

691.2711 2
A 532 a
31 4.

ANÁLISIS BÁSICO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

.....
QUINTA EDICIÓN

DAVID E. JOHNSON

Professor Emeritus, Louisiana State University
Science and Mathematics Division
Birmingham-Southern College

JOHN L. HILBURN

President, Microcomputer Systems Inc.

JOHNNY R. JOHNSON

Professor Emeritus, Louisiana State University
Department of Mathematics
University of North Alabama

PETER D. SCOTT

Associate Professor
Department of Electrical and Computer Engineering
Department of Biophysical Sciences, School of Medicine
State University of New York at Buffalo

TRADUCCIÓN:

Irving Roffe

Traductor Profesional

REVISIÓN TÉCNICA:

Bernard Van Der Mersch Huerta Romo

Coordinador de Ingeniería Electrónica
y de Comunicaciones
Universidad Iberoamericana

ESCUELA POLITÉCNICA
DEL EJERCITO
BIBLIOTECA ESPE-L
LA PAZ/CHINA

No. 1162. Fecha: 2001
Precio: Donación: ✓

PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.

MÉXICO • NUEVA YORK • BOGOTÁ • LONDRES • SYDNEY
PARÍS • MUNICIPI • TORONTO • NUEVA DELHI • TOKIO
SINGAPUR • RÍO DE JANEIRO • ZURICH

EDICIÓN EN ESPAÑOL:

PRESIDENTE DE LA DIVISIÓN LATINOAMÉRICA
DE SIMON & SCHUSTER:
DIRECTOR GENERAL:
GERENTE DIVISIÓN UNIVERSITARIA:
GERENTE EDITORIAL:
DIRECTOR DE EDICIONES
GERENTE DE EDICIONES:
GERENTE DE PRODUCCIÓN:
GERENTE DE TRADUCCIÓN:
SUPERVISOR DE TRADUCCIÓN:
SUPERVISOR DE PRODUCCIÓN:

RAYMUNDO CRUZADO GONZÁLEZ
MOISÉS PÉREZ ZAVALA
JOSÉ TOMÁS PÉREZ BONILLA
LUIS GERARDO CEDEÑO PLASCENCIA
ALBERTO SIERRA OCHOA
JUAN ANTONIO RODRÍGUEZ MORENO
JULIÁN ESCAMILLA LIQUIDANO
JORGE BONILLA TALAVERA
CARLOS TALANCÓN ESPINOSA
MAGDIEL GÓMEZ MARINA

EDICIÓN EN INGLÉS:

Acquisitions Editor: *Alan Apt*
Development Editor: *Sondra Chavez*
Editorial/Production Supervision: *Richard De Lorenzo*
Interior Design: *Anthony Gemmellaro*
Cover Design: *Amy Rosen*
Copy Editor: *William Thomas*
Prepress/Manufacturing Buyer: *Lori Bulwin*
Supplement Editor: *Alice Dworkin*
Editorial Assistant: *Naomi Goldman*

JOHNSON: ANÁLISIS BÁSICO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS, 5a. Ed.

Traducido del inglés de la obra: **BASIC ELECTRIC CIRCUIT ANALYSIS, FIFTH EDITION.**

All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice-Hall, Inc.

Todos los derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice-Hall, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1996 respecto a la tercera edición en español publicada por
PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
Enrique Jacob 20,
Col. El Conde
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

ISBN 968-880-638-2

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524.

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc.
Copyright © MCMXCV
All rights reserved

ISBN 0-13-059759-7

IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO

EN
PROGRAMAS EDUCATIVOS, S.A.
CALZ. CHABACANO No. 65 LOCAL A
COL. ASTURIAS, DELEG. CUAUHTEMOC, D.F.
C.P. 06850

3000 1997

Prefacio

El libro que tienes en tus manos es la quinta edición del texto original que apareció por primera vez hace 17 años, en 1978. Es poco común para un texto de ingeniería, sobrevivir y mejorar a través de muchas ediciones durante varios años, en particular por el acostumbrado ritmo acelerado del mundo de la ingeniería y tecnología eléctricas. Existen numerosos libros de introducción a los circuitos, algunos de gran calidad. Yo no sé de ninguna quinta edición sobre ellos. Estamos profundamente agradecidos a quienes han confiado en el *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*, y tenemos la confianza de que encontrarán firmemente cimentadas sus virtudes en la edición actual.

La aceptación continua de este libro es consecuencia de dos características esenciales: un diseño inicial apropiado y haber tenido un compromiso en el proceso para mejorar y adaptar reevaluando constantemente el contenido y acercándolo a la luz de la experiencia real. Para hacer esto en forma eficiente se requiere estar consciente de las necesidades de los maestros y estudiantes, no de manera abstracta sino “en la práctica”. Entre los cuatro autores de la presente obra tenemos más de un siglo de experiencia en la enseñanza de circuitos, y además permanecemos en comunicación constante con la comunidad de maestros y estudiantes más allá de nuestra ciudad universitaria mediante extensas encuestas regulares conducidas por Prentice Hall. Rastreando los cambios grandes y pequeños hechos por comentarios de varios colegas y estudiantes con conocimientos profundos, y además complementándolos con observaciones sobre circuitos específicos o partes del texto pudimos escribir con mayor claridad esta edición como resultado de dichas encuestas. A todos los que participaron, muy numerosos para ser enumerados, pero no para recordarse, les debemos un gran favor.

PROPÓSITO Y OBJETIVO

Este libro está enfocado a un curso de un año o un semestre de introducción al análisis de circuitos lineales con cierta dificultad para el segundo año de licenciatura. Está basado en el cálculo, así como en las leyes físicas sobre las cuales se asientan los métodos de análisis de circuitos. La exposición rutinaria del cálculo diferencial e integral, antecedente para estudiantes de ingeniería y física del primer año, es adecuado a su nivel. Los otros temas de matemáticas se presentan de forma moderada, y no se supone ni requiere que sea un antecedente como prerrequisito. Éstos incluyen la manipulación algebraica de números complejos, formulación de vector-matriz y soluciones de sistemas de ecuaciones lineales,

funciones singulares y más particulares, y la solución de ecuaciones diferenciales lineales con invariantes en el tiempo. Los primeros dos temas están en los apéndices A y B, respectivamente, con numerosos ejemplos y ejercicios; los dos posteriores temas se desarrollan en los capítulos en donde son requeridos.

Se tuvo cuidado para modelar la selección y ordenar el material a utilizarse por los bachilleres de ingeniería eléctrica, pero también para ser usado por estudiantes de otras ingenierías y disciplinas técnicas de segundo o cuarto año de nivel postsecundario. Los métodos y conceptos matemáticos del *análisis* de circuitos eléctricos son separados cuidadosamente de los fundamentos físicos de la *ciencia* eléctrica, tal como las leyes de Maxwell, las cuales no son cubiertas aquí como conocimiento previo. El rigor matemático no tuvo que ser omitido en donde éste se justifica para ser usado. Pero donde una conclusión es obvia con la mejor intención ingenieril simplemente se menciona sin darle demasiada importancia.

Se ha destinado el espacio suficiente a las repeticiones pertinentes, reforzando y aprendiendo con ejemplos, aunque hemos evitado que se expanda la longitud del libro a los extremos que a menudo se encuentran en la práctica común. Nosotros hemos encontrado que la gran longitud intimida a muchos estudiantes, e impide al instructor diseñar en uno o dos trimestres el curso. Puede dictar un enfoque a su conveniencia, saltando secciones y capítulos enteros dependiendo del tiempo que tenga. Pero esto puede dejar dudas en donde se necesiten conceptos más claros, por lo que seguramente no ayudará a desarrollar un sentido de continuidad. Los primeros nueve capítulos pueden cubrirse satisfactoriamente en una exposición única semestral de circuitos de DC y AC, aunque algunos maestros adelantan los capítulos 10 y 11 de potencia de AC, y los capítulos 12 y 13 de introducción al uso de la transformada de Laplace. Una práctica común para nosotros cubre todos los 16 capítulos en un curso de circuitos de dos semestres.

QUINTA EDICIÓN TOTALMENTE REESCRITA

A lo largo de sus primeras cuatro ediciones este libro ha sido adoptado por numerosos instructores en casi cien instituciones. La experiencia en el tema se ha acumulado, por lo que decidió realizarse una revisión completa y minuciosa. Aprovechamos la oportunidad para generar un libro nuevo y fresco incorporando lo que se ha aprendido y acumulado por la experiencia; también se tuvo que actualizar el libro para reflejar las innovaciones y tendencias en ciencia y tecnología sobre circuitos eléctricos. Un nuevo autor y colaborador, Peter Scott, fue recibido para aportar y brindar una perspectiva nueva y jugar un papel importante en esta edición reescrita. El primer ajuste considerable que llegamos a realizar derivó de su profundo interés y talento en esta área cuando, como instructor que adoptó el libro, ofreció una amplia y brillante crítica de la edición anterior y de cómo podría mejorarse, por lo que nosotros pedimos su colaboración.

Lo nuevo de esta edición

Esta edición incorpora en forma considerable más cambios que cualquiera de sus tres ediciones anteriores. Las formas en las que esta edición difiere de la cuarta edición son:

Narrativa

El texto narrativo ha sido reescrito en una gran parte. Más de la mitad de los párrafos son nuevos, y muchos otros han sido reconfigurados. La meta ha sido aclarar la corriente de ideas y acomodar los cambios en orden con un cierto énfasis, mientras que el libro guarda

su tamaño relativamente compacto. Nosotros no creemos que la gran extensión sea una virtud en los buenos libros para el estudiante y el maestro.

