objetivo observar el efecto del torque magnético sobre la dinámica y comportamiento de un imán, además de la caracterización del campo magnético al que se somete. Se realizaron tres procesos experimentales para calcular momento magnético del imán. Calculando el campo magnético de equilibrio se obtiene el momento magnético del imán, correspondiente a $\mu = (0,418 \pm 0,008)Am^2$, que está a $2,25\sigma$ del valor teórico y tiene un error de 4,5 %. Observando los periodos de oscilación armónica en el montaje se obtuvo $\mu = (0,3 \pm 0,1)Am^2$, que está a 1σ del valor teórico y tiene un error de 33 %. Observando las frecuencias de precesión se calculo un valor de $\mu = (0,41 \pm 0,03)Am^2$, a $< 1\sigma$ del valor teórico, con un error de 7,3 %. Por ultimo, se caracterizó de manera cuantitativa el fenómeno de la resonancia magnética.

I. INTRODUCCIÓN

Un objeto magnetizado produce un campo magnético que, consecuentemente, genera un momento magnético. El vector de momento magnético $\vec{\mu}$, caracteriza la magnitud y otras propiedades del campo magnético; es paralelo al vector de área normal a la superficie, \vec{A} . En el caso que se tenga un campo magnético uniforme, se produce un torque magnético causado por la fuerza magnética, definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (1)$$

El torque magnético es máximo si el momento y el campo son perpendiculares, debido a la naturaleza del producto cruz, y es 0 cuando son paralelos, lo que ocurre en la posición de equilibrio [1]. En el caso en que el campo magnético no sea uniforme, la fuerza neta no es 0 y está dada por:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = (\vec{\nabla}\vec{\mu}) \cdot \vec{B} + (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (2)$$

Debido a que el momento magnético es constante, se obtiene que la fuerza es equivalente a:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (3)$$

Es importante notar que el momento magnético se puede modelar en torno a una espira de corriente y, siendo paralelo al vector de área normal a la superficie magnetizada [2], se puede representar como $\vec{\mu} = IA\hat{n}$.

Un objeto magnetizado que sufra de un torque magnético es considerado un dipolo magnético y, en el caso que cambie de dirección, se realiza trabajo sobre el objeto. El trabajo implica un cambio de energía potencial,

que es mínima cuando el momento y el campo son paralelos y máxima cuando son antiparalelos. Análoga al caso eléctrico, la energía potencial magnética es equivalente a:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4)$$

El fenómeno de precesión ocurre cuando el objeto magnetizado rota de manera que el momento magnético y el momento angular van en la misma dirección [3]. Entonces, el movimiento viene dado por una precesión debido al torque magnético perpendicular al momento, que causa una variación del momento angular y, a su vez, genera la precesión. En este caso, el objeto magnetizado precesa a una frecuencia determinada, llamada la precesión de Larmor.

De esta manera, el objetivo principal de esta práctica es observar el efecto del torque magnético en la dinámica de un objeto magnetizado sometido a un campo magnético externo. Con esto, se quiere medir el momento magnético de diferentes maneras y observar los fenómenos de precesión y resonancia magnética.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

A. Montaje

El montaje, que proporciona la universidad, se compone por una unidad de torque magnético fabricado por TeachSpin y un estroboscopio externo.

* Correo institucional: a.ariasv@uniandes.edu.co

** Correo institucional: mm.ruiz31@uniandes.edu.co

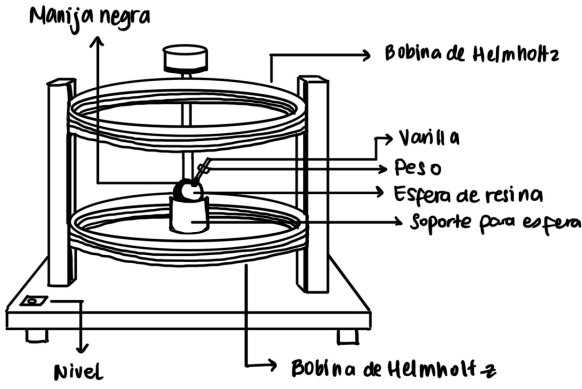


Figura 1. Montaje principal torque magnético. En la figura se observa la unidad principal del experimento, que incluye la estructura de bobinas de Helmholtz, la esfera de resina con los elementos añadibles y un nivel insertado en la base. Montaje de [4].

