

Efecto Hall

Andrés Felipe Arias* and María Margarita Ruiz**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 29 de agosto de 2024)

Esta práctica tiene como objetivo observar el efecto Hall en el semiconductor Germanio, tanto tipo p como tipo n, con el fin de describir el signo y densidad de sus portadores de carga. Adicionalmente, se medirá el voltaje de Hall en función del campo magnético al que se somete el Germanio y la temperatura para cuantificar su conductividad. Se encontró un coeficiente de Hall de $R_{H_n}(-5,71 \pm 0,05)m^3/C \times 10^{-3}$ para n-Ge y de $R_{H_p}(5,00 \pm 0,07) \times 10^{-3}m^3/C$ para P-Ge, así como una densidad de portadores de carga de $n_{prom} = (1,10 \pm 0,02) \times 10^{21}m^{-3}$ y $p_{prom}(1,28 \pm 0,02) \times 10^{21}m^{-3}$. Por otro lado, se observó una leve magnetorresistencia positiva en la muestra de p-Ge con conductividad a campo nulo de $\sigma = 58,46 \pm 0,9m^{-1}\Omega^{-1}$. Por último se encontró el *energy gap* del Germanio intrínseco $E_g = 0,418 \pm 0,015eV$, del n-Ge $E_g = 0,718 \pm 0,045eV$ y del p-Ge $E_g = 1,241 \pm 0,191eV$.

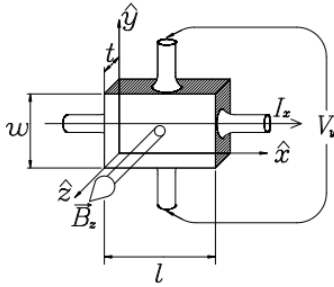


Figura 1. Diagrama esquemático de las condiciones necesarias para observar el efecto hall. A una placa conductora de dimensiones l, t, w se le aplica una corriente en la dirección \hat{x} , y un campo magnético en la dirección \hat{z} . Si los portadores son electrones estos serán desviados en dirección \hat{y} por la fuerza magnética. La acumulación de cargas en este lado del conductor genera un campo eléctrico tal que la fuerza eléctrica de las cargas anule a la fuerza magnética. Esto implica una diferencia de potencial en los extremos transversales del material, denominada voltaje Hall. Figura tomada de [3]

I. INTRODUCCIÓN

El efecto Hall es la generación de un campo eléctrico transversal en un material sólido que porta una corriente eléctrica, cuando este es sometido a un campo magnético que es perpendicular a la corriente[1]. Este fenómeno fue descubierto en 1879 por el físico americano Edwin Herbert Hall, quien al considerar las cargas como un fluido incompresible, notó que el flujo de cargas tenía que seguir de manera simétrica, por lo que debía existir una fuerza que se oponga a la fuerza magnética para mantener el estado de equilibrio [2]. Esta fuerza es una fuerza eléctrica producto del voltaje de Hall, una

diferencia de potencial que surge de la acumulación de cargas en un lado del material, debido a la deflexión por el campo magnético 1.

En el régimen de campos magnéticos débiles $eB\tau/m \ll 1$, el efecto Hall se describe a partir del modelo del electrón libre. Para ello se observan las ecuaciones de movimiento de los electrones bajo la fuerza de Lorentz debido a un campo magnético transversal B_z sobre una corriente j_x . Para que las fuerzas estén en equilibrio se encuentra que se necesita un campo eléctrico de magnitud $E_y = \frac{B_z j_x}{ne}$. Se define el coeficiente de Hall R_H como:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B_z} = \frac{1}{nq} = \frac{V_H w}{I B_z} \quad (1)$$

Donde n es la densidad de portadores de carga, w es el ancho de la muestra y $V_H = d|E_y|$ es el voltaje de Hall de una muestra de longitud transversal d . Notase que el signo de R_H depende del signo de la carga q .

Así mismo, podemos definir la movilidad de Hall como:

$$\mu_H = |R_H| \sigma \quad (2)$$

Donde $\sigma = \frac{I_p}{V_L A}$ es la conductividad de una muestra de largo l y área transversal A , a la cual se le aplica una corriente I_p y un voltaje V_L .