Organización

El orden y la secuencia tuvieron que ser reorganizados moderadamente. Los capítulos de Independencia de Ecuaciones y Teoremas de Red han sido modificados, el primero en un apéndice y el segundo como contenido entre varios capítulos en que los teoremas provienen más naturalmente en el contexto. Las transformadas de Laplace se introducen algo más temprano, después de los fasores y circuitos de AC, pero serán usadas para simplificar, a la vez, el desarrollo de funciones de transferencia y el análisis de entrada-salida sin el recurso a la intervención de frecuencias complejas.

Nuevos problemas

Todos los problemas al final del capítulo son nuevos. En respuesta a las necesidades de quienes adoptan el libro, se hizo el esfuerzo de extender el rango de dificultad desde lo básico a lo complicado. Adicionalmente se han incluido problemas para reforzar cada ejercicio ofreciendo, además, más ejemplos a lo largo del libro.

Nuevos ejemplos y ejercicios

La mayoría de los ejemplos y los ejercicios son nuevos. Las ediciones anteriores se enfocaron hacia valores numéricos fáciles como el caso de $C = 1$ Farad. Dando importancia a dichos valores principales, se han agregado más ejemplos prácticos y ejercicios. La reducción considerable de precios en calculadoras científicas en la década pasada las hace ahora universalmente accesibles, por lo que su uso disminuye los cálculos matemáticos difíciles en algunos ejercicios y lleva a respuestas más fácilmente comprensibles, como $i_I(t) = 0.544 \cos(377t + 27.4^\circ)$.

Nueva cobertura

Algunos temas se han ampliado y otros nuevos se han incluido. Los amplificadores operacionales han estado presentes mediante una serie de modelos cada vez más refinados y el principio de corto circuito virtual se justificó en el contexto de circuitos de retroalimentación negativa. Retroalimentación, carga y el concepto de “blocks construidos” modularmente, son todos esenciales para comprender los circuitos lineales modernos de amplificadores operacionales que se presentan. El requerimiento fundamental de estabilidad, a veces se pasó por alto en cursos introductorios de circuitos, y su nexo con la respuesta en frecuencia y al estado estable de la AC. Para el diseño de circuitos activos usamos SPICE, en el que los estudiantes encuentran incentivo y satisfacción estimulando el interés en las tareas de análisis de rutina. Se desarrollan las gráficas de ganancia de Bode y su uso relativo al diseño ingenieril para filtros activos y otros circuitos activos de interés.

Se incluye un apéndice de referencias de comandos de SPICE. El dominio público de la computadora ayudó al análisis de circuitos y un programa de simulación de software tuvo que ser cubierto con sus instrucciones en el cuerpo del libro, en secciones tituladas como “SPICE y ...” al final de varios capítulos. Además hay un listado conciso de cada uno de los comandos de SPICE que son usados en este texto, sus reglas y formatos se incluyen en el apéndice. Mientras que el estudio del tutorial y de los ejemplos paso a paso son útiles para aprender en una forma eficiente el uso de SPICE, es conveniente no avanzar mucho antes de recordar, por ejemplo, cómo introducir un valor resistivo en el programa de SPICE.

DISEÑO Y ORGANIZACIÓN DEL LIBRO

El libro contiene 16 capítulos y 4 apéndices. Éstos están divididos lógicamente en capítulos del dominio del tiempo, fasor y dominio de transformadas. Los primeros siete capítulos introducen los elementos pasivos (RLC) y los elementos activos (fuente, amplificadores operacionales) y un dominio del análisis del tiempo de circuitos de AC y DC los cuales se forman cuando estos elementos son conectados. Los capítulos 8 al 11 cubren los temas del análisis de fasores y el estado estable de los circuitos de AC, incluyendo potencia compleja y circuitos trifásicos. El conjunto final de capítulos, del 12 al 16, desarrollan los métodos de análisis de las transformadas de Laplace, Fourier y se aplican en diversas descripciones de entrada-salida. En los capítulos 12 y 13 se introduce la mecánica de la transformada de Laplace y circuitos en el dominio-s y funciones de transferencia. En el capítulo 14 se ve la relación establecida entre las funciones de transferencia, respuestas de frecuencia y la respuesta de frecuencia estudiada como el puente entre el diseño y el análisis de circuitos lineales. El capítulo 15 se dedica a las descripciones de acoplamiento y circuitos de dos puertos, y el capítulo 16 introduce las series y transformadas de Fourier.

Los capítulos 10 y 11 los cuales versan sobre el estado estable de la energía de AC y los circuitos trifásicos, pueden saltarse sin perjudicar el material siguiente. Asimismo el capítulo final, el capítulo 16 donde se ve el análisis de Fourier puede ser considerado como opcional para un curso introductorio de circuitos.

Los trece capítulos restantes se diseñaron para ser cubiertos en un orden, por lo que no es recomendable que ninguno de éstos se omita y pueda dejar dudas amplias en la preparación del estudiante para el material siguiente. Los cursos de un semestre básicamente cubren los capítulos del 1 al 9 recompensando al estudiante que no continúe el segundo curso de circuitos con un provechoso conocimiento de las técnicas de análisis de AC y DC.

PEDAGOGÍA DE LOS CAPÍTULOS

Cada sección de cada capítulo contiene numerosos ejemplos resueltos paso a paso y finaliza con las respuestas de los ejercicios. Al final de cada capítulo hay problemas que fueron diseñados con un alcance más allá de los temas de cada sección y en todos los niveles de dificultad. Las ecuaciones enmarcadas son particularmente importantes y no deberían pasarse por alto, ya que una comprensión clara depende mucho de ellas. Áreas subrayadas en el texto se destacan para darle un mayor énfasis, siendo los equivalentes narrativos de las ecuaciones enmarcadas.

Los apéndices incluyen un material que contiene antecedentes para hacer el libro con un contenido de más personalidad sin interrumpir el flujo básico de la narrativa. El uso del material del apéndice A de álgebra lineal empieza en el capítulo 4 y continúa regularmente de ahí en adelante.

El apéndice B de números complejos debería ser revisado antes de estudiar el capítulo 8, el cual depende básicamente del álgebra compleja y de las funciones complejas de tiempo exponencial. El apéndice C sobre topología de circuitos tal vez sea menos necesario para resolver problemas simples, pero aclara puntos lógicos importantes relativos a la formación y resolución de ecuaciones algebraicas simultáneas del tipo que se necesitan en el análisis de nodo y de malla.

USO DE SPICE

SPICE ha llegado a ser la norma oficial junto con la ayuda de la computadora en el análisis y simulación de circuitos en el salón de clases. Su uso es limitado pero de gran ayuda como herramienta en el estudio de circuitos eléctricos y es ampliamente aprovechada en este

libro. Existen dos razones por las que nosotros encontramos un valor especial en SPICE, en ganar experiencia con circuitos demasiado grandes para justificar el nivel a menudo catastrófico del esfuerzo computacional que se requiere para extraer simplemente ciertas respuestas, y en el diseño. En el primer caso los circuitos de cinco mallas son esencialmente simples así como los circuitos de una o dos mallas, y la experiencia con muchas resonancias, oscilaciones parásitas y el comportamiento de circuitos complejos pueden ser extremadamente interesantes. En diseño SPICE permite que los estudiantes traten de usar sus propias ideas de cómo resolver problemas de circuitos reales y cómo pueden ser configurados; en nuestra experiencia esto frecuentemente forma el punto máximo del curso desde el punto de vista del estudiante. No es siempre fácil de mantener la motivación en un nivel alto, cuando las matemáticas y la ciencia básica están en el centro de atención y los estudiantes, interesados en construir cosas para ejercitarse la creatividad individual, comienzan a preguntarse si están en el lugar correcto. Ellos, desde luego, están en el lugar correcto; el diseño es parte de la ingeniería y SPICE es muy útil en acentuar este punto cuando sea necesario.

Como no todos los instructores se ponen de acuerdo en lo que concierne al mejor uso de SPICE dentro de cursos introductorios de circuitos, se ha tenido el cuidado de separar de SPICE el material contenido en las secciones finales, reconocidas por su título de "SPICE y ..." en 8 capítulos separados. Estas secciones forman la descripción que contiene las instrucciones de ayuda, comandos y sintaxis de SPICE. Todos estos pueden ser omitidos sin la pérdida de continuidad si SPICE no está disponible o el instructor escoge no tener apoyo de computadora. Los problemas al final de cada capítulo que requieren el uso de SPICE son los problemas finales ofrecidos en cada capítulo que contienen material de SPICE y son marcados claramente.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido enriquecido por los esfuerzos de aquellos que contribuyeron en ediciones pasadas, cuyos comentarios pueden claramente leerse aquí, así como también por los que intervinieron en la preparación ardua de la edición actual. Agradecemos también en especial al profesor Dennis Tyner, Indira Chatterjee, Kevin Ross y Bruce Wollenberg por sus lecturas cuidadosas y variadas sugerencias útiles, a Sondra Chavez y Alan Apt por su ayuda editorial inapreciable. El último autor nombrado llevó la carga más pesada en la revisión actual, y le gustaría reservar el último agradecimiento para su familia, en la que siempre tuvo un apoyo.

