

# Chaotic Scattering.

Valentina Bedoya Aristizábal. Andrés David Gómez Villegas. Lina María Montoya Zuluaga.

Diciembre 2019

## Abstract

Los fenómenos de dispersión son de gran interés en física, puesto que permite estudiar la forma en que interaccionan una partícula que es "disparada" hacia una region en la cual actúa un potencial. En este caso en particular, se hace el estudio sobre dicha interacción entre una partícula lanzada al área con un potencial en particular, dicha interacción presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, por tanto, lo que se pretende en el siguiente trabajo es mostrar las condiciones bajo las cuales se evidencia caos y mencionar algunos otros ejemplos prácticos en los que estas interacciones pueden ser de utilidad.

## 1 Introducción

La dispersión caótica puede presentarse en problemas de hidronámica, fenómenos que involucren reacciones químicas o problemas gravitacionales de más de dos cuerpos.

Los sistemas que exhiben dispersión son altamente estudiados en campos de la Física y la Astronomía, como la Mecánica Celeste, la Dinámica de Fluidos [3], además de que contribuye a la comprensión de muchos sistemas dinámicos y sus cambios cualitativos y cuanti-

tativos dada la variación de ciertos parámetros (Diagramas de Bifurcación), lo que determina cuáles van a ser las condiciones de interés y los parámetros que van a determinar y restringir el comportamiento del sistema.

Como es de esperarse, los problemas reales son altamente complejos, constituidos por sistemas abiertos, en los cuales intervienen muchas variables, sin embargo, para hacer un análisis y primer acercamiento al sistema, basta con simplificar la forma del potencial y aún así, el estudio del problema permite obtener información de sumo interés sobre la interacción entre la partícula que es lanzada y el potencial.

Es muy común trabajar con potenciales que exhiben dispersión con características de no-linealidad, sin embargo, para el presente caso en particular, existe una aparente presencia de carácter azaroso, con irregularidades en la descripción mecánica del problema dada su alta sensibilidad a las condiciones iniciales, pero con predicciones totalmente deterministas, dando paso a lo que se conoce como dispersión caótica.

## 2 Descripción del problema.

Los problemas de dispersión consisten en el estudio de la interacción existe entre una partícula lanzada a una cierta región y el potencial que actúa en dicha zona.

Para el presente caso, se cuenta con un potencial de la siguiente forma:

$$V(x, y) = x^2 y^2 e^{-(x^2 + y^2)}$$

y que se anula fuera de la región de dispersión. Lo que suele estudiarse en este tipo de problemas son conocidos como el parámetro de impacto ( $b$ ) y el ángulo de dispersión ( $\phi$ ), los cuales son la variable de entrada y salida, respectivamente [2].

Finalmente, la intención con el problema es analizar la relación entre las variables de entrada y salida y determinar las condiciones bajo las cuales se presenta caos.

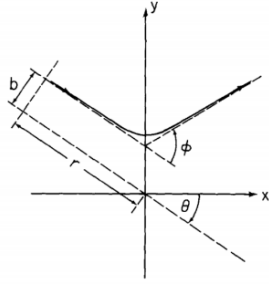


Figure 1: Descripción del problema de dispersión, donde  $b$  es el parámetro de impacto y  $\phi$  es el ángulo de dispersión.

## 3 Metodología.

Para el desarrollo del presente proyecto se realiza un programa en python que realiza varias tareas.

Por una parte, se grafica el potencial (Figura 2), la cual permite ver la forma del mismo y visualizar algunos detalles que pueden ser de interés para el estudio del sistema.

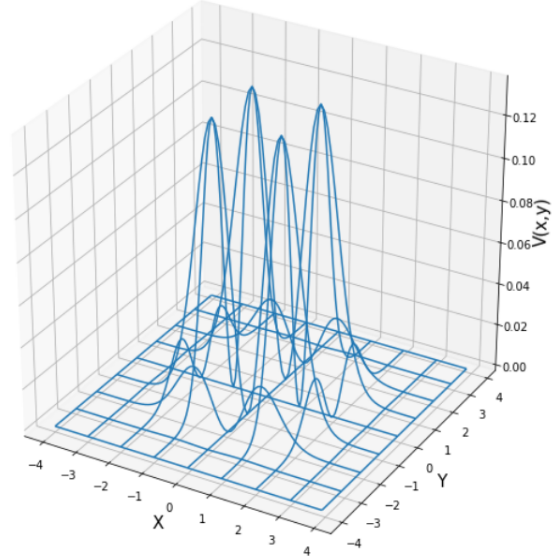


Figure 2: Potencial  $V(x, y) = x^2 y^2 e^{-(x^2 + y^2)}$ , con máximos en  $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ .

Adicional a ello, el código calcula la solución del sistema para cada una de las cuatro variables de estado del mismo, las dos posiciones  $(x, y)$  y sus correspondientes velocidades  $(v_x, v_y)$ . Las soluciones del sistema se hallan usando RK4 [1] y adicional a ello, se verifica la convergencia del método usando paquetes de integradores de python.

Finalmente, para obtener información significativa del problema, se grafican diferentes retratos de fase, se verifica la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales y se analizan las

condiciones para que el sistema se encuentre o no en el régimen caótico y el comportamiento de las variables del sistema (parámetro de impacto y ángulo de dispersión) para cada uno de los casos.

## 4 Análisis y Resultados.

Como primer resultado importante está el hecho de que el sistema no exhibe caos bajo cualquier circunstancia, es decir, existen condiciones particulares sobre el problema que determina la presencia de caos en el sistema. Dicha condición particular se refiere a la relación entre la energía del problema que se está solucionando y la energía máxima del sistema (asociada a los máximos del potencial). Como se encuentra en la literatura, el caos aparecer cuando la energía del sistema está alrededor de  $E = 0.26E_m$ , donde  $E_m$  es la energía máxima del sistema, mientras que el fenómeno se comporta de manera regular o convencional cuando la relación es del orden de  $E = 1.626E_m$ .

En los siguientes diagramas se logra ver claramente lo que se explicó en el punto anterior, para el caso de presencia de caos (Figura 3) es evidente que aún cuando el parámetro de impacto varía muy poco, las trayectorias son sumamente diferentes, mientras que en el caso regular o convencional (Figura 4), los pasos entre los parámetros de impacto son amplios y las trayectorias se siguen conservando semejantes unas con otras.

Por otro lado, en cuanto a lo que se narró ya en la metodología del proyecto, se utiliza el método de RK4 para solucionar el sistema y paralelo a este método se usa el integrador

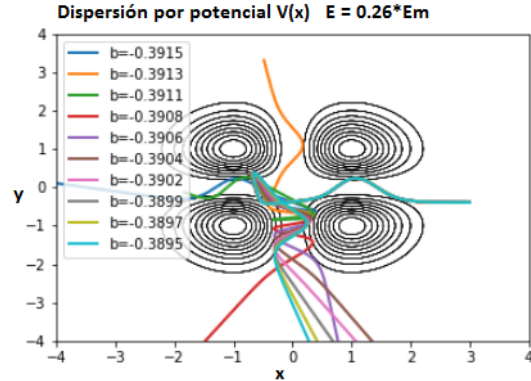


Figure 3: Trayectorias para el sistema que exhibe Dispersión Caótica

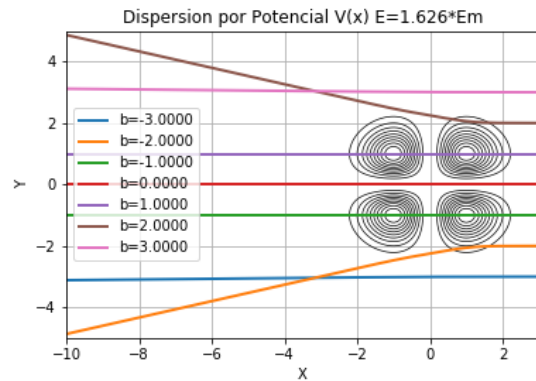


Figure 4: Trayectorias para el sistema que exhibe Dispersión Regular

odeint, una herramienta computacional y sumamente exacta y precisa para este tipo de problemas. Como logra verse en los gráficos (Figura 5), con ambos métodos se obtiene el mismo comportamiento cualitativo del sistema y como logra verse en el análisis de convergencia (Figura 6), el error del método, si se toma como valor teórico al obtenido con odeint, aunque aumente con el tiempo, es cuantitativamente pequeño.

