Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

René Castro Montoya

René Castro Montoya

FCFM

Febrero 2021

ECUACIÓN DIFERENCIAL

Se dice que una ecuación **que contiene las derivadas de una** (o mas variables) dependientes, **con respecto a una** o mas variables independientes, es una ecuación diferencial (ED). Por ejemplo

$$y^{'} - 3y = 0 \qquad y(x) = e^{3x}$$

$$y' + 2y = e^{-x} \qquad y(x) = e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

Ejempos

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4 \qquad y(x) = e^{3x}$$

$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t)$ ley circuito de Kirchhof

I, R, L son constantes con $V(t) = V_0, \quad I(0) = 0,$

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{\frac{Rt}{L}}\right]$$

$$R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = 0$$

CLASIFICACIÓN POR TIPO

Si una ecuación diferencial contiene sólo derivadas de una o mas variables dependientes **con respecto a una sola VARIABLE INDEPENDIENTE** se dice es una ecuación diferencial ordinaria (EDO).
Por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$ contiene mas de una variable dependiente.

ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL

Una ecuación con derivadas parciales de una o mas variables dependientes de dos o mas variables independientes se llama **ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL** (EDP). Por ejemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{v}{p} \quad \text{Ley de Boyle}$$

son ecuaciones diferenciales parciales

El ORDEN

de una ecuación diferencial (ya sea EDO, EDP) **es el orden de la derivada mayor en la ecuación**. Por ejemplo

$y' - 3y = 0$ $\qquad 1^{er}$ orden

$y'' + 2y' + y = 0$ $\qquad 2^{do}$ orden

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ $\qquad$ EDO 2^{do} orden

NOTACIÓN

La EDO de n-ésimo orden de una variable dependiente, se puede expresar

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

La ecuación dferencial

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

donde f es una **función continua** de valores reales, se denomina forma normal.

NOTACIÓN

$f(x, y) = \frac{dy}{dx}$ *EDO* 1^{er} orden

$f(x, y, y') = \frac{d^2 y}{dx^2}$ *EDO* 2^{do} orden.

Por ejemplo	**Forma normal**
$4xy' + y = x$	$y' = \frac{x-y}{4x}$
$y'' - y' + 6y = 0$	$y'' = y' - 6y$

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden n **es LINEAL** si f es lineal en $y, y', y'', ..., y^{(n)}$,

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x$$

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$$

$a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$ $\qquad$ *ED* lineal 1^{er} orden

$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$ $\qquad$ *ED* lineal 2^{do} orden

Una EDO es LINEAL si:

1) la función ni sus derivadas están elevadas a **ninguna potencia distinta de cero o uno**.

2) En cada coeficiente que aparece mutiplicandolos **sólo interviene la variable independiente**.

3) Una combinación lineal de sus soluciones es **también es una solución** de la ecuación.

Ejemplos

$$(y - x)\,dx + 4xdy = 0$$

$$(y - x) + 4x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y + 4x\frac{dy}{dx} = x$$

$4xy' + y = x$ $\qquad$ *ED* lineal 1^{er} orden

Ejemplos

$$\underbrace{(1-y)}_{\substack{\text{término no}\\ \text{lineal}\\ \text{depende de y}}} \quad y' + 2y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{sen(y)}_{\substack{\text{término no}\\ \text{lineal}}} = 0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \underbrace{y^2}_{\substack{\text{término no}\\ \text{lineal}\\ \text{exp dif de 1}}} = 0$$

SOLUCIÓN

Una función $y = \phi(x)$ se llama **SOLUCIÓN** de una ecuación diferencial si a susutituir en ella sus derivadas se satisface la iguadad

$$\begin{array}{rr} \textit{ED} & \textit{Solución} \\ y^{'} - 3y = 0 & y(x) = e^{3x} \\ y' + 2y = e^{-x} & y(x) = e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \\ y''' + 2e^{x}y'' + yy' = x^{4} & y(x) = e^{3x} \end{array}$$

Cualquier función $y = \phi(x)$ definida en un intervalo I y con al menos n derivadas continuas en I y que al sustituirse es una EDO de n-ésimo orden reduce la ecuación a una entidad, se considera solución de la ecuación en el intervalo.

El intervalo I se le llama intervalo de definición, existencia, validez, dominio de la solución.

$I = (a, b), [a, b), (a, \infty), \ldots$

La gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de una EDO se llama curva de solución.

SOLUCIÓN EXPLICITA

Se dice que una solución en la que la variable DEPENDIENTE se expresa solamente en términos de la variable **independiente** y **constantes** es una **SOLUCIÓN EXPLICITA.**

$$
\begin{array}{rr}
\textit{ED} & \text{Solución} \\
y' = xy^{\frac{1}{2}} & y(x) = \frac{1}{16}x^4 \\
y'' - 2y' + y = 0 & y(x) = xe^x \\
xy' + y = 0 & y(x) = \frac{1}{x}
\end{array}
$$

SOLUCIÓN IMPLICITA

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución IMPLICITA de una ecuación diferencial ordinaria $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ en un intervalo I, siempre que exista al menos una función ϕ que satisface tanto la relación como la ecuació diferencial en I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

SOLUCIÓN IMPLICITA

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} - \frac{d25}{dx} = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

consta de dos o más ecuaciones con las derivadas de dos o más funciones desconcidas de una sola variable INDEPENDIENTE. Por ejemplo

$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, y\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f\left(t, x, y\right) \\ \frac{dy}{dt} = g\left(t, x, y\right) \end{array}\right\} \text{sistema de 2 ED de } 1^{er} \text{ orden}$$

Soluciones
$x = \phi_1\left(t\right)$
$y = \phi_2\left(t\right)$
definidas en un intervalo común I.

Ejercicio

Tipo *Orden* *Lineal*

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$$
$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$
$$yy'' + x^2 y = x$$
$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - v^2\right) y = 0$$
$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = kv \left(\frac{\partial^2 m}{\partial n^2}\right)^4$$
$$y'' + 2x^3 y' - (x-1)\, y = xy^{\frac{3}{2}}$$
$$\left(y^V\right)^3 - y''' + y'' - y^2 = 0$$

Modelo de Malthus (1798)

Considere que una población crece (o disminuye) proporcional a **la población inicial** P_0, donde **la taza de proporcionalidad** esta dada por k.

Utilize la siguiente ecuación diferencial para determinar $P(t)$ la población al tiempo $t = 3$, unidades de tiempo, dado que se conoce

$$P(0) = P_0 \text{ y que } P(1) = \frac{3P_0}{2}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad k > 0$$

Modelo de Malthus (1798)

Si $P(1) = \frac{P_0}{2}$, determinar $P(t)$ la población al tiempo $t = 5$,

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

Modelo de Malthus (1798)

$$\int \frac{dP}{P} = k \int dt$$

$$\ln(P) = kt + c$$

$$P = e^{kt+c} = e^{kt} e^{c} = c_1 e^{kt}$$

$$P(t) = c_1 e^{kt}$$

Modelo de Malthus (1798)

$$P(0) = c_1 e^{k*0} = c_1 = P_0$$

$$c_1 = P_0$$

$$P(t) = c_1 e^{kt} = P_0 e^{kt}$$

Modelo de Malthus (1798)

$$P(1) = \frac{3P_0}{2} = P_0 e^{k*1}$$

$$\frac{3}{2} = e^k$$

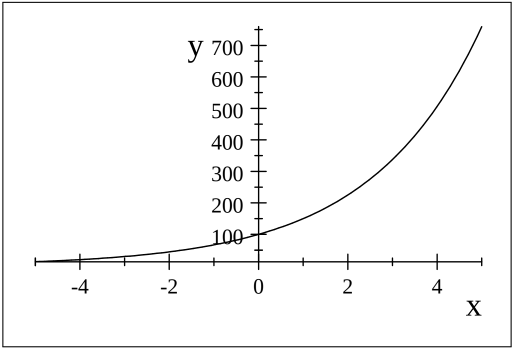
$$\ln(\frac{3}{2}) = \ln\left(e^k\right) = k$$

$$k = \ln(\frac{3}{2})$$

$$P(t) = P_0 e^{kt} = P_0 e^{\ln(\frac{3}{2})t}$$

Modelo de Malthus (1798)

$$P(t) = P_0 e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)t}$$



CASO 2)

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

$$P(1) = \frac{P_0}{2} = P_0 e^{k*1}$$

$$\frac{1}{2} = e^k$$

CASO 2)

$$\ln(\frac{1}{2}) = \ln\left(e^k\right) = k$$

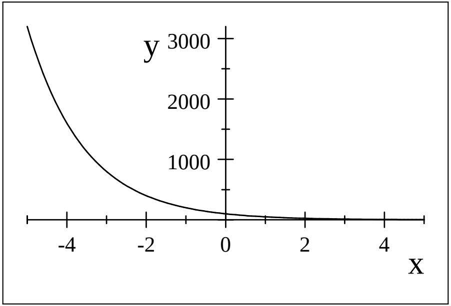
$$k = \ln(\frac{1}{2}) < 0$$

$$P(t) = P_0 e^{kt} = P_0 e^{\ln(\frac{1}{2})t}$$

Modelo de Malthus (1798)

$$P(t) = P_0 e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)t}$$

$$100e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)t}$$



Ejemplo RC circuito

De la Ley de Kirchhof la corriente I en un circuito RC

$$R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=0$$

$$\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{RC}I(t)=0$$

1) Encuentre $I\left(t\right)$,
2) Para una capacitancia de $10,000\ \mu F$ cargada a $100\ V$ y descargada atravez de una resistencia de $1\ m\Omega$, encuentre la corriente I para $t=0$ y para $t=100\ s$.
Obs. el voltaje inicial es $I_0 R$ ó $\frac{Q}{C}$, donde $Q=\int_0^{\infty}I\left(t\right)dt$

$$\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{RC}I(t)=0$$

Ejemplo RC circuito

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{1}{RC}dt$$
$$\int \frac{dI(t)}{I(t)} = -\int \frac{1}{RC}dt$$

$$ln(I(t)) = -\frac{1}{RC}t + c_1$$

$$I(t) = e^{-\frac{1}{RC}t+c_1} = e^{-\frac{1}{RC}t}e^{c_1} = c_2 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Ejemplo RC circuito

$$I(t) = c_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(0) = c_2 e^{-\frac{0}{RC}} = c_2 = I_0$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$C = 10,000 \ \mu F \text{ y } R = 1 \ m\Omega$$

$$I(100) = I_0 e^{-\frac{100s}{10,000\mu F * 1m\Omega}} = I_0 e^{-\frac{s}{100\mu F * 1m\Omega}}$$

Ejemplo

Si $a(t) = 5 - 2t$; $v(0) = 2$ y $s(0) = 0$. Exprese la velocidad $v(t)$ y la posición $s(t)$ en términos de t.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 5 - 2t$$

$\int a(t)\, dt = \int \frac{dv}{dt} = \int (5 - 2t)\, dt$

$$v(t) = 5t - 2\frac{t^2}{2} + c_1$$

como $v(0) = 2 = 5(0) - 2\frac{(0)^2}{2} + c_1$

$$v(t) = 5t - t^2 + 2$$

Ejemplo

$v(t) = \frac{ds}{dt} = 5t - t^2 + 2$

$\int v(t)dt = \int \frac{ds}{dt} = \int \left(5t - t^2 + 2\right) dt$

$$s(t) = 5\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + 2t + c_2$$

como $s\left(0\right) = 5\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} + 2 * 0 + c_2 = 0$

$$c_2 = 0$$

$$s(t) = 5\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + 2t$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$f'(x) = 6x^2 + x - 5$$

con la condición inicial $f(0) = 2$.

Solución

La antiderivada de

$$f'(x) = 6x^2 + x - 5$$

es

$$f(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + c.$$

Tomando $x = 0$ y usando la condición inicial dada,

$$f(0) = 2(0)^3 + \frac{(0)^2}{2} - 5(0) + c = 2$$

Solución

por lo que, $c = 2$. Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial con la condición inicial dada es

$$f(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + 2.$$

La expresión ecuación diferencial surge del hecho de que puede tener diferenciales en vez de derivadas. Así, la ecuación diferencial del ejemplo anterior se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + x - 5 \text{ o bien } dy = \left(6x^2 + x - 5\right) dx$$

para $y = f(x)$.

Ejemplo

Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada, entonces su función de posición s es una antiderivada de su función de velocidad v, es decir, $s'(t) = v(t)$. Análogamente, como $v'(t) = a(t)$, la función de velocidad es una antiderivada de la función de aceleración. Si se conoce la velocidad o aceleración y se tienen suficientes condiciones iniciales, entonces se puede determinar la función de posición.

Ejemplo

Una lancha de motor se aleja del muelle a lo largo de una línea recta con una aceleración al tiempo t dada por $a(t) = 12t - 4$ pie/s^2. En el tiempo $t = 0$ la lancha tenía una velocidad de 8 pie/seg y se encontraba a 15 pie del muelle. Calcular su distancia $s(t)$ al embarcadero al cabo de t segundos.

Solución

Como $v'(t) = 12t - 4 = a(t)$,antiderivando se tiene

$$v(t) = 12\frac{t^2}{2} - 4t + c = 6t^2 - 4t + c$$

Como $v(0) = 8$ se tiene que $c = 8$, de donde

$$v(t) = 6t^2 - 4t + 8 = s'(t)$$

La antiderivada más general de $s'(t) = v(t)$ es

$$s(t) = \frac{6t^3}{3} - 4\frac{t^2}{2} + 8t + d = 2t^3 - 2t^2 + 8t + d$$

Solución

Como $s(0) = 15$ se tiene que $d = 15$, de donde

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + 15$$

Sobre cualquier objeto que se encuentra cerca de la superficie de la tierra actúa una fuerza, llamada fuerza de gravedad, la cual produce una aceleración constante que se denota por g. El valor aproximado de g que se utiliza en la mayoría de los problemas es de 9.8 m/s^2 o 980 cm/s^2 o 32 pie/s^2. El uso de esta importante constante de la física se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde una altura de 144 pies sobre el suelo con una velocidad inicial de 96 pie/s. Despreciando la resistencia del aire, determinar su altura desde el suelo a los t segundos. ¿**Durante que intervalo de tiempo la piedra sube**?. ¿**En qué momento y con qué velocidad choca la piedra contra el suelo al descender**?.

Solución

El movimiento de la piedra puede representarse por un punto que se mueve sobre una recta vertical l que tiene su origen al nivel del suelo y dirección positiva hacia arriba. La altura desde el piso al tiempo t es $s(t)$ y las condiciones iniciales son $s(0) = 144$ y $v(0) = 96$. Como la velocidad va disminuyendo, $v'(t) < 0$; es decir, la aceleración es negativa. Entonces, $a(t) = -32$. Como v es una antiderivada de a, entonces $v(t) = -32t + c$, donde c es una constante arbitraria. Sustituyendo t por cero y usando el hecho de que, $v(0) = 96$, se obtiene que $c = 96$, por lo tanto,

Solución

$$v(t) = -32t + 96$$

Como $s'(t) = v(t)$, antiderivando queda

$$s(t) = -32\frac{t^2}{2} + 96t + d = -16t^2 + 96t + d$$

donde d es un número arbitrario. Tomando $t = 0$ y aplicando el hecho de que $s(0) = 144$, se obtiene que $d = 144$.
Resulta que la altura que alcanza la piedra al tiempo t está dado por

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 144$$

Solución

El objeto lanzado sube hasta que $v(t) = 0$, es decir, hasta que $-32t + 96 = 0$ o bien $t = 3$. La piedra choca contra el suelo cuando $s(t) = 0$, o sea

$$-16t^2 + 96t + 144 = 0 \Longleftrightarrow t^2 - 6t - 9 = 0$$

cuya solución es de $t = 3 \pm 3\sqrt{2}$. La solución $t = 3 - 3\sqrt{2}$ no tiene sentido ya que t no puede ser negativo. Por lo tanto, la piedra choca contra el suelo a los $3 + 3\sqrt{2}$ segundos. La velocidad en tal momento es

$$v\left(3 + 3\sqrt{2}\right) = -32\left(3 + 3\sqrt{2}\right) + 96 = -135.76 \text{ pie/s}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

La forma general de una ecuación diferencial de 1^{er} orden

$$y' + p(x)\, y = g(x)$$

Teorema

Si las funciones p y g son **continuas en un intervalo abierto** I, $\alpha \leq x \leq \beta$ que contenga al punto x_0, entonces **existe una única función** $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$y' + p(x)\, y = g(x)$$

Para toda $x \epsilon I$, y que también satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde y_0 es un valor inicial arbitrario prescrito.

