Dispersión Caótica

Proyecto Final Física Computacional I

Valentina Bedoya Aristizábal. Andrés David Gómez Villegas.
Lina María Montoya Zuluaga.

Diciembre 2019

Introducción

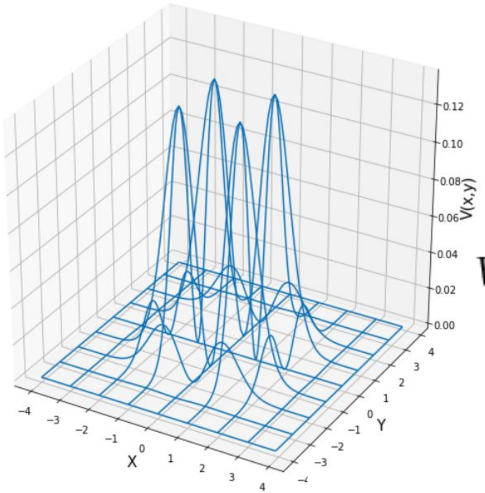
Los fenómenos de dispersión son de gran interés en física. Con ellos podemos estudiar la naturaleza de las interacciones fundamentales de la Física Teórica y describir una infinidad de fenómenos que toman lugar en las ciencias aplicadas.

Descripción del problema.

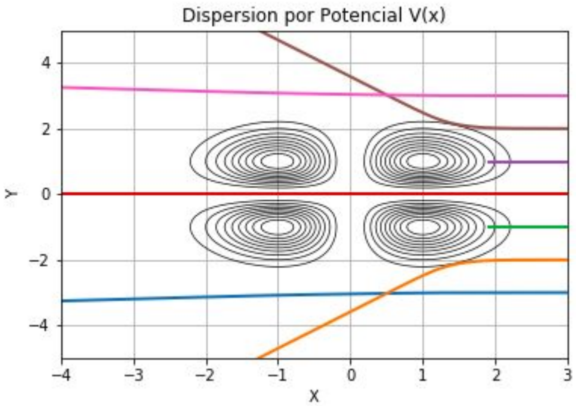
El objetivo de este proyecto será entonces el estudio computacional de la dispersión por un potencial V(x,y) que exhibe un comportamiento caótico.

Específicamente:

- Modelar Computacionalmente la dinámica del sistema.
- Estudiar el régimen caótico del sistema.



$$V(x,y) = x^2 y^2 e^{-(x^2+y^2)}$$



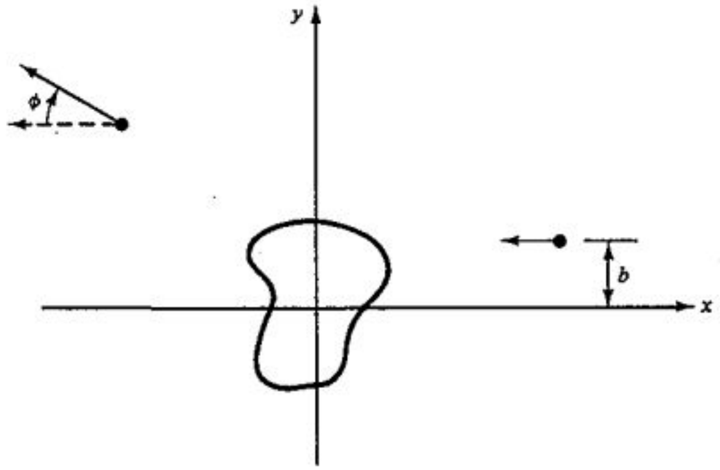
Marco teórico.

La descripción física del problema de dispersión de una partícula por un potencial se puede escribir matemáticamente por la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla V(\mathrm{x})$$

cuya solución arroja como resultado una dependencia funcional entre:

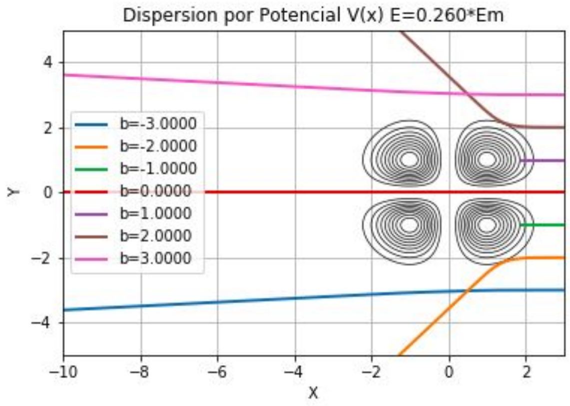
$$\phi = f(b)$$

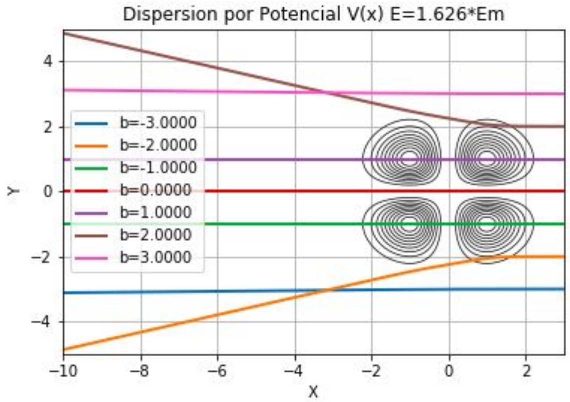


Metodología

Para el estudio computacional del fenómeno de dispersión se desarrolló un código que llevará a cabo las siguientes tareas:

- Integración de las ecuaciones de Movimiento (por medio de un algoritmo RK4)
- Sensibilidad a las condiciones iniciales
- Graficación de los retratos de fase
- Dependencia funcional $\phi = f(b)$





Solución del sistema por RK4 y sus ecuaciones de movimiento.

$$V(x,y) = x^2 y^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2y^2 x(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 2x^2 y(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$$

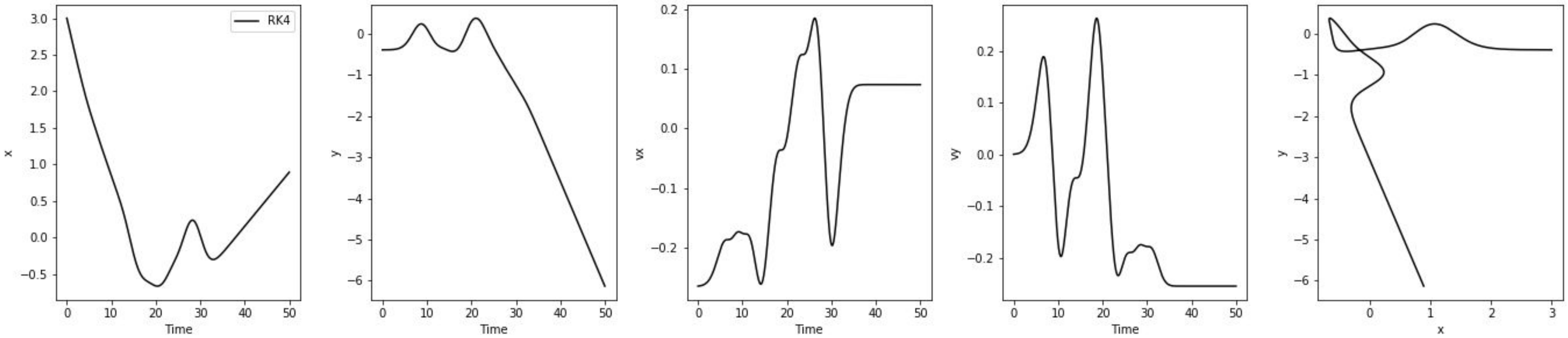
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{m} y^2 x(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

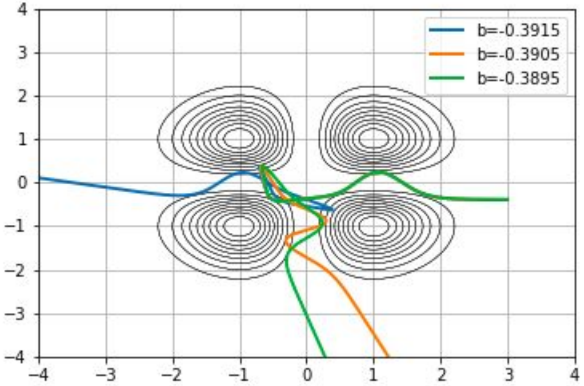
$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{m} x^2 y(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

