Programación y Métodos Numéricos
Práctica 1: Introducción a Matlab

---

1. Escribir un programa que le pida al usuario las notas de dos exámenes parciales y que calcule el promedio de las dos notas, mostrando este promedio por pantalla con dos decimales.

2. Escribir un programa que le pida al usuario las notas de dos exámenes parciales y un trabajo práctico y que calcule la nota final de la materia, sabiendo que ésta se determina de la siguiente manera: la nota del primer parcial representa el 30% del total, la nota del segundo parcial representa el 20%, y la nota del trabajo práctico representa el 50%.

3. Se leen los coeficientes reales A, B y C correspondientes a una función cuadrática de la forma $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ que sabemos que tiene dos raíces reales. Escribir un programa que muestre estas dos raíces (qué hay que suponer sobre los datos de entrada?).

4. Luego de una carrera, se conocen la hora de largada y de llegada de un participante, expresadas como (horas, minutos). Ambas horas corresponden al mismo día.

   a) Escribir un programa que muestre el tiempo que tardó el participante en minutos.
   b) Escribir un programa que muestre este tiempo en horas y minutos.

5. Conociendo las tres notas obtenidas por un alumno en una materia, decidir y mostrar por pantalla si el alumno está aprobado o desaprobado, sabiendo que debe tener promedio mayor o igual a 6 para aprobar.

   a) ¿Cómo se modifica el programa si ahora se pide que todas las notas sean mayores o iguales a 6 para aprobar?

6. Escribir un programa para calcular el importe que se le facturará a un cliente por consumo de electricidad, sabiendo que la compañía cobra una tarifa fija de $20 pesos que incluye los primeros 200 KW consumidos, y los KW excedentes se cobran a $0.50 por KW. Además, se agregan $7.80 de impuestos. El programa debe tomar como entrada los valores del medidor al comienzo y al fin del período.

7. Un año es bisiesto si es múltiplo de 4 pero no es múltiplo de 100. Como excepción a esta regla, los años que son múltiplos de 400 sí son bisiestos (por ejemplo, el año 1900 no fue bisiesto, pero el año 2000 sí lo fue). Escribir un programa que le pida un año al usuario y que indique si ese año fue o será bisiesto.

8. Se leen los coeficientes reales A, B y C correspondientes a una función cuadrática de la forma $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Escribir un programa que determine la cantidad de raíces reales de la ecuación, y que muestre las raíces reales en caso de que existan.

   a) ¿Cómo se modifica el programa si ahora se pide calcular todas las raíces, sin importar si son reales o complejas?

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 2: Estructuras de control iterativas

Primera parte: Ejercicios por línea de comandos

1. Desde la línea de comandos, generar con una única instrucción los siguientes vectores:

    a) Vector con los números naturales entre 1 y 20.
    b) Vector con los números pares entre 0 y 20.
    c) Vector con los números impares entre 1 y 99.
    d) Vector con los múltiplos de 5 entre 0 y 100.
    e) Vector con los números 0, 0.1, 0.2, 0.3, ..., 1.
    f) Vector con los cosenos de los números generados en el punto (e).
    g) Vector con los cuadrados de los números generados en el punto (e).
    h) Vector con números aleatorios entre 0 y 1.
    i) Vector con números aleatorios entre 0 y 10.
    j) Vector con números aleatorios entre 10 y 20.

2. Cargar un vector con números aleatorios entre 1 y 20 y mostrar por línea de comandos los siguientes resultados:

    a) Suma de los elementos del vector.
    b) Promedio de los elementos del vector.
    c) Valores máximo y mínimo del vector.
    d) Varianza y desviación estándar de los valores del vector.
    e) Elemento que más se repite en el vector (moda).