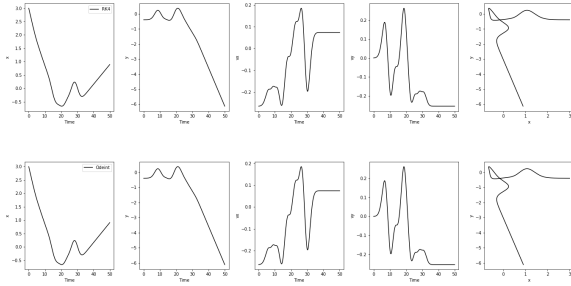


Figure 5: Solución del sistema usando los integradores Odeint y RK4.

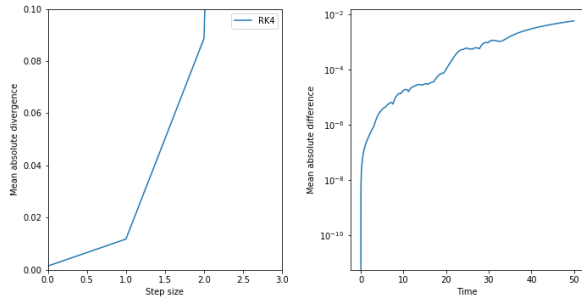


Figure 6: Convergencia del método RK4.

Otra parte vital del análisis conceptual y computacional que se hace del problema hace referencia al estudio de las variables de entrada y salida del sistema, el parámetro de impacto y el

ángulo de dispersión. Es claro que el comportamiento de  $bvs\phi$  para el caso regular, podría describirse con una función continua, sin saltos abruptos, lo que da cuenta de una variación suave del comportamiento del sistema conforme varía  $b$ , llevando a la conclusión de que no hay sensibilidad a las condiciones iniciales y por tanto, las trayectorias son semejantes en un amplio espectro del parámetro de impacto conforme la partícula interacciona con el potencial. Por otro lado, para las condiciones de Dispersión Caótica, es claro que  $bvs\phi$  presenta cambios abruptos, varía ampliamente para un restringido espectro en el parámetro de impacto, aunque sigue siendo un evento completamente determinista, pero que presenta suma sensibilidad a las condiciones iniciales y aún cuando el movimiento permanezca acotado a la región en la que actúa el potencial, la dinámica es sumamente variable y su descripción cualitativa y cuantitativa dependen directamente de las condiciones iniciales en las variables del sistema.

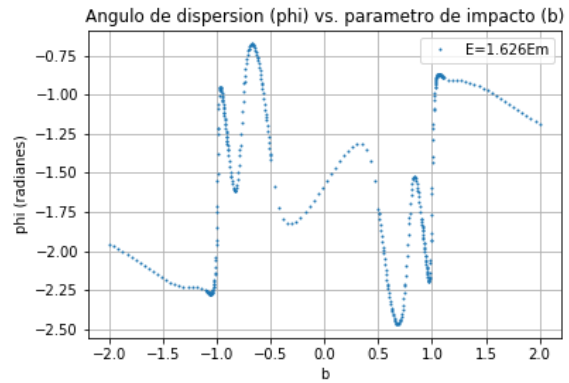


Figure 7: Variación del ángulo de dispersión conforme varía el parámetro de impacto para el caso de Dispersión Regular o Convencional.

Finalmente, en Física siempre se hace un es-

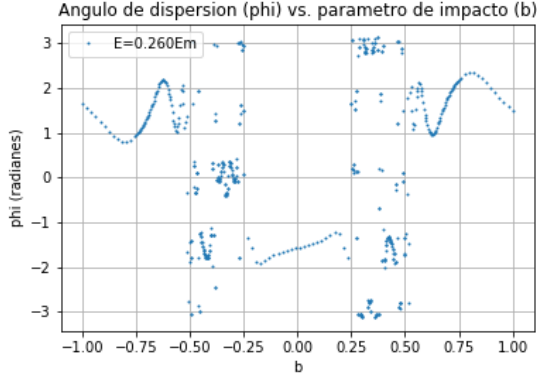


Figure 8: Variación del ángulo de dispersión conforme varía el parámetro de impacto para el caso de Dispersión Caótica.