En el caso de semiconductores, el voltaje de Hall puede darse debido a portadores de carga *intrínsecos* o *extrínsecos*. Los portadores de carga intrínsecos son generados mediante fluctuaciones térmicas que excitan electrones lo suficiente para que estos pasen a la banda de conducción (en donde actúan como portadores de carga negativa), dejando *huecos* en la banda de valencia (Portadores de carga positiva)[4]. Este comportamiento se puede modelar mediante la distribución de Fermi-Dirac, en donde la densidad de portadores de carga negativos n y positivos p a una temperatura T cumple:

* Correo institucional: a.ariasv@uniandes.edu.co

** Correo institucional: mm.ruiz31@uniandes.edu.co

$$n = p = 2 \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} \exp(-E_g/2k_B T) \quad (3)$$

Siendo m_e, m_h las respectivas masas de los portadores de carga y E_g el *energy gap* del material.

Por otro lado, los portadores de carga *extrínsecos* provienen del dopaje del material, y se comportan de manera análoga a los portadores de carga en un material conductor, por lo que se define la movilidad para electrones y para huecos como:

$$\mu_e = e\tau_e/m_e; \mu_h = e\tau_h/m_h \quad (4)$$

Así mismo, podemos definir el coeficiente de Hall para la región extrínseca de un material semiconductor como:

$$R_H = \frac{n_h \mu_h^2 - n_e \mu_e^2}{e(n_e \mu_e + n_h \mu_h)^2} \quad (5)$$

El efecto Hall es de vital importancia en la caracterización de las propiedades de materiales conductores y semiconductores, ya que permite la medición directa de la densidad y el signo de los portadores de carga de un material[5]. Por otro lado, el estudio del efecto Hall a bajas temperaturas y campos magnéticos altos reveló efectos cuánticos significativos en los cuales los voltajes medidos tomaban valores discretos, múltiplos enteros de e^2/h [6]. Por otro lado, se ha estudiado el efecto de acoplamiento spin orbita en materiales que rompen la simetría de reversibilidad temporal, en el llamado efecto Hall anómalo [7].

En la presente práctica se tiene como objetivo la observación del efecto Hall en semiconductores Ge-n y Ge-p para caracterizar el comportamiento de sus portadores de carga. Así mismo se medirá el efecto del campo magnético sobre la conductividad de ambos materiales. Por ultimo se cuantificará el voltaje de Hall en función de la temperatura de las muestras, con el objetivo de estimar su respectivo *energy gap*.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

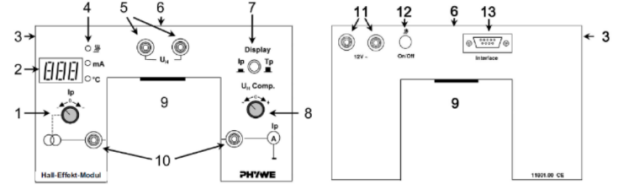


Figura 2. *Montaje del experimento*. El montaje se separa en dos módulos: un módulo genera el campo magnético con dos bobinas y lo mide con un Teslámetro; el otro módulo tiene dos fuentes, AC y DC, junto con 5 multímetros y cables para realizar las conexiones.

El montaje de la práctica tiene dos módulos: uno con la fuente de alimentación y los multímetros, y otro con el que se genera y se mide el campo magnético. Los módulos están compuestos por las partes que se ven en la figura 2: (1) Perilla para controlar corriente I_p , (2) pantalla digital para visibilizar corriente I_p o temperatura, (3) orificio para atornillar el soporte, (4) series de LED que señalan (de arriba a abajo) si la muestra se calienta y si mide corriente o temperatura, (5) entradas de 4mm para medir voltaje, (6) orificio para la sonda del Teslámetro, (7) botón para alterar la cantidad física en la pantalla, (8) ajuste de offset del voltaje, (9) entrada de conexión para las tarjetas, (10) entradas de 4mm para medición de voltaje longitudinal, (11) entradas de 4mm para conexión del módulo a fuente de alimentación, (12) interruptor del sistema de calentamiento, (13) interfaz RS232 para conexión de un PC.

Inicialmente se deben conectar las bobinas a la fuente DC de manera que el campo generado por una bobina vaya en dirección opuesta a la otra. Para la caracterización del campo se realiza la medición con el teslámetro y realizando un barrido de corrientes.

Para determinar el voltaje de Hall se conecta la placa de Germanio en el módulo con la fuente AC a 12V y 5A. Se realizan varias series de datos con campo magnético constante y variación de I_p . Posteriormente se repite este procedimiento con I_p constante y variación de B .