David E. Johnson
John L. Hilburn
Johnny R. Johnson
Peter D. Scott

Contenido

1

INTRODUCCIÓN

1

- 1.1 Definiciones y unidades, 2
- 1.2 Carga y corriente, 5
- 1.3 Voltaje, energía y potencia, 9
- 1.4 Elementos activos y pasivos, 12
- 1.5 Análisis de circuitos y diseño, 15
- Resumen, 16
- Problemas, 17
- Problemas más complejos, 19

2

CIRCUITOS RESISTIVOS

21

- 2.1 Leyes de Kirchhoff, 22
- 2.2 Ley de Ohm, 30
- 2.3 Subcircuitos equivalentes, 33
- 2.4 Series equivalentes y división de voltaje, 37
- 2.5 Equivalentes en paralelo y división de corriente, 42
- 2.6 Equivalentes de Thevenin y Norton, 48
- Resumen, 54
- Problemas, 55
- Problemas más complejos, 61

3

FUENTES DEPENDIENTES Y AMPLIFICADORES OPERACIONALES (OP AMPS)

63

- 3.1 Definiciones, 64
- 3.2 Circuitos con fuentes dependientes, 66
- 3.3 Amplificadores operacionales (Op Amps), 67
- 3.4 Papel de la retroalimentación negativa, 73
- 3.5 Configuraciones básicas utilizando Op Amps, 76
- 3.6 Interconexión de unidades Op Amps, 81

3.7 Op Amps prácticos,	86
Resumen,	88
Problemas,	89
Problemas más complejos,	92
4 MÉTODOS DE ANÁLISIS	93
4.1 Linealidad y proporcionalidad,	95
4.2 Superposición,	98
4.3 Análisis nodal,	103
4.4 Circuitos que contienen fuentes de voltaje,	109
4.5 Análisis de mallas,	114
4.6 Circuitos que contienen fuentes de corriente,	118
4.7 Príncipio de corto virtual para Op Amp,	121
4.8 Análisis de circuito con computadora utilizando SPICE,	125
Resumen,	136
Problemas,	136
Problemas usando SPICE,	141
Problemas más complejos,	141
5 ELEMENTOS DE ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA	143
5.1 Capacitores,	144
5.2 Almacenamiento de energía en capacitores,	148
5.3 Capacitores en serie y en paralelo,	151
5.4 Inductores,	155
5.5 Almacenamiento de energía en inductores,	158
5.6 Inductores en serie y en paralelo,	160
5.7 Estado estable en DC,	163
5.8 Capacitores e inductores prácticos,	166
5.9 Circuitos singulares,	167
Resumen,	170
Problemas,	170
Problemas más complejos,	174
6 CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN	177
6.1 Circuitos simples RC y RL sin fuentes,	178
6.2 Constantes de tiempo,	183
6.3 Circuitos generales de primer orden sin fuentes,	187
6.4 Circuitos con fuentes DC,	191
6.5 Superposición en circuitos de primer orden,	198
6.6 La función escalón unitario,	203
6.7 Respuestas en escalón y de pulso,	208
6.8 SPICE y la respuesta transitoria,	213
Resumen,	223
Problemas,	224
Problemas más complejos,	230

7	CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN	231
7.1	Circuitos con dos elementos de almacenamiento,	233
7.2	Ecuaciones de segundo orden,	234
7.3	Respuesta natural,	236
7.4	Respuesta forzada,	245
7.5	Respuesta total,	251
7.6	Respuesta de escalón unitario,	257
	Resumen,	262
	Problemas,	263
	Problemas usando SPICE,	268
	Problemas más complejos,	269
8	FUENTES SINUSOIDALES Y FASORES	271
8.1	Propiedades de los sinusoides,	273
8.2	Ejemplo de circuito <i>RLC</i> ,	277
8.3	Fuentes complejas,	279
8.4	Fasores,	284
8.5	Leyes I-V para fasores,	288
8.6	Impedancia y admitancia,	294
8.7	Leyes de Kirchhoff y equivalentes de impedancia,	298
8.8	Circuitos con fasores,	303
	Resumen,	308
	Problemas,	309
	Problemas más complejos,	313
9	ANÁLISIS EN ESTADO ESTABLE DE AC	315
9.1	Simplificaciones de circuitos,	316
9.2	Análisis nodal,	322
9.3	Análisis de malla,	328
9.4	Fuentes con frecuencias diferentes,	333
9.5	Diagramas fasoriales,	337
9.6	SPICE y estado estable de AC,	342
	Resumen,	348
	Problemas,	349
	Problemas usando SPICE,	354
	Problemas más complejos,	354
10	POTENCIA EN ESTADO ESTABLE DE AC	357
10.1	Potencia promedio,	358
10.2	Valores RMS,	365
10.3	Potencia compleja,	369
10.4	Superposición y potencia,	376
10.5	Transferencia máxima de potencia,	381
10.6	Conservación de potencia,	384

10.7	Potencia reactiva y factor de potencia,	388
10.8	SPICE y potencia en estado estable de AC,	391
Resumen,	393	
Problemas,	394	
	Problemas usando SPICE,	398
	Problemas más complejos,	399
11	CIRCUITOS TRIFÁSICOS	401
11.1	Sistemas monofásicos de tres hilos,	403
11.2	Sistemas trifásicos Y-Y,	406
11.3	Transmisión de potencia monofásica contra trifásica,	412
11.4	Conexión delta,	417
11.5	Transformaciones Y-delta,	421
11.6	SPICE y los circuitos trifásicos,	426
Resumen,	429	
Problemas,	429	
	Problemas usando SPICE,	433
	Problemas más complejos,	433
12	LA TRANSFORMADA DE LAPLACE	435
12.1	El dominio-s,	437
12.2	Funciones singulares,	441
12.3	Pares y propiedades de la transformada,	451
12.4	Expansión por fracciones parciales,	458
12.5	Solución de ecuaciones integrodiferenciales,	464
Resumen,	468	
Problemas,	469	
	Problemas más complejos,	475
13	ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN EL DOMINIO-s	477
13.1	Elementos y leyes de Kirchhoff,	479
13.2	El circuito en el dominio-s,	483
13.3	Función de transferencia,	488
13.4	Polos y estabilidad,	492
13.5	Teoremas de valor inicial y final,	497
13.6	Respuesta al impulso y convolución,	499
Resumen,	507	
Problemas,	508	
	Problemas más complejos,	513
14	RESPUESTA DE FRECUENCIA	515
14.1	Función de respuesta de frecuencia,	517
14.2	Escala del decibel,	521

14.3	Gráficas de ganancia de Bode (amplitud),	524
14.4	Resonancia,	535
14.5	Respuesta de frecuencia de Op Amps,	542
14.6	Filtros,	546
14.7	Diseño de filtros activos,	553
14.8	Escalamiento,	563
14.9	SPICE y respuesta de frecuencia,	567
14.10	SPICE y diseño de filtros activos,	570
	Resumen,	575
	Problemas,	576
	Problemas usando SPICE,	581
	Problemas más complejos,	582

15. INDUCTANCIA MUTUA Y CIRCUITOS DE DOS PUERTOS 583

15.1	Inductancia mutua,	585
15.2	Circuitos con inductancia mutua,	590
15.3	Inductancia mutua y transformadores,	598
15.4	Transformadores ideales,	604
15.5	Circuitos de dos puertos,	610
15.6	Parámetros de dos puertos,	618
15.7	Modelos de dos puertos,	625
15.8	Interconexión de circuitos de dos puertos,	631
15.9	SPICE, transformadores y circuitos de dos puertos,	642
	Resumen,	645
	Problemas,	646
	Problemas usando SPICE,	650
	Problemas más complejos,	651

16. SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER 653

16.1	Funciones periódicas,	655
16.2	Series trigonométricas de Fourier,	660
16.3	Series exponenciales de Fourier,	669
16.4	Respuesta a entradas periódicas,	672
16.5	Espectros discretos y gráficas de fase,	678
16.6	La transformada de Fourier,	684
16.7	Propiedades de la transformada de Fourier,	690
16.8	SPICE y el análisis de Fourier,	696
	Resumen,	700
	Problemas,	700
	Problemas usando SPICE,	704
	Problemas más complejos,	705

Apéndice

A. MÉTODOS DE MATRICES 707

A.1	Conceptos fundamentales de las matrices,	707
-----	--	-----

- A.2 Conversión a la forma de vector-matriz, 708
- A.3 Determinantes, 709
- A.4 Regla de Cramer, 711
- A.5 Inversión de matrices, 712
- A.6 Eliminación de Gauss, 713

Apéndice



B NÚMEROS COMPLEJOS Y LA EXPONENCIAL COMPLEJA.....717

- B.1 Números complejos, 717
- B.2 Funciones exponenciales complejas, 721

Apéndice



C TOPOLOGÍA DE CIRCUITOS.....725

- C.1 Gráficas de redes, 725
- C.2 Análisis nodal, 726
- C.3 Análisis de trayectoria cerrada y análisis de malla básico, 728

Apéndice



D GUÍA DE REFERENCIA DE SPICE.....731

- D.1 Archivo de entrada de SPICE, 732
- D.2 Enunciados de título y de comentario, 733
- D.3 Enunciados en las listas de red, 733
- D.4 Enunciados de control de soluciones, 738
- D.5 Enunciados de control de salida, 742
- D.6 Enunciado final, 743



ÍNDICE.....745

Introducción



Alessandro Volta

1745-1827

Esta circulación interminable del fluido eléctrico puede parecer paradójica, pero no deja de ser verdadera y real, y puedes sentirla con tus manos.

Alessandro Volta

La teoría de los circuitos eléctricos comenzó en realidad el 20 de marzo de 1800, cuando el físico italiano Alessandro Volta anunció su invento de la batería eléctrica. Este magnífico aparato le permitió a Volta producir *corriente eléctrica*, un flujo de electricidad continuo y estable, en oposición a la electricidad *estática*, producida en descargas por máquinas eléctricas anteriores como la botella de Leyden y el *electróforo* del mismo Volta.