3. Cargar una matriz de 8x8 con números aleatorios, y mostrar por línea de comandos los siguientes resultados:

    a) Vector con la suma de las filas de la matriz.
    b) Vector con la suma de las columnas de la matriz.
    c) Suma de todos los elementos de la matriz.
    d) Submatriz de 3x3 ubicada en la esquina superior izquierda de la matriz original.
    e) Submatriz de 3x3 ubicada en la esquina inferior derecha de la matriz original.
    f) Submatriz de 4x4 ubicada en el centro de la matriz original.

Segunda parte: Ejercicios con programas en archivos

4. Escribir un programa que tome como parámetro un número entero positivo **n**, y que muestre por pantalla la tabla de multiplicar por **n**. Por ejemplo, si **n** = 3, entonces tiene que mostrar:

    3 x 1 = 3
    3 x 2 = 6
    3 x 3 = 9
    .....
    3 x 10 = 30

5. Escribir un programa que tome como parámetro un número entero positivo **n**, y que calcule la suma 1 + 2 + 3 + … + **n**, por medio de los siguientes métodos:

   a) Utilizando un ciclo “for” y una variable para acumular la sumatoria.
   b) Guardando los números 1, ..., n en un vector y utilizando la función “sum”.

6. Escribir un programa que le pida al usuario un número entero positivo y que calcule el factorial de ese número.

7. Escribir un programa que le pida al usuario un número entero positivo, y que muestre por pantalla todos los divisores positivos del número ingresado.

   a) Modificar el programa para que además de mostrar los divisores, informe la suma de los divisores hallados.

8. Un número entero es primo si tiene exactamente dos divisores positivos.

   a) Escribir un programa que le pida al usuario un número entero positivo, y que informe si el número ingresado es primo.

   b) Repetir el punto anterior, pero ahora suponiendo que el número que ingresa el usuario puede ser negativo.

9. Escribir un programa que calcule el promedio y la varianza de los números contenidos en un vector, utilizando ciclos “for” para realizar los cálculos. ¿Cómo cambia el programa si se permite usar la función “sum”?

10. Escribir un programa que permita jugar a adivinar un número. El programa genera un número entero aleatorio entre 1 y 100, y a continuación el usuario debe adivinar el número secreto. Cada vez que el usuario hace un intento, el programa debe informar si el número a adivinar es mayor o menor que el intento. El programa debe detenerse con un mensaje de felicitación cuando el segundo usuario adivina el número.

    a) Modificar el programa para que al terminar informe la cantidad de intentos que fueron necesarios para adivinar el número.

    b) Modificar el programa para que, además del número a adivinar, el usuario informe también el rango de números donde se debe buscar (es decir, en lugar de buscar entre 1 y 100, el usuario informa dos números **n** y **m**, y el programa genera el número secreto entre **n** y **m**).

11. El número π se puede aproximar por medio de la siguiente serie:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + \ldots$$

    a) Escribir un programa que le pregunte al usuario la cantidad de términos a sumar de la serie, y que muestre la aproximación con esa cantidad de términos.

    b) Escribir un programa que le pida al usuario una tolerancia ε, y que sume todos los términos que sean mayores que la tolerancia.

Tercera parte: funciones

12. Escribir una función que tome como parámetro un número entero y que retorne el factorial de ese número. Utilizar la función en un programa que calcule números combinatorios.

13. Escribir un programa que aproxime el valor del número e por medio de la siguiente serie:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

14. Escribir una función que tome como parámetro un número entero y que determine si el número es primo o no. Utilizar esta función para escribir un programa que calcule la cantidad de números primos entre 1 y 1000.

15. La **traza** de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal. Escribir una función que tome como parámetro una matriz cuadrada y que calcule su traza.

16. La **norma de Frobenius** de una matriz cuadrada $A \in \Re^{nxn}$ se define como:

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \quad .$$

    Escribir una función que tome como parámetro una matriz cuadrada y que calcule su norma de Frobenius. Comparar el resultado con la la función “norm” de Matlab.

17. Escribir una función que tome como parámetro una matriz y que calcule la densidad de la matriz (es decir, la proporción de celdas no nulas de la matriz).