EL PROBLEMA DE VALORES INICIALES (PVI)

En algún intervalo I que contiene a $x_0,\ y_0, y_1,\ y_1, ..., y_{n-1}\ \epsilon\mathbb{R}$. Resolver

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$$y\left(x_0\right) = y_0,\ \ y'\left(x_0\right) = y_1,\ \ y''\left(x_0\right) = y_2, ...,\ \ y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_{n-1}$$

Se llama **problema con valores iniciales**.

Continuidad de un función de dos variables

Una función de dos variables es **CONTINUA en un punto** (x_0, y_0) de una región R. Si $f\left(x_0, y_0\right)$ es igual límite de $f\left(x, y\right)$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$

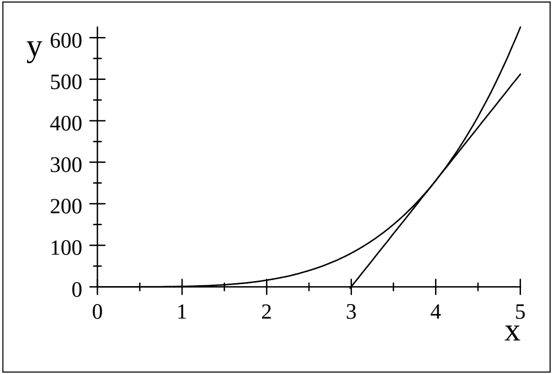
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x, y\right) = f\left(x_0, y_0\right)$$

La función es continua en la región R si es continua en todo punto de R.

Teorema

Sea $R = [a, b] \, x \, [c, d]$ talque $(x_0, y_0) \, \epsilon \, R$. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ **son continuas en** R, entonces **existe intervalo** I abierto, centrado en x_0 y una función $y(x)$ definida en I, que satisface el PVI

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0$$



VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial de 1^{er} orden es **SEPARABLE** si se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)}$$

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}\cos(x), \qquad y(0) = 1$$

$$e^y dy = \cos(x)dx$$
$$\int e^y dy = \int \cos(x)dx$$
$$e^y = sen(x) + c$$

$$y = \ln\left(sen(x) + c\right)$$
$$y(0) = 1 = \ln\left(sen(0) + c\right) = \ln(c)$$

$$c = e$$

$$y = \ln\left(sen(x) + e\right)$$

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2\left(y-1\right)}, \qquad y\left(0\right) = -1$$

$$2\left(y-1\right)dy = \left(3x^2 + 4x + 2\right)dx$$

$$\int 2\left(y-1\right)dy = \int \left(3x^2 + 4x + 2\right)dx$$

$$2\left(\frac{y^2}{2} - y\right) = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 2x + c$$

Ejemplo

$y\left(0\right)=-1$

$$2\left(\frac{-1^2}{2}-\left(-1\right)\right)=3\frac{0^3}{3}+4\frac{0^2}{2}+2*0+c$$

$$2\left(\frac{1}{2}+1\right)=3\frac{0^3}{3}+4\frac{0^2}{2}+2*0+c$$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)=c$$

$$c=3$$

Ejemplo

$$2\left(\frac{y^2}{2} - y\right) = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 2x + 3$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$y^2 - 2y - \left(x^3 + 2x^2 + 2x + 3\right) = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\left(1\right)\left(x^3 + 2x^2 + 2x + 3\right)}}{2}$$

Ejemplo

$$y = 1 \pm \sqrt{1 + 1\left(x^3 + 2x^2 + 2x + 3\right)}$$

$y(0) = -1$
$y_1 = 1 - \sqrt{1 + 1\left(0^3 + 2 * 0^2 + 2 * 0 + 3\right)} = -1$

$y_2 = 1 + \sqrt{1 + 1\left(0^3 + 2 * 0^2 + 2 * 0 + 3\right)} = 3$, no cumple la condición inicial

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ED

1) $\frac{dy}{dx} = e^{(x-y)}$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{y}-y}$

3) $\frac{dy}{dx} = e^{x}\cos^{2}(y), \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$

3) $y\left(4+x^{2}\right)dy = x\left(2+y^{2}\right)dx.$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMÓGENEAS

Se dice que una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$$

es HOMÓGENEA siempre que la función f no dependa por separado de x, y, sino solamente de la razón $v = \frac{y}{x}$, ó $u = \frac{x}{y}$. Una ecuación homégenea es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$y' = F\left(v\right)$, ó $y' = F\left(u\right)$

EjemploS

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$

2) $\frac{dy}{dx} = \ln(x) - \ln(y) + \frac{x+y}{x-y} = -\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+2xy}{x^2} = y\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$, no homógenea

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMÓGENEAS

Si $v = \frac{y}{x}$

$y = xv$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v = F\left(v\right)$$

Ejemplo

Resolver la ED

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = v^2 + 2v$$

$$y = xv$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v = F\left(v\right)$$

Ejemplo

$$v^2 + 2v = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$v^2 + v = x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v^2+v}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{v^2+v} = \int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv$$

Ejemplo

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{v} dv - \int \frac{1}{v+1} dv$
$\ln(x) + c_1 = \ln(v) - \ln(v+1)$

$\ln(x) + c_1 = \ln\left(\frac{v}{v+1}\right)$
$\frac{v}{v+1} = xe^{c_1}$

$\frac{y}{y+x} = xc$

$y = xcy + x^2 c$

$$y = \frac{x^2 c}{(1 - xc)}$$

Ejemplo

Demuestre que las ecuaciones siguientes son homógeneas y encuentre la solución

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)$

$y = xv$

$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v = F\left(v\right)$

Ejemplo

$1 + v = x\frac{dv}{dx} + v$

$1 = x\frac{dv}{dx}$
$\frac{dx}{x} = dv$

$\int \frac{dx}{x} = \int dv$

Ejemplo

$$\ln(x) = v + c$$

$$\ln(x) = \frac{y}{x} + c$$

$$y = x\ln(x) - xc$$

Ejemplo

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy} = \frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1+3v^2}{2v} = F\left(v\right)$

$y = xv$

$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v = F\left(v\right)$

Ejemplo

$\frac{1+3v^2}{2v} = x\frac{dv}{dx} + v$

$1 + 3v^2 = 2xv\frac{dv}{dx} + 2v^2$

$1 + v^2 = 2xv\frac{dv}{dx}$

$\frac{dx}{x} = 2v\frac{dv}{1+v^2}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2vdv}{1+v^2}$

Ejemplo

$\ln(x) + c = \ln(1 + v^2)$

$xc = 1 + v^2$

$xc = 1 + \frac{y^2}{x^2}$
$x^3 c = x^2 + y^2$

$$y = \sqrt{x^3 c - x^2}$$

Ejemplo

$$3)\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{1+v^2}{2v}=F\left(v\right)$$

$$y=xv$$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v=F\left(v\right)$$

$$1+v^2=2xv\frac{dv}{dx}+2v^2$$

$$1-v^2=2xv\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo

$$\frac{dx}{x} = 2v\frac{dv}{1-v^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int -2v\frac{dv}{1-v^2}$$

$$\ln(x) + c_1 = -\ln\left(1 - v^2\right)$$

$$xc = \left(1 - v^2\right)^{-1}$$

$$1 - v^2 = \frac{1}{xc}$$

Ejemplo

$1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{xc}$

$x^2 - y^2 = \frac{x^2}{xc} = \frac{x}{c}$

$$y = \sqrt{x^2 - \frac{x}{c}}$$

Ejercicios

Demuestre que las ecuaciones siguientes son homógeneas y encuentre la solución

1) $x\frac{dy}{dx} = (y - x)$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$

3) $(x + y)\,\frac{dy}{dx} = (x - y)$

4) $x^2\frac{dy}{dx} = y^2 + xy, \qquad y\,(1) = 1$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{p(x)}\right) = e^{p(x)}\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx}\frac{d}{dx}\left(\int p\left(x\right)dx\right) = p\left(x\right)e^{\int p(x)dx}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

$$y' + p(x)\, y = g(x)$$

Multiplicando por
$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \rightarrow \mu'(x) = p(x)\, e^{\int p(x)dx} = p(x)\, \mu(x)$

$\mu(x)\, y' + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, g(x)$

Sumando y restando $\mu'(x)\, y$
$[\mu(x)\, y' + \mu'(x)\, y] - \mu'(x)\, y + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, g(x)$

$$[\mu(x)\, y]' - \mu'(x)\, y + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, g(x)$$

$$[\mu(x)\, y]' - \mu(x)\, p(x)\, y + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, g(x)$$

$$[\mu(x)\, y]' = \mu(x)\, g(x)$$

$$\int [\mu(x)\, y]'\, dx = \int \mu(x)\, g(x)\, dx$$

$$\mu(x)\, y = \int \mu(x)\, g(x)\, dx$$

La solución general

$$y = \frac{\int \mu(x)\, g(x)\, dx}{\mu(x)}$$

$\mu'(x) = p(x)\,\mu(x) \rightarrow p(x) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$

$\frac{d}{dx}\ln(\mu(x)) = \frac{d}{dx}\ln\left(e^{\int p(x)dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\int p(x)\, dx\right) = p(x)$

$\ln(\mu(x)) = \ln\left(e^{\int p(x)dx}\right) = \int p(x)\, dx$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx + c_1}$
Haciendo $c_1 = 0$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} > 0$, **la función más simple para** μ

Ejemplo

Resolver las ED siguientes

1) $y' + 2y = e^{-x}, \qquad y(0) = 0.75$

$$y' + p(x)\, y = g(x)$$

$p(x) = 2,\ g(x) = e^{-x}$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$

Ejemplo

$$y = \frac{\int \mu(x)\, g(x)\, dx}{\mu(x)}$$

$y = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int e^{2x} e^{-x} dx}{e^{2x}} = \frac{\int e^{x} dx}{e^{2x}} = \frac{e^{x}+c}{e^{2x}} = e^{-x} + ce^{-2x}$

$y = e^{-x} + ce^{-2x}$

como
$y(0) = 0.75 = e^{-0} + ce^{-20}$
$y = e^{-x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$

Ejemplo

2) $\frac{dP}{dt} = kP$, donde $k > 0$, $P(0) = P_0$ y $P(1) = \frac{3P_0}{2}$

$\frac{dP}{dt} - kP = 0$

$$y' + p(x)\,y = g(x)$$

$p(t) = -k$, $g(t) = 0$

$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -kdt} = e^{-kt}$

Ejemplo

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt}{\mu(t)} = \frac{\int e^{-kx} * 0 \ dt}{e^{-kt}} = \frac{\int 0dt}{e^{-kt}} = \frac{0+c}{e^{-kt}} = ce^{kt}$$

$$y = ce^{kt}$$

$$P(0) = P_0 = ce^{k0} = c$$

$$c = P_0 \rightarrow y = P_0 e^{kt}$$
$$P(1) = \frac{3P_0}{2} = P_0 e^{k1}$$

$$\frac{3P_0}{2} = P_0 e^k$$

$$\frac{3}{2} = e^k$$

$$k = \ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$
$$y = P_0 e^{kt} = P_0 e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)t}$$

Ejemplo

3) $y' - 2xy = x, \qquad y(0) = 0$

$$y' + p(x)\,y = g(x)$$

$p(x) = -2x,\ g(x) = x$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2xdx} = e^{-\frac{2x^2}{2}} = e^{-x^2}$

Ejemplo

$$y = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int e^{-x^2} x dx}{e^{-x^2}} = \frac{\frac{-1}{2} \int e^{-x^2} (-2x dx)}{e^{-x^2}} = \frac{-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c}{e^{-x^2}} = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

como

$y(0) = 0 = -\frac{1}{2} + ce^{0^2}$

$c = \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{x^2}$

Ejercicios

Resolver las siguientes ED

1) $y' - y = 2e^x$

2) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

3) $y' - y = 2xe^{2x}, \qquad y(0) = 1$

Ejercicios

Resolver las siguientes ED

4) $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \qquad y(1) = 0$

5) $y' - 2y = e^{2x}, \qquad y(0) = 2$

6) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2}, \qquad y(\pi) = 0,\ x > 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Considere una ED de 1^{er} orden de la forma

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es exacta $\leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Si **es exacta** $\leftrightarrow$**existe una función** f talque $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

Método de solución

1) Verificar que la ED sea exacta

2) existe una función f talque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

3) Integramos respecto a x ó y

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx \quad \text{ó} \quad f(x, y) = \int N(x, y)\, dy$$

Método de solución

4) Al resultado lo derivamos con respecto a y ó x

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \quad \text{ó} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy$$

5) Igualamos estas derivadas con N ó M

6) Integramos por última vez

Ejemplo

Resuelva

$$(2xy)\,dx + \left(x^2 - 1\right) dy = 0$$

$$M(x, y) = 2xy \qquad N(x, y) = x^2 - 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ es exacta}$$

.

Ejemplo

$\exists\ f\quad$ talque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy - - - - - - (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = x^2 - 1$$

Ejemplo

Al integrar la ecuación (1) respecto a x

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1 = N(x,y)$$

$$g'(y) = -1 \rightarrow \quad g(y) = -y + c$$

$$f(x,y) = x^2y + g(y) = x^2y - y + c = 0$$

$$y = \frac{-c}{(x^2-1)}$$

Ejemplo

Resuelva

$$\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right) dx + \left(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right) dy = 0$$

$$M(x,y) = e^{2y} - y\cos(xy)$$

$$N(x,y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\ \ sen(xy) = \frac{\partial N}{\partial x}$ es exacta.

Ejemplo

$\exists\ f$ talque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = e^{2y} - y\cos(xy) - - - - - - -(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Ejemplo

Al integrar la ecuación (1) respecto a x

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int e^{2y} - y\cos(xy)\,dx =$$
$$xe^{2y} - sen(xy) + g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + g'(y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y = N(x,y)$$

$$g'(y) = 2y \rightarrow \quad g(y) = y^2 + c$$

$$f(x,y) = xe^{2y} - sen(xy) + g(y) = xe^{2y} - sen(xy) + y^2 + c$$

Ejemplo

Resuelva

$$\left(sen\left(x\right)\cos\left(x\right)-xy^{2}\right)dx+\left(y\left(1-x^{2}\right)\right)dy=0$$

$$M\left(x,y\right)=sen\left(x\right)\cos\left(x\right)-xy^{2}$$

$$N\left(x,y\right)=y\left(1-x^{2}\right)$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-2xy=\frac{\partial N}{\partial x}$ es exacta.

Ejemplo

$\exists\ f$ talque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = sen\left(x\right)\cos\left(x\right) - xy^2 - - - - - - (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Ejemplo

Al integrar la ecuación (1) respecto a x

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int \left(sen(x)\cos(x) - xy^2\right)dx = sen^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2y + g'(y) = y\left(1-x^2\right) = N(x,y)$$

$$g'(y) = y \rightarrow \quad g(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

$$f(x,y) = sen^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y) = sen^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^2}{2} + c$$

Ejemplo

Resuelva la ED
$\left(3x^2 + 4xy\right) dx + \left(2x^2 + 2y\right) dy = 0$

$M(x, y) = 3x^2 + 4xy$ $\quad$ $N(x, y) = 2x^2 + 2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x = \frac{\partial N}{\partial x}$ es exacta.