Volta nació en la ciudad italiana de Como, cuando ésta formaba parte del imperio austriaco. A la edad de 18 años realizaba experimentos eléctricos y mantenía correspondencia sobre el tema con reconocidos investigadores europeos. En 1782 fue profesor de física en la Universidad de Padua, donde se involucró en una controversia con otro conocido pionero de la electricidad, Luigi Galvani, profesor de anatomía en Bolonia. Los experimentos de Galvani con ranas lo llevaron a creer que la corriente eléctrica era *electricidad animal* generada por los mismos organismos. Volta, por otra parte, sostenía que la corriente eléctrica era *electricidad metálica*, cuya fuente eran las sondas de diferentes metales insertadas en las piernas de la rana. Ambos tenían razón. Hay una electricidad animal y Galvani alcanzó la fama como fundador de la fisiología nerviosa. El gran invento de Volta, sin embargo, revolucionó el uso de la electricidad y aportó al mundo uno de sus mayores beneficios: la corriente eléctrica. Volta estuvo colmado de honores durante su vida. Napoleón lo hizo senador y posteriormente conde del imperio francés. Después de la derrota de Napoleón, los austriacos le permitieron a Volta recuperar su condición de ciudadano italiano con todas las consideraciones inherentes. Volta recibió un reconocimiento 54 años después de su muerte cuando a la unidad de fuerza electromotriz se le dio oficialmente el nombre de *volt*.

Contenido del capítulo

- **1.1** Definiciones y unidades
- **1.2** Carga y corriente
- **1.3** Voltaje, energía y potencia
- **1.4** Elementos activos y pasivos
- **1.5** Análisis de circuitos y diseño
- Resumen
- Problemas



El análisis de circuitos eléctricos es la puerta a través de la cual los estudiantes de fenómenos eléctricos empiezan su carrera. Es el primer curso tomado en su especialidad por estudiantes de ingeniería eléctrica y tecnología eléctrica. Es la exposición primaria a la ingeniería eléctrica, a veces la única exposición, para estudiantes en muchas disciplinas conexas, como computación, mecánica e ingeniería biomédica. Se entiende que todas las áreas especializadas en la ingeniería eléctrica, tales como electrónica, sistemas de potencia, comunicaciones y diseño digital se basan en la teoría de circuitos. El único tema de ingeniería eléctrica más básico que los circuitos es la teoría del campo electromagnético (EM), la cual forma la fundación científica sobre los estándares del análisis del circuito. Sin embargo, la primacía de la teoría del campo EM sobre circuitos es incompleto; desde hace mucho los problemas de teoría del campo EM resultan ser mejor resueltos por el recurso de la teoría de análisis de circuitos. Así pues, no se exagera al decir que las ideas y métodos de este primer curso de circuitos son, para muchos estudiantes, lo más importante en su currículum de estudiante universitario. Para empezar, nuestro estudio de circuitos eléctricos, necesitamos saber qué es un circuito eléctrico, qué entendemos por su análisis y diseño. Desde un estudio cuantitativo, nosotros debemos identificar con qué cantidades se relaciona, en qué unidades se miden esas cantidades y las definiciones y convenciones básicas usadas en la teoría de los circuitos. Son éstos los temas que trataremos en este capítulo.

1.1

DEFINICIONES Y UNIDADES

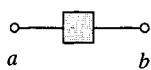


FIGURA 1.1 Elemento eléctrico general de dos terminales.

Un *circuito* eléctrico o *red* eléctrica, es una colección de elementos eléctricos interconectados en alguna forma específica. Posteriormente definiremos los elementos eléctricos de manera formal; por el momento nos satisfará representar un elemento general de *dos terminales* como se muestra en la figura 1.1. Las terminales *a* y *b* tienen acceso libre para conectarse con otros elementos. Los resistores, inductores, capacitores, baterías, generadores, etc., son ejemplos familiares para nosotros y los consideraremos formalmente en secciones ulteriores.

Hay elementos de circuitos más complicados que pueden tener más de dos terminales. Los transistores y los amplificadores operacionales son ejemplos comunes. También puede combinarse un cierto número de elementos interconectando sus terminales para formar un solo paquete con un número cualquiera de terminales accesibles. Con-

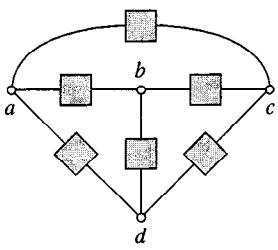


FIGURA 1.2 Circuito eléctrico con seis elementos.

sideraremos después algunos elementos multiterminales, pero nuestro principal interés serán los dispositivos simples de dos terminales. En la figura 1.2 se muestra un ejemplo de un circuito eléctrico con seis elementos.

Para entender el comportamiento de un elemento de un circuito necesitaremos considerar ciertas cantidades relacionadas con él, tales como el *voltaje* y la *corriente*. Estas cantidades y otras, cuando aparezcan, deben definirse con todo cuidado. Esto puede hacerse si tenemos un sistema estándar de unidades de modo que al escribir una cantidad midiéndola, estemos todos de acuerdo en el significado de la medición. Por fortuna, hay un sistema estándar de unidades usado actualmente por la gran mayoría de las sociedades de ingenieros profesionales y los autores de la mayor parte de los libros de texto de ingeniería modernos. Ese sistema, el cual usaremos a lo largo del libro, es el *Sistema Internacional de Unidades* (abreviado SI), adoptado en 1960 por la Conferencia General de Pesas y Medidas.

Hay seis unidades básicas en el SI, y las demás unidades se derivan de ellas. Cuatro de las unidades básicas, el metro, el kilogramo, el segundo y el coulomb, son importantes para los teóricos en circuitos, y los consideraremos con algún detalle. Las dos unidades básicas restantes, el grado Kelvin y la candela, las cuales no son esenciales para nuestro estudio y de este modo no serán consideradas posteriormente.

Las unidades SI están definidas con mucha precisión en términos de cantidades permanentes y reproducibles. Sin embargo, las definiciones completas son extensas y esotéricas.¹ Por tanto, nos contentaremos con identificar los nombres de las unidades básicas y relacionarlas con el muy familiar *Sistema Inglés de Unidades*, el cual incluye pulgadas, pies, libras, etc. Se observa, sin embargo, que el SI incorpora el *sistema métrico*, preferido en casi todos los países del mundo, antes que el incómodo Sistema Británico. Los prefijos de las potencias de 10 en el sistema SI son mostradas, junto con sus abreviaturas estándares, en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Prefijos en el SI

Múltiplo	Prefijo	Símbolo
10^{12}	Tera	T
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^{-3}	Mili	m
10^{-6}	Micro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Pico	p
10^{-15}	Femto	f

La unidad básica de longitud en el SI es el *metro*, abreviado m, relacionado con el sistema inglés por el hecho de que 1 pulgada equivale a 0.0254001 m/pulg (de seis dígitos significativos). La unidad básica de masa es el *kilogramo* (kg), siendo equivalente a la libra británica por 0.453593 kg/lb, y la unidad básica de tiempo en el sistema es el *segundo* (s).

¹ Pueden encontrarse definiciones completas de las unidades básicas, por ejemplo, en "Ejercicios para Unidades recomendados por la IEEE en Publicaciones Científicas y Trabajos Técnicos", Estándar IEEE 268-1973, Nueva York, El IEEE, 1973; también ver 268-1978 y 268-1982 de la misma fuente.

La cuarta unidad en el SI es el *coulomb* (C), que es la unidad básica usada para medir carga eléctrica. Dejaremos pendiente la definición de esta unidad hasta la siguiente sección, cuando tratemos de la carga y la corriente. El nombre de coulomb se escogió en honor del científico francés, inventor e ingeniero militar Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), quien fue un pionero en los campos de la fricción, la electricidad y el magnetismo. Debemos advertir en este momento que todas las unidades SI con nombres de personas famosas tienen abreviaturas con letras mayúsculas; en los otros casos se usan las abreviaturas con minúsculas.

Las cantidades que vamos a encontrar comúnmente en nuestro estudio de circuitos son la corriente, voltaje y potencia. Las unidades SI de estas cantidades están derivadas de cuatro unidades básicas (metro, kilogramo, segundo y coulomb) antes mencionadas. Unidades de corriente, voltaje y potencia son descritas a continuación, las cuales están relacionadas con las unidades de fuerza y energía. Al mismo tiempo, las cinco unidades derivadas, con las cuatro unidades básicas, serán todas las que vamos a necesitar para describir el comportamiento fundamental cuantitativo de los circuitos eléctricos.²

La unidad fundamental de fuerza es el *newton* (N), que es la fuerza requerida para acelerar una masa de 1 kg por 1 metro por segundo por segundo (1 m/s^2). Por tanto, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$. El nombre del newton se debe, por supuesto, al gran científico inglés, astrónomo y matemático Sir Isaac Newton (1642-1727). Las hazañas prolíficas de Newton incluyen la ley de la gravitación universal, la naturaleza ondulatoria de la luz, y muchas otras contribuciones fundamentales.

La unidad fundamental de trabajo y energía es el *joule* (J), llamado así en honor del físico británico James P. Joule (1818-1889), quien participó en el descubrimiento de la ley de la conservación de la energía y ayudó a justificar la idea de que el calor es una forma de energía. Un joule es el trabajo hecho por una fuerza constante de 1-N aplicada a lo largo de 1 m de distancia. Así, $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$.

La unidad fundamental de corriente es el *ampere*, llamado así en honor de André Marie Ampere (1775-1836), quien descubrió la relación entre la corriente eléctrica y la inducción magnética. Un ampere o un amp es la corriente que fluye cuando 1 coulomb de carga pasa por segundo ($1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$). Este tema va a ser tratado con detalle más adelante en la siguiente sección.

La unidad fundamental de potencial eléctrico es el *volt*, llamado así por Alessandro Volta, cuya biografía, muy resumida, se presenta en la página 1. Si una carga de 1 coulomb pudiera ser movida entre dos puntos en el espacio con el gasto de 1 joule de trabajo, 1 volt sería la diferencia potencial existente entre estos puntos ($1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$).

La última unidad derivada que consideraremos es el *watt* (W), que es la unidad fundamental de potencia, el tiempo en el que se efectúa trabajo o se consume energía. El watt se define como 1 joule por segundo (1 J/s) y es llamado así en honor de James Watt, el ingeniero escocés cuyo diseño de una máquina permitió aprovechar prácticamente por primera vez la energía del vapor, desencadenando, así, la Revolución Industrial.