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 3 – Aritmética de punto flotante

---

1. Escribir los siguientes números en binario:

   a) $x = 18$
   b) $x = 25$
   c) $x = 0.25$
   d) $x = 0.625$
   e) $x = 0.1$
   f) $x = 0.2$

   En función de estos resultados, ¿qué números pueden ser expresados con un número finito de dígitos binarios a la derecha de la coma binaria?

2. Encontrar dos números cuya representación en punto flotante de simple precisión (23 bits en la mantisa) no sea exacta (es decir, que tengan error de representación).

3. Encontrar dos números cuya representación en punto flotante de simple precisión sea exacta, pero cuya suma en esta representación no sea exacta.

4. ¿Es posible encontrar dos números positivos cuya suma en punto flotante de simple precisión sea menor que el mayor de ambos números?

5. Se deben sumar 10 números reales positivos de distintas magnitudes. ¿Con cuál de las siguientes estrategias se obtiene un menor error absoluto?

   a) Sumarlos de mayor a menor
   b) Sumarlos de menor a mayor
   c) Sumarlos en un orden aleatorio

6. ¿Qué significa un error absoluto de 0.5 unidades? ¿Qué significa un error relativo de 0.01? ¿Qué significa un error porcentual de 0.01? ¿Cuál de estas medidas de error es preferible en general?

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 4 – Búsqueda de raíces de funciones

1. Escribir un programa que aproxime el valor de la raíz cuadrada de 2 por medio del método de bisección aplicado a la función $f(x) = x^2 - 2$, tomando como datos de entrada el intervalo donde ejecutar el método y la cantidad de iteraciones.

    a. Modificar el programa para que proteste en caso de que la función no cambie de signo en el intervalo especificado.

    b. Modificar el programa para que en lugar de tomar como dato de entrada la cantidad de iteraciones, tome como dato la precisión requerida para la raíz, y que interrumpa la búsqueda cuando se alcanzó la precisión especificada.

2. Escribir un programa que aproxime el valor de la raíz cuadrada de 2 por medio del método de Newton-Raphson aplicado a la función $f(x) = x^2 - 2$, tomando como datos de entrada el punto inicial para el método y la cantidad de iteraciones. ¿Cómo se compara la convergencia de este método con el implementado en el punto anterior?

3. Escribir una función que resuelva la ecuación $x = tg(x)$ por medio del método de Newton-Raphson, tomando como parámetro el punto inicial para el método y la tolerancia ε para el valor de la función en la raíz hallada (es decir, si x es la raíz encontrada por el método, debe cumplirse que $| f(x) | < \varepsilon$).

4. El coeficiente de fricción para el flujo de una suspensión de partículas fibrosas se puede relacionar con el número de Reynolds mediante la siguiente ecuación empírica:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{k} \ln(\mathrm{Re} \sqrt{f}) + (14 - \frac{5.6}{k}).$$

    En esta ecuación, f es el coeficiente de fricción, Re es el número de Reynolds y k es una constante determinada por la concentración de la suspensión. Para una suspensión con 0.08 % de concentración, se tiene que k = 0.28. ¿Cuál es el valor de f si Re = 3750?

5. En estudios sobre recolección de energía solar al enfocar un campo de espejos planos en un colector central, se obtiene la siguiente ecuación para el factor de concentración geométrica C:

$$C = \frac{\pi\,(h / \cos(A))^2\ F}{0.5\,\pi\, D^2\ (1 + \mathrm{sen}(A) - 0.5 \cos(A))},$$

    donde A es el ángulo del anillo del campo, F es la cobertura fraccionaria del campo con los espejos, D es el diámetro del colector y h es la altura del mismo. Encontrar el valor de A, si h = 300, C = 1200, F = 0.8 y D = 14.

