

# Simulated Annealing (Recozimento Simulado)

UFMG

10/11/2025

## 1 Simulação de Recozimento

- Introdução
- Processo de Recozimento
- Aplicabilidade
- Teoria
- Algoritmo Geral de Recozimento Simulado
- Implementação

# Recozimento Simulado - Introdução

Também chamado de método meta-heurístico, este tem como intuito resolver problemas de otimização de grande complexidade. Este algoritmo foi introduzido por volta de 1980 por três pesquisadores, sendo eles: Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi. O método traz soluções sub-ótimas, ou seja, eficientes e sem grande esforço computacional.

Tem como objetivo encontrar resultados satisfatórios, ainda que não exatos, sendo que muitas vezes estes resultados são inviáveis e/ou difíceis de serem alcançados.

Se enquadra na classe *Markov chain Monte Carlo* (MCMC) e, por ter caráter estocástico alinhado à sua capacidade de escapar de mínimos locais, este é um ótimo candidato para resolução de problemas complexos de otimização.

# Processo de Recozimento

O conceito foi introduzido da ideia de recozimento, onde um sólido é levado para um estado de baixa energia após aumentar sua temperatura.

O processo consiste em duas etapas, sendo elas:

- "Derretimento" da sua estrutura ao levá-lo a uma temperatura muito elevada.
- Resfriamento esquematizado buscando atingir um estado sólido de energia mínima.

Uma vez em estado líquido as partículas do material exposto são distribuídas de forma aleatória.

O estado mínimo de energia só é alcançado com uma temperatura inicial que seja suficientemente alta e um tempo de resfriamento que seja logo o suficiente.

O algoritmo **Simulated Annealing** tem aplicabilidade em várias áreas e aqui serão expostas algumas delas:

- Engenharia de software
- *Machine Learning*
- Teoria de filas
- Processos de manufatura
- logística e transporte com otimização

O estudo será centrado em estimar os parâmetros primeiramente de uma distribuição Weibull com a seguinte função densidade:

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{x-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\frac{x-\gamma}{\eta} \beta}; \beta > 0, \eta > \gamma \geq 0. \quad (1)$$

Tenha ciência também que sua acumulada tem o seguinte resultado:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x-\gamma}{\eta} \beta},$$

sendo  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$  os parâmetros de forma, escala e locação, respectivamente.

A distribuição Weibull tri-paramétrica é raramente usada devido à dificuldade de se estimar estes parâmetros. Portanto, o uso de SA será feito para tentar estimar estes parâmetros. Aqui o algoritmo será fundamental para maximizar a função de verossimilhança.

# Estimação por EMV

Temos ciência que a função de máxima verossimilhança é descrita da seguinte forma:

$$L(x) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i|\theta)$$

Com isso, a log-verossimilhança é a seguinte:

$$\text{Ln}(L(x_1, \dots, x_n, \beta, \eta, \gamma)) = n \text{Ln} \left( \frac{\beta}{\eta} \right) + \sum_{i=1}^n \left( - \left( \frac{x_i - \gamma}{\eta} \right)^{\beta} + (\beta - 1) \text{Ln} \left( \frac{x_i - \gamma}{\eta} \right) \right). \quad (2)$$

Para encontrar as estimativas dos parâmetros devemos realizar as derivadas parciais e igualar a zero, da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \text{Ln}(L(x)) = 0$$

Fica evidente que esta é uma função bem difícil de derivar, necessitando derivar gradiente ou mesmo aplicar métodos numéricos, portanto prosseguiremos para a ideia geral do algoritmo SA



A principal vantagem deste método perante os demais é fato de que este, ao se empregar uma busca aleatória, **não se prende a pontos de mínimos locais**. O algoritmo aceita mudanças que aceitam a diminuição e também o aumento da função objetivo  $f$ . O seu aumento é aceito com probabilidade:  $p = e^{-\frac{\Delta}{T}}$  sendo  $\theta$  o aumento e  $T$  o parâmetro de controle, analogamente conhecido como temperatura do sistema. A sua implementação é simples:

- Uma representação de soluções possíveis,
- Um gerador de mudanças aleatórias nas soluções,
- Um meio de avaliar as funções do problema, e
- Um esquema de resfriamento (annealing schedule) – uma temperatura inicial e regras para diminuí-la à medida que a busca progride.

```
simulated_annealing <- function(f, S0, T0, L, alpha, T_min) {  
  T <- T0; S <- S0  
  S_star <- S0; f_S <- f(S)  
  f_S_star <- f_S  
  while (T > T_min) {  
    for (n in 1:L) {  
      S_n <- gerar_vizinho(S)  
      f_S_n <- f(S_n); Delta <- f_S_n - f_S  
      if (Delta <= 0) {  
        S <- S_n; f_S <- f_S_n  
      } else {  
        p <- exp(-Delta / T)  
        if (runif(1) < p) {  
          S <- S_n; f_S <- f_S_n  
        }  
      }  
    }  
    if (f_S < f_S_star) {  
      S_star <- S; f_S_star <- f_S  
    }  
    T <- T * alpha  
  }  
  return(list(best_solution = S_star, best_cost = f_S_star))  
}
```