Ejemplo 1.1

Vamos a convertir la velocidad límite de 55 millas por hora en kilómetros por hora.

$$1 \text{ pulgada} = 0.0254 \text{ metros}$$

así,

$$1 \text{ milla} = (0.0254 \text{ m/pulg}) (12 \text{ pulg/pie}) (5280 \text{ pies/mi}) (1/1000 \text{ km/m})$$

² Otras cantidades susceptibles de ser medidas en circuitos eléctricos, que están asociadas a los fenómenos magnéticos y electro-ópticos, no son necesarias aquí. Estas cantidades y sus unidades no serán consideradas formalmente.

o bien,

$$1 \text{ mi} = 1.609 \text{ km}$$

así,

$$55 \text{ mi/h} = (55 \text{ mi/h}) (1.609 \text{ km/mi}) = 88.5 \text{ km/h}$$

Obsérvese que las unidades se simplifican a cada paso, lo cual se puede usar para indicar qué factores se necesitan en el proceso de conversión.

EJERCICIOS

- 1.1.1.** Encontrar cuántos picosegundos hay en (a) 20 μs , (b) 2 ms, y (c) 100 ns.

Respuesta (a) 2×10^7 ; (b) 2×10^9 ; (c) 1×10^5

- 1.1.2.** Si un microprocesador puede realizar 4 millones de instrucciones por segundo, ¿cuántos nanosegundos se requieren para ejecutar una operación que requiere 3 instrucciones?

Respuesta 750 ns

- 1.1.3.** La masa de 10,000-libras de una nave espacial en el espacio exterior está siendo acelerada a 1.5 g ($1 \text{ g} = 32 \text{ pies/sec}^2$). ¿Cuántos newtons de fuerza se aplicarán al motor?

Respuesta $6.67 \times 10^4 \text{ N}$

- 1.1.4.** El registro de la velocidad más alta alcanzada por un humano, para 10 m o más es de 26.32 mph, lograda conjuntamente por dos corredores en 1987. Si esta velocidad se sostuviera por 100 m, ¿cuánto tiempo podría tomar cubrir esta distancia? (El récord de los 100 m era en ese tiempo de 9.83 s.)

Respuesta 8.50 s

1.2

CARGA Y CORRIENTE

Estamos familiarizados con las fuerzas gravitacionales de atracción entre los cuerpos, las cuales son responsables de sostenernos sobre la tierra y causan que una manzana desprendida de un árbol caiga al suelo y no ascienda. Hay también fuerzas que no son proporcionales a las masas de los cuerpos, las cuales son de atracción y repulsión. Estas fuerzas no pueden ser gravitacionales en la naturaleza.

Una de las más importantes de estas fuerzas es la eléctrica y es causada por la presencia de *cargas eléctricas*.¹ Explicamos la existencia de fuerzas eléctricas de atracción y repulsión proponiendo que hay dos clases de cargas, positiva y negativa, y que las cargas diferentes se atraen y las cargas iguales se repelen.

¹ Otras fuerzas magnéticas incluidas, llamadas fuerzas fundamentales débiles y fuertes, actúan entre las partículas subatómicas.

De acuerdo con la teoría aceptada, la cual ha tenido que ser verificada por cuidadosas y repetidas pruebas, la materia está hecha de átomos, compuestos de un cierto número de partículas. Las más importantes de estas partículas son los protones (cargas positivas) y los neutrones (neutros, sin carga) encontrados en el núcleo del átomo y los electrones (cargas negativas) que se mueven en órbita alrededor del núcleo. Normalmente, el átomo es eléctricamente neutro; la carga negativa de los electrones balancea la carga positiva de los protones. Los átomos pueden llegar a cargarse positivamente al ceder electrones y llegar a cargarse negativamente al obtener electrones de otros átomos.

Como un ejemplo, podemos transferir carga negativa a un globo frotándolo contra nuestro cabello. El globo se pegará a una pared o al techo, evidencia de la fuerza de atracción entre los electrones excedentes del globo y la pared, los cuales se cargan positivamente cuando los electrones de la superficie llegan a una velocidad hacia el interior debido a la repulsión por la carga negativa neta del balón.

Ahora definimos el *coulomb* (C), expuesto en la sección anterior, estableciendo que un electrón tiene una carga negativa de 1.6021×10^{-19} coulomb. Dicho de otra manera, un coulomb es el conjunto de cargas de aproximadamente 6.24×10^{18} electrones. Éstos son, por supuesto, números difíciles de concebir, pero sus tamaños nos animan a utilizar números más manejables, tales como 2 C, en el trabajo que sigue.

El símbolo de la carga será tomado como Q o q , la letra mayúscula se acostumbrará para denotar cargas constantes tales como $Q = 4$ C, y la letra minúscula indicará una carga variante en el tiempo. En el último caso podemos enfatizar la dependencia con respecto al tiempo escribiendo $q(t)$. Esta práctica que involucra letras mayúsculas y minúsculas se extenderá a otras cantidades eléctricas.

El propósito primario de un circuito eléctrico consiste en mover o transferir cargas a lo largo de trayectorias especificadas. Este movimiento de cargas constituye una *corriente eléctrica*, denotada por las letras i o I , tomadas de la palabra francesa *intensité*. Formalmente, la corriente es la razón de cambio de la carga respecto al tiempo, dada por

$$i = dq/dt \quad (1.1)$$

Como se mencionó en la sección anterior, la unidad básica de la corriente es el ampere. Un ampere de corriente, se dijo, era el flujo que pasa en una sección dada, si el valor neto de carga que se mueve es de 1 Coulomb por segundo (1 C/s).

En la teoría de circuitos, la corriente es generalmente especificada como el movimiento de cargas positivas. Esta convención fue propuesta por un gran científico americano, inventor y diplomático, Benjamín Franklin (1706-1790) quien supuso que la electricidad viajaba de lo positivo a lo negativo. Mientras que esto es desde luego cierto en algunos medios físicos, ahora sabemos que en el caso importante de conductores metálicos tan comunes en el mundo real de circuitos ocurre lo contrario. En metales y la mayoría de otros conductores los electrones libres con la carga negativa son los que llevan la corriente, más bien que el postulado de Franklin de la corriente de carga positiva. Afortunadamente, desde los puntos de la teoría de circuitos vistos no hay diferencias entre el movimiento de la carga positiva en una dirección e igual pero lo contrario en los otros movimientos de cargas negativas. Así tomaremos la convención tradicional del movimiento de cargas positivas para definir la *corriente convencional* y usar esto para medir la corriente sin considerar la identidad verdadera del portador de la carga. La corriente convencional es la corriente *equivalente de cargas positivas* en un conductor determinado. A menos que se especifique de otra manera, todas las corrientes están para ser entendidas como corrientes convencionales.

El flujo de corriente a lo largo de un cable o a través de un elemento será especificada por dos indicadores: una flecha, que establece la *dirección de referencia de la corriente* y un valor (variable o fijo), que cuantifica el flujo de corriente en la dirección de referencia. La figura 1.3(a) muestra la corriente i_1 con un flujo de izquierda a derecha mediante un cable y la figura 1.3(b) muestra una corriente de 7 A con un flujo de la derecha a izquierda a través de un elemento. En el caso posterior, 7 A de una carga (positiva) convencional que fluye de derecha a izquierda, la cual puede consistir físicamente de un valor igual de cargas negativas que fluyen de izquierda a derecha. Volviendo a la figura 1.3(a), notamos que si la variable i_1 es positiva la corriente convencional fluirá de izquierda a derecha, considerando si es negativa, la corriente fluirá de derecha a izquierda. La flecha no indica la dirección real del flujo de corriente, más bien indicará la *dirección convencional del flujo de corriente si la señal algebraica del valor de la corriente es positiva*. La flecha indicará la dirección contraria del flujo de corriente convencional si la señal del valor de la corriente es negativa.



FIGURA 1.3

Mientras que en otro ejemplo, suponemos que la corriente en el cable de la figura 1.4 (a) es de 3 A. Esto es que en 3 C/s pasa en algún punto específico en el cable en dirección de izquierda a derecha. En la figura 1.4 (b), -3 A que pasan de derecha a izquierda. Estos dos casos dan por resultado exactamente la misma transferencia de carga y son las maneras equivalentes para denotar precisamente el mismo flujo de corriente. *Podemos revertir siempre la señal algebraica y la dirección de referencia de una corriente sin cambiar su valor o dirección*. Esto corresponde a revertir una señal de un número dos veces, dejándolo así sin cambio. Observe que, sin saber la dirección de referencia, un solo valor numérico de corriente no es suficiente para especificar la corriente. Se necesitan ambos valores de dirección y referencia.



FIGURA 1.4 Dos representaciones de la misma corriente.

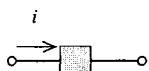


FIGURA 1.5 Corriente fluyendo en un elemento general.

La figura 1.5 representa un elemento general de circuito con una corriente i fluyendo desde la terminal izquierda hacia la terminal derecha. La carga total que entra al elemento entre el tiempo t_0 y t se encuentra integrando (1.1). El resultado es

$$q_T = q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^t i \, d\tau \quad (1.2)$$

Debemos notar en este punto que estamos considerando los elementos de la red como *eléctricamente neutros*. Esto es, no puede acumularse carga positiva o negativa en el elemento. Una carga positiva que entra debe corresponder a una carga positiva igual que sale (o de manera equivalente, una carga negativa igual que entra). Esta propiedad es la consecuencia de la ley de corriente de Kirchhoff, la cual es discutida en la siguiente sección. Así,

la corriente que se ve entrando por la terminal de la figura 1.5 debe salir por la terminal derecha. Adviértase que la flecha podría también estar señalando el lado derecho del elemento o bien el lado izquierdo sin cambio de referencia en la dirección de la corriente.