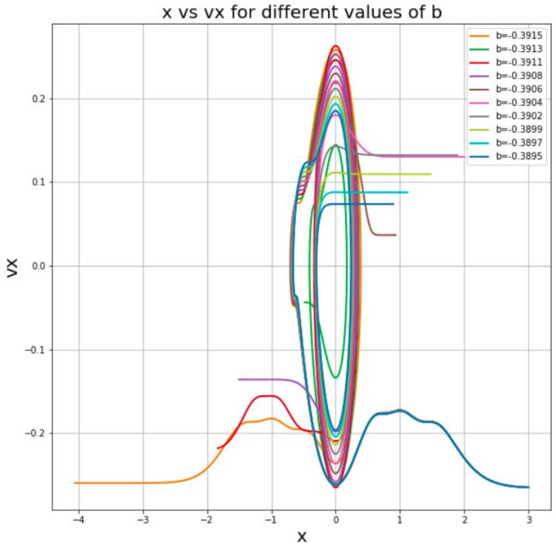
Análisis y Resultados

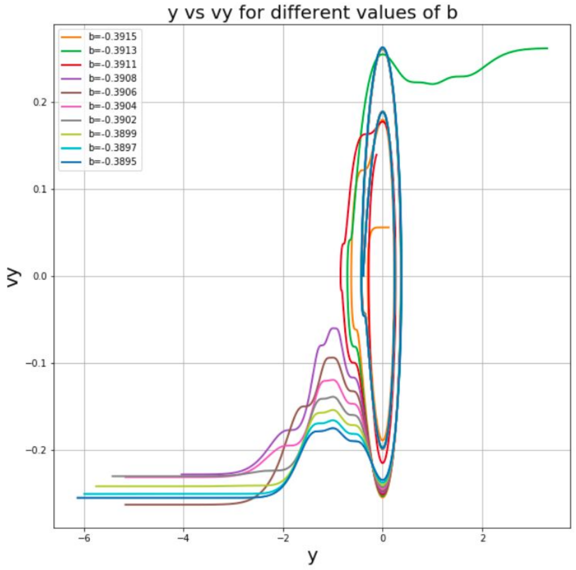
Para analizar la física del sistema es esencial contar con la dependencia funcional de las variables dinámicas con el tiempo para así poder construir:



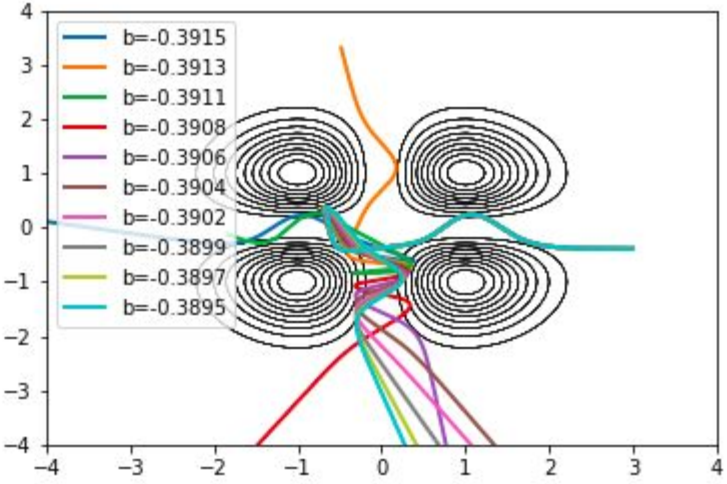
Análisis y Resultados



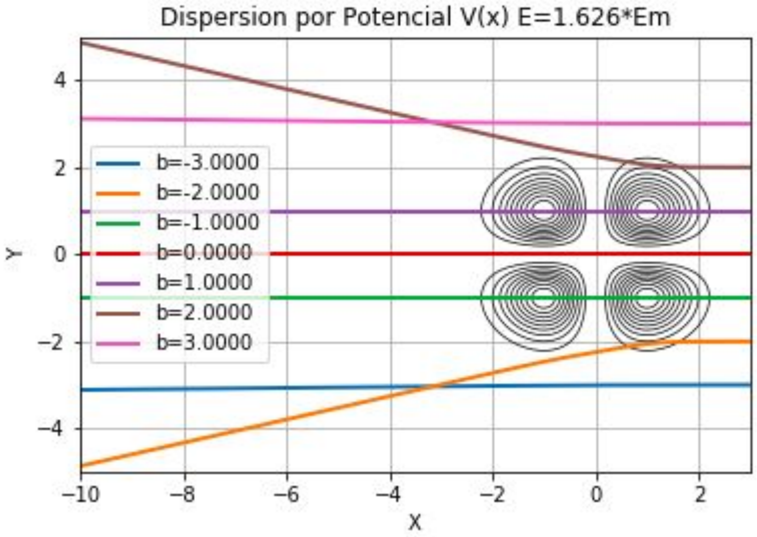




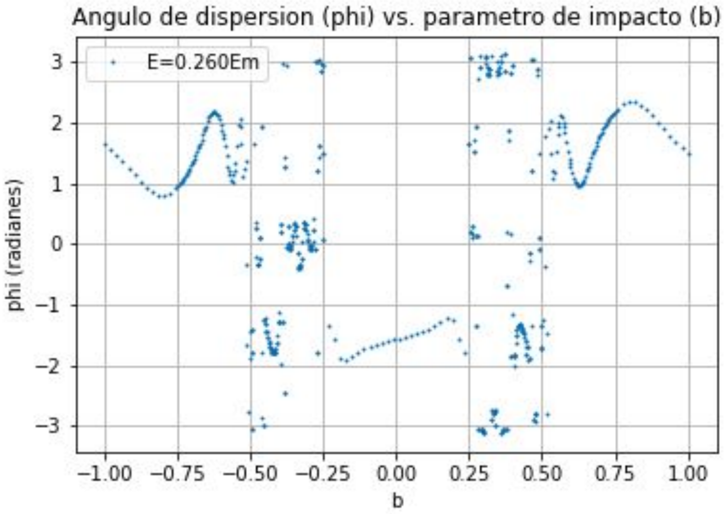
¿cuál es el régimen caótico de nuestro sistema?



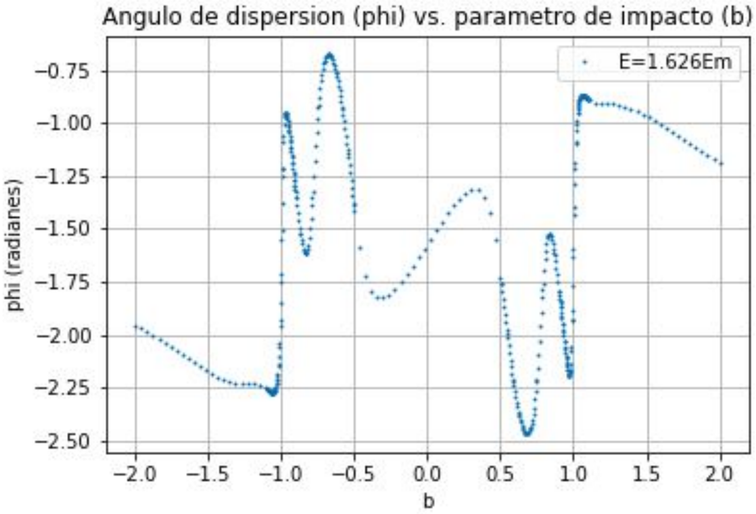
vs



¿cuál es el régimen caótico de nuestro sistema?



