Demostración cuarta derivada central

Primero, el desarrollo de la serie de Taylor para la derivada de una función en $f(x+h)$ y $f(x-h)$:

eq1: $f(x+h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots + O(h)^k$

$eq2$: $f(x-h) = f(x) - hf^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) + \cdots + O(h)^k$

Al hacer la suma de $f(x+h)$ y $f(x-h)$ se obtiene:

$$eq\ 3{:}\ f(x+h) + f(x-h) = f(x) + f(x) + hf^{(1)}(x) - hf^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) - \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) + \cdots + O(h)^k + O(h)^k$$

$$= 2f(x) + h^2 f^{(2)}(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \cdots + 2O(h)^k$$

Al despejar $h^2 f^{(2)}(x)$

$$eq\ 4{:}\ h^2 f^{(2)}(x) = f(x+h) + f(x-h) - \left(2f(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \cdots + 2O(h)^k\right)$$

Si tenemos 2h

$$eq\ 5{:}\ f(x+2h) = f(x) + (2h)f^{(1)}(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots + O(h)^k$$

$$= f(x) + (2h)f^{(1)}(x) + \frac{4(h)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{8(h)^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{16(h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{32(h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots + O(2h)^k$$

$$eq\ 6{:}\ f(x-2h) = f(x) - (2h)f^{(1)}(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f^{(2)}(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots + O(h)^k$$

$$= f(x) - (2h)f^{(1)}(x) + \frac{4(h)^2}{2!} f^{(2)}(x) - \frac{8(h)^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{16(h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{32(h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots + O(2h)^k$$

Al hacer la suma de $f(x+2h)$ y $f(x-2h)$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
eq\ 7{:}\ & f(x+2h)\ +f(x-2h) \\
&= f(x)+f(x)+2hf^{(1)}(x)-2hf^{(1)}(x)+\frac{(2h)^2}{2}\ f^{(2)}(x)+\frac{(2h)^2}{2}\ f^{(2)}(x) \\
&+\frac{(2h)^3}{6}\ f^{(3)}(x)-\frac{(2h)^3}{6}\ f^{(3)}(x)+\frac{(2h)^4}{24}\ f^{(4)}(x)+\frac{(2h)^4}{24}\ f^{(4)}(x) \\
&+\frac{(2h)^5}{120}\ f^{(5)}(x)-\frac{(2h)^5}{120}\ f^{(5)}(x)+\cdots+\ O(2h)^k+O(2h)^k \\
&= 2f(x)+(2h)^2f^{(2)}(x)+\frac{(2h)^4}{12}\ f^{(4)}(x)+\cdots+2O(2h)^k
\end{aligned}
$$

Al reemplazar la ecuación 4 en la ecuación:

$$
\begin{aligned}
eq\ 8{:}\ & f(x+2h)\ +f(x-2h) \\
&= 2f(x)+4\left(f(x+h)\ +f(x-h)-\left(2f(x)+\frac{h^{\ 4}}{12}\ f^{(4)}(x)+\cdots+2O(h)^k\right)\right) \\
&+\frac{(2h)^4}{12}\ f^{(4)}(x)+\cdots+2O(2h)^k \\
&= 2f(x)+4\left(f(x+h)\ +f(x-h)-\left(2f(x)+\frac{h^{\ 4}}{12}\ f^{(4)}(x)+\cdots+2O(h)^k\right)\right) \\
&+\frac{(2h)^4}{12}\ f^{(4)}(x)+\cdots+2O(2h)^k \\
&= 4f(x+h)+4f(x-h)-6f(x)-\frac{h^4}{3}\ f^{(4)}(x)+\frac{4(h)^4}{3}\ f^{(4)}(x)-\cdots \\
&-6O(2h)^k \\
&= 4f(x+h)+4f(x-h)-6f(x)+h^4+f^{(4)}(x)-\cdots-8O(h)^k+2O(2h)^k
\end{aligned}
$$

Despejando $f^{(4)}(x)$

$$
\begin{aligned}
& f^{(4)}(x) \\
&= f(x+2h)\ +f(x-2h)-\left(4f(x+h)+4(f-h)-6f(x)+h^4+f^{(4)}(x)-\cdots-8O(h)^k\right) \\
&+2O(2h)^k \\
&= \frac{f(x+2h)\ +f(x-2h)-4f(x+h)-4f(x-h)+6f(x)+\cdots+8O(h)^k+2O(2h)^k}{h^4} \\
&= \frac{f(x+2h)\ +f(x-2h)-4f(x+h)-4f(x-h)+6f(x)+\cdots+h^k*(8O+2^{k+1}O)}{h^4} =
\end{aligned}
$$

Allí el orden de la aproximación es 2 porque el exponente del término de menor orden es 2, ya que el primer orden estará dado por la expresión de la primera derivada al usar la serie de taylor