Luego, para medir la magnetoresistencia se aplica un campo magnético nulo y luego se varía para realizar un barrido de la corriente I_p , anotando los valores de voltaje para encontrar la resistencia mediante una regresión lineal y la ley de ohm. Posteriormente se registra la resistencia a diferentes valores de campo magnético. A partir de esto se realiza una regresión para la magnetoresistencia de la forma:

$$\frac{R_m - R_0}{R_0} = aB^b + e \quad (6)$$

Finalmente, para medir la conductividad de las tres tarjetas se toma el voltaje longitudinal cambiando la temperatura con un campo magnético nulo y se realiza una regresión exponencial. También se mide el voltaje de Hall para un campo magnético de 300mT y temperatura variable, con lo que se grafica R_H respecto a T .

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A. Caracterización de campo magnético

Con el fin alargar la vida útil de la sonda de campo magnético, se realizó una caracterización del campo para hallar la relación entre el campo y la corriente, y utilizarla en lugar de la sonda para hallar el campo magnético en mediciones posteriores. En la figura 3 se muestran las mediciones de campo en función de la corriente de la bobina. De la regresión se encontró la relación:

$$B = (233,6 \pm 2,7\text{mT/A})I_B + (15,39 \pm 1,3)\text{mT} \quad (7)$$

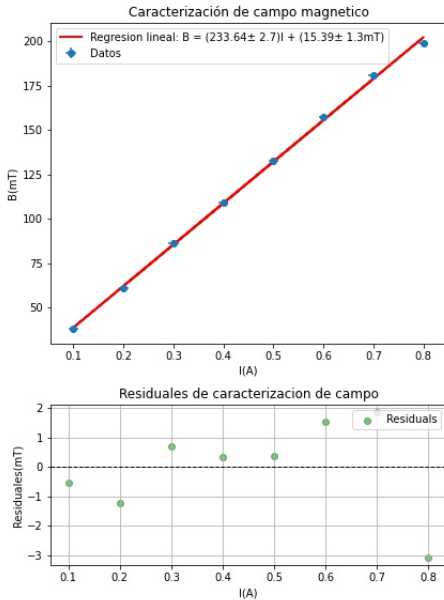


Figura 3. Caracterización del campo magnético de la bobina, en función de la corriente que pasa por ella. Se encontro una regresión lineal de $B = (233,6 \pm 2,7\text{mT/A})I_B + (15,39 \pm 1,3)\text{mT}$, la cual se usó en las mediciones posteriores para el calculo del campo magnético. Se muestran así mismo sus respectivos residuales.

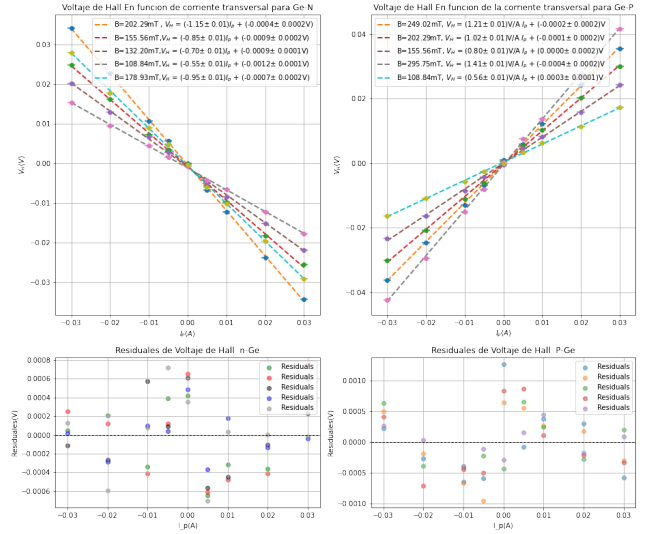


Figura 4. Voltaje de Hall en funcion de la corriente transversal para Germanio tipo n y para germanio tipo p para diferentes valores de campo magnetico. Los valores de las pendientes se usaron para calcular un coeficiente de Hall promedio de $R_{H_n} = (-5,35 \pm 0,09) \times 10^{-3}\text{m}^3/\text{C}$ y $R_{H_p} (5,00 \pm 0,07) \times 10^{-3}\text{m}^3/\text{C}$.