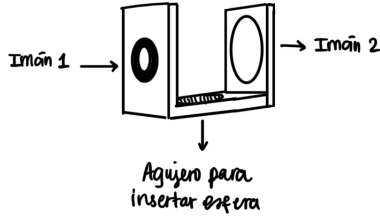


Figura 2. Montaje para campo oscilatorio. En la figura se observa el montaje de madera con dos imanes a cada lado para realizar la actividad de resonancia magnética nuclear. La estructura tiene un orificio por el cual se inserta la estructura de la esfera de resina con su base.

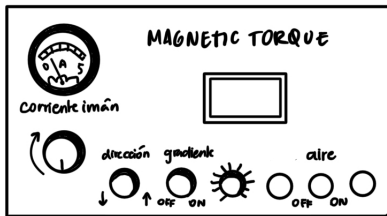


Figura 3. Módulo de control torque magnético. En la figura se observa el módulo de control a partir del cual se determina la dirección, gradiente e intensidad del campo (con la corriente), además de manipular la bomba de aire para la esfera.

B. Procedimiento experimental

1. Equilibrio estático

Inicialmente se midieron los parámetros relevantes de los componentes del montaje: el radio y masa de la esfera, la masa y longitud de la varilla y la masa de la pesa. Posteriormente se puso la esfera de resina en la unidad principal del montaje, se posiciona \vec{B} en posición vertical y con el gradiente apagado, y se verificó que la estructura esté nivelada usando el nivel proporcionado.

Se introdujo la varilla en la esfera, colocando la pesa en la varilla (midiendo r) y se encendió la bomba de aire a 2A, ajustando la esfera de manera que la varilla estuviera estática a un ángulo cercano a 90° de la vertical. Debido al campo magnético de la tierra, la bola tiende a girar, por lo que se debe estabilizar a mano con cuidado.

Se realizó un barrido para diferentes posiciones de la pesa, con mínimo 7 tomas de corriente, para determinar el \vec{B} de equilibrio.

2. Oscilación armónica

Teniendo la misma configuración del campo magnético y la esfera de resina, se varió la corriente entre 1A y 1.5A, usando la manija para desplazamiento angular se generó una oscilación, registrando el valor la corriente.

Se midió el tiempo que tomó en realizar 20 oscilaciones con el fin de calcular el período.

3. Precesión

Cuando el imán está rotando, de manera que el momento angular y el momento magnético van en la misma dirección, el movimiento viene determinado por una precesión. Con el gradiente apagado, el aire encendido y la corriente a 0A, se hizo girar la esfera alrededor del eje de la manija de rotación, de manera que el eje de spin no estuviera lineado a la vertical.

Para medir la frecuencia de rotación se enciende el estroboscopio a una frecuencia de 5Hz, apuntando hacia el punto blanco de la manija de rotación. Girando la bola de la misma manera, la frecuencia de rotación será igual a la frecuencia del estroboscopio en el momento que el punto blanco aparente ser estático. Con esto, se llevó la corriente a 1A y se midió el periodo de precesión de la esfera. Este proceso se repitió para corrientes entre 0.5A y 4A, en pasos de 0.5A.

4. Resonancia Magnética

Adicional al campo magnético constante se tuvo una variable que rotó perpendicular al constante. Acoplando los imanes a la base de madera, con la bomba de aire encendida y el gradiente apagado, se giró la esfera de la misma manera a la actividad anterior. Aumentando la corriente a 2A se debe observar la precesión.

Luego, se giraron los imanes manualmente a la frecuencia de Larmor de manera que la manija de rotación sea perpendicular al campo generado por los imanes.

Finalmente, se giran los imanes manualmente en dirección opuesta.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A. Equilibrio estático

A partir de la expresión para el campo de las dos bobinas de Helmholtz se tiene que:

$$B = \frac{\mu_0 I N r^2}{(r^2 + d^2/4)^{3/2}} \quad (5)$$

Aquí, N corresponde al número de vueltas del alambre en las bobinas de Helmholtz, r es el radio de cada bobina, d es la distancia entre las bobinas, I es 1A y μ_0 tiene la constante de permitividad magnética. Este cálculo indica que el campo en equilibrio es $135,609T$, mostrando que para cualquier corriente estaría dado por:

$$B = 135,609 \frac{T}{A} \cdot I \quad (6)$$

A partir de la expresión obtenida para el campo magnético, se realiza una gráfica para el barrido de corrientes, en el eje y teniendo rmg y en el eje x el campo magnético.