Por ser um algoritmo meta-heurístico, urge a importância de o mesmo ter a possibilidade de aceitar uma solução pior, evitando que o algoritmo caia em um máximo local e permaneça por lá. Claramente a probabilidade de aceitar uma pior solução diminui na mesma medida que a temperatura cai em cada um dos outros ciclos. A performance do algoritmo portanto é definida dentro de parâmetros de controle, sendo eles:

- A temperatura inicial ( $T_0$ ) deve ser grande o suficiente para que na primeira iteração do algoritmo, a probabilidade de aceitação de um cenário ruim seja, pelo menos 80%;
- É utilizada a função de redução, sendo esta geométrica compreendida por:  
 $T_i = CT_{i-1}$ , onde  $C < 1$ , constante e se encontra usualmente entre 0.75 e 0.95;
- O tamanho de cada nível de temperatura determina o número de soluções geradas em uma certa temperatura  $T$ ;
- O critério de parada define quando o sistema encontrou o nível de energia desejado. Em suma, isso define:
  - O total de números de soluções geradas.
  - A temperatura a cada nível de energia desejado.
  - A razão de aceitação (entre o número de soluções aceitas e geradas).

# Algoritmo SA para Maximização da Verossimilhança

Estimativa de  $\beta, \eta, \gamma$

Passo	Ação / Descrição
1	<b>Obter Amostra</b> aleatória (tamanho grande o suficiente).
2	<b>Determinar Parâmetros de Controle</b> ( $T_0, T_f, C, I$ ).
3	<b>Gerar Solução Inicial</b> aleatória ( $a, b, c$ ).
4	<b>Computar Verossimilhança Inicial</b> ( $L$ ) na solução ( $a, b, c$ ).
<b>Loop Externo (Resfriamento)</b>	
5	<b>Enquanto</b> $T > T_0$ : $T \leftarrow CT$
<b>Loop Interno (Equilíbrio)</b>	
6	<b>Para</b> $i = 1$ a $I$ :
6.1	<b>Gerar Vizinho:</b> Gerar $a_1, b_1, c_1$ vizinhos de $a, b, c$ .
6.2	<b>Calcular Verossimilhança Vizinha</b> ( $L_0$ ) em ( $a_1, b_1, c_1$ ).
6.3	<b>Avaliar Parâmetros (Critério de Metropolis):</b>
6.3.1	<b>Se</b> $L_0 > L$ (Melhora): $a \leftarrow a_1, b \leftarrow b_1, c \leftarrow c_1, \text{ e } L \leftarrow L_0$
6.3.2	<b>Senão</b> (Piora): Gerar $u \sim \text{Uni}(0, 1)$ .

6.3.2.1	<p><b>Se</b> <math>u &lt; e^{\frac{(F_0 - F)}{T}}</math> (Aceitação Probabilística):</p> $a \leftarrow a_1, b \leftarrow b_1, c \leftarrow c_1$
(Fim do Loop Interno)	
(Fim do Loop Externo)	
7	<b>Resultado:</b> Imprimir $a, b, c$ e $L$ .
<b>Nota:</b> $a, b, c$ são estimativas de $\beta, \eta, \gamma$ . $F$ é uma função de custo/energia (ex: $-\ln(L)$ ).	