B. Coeficiente de Hall para n-Ge y p-Ge

Inicialmente, se tomaron las mediciones de voltaje de Hall en la muestra de Germanio tipo n, mientras se variaba la corriente transversal y el campo magnético se mantenía constante. Los resultados se muestran en la figura 4. En particular se observa que los voltajes de Hall siguen la tendencia lineal esperada, con una pendiente negativa correspondiente a que los portadores de carga negativos del n-Ge. De la ecuación 1, es claro que el coeficiente de hall puede ser obtenido por la pendiente de una regresión lineal. Promediando las series de datos se obtiene:

$$R_{H_n} = (-5,35 \pm 0,09) \times 10^{-3}\text{m}^3/\text{C} \quad (8)$$

Asi mismo, segun la ecuación 1, la densidad de portadores de carga es:

$$n = (1,17 \pm 0,02) \times 10^{21}\text{m}^{-3} \quad (9)$$

Esta densidad de carga corresponde a portadores de carga extrínsecos debido a que son producto del dopaje del material. Esto se evidencia no solo por la respuesta negativa del germanio tipo n (análoga a la respuesta en metales) sino también debido a que la densidad de carga es ordenes de magnitud mayor a la densidad de carga intrínseca predicha por el modelo para semiconductores intrínsecos.

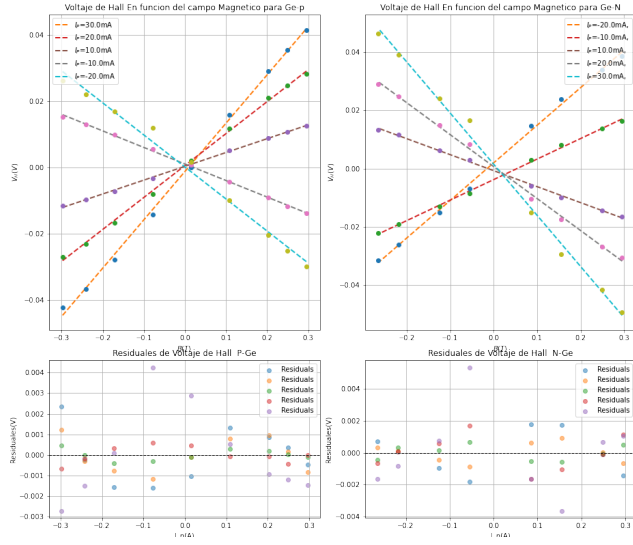


Figura 5. Voltaje de hall en función del campo magnético para Germanio tipo n y para germanio tipo p para diferentes valores de corriente transversal. Los valores de las pendientes se usaron para calcular un coeficiente de Hall promedio de $R_{Hn} = (-6,06 \pm 0,2) \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{C}$ y $R_{Hp} = (4,74 \pm 0,1) \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{C}$.

Así mismo, se realizó el mismo proceso para la muestra de p-Ge (figura 4). Por otro lado se calcula también el coeficiente de Hall para las muestras tipo n y tipo p, pero ahora variando el campo magnético. Estas series de datos corresponden a la figura 5. Los resultados se resumen en la tabla I.

Por último, se graficaron los coeficientes de Hall de cada serie de datos para observar como este cambia en función de la corriente y del campo magnético. Como se puede ver de la figura 6, los coeficientes de hall se mantienen aproximadamente constantes alrededor de su promedio. Esto es de esperarse, ya que el coeficiente de Hall de un material depende únicamente de propiedades del material, como lo es su densidad de portadores de carga.

C. Magnetoresistencia para tarjetas n-Ge y p-Ge

Inicialmente se midieron pares de voltaje corriente para así calcular la resistencia usando la ley de ohm. En la toma de datos de esta medición se observó que al medir los voltajes transversales para la muestra de n-Ge el multímetro usado reportaba valores de voltaje que oscilaban erráticamente ya que presentaba un nivel inadecuado de batería. Por este motivo, fue necesario descartar la toma de datos de la tarjeta tipo n y por ende se realizara el análisis únicamente para la tarjeta tipo P.

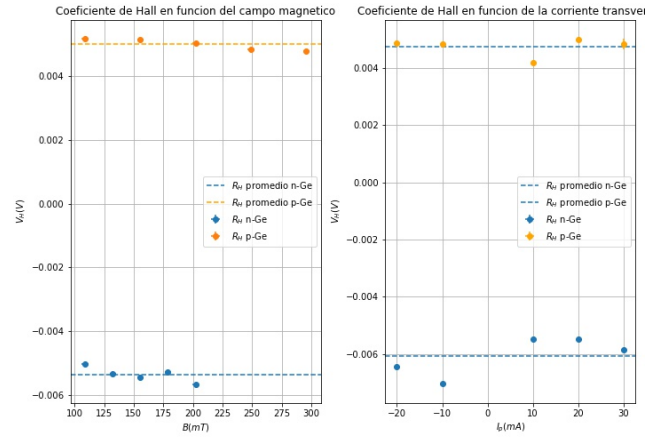


Figura 6. Coeficientes de Hall de ambas muestras para cada serie de datos, tanto en función del campo magnético, como de la corriente transversal. Se observa que los coeficientes de Hall se mantienen aproximadamente constantes.