Ejemplo

$\exists\ f \quad \text{talque}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 3x^2 + 4xy - - - - - - (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Ejemplo

Al integrar la ecuación (1) respecto a x

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx=\int\left(3x^2+4xy\right)dx=3\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}y+g(y)=x^3+2x^2y+g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x^2+g'(y)=2x^2+2y=N(x,y)$$

$$g'(y)=2y\rightarrow\quad g(y)=y^2+c$$

$$f(x,y)=x^3+2x^2y+g(y)=x^3+2x^2y+y^2+c$$

Resolver las siguientes ED

1) $\left(6xy - 2y^2\right) dx + \left(3x^2 + 4xy\right) dy = 0$

2) $\left(ye^{xy}\right) dx + \left(xe^{xy} + 1\right) dy = 0$

3) $\left(2y - 2xy^3 + 4x + 6\right) dx + \left(2x - 3x^2y^2 - 1\right) dy = 0$

4) $\left(2x + 6x^2y\right) dx + \left(3x^3 - 2xy\right) dy = 0$

5) $\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = P_0$ y que $P(1) = \frac{3P_0}{2}$ donde $k > 0$

La ecuación diferencial

$$y' + p(x)\,y + g(x)\,y^n = 0, \quad n \epsilon \mathbb{R}$$

se le llama de Bernoulli

Caso 1) si $n = 0$

$$y' + p(x)\,y = 0, \qquad \text{lineal}$$

Caso 2) si $n = 1$

$$y' + p(x)\,y = -g(x)\,y, \quad \text{variables separables}$$

Caso 3) si $n \neq 0$ y $n \neq 1$

Haciendo $u = y^{1-n}$

$$u' = (1-n)\, y^{-n} y' = (1-n)\, \frac{y'}{y^{-n}}$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI

$$y' + p(x)\, y + g(x)\, y^n = 0$$

dividiendo por y^n

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\, \frac{y}{y^n} + g(x) = 0$$

$$\frac{u'}{1-n} + p(x)\, u + g(x) = 0$$

$$u' + (1-n)\, p(x)\, u + (1-n)\, g(x) = 0$$

$u' + (1-n)\, p(x)\, u = (n-1)\, g(x)$ ED 1^{er} orden lineal

Ejemplo

Resolver

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$$

$$y' + \frac{2}{x}y + x^4y^3e^x = 0 \quad \text{n=3}$$

$$z = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$$
$$z' = -2y^{-3}y'$$
$$-\frac{z'}{2} = y^{-3}y'$$
$$y' + \frac{2}{x}y + x^4y^3e^x = 0 \quad \text{n=3}$$

$$-\frac{z'}{2} + \frac{2}{x}z + x^4e^x = 0$$

Ejemplo

$z' - \frac{4}{x}z = 2x^4 e^x$ ED 1^{er} orden lineal

$$p(x) = -\frac{4}{x},\ g(x) = 2x^4 e^x$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln(x)} = e^{\ln\left(x^{-4}\right)} = x^{-4}$$

Ejemplo

$$z = \frac{\int \mu(x)\, g(x)\, dx}{\mu(x)}$$

$$z = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int x^{-4} 2x^4 e^x dx}{x^{-4}} = \frac{\int 2e^x dx}{x^{-4}} = \frac{2e^x + c}{x^{-4}} = 2x^4 e^x + cx^4$$

$$y^{-2} = 2x^4 e^x + cx^4$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x^4 e^x + cx^4}}$$

Ejemplo

Resolver

$y' + \frac{2}{x}y + 2xy^2 = 0$ n=2

$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$
$z' = -1y^{-2}y'$
$-z' = y^{-2}y'$
$y' + \frac{2}{x}y + 2xy^2 = 0$ n=2

$-z' + \frac{2}{x}z + 2x = 0$

Ejemplo

$z' - \frac{2}{x} z = 2x$ ED 1^{er} orden lineal

$$p\left(x\right) = -\frac{2}{x},\ g\left(x\right) = 2x$$

$$\mu\left(x\right) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = e^{\ln\left(x^{-2}\right)} = x^{-2}$$

Ejemplo

$$z = \frac{\int \mu(x)\, g(x)\, dx}{\mu(x)}$$

$$z = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int x^{-2} 2x dx}{x^{-2}} = \frac{\int 2x^{-1} dx}{x^{-2}} = \frac{2\ln(x)+c}{x^{-2}} = 2x^2 \ln(x) + cx^2$$

$$y^{-1} = 2x^2 \ln(x) + cx^2$$

$$y = \left(2x^2 \ln(x) + cx^2\right)^{-1}$$

Ejemplo

Resolver

$2y' + \frac{1}{x}y - x^2y^{-1} = 0$

$y' + \frac{1}{2x}y - \frac{1}{2}x^2y^{-1} = 0 \quad$ n=-1
$z = y^{1-n} = y^2$
$z' = 2yy'$
$\frac{z'}{2} = yy'$
$y' + \frac{1}{2x}y - \frac{1}{2}x^2y^{-1} = 0 \quad$ n=-1

$\frac{z'}{2} + \frac{1}{2x}z - \frac{1}{2}x^2 = 0$

Ejemplo

$z' + \frac{1}{x}z = x^2$ ED 1^{er} orden lineal

$$p(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln(x)} = x$$

Ejemplo

$$z = \frac{\int \mu\left(x\right) g\left(x\right) dx}{\mu\left(x\right)}$$

$z = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int x x^2 dx}{x} = \frac{\int x^3 dx}{x} = \frac{\frac{x^4}{4} + c}{x} = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

$y^2 = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}}$$

Ejemplo

Resolver

$y' - 2xy - x^3y^5 = 0 \quad$ n=5

$z = y^{1-n} = y^{1-5} = y^{-4}$

$z' = -4y^{-5}y'$

-$\frac{z'}{4} = y^{-5}y'$

$y' - 2xy - x^3y^5 = 0 \quad$ n=5

-$\frac{z'}{4} - 2xz - x^3 = 0$

Ejemplo

$z' + 8xz = -4x^3$ ED 1^{er} orden lineal

$$p(x) = 8x,\ g(x) = -4x^3$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 8xdx} = e^{4x^2}$$

Ejemplo

$$z = \frac{\int \mu(x)\, g(x)\, dx}{\mu(x)}$$

$$z = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int e^{4x^2} - 4x^3 dx}{e^{4x^2}} = \frac{\frac{-1}{2} \int e^{4x^2} 8x \left(x^2\right) dx}{e^{4x^2}}$$

$$u = x^2 \qquad dv = e^{4x^2} 8x dx$$
$$du = 2x dx \qquad v = e^{4x^2}$$

$$z = \frac{\frac{-1}{2} \int e^{4x^2} 8x \left(x^2\right) dx}{e^{4x^2}} = \frac{\frac{-1}{2}\left[x^2 e^{4x^2} - \int e^{4x^2} 2x dx\right] + c}{e^{4x^2}} =$$
$$\frac{\frac{-1}{2}\left[x^2 e^{4x^2} + \frac{1}{4}\int e^{4x^2} 8x dx\right] + c}{e^{4x^2}} = \frac{\frac{-1}{2}\left[x^2 e^{4x^2} - \frac{1}{4} e^{4x^2}\right] + c}{e^{4x^2}}$$

$$y^{-4} = \frac{\frac{-1}{2}\left[x^2 e^{4x^2} - \frac{1}{4} e^{4x^2}\right] + c}{e^{4x^2}}$$

Ejemplo

Resolver

$$xy' + x^5y - x^5y^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$y' + x^4y - x^4y^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{n}=\frac{1}{2}$$
$$z = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$$
$$z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$$
$$2z' = y^{-\frac{1}{2}}y'$$
$$y' + x^4y - x^4y^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{n}=\frac{1}{2}$$

$$2z' + x^4z - x^4 = 0$$

Ejemplo

$2z' + x^4 z = x^4$ ED 1^{er} orden lineal

$z' + \frac{x^4}{2} z = \frac{x^4}{2}$

$$p(x) = \frac{x^4}{2}, \ g(x) = \frac{x^4}{2}$$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{x^4}{2} dx} = e^{\frac{x^5}{10}}$

Ejemplo

$$z = \frac{\int \mu(x) g(x) \, dx}{\mu(x)}$$

$$z = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int e^{\frac{x^5}{10}} x^4 dx}{e^{\frac{x^5}{10}}} = \frac{2e^{\frac{x^5}{10}} + c}{e^{\frac{x^5}{10}}} = 2 + ce^{\frac{-x^5}{10}}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{2e^{\frac{x^5}{10}} + c}{e^{\frac{x^5}{10}}}$$

Resolver las siguientes ED

1) $xy' - (1+x)\,y - xy^2 = 0$

2) $3\left(1+t^2\right)y' + 2ty - 2ty^3 = 0$

3) $y' - ay + by^2 = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y_0 \neq \frac{a}{b}$

ECUACIÓN DE RICCATI

Es de la forma

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)$$

para resolver, **tenemos que haber encontrado previamente una solución particular** y_p. Si éste es el caso, haciendo $y = y_p + z$, la ED de Riccati se reduce a una Bernoulli con $n = 2$.

$$y = y_p + z$$

$$y' = y_p' + z'$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
&y_p' + a(x)\, y_p + b(x)\, y_p^2 = c(x) \\
&\longrightarrow \\
&y_p' + z' + a(x)(y_p + z) + b(x)(y_p + z)^2 = c(x) \\
&y_p' + z' + a(x)(y_p + z) + b(x)\left(y_p^2 + 2y_p z + z^2\right) = c(x) \\
&y_p' + z' + a(x)\, y_p + a(x)\, z + b(x)\, y_p^2 + b(x)\, 2y_p z + b(x)\, z^2 = c(x) \\
&\left[y_p'\right] + z' + \left[a(x)\, y_p\right] + a(x)\, z + \left[b(x)\, y_p^2\right] + b(x)\, 2y_p z + b(x)\, z^2 = c(x) \\
&z' + \left[a(x) + +b(x)\, 2y_p\right] z + b(x)\, z^2 = c(x), \qquad \text{EB} \quad n = 2 \\
&\longrightarrow
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$z = u^{1-n} = u^{1-2} = u^{-1}$

$z = u^{-1}$, transforma la EB en lineal

$y = y_p + \frac{1}{u}$, transforma la ED de Riccati en lineal

Ejemplo

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)$$

$$y' + y - y^2 = -2,$$

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)$$

$$a(x) = 1,\ b(x) = -1,\ \ c(x) = -2$$

Ejemplo

La solución particular $y_p = 2$.

$y = y_p + \frac{1}{u}$

$y = 2 + \frac{1}{u}$

$y' = \frac{-u'}{u^2}$

Ejemplo

sustituyendo en la ED
$y' + y - y^2 = -2$

$\frac{-u'}{u^2} + 2 + \frac{1}{u} - \left(2 + \frac{1}{u}\right)^2 = -2$
$\frac{-u'}{u^2} + 2 + \frac{1}{u} - 4 - \frac{4}{u} - \left(\frac{1}{u}\right)^2 = -2$
$\frac{-u'}{u^2} - \frac{3}{u} - \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 0$
$-u' - 3u - 1 = 0$

$$u' + 3u = 1$$

$p(x) = 3,\ g(x) = 1$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

Ejemplo

$$u = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)}$$

$u = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int e^{3x} 1 dx}{e^{3x}} = \frac{\frac{1}{3} e^{3x} + c}{e^{3x}}$

$\frac{1}{u} = \frac{e^{3x}}{\frac{1}{3} e^{3x} + c}$

$$y = 2 + \frac{1}{u} = 2 + \frac{e^{3x}}{\frac{1}{3} e^{3x} + c}$$

Ejemplo

$$y' - 3y - y^2 = -4, \qquad y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)$$

$$a(x) = -3, \quad b(x) = -1, \quad c(x) = -4$$

La solución particular

$y_p = 1.$

$$y = y_p + \frac{1}{u}$$

$$y = 1 + \frac{1}{u}$$

$$y' = \frac{-u'}{u^2}$$

Ejemplo

sustituyendo en la ED
$y' - 3y - y^2 = -4$

$$\frac{-u'}{u^2} - 3\left(1 + \frac{1}{u}\right) - \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 = -4$$
$$\frac{-u'}{u^2} - 3 - 3\frac{1}{u} - 1 - \frac{2}{u} - \left(\frac{1}{u}\right)^2 = -4$$
$$\frac{-u'}{u^2} - \frac{5}{u} - \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 0$$
$$-u' - 5u - 1 = 0$$

$$u' + 5u = -1$$

$p(x) = 5, \qquad g(x) = -1$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 5dx} = e^{5x}$

Ejemplo

$$u = \frac{\int \mu(x)\, g(x)\, dx}{\mu(x)}$$

$u = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int e^{5x}(-1)dx}{e^{5x}} = \frac{-\frac{1}{5}e^{5x}+c}{e^{5x}}$

$\frac{1}{u} = \frac{e^{5x}}{-\frac{1}{5}e^{5x}+c}$

$$y = 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{e^{5x}}{-\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

Ejemplo

$$y' + y^2 = x^2 - 2x, \qquad y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)$$

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = 1, \qquad c(x) = x^2 - 2x$$

Ejemplo

La solución particular $y_p = -x + 1$.

$$y = y_p + \frac{1}{u}$$

$$y = -x + 1 + \frac{1}{u}$$

$$y' = -1 - \frac{u'}{u^2}$$

$$y' + 1 = -\frac{u'}{u^2}$$

Ejemplo

sustituyendo en la ED
$y' + y^2 = x^2 - 2x$

$-1 - \frac{u'}{u^2} + \left((-x+1) + \frac{1}{u}\right)^2 = x^2 - 2x$

$-1 - \frac{u'}{u^2} + (-x+1)^2 + 2\,(-x+1)\,\frac{1}{u} + \frac{1}{u}^2 = x^2 - 2x$

$-1 - \frac{u'}{u^2} + x^2 - 2x + 1 - 2x\frac{1}{u} + 2\frac{1}{u} + \frac{1}{u}^2 = x^2 - 2x$

Ejemplo

$$-\frac{u'}{u^2} - 2x\frac{1}{u} + 2\frac{1}{u} + \frac{1}{u}^2 = 0$$
$$-\frac{u'}{u^2} + (2-2x)\frac{1}{u} + \frac{1}{u}^2 = 0$$
$$-u' + (2-2x)\,u + 1 = 0$$
$$u' - (2-2x)\,u - 1 = 0$$

$$u' + (2x-2)\,u = 1$$

$$p(x) = 2x - 2, \qquad g(x) = 1$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int (2x-2)dx} = e^{x^2-2x}$$

Ejemplo

$$u = \frac{\int \mu(x)\, g(x)\, dx}{\mu(x)}$$

$$u = \frac{\int \mu(x) g(x) dx}{\mu(x)} = \frac{\int e^{x^2-2x} dx}{e^{x^2-2x}} = \frac{\int e^{x^2-2x} dx}{e^{x^2-2x}}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{e^{x^2-2x}}{\int e^{x^2-2x} dx}$$

$$y = -x + 1 + \frac{1}{u} = -x + 1 + \frac{e^{x^2-2x}}{\int e^{x^2-2x} dx}$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ED

1)

2)

3)

METODO DE SUSTITUCIÓN

Cuando tenemos una ED

$$y' = f(x, y)$$

que no responde a alguna de los tipos estudiados hasta ahora, **a veces una sustitución, puede cambiar la ecuación a una reconocible**. No puede darse una regla general.

Ejemplo

$$xy' - y = 2\frac{x^3}{y}e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{xy'-y}{x^2} = 2\frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = 2\frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{x}{y}$$

$$u' = 2u^{-1}e^{u}$$

Ejemplo

$$\int ue^{-u} du = 2 \int dx$$

$$\left[-ue^{-u} + \int e^{-u} du\right] = \left[-ue^{-u} - e^{-u} + c\right] = -e^{-u}\left[u + 1\right] + c = 2x$$

$$\left[u + 1\right] = -e^{u}\left(2x - c\right)$$

$$u + 1 = e^{u}\left(c - 2x\right)$$

$$\frac{x}{y} + 1 = e^{\frac{x}{y}}\left(c - 2x\right), \text{ solución implicita}$$

ECUACION DIFERENCIAL DE CLAIRAUNT

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Sustituir $u = \frac{dy}{dx}$

$y = xu + f\left(u\right)$

ECUACION DIFERENCIAL DE CLAIRAUNT

luego derivando

$\left[\frac{dy}{dx}\right] = x\frac{du}{dx} + [u] + \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$

$x\frac{du}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 0$

$\left(x + \frac{df}{du}\right)\frac{du}{dx} = 0$

$\longrightarrow$

$$\left(x + \frac{df}{du}\right) = 0 \text{ ó } \frac{du}{dx} = 0$$

ECUACION DIFERENCIAL DE CLAIRAUNT

Ahora si

$$\frac{du}{dx} = 0 \rightarrow u = c$$

y la solución es $y = xu + f(u)$

Pero si

$$\left(x + \frac{df}{du}\right) = 0$$

Se obtiene una solución singular, ya que f es función de x.