6. La razón de flujo de agua en una corriente a veces se mide mediante la instalación de una presa. Esto supone la construcción de un dique a través de la corriente con una muesca en forma de V cerca del centro (la punta de la muesca está hacia abajo). Si se desprecia la velocidad contracorriente, el flujo Q está relacionado con la distancia h de la superficie del agua a

contracorriente al punto de la V y con el ángulo θ (en grados) entre los lados de la muesca mediante la fórmula:

$$Q = \frac{0.59*8}{15}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}\,h^{2.5},$$

donde g = 9.8 es la constante gravitacional. Si Q = 200, escribir un programa que genere una tabla que muestre cómo está relacionada h con θ para valores de θ entre 20 y 130 grados.

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 5 – Integración numérica

1. Escribir un programa que le pida al usuario dos números reales a y b, junto con el paso de integración h > 0, y que calcule la siguiente integral por el método de suma de rectángulos, el método del trapezoide y el método de Simpson:

$$I = \int_a^b \sqrt{x}\ \mathrm{sen}(x)\, dx$$

Comparar la precisión de los tres métodos en función del paso de integración.

2. ¿Cómo se modifica el programa del punto anterior si, en lugar del paso de integración, el programa pide al usuario la cantidad de subintervalos en la cual se debe dividir el intervalo de integración?

3. Escribir tres funciones que tomen como parámetros tres números reales a, b, h, y que calculen la siguiente integral numérica por medio del método de suma de rectángulos, el método del trapecio y el método de Simpson, respectivamente, tomando h como paso de integración:

$$I = \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx$$

El programa debe llamar a las tres funciones con distintos valores de h, mostrando los resultados por pantalla en forma de tabla, de manera de poder compararlos. ¿Qué conclusiones se pueden obtener en cuanto a la precisión de estos métodos?

4. Escribir un programa para calcular la integral del ejercicio 1, pero que tome dos pasos de integración h_1 y h_2, tales que $h_1 < h_2$. El programa debe usar el segundo paso de integración cuando el módulo de la derivada de la función a integrar es menor que 2, y el primer paso de integración en caso contrario. ¿Por qué es conveniente usar este método?

5. A pesar de que los métodos de integración numérica proporcionan resultados aproximados, puede suceder que para algunas funciones estos métodos encuentren el valor exacto de la integral si no se tienen en cuenta los errores numéricos.

   a) Encontrar una función para la cual el método del trapezoide encuentre la integral exacta pero tal que el método de Simpson no encuentre la integral en forma exacta.

   b) Encontrar una función para la cual el método de Simpson encuentre el valor exacto de la integral, pero tal que el método del trapezoide no encuentre el valor exacto.

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 6 – Sistemas de ecuaciones lineales

---

1. Resolver por línea de comandos los siguientes problemas, donde A es una matriz de 4x4 con 4 en la diagonal y 1 en el resto de las posiciones, y b es un vector compuesto por unos:

   a) Encontrar un vector columna x tal que Ax = b.
   b) Encontrar un vector columna x tal que A^3 x = b.
   c) Encontrar un vector fila x tal que x^T $A=b^T$.

2. Armar una matriz A cuadrada tridiagonal, con 5 en la diagonal principal y -1 en las dos diagonales secundarias, y resolver el sistema Ax = b, donde b es el primer vector canónico.

3. Escribir una función que tome como parámetro una matriz cuadrada y que encuentre una solución no nula al sistema Ax = 0.

4. Escribir una función que tome como parámetro una matriz cuadrada A y un autovalor d de la matriz, y que encuentre un autovector asociado al autovalor d resolviendo el sistema (A-dI) x = 0.

5. Escribir una función que genere un gráfico de las soluciones del sistema Ax=b, donde A = [1 2; 2 1] y b=[0 t], para distintos valores de t.