Después de encontrar las resistencias mediante una regresión lineal, se gráfico el cambio de la resistencia en función de la magnitud del campo magnético aplicado, normalizado con el valor de la resistencia con un campo nulo. Los resultados se muestran en la figura 7. Se puede observar que la muestra muestra una leve magnetoresistencia positiva. Así mismo, se observa que muestra una tendencia que podría ser aproximada como un crecimiento exponencial, por lo que se le ajusto un modelo de la forma:

$$\frac{R_m - R_0}{R_0} = aB^b + e \quad (10)$$

Hallándose unos parámetros de $a = 2,19 \pm 4,4\Omega T^{-b}$ $b = 3,93 \pm 2,1$ y $e = 0,01 \pm 0,005\Omega$

Así mismo, se encontró la conductividad del material a campo magnético nulo, usando la formula $\sigma = \frac{L}{RA}$:

$$\sigma = 58,46 \pm 0,9 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1} \quad (11)$$

D. Conductividad y Temperatura para tarjetas n-Ge, p-Ge e intrínseca

Partiendo de las medidas del voltaje longitudinal, se calculó la conductividad con temperatura variable con la fórmula $\sigma = \frac{I_p}{V_L A}$. Ahora, para la conductividad de la tarjeta de Germanio puro se realizó un ajuste con Curve-Fit de Scipy de la forma $\sigma = \sigma_0 e^{E_g/K_B T}$. Los resultados de la conductividad respecto al inverso de la

Muestra	n-Ge	p-Ge
R_H promedio con $B = cte$	$(-5,35 \pm 0,09) \times 10^{-3} m^3/C$	$(5,00 \pm 0,07) \times 10^{-3} m^3/C$
R_H promedio con $I_p = cte$	$(-6,06 \pm 0,2) \times 10^{-3} m^3/C$	$(4,74 \pm 0,1) \times 10^{-3} m^3/C$
R_H promedio	$(-5,71 \pm 0,05) m^3/C \times 10^{-3}$	$(4,87 \pm 0,07) m^3/C \times 10^{-3}$
Densidad promedio	$n_{prom} = (1,10 \pm 0,02) \times 10^{21} m^{-3}$	$p_{prom} = (1,28 \pm 0,02) \times 10^{21} m^{-3}$

Cuadro I. Coeficientes de Hall para n-Ge y P-Ge, con campo magnético constante y corriente transversal constante. Se calcula también la densidad de portadores de carga de acuerdo a la ecuación 1

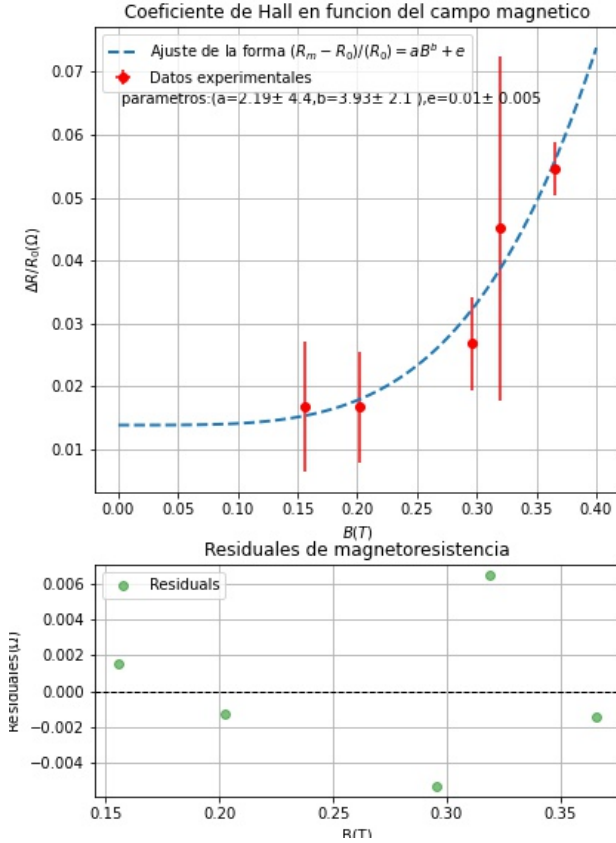


Figura 7. Cambio en la resistencia transversal de la muestra de n-ge en función del campo magnético. Se observa una leve magnetorresistencia positiva, modelada por una función exponencial de la forma $\Delta R/R_0 = aB^b + e$

temperatura se observan en la figura 8. Con el ajuste, se obtuvo el valor del *energy gap* del Germanio:

$$E_g = \frac{b \cdot K_B}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,418 \pm 0,015 eV \quad (12)$$