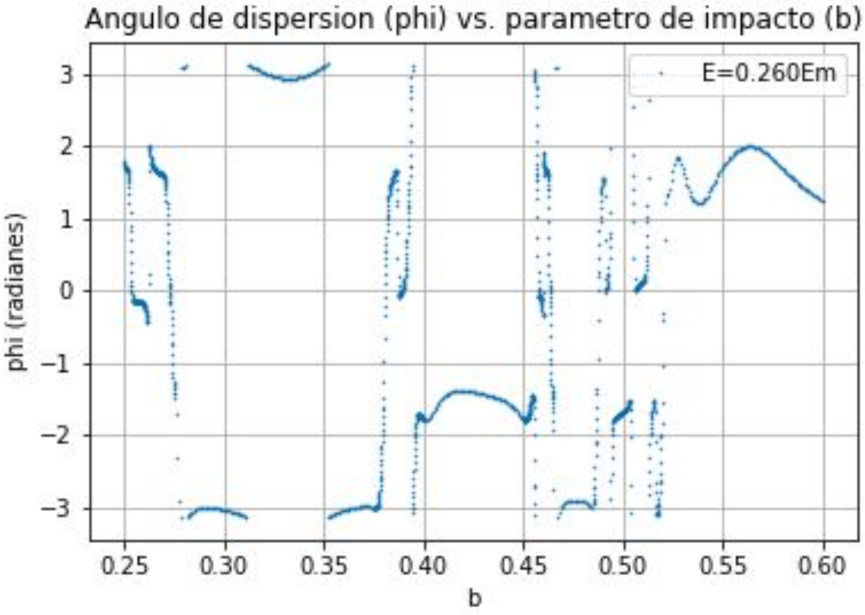
vs



¿cuál es el régimen caótico de nuestro sistema?

Algunas de las características que encontramos en nuestro sistema en el régimen caótico son:

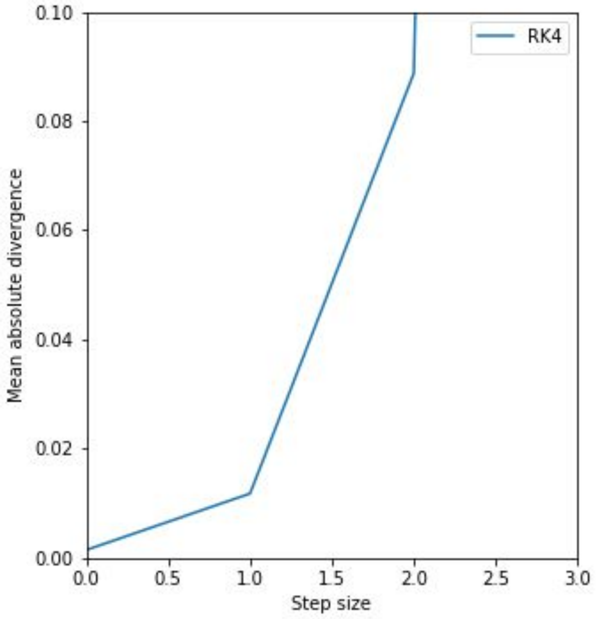
- Sensibilidad a la condiciones iniciales
- Discontinuidades en $\phi = f(b)$
- La condición que determina el estado de caos dentro del sistema está determinado por la relación entre la energía del problema en particular E y la energía máxima del sistema asociada al potencial Em

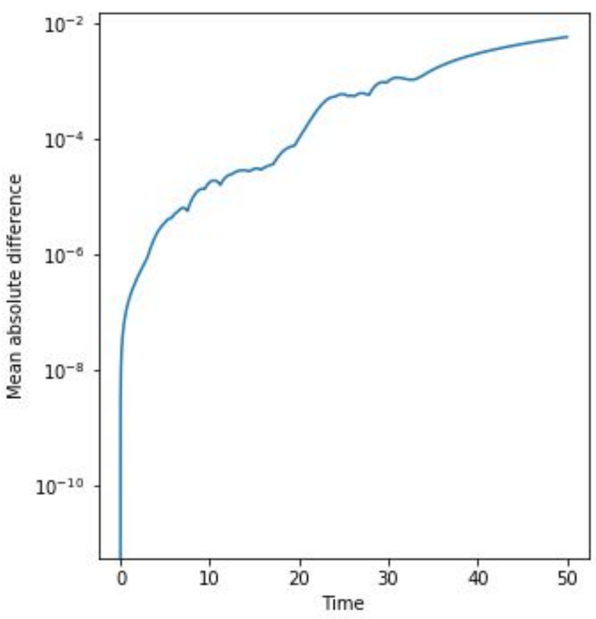


Conclusiones

- En presencia de caos, como es de esperarse, se evidencia una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, plasmada también en una variación discontinua y con cambios abruptos en la descripción cualitativa de la variación del ángulo de dispersión, conforme se muestra un espectro del parámetro de impacto.
- La implementación computacional permite evidenciar la naturaleza caótica de nuestro sistema.
- A pesar de los cambios en las trayectorias, se sigue presentando determinismo.

Anexos


RK4
Mean absolute divergence
Step size
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


Mean absolute difference
Time
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
0
10
20
30
40
50