6. Calcular el número de condición de las siguientes matrices:

   a) Matriz identidad
   b) La matriz A del ejercicio 1
   c) La matriz A del ejercicio 2
   d) Una matriz aleatoria

7. Escribir una función que genere un gráfico del número de condición de la matriz A = [e 0; 0 1] para valores de e entre 1 y 0.0001. ¿Qué conclusiones se pueden obtener de este gráfico?

   a) Utilizando esta matriz, resolver el sistema Ax = b para b = [e 1] y graficar el residuo de la solución obtenida (el residuo se calcula como ||Ax-b||).

   b) Utilizando esta matriz, resolver el sistema Ax = b para b = [e 1] y graficar el error relativo de las soluciones obtenidas con relación a la solución real. ¿Qué conclusiones se pueden obtener de estos gráficos?

8. Graficar el tiempo que tarda la resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuadrado con valores aleatorios en los coeficientes de la matriz, en función de la cantidad de filas de la matriz. ¿Cuál es el tamaño del sistema más grande que se puede resolver en un tiempo de 2 minutos?

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 7 – Interpolación

---

1. Consideremos la función $f(x) = e^x$, definida en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

   a) Aproximar $f(0.25)$ interpolando linealmente los valores de f en $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$.
   b) Aproximar $f(0.75)$ interpolando linealmente los valores de f en $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$.
   c) Aproximar $f(0.25)$ y $f(0.75)$ interpolando ahora con un polinomio cuadrático los valores de f en $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.
   d) Comparar los resultados obtenidos con los valores reales de la función.

2. Mostrar un ejemplo de puntos provenientes de una función cuya interpolación con el polinomio interpolador de Lagrange no sea satisfactoria.

   a) ¿En qué casos se puede garantizar de antemano que la interpolación obtenida con este método se ajustará a la función que originó los datos?

3. Utilizando Matlab por línea de comandos, encontrar el spline cúbico natural que interpola los siguientes datos:

x =	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$ =	0	0.2	0.4	0.8	1.1	0.8	0.4

   a) Graficar el spline y destacar los puntos que se están interpolando. En función del aspecto del gráfico, ¿se puede afirmar que la interpolación es satisfactoria para estos puntos?

4. Utilizando Matlab, muestrear la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en los puntos $x_i = 0.5\, i$, para $i = 0, \ldots, 8$ e interpolar los puntos obtenidos por medio de un spline cúbico natural. ¿Qué puede decir de la aproximación obtenida por medio de la interpolación?

5. La siguiente tabla registra las variaciones en la magnitud aparente de una estrella, en función de su fase:

Fase	-110	-80	-40	-10	30	80	110
Magnitud	7.98	8.95	10.71	11.70	10.01	8.23	7.86

   a) Los datos son periódicos en el sentido de que la magnitud para la fase -120 es igual que para la fase +120. Tomando esto en cuenta, interpolar por medio de un spline los datos precedentes.

   b) Los siguientes datos corresponden a otras mediciones de la misma estrella:

Fase	-100	-60	-20	20	60	100
Magnitud	8.37	9.40	11.39	10.84	8.53	7.89

   ¿Con cuánta precisión se pueden estimar estos nuevos valores con la interpolación realizada en el punto anterior?

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 8 – Ecuaciones diferenciales ordinarias

---

1. Utilizar el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar $y(0.5)$, si y es la solución de la ecuación diferencial $y' = 1 + x^2y^2$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

2. Encontrar la solución general de la ecuación $y' + 2xy = 0$. Utilizar el método de Euler con $h = 0.25$ y con $h = 0.1$ para aproximar $y(0.5)$, si y es la solución de la ecuación diferencial para la condición inicial $y(0) = 1$. Comparar las aproximaciones obtenidas con la solución real.

3. Escribir un programa para graficar por el método de Euler la solución a la ecuación diferencial $y' = y$ con la condición inicial $y(0) = 1$ en el intervalo [0,1], tomando $h = 0.1$.