De manera similar al Germanio puro, se realizaron ajustes del mismo tipo con Scipy para el Ge-n y Ge-p, con lo que se obtuvo que $E_g = 0,718 \pm 0,045 eV$ y $E_g = 1,241 \pm 0,191 eV$. Los resultados con los ajustes

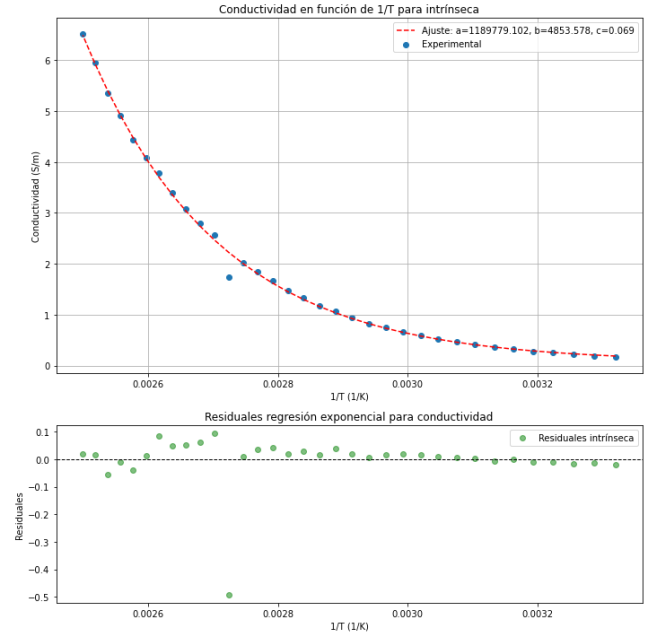


Figura 8. Conductividad Ge puro respecto al inverso de la temperatura. En esta gráfica se observan los resultados para la conductividad obtenidos en función del inverso de la temperatura. El ajuste exponencial fue realizado con Curve-Fit de Scipy para así encontrar el valor del *energy gap*

respectivos se observan en la figura 9.

Adicionalmente, en la figura 10 se realizó una gráfica para el coeficiente de Hall, dado por $R_H = \frac{V_H w}{I_p B_z}$, respecto a la temperatura, con lo que se observa el comportamiento opuesto de este para portadores de carga positivos y negativos debido al signo del voltaje de Hall que producen.

A partir de los valores calculados para el coeficiente de Hall, se realizó un ajuste lineal (figura 11) únicamente a la parte intrínseca del Germanio tipo p, con el fin de calcular nuevamente el valor del *energy gap*. Se obtiene que:

$$E_g = \frac{2 \cdot 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 11797,838}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,036 \pm 0,249 eV \quad (13)$$

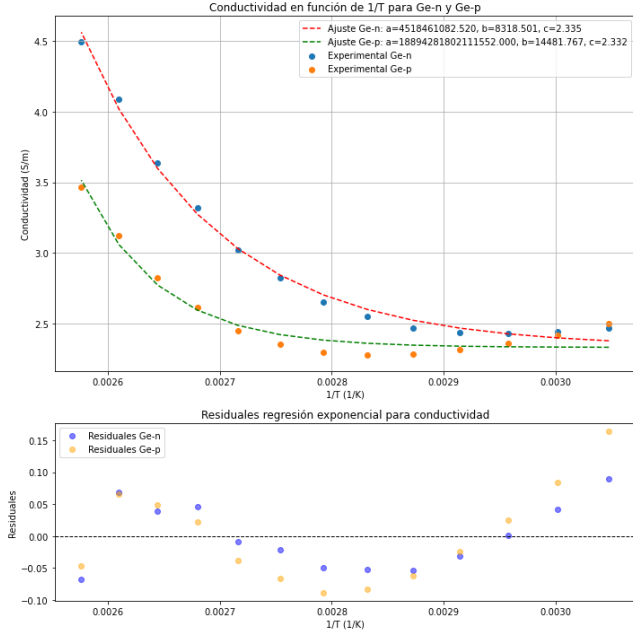


Figura 9. Conductividad Ge-n y Ge-p respecto al inverso de la temperatura. Se observa en la gráfica los resultados para la conductividad de las placas n y p del Germanio respecto al inverso de la temperatura. A partir del ajuste realizado con Scipy, se obtiene el valor del *energy gap*