# Código implementado

```
loglik_weibull3 <- function(params, x) {  
  b <- params[1] # beta (forma)  
  g <- params[2] # eta (escala)  
  c <- params[3] # gamma (locação)  
  
  if (b <= 0 || g <= 0 || any(x <= c)) {  
    return(-Inf)  
  }  
  
  z <- (x - c) / g  
  # Fórmula Log-Verossimilhança (Eq 7 do artigo)  
  ll <- length(x) * (log(b) - log(g)) + sum((b - 1) * log(z) - (z^b))  
  return(ll)  
}
```

```
propose_neighbor <- function(curr, x, sds = c(0.1, 0.1, 0.1)) {  
  attempt <- 0  
  min_x <- min(x)  
  repeat {  
    attempt <- attempt + 1  
    b1 <- curr[1] + rnorm(1, mean = 0, sd = sds[1])  
    g1 <- curr[2] + rnorm(1, mean = 0, sd = sds[2])  
    c1 <- curr[3] + rnorm(1, mean = 0, sd = sds[3])  
    if (b1 <= 0) {  
      b1 <- abs(b1) + 1e-6  
    }  
    if (g1 <= 0) {  
      g1 <- abs(g1) + 1e-6  
    }  
    if (c1 < min_x - 1e-8) {  
      return(c(b1, g1, c1))  
    }  
    if (attempt > 50) {  
      sds[3] <- sds[3] * 1.5  
    }  
    if (attempt > 1000) {  
      return(c(b1, g1, min_x - 1e-6))}}}
```

```

sa_weibull3 <- function(
  x,
  init = NULL,
  T0 = 100,
  Tf = 0.001,
  cooling_rate = 0.99,
  L = 5,
  sds = c(0.1, 0.1, 0.1)
) {
  n <- length(x)
  # Lógica de Inicialização (Simplificada)
  if (is.null(init)) {
    c0 <- min(x) - 0.1 * sd(x)
    if (c0 >= min(x)) {
      c0 <- min(x) - 1e-3
    }
    y <- x - c0
    y[y <= 0] <- min(y[y > 0]) * 0.1
    y_sorted <- sort(y)
    probab_rank <- (1:n) / (n + 1)
    ln_y <- log(y_sorted)
    ln_ln <- log(-log(1 - probab_rank))
  }
}

```



```

fit <- try(lm(ln_ln ~ ln_y), silent = TRUE)
if (inherits(fit, "try-error")) {
  init <- c(1.5, sd(x), min(x) - 0.1)
} else {
  b0 <- fit$coefficients[2]
  g0 <- exp(-fit$coefficients[1] / b0)
  init <- c(b0, g0, c0)
  if (
    !is.finite(b0) || !is.finite(g0) || !is.finite(c0) || b0 <= 0 || g0 <= 0
  ) {
    init <- c(1.5, sd(x), min(x) - 0.1)
  }
}
}

curr <- init
curr_ll <- loglik_weibull3(curr, x)
best <- curr
best_ll <- curr_ll
T <- T0
history <- data.frame(eval = 1, ll = curr_ll)
eval_count <- 1

```

# Loop SA

```

while (T > Tf) {
  for (i in 1:L) {
    prop <- propose_neighbor(curr, x, sds = sds)
    prop_ll <- loglik_weibull3(prop, x)
    if (prop_ll > curr_ll) {
      curr <- prop
      curr_ll <- prop_ll
    } else {
      delta_ll <- prop_ll - curr_ll

      if (runif(1) < exp(delta_ll / T)) {
        curr <- prop
        curr_ll <- prop_ll
      }
    }
    if (curr_ll > best_ll) {
      best <- curr
      best_ll <- curr_ll
    }
    eval_count <- eval_count + 1
    history <- rbind(history, data.frame(eval = eval_count, ll = curr_ll))
  }
  T <- cooling_rate * T}

```

```
return(list(  
    best_params = best,  
    best_ll = best_ll,  
    history = history,  
    evals = eval_count  
))  
}
```

# Resultados da Estimação por Recozimento Simulado

Weibull ( $\beta = 2$ ,  $\eta = 2$ ,  $\gamma = 2$ )

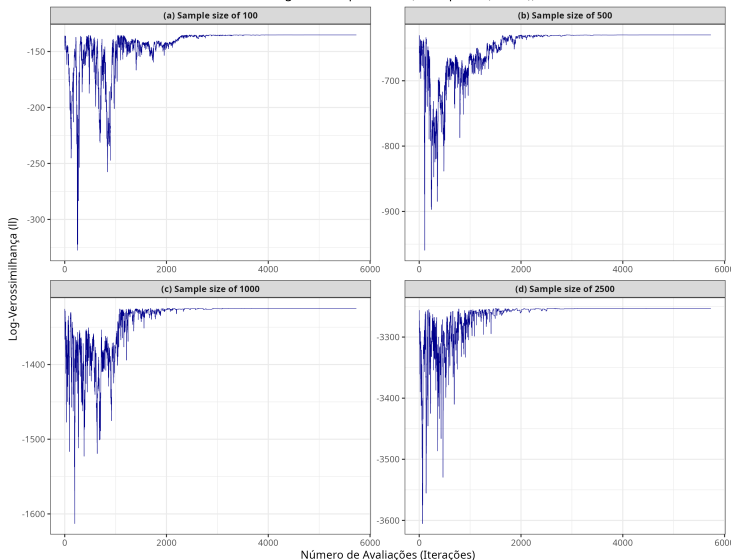
Weibull parameters		(2, 2, 2)			
Measure	2500	1000	500	100	
Estimated parameters ( $\beta$ , $\eta$ , $\gamma$ )	(1.9829, 2.0162, 2.0177)	(1.9374, 2.0165, 1.9982)	(2.0222, 1.9569, 2.0512)	(1.8491, 2.0029, 2.1073)	
Likelihood function at the real values	-3254.7346	-1326.3027	-631.2297	-136.3167	
Likelihood function at the estimated value	-3252.9574	-1324.7026	-629.9147	-135.1983	
Run time (s)	7.2342	6.0214	5.9584	6.8564	