tudio de los sistemas analizando sus variables de estado y detallando sobre los retratos de fase del mismo, diagramas que logran brindar información vital y nutrir significativamente las conclusiones que se obtienen del sistema. Para este caso en particular, estos gráficos (Figura 9) dan cuenta de varios aspectos, primero, hablan de movimientos y trayectorias acotadas, adicional a ello, aún cuando se está en el régimen caótico y se tiene por tanto sensibilidad a las condiciones iniciales, el comportamiento cualitativo para los diferentes valores del parámetro de impacto es semejante, es decir, exhiben una forma análoga, que presenta también una característica particular, tanto para el movimiento en  $x$ , como en  $y$ , se logra identificar una órbita al parecer elíptica en el retrato de fase, recordando que este tipo de formas en estos diagramas dan cuenta de sistemas conservativos, aquellos en los cuales el sistema no se está forzando, ni está sobre él un agente disipativo.

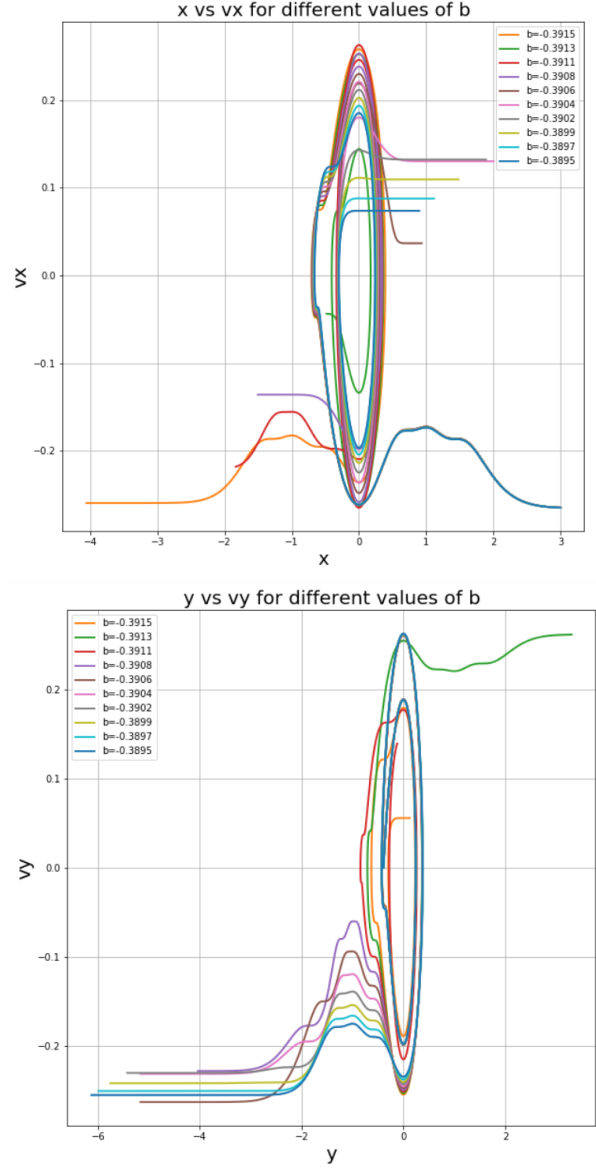


Figure 9: Retratos de fase del sistema.

## 5 Conclusión

La condición que determina el estado de caos dentro del sistema está determinado por la relación entre la energía del problema en particular que se está estudiando y la energía máxima del sistema asociada al potencial ( $E_m$ ), por tanto, la evolución del sistema dependerá de si la energía inicial de la partícula lanzada le permite o no vencer la acción del potencial.

En presencia de caos, como es de esperarse, se evidencia una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, plasmada también en una variación discontinua y con cambios abruptos en la descripción cualitativa de la variación del ángulo de dispersión ( $\phi$ ), conforma se muestrea un espectro del parámetro de impacto ( $b$ ).

Existen otros métodos no analizados en el presente proyecto tales como cálculo de dimensión fractal o el exponente de Lyapunov, ambos muy usados en el estudio de sistemas caóticos, sin embargo, el análisis de convergencia del problema da cuenta de que se están obteniendo los resultados adecuados y esperados sobre el sistema.

## References

- [1] R. L. Burdenand J. D. Faires. *Numerical analysis*. 1997.
- [2] Rubin H. Landau; Manuel José Páez. *Computational Problems for Physics*. 2018.
- [3] Edward Ott ; Tamas Tel. *Chaotic scattering: An introduction*. 1993.