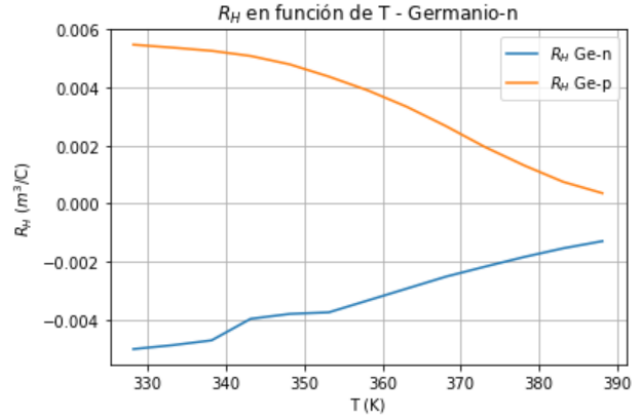


Figura 10. R_H respecto a temperatura para Ge-n y Ge-p. En la gráfica se muestra la variabilidad del valor del coeficiente de Hall respecto a la temperatura, donde el coeficiente es negativo para Ge-n y positivo para Ge-p.

IV. CONCLUSIONES

En primer lugar, existen dudas sobre la validez de la regresión lineal calculada en la caracterización del campo magnético. Así se haya observado la correlación lineal esperada, a una buena concordancia con los datos

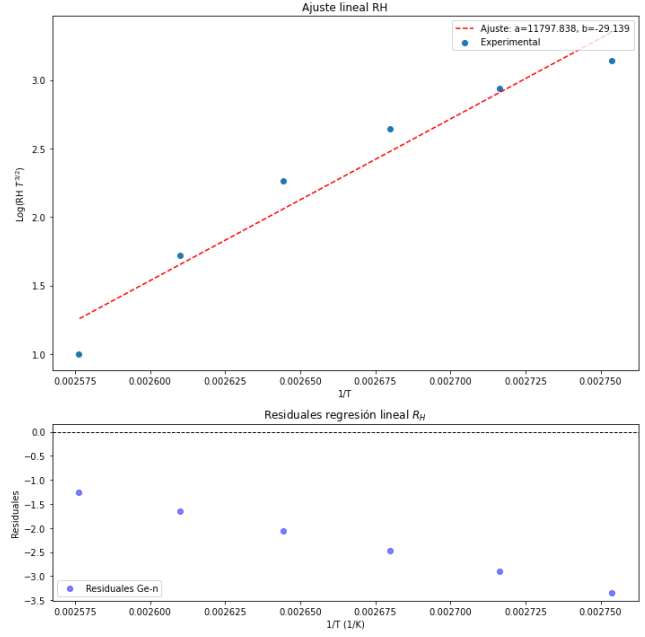


Figura 11. $\log(R_H T^{3/2})$ respecto al inverso de temperatura para Ge-p. En la gráfica se muestra el ajuste lineal realizado con Scipy para los valores de R_H .

experimentales (figura 3), el valor de la pendiente calculado difiere significativamente del valor proporcionado en la documento guía de la practica [8]. Debido a esto, pensamos que el uso que hicimos de la sonda de campo magnético en la configuración de 130mT no fue adecuada, ya que esto recortó significativamente la región efectiva en la que se podía medir de manera adecuada el campo magnético, lo que pudo haber afectado el análisis de la relación entre el campo y la corriente. Esto es de vital importancia, ya que esta medición fue usada para la gran parte de los cálculos posteriores, y por lo tanto, podría ser una fuente de error significativa.

Por otro lado, se observó de las figuras 4 y 5 que todas las mediciones de voltaje de Hall siguen una relación lineal, lo que sugiere que el resultado obtenido a partir del modelo del electrón libre expuesto en la ecuación 1 muestra una excelente concordancia en el caso del voltaje de Hall de portadores de carga extrínsecos en semiconductores dopados. Así mismo, se observó que los coeficientes de Hall no presentaban ninguna tendencia cuando variaba el campo magnético o la corriente transversal, resultado que está de acuerdo con el hecho de que el coeficiente de Hall depende únicamente de propiedades del material, según el modelo del electrón libre. Así mismo, el comportamiento de las muestras dopadas sea con exceso de electrones o huecos, concuerda con el signo de los coeficientes de Hall de la tabla I. Partiendo de estos, se encontró una densidad de portadores de carga del orden de 10^{21} para ambos ca-

sos, muchos ordenes de magnitud mayor a la densidad de carga esperada si estos fueran portadores de carga intrínsecos[9].