Ejemplo 1.2

Como ejemplo, supóngase que la corriente que entra a una terminal de un elemento es $i = 4 \text{ A}$. La carga total que entra a la terminal entre $t = 0$ y $t = 3 \text{ s}$ está dada por

$$q = \int_0^3 4dt = 12 \text{ C}$$

Ciertos tipos de corriente son encontrados frecuentemente, algunos de los cuales se muestran en la figura 1.6. Una corriente constante, como la mostrada en la figura 1.6(a), será denominada *corriente directa*, o dc. Una *corriente alterna*, o ac, es una corriente senoidal tal como la de la figura 1.6(b). Las senoidales serán discutidas con detalle en el capítulo 8. Las figuras 1.6(c) y (d) ilustran, respectivamente, una corriente *exponencial* y una corriente de *dientes de sierra*.

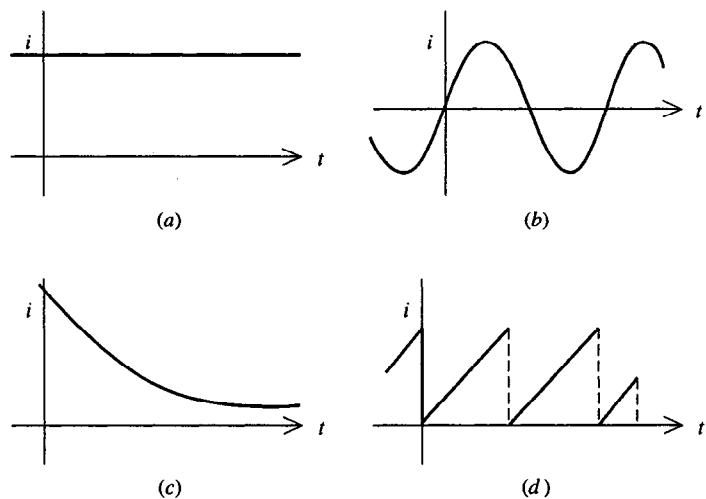


FIGURA 1.6 (a) dc; (b) ac; (c) exponencial; (d) corriente diente de sierra.

Hay muchos usos comerciales de la dc, tales como los destellos luminosos y el suministro de potencia para circuitos electrónicos, y la ac es la corriente doméstica que se encuentra en todo el mundo. Las corrientes exponenciales aparecen muy a menudo (¡las queremos o no las queremos!) cuando se opera un interruptor para cerrar una trayectoria en un circuito energizado. Las ondas de dientes de sierra son útiles en aparatos con tubos de rayos catódicos (CRTs) usados para desplegar visualmente las formas de onda eléctricas.

EJERCICIOS

- 1.2.1. ¿Cuántos electrones hay en una carga de 0.32042 pC?
Respuesta 2 millones
- 1.2.2. La carga total que entra a la terminal de un elemento está dada por $q = 4t^3 - 5t$ mC. Calcular la corriente i cuando $t = 0$ y $t = 2$ s.
Respuesta -5.43 mA
- 1.2.3. La corriente que entra a una terminal está dada por:
 $i = 1 + \pi \operatorname{sen} 2\pi t$ A. Calcular la carga total que entra a la terminal entre $t = 0$ y $t = 1.5$ s.
Respuesta 2.5 C

1.3

VOLTAJE, ENERGÍA Y POTENCIA

Las cargas en un conductor, exemplificadas por electrones libres, pueden moverse de manera aleatoria. Sin embargo, si queremos un movimiento ordenado de su parte, como es el caso de la corriente eléctrica, debemos aplicar una fuerza externa llamada *fuerza electromotriz* (fem). De ese modo se ejerce trabajo sobre las cargas. En la sección anterior definimos el voltaje a través de un elemento como el trabajo realizado para mover una carga unitaria (+1 C) a través del elemento de una terminal a la otra.

El voltaje a través de un elemento estará designado por dos indicadores: un signo de más o de menos, en el que se establece la *dirección de referencia del voltaje* y un valor (variable o fijo) el cual va a cuantificar el voltaje que pasa por un elemento en la dirección de referencia especificada. En la figura 1.7(a), vemos un voltaje (o diferencia de potencial) de valor v_6 volts que pasa por un elemento, medido con un potencial mayor del lado izquierdo del elemento y un potencial menor del lado derecho. Así si $v_6 > 0$ V, el lado izquierdo será de mayor potencial, y si $v_6 < 0$ V, el lado derecho será de mayor potencial. Advierta que la referencia de dirección no indica por sí misma en qué lado del elemento está el mayor potencial. Necesitamos no tratar de adivinar la dirección de potencial menor cuando asignamos la dirección de voltaje de referencia para un voltaje variable. En la figura 1.7(b), el lado derecho del elemento es +23 V mayor que el izquierdo, así hay +23-V bajo de derecha a izquierda cruzando el elemento o, igualmente hay +23-V mayor de izquierda a derecha cruzando el elemento.

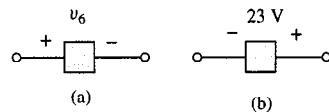


FIGURA 1.7 Especificación del valor del voltaje y la dirección de referencia.

Como ejemplos, las figuras 1.8(a) y (b) son dos versiones del mismo voltaje exactamente. En (a), la terminal A es +5 V sobre la terminal B, y en (b), la terminal B es -5 V sobre A (o +5 V bajo A).

Podemos usar una notación de *doble subíndice* donde v_{ab} denota el potencial del punto a con respecto al punto b . En este caso tenemos en general que, $v_{ab} = -v_{ba}$. Así en la figura 1.8 (a), $v_{AB} = 5$ V y $v_{BA} = -5$ V.

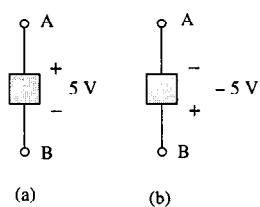


FIGURA 1.8 Dos representaciones equivalentes de voltaje.

Al transferir carga a través de un elemento, se efectúa un trabajo, como lo hemos afirmado. O dicho de otra manera, se está suministrando energía. Para saber si la energía está siendo suministrada *al* elemento o *por* el elemento al resto del circuito, debemos conocer no sólo la polaridad del voltaje a través del elemento, sino también la dirección de la corriente a través del elemento. Si una corriente positiva entra por la terminal positiva, entonces una fuerza externa está impulsando a la corriente y, por tanto, está suministrando o entregando energía al elemento. El elemento está *absorbiendo* energía en este caso. Por otra parte, si una corriente positiva sale por la terminal positiva (entra por la terminal negativa), entonces el elemento está entregando energía al circuito externo.

Como ejemplos, en la figura 1.9(a) el elemento está absorbiendo energía. Una corriente positiva entra por la terminal positiva. Ese es el caso también en la figura 1.9 (b). En las figuras 1.9 (c) y (d), una corriente positiva entra por la terminal negativa, por tanto, el elemento está entregando energía en ambos casos.

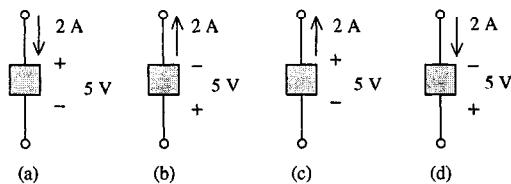


FIGURA 1.9 Diferentes relaciones voltaje-corriente

Vamos a considerar ahora la razón en la cual la energía está siendo entregada por un elemento de un circuito. Si el voltaje a través del elemento es v y se mueve una pequeña carga Δq a través del elemento de la terminal positiva a la negativa, entonces la energía absorbida por el elemento, digamos Δw , está dada por

$$\Delta w = v \Delta q$$

Si el tiempo transcurrido es Δt , entonces la razón a la cual se hace el trabajo o se consume la energía w , está dada, y como Δt se vuelve menor y menor, por

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

o

$$\frac{dw}{dt} = v \frac{dq}{dt} = vi \quad (1.3)$$

Dado que por la definición la razón del consumo de energía es la potencia representada por p , tenemos

$$p = \frac{dw}{dt} = vi \quad (1.4)$$

Observemos que (1.4) es correcta dimensionalmente puesto que las unidades de vi son $(J/C)(C/s)$ o J/s , que son watts (W), antes definidos.

Las cantidades v e i son por lo común funciones del tiempo, las cuales podemos expresar por $v(t)$ e $i(t)$. Por tanto, la p dada por (1.5) es una cantidad variante en el tiempo. En ocasiones se le llama *potencia instantánea* porque su valor es la potencia en el instante en que se miden v e i .

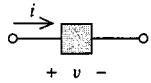


FIGURA 1.10 Elemento en que las terminales variables satisfacen la convención de la señal pasiva.

Advierta cuidadosamente la relación entre las direcciones de referencia del voltaje y de la corriente del elemento de la figura 1.10. Si la flecha que indica la dirección de referencia de la corriente está en el lado positivo de la dirección de referencia del voltaje, la corriente y el voltaje así definidos como se dijo satisfacen la convención de la señal pasiva. En este caso, $vi > 0$ significa que el elemento está absorbiendo potencia; $vi < 0$ esto es entregando potencia en un instante de tiempo. Más acerca de esto en la siguiente sección.

Ejemplo 1.3

Como ejemplos, en la figura 1.9(a) y (b) la convención de la señal pasiva es satisfactoria (el punto de la flecha está en el lado positivo o equivalentemente fuera del lado negativo). El elemento está absorbiendo potencia: $p = (5)(2) = 10 \text{ W}$. En las figuras 1.9(c) y (d), están entregando 10 W al circuito externo, siendo $vi = +10 \text{ W}$, pero estas variables violan la convención de la señal pasiva.

