Taller 1 Puntos Teoricos

March 5, 2024

1 Punto 6.

Se considera la ecuación diferencial de la forma:

$$y'' = R(x)y + S(x) \tag{1}$$

Ahora se expresa y(x) en su serie de taylor:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y'''(x_0) \\ + \frac{(x - x_0)^4}{4!}y''''(x_0) + + \frac{(x - x_0)^5}{5!}y'''''(x_0) + \mathcal{O}(h^6) \end{aligned}$$

Definiendo la cantidad $h = x - x_0$, se puede escribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) \\ + \frac{h^4}{4!}y''''(x_0) + + \frac{h^5}{5!}y'''''(x_0) + \mathcal{O}(h^6) \end{aligned}$$

Si el espacio esta discretizado de manera equitativa, entonces $h = x_{n+1} - x_n$. Expandiendo la serie alrededor de x_n se obtiene:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) \\ + \frac{h^4}{4!}y''''(x_n) + \frac{h^5}{5!}y'''''(x_n) + \mathcal{O}(h^6) \end{aligned} \tag{2}$$

Repitiendo el mismo proceso para $y(x - h)$:

$$\begin{aligned} y_{n-1} = y_n - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) \\ + \frac{h^4}{4!}y''''(x_n) + - \frac{h^5}{5!}y'''''(x_n) + \mathcal{O}(h^6) \end{aligned} \tag{3}$$

Si se suman las ecuaciones 2 y 3 :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_n - 1 = h^2 y_n'' + \frac{h^4}{12} y_n'''' + \mathcal{O}(h^6) \tag{4}$$

El termino y_n'''' equivale a:

$$y_n'''' = \frac{d^2}{dx^2}[R_n(x)y_n + S_n(x)y_n] \tag{5}$$

donde :

$$y_n'' = [R_n(x)y_n + S_n(x)y_n] \tag{6}$$

Usando el operador de segunda derivada:

$$f_n'' = \frac{f_{n+1} - 2fn + f_{n-1}}{h^2} \tag{7}$$

$$y_n'''' = \frac{R_{n+1}y_{n+1} - 2R_n y_n + R_{n-1}y_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n + S_{n+1}}{h^2} \tag{8}$$

Remplazando las expresiones encontradas para y_n'''' y y'' en 4 :

$$\begin{split} y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2[R_n(x)y_n + S_n(x)y_n] + \\ \frac{h^2}{12}[R_{n+1}y_{n+1} - 2R_n y_n + R_{n-1}y_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n + S_{n+1}] + \mathcal{O}(h^6) \end{split} \tag{9}$$

Finalmente agrupando terminos y reorganizando se obtiene:

$$\begin{split} \left(1 - \frac{h^2}{12}R_{n+1}\right)y_{n+1} - 2\left(1 + \frac{5h^2}{12}R_n\right)y_n + \left(1 - \frac{h^2}{12}R_{n-1}\right)y_{n-1} \\ = \frac{h^2}{12}(S_{n+1} + 10S_n + S_{n-1}) + \mathcal{O}(h^6) \end{split} \tag{10}$$