En cambio, las mediciones en la sección de magnetorresistencia no fueron especialmente significativas. De la figura 7 se observa que la resistencia aumenta ligeramente en función del campo, tendencia que se hace mas pronunciada a valores de campo altos. Sin embargo, el ajuste exponencial realizado no es muy significativo debido a que la incertidumbre medida en los parámetros es del mismo orden de magnitud que los valores de estos, por lo que sería inadecuado llegar a alguna conclusión estadísticamente significativa a partir de ellos. Al medir los valores de voltaje transversal necesarios para el calculo de la resistencia, se observo que estos podían variar abruptamente, lo que puede indicar que la muestra estaba en corto.

En cuanto al cálculo del *energy gap*, se observa que el ajuste realizado para Ge-n se ajusta muy bien a los datos, y el valor proporcionado para la pendiente, a partir

del cual se calcula E_g , lleva a obtener un valor con cierto grado de exactitud al no ser tan lejano del valor real, $0,67eV$. Asimismo, para esta placa la incertidumbre del valor de la banda de energía es pequeña, por lo que se puede asumir que es un resultado experimental preciso. Por otra parte, el cálculo de la banda de energía a partir del coeficiente de Hall no resultó ser exacto ni preciso, dado que el ajuste lineal realizado muestra, evidenciado con los residuos, que los datos no se comportan de manera lineal. Por esto, no se pueden realizar conclusiones a partir de esta toma de datos en específico.

Respecto al comportamiento de la conductividad, se observa la relación esperada con la temperatura en Ge-n y Ge-p, dado que estas son directamente proporcionales. Por esto, se pudo distinguir una región intrínseca donde se tiene alta conductividad para altas temperaturas. De manera adicional, se comprobó la diferencia entre los coeficientes de Hall para portadores de carga negativos y positivos, que yace en el signo del coeficiente a causa del voltaje de Hall generado por cada placa.

-
- [1] R. A. Dunlap, in *Electrons in Solids*, 2053-2571 (Morgan Claypool Publishers, 2019) pp. 1-1 to 1-13.
 - [2] E. H. Hall, American Journal of Mathematics **2**, 287 (1879).
 - [3] J. D. B. Pengra, «The hall efect,» (2015).
 - [4] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Play; 9 (Wiley, 1986).
 - [5] W. Götz and N. Johnson, in *Gallium Nitride (GaN) II*, Semiconductors and Semimetals, Vol. 57, edited by J. I. Pankove and T. D. Moustakas (Elsevier, 1999) pp. 185-207.
 - [6] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
 - [7] N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, Rev. Mod. Phys. **82**, 1539 (2010).
 - [8] U. de los andes, *Efecto Hall, Guías de laboratorio intermedio* (2024).
 - [9] «Germanium (ge), intrinsic carrier concentration: Datasheet from landolt-börnstein - group iii condensed matter · volume 41a1β: “group iv elements, iv-iv and iii-v compounds. part b - electronic, transport, optical and other properties” in springermaterials (https://doi.org/10.1007/10832182_503),» Copyright 2002 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

Para la propagación de error se usó la formula:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \dots} \quad (14)$$

Para la regresión lineal se utilizaron las siguientes formulas:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (15)$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (16)$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{n \sum (y_i - mx_i - b)^2}{(n-2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)}} \quad (17)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\left(1 + \frac{(\sum x_i)^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\right) \frac{\sum (y_i - mx_i - b)^2}{n(n-2)}} \quad (18)$$

Para los valores promedios, se tomó el error como la desviación estándar de los valores experimentales, dividido por la raíz del numero de datos:

$$s = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}}{\sqrt{N}} \quad (19)$$

De acuerdo con la ecuación de propagación de errores, los errores de las variables calculadas son:

$$\sigma_{V_H(B)} = \frac{w}{B} \sqrt{(\sigma_m)^2 + \frac{m^2 \sigma_B^2}{B^2}} \quad (20)$$

$$\sigma_{V_H(I)} = \frac{w}{I} \sqrt{(\sigma_m)^2 + \frac{m^2 \sigma_I^2}{I^2}} \quad (21)$$