4. Escribir un programa para graficar por el método de Euler la solución a la ecuación diferencial del punto anterior en el intervalo [0,1], tomando $h = 0.1$ y $h = 0.01$.

   a) ¿Cómo se comparan las curvas obtenidas con la solución real? Modificar el programa para que muestre también la solución real en el gráfico, para permitir la comparación.

   b) Graficar ahora las soluciones obtenidas por el método de Euler en el intervalo [0, 10]. ¿Cómo se comparan con la solución real?

5. Consideremos el método de Euler sobre el problema $y' = -y$ con condición inicial $y(0) = 1$.

   a) Determinar una fórmula explícita para y_n en función de h.
   b) ¿Para qué valores de h la secuencia $y_0, y_1, y_2, \ldots$ es acotada?
   c) Verificar la respuesta del punto anterior realizando pruebas con Matlab.

6. Utilizar el método de Euler con $h = 0.1$ y 0.01 para aproximar $y(0.5)$, si y es la solución de la ecuación diferencial $y' = 1 + x^2y^2$ con la condición inicial $y(0) = 0$. Aplicar la extrapolación de Richardson para mejorar la calidad de la aproximación.

7. Utilizar el método de Euler con $h = 0.2$ y 0.1 para aproximar $y(0.5)$, si y es la solución de la ecuación diferencial $y' = y + xy^2$ con la condición inicial $y(0) = 0$. Aplicar la extrapolación de Richardson para mejorar la calidad de la aproximación.

8. Escribir un programa para graficar la solución a la ecuación diferencial $y' = y2$ con la condición inicial $y(0) = 1$ en el intervalo [0,1]. Dicha solución debe ser obtenida por el método de Euler y extrapolación de Richardson, para $h = 0.1$, y 0.01.

9. Estimar $y(0.2)$ por medio del método de Runge-Kutta con $h = 0.1$, donde y es la solución de la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$ con condición inicial $y(0) = 1$.

10. Escribir un programa para graficar la solución de la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$ con condición inicial $y(0) = 1$ en el intervalo [0,1] por medio del método de Runge-Kutta con $h = 0.1$.

a) ¿Cómo se compara la curva obtenida con la solución para $h = 0.01$?
b) ¿Cómo se comparan las curvas obtenidas con las curvas generadas por el método de Euler?

11. La ecuación $y' = 1 + y^2$ con condición inicial $y(0) = 0$ tiene la solución analítica $y = \text{tg}(x)$. la función tangente tiende a infinito cuando x tiende a $\pi/2$. Resolver esta ecuación por medio de los métodos de Euler y Runge-Kutta entre $x = 0$ y $x = 1.6$ con $h = 0.1$ y comparar los resultados con la solución analítica. ¿Qué se puede concluir en este caso con relación a la existencia de asíntotas en la solución?

Programación y Métodos Numéricos
Práctica 9 – Problemas con condiciones de contorno

---

1. Consideremos el siguiente problema con condiciones de contorno:

$$y'' - xy' + 3y = 11x, \qquad y(1) = 1.5, \qquad y(2) = 15.$$

Resolver este problema con el método de disparo, sabiendo que $y'(1)$ está cerca de 5. Usar h = 0.2 y comparar los resultados al usar los métodos de Euler y de Runge-Kutta. ¿Se puede encontrar la solución analítica? En ese caso, ¿cómo se comparan los resultados obtenidos con la solución analítica?

2. El método del disparo puede trabajar hacia atrás (comenzando por el extremo derecho del intervalo). Resolver el ejercicio anterior comenzando el método del disparo desde x =2. Notar que en este caso h es negativo. ¿Se obtienen los mismos resultados?

3. Aplicar el método del disparo para resolver el siguiente problema:

$$y'' + yy' = e^{x/2}, \qquad y(-1) = 2, \qquad y(1) = 3.$$

¿Por qué es más difícil resolver este problema que el problema de los ejercicios anteriores? Variar el tamaño del paso y comparar las curvas obtenidas.

