Taller 1 Puntos Teoricos

February 1, 2024

1 Punto 2.

La fuerza de contacto entre dos esferas es:

$$\vec{f}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = K\left[R1 + R2 - |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right]^3 \hat{n} \tag{1}$$

sustituyendo $R1 + R2 - |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\big]^3$ por r:

$$\vec{f}(r) = -Kr^3\hat{n} \tag{2}$$

Integrando con respecto a r, sabiendo que $\hat{n}$ va en direccion radial:

$$\int_r^0 f(r)dr = K\frac{r^4}{4} \tag{3}$$

Una funcion $U(r)$ es un potencial de una fuerza conservativa si:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\hat{r} \tag{4}$$

Entonces:

$$-\frac{\partial K\frac{r^4}{4}}{\partial r}\hat{r} = -Kr^3\hat{n} = \vec{f} \tag{5}$$

Por lo que $\vec{f}$ es una fuerza conservativa y su potencial es $K\frac{r^4}{4}$

2 Punto 3.

Escriba la velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8 m/s$ en unidades de au/año.:

$$c = 3 \times 10^8 m/s \times \left(\frac{1au}{1.496 \times 10^{11} m}\right) \times \left(\frac{86400s}{1dia}\right) \times \left(\frac{365dias}{1yr}\right) = 63240au/yr \tag{6}$$

3 Punto 7.

Se considera la ecuación diferencial de la forma:

$$y'' = R(x)y + S(x) \tag{7}$$

Ahora se expresa y(x) en su serie de taylor:

$$\begin{aligned}y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y'''(x_0) \\ + \frac{(x-x_0)^4}{4!}y''''(x_0) + + \frac{(x-x_0)^5}{5!}y'''''(x_0) + \mathcal{O}(h^6)\end{aligned}$$

Definiendo la cantidad $h = x - x_0$, se puede escribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned}y(x_0+h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) \\ + \frac{h^4}{4!}y''''(x_0) + + \frac{h^5}{5!}y'''''(x_0) + \mathcal{O}(h^6)\end{aligned}$$

Si el espacio esta discretizado de manera equitativa, entonces $h = x_{n+1} - x_n$. Expandiendo la serie alrededor de x_n se obtiene:

$$\begin{aligned}y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) \\ + \frac{h^4}{4!}y''''(x_n) + \frac{h^5}{5!}y'''''(x_n) + \mathcal{O}(h^6)\end{aligned} \tag{8}$$

Repitiendo el mismo proceso para $y(x-h)$:

$$\begin{aligned}y_{n-1} = y_n - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) \\ + \frac{h^4}{4!}y''''(x_n) + - \frac{h^5}{5!}y'''''(x_n) + \mathcal{O}(h^6)\end{aligned} \tag{9}$$

Si se suman las ecuaciones 8 y 9 :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_n - 1 = h^2 y_n'' + \frac{h^4}{12}y_n'''' + \mathcal{O}(h^6) \tag{10}$$

El termino y_n'''' equivale a:

$$y_n'''' = \frac{d^2}{dx^2}[R_n(x)y_n + S_n(x)y_n] \tag{11}$$

donde :

$$y_n'' = [R_n(x)y_n + S_n(x)y_n] \tag{12}$$

Usando el operador de segunda derivada:

$$f_n'' = \frac{f_{n+1} - 2fn + f_{n-1}}{h^2} \tag{13}$$

$$y_n'''' = \frac{R_{n+1}y_{n+1} - 2R_ny_n + R_{n-1}y_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n + S_{n+1}}{h^2} \tag{14}$$

Remplazando las expresiones encontradas para y_n'''' y y'' en 10 :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2[R_n(x)y_n + S_n(x)y_n] + \\ \frac{h^2}{12}[R_{n+1}y_{n+1} - 2R_ny_n + R_{n-1}y_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n + S_{n+1}] + \mathcal{O}(h^6) \end{aligned} \tag{15}$$

Finalmente agrupando terminos y reorganizando se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{h^2}{12}R_{n+1}\right)y_{n+1} - 2\left(1 + \frac{5h^2}{12}R_n\right)y_n + \left(1 - \frac{h^2}{12}R_{n-1}\right)y_{n-1} \\ = \frac{h^2}{12}(S_{n+1} + 10S_n + S_{n-1}) + \mathcal{O}(h^6) \end{aligned} \tag{16}$$