Ejemplo

Resolver

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Sustituir $u = \frac{dy}{dx}$

$y = xu + u^2$

Ejemplo

luego derivando

$\left[\frac{dy}{dx}\right] = x\frac{du}{dx} + [u] + 2u\frac{du}{dx}$

$x\frac{du}{dx} + 2u\frac{du}{dx} = 0$

$(x + 2u)\,\frac{du}{dx} = 0$
$\longrightarrow$

$$(x + 2u) = 0 \text{ ó } \frac{du}{dx} = 0$$

Ejemplo

Ahora si

$\frac{du}{dx} = 0 \longrightarrow u = c$

y la solución es

$$y = xu + u^2$$

$$y = xc + c^2$$

Ejemplo

Pero si

$$(x + 2u) = 0$$

$x + 2\frac{dy}{dx} = 0$
$2dy = -xdx$
$dy = \frac{-x}{2}dx$

$$y = \frac{-x^2}{4}$$

Ejemplo

Resolver

$$8x^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 x = 0$$

Sustituir $u = \frac{dy}{dx}$

$8x^2 + 2u^2 y - u^3 x = 0$

$\frac{8x^2}{u^2} + 2y - ux = 0$

$2y = ux - \frac{8x^2}{u^2}$

Ejemplo

luego derivando

$2\left[\frac{dy}{dx}\right] = x\frac{du}{dx} + [u] - \frac{16x}{u^2} + \frac{16x^2}{u3}\frac{du}{dx}$

$u = x\frac{du}{dx} - \frac{16x}{u^2} + \frac{16x^2}{u3}\frac{du}{dx}$

multiplicando por u^3

$u^4 = xu^3\frac{du}{dx} - 16xu + 16x^2\frac{du}{dx}$

$u^4 + -16xu - \left[u^3 + 16x^2\right]x\frac{du}{dx} = 0$

$\left[u^3 + 16x\right]u - \left[u^3 + 16x\right]x\frac{du}{dx} = 0$

$$\left[u^3 + 16x\right]\left(u - x\frac{du}{dx}\right) = 0$$

Ejemplo

$\left(u^3 + 16x\right) = 0$ ó $u - x\frac{du}{dx} = 0$
Ahora si

$u - x\frac{du}{dx} = 0$
$x\frac{du}{dx} = u$
$x\frac{du}{dx} = u$
$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$
$\ln\left(u\right) = \ln\left(x\right) + c$

$$u = xc$$

Ejemplo

y la solución es

$8x^2 + 2u^2y - u^3x = 0$

$8x^2 + 2x^2c^2y - x^3c^3x = 0$

$8x^2 + 2x^2c^2y - x^4c^3 = 0$

$$y = \frac{x^4c^3 - 8x^2}{2x^2c^2}$$

Ejemplo

Pero si $u^3 + 16x = 0$

$u = (-16x)^{\frac{1}{3}}$

y la solución es
$8x^2 + 2u^2 y - u^3 x = 0$

$8x^2 + 2\left(-16x\right)^{\frac{2}{3}} y - \left(-16x\right) x = 0$

$8x^2 + 2\left(-16x\right)^{\frac{2}{3}} y + 16x^2 = 0$

$$y = \frac{-12x^2}{\left(-16x\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Ejemplo

Resolver

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

Sustituir $u = \frac{dy}{dx}$

$y = xu + u^3$

Ejemplo

luego derivando
$\left[\frac{dy}{dx}\right] = x\frac{du}{dx} + [u] + 3u^2\frac{du}{dx}$

$x\frac{du}{dx} + 3u^2\frac{du}{dx} = 0$

$\left(x + 3u^2\right)\frac{du}{dx} = 0$
$\longrightarrow$

$$\left(x + 3u^2\right) = 0 \text{ ó } \frac{du}{dx} = 0$$

Ejemplo

Ahora si

$$\frac{du}{dx} = 0 \rightarrow u = c$$

y la solución es
$y = xu + u^3$

$$y = xc + c^3$$

Ejemplo

Pero si

$$\left(x + 3u^2\right) = 0$$

$3u^2 = -x$
$u^2 = \frac{-x}{3}$
$u = \pm\left(\frac{-x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$
$y = xu + u^3$

$$y = x\left(\frac{-x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{-x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Suponga que se lanza una partícula vertical con **velocidad inicial** V_0 y **la resistencia del aire está presente. Se toma proporcional a la velocidad**, es decir, $F_v = -kv \quad (k > 0)$. A su vez se toma en cuenta el peso de lla partículade masa m, $F_g = -mg$. Determine la altura máxima que acanza la partícula y el tiempo que toma en alcanzarlo.

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

APLICACIONES

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg$$

$$mv' + kv = -mg$$

$$v' + \frac{k}{m}v = -g$$

$$p\left(t\right) = \frac{k}{m}, \qquad g\left(t\right) = -g$$

$$\mu\left(t\right) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{k}{m}dt} = e^{\frac{kt}{m}}$$

$$v = \frac{\int \mu(t)\, g(t)\, dt}{\mu(t)}$$

$$v = \frac{\int \mu(t) g(t) dt}{\mu(t)} = \frac{\int e^{\frac{kt}{m}} (-g) dt}{e^{\frac{kt}{m}}} = \frac{\left(\frac{-mg}{k}\right) \int e^{\frac{kt}{m}} \frac{k}{m} dt}{e^{\frac{kt}{m}}} = \frac{\left(\frac{-mg}{k}\right) e^{\frac{kt}{m}} + c}{e^{\frac{kt}{m}}}$$

$$v(t) = \left(\frac{-mg}{k}\right) + ce^{\frac{-kt}{m}}$$

APLICACIONES

$$v(0) = \left(\frac{-mg}{k}\right) + ce^{\frac{-k*0}{m}} = v_0$$

$$c = \frac{kv_0 + mg}{k}$$

$$v(t) = \frac{-mg}{k} + \left(\frac{kv_0 + mg}{k}\right) e^{\frac{-kt}{m}}$$

$v\left(t\right)=0$
Suponiendo que se usa el eje Y para medir la altura de la partícula y que $y\left(0\right)=0$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-mg}{k}+\left(\frac{kv_0+mg}{k}\right)e^{\frac{-kt}{m}}$$
$$dy=\frac{-mg}{k}+\left(\frac{kv_0+mg}{k}\right)e^{\frac{-kt}{m}}dt$$
$$\int dy=\int\frac{-mg}{k}dt+\left(\frac{-m}{k}\right)\int\left(\frac{kv_0+mg}{k}\right)e^{\frac{-kt}{m}}\left(\frac{k}{m}\right)dt$$
$$y\left(t\right)=\frac{-mg}{k}t+\left(\frac{kv_0+mg}{k}\right)\left(\frac{-m}{k}\right)e^{\frac{-kt}{m}}+c_1$$
$$y\left(0\right)=\frac{-mg}{k}*0+\left(\frac{kv_0+mg}{k}\right)\left(\frac{-m}{k}\right)e^{\frac{-k*0}{m}}+c_1=0$$
$$\left(\frac{kv_0+mg}{k}\right)\left(\frac{-m}{k}\right)+c_1=0$$

$$c_1 = \left(\frac{kv_0 m + m^2 g}{k^2} \right)$$

$$y(t) = \frac{-mg}{k} t - \left(\frac{kv_0 m + m^2 g}{k^2} \right) e^{\frac{-kt}{m}} + \left(\frac{kv_0 m + m^2 g}{k^2} \right)$$

$$y(t) = \frac{-mg}{k} t + \left(\frac{kv_0 m + m^2 g}{k^2} \right) \left(1 - e^{\frac{-kt}{m}} \right)$$

La altura máxima se alcanza

$\frac{dy}{dt} = v(t) = 0$

$$v(t) = \frac{-mg}{k} + \left(\frac{kv_0 + mg}{k}\right) e^{\frac{-kt}{m}} = 0 \left(\frac{kv_0 + mg}{k}\right) e^{\frac{-kt}{m}} = \frac{mg}{k}$$

$$\left(kv_0 + mg\right) e^{\frac{-kt}{m}} = mg$$

$$e^{\frac{-kt}{m}} = \frac{mg}{kv_0 + mg}$$

$$t_m = -\frac{m}{k} \ln\left(\frac{mg}{kv_0 + mg}\right)$$

La altura máxima ocurre en

$$y\left(t\right)=\frac{-mg}{k}t+\left(\frac{kv_0m+m^2g}{k^2}\right)\left(1-e^{\frac{-kt}{m}}\right)$$

$e^{\frac{-kt}{m}}=\frac{mg}{kv_0+mg}$

$$y\left(t_m\right)=\frac{m^2g}{k^2}\ln\left(\frac{mg}{kv_0+mg}\right)+\left(\frac{kv_0m+m^2g}{k^2}\right)\left(1-\frac{mg}{kv_0+mg}\right)$$

Ejemplo

Se deja caer desde reposo un objeto de masa m en un medio que presenta una resistencia proporcional a v la magnitud de la velocidad instantanea del objeto. Si se supone que a fuerza gravitacional es constante, determinar la posición y la velocidad del objeto en cualquier instante t.

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

$m\frac{dv}{dt} = -kv + mg$
$mv' + kv = mg$

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

$p(t) = \frac{k}{m}, \qquad g(t) = g$

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{k}{m}dt} = e^{\frac{kt}{m}}$$

Ejemplo

$$v = \frac{\int \mu(t)\, g(t)\, dt}{\mu(t)}$$

$$v(t) = \frac{\int \mu(t) g(t) dt}{\mu(t)} = \frac{\int e^{\frac{kt}{m}} (g) dt}{e^{\frac{kt}{m}}} = \frac{\left(\frac{mg}{k}\right) \int e^{\frac{kt}{m}} \frac{k}{m} dt}{e^{\frac{kt}{m}}} = \frac{\left(\frac{mg}{k}\right) e^{\frac{kt}{m}} + c}{e^{\frac{kt}{m}}}$$

$$v(t) = \frac{mg}{k} + ce^{\frac{-kt}{m}}$$

Ejemplo

$v\left(0\right)=\frac{mg}{k}+ce^{\frac{-k*0}{m}}=0$

$$c=\frac{-mg}{k}$$

$$v\left(t\right)=\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{\frac{-kt}{m}}=\frac{mg}{k}\left(1-e^{\frac{-kt}{m}}\right)$$

Ejemplo

Suponiendo que se usa el eje Y para medir la altura de la partícula y que $y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{\frac{-kt}{m}}$$
$$dy = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{\frac{-kt}{m}} dt$$
$$\int dy = \int \frac{mg}{k} dt - \int \frac{mg}{k} e^{\frac{-kt}{m}} dt$$
$$y(t) = \frac{mg}{k} t - \left(\frac{mg}{k}\right)\left(\frac{-m}{k}\right) e^{\frac{-kt}{m}} + c_1$$
$$y(t) = \frac{mg}{k} t + \frac{m^2 g}{k^2} e^{\frac{-kt}{m}} + c_1$$
$$y(0) = \frac{-mg}{k} * 0 + \frac{m^2 g}{k^2} e^{\frac{-k*0}{m}} + c_1 = 0$$
$$\frac{m^2 g}{k^2} + c_1 = 0$$

Ejemplo

$$c_1 = -\frac{m^2 g}{k^2}$$

Posición al tiempo t

$$y\left(t\right) = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}e^{\frac{-kt}{m}} - \frac{m^2 g}{k^2}$$

Ejemplo

La razón de crecimiento disminuye o aumenta a medida que p **aumenta de tamaño** (alimento disponible y espacio). Ecuación logística

$$\frac{dp}{dt} = p(a - bp), \qquad p\left(0\right) = p_0, \quad p_0 \neq \frac{a}{b}$$

$p' = ap - bp^2$

$p' - ap + bp^2 = 0$ EB $n = 2$
$z = p^{1-n} = p^{1-2} = p^{-1}$
$z' = -1p^{-2}p'$
$-z' = p^{-2}p'$
$p' - ap + bp^2 = 0$ n=2
$-z' - az + b = 0$

Ejemplo

$z' + az = b$ ED 1^{er} orden lineal

$p\left(t\right) = a,\, g\left(t\right) = b$

$$\mu\left(t\right) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int adt} = e^{at}$$

Ejemplo

$$z = \frac{\int \mu\left(t\right) g\left(t\right) dt}{\mu\left(t\right)}$$

$$z = \frac{\int \mu(t) g(t) dt}{\mu(t)} = \frac{\int e^{at} b dt}{e^{at}} = \frac{\frac{b}{a} \int e^{at} a dx}{e^{at}} = \frac{\frac{b}{a} e^{at} + c}{e^{at}}$$

$$p^{-1} = \frac{\frac{b}{a} e^{at} + c}{e^{at}}$$

Ejemplo

$$p\left(t\right)=\frac{e^{at}}{\frac{b}{a}e^{at}+c},\qquad p\left(0\right)=p_0,\quad p_0\neq\frac{a}{b}$$

$$p\left(0\right)=\frac{e^{a*0}}{\frac{b}{a}e^{a*0}+c}=p_0$$

$$\frac{1}{\frac{b}{a}+c}=p_0$$

$$1=\left(\frac{b}{a}+c\right)p_0$$

$$\frac{1}{p_0}-\frac{b}{a}=c$$

Ejemplo

$$c = \frac{a - bp_0}{ap_0}$$

$$p(t) = \frac{e^{at}}{\frac{b}{a}e^{at} + c}$$

$$p(t) = \frac{e^{at}}{\frac{b}{a}e^{at} + \frac{a-bp_0}{ap_0}} = \frac{ap_0 e^{at}}{bp_0 e^{at} + (a - bp_0)}$$

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)\, e^{-at}}$$

E.D. LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$$

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$$

$x_0,\ y_0, y_1,\ y_1, ..., y_{n-1}$ constantes reales

Las condiciones iniciales

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$
$x_0,\ y_0, y_1,\ y_1, \ldots, y_{n-1}$ constantes reales.

$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$ *ED* lineal 1^{er} orden

$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$ *ED* lineal 2^{do} orden

L 2^{do}

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x)$$

s.a. $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$

En donde p, q y g **son continuas en el intervalo abierto** I. Entonces existe exactamente una solución $y = \phi(x)$ de este problema y la solución existe en todo el intervalo.

Teorema.-(Principio de superposición)

Sean y_1, y_2 **soluciones** de la ED

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

Entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

también es una solución para cualesquiera valores constantes c_1 y c_2

Teorema

Sean y_1, y_2 soluciones de la ED

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

y que el Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

es diferente de cero en el punto x_0 donde $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ entonces existen constantes c_1 y c_2 para la que $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ **es también es una solución.**

En término de determinantes

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{W(x_0)} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W(x_0)}$$

Ejemplo

$y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones de la ED

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad\qquad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$$

Teorema

Sean y_1, y_2 soluciones de la ED

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 - - - - - - (1)$$

y **si exite un punto** x_0 **donde el wronskiano de** y_1, y_2 **es diferente de cero**, entonces la familia de soluciones $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ con coeficientes arbitrarios c_1 y c_2 incluye toda solución de la ED (1).