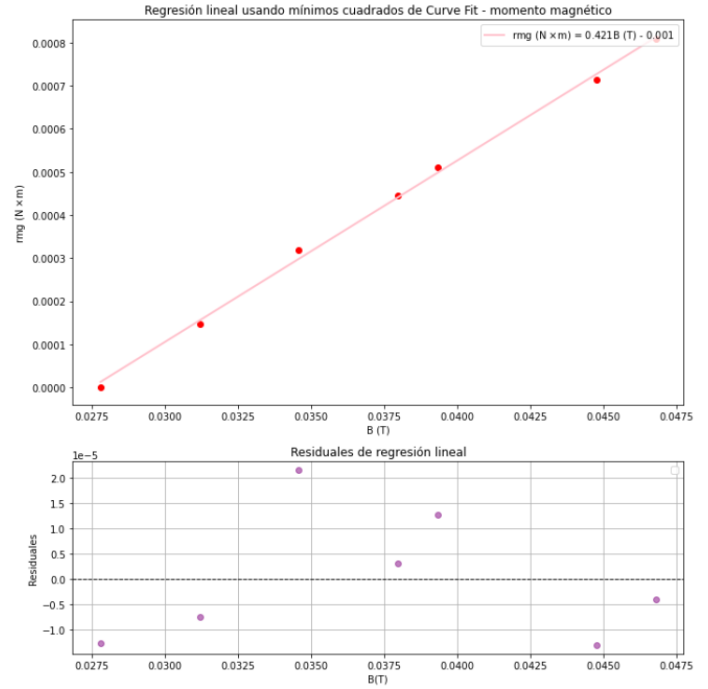


Figura 4. rmg vs. $B(T)$. En esta gráfica se observa la relación lineal entre el campo en equilibrio y rmg , con lo cual se realizó un ajuste lineal de mínimos cuadrados con Scipy, calculando con esto el momento magnético.

A partir del ajuste lineal realizado con mínimos cuadrados de Scipy, se calcula el valor de la pendiente, equivalente al momento magnético gracias a la suma de torques. Con esto, se obtiene que $\mu = (0,418 \pm 0,008) Am^2$.

El intercepto del ajuste lineal es $-0,0011 \pm 3,23$. Este intercepto, por la suma de torques, es equivalente a $-dMg$, que según los valores teóricos es igual a $0,0011$.

B. Oscilación armónica

Según el análisis de los torques implicados en el movimiento, obtenemos la ecuación diferencial:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu B \theta = 0 \quad (7)$$

La cual corresponde a un movimiento de oscilación armónica, con periodo:

$$\tau = \sqrt{\frac{4\pi^2 I}{\mu B}} \quad (8)$$

Donde $I = 5/2 MR^2$ corresponde a la inercia de la esfera.

Experimentalmente, se observó que el periodo de las oscilaciones era independiente de la desviación angular inicial que se le daba a la varilla, por lo que modelar el movimiento con oscilaciones armónicas es adecuado. Como τ^2 es lineal con $1/B$, realizamos la apropiada linealización en la figura 5, en la cual también se ajusto un modelo lineal. Según la ecuación 8, podemos encontrar el valor del momento magnético con la pendiente de la regresión, obteniendo:

$$\mu = 0,3 \pm 0,1 Am^2 \quad (9)$$

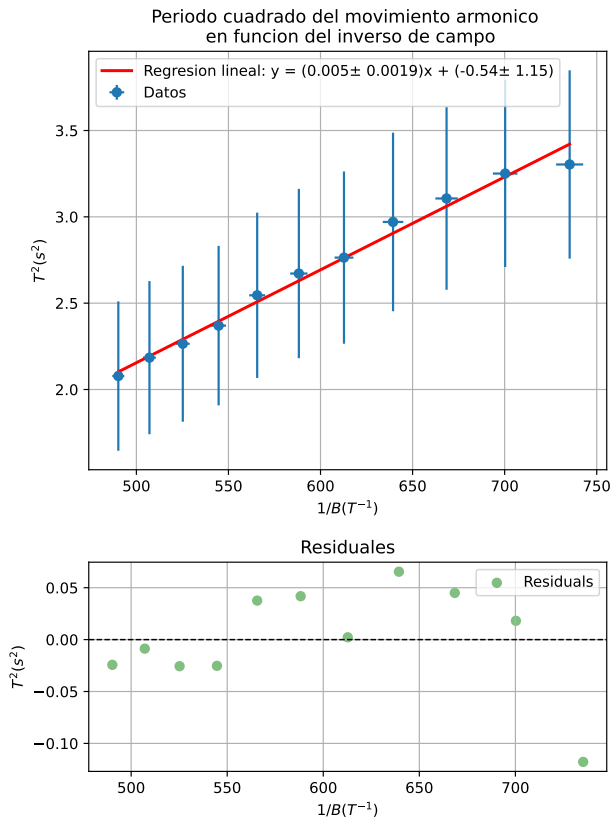


Figura 5. Relación linealizada entre el periodo de oscilación y el campo magnético de la bobina. El error en τ es tomado como 150ms, la mitad de un tiempo de reacción promedio de un humano

C. Precesión

Según la geometría del sistema, el momento angular de la esfera sera siempre perpendicular a el torque generado por el momento magnético del imán. Como el torque es transversal a el momento angular, esto significa que la magnitud del momento angular se va a

mantener constante, por lo que solo cambiara su dirección. Esto corresponde a un movimiento de precesión. Como $\tau = \mu B \sin \theta$ Como $\tau = L\Omega$. Así tenemos :

$$\Omega = \frac{\mu B}{I\omega} \quad (10)$$

En el cual con el estroboscopio nos aseguramos que la frecuencia de oscilación de la esfera es $f = 5Hz$, con $\omega = 2\pi f$. Con pendiente de la regresión lineal de la figura 6 calculamos un momento magnético de:

$$\mu = 0,41 \pm 0,03 Am^2 \quad (11)$$

Asi mismo, observamos de los residuales de la figura 6 que la calidad del ajuste disminuye para valores altos del campo magnetico. Esto se debe a que debido a que las oscilaciones son mas rápidas, es mas difícil medir con exactitud el periodo de precesión.

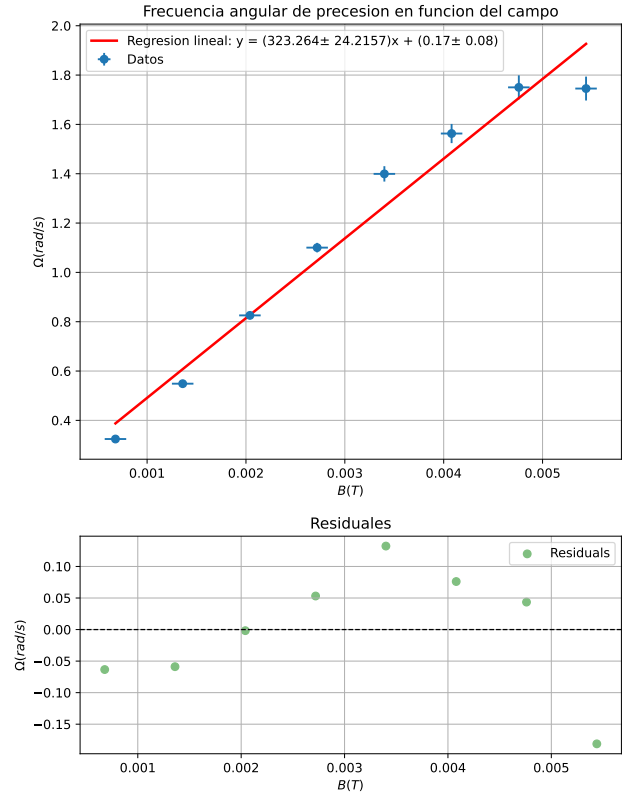


Figura 6. Frecuencia de precesión en función del campo magnético de la bobina.

D. Resonancia magnética

Haciendo la esfera girar de la misma manera de la actividad de precesión y rotando el campo oscilatorio a

la frecuencia de Larmor, se observa que la manija negra tiene a alinearse con el campo oscilatorio, lo que implica que el momento angular y el momento magnético se alinean con el campo adicionado. La alineación es causada por el torque magnético que, al ser el momento y el campo perpendiculares, es máximo, lo cual explica el movimiento de la esfera de resina hacia el campo oscilatorio.

La resonancia magnética nuclear se da cuando núcleos atómicos con un campo magnético constante son sometidos a un campo adicional que oscila. Esta interacción de los campos hace que se genere una señal cuya frecuencia caracteriza el campo magnético constante [5]. Debido al efecto del campo en el momento magnético, asociado al spin nuclear, se induce la frecuencia característica de Larmor. En el caso del experimento, se tienen los dos campos, uno constante y otro oscilante, sobre la esfera de resina magnetizada, donde la frecuencia observada corresponde a la de Larmor.