4. Resolver el problema del ejercicio 1 por medio de aproximaciones por diferencias finitas. ¿Qué valor de h se debe usar en este caso para que la aproximación se la misma que la obtenida en ese ejercicio?

5. Consideremos el siguiente problema con condiciones de contorno:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{y}{4} = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 2.$$

La solución de este problema es $y = 2\ \mathrm{sen}(\theta/2)$. Resolver este problema usando aproximaciones por diferencias finitas con $h = \pi/4$ y mostrar los errores cometidos con relación a la solución analítica. Repetir con un paso más pequeño, de manera tal que el error relativo máximo sea del 0.5%.

6. Resolver el siguiente problema por diferencias finitas, usando h = 0.2 y h = 0.1.

$$y'' + yy' - x^2y = 2x^3, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = -1.$$

¿Por qué es más difícil resolver este problema que el problema de los ejercicios anteriores? Variar el tamaño del paso y comparar las curvas obtenidas.

7. Repetir el ejercicio 5 pero con las condiciones de contorno en la derivada $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$. Comparar la solución obtenida con $y = -2\cos(\theta/2)$.

8. Escribir un programa para resolver el siguiente problema por diferencias finitas con cuatro subintervalos:

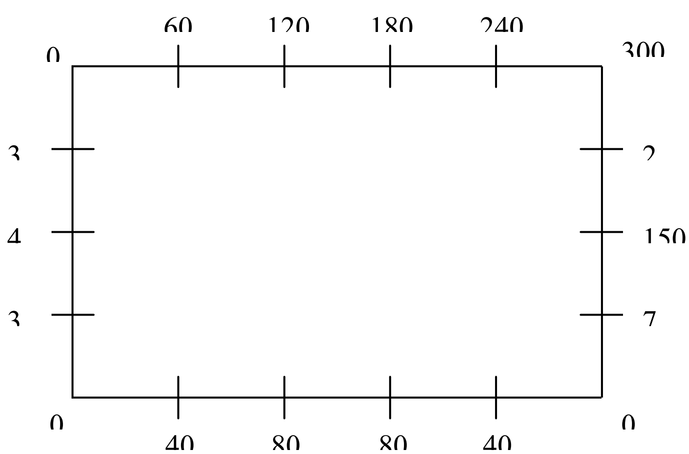
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0, \qquad y'(0) + y(0) = 2, \qquad y'(\pi/2) + y(\pi/2) = -1.$$

   a) Modificar el programa para que tome dos valores *a* y *b*, y que considere las condiciones de contorno $y'(0) + y(0) = a$, $y'(\pi/2) + y(\pi/2) = b$.

9. Resolver el problema de calcular las temperaturas en estado de equilibrio de una placa rectangular de 12 cm. de largo y 15 cm. de ancho, si uno de los bordes de 15 cm. se mantiene a 100 ^{o}C y el otro borde de 15 cm. se mantiene a 50 ^{o}C. Los dos bordes de 12 cm. se mantienen a 50 ^{o}C. Colocar los nodos de la discretización a 3 cm. entre sí.

   a) Graficar la temperatura resultante, con un gráfico en tres dimensiones y un gráfico de imagen de calor.
   b) Dibujar la ubicación aproximada de la curva isoterma de 65 ^{o}C.

10. Resolver el problema de calcular las temperaturas en estado de equilibrio en la siguiente placa de 10 cm. de largo y 8 cm. de ancho, con una separación entre nodos de 2 cm. y las temperaturas en el borde indicadas en la figura:



11. Supongamos que la ecuación diferencial para los dos ejercicios anteriores es 3 u_{xx} + 2 u_{yy} = 0. ¿Cómo cambia la solución en ambos casos?

12. La región sobre la que se resuelve la ecuación de Laplace no tiene que ser rectangular. Proponer una región irregular con temperaturas conocidas en los bordes, y calcular las temperaturas en equilibrio usando una discretización adecuada.