Teorema

El teorema afirma que si $W\left(y_1, y_2\right) \neq 0$ entonces

$$y'' + p\left(x\right) y' + q\left(x\right) y = 0$$

$y = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right)$ se le llama **SOLUCIÓN GENERAL** y se dice que y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones de la ED

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = -1$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^0 & e^{-0} \\ e^{-0} & -e^{-0} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Ejemplo

$$y(0) = 2$$
$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} = 2.$$
$$c_1 + c_2 = 2..$$

$$y'(0) = -1$$
$$y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^{-0} = -1.$$
$$c_1 - c_2 = -1.$$

Teorema

$c_1 + c_2 = 2$
$c_1 - c_2 = -1$

$2c_1 = 1 \to c_1 = \frac{1}{2}$

$c_1 + c_2 = 2$
$\frac{1}{2} + c_2 = 2 \to c_2 = \frac{3}{2}$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x}$$

Ejemplo

$y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$ son soluciones de la ED

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-0} & e^{-0} \\ -3e^{-0} & -2e^{-0} \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$$

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Ejemplo

$y\,(0) = 2$
$y\,(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} = 2.$
$c_1 + c_2 = 2..$

$y'\,(0) = 3$
$y'\,(0) = -3c_1 e^0 - 2c_2 e^{-0} = -1.$
$-3c_1 - 2c_2 = 3.$

Ejemplo

$$c_1 + c_2 = 2$$
$$-3c_1 - 2c_2 = 3$$

$$-c_1 = 7 \rightarrow c_1 = -7$$

$$c_1 + c_2 = 2$$
$$-7 + c_2 = 2 \rightarrow c_2 = 9$$

$$y\left(x\right) = -7e^{-3x} + 9e^{-2x}$$

Ejemplo 1)

Encuentre la solución general de la ED

$$y'' + \frac{3}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0, \qquad\qquad x > 0.$$

si $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $y_2(x) = x^{-1}$ son soluciones

Ejercicio 2)

Encuentre la solución general de la ED

$$y'' - y = 0, \qquad\qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

si $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones.

INDEPENDENCIA LINEAL Y EL WRONSKIANO

Se dice que dos funciones f y g son **LINEALMENTE DEPENDIENTES** sobre un intervalo si para toda x en el intervalo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{constante} \neq 0$$

Ejemplo si $f(x) = x$ y $g(x) = 4x$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 4 \neq 0$$

Se dice que dos funciones f y g son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES** sobre un intervalo si para toda x en el intervalo si no son dependientes, es decir,

$$k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0, \text{ para toda } x \text{ en el intervalo } \longleftrightarrow k = k_2 = 0$$

Ejercicio 3) Determinar si la funciones e^x, e^{2x} son linealmente independientes.

Teorema

Si f y g son funciones diferenciales sobre un intervalo abierto I y si $W(f,g)(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \epsilon I$ entonces f y g son linealmente independientes sobre I. De manera alternativa, si f y g son linealmente dependientes sobre I, entonces $W(f,g)(x_0) = 0$ para todo $x \epsilon I$

Ejemplo

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ son soluciones de la ED

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_0} & 2e^{2x_0} \end{vmatrix} = 2e^{3x_0} - e^{3x_0} = e^{3x_0} \neq 0$$

e^x y e^{2x} son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.

REDUCCIÓN DE ORDEN

ED lineal homogénea de 2^{do} orden

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 - - - -(1)$$

con p y q continuas en algún intervalo I

Sea $y_1(x) \neq 0$ una solución de (1) en I haciendo $y = uy_1$, con u función de x.

$$y = uy_1$$

$$y' = uy_1' + u'y_1$$

$$y'' = uy_1'' + u'y_1' + u'y_1' + u''y_1$$

$$y'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$$

REDUCCIÓN DE ORDEN

$$y'' + py' + qy = 0$$
$$uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + p\left(uy_1' + u'y_1\right) + quy_1 = 0$$
$$\underbrace{uy_1''} + [2u'y_1'] + u''y_1 + \underbrace{puy_1'} + [pu'y_1] + \underbrace{quy_1} = 0$$
$$\underbrace{u\left(y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1\right)} + u'\left[2y_1' + p(x)\,y_1\right] + u''y_1 = 0$$

$$u''y_1 + u'\left[2y_1' + p(x)\,y_1\right] = 0$$

REDUCCIÓN DE ORDEN

haciendo $w = u' \rightarrow w' = u''$

$u'' y_1 + u' \left[2y_1' + p\left(x\right) y_1 \right] = 0$

$w' y_1 + w \left[2y_1' + p\left(x\right) y_1 \right] = 0$

$w' + w \left[\frac{2y_1'}{y_1} + p\left(x\right) \right] = 0$

$\frac{dw}{w} + \frac{2y_1'}{y_1} + p\left(x\right) = 0$

$\int \frac{dw}{w} + \int \frac{2y_1'}{y_1} + \int p\left(x\right) + c = 0$

$\ln\left(w\right) + 2\ln\left(y_1\right) = -\int p\left(x\right) + c$

$\ln\left(w\right) + \ln\left(y_1^2\right) = -\int p\left(x\right) + c$

REDUCCIÓN DE ORDEN

$\ln\left(wy_1^2\right) = -\int p\left(x\right) + c$
$wy_1^2 = e^{-\int p(x)+c} = c_1 e^{-\int p(x)}$

$$w = \frac{c_1 e^{-\int p(x)}}{y_1^2}$$

$w = u' = \frac{c_1 e^{-\int p(x)}}{y_1^2}$
$u = \int \frac{c_1 e^{-\int p(x)}}{y_1^2} + c_2$

REDUCCIÓN DE ORDEN

Eligiendo $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$

$$u = \int \frac{e^{-\int p(x)}}{y_1^2}$$

$y = uy_1 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)}}{y_1^2}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)}}{y_1^2}$$

Ejemplo

La función $y_1 = x^2$ es una solución $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Encuentre la solución general de la ED en el intervalo $(0, \infty)$

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

$p = -\frac{3}{x}$

$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)}}{y_1^2} = x^2 \int \frac{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}{x^4} = x^2 \int \frac{e^{--3\ln(x)dx}}{x^4} = x^2 \int \frac{e^{-\ln(x^{-3})dx}}{x^4} = x^2 \int \frac{x^{-3}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln(x)$

$$y_2 = x^2 \ln(x)$$

Ejemplo

La solución general está dada por

$$
\begin{aligned}
y &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\
y &= c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Encuentre la solución general de la ED

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 3, y'(0) = -1$$

La función $y_1 = e^{-3x}$

Ejemplo

$p = 6$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)}}{y_1^2} = e^{-3x} \int \frac{e^{-\int 6dx}}{e^{-6x}} = e^{-3x} \int \frac{e^{-6x}}{e^{-6x}} dx = e^{-3x} \int dx$$

$$y_2 = xe^{-3x}$$

Ejemplo

La solución general está dada por

$$y = c_1 y_1 (x) + c_2 y_2 (x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$$

$y(0) = 3$
$y(0) = c_1 e^{-3*0} + c_2 0 e^{-3*0} = 3 \to c_1 = 3$

$y'(x) = -3c_1 e^{-3x} - 3c_2 x e^{-3x} + c_2 e^{-3x}$

Ejemplo

$$y'(0) = -1$$

$$y'(0) = -3c_1 e^{-3*0} - 3c_2 0 e^{-3*0} + c_2 e^{-3*0} = -1$$

$$-3(3) + c_2 = -1$$
$$c_2 = 8$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} \\ &= 3e^{-3x} + 8xe^{-3x} \end{aligned}$$

Resolver las siguientes ED dada la solución particular encontrar la solución general

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \qquad y_1(x) = x^2$

2) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \qquad y_1(x) = x$

3) $x^2y'' + 3xy' + y = 0, \qquad y_1(x) = x^{-1}$

4) $(2x + 1)\, y'' + 4xy' - 4y = 0, \qquad y_1(x) = e^{-2x}$

5) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \qquad y_1(x) = x^{\frac{-1}{2}} sen\,(x)$

ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$ay'' + by' + cy = 0$$

con $a \neq 0$, b y c constantes.

ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

se propone una solución de la forma

$$y = e^{mx}$$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0$$

como $e^{mx} \neq 0$

ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$e^{mx}\left(am^2+bm+c\right)=0$$

como $e^{mx}\neq 0$

$\longrightarrow$

$$am^2+bm+c=0 \text{ ecuación auxiliar}$$

$$m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

CASOS:

1) $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow \quad m_1$ y m_2 reales distintos

2) $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow \quad m_1 = m_2$ reales iguales

3) $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow \quad m_1$ y m_2 complejos distintos

Caso 1) RAICES REALES Y DISTINTAS

$b^2 - 4ac > 0$

$m_1 \neq m_2 \epsilon \mathbb{R}$

Se definen dos soluciones $y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso 2) RAICES REALES Y DISTINTAS

$b^2 - 4ac = 0$

$m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a} \epsilon \mathbb{R}$

Se definen una solución $y_1 = e^{m_1 x} = e^{\frac{-b}{2a} x}$

$ay'' + by' + cy = 0$

$y'' + \frac{b}{a} y' + \frac{c}{a} y = 0$

$p = \frac{b}{a}$

Caso 2) RAICES REALES Y DISTINTAS

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)}}{y_1^2} = e^{\frac{-b}{2a}x} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{e^{\frac{-b}{2a}x}} dx = e^{\frac{-b}{2a}x} \int \frac{e^{\frac{b}{a}x}}{e^{\frac{-b}{2a}x}} dx = xe^{\frac{-b}{2a}x}$$

$$y_2 = xe^{\frac{-b}{2a}x}$$

Caso 2) RAICES REALES Y DISTINTAS

La solución general está dada por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{\frac{-b}{2a}x} + c_2 x e^{\frac{-b}{2a}x}$$

La solución general

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

Caso 3) RAICES COMPLEJAS

$b^2 - 4ac < 0$

$m_1 \neq m_2 \epsilon \mathbb{C}$

$m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \\ &= c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \end{aligned}$$

Caso 3) RAICES COMPLEJAS

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = c_1 e^{\alpha x+i\beta x} + c_2 e^{\alpha x-i\beta x}$$

$c_1 = c_2 = 1$

$y = c_1 e^{\alpha x+i\beta x} + c_2 e^{\alpha x-i\beta x} = e^{\alpha x+i\beta x} + e^{\alpha x-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right)$

$$y_1 = e^{\alpha x} 2\cos(\beta x)$$

$c_1 = 1,\ c_2 = -1$

$y = c_1 e^{\alpha x+i\beta x} + c_2 e^{\alpha x-i\beta x} = e^{\alpha x+i\beta x} - e^{\alpha x-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right)$

$$y_2 = e^{\alpha x} 2i\ sen(\beta x)$$

Caso 3) RAICES COMPLEJAS

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{\alpha x} 2\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} 2i \ sen(\beta x)$$

$$y = c_1 e^{\alpha x} 2\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} 2i \ sen(\beta x)$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \ sen(\beta x))$$

Ejemplo

Resuelva la siguiente ED

$$2y'' - 5y' - 3y = 0$$

la ecuación auxiliar
$am^2 + bm + c = 0$

$2m^2 - 5m - 3 = 0$

$(2m+1)(m-3) = 0$

$(2m+1) = 0$, ó $(m-3) = 0$

Ejemplo

$m_1 = \frac{-1}{2}$ ó $m_2 = 3$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} = c_1 e^{\frac{-1}{2}x} + c_2 e^{3x}$$

Ejemplo

Resuelva la siguiente ED

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

la ecuación auxiliar
$am^2 + bm + c = 0$

$m^2 - 10m + 25 = 0$

$(m-5)^2 = 0$

$m_1 = m_2 = 5$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x} = c_1 e^{5x} + c x_2 e^{5x}$$

Ejemplo

Resuelva la siguiente ED

$$y'' + 4y' + 7y = 0$$

la ecuación auxiliar
$am^2 + bm + c = 0$

$m^2 + 4m + 7 = 0$

$m = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)7}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3}$

$m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$

Ejemplo

$m_1 = -2 + i\sqrt{3} \quad$ ó $\quad m_2 = -2 - i\sqrt{3}$

$\alpha = -2, \qquad \beta = \sqrt{3}$

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\left(\beta x\right) + c_2 \ sen\left(\beta x\right)\right)$$

La solución general

$$y = e^{-2x}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_2 \ sen\left(\sqrt{3}x\right)\right)$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ED

1) $y'' + 6y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 3, y'(0) = -1$

2) $y'' + 6y' + 9 = 0, \qquad y(0) = 3, y'(0) = -1$

3) $y'' + 4y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 3, y'(0) = -1$

4) $4y'' + 4y' + 17y = 0, \qquad y(0) = -1, y'(0) = 2$

5) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} g(x), \qquad g(x) \neq 0 - - - - - (1)$$

donde α es una constante y $g(x)$ es un polinomio. Si y_1 y y_2 son soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ y y_p es una solución particular de (1).

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

es una solución general de (1).

Veremos como encontrar una solución particular y_p medinate el método de coeficientes indeterminados.

Ejemplo

Encuentre la Solución de

$$y'' - 7y' + 12y = 4e^{2x}$$

Paso 1)

Resolver $y'' - 7y' + 12y = 0$

la ecuación auxiliar
$am^2 + bm + c = 0$

$m^2 - 7m + 12 = 0$
$(m-4)(m-3) = 0$
$(m-4) = 0$, ó $(m-3) = 0$

$m_1 = 4$ ó $m_2 = 3$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x}$$

Paso 2)

$$y_p = Ae^{2x}$$
$$y_p' = 2Ae^{2x}$$
$$y_p'' = 4Ae^{2x}$$

$$y'' - 7y' + 12y = 4e^{2x}$$
$$4Ae^{2x} - 14Ae^{2x} + 12Ae^{2x} = 4e^{2x}$$
$$4A - 14A + 12A = 4$$
$$A = 2$$

$$y_p = Ae^{2x} = 2e^{2x}$$

Paso 3)

Solución general

$$\begin{aligned} y &= y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= 2e^{2x} + c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x} \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre la Solución de

$$y'' - 7y' + 12y = 5e^{4x}$$

Resolver $y'' - 7y' + 12y = 0$

la ecuación auxiliar
$am^2 + bm + c = 0$

$m^2 - 7m + 12 = 0$
$(m-4)(m-3) = 0$
$(m-4) = 0$, ó $(m-3) = 0$

$m_1 = 4$ ó $m_2 = 3$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x}$$

Paso 2)

$$y_p = Axe^{4x}$$
$$y_p' = 4Axe^{4x} + Ae^{4x}$$
$$y_p'' = 16Axe^{4x} + 4Ae^{4x} + 4Ae^{4x}$$

$$y'' - 7y' + 12y = 5e^{4x}$$
$$16Axe^{4x} + 8Ae^{4x} - 28Axe^{4x} - 7Ae^{4x} + 12Axe^{4x} = 5e^{4x}$$
$$\underbrace{16Ax} + 8A \underbrace{-28Ax} - 7A + \underbrace{12Ax} = 5$$
$$A = 5$$
$$A = 2$$

$$y_p = Axe^{4x} = 5xe^{4x}$$

Paso 3)

Solución general

$$
\begin{aligned}
y &= y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \\
&= 5xe^{4x} + c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Encuentre la Solución de

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 0$

la ecuación auxiliar
$am^2 + bm + c = 0$

$m^2 + 4m - 2 = 0$

$m_1 = -2 + \sqrt{6}$ ó $m_2 = -2 - \sqrt{6}$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} = c_1 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2-\sqrt{6}\right)x}$$

Paso 2)

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$
$$y_p' = 2Ax + B$$
$$y_p'' = 2A$$

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$
$$2A + 4\left(2Ax + B\right) - 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 - 3x + 6$$
$$2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$
$$-2A = 2$$

$$\rightarrow A = -1$$

Ejemplo

$8A - 2B = -3$
$8\left(-1\right) - 2B = -3$
$-2B = 5$

$\rightarrow B = \frac{-5}{2}$

$2A + 4B - 2C = 6$
$2\left(-1\right) + 4\left(\frac{-5}{2}\right) - 2C = 6$
$-2 - 10 - 2C = 6$
$C = -9$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

Paso 3)

Solución general

$$
\begin{aligned}
y &= y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \\
&= -x^2 - \frac{5}{2}x - 9 + c_1 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2-\sqrt{6}\right)x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Encuentre la Solución de

$$y'' - 8y' + 25y = \left(5x^3 - 7\right) e^{-x}$$

Paso 1)

Resolver $y'' - 8y' + 25y = 0$

la ecuación auxiliar
$am^2 + bm + c = 0$

$m^2 - 8m + 25 = 0$

$m_1 = 4 + i3$ ó $m_2 = 4 - i3$

$$y = e^{\alpha x}\left(\cos\left(\beta x\right) + sen\left(\beta x\right)\right) = e^{4x}\left(\cos\left(3x\right) + sen\left(3x\right)\right)$$