IV. CONCLUSIONES

En la práctica obtuvieron tres valores diferentes para el momento magnético de la esfera, los cuales son todos consistentes entre sí así como a el valor teórico de alrededor de 0.4 amperios por metro cuadrado[?]. Los valores experimentales están todos a una desviación aceptable de el valor reportado por el fabricante pero presentan un diferente grado de exactitud y precisión debido a los diferentes errores experimentales cada actividad.

En la actividad del equilibrio estático se calculó el momento magnético del imán a partir del campo magnético en equilibrio. Se observa que el resultado es

tanto exacto, porque es cercano al valor teórico de $\mu = (0,418 \pm 0,008)Am^2$, como preciso, debido a lo pequeña que es la incertidumbre. Con respecto a los residuales, se observa que el ajuste lineal realizado con Scipy es ideal dado que están centrados en 0.

En cuánto al momento calculado con las oscilaciones armónicas se tiene un alto grado de inexactitud con un error porcentual de alrededor del 30 %. La principal fuente de error en este experimento es la medición manual del período de oscilación de la esfera, debido a qué esto hace que la incertidumbre en el tiempo sea dictada por el tiempo de reacción de la persona que toma las medidas, alrededor 200 ms. Cómo la medición de momento magnético depende del cuadrado del período, el error se propaga manera significativa, haciendo poco practico este procedimiento experimental.

En contraste, el momento magnético calculado con el periodo de precesión es mucho mas preciso, ya que la dependencia temporal se encuentra en el numerador, haciendo que el error se propague de una manera mucho menos drástica. En esta actividad también se cuenta con una fuente de error en la frecuencia de giro de la esfera, ya que esta no se mantiene constante a lo largo de la precesión. Así mismo, el uso del estroboscopio hace poco preciso saber el momento exacto donde se tiene una frecuencia de $5Hz$

En la actividad final, se observa el fenómeno de resonancia magnética, de extrema utilidad en el mundo de la medicina. Se observa que la resonancia ocurre cuando se alinean el momento magnético y el momento angular, y la alineación de los campos genera una frecuencia característica correspondiente a la de Larmor, análogo a como sucede en la resonancia magnética nuclear.

-
- [1] H. D. Young and R. A. Freedman, *Física Universitaria Volumen 2* (Pearson Educación, 2009).
 - [2] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3rd ed. (New York: Wiley, 1999).
 - [3] U. de los Andes, *Torque Magnético, Guías de laboratorio intermedio* (2024).
 - [4] TeachSpin, (2010).
 - [5] D. Plewes and W. Kucharczyk, J. Magn. Reson. Imaging , 1038 (2012).
 - [6] K. W. Vugrin, L. P. Swiler, R. M. Roberts, N. J. Stucky-Mack, and S. P. Sullivan, Water Resources Research **43** (2007), <https://doi.org/10.1029/2005WR004804>.

APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

Los códigos donde se realizan los ajustes con su respectiva incertidumbre se encuentran a continuación: <https://github.com/andresarias1105/>

`Experimentos/blob/main/Torque_mag_fit.ipynb`, https://github.com/margarita1509/intermedio_mmruiz31

Las incertidumbres de los parámetros de las regresiones son obtenidos directamente de la función *Curvefit* de Scipy, la cual estima el error basándose en una aproximación lineal a la función modelo alrededor de los valores óptimos.[6].

Para la propagación de error se usó la formula:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \dots} \quad (12)$$

Para la regresión lineal se utilizaron las siguientes formulas:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (13)$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (14)$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{n \sum (y_i - mx_i - b)^2}{(n-2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)}} \quad (15)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\left(1 + \frac{(\sum x_i)^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\right) \frac{\sum (y_i - mx_i - b)^2}{n(n-2)}} \quad (16)$$

Para los valores promedios, se tomó el error como la desviación estándar de los valores experimentales, dividido por la raíz del doble del número de datos -1:

$$s = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}}{\sqrt{2N-1}} \quad (17)$$

De acuerdo con la ecuación de propagación de errores, los errores de las variables calculadas son:

$$\sigma_{\mu_1} = \frac{4\pi^2 I}{m^2} \sigma_m$$

$$\sigma_{\mu_2} = \sigma_m I \omega$$