Antes de terminar nuestra discusión de potencia y energía, vamos a resolver (1.4) para la energía w entregada a un elemento entre el tiempo t_0 y t . Tenemos, integrando ambos miembros entre t_0 y t ,

$$w(t) - w(t_0) = \int_{t_0}^t vi \, d\tau \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.4

Por ejemplo, si, en la figura 1.10, $i = 2t \text{ A}$ y $v = 6 \text{ V}$, la energía entregada al elemento entre $t = 0$ y $t = 2 \text{ s}$ está dada por

$$w(2) - w(0) = \int_0^2 (6)(2\tau) \, d\tau = 24 \text{ J}$$

Puesto que el miembro izquierdo de (1.5) representa la energía entregada al elemento entre t_0 y t , podemos interpretar $w(t)$ como la energía entregada al elemento entre el inicio del tiempo y t y $w(t_0)$ como la energía entre el inicio del tiempo y t_0 . En el inicio del tiempo, el cual podemos considerar como $t = -\infty$, la energía entregada al elemento es cero; esto es,

$$w(-\infty) = 0$$

Si $t_0 = -\infty$ en (1.5), entonces tendremos la energía entregada al elemento desde el inicio hasta t , dada por

$$w(t) = \int_{-\infty}^t vi \, dt \quad (1.6)$$

Esta es consistente con (1.5) puesto que

$$w(t) = \int_{-\infty}^t vi \, dt = \int_{-\infty}^{t_0} vi \, dt + \int_{t_0}^t vi \, dt$$

Por (1.6), esta puede escribirse

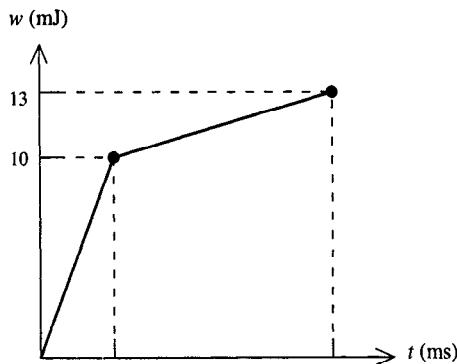
$$w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^t vi \, dt$$

que es la (1.5)

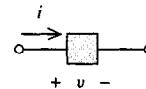
EJERCICIOS

- 1.3.1.** Encontrar v si $i = 6 \text{ mA}$ y el elemento está (a) absorbiendo potencia $p = 18 \text{ mW}$ y (b) suministrando al circuito externo una potencia $p = 12 \text{ mW}$.

Respuesta (a) 3 V; (b) -2 V



EJERCICIO 1.3.3



EJERCICIO 1.3.1

- 1.3.2.** Si en el ejemplo 1.3.1 $i = 3 \text{ A}$ y $v = 6 \text{ V}$, calcular (a) la potencia absorbida por el elemento y (b) la energía suministrada al elemento entre 2 y 4 s.

Respuesta (a) 18 W; (b) 36 J

- 1.3.3.** Un elemento de dos terminales absorbe energía de valor w milijoules de energía como se muestra. Si la corriente que por la terminal positiva es $i = 100 \cos 1000\pi t \text{ mA}$, encontrar el voltaje del elemento en $t = 1 \text{ ms}$ y en $t = 4 \text{ ms}$.

Respuesta -50 V, 5 V

1.4

ELEMENTOS ACTIVOS Y PASIVOS

Podemos clasificar los elementos de un circuito en dos grandes categorías, elementos pasivos y elementos activos, tomando en consideración la energía entregada a ellos o por ellos.

Se dice que un elemento de un circuito es *pasivo* si éste no puede suministrar más energía que la que tenía previamente, siendo suministrada a éste por el resto del circuito. Esto es, en relación con la ecuación (1.6), que a cada t , la energía neta absorbida por un elemento pasivo hasta t debe ser no negativa:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t)dt = \int_{-\infty}^t vi \, dt \geq 0 \quad (1.7)$$

Las direcciones de referencia de v e i en esta ecuación son supuestas para satisfacer la convención de la señal pasiva introducida en la sección anterior (la flecha para referir la corriente en el lado positivo de la dirección de referencia del voltaje). Solamente si la convención de la señal pasiva es satisfactoria la integral garantiza la no negatividad para elementos pasivos (los cuales explican la elección del nombre “convención de la señal pasiva”). Como veremos más adelante, ejemplos de elementos pasivos son los resistores, capacitores e inductores.

Un elemento *activo* es un elemento que no es pasivo. Esto es, (1.7) no sostiene a cada tiempo t . Son ejemplos de elementos activos los generadores, baterías, y dispositivos electrónicos que requieren fuentes de alimentación.

No estamos todavía preparados hasta el momento para iniciar una discusión formal de los diferentes elementos pasivos. Eso se hará en capítulos posteriores. En esta sección daremos una breve explicación de dos elementos activos muy importantes, la fuente de voltaje independiente y la fuente de corriente independiente.

Una fuente de voltaje independiente es un elemento de dos terminales, como una batería o un generador, que mantienen un voltaje específico entre sus terminales a pesar del resto del circuito que está conectado a él. El voltaje es por completo independiente de la corriente a través del elemento.

El símbolo para una fuente de voltaje se muestra en la figura 1.11(a). El valor v_s es la *función fuente* y las señales más-menos dentro de la fuente dan la *dirección de referencia de la función de la fuente*. La función fuente v_s , la cual podrá ser constante o una función de tiempo $v_s(t)$, se considera conocida. En conclusión, siempre definiremos una terminal de voltaje variable a través de cada elemento en el circuito, incluyendo las fuentes de voltaje, v es una terminal de voltaje en la figura 1.11(a). Por definición de una fuente de voltaje independiente, es una terminal de voltaje simplemente igual al valor especificado.

$$v = v_s \quad (1.8a)$$

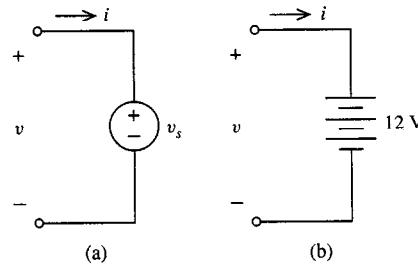


FIGURA 1.11 Fuente de voltaje independiente.

En otras palabras, *el voltaje a través de una fuente de voltaje independiente siempre es igual y es especificado por la función fuente, sin importar la corriente que lo atraviesa*. Notamos que, si la terminal de la dirección de referencia del voltaje y la dirección de referencia de la función fuente son opuestas una a la otra, una señal de menos se necesita insertar en la ley del elemento, $v = -v_s$, por lo que la terminal de voltaje está definida en este caso como una función de fuente negativa.

La ecuación (1.8a) es un ejemplo de una *ley de elemento*, una ecuación que envuelve la terminal del elemento de voltaje y/o corriente, la cual describe el comportamiento de un elemento. Cada elemento tiene una ley de elemento distinta, como lo veremos para fuentes de corriente, resistores, y otros tipos de elementos que serán presentados.

Otros símbolos son a menudo usados para la fuente de voltaje constante, tales como una batería con 12 V a través de sus terminales, se muestra en la figura 1.11(b). En el caso de las fuentes constantes, usaremos las figuras 1.11(a) y (b) intercambiándolas.

Una fuente de corriente independiente es un elemento de dos terminales a través de la cual fluye una corriente especificada. El valor de esta corriente está dado por la función

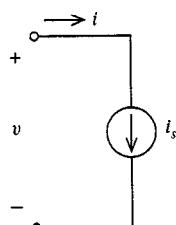


FIGURA 1.12 Fuente de corriente independiente.

fuente (i_s en la figura 1.12) y la dirección de referencia de la función fuente por la flecha dentro de la fuente. Mientras que en la fuente de voltaje independiente, la función fuente i_s [o $i_s(t)$ en el caso de tiempo variable] está asumida como conocida y están relacionadas a la terminal del elemento de corriente variable (i en la figura 1.12) por la ley del elemento para fuente de corriente independiente.

$$i = i_s \quad (1.8b)$$

Si la función fuente i_s y la dirección de referencia de la terminal de corriente i son opuestas, como algo de acuerdo como se muestra en la figura 1.13, entonces un signo de menos se insertará dentro de la ley de la terminal, $i = -i_s$.

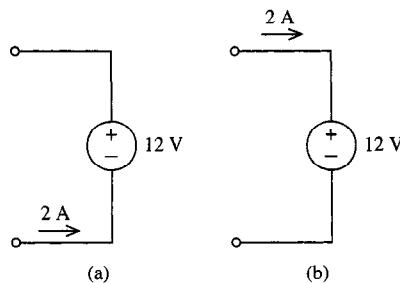


FIGURA 1.13 (a) Fuente que suministra potencia; (b) fuente que absorbe potencia.

Ejemplo 1.5

A fin de mostrar que las fuentes independientes son, en general, elementos activos, necesitamos solamente demostrar que existen circunstancias en las que pueden hacer que se suministre más energía neta que la que se absorbe. Para una fuente de corriente con una función fuente $i_s(t)$ A y la ley del elemento $i(t) = i_s(t)$, suponemos que arreglamos para el voltaje que atraviesa la fuente será $v(t) = -i_s(t)$ V, con la dirección de referencia mostrada en la figura 1.12. Entonces, por la ecuación (1.5), $p(t) = v(t)i(t) = -i_s^2(t)$, y la energía neta $w(t)$ absorbida por la fuente necesita ser no positiva para cada t . Si $i_s(t)$ no está indicada igual a cero para toda t , $w(t)$ necesita no estar justificada como no positiva pero, en realidad la negativa es para alguna t . Esto viola el requerimiento (1.7) de que elementos pasivos nunca absorben la energía neta negativa, en otras palabras nunca suministran energía neta bajo ninguna circunstancia. Un argumento similar puede ser usado para mostrar que esta fuente de voltaje es también un elemento activo. Notamos que estos resultados asumen que la función fuente $i_s(t)$ no está identificada igual a cero todo el tiempo t . Fuentes con funciones fuente cero son elementos pasivos; todas las demás fuentes son capaces de producir energía neta siendo así elementos activos.