Paso 2)

$$y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{-x}$$

$$y_p' = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{-x} - \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{-x}$$

$$y_p'' = \left(6Ax + 2B\right) e^{-x} - \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{-x}$$
$$+ \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{-x} + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{-x}$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
&y'' - 8y' + 25y = \left(5x^3 - 7\right) e^{-x} \\
&(6Ax + 2B)\, e^{-x} - \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{-x} \\
&+ \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{-x} + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{-x} \\
&-8\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{-x} + 8\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{-x} \\
&+25\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{-x} = \left(5x^3 - 7\right) e^{-x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
&(6Ax + 2B) - \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) \\
&+ \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + \underbrace{\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)} \\
&-8\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + \underbrace{8\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)} \\
&+ \underbrace{25\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)} = \left(5x^3 - 7\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(6Ax + 2B) + 34\underbrace{\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)} \\
&-7\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 5x^3 - 7
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$6Ax + 2B + 34Ax^3 + 34Bx^2 + 34Cx + 34D$$
$$-21Ax^2 - 14Bx - 7C = 5x^3 - 7$$
$$34A = 5 \to A = \frac{5}{34}$$
$$34B - 21A = 0 \to B = \frac{21}{34}A = \frac{105}{34^2}$$
$$6A + 34C - 14B = 0 \to C = ?$$
$$2B + 34D - 7C = -7 \to D = ?$$
$$y_p =$$

Paso 3)

Solución general

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ED

1) $y'' - 2y' - 3y = (4x - 5) + 6xe^{2x}3$

2) $y'' - y' + y = 2sen\,(3x)$

VARIACION DE PARÁMETROS

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = g(x)$$

Supoganse que las soluciones de la ecuación homogenea es de la forma:

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x)$$

Elmétodo devariación de parámetros consiste en suponer que la solución particular buscada es de la forma:

$$y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

VARIACION DE PARÁMETROS

$$c_1 = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx \qquad c_2 = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx$$

Ejemplo

Resolver la ED

$$y'' + y = \sec(x)$$

Paso 1)

Resolver

$$y'' + y = 0$$

La ec. auxiliar es

$m^2 + 1 = 0$
$m^2 = -1$
$m_1 = 0 + i\sqrt{1}$
$m_2 = 0 - i\sqrt{1}$

Paso 1)

$\alpha = 0$ y $\beta = 1$
$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{0*x}\cos(1x) = \cos(x)$
$y_2(x) = e^{\alpha x} sen(\beta x) = e^{0*x} sen(1x) = sen(x)$
$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) = c_1^* \cos(x) + c_2^* sen(x)$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

Paso 1)

$$c_1 = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx = -\int \frac{sen(x)\sec(x)}{1}dx = -\int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx = \ln(\cos(x)) + c_3$$

$$c_2 = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx = \int \frac{\cos(x)\sec(x)}{1}dx = \int dx = x + c_4$$

Como se buscan soluciones particulares haciendo $c_3 = c_4 = 0$

Paso 1)

$$y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \ln(\cos(x))\cos(x) + x sen(x)$$

La solución de la ecuación no homogénea

$$y(x) = \ln(\cos(x))\cos(x) + x sen(x) + c_1^* \cos(x) + c_2^* sen(x)$$

Ejemplo

Resolver la ED

$$y'' + y = tg\left(x\right)$$

Paso 1)

Resolver

$$y'' + y = 0$$

La ec. auxiliar es

$$m^2 + 1 = 0$$
$$m^2 = -1$$
$$m_1 = 0 + i\sqrt{1}$$
$$m_2 = 0 - i\sqrt{1}$$

Paso 1)

$\alpha = 0$ y $\beta = 1$
$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{0*x}\cos(1x) = \cos(x)$
$y_2(x) = e^{\alpha x}sen(\beta x) = e^{0*x}sen(1x) = sen(x)$
La solución de la homogénea

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) = c_1^* \cos(x) + c_2^* sen(x)$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

Paso 1)

$$c_1 = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx = -\int \frac{sen(x)tg(x)}{1}dx = -\int \frac{sen^2(x)}{\cos(x)}dx =$$
$$-\int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{1-}{\cos(x)}dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)}dx$$
$$= -\int \frac{1-}{\cos(x)}dx + \int \cos(x)\,dx = -\int \sec(x)\,dx + \int \cos(x)\,dx =$$
$$-\ln\left[\sec(x) + tg(x)\right] + sen(x) + c_3$$

$$c_2 = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx = \int \frac{\cos(x)tg(x)}{1}dx = \int sen(x)\,dx = -\cos(x) + c_4$$

Paso 1)

Como se buscan soluciones particulares haciendo $c_3 = c_4 = 0$

$$y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = [-\ln|\sec(x) + tg(x)| + sen(x)]\cos(x) - co$$

La solución de la ecuación no homogénea

$$y(x) = [-\ln|\sec(x) + tg(x)| + sen(x)]\cos(x) - \cos(x)\,sen(x) + c_1^* \cos(x$$

Ejemplo

Resolver la ED

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)\,e^{2x}$$

Paso 1)

Resolver

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

La ec. auxiliar es

$m^2 - 4m + 4 = 0$
$(m - 2)^2 = 0$
$m_1 = 2$
$m_2 = 2$

Paso 1)

La solución de la homogénea

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) = c_1^* e^{2x} + c_2^* x e^{2x}$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4}$$

Paso 1)

$g(x) = (x+1)\,e^{2x}$

$c_1 = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx = -\int \frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}dx = -\int x^2 + xdx =$
$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_3$

$c_2 = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx = \int \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}dx = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + c_4$

Paso 1)

Como se buscan soluciones particulares haciendo $c_3 = c_4 = 0$

$$y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x}$$

Paso 1)

La solución de la ecuación no homogénea

$$y\left(x\right) = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} + c_1^* e^{2x} + c_2^* xe^{2x}$$

Ejemplo

Resolver la ED

$$y'' + 9y = \frac{\csc(3x)}{4}$$

Paso 1)

Resolver

$$y'' + y = 0$$

La ec. auxiliar es

$$\begin{aligned} m^2 + 9 &= 0 \\ m^2 &= -9 \\ m_1 &= 0 + i3 \\ m_2 &= 0 - i3 \end{aligned}$$

Paso 1)

$\alpha = 0$ y $\beta = 3$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{0*x} \cos(3x) = \cos(3x)$

$y_2(x) = e^{\alpha x} sen(\beta x) = e^{0*x} sen(3x) = sen(3x)$

La solución de la homogénea

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) = c_1^* \cos(3x) + c_2^* sen(3x)$$

Paso 1)

$$W\left(x_0\right)=\left|\begin{array}{cc} y_1\left(x_0\right) & y_2\left(x_0\right) \\ y_1'\left(x_0\right) & y_2'\left(x_0\right)\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc}\cos\left(3x\right) & sen\left(3x\right) \\ -3sen\left(x\right) & 3\cos\left(x\right)\end{array}\right|=3$$

$$c_1=-\int\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx=-\int\frac{sen(3x)\frac{\csc(3x)}{4}}{3}dx=-\frac{1}{12}\int dx=\frac{-1}{12}x+c_3$$

$$c_2=\int\frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx=\int\frac{\cos(3x)\frac{\csc(3x)}{4}}{3}dx=\frac{1}{12*3}\int\frac{\cos(3x)}{sen(3x)}3dx=$$
$$\frac{1}{36}\ln\left|sen\left(3x\right)\right|+c_4$$

Paso 1)

Como se buscan soluciones particulares haciendo $c_3 = c_4 = 0$

$$y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = -\frac{x}{12}\cos(3x) + \frac{1}{36}\ln|sen(3x)|\, sen(3x)$$

La solución de la ecuación no homogénea en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

$$y(x) = -\frac{x}{12}\cos(3x) + \frac{1}{36}\ln|sen(3x)|\, sen(3x) + c_1^* \cos(3x) + c_2^* sen(3x)$$

Ejemplo Oscilaciones mecánicas
Supongase se tiene un resorte del cual se cuelga un curepo de masa m como se muestra en la figura.

Ejemplo Oscilaciones mecánicas

Si el cuerpo está en equilibrio, por la 2^{da} ley de Newton

$$F_m = p$$

donde $F_m = k\triangle y$ es la fuerza dada por la ley de Hooke.

k **es la constante del resorte que se opone al estiramiento por el peso**
$\triangle y$ **es el estiramiento producido en el resorte**, así

$$k\triangle y = mg$$

Ejemplo Oscilaciones mecánicas

$$mg - k\triangle y = 0$$

Si ahora tiramos del cuerpo hacia abajo desplazandolo de su posición de equilibrio y se suelta, se tiene

$$F_m + p = my''$$

donde $F_m = k\left(\triangle y + y\right)$

Ejemplo Oscilaciones mecánicas

"y" es la separación del cuerpo de su posición de equilibrio. En ausencia de efectos de rozamiento

$$-k\left(\triangle y+y\right)+mg=my''$$

$$\underbrace{-k\triangle y}-ky\underbrace{+mg}=my''$$

$$-ky=my''$$

el signo negativo indica que la fuerza restauradora del resorte actúa opuesta a la dirección de movimiento. Los desplazamientos abajo dela posición de equiibrio **son positivos**.

Ejemplo Oscilaciones mecánicas

$$my'' + ky = 0$$
$$mw^2 + k = 0$$
$$w^2 = -\frac{k}{m}$$
$$w = \sqrt{-\frac{k}{m}}$$
$$w_1 = 0 + i\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$w_2 = 0 - i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\alpha = 0$ y $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ejemplo Oscilaciones mecánicas

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{\alpha x}\left[c_1 \cos(\beta x) + c_2 sen(\beta x)\right] \\
&= e^{0*x}\left[c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x\right)\right]
\end{aligned}
$$

$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es **el periodo**.

El movimiento descrito por $y(x)$ se le llama movimiento oscilatorio simple.

Ejemplo Oscilaciones mecánicas

Supongase que el cuerpo se encuentra sometido a una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad del movil

$$\left(F_r = cy', \quad c > 0\right)$$

Por ejemplo si el resorte y el cuerpo se encuentra sumergido a algún liquido. Ahora

$$F_m + p - F_r = my''$$

$$-ky \underbrace{+mg} - cy' = my''$$

Ejemplo Oscilaciones mecánicas

$$-ky - cy' = my''$$
$$my'' + cy' + ky = 0$$
$$m\alpha^2 + -k\left(\triangle y + y\right) + mg - cy' = my''$$
$$\underbrace{-k\triangle y}\, c\alpha + k = 0$$
$$\alpha = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\alpha_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$
$$\alpha_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

CASO I)

$c^2 - 4mk > 0 \qquad c \gg k$ **SOBREAMORTIGUADO**

$\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$y\left(x\right) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

CASO II)

$c^2 - 4mk = 0$ **CRITICAMENTE AMORTIGUADO**

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-c}{2m}$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_2 x}$$

CASO III)

$c^2 - 4mk < 0 \qquad c \ll k$ **SUBAMORTIGUADO**

$$\alpha_1 = \frac{-c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$
$$\alpha_2 = \frac{-c}{2m} - i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

$$\alpha_1 = \frac{-c}{2m} + iw$$
$$\alpha_2 = \frac{-c}{2m} - iw$$
$$w = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

$$y(x) = e^{\frac{-c}{2m}x}\left[c_1 \cos(wx) + c_2 \operatorname{sen}(wx)\right]$$

CIRCUITO ELECTRICO LRC

Considere un circuito eléctrico que lleve en serie una bobina de inductancia L, una rsistencia R, un condensador de capacidad C y que es alimentado por fem $V(t)$, según muestra la siguiente figura

Suponiendo L,R y C son constantes

$$V(t) = V_C + V_R + V_L$$

V voltaje generado.

V_C, V_R y V_L diferencia de potencial entre el condensador, la resistencia y la bobina.

CIRCUITO ELECTRICO LRC

$$V_C = \frac{q(t)}{C}$$

$q(t)$ es la carga en cada instante de tiemp,

$$V_R = Rq'(t)$$

$$V_L = Lq''(t)$$

Así

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = V(t)$$

Considerando que $i(t)$ intensidad $i(t) = q(t)$

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{i}{C} = V(t)$$

ésta es idéntica a la ecuación diferencial

$$my'' + cy' + ky = 0$$

si $V(t) = 0$

La ecuación auxiliar

$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$

Se dice que el circuito es

SOBREAMORTIGUADO si $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$

CRITICAMENTE AMORTIGUADO si $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$

SUBAMORTOGUADO si $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$

Circuito en serie subamortiguado

Determine $i\left(t\right)$ en el capacitor en un circuito LRC cuando $L = 0.25$ herg(h), $R = 10$ Ohm, $C = 0.001$ farad(f), $V\left(t\right) = 0$, $i\left(0\right) = i_0$, $i'\left(0\right) = 0$,

la ecuación

$$Li''\left(t\right) + Ri'\left(t\right) + \frac{i}{C} = V\left(t\right)$$

$$\frac{1}{4}i''\left(t\right) + 10i'\left(t\right) + 1000i = 0$$

Circuito en serie subamortiguado

$$\frac{1}{4}m^2 + 10m + 1000 = 0$$

$$m^2 + 40m + 4000 = 0$$

$m = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(4000)}}{2}$
$m = -20 \pm i60$

$\alpha = -20$ y $\beta = 60$

$$i(t) = e^{-20t}\left[c_1 \cos(60t) + c_2 sen(60t)\right]$$

Circuito en serie subamortiguado

$$i'(t) = -20e^{-20t}\left[c_1\cos(60t) + c_2 sen(60t)\right] + e^{-20t}\left[-60c_1 sen(60t) + 60c_2\right.$$

$i(0) = i_0 = e^0\left[c_1\cos(0) + c_2 sen(0)\right] = c_1 \to c_1 = i_0$

$i'(0) = 0 = -20e^0\left[c_1\cos(0) + c_2 sen(0)\right] +$
$e^0\left[-60c_1 sen(0) + 60c_2\cos(0)\right] = -20i_0 + 60c_2$
$c_2 = \frac{1}{3}i_0$

$$i(t) = e^{20t}\left[i_0\cos(60t) + \frac{1}{3}i_0 sen(60t)\right]$$

Ejercicio 1) Movimiento libre no amortiguado

Una masa que pesa w=8 libras alarga 6 pulgadas un resorte. En t=0 se libera la masa desde un punto que está 8 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendiente de $\frac{4}{3}\frac{pies}{s}$. Determine la ecuación de movimiento.