**Table:** Tabela de Resultados para o Exemplo 1: Weibull (2, 2, 2) via SA

# Resultados da Estimação por Recozimento Simulado

Weibull ( $\beta = 2$ ,  $\eta = 2$ ,  $\gamma = 2$ )

Convergência SA para MLE (Exemplo 1: (2, 2, 2))



# Resultados da Estimação por Recozimento Simulado

Weibull ( $\beta = 3$ ,  $\eta = 5$ ,  $\gamma = 7$ )

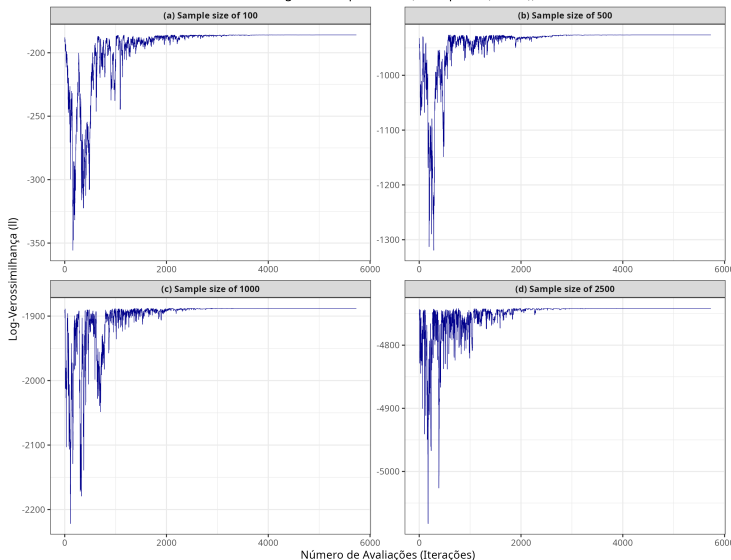
Weibull parameters		(3, 5, 7)			
Measure	2500	1000	500	100	
Estimated parameters ( $\beta$ , $\eta$ , $\gamma$ )	(2.9609, 4.9583, 7.0445)	(2.9254, 4.8563, 7.0478)	(3.2833, 5.1335, 6.8745)	(2.7800, 4.5803, 7.3323)	
Likelihood function at the real values	-4741.6982	-1889.3753	-927.9355	-186.2723	
Likelihood function at the estimated value	-4741.5966	-1887.9379	-926.3573	-185.9554	
Run time (s)	6.6395	6.0145	5.7210	5.6069	

**Table:** Tabela de Resultados para o Exemplo 2: Weibull (3, 5, 7) via SA

# Resultados da Estimação por Recozimento Simulado

Weibull ( $\beta = 3$ ,  $\eta = 5$ ,  $\gamma = 7$ )

Convergência SA para MLE (Exemplo 2: (3, 5, 7))



# Resultados da Estimação por Recozimento Simulado

Weibull ( $\beta = 8$ ,  $\eta = 4$ ,  $\gamma = 6$ )

Weibull parameters		(8, 4, 6)			
Measure	2500	1000	500	100	
Estimated parameters ( $\beta$ , $\eta$ , $\gamma$ )	(7.3183, 3.7274, 6.2453)	(7.4927, 3.8168, 6.2023)	(5.9484, 3.0631, 6.9459)	(4.2302, 1.9655, 8.0114)	
Likelihood function at the real values	-2062.5242	-831.9918	-411.7484	-70.3477	
Likelihood function at the estimated value	-2059.4080	-830.5465	-410.4577	-67.7416	
Run time (s)	6.6368	6.0142	6.4628	5.9164	

**Table:** Tabela de Resultados para o Exemplo 3: Weibull (8, 4, 6) via SA



# Resultados da Estimação por Recozimento Simulado

Weibull ( $\beta = 8$ ,  $\eta = 4$ ,  $\gamma = 6$ )

Convergência SA para MLE (Exemplo 3: (8, 4, 6))