Ejercicio 2) Movimiento criticamente amortiguado

Una masa que pesa w=2 libras alarga 2 pies un resorte. Suponiendo que una fuerza amortiguada igua a dos veces la velocidad instántanea acta sobre el sisitema, determine la ecuación de movimiento, si la masa inicia, se libera desde la posición de equilibrio con velocidad ascendente de $3\frac{ft}{s}$

Ejercicio 3) Movimiento subamortiguado

Una masa que pesa w=16 libras se une a un resorte que mide 5 ft de largo. En el equilibrio el resorte mide 8.2 ft. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 ft arriba de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos y(x). Si se sabe además el medio circundante ofrece resistencia numericamente igual a la velocidad instántanea.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea $f:(0,\infty] \to \mathbb{C}$ una función integrable,en todo intervalo $[0,a]$ se define la **TRANSFORMADA DE LAPLACE** de f en $z \epsilon \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{L}\left[f\right](z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f\left(t\right) dt = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^{x} e^{-zt} f\left(t\right) dt = F\left(z\right)$$

Ejemplo 1)

$$f(t)\begin{cases} 0 & 0\leq t<a \\ 1 & t\geqslant a \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f](z)=\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt=\int_0^a e^{-zt}0dt+\int_a^\infty e^{-zt}1dt$$
$$=\int_a^\infty e^{-zt}dt=x\overset{\lim}{\longrightarrow}\infty\frac{-1}{z}\int_a^x e^{-zt}(-zdt)=x\overset{\lim}{\longrightarrow}\infty\,\frac{-1}{z}e^{-zt}\Big|_a^x=$$
$$=x\overset{\lim}{\longrightarrow}\infty\left[\frac{-e^{-zx}+e^{-za}}{z}\right]=\frac{e^{-za}}{z}=F(z)$$

$$\mathcal{L}[f](z)=\frac{e^{-za}}{z}$$

Si $a=0$

$$\mathcal{L}[f](z)=\frac{1}{z}$$

Ejemplo 2)

$$f(t) = 1$$

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-zt} dt = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \frac{-1}{z} \int_0^x e^{-zt}(-zdt) =$$
$$x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty\ \frac{-1}{z} e^{-zt}\Big|_0^x =$$
$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-e^{-zx} + e^{-z*0}}{z}\right] = \frac{1}{z} = F(z)$$

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{z}$$

Ejemplo 3)

$$f(t) = t$$

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} t dt = x \stackrel{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^x t e^{-zt} dt$$

$$u = t \qquad dv = \frac{-1}{z} e^{-zt} (-z dt)$$

$$du = dt \qquad v = \frac{-e^{-zt}}{z}$$

Ejemplo 3)

$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-te^{-zt}}{z}\Big|_0^x + \frac{1}{z}\int_0^x e^{-zt}dt \right] = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-te^{-zt}}{z}\Big|_0^x - \frac{1}{z^2}e^{-zt}\Big|_0^x \right]$$

$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-xe^{-zx}+0*e^{-z*0}}{z} - \frac{e^{-zx}-e^{-z*0}}{z^2} \right] = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-xe^{-zx}}{z} - \frac{e^{-zx}-1}{z^2} \right] = \frac{1}{z^2} = F(z)$$

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{z^2}$$

Ejemplo 4)

$$f(t) = e^{at}, \;\; a \epsilon \mathbb{R}$$

$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} e^{at} dt = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^x e^{(a-z)t} dt =$
$x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \frac{1}{(a-z)} \int_0^x e^{(a-z)t} (a-z)\, dt$

$u = (a-z)\, t \rightarrow du = (a-z)\, dt$

Ejemplo 4)

$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \; \frac{1}{(a-z)} e^{(a-z)t} \Big|_0^x = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \; \frac{e^{(a-z)x} - e^{(a-z)*o}}{(a-z)} \Big|_0^x = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \; \frac{e^{-(z-a)x} - 1}{(a-z)} \Big|_0^x$
$(z-a) > 0$

$= \frac{-1}{(a-z)} = \frac{1}{(z-a)} = F(z)$

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{(z-a)}$$

Si $a = 0$

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{z}$$

Ejemplo 5)

$$f(t) = \cos(at)$$

$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} \cos(at)\, dt =$
$x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^x e^{-zt} \cos(at)\, dt$

$u = e^{-zt} \qquad dv = \frac{1}{a} \cos(at)\, adt$
$du = -ze^{-zt} dt \qquad v = \frac{1}{a} sen(at)$

$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{e^{-zt} sen(at)}{a} \Big|_0^x + \frac{z}{a} \int_0^x e^{-zt} sen(at)\, dt \right]$
$u = e^{-zt} \qquad dv = \frac{1}{a} sen(at)\, adt$

$du = -ze^{-zt} dt \qquad v = \frac{-1}{a} \cos(at)$

Ejemplo 5)

$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{e^{-zt} sen(at)}{a} \Bigg|_0^x + \frac{z}{a} \left[\frac{-e^{-zt} \cos(at)}{a} \Bigg|_0^x - \frac{z^2}{a^2} \int_0^x e^{-zt} \cos(at)\, dt \right] \right]$$

$$\left(\frac{a^2+z^2}{a^2} \right) x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^x e^{-zt} \cos(at)\, dt =$$
$$x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{e^{-zt} sen(at)}{a} \Bigg|_0^x + \frac{z}{a^2} \; -e^{-zt} \cos(at) |_0^x \right]$$

$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{e^{-zx} sen(ax) - e^{-0} sen(0)}{a} - \frac{z}{a^2} e^{-zx} \cos(ax) + \frac{z}{a^2} e^{-z0} \cos(0) \right]$$
$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[-\frac{z}{a^2} e^{-zx} \cos(ax) + \frac{z}{a^2} e^{-z0} \cos(0) \right] = \frac{z}{a^2}$$

$$\left(\frac{a^2+z^2}{a^2} \right) x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^x e^{-zt} \cos(at)\, dt = \frac{z}{a^2}$$

$$x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^x e^{-zt} \cos(at)\, dt = \frac{z}{a^2+z^2} = F(z)$$

Ejemplo 6)

$$f_n(t) = t^n$$

Demuestre

$$\mathcal{L}[f_n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

Ejemplo 6)

Solución por inducción

$$\mathcal{L}\left[f_1\right](z) = \frac{1}{z^2}$$

Supongase que

$$\mathcal{L}\left[f_n\right](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

Ejemplo 6)

Ahora

$$\mathcal{L}\left[f_{n+1}\right](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-zt} t^{n+1} dt =$$
$$x \xrightarrow{\lim} \infty \int_0^x t^{n+1} e^{-zt} dt$$

$$u = t^{n+1} \qquad dv = \frac{-1}{z} e^{-zt}(-zdt)$$
$$du = (n+1)\, t^n dt \qquad v = \frac{-e^{-zt}}{z}$$

Ejemplo 6)

$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-t^{n+1}e^{-zt}}{z} \Big|_0^x + \frac{n+1}{z} \int_0^x e^{-zt} t^n dt \right] =$$

$$x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-t^{n+1}e^{-zt}}{z} \Big|_0^x + \frac{n+1}{z} \frac{n!}{z^{n+1}} \right]$$

$$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \left[\frac{-x^n e^{-zx^n} + 0}{z} + \frac{n+1}{z} \frac{n!}{z^{n+1}} \right] = \frac{(n+1)!}{z^{n+1}} = F(z)$$

$$\mathcal{L}[f_n](z) = \frac{(n+1)!}{z^{n+1}}$$

Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

a) $f(t) = sen(3t)$
b) $f(t) = e^{5t}$
c) $f(t) = te^{t}$
d) $f(t) = t^3 - t$
f) $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$
g) $f(t) = k$

TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

Si dada $f(t)$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = F(z)$$

entonces la transformada de Laplace inversa está dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(z)\right] = f(t)$$

Ejemplos

1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{z+8}\right] = 9\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+8}\right] = 9e^{8t}$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{11}{z^2+9}\right] = 11\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+9}\right] = \frac{11}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{z^2+3^3}\right] = 11sen(3t)$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7z}{z^2+3}\right] = 7\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+9}\right] = 7\cos(\sqrt{3}t)$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2-25}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2-5^2}\right] = \cosh(5t)$

Ejemplo

5) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{z}\right] = k$

6) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] = 1$

7) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right] = t$

8) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = e^{at}$

TABLA DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

$f(t)$	$\mathcal{L}[f_{n+1}](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f_{n+1}(t)\,dt = F(z)$
k	$\frac{k}{z}$
e^{at}	$\frac{1}{(z-a)}$
t^n	$\frac{(n+1)!}{z^{n+1}}$
$\cos(at)$	$\frac{z}{a^2+z^2}$
$sen(wt)$	$\frac{w}{z^2+w^2}$
$\cosh(tk)$	$\frac{z}{z^2-k^2}$
$senh(tk)$	$\frac{k}{z^2-k^2}$

TABLA DE TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

$F(z)$	$\mathcal{L}^{-1}[F(z)] = f(t)$
$\frac{k}{z}$	k
$\frac{1}{(z-a)}$	e^{at}
$\frac{(n+1)!}{z^{n+1}}$	t^n
$\frac{z}{a^2+z^2}$	$\cos(at)$
$\frac{w}{z^2+w^2}$	$sen(wt)$
$\frac{z}{z^2-k^2}$	$\cosh(tk)$
$\frac{k}{z^2-k^2}$	$senh(tk)$

Teorema de traslación

$$\mathcal{L}\left[f\right](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = F(z)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f\right](z) = \int_0^\infty e^{at} e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(z-a)t} f(t)\, dt = F(z-a)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f\right](z) = F(z-a)$$

Ejemplo

$$\mathcal{L}\left[e^{2t}t^{2}\right](z)=\mathcal{L}\left[e^{at}f\right](z)$$

$$\mathcal{L}\left[t^{2}\right](z)=\frac{2!}{z^{3}}=F(z),$$

$a=2$

$$\mathcal{L}\left[e^{2t}t^{2}\right](z)=F(z-2)=\frac{2!}{(z-2)^{3}}$$

Ejemplo

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\cos(4t)\right](z) = \mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](z)$$

$$\mathcal{L}\left[t^2\right](z) = \frac{2!}{z^3} = F(z),$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(4t)\right](z) = \frac{z}{z^2+4^2}$$

$a = -3$

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\cos(4t)\right](z) = F(z-(-3)) = F(z+3) = \frac{(z+3)}{(z+3)^2+4^2}$$

Ejemplo

$$\mathcal{L}\left[e^{-\pi t} senh\left(\sqrt{2}t\right)\right](z) = \mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right](z)$$

$$\mathcal{L}\left[senh\left(\sqrt{2}t\right)\right](z) = \frac{\sqrt{2}}{z^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = F(z),$$

$a = -3$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\pi t} senh\left(\sqrt{2}t\right)\right](z) = F(z - (-\pi)) = F(z + \pi) = \frac{\sqrt{2}}{(z+\pi)^2 - \left(\sqrt{2}\right.}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE TRASLACIÓN

1)
$$\mathcal{L}\left[af+bg\right](z)=a\mathcal{L}\left[f\right](z)+b\mathcal{L}\left[g\right](z), \qquad \text{linealidad}$$

$$\mathcal{L}\left[af+bg\right](z)=\int_0^\infty e^{-zt}\left(af+bg\right)(t)\,dt$$

$$=a\int_0^\infty e^{-zt}(t)\,dt+b\int_0^\infty e^{-zt}g(t)\,dt=a\mathcal{L}\left[f\right](z)+b\mathcal{L}\left[g\right](z)$$

Ejemplo

Si $f(t) = e^{iwt}$

$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f dt = \int_0^\infty e^{-zt} e^{iwt} dt = \int_0^\infty e^{-(z-iw)t} dt =$
$x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \int_0^x e^{-(z-iw)t} dt$
$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \frac{-1}{(z-iw)} \int_0^x e^{-(z-iw)t} - (z-iw)\, dt = x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \frac{-1}{(z-iw)} \left. e^{-(z-iw)t} \right|_0^x$
$= x \overset{\lim}{\longrightarrow} \infty \frac{-1}{(z-iw)} \left(e_0^{-(z-iw)x} - 1 \right) = \frac{1}{(z-iw)}$

$$\mathcal{L}\left[e^{iwt}\right](z) = \frac{1}{(z-iw)}$$

Ejemplo

$$\cos(wt) = \frac{1}{2}\left(e^{iwt} + e^{-iwt}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\cos(wt)\right](z) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{iwt} + e^{-iwt}\right)\right](z) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left[\left(e^{iwt}\right)\right](z) + \mathcal{L}\left[\left(e^{-iwt}\right)\right](z)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(z - iw)} + \frac{1}{(z + iw)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2z}{(z - iw)(z + iw)}\right] = \frac{z^2}{z^2 + w^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo

$$sen\left(wt\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{iwt}-e^{-iwt}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\cos\left(wt\right)\right]\left(z\right) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{iwt}-e^{-iwt}\right)\right]\left(z\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}\left[\left(e^{iwt}\right)\right]\left(z\right)-\mathcal{L}\left[\left(e^{-iwt}\right)\right]\left(z\right)\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\left(z-iw\right)}-\frac{1}{\left(z+iw\right)}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{2iw}{\left(z-iw\right)\left(z+iw\right)}\right]\\
&= \frac{w}{z^2+w^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Si $f(t) = e^{kt} \to \mathcal{L}\left[e^{kt}\right](z) = \frac{1}{z-k}$
$g(t) = e^{-kt} \to \mathcal{L}\left[e^{-kt}\right](z) = \frac{1}{z+k}$

$$h(t) = \cosh(tk) = \frac{1}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right)$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\cosh\left(kt\right)\right]\left(z\right) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)\right]\left(z\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left[\left(e^{kt}\right)\right]\left(z\right)+\mathcal{L}\left[\left(e^{-kt}\right)\right]\left(z\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(z-k\right)}+\frac{1}{\left(z+k\right)}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2z}{\left(z-k\right)\left(z+k\right)}\right]\\
&= \frac{z}{z^2-k^2}
\end{aligned}
$$

TRANSFORMADA LAPLACE DE LA DERIVADA

Una de la aplicaciones de la derivada de la transformada de Laplace es **convertir una ecuación diferencial en una forma simple que pueda ser resuelta más facilmente**.

Si f es derivable
$\mathcal{L}\left[f'\right](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f' dt = \left. e^{-zt} f(t)\right|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-zt} f' dt =$
$-f(0) + z\mathcal{L}\left[f\right](z)$

$u = e^{-zt} \qquad dv = f' dt$

$du = -ze^{-zt} dt \qquad v = f(t)$

$$\mathcal{L}\left[f'\right](z) = z\mathcal{L}\left[f\right](z) - f(0)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f''\right](z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f'' dt = e^{-zt} f'(t)\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-zt} f' dt \\
&= -f'(0) + z\mathcal{L}\left[f'\right](z) \\
&= -f'(0) + z\left(z\mathcal{L}\left[f\right](z) - f(0)\right) \\
&= -f'(0) + z^2\mathcal{L}\left[f\right](z) - zf(0)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left[f''\right](z) = z^2\mathcal{L}\left[f\right](z) - zf(0) - f'(0)$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f'''\right](z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f''' dt \\
&= e^{-zt} f''(t)\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-zt} f'' dt \\
&= -f''(0) + z\mathcal{L}\left[f''\right](z) \\
&= -f''(0) + z\left(z^2\mathcal{L}[f](z) - zf(0) - f'(0)\right) \\
&= -f''(0) + z^3\mathcal{L}[f](z) - z^2 f(0) - zf'(0)
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}\left[f'''\right](z) = z^3\mathcal{L}[f](z) - z^2 f(0) - zf'(0) - f''(0)
$$

Ejemplo

En general para k

$$\mathcal{L}\left[f^{k}\right](z) = z^{k}\mathcal{L}\left[f\right](z) - z^{k-1}f\left(0\right) - z^{k-2}f'\left(0\right) \ldots - z'f^{k-1}\left(0\right) - f^{k-1}\left(0\right)$$

las derivadas sucesivas de f en 0.

Ejemplo

Resolver la siguiente ED

$$\mathcal{L}\left[f''\right](z) = z^2\mathcal{L}\left[f\right](z) - zf(0) - f'(0)$$

$\frac{d^2 sen(kt)}{dt^2} = \frac{dk \cos(kt)}{dt} = -k^2 sen(kt)$

Ejemplo

Aplicando la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} -k^2 \mathcal{L}\left[sen\left(kt\right)\right]\left(z\right) &= \mathcal{L}\left[\frac{d^2 sen\left(kt\right)}{dt^2}\right]\left(z\right) \\ &= z^2 \mathcal{L}\left[sen\left(kt\right)\right]\left(z\right) - zsen\left(0\right) - \cos\left(0\right) \\ &= z^2 \mathcal{L}\left[sen\left(kt\right)\right]\left(z\right) - 1\left(z^2 + k^2\right) \mathcal{L}\left[sen\left(kt\right)\right]\left(z\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left[sen\left(kt\right)\right]\left(z\right) = \frac{1}{\left(z^2 + k^2\right)}$$

Ejemplo (Oscilaciones mecánicas)

$$-k\left(\triangle y + y\right) + mg = my''$$

$$\underbrace{-k\triangle y} - ky \underbrace{+mg} = my''$$

$$-ky = my''$$

$$my'' + ky = 0, \quad y\left(0\right) = x_0, \quad y'\left(0\right) = 0$$

Ejemplo

Aplicando Laplace

$$m\mathcal{L}\left[y''\right](z) + k\mathcal{L}\left[y\right](z) = 0$$

$$\mathcal{L}\left[f''\right](z) = z^2\mathcal{L}\left[f\right](z) - zf(0) - f'(0)$$

$$y(0) = x_0, \quad y'(0) = 0$$

$$m\left(z^2\mathcal{L}\left[y\right](z) - zx_0 - 0\right) + k\mathcal{L}\left[y\right](z) = 0$$

$$mz^2\mathcal{L}\left[y\right](z) - mzx_0 + k\mathcal{L}\left[y\right](z) = 0$$

$$\left(mz^2 + k\right)\mathcal{L}\left[y\right](z) - mzx_0 = 0$$

Ejemplo

$$\mathcal{L}\left[y\right]\left(z\right) = \frac{mzx_0}{mz^2 + k} = x_0 \frac{z}{z^2 + \frac{k}{m}} = x_0 \frac{z}{z^2 + w_0^2}$$

$\mathcal{L}\left[\cos\left(w_0 t\right)\right]\left(z\right) = \frac{z}{z^2 + w_0^2}, \qquad w_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\mathcal{L}\left[y\right]\left(z\right) = x_0 \mathcal{L}\left[\cos\left(w_0 t\right)\right]\left(z\right)$$

$$y\left(t\right) = x_0 \cos\left(w_0 t\right)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea $f(t)$ una **función absolutamente integrable y continua a trozos en todo intervalo finito de eje t**, se define la **TRANSFORMADA DE FOURIER** como sigue

$$\mathcal{F}[f](z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} f(t)\, dt$$

f debe ser cero fuera del intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 1)

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -a \leq t \leq a \\ 1 & |t| > a \end{cases}$$

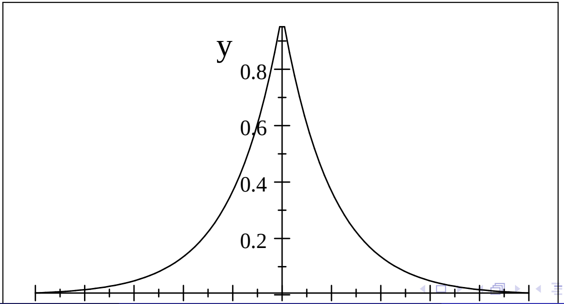
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](z) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} f(t)\,dt = \int_{-a}^{a} e^{-itz}\,dt \\
&= \tfrac{-1}{iz} \textstyle\int_{-a}^{a} e^{-itz}(-izdt) = \tfrac{-1}{iz} e^{-itz}\Big|_{-a}^{a} = \tfrac{-1}{iz}\left[e^{-iaz} - e^{iaz}\right] \\
&= \tfrac{2}{z} \underbrace{\frac{1}{2i}\left[e^{iaz} - e^{-iaz}\right]} = \tfrac{2}{z} sen(az)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{2}{z} sen(az)$$

Sea

$$f\left(t\right)=e^{-\left|t\right|}$$

$$f\left(t\right)=\begin{cases} e^{t} & t\leq 0\\ e^{-t} & t>0\end{cases}$$



Ejemplo

$$\mathcal{L}\left[f\right](z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-itz} e^{t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-itz} e^{-t} dt =$$
$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(iz-1)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(iz+1)t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-(iz-1)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(iz+1)t} dt$$
$$=$$
$$\frac{-1}{(iz-1)} \int_{-\infty}^{0} e^{-(iz-1)t} \left(-(iz-1)\, dt\right) + \frac{-1}{(iz+1)} \int_{0}^{\infty} e^{-(iz+1)t} \left(-(iz+1)\, dt\right)$$

$$= \frac{-1}{(iz-1)} e^{-(iz-1)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{(iz+1)} e^{-(iz+1)t} \Big|_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{(1-iz)} + \frac{1}{(1+iz)} =$$
$$= \underbrace{\left[\frac{2}{(1-iz)(1+iz)}\right]} = \frac{2}{1+z^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-|t|}\right](z) = \frac{2}{z^2+1}$$

Ejemplo 3)

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}[f](z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-itz} 0 dt + \int_{0}^{\infty} e^{-itz} A e^{-\alpha t} dt =$
$A \int_0^\infty e^{-(iz+\alpha)t} dt$
$= \frac{A}{-(iz+\alpha)} \int_0^\infty e^{-(iz+\alpha)t} \left(-(iz+\alpha)\, dt\right)$
$= \frac{A}{-(\alpha+iz)} e^{-(iz+\alpha)t} \Big|_0^\infty$
$= \frac{A}{(\alpha+iz)}$

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{A}{(\alpha + iz)}$$

SERIES DE FOURIER

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **es periódica si** $f(x)=f(x+T)\,,\ \forall x\epsilon\mathbb{R}$

Ejemplo de funciones 2π periódicas $sen(x)$, $cos\,(x)$,

$$f(t)=\begin{cases}0 & -\pi\leq x\leq 0\\ 1 & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$$

$sen(\alpha x)$, $cos\left(\alpha x\right)$, $e^{i\alpha x}$ periódicas $\frac{2\pi}{\alpha}$

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & 0\leq x<1 \\ 1 & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ **es par si** $f(x)=f(-x)$, por ejemplo: $|x|,\ x^2,\ \cos(x),\ldots$

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ **es impar si** $f(-x)=-f(x)$, por ejemplo: $x,\ x^3,\ sen(x),\ldots$

Resultado:

$$\begin{array}{rrr} sen(n\pi)=0 & \cos(n\pi)=(-1)^n & \cos(-x)=\cos(x) \\ sen(2n\pi)=0 & \cos(2n\pi)=1 & sen(-x)=-sen(x) \end{array}$$

SERIES DE FOURIER

Sea $f(x)$ una función en el intervalo $0 \leq x \leq T$, que satisface las siguientes condiciones :

1) $f(x)$ periódica

2) $f(x)$ es continua salvo posiblemente en un número finito de puntos.

3) $f(x)$ tiene solamete un número finito de máximos y mínimos dentro del periodo T.

4) $\int_T |f(x)|\, dx < \infty$

Se puede expresar en SERIES DE FOURIER y está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nw_0 x) + b_n sen(nw_0 x) \right]$$

SERIES DE FOURIER

donde $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ la función fundamental.

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(n w_0 x)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen(n w_0 x)\, dx$$

Si f es par

$w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(nw_0 x)\, dx$$

$$b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0 x)$$

Si f es impar

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen(nw_0 x)\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nw_0 x)$$

Ejemplo

Desarrolar en serie de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ejemplo

Obteniendo los coeficientes.

$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad \frac{T}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f\left(x\right) dx = \frac{1}{1} \int_0^1 1 dx + \frac{1}{1} \int_1^2 0 dx = 1$$

Ejemplo

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(nw_0 x)\, dx$$

$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(nw_0 x)\, dx =$
$\frac{1}{1} \int_0^1 1 \cos(n\pi x)\, dx + \frac{1}{1} \int_1^2 0 \cos(n\pi x)\, dx$
$= \frac{1}{n\pi} \int_0^1 1 \cos(n\pi x)\, nw_0 dx = \frac{1}{n\pi} sen(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} \underbrace{sen(n\pi)} = 0$

Ejemplo

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen\,(nw_0 x)\, dx$$

$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen\,(nw_0 x)\, dx =$

$\frac{1}{1} \int_0^1 1 sen\,(n\pi x)\, dx + \frac{1}{1} \int_1^2 0 sen\,(n\pi x)\, dx$

$= \frac{-1}{n\pi} \int_0^1 -sen\,(n\pi x)\, n\pi dx = \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{-1}{n\pi} \underbrace{\cos(n\pi)} + \frac{1}{n\pi} \underbrace{\cos(0)}$

$= \frac{-1}{n\pi} (-1)^n + \frac{1}{n\pi} = \frac{1}{n\pi} \left[(-1)^{n+1} + 1 \right]$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente la serie de Forier

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nw_0x) + b_n sen(nw_0x)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\pi x) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + 1\right] sen(n\pi x)
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} sen(\pi x) + \frac{2}{3\pi} sen(3\pi x) + \frac{2}{5\pi} sen(5\pi x) + \ldots
$$

Ejemplo

Si $f\ (x) = x\ -1 \leq x \leq 1$ es impar

$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad \frac{T}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

Ejemplo

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen(nw_0 x)\, dx$$

$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen(nw_0 x)\, dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} x sen(n\pi x)\, dx$

$u = x \qquad dv = \frac{1}{n\pi} sen(n\pi x)\, n\pi dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x)$

$= \frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{(n\pi)^2} \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\, n\pi dx$

$= \frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{(n\pi)^2} \underbrace{sen(n\pi x)}\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n\pi}(-1)^n = 2\frac{(-1)^n}{\pi n}$

Ejemplo

$$b_n = \frac{2\left(-1\right)^n}{n\pi}$$

Finalmente la serie de Forier

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(n\pi x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(-1\right)^n}{n\pi} sen\left(n\pi x\right) \end{aligned}$$

$$f\left(x\right) = \frac{2}{\pi} sen\left(\pi x\right) - \frac{2}{2\pi} sen\left(2\pi x\right) + \frac{2}{3\pi} sen\left(3\pi x\right) - \dots$$

Ejemplo 1

Desarrollar en serie de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ -1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
Si f es impar

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

Ejemplo 1

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen\,(nw_0 x)\, dx$$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_T f(x)\, sen\,(n1x)\, dx =$
$\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{0} -1 sen\,(nx)\, ndx + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} sen\,(nx)\, ndx$
$= \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi}$
$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} (-1)^n - \frac{1}{n\pi} (-1)^n + \frac{1}{n\pi}$
$= \frac{2}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n\pi}$

Ejemplo 1

$$b_n = \frac{2}{n\pi} - \frac{2\left(-1\right)^n}{n\pi}$$

Finalmente la serie de Forier

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(n\pi x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{2\left(-1\right)^n}{n\pi}\right) sen\left(nx\right) \end{aligned}$$

Ejemplo

Desarrolar en serie de Fourier

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<1\\ e^{-1} & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

Obteniendo los coeficientes.

$w_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi, \quad \frac{T}{2}=\frac{2}{2}=1$

Ejemplo

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, dx = \frac{1}{1} \int_0^1 1 dx + \frac{1}{1} \int_1^2 e^{-1} dx = 1 - 0 + e^{-1} [2 - 1]$$

$$a_0 = 1 + e^{-1}$$

Ejemplo

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(n w_0 x)\, dx$$

$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(n w_0 x)\, dx =$
$\frac{1}{1} \int_0^1 1 \cos(n\pi x)\, dx + \frac{1}{1} \int_1^2 e^{-1} \cos(n\pi x)\, dx$
$= \frac{1}{n\pi} \int_0^1 1 \cos(n\pi x)\, n\pi dx + \frac{e^{-1}}{n\pi} \int_1^2 \cos(n\pi x)\, n\pi dx$
$= \frac{1}{n\pi} sen(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{e^{-1}}{n\pi} sen(n\pi x)\Big|_1^2$
$= \frac{1}{n\pi} \underbrace{sen(n\pi)} + \frac{e^{-1}}{n\pi} sen(2n\pi) - \frac{e^{-1}}{n\pi} sen(n\pi 1) = 0$

Ejemplo

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen\,(n w_0 x)\, dx$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \tfrac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen\,(n w_0 x)\, dx = \\
&\tfrac{1}{1} \int_0^1 1 sen\,(n\pi x)\, dx + \tfrac{1}{1} \int_1^2 e^{-1} sen\,(n\pi x)\, dx \\
&= \tfrac{-1}{n\pi} \int_0^1 -sen\,(n\pi x)\, n\pi dx + \tfrac{1}{n\pi} \int_1^2 e^{-1} sen\,(n\pi x)\, n\pi dx \\
&= \tfrac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x)\Big|_0^1 - \tfrac{e^{-1}}{n\pi} \cos(n\pi x)\Big|_1^2 \\
&= \tfrac{-1}{n\pi} \underbrace{\cos(n\pi)} + \tfrac{1}{n\pi} \underbrace{\cos(0)} - \tfrac{e^{-1}}{n\pi} \cos(2n\pi) + \tfrac{e^{-1}}{n\pi} \cos(n\pi) \\
&= \tfrac{-1}{n\pi} (-1)^n + \tfrac{1}{n\pi} - \tfrac{e^{-1}}{n\pi} + \tfrac{e^{-1}}{n\pi} (-1)^n \\
&= \tfrac{1}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right] - \tfrac{e^{-1}}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right] \\
&= \left(\tfrac{1}{n\pi} - \tfrac{e^{-1}}{n\pi}\right) \left[1 - (-1)^n\right]
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$b_n = \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{e^{-1}}{n\pi}\right)\left[1 - (-1)^n\right]$$

Finalmente la serie de Forier

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[0\cos(nw_0x) + b_n sen(nw_0x)\right] \\ &= \frac{1+e^{-1}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\pi x) \\ &= \frac{1+e^{-1}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{e^{-1}}{n\pi}\right)\left[1-(-1)^n\right] sen(n\pi x) \end{aligned}$$

Ejemplo

Desarrolar en serie de Fourier

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{rr} 0 & -\pi\leq x<1 \\ \pi-x & 0\leq x\leq\pi \end{array}\right.$$

Obteniendo los coeficientes.

$w_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1,\quad \frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^2 (\pi - x)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\pi\pi - \frac{\pi^2}{2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(nw_0 x)\, dx$$

$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(nw_0 x)\, dx =$
$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 0 \cos(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx)\, dx$

$u = (\pi - x) \qquad dv = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, ndx$
$du = -dx \qquad v = \frac{1}{n} sen(nx)$
$= (\pi - x) \frac{1}{n\pi} sen(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{\pi} sen(nx)\, ndx$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
&= (\pi - \pi)\,\tfrac{1}{n\pi}\underbrace{sen\,(n\pi)} - (\pi - 0)\,\tfrac{1}{n\pi}\underbrace{sen\,(n * 0)} + \tfrac{-1}{n^2\pi}\cos\,(nx)\big|_0^{\pi} \\
&= \tfrac{-1}{n^2\pi}\cos\,(nx)\big|_0^{\pi} \\
&= \tfrac{-1}{n^2\pi}\cos\,(n\pi) - \tfrac{-1}{n^2\pi}\cos\,(n * 0) \\
&= \tfrac{-1}{n^2\pi}(-1)^n + \tfrac{1}{n^2\pi} \\
&= \tfrac{1}{n^2\pi}\left[1 - (-1)^n\right]
\end{aligned}
$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

Ejemplo

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen(nw_0 x)\, dx$$

$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, sen(n1x)\, dx =$
$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 0 sen(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\, sen(nx)\, dx$

$u = (\pi - x) \qquad dv = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} sen(nx)\, ndx$
$du = -dx \qquad v = \frac{-1}{n} \cos(nx)$
$= -(\pi - x) \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, ndx$
$= -(\pi - \pi) \frac{1}{n\pi} \underbrace{\cos(n\pi)} + (\pi - 0) \frac{1}{n\pi} \underbrace{\cos(n*0)} + \frac{1}{n^2\pi} \underbrace{sen(nx)} \Big|_0^{\pi}$
$= \frac{1}{n}$

Ejemplo

$$b_n = \frac{1}{n}$$

Finalmente la serie de Forier

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nw_0 x) + b_n sen(nw_0 x) \right] \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 \pi} \left[1 - (-1)^n \right] \cos(nw_0 x) + \frac{1}{n} sen(nw_0 x) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo

Desarrolar en serie de Fourier

$$f\left(x\right)=x^{2},\quad -\pi\leq x\leq\pi$$

Obteniendo los coeficientes.

$w_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1,\quad \frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right] \\
&= \frac{2\pi^2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
a_0 = \frac{2\pi^2}{3}
$$

Ejemplo

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(nw_0 x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_T f(x) \cos(nw_0 x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$$

$$u = x^2 \qquad dv = \frac{1}{n} \cos(nx)\, ndx$$
$$du = 2xdx \qquad v = \frac{1}{n} sen(nx)$$
$$= \frac{x^2}{n\pi} \underbrace{sen(nx)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \int_0^{\pi} xsen(nx)\, ndx$$
$$= -\frac{2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xsen(nx)\, ndx$$

$$u = x \qquad dv = \frac{1}{n} sen(nx)\, ndx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{-1}{n} \cos(nx)$$

Ejemplo

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\left[\underbrace{\frac{-x}{n}\cos(nx)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\left[\frac{-\pi}{n^2}\underbrace{\cos(n\pi)} + \frac{\pi}{n^2}\underbrace{\cos(-n\pi)}\right]$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\left[\frac{-\pi}{n^2}(-1)^n + \frac{\pi}{n^2}(-1)^n\right]$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Ejemplo

$$b_n = 0$$

Finalmente la serie de Forier

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nw_0 x) + 0 * sen(nw_0 x) \right] \\ &= \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx) \end{aligned}$$