Las fuentes independientes están usualmente para suministrar potencia a los circuitos externos, aunque en un circuito particular puede ser que algunas absorban potencia y otras la suministren. En la figura 1.13(a), $v = +12$ V es la terminal de voltaje que pasa a través de la fuente e $i = +2$ A que es la terminal de corriente. Las direcciones de referencia de estas terminales variables no satisfacen la convención de la señal pasiva (la flecha apunta en el lado de

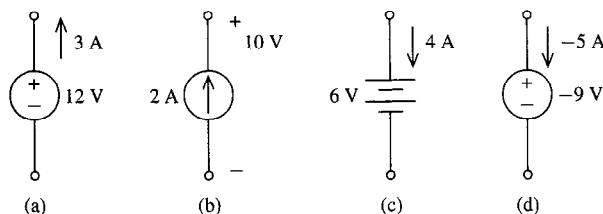
menos), $p = vi = 24 \text{ W} > 0$ que implica que esta fuente está *suministrando* 24 W de potencia al resto del circuito. En la figura 1.13(b), la dirección de referencia está satisfaciendo la convención de señal pasiva de modo que $p = vi = 24 \text{ W} > 0$ significando que la batería está *absorbiendo* 24 W, como puede ser el caso cuando está siendo cargada por alguna fuente poderosa en algún lugar en el circuito.

Las fuentes que hemos explicado aquí, así como los elementos de los circuitos que consideraremos más adelante, son *elementos ideales*. Es decir, son modelos matemáticos que representan a los elementos reales o físicos en ciertas condiciones. Por ejemplo, una batería de automóvil ideal suministra 12 V constantes, sin importar el circuito externo conectado a ella. Puesto que su corriente es por completo arbitraria, en teoría podría entregar una cantidad infinita de potencia. Por supuesto, esto no es posible en el caso de un dispositivo real. Una batería de automóvil real de 12 V suministra un voltaje constante aproximadamente sólo mientras la corriente que alimenta es baja. Cuando la corriente excede unos cuantos cientos de amperes, el voltaje cae de manera apreciable de los 12 V.

EJERCICIOS

- 1.4.1.** Encontrar la potencia suministrada por las fuentes mostradas.

Respuesta (a) 36 W; (b) 20 W; (c) -24 W; (d) -45 W



EJERCICIO 1.4.1

- 1.4.2.** El voltaje en las terminales de una fuente de voltaje es $v = 6 \sin 2t \text{ V}$. Si la carga que sale por la terminal positiva es $q = -2 \cos 2t \text{ mC}$, encontrar la potencia suministrada por la fuente entre 0 y t segundos.

Respuesta $24 \cdot \sin^2 2t \text{ mW}, 12t - 3 \sin 4t \text{ mJ}$

1.5

ANÁLISIS DE CIRCUITOS Y DISEÑO

Revisemos ahora las palabras *análisis de circuitos*, que forman parte del título del libro, y la relación a la idea de *diseño de circuitos*, y consideremos su significado. Generalmente, si un circuito eléctrico está sujeto a una *entrada* o excitación en la forma, de un voltaje o una corriente proporcionados por una fuente independiente, se producirá una *salida* o res-

puesta. La entrada y salida son voltajes o corrientes asociados con algún elemento en el circuito. Puede haber más de una entrada y más de una salida.

Hay dos grandes ramas de la teoría de los circuitos, y están conectados con detalle a los conceptos fundamentales de entrada, circuito y salida. La primera rama es el *análisis de circuitos*, en el cual, dados la entrada y el circuito, es el proceso de determinación de la salida. La otra rama es el diseño de circuitos (equivalente, a la síntesis de circuitos), en el cual están dadas la entrada y la salida, es el proceso de descubrimiento de un circuito dando lugar a la salida cuando la entrada está aplicada a él.

El diseño de circuitos es a menudo visto como un proceso cíclico. Dada la entrada y salida deseada, se puede hacer una suposición inicial. Este circuito es después analizado para determinar la salida actual para una entrada deseada, y el resultado es comparado a la salida deseada. Se hará un juicio con base en ambos diseños y se tendrá la meta satisfactoria. Si no, se harán modificaciones al circuito y se repetirá el ciclo.

Concibiendo un primer corte o suponiendo un circuito inicial y seleccionar las modificaciones exactas durante cada ciclo de rediseño depende fuertemente de la habilidad y experiencia del diseñador de circuitos. Confirando en su fallo y creatividad, constituyen el componente de "arte" del diseño del circuito. Ellos no pueden estar codificando explícitamente, las reglas del mecanismo y ningún otro proceso en el que los escultores tengan que trabajar. *El diseño de circuitos es una actividad humana creativa.*

El análisis de circuitos constituye el componente de "ciencia" complementario en el proceso de diseño de circuitos. Sin el análisis, el comportamiento de entrada-salida de cada circuito inicial supuesto no podrá ser determinado y así un ciclo único en el proceso de diseño no podría completarse. No podemos esperar mejorar lo que no se entiende. Mientras que el análisis pueda desempeñarse sin el diseño, lo contrario no es verdadero.

Desde el análisis de circuitos se ha tenido que formar una base necesaria para el diseño de circuitos, la cual debe estudiarse primero. Desde luego la mayor parte del volumen actual exclusivamente concierne al análisis de circuitos con esas excepciones en capítulos anteriores donde fueron notados como surgían. Así como un músico de jazz debe dominar las escalas antes de crear música realmente interesante y original, los elementos del análisis de circuitos son nuestras escalas y deben dominarse si estamos interesados en llegar a la meta del diseño útil y circuitos interesantes.

RESUMEN

Empezamos nuestro estudio de circuitos eléctricos definiendo esas cantidades eléctricas las cuales son de interés como la corriente primaria, voltaje y potencia, y la selección de un sistema de unidades consistente para sus medidas. El sistema SI seleccionado incorpora el sistema métrico (metros, kilogramos, segundos), y usa el coulomb, una medida de carga, como una unidad fundamental. Las unidades SI de la corriente, voltaje y potencia son respectivamente el ampere, volts y watts.

- La corriente tiene magnitud y dirección. Esta dirección es determinada en común por la flecha de dirección de referencia de la corriente y el signo de valor algebraico. Un valor positivo indica el flujo de corriente positiva equivalente en la dirección de la flecha, y la corriente negativa indica la dirección opuesta del flujo.

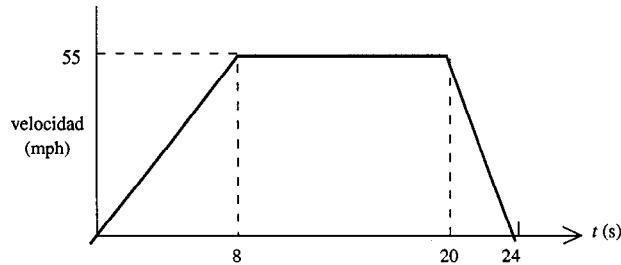
- El voltaje, o diferencia de potencial, también tiene magnitud y dirección. Esta dirección está determinada por el signo más-menos de la dirección de referencia del voltaje y el signo algebraico. Un voltaje positivo indica el voltaje que cae en la dirección más a menos (mayor potencial eléctrico como signo más), y el valor negativo indica la dirección opuesta de la caída de voltaje.
- Los elementos pasivos no pueden suministrar más energía y balancearla más que la que ellos reciben de otros elementos. Los elementos activos pueden ser fuentes independientes.
- La potencia instantánea absorbida por una subred de dos terminales es igual al producto corriente-voltaje si la dirección de referencia satisface la convención de la señal pasiva (los puntos de la flecha de la corriente dentro del voltaje con signo más o afuera signo menos). La potencia negativa absorbida es equivalente a la potencia positiva suministrada.
- El análisis de circuitos es el proceso de determinación de la corriente y el voltaje de salida para un circuito específico. El diseño de circuitos es el descubrimiento de un circuito con cierto comportamiento de entrada-salida.

PROBLEMAS

1.1. La fórmula de Einstein para la conversión de la masa a energía es $E = mc^2$, donde E es energía, m masa, y $c = 3.02 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz. ¿Cuántos joules de energía hay en 5 microgramos de materia?

1.2. Tomando la velocidad de la luz $c = 3.02 \times 10^8$ m/s y un año contiene exactamente $365 \frac{1}{4}$ dfas, ¿cuántos kilómetros hay en un año luz?

1.3. Un automóvil de 1 000-kg acelera a 55 mph y después frena totalmente de acuerdo a la gráfica mostrada. Encontrar la distancia atravesada en kilómetros, y la máxima fuerza (en newtons) durante la aceleración y el frenado.

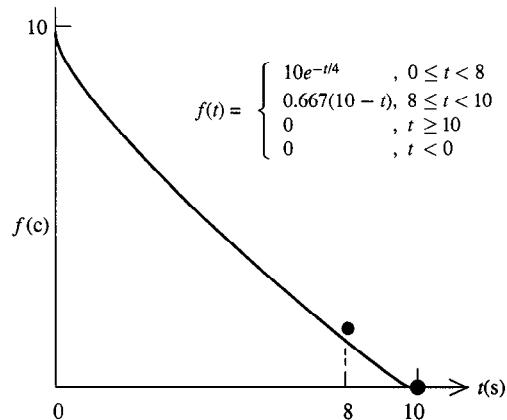


PROBLEMA P1.3

1.4. La velocidad más rápida registrada por un vehículo terrestre fue de 6,121 mph (en un trineo cohete no tripulado en 1982). Por muchos años, el record oficial de velocidad aérea fue para el vuelo tripulado (del avión SR-71 "Blackbird" en 1964) y fue en 980.4 m/s. Compara estas velocidades en kilómetros por hora.

1.5. $f(t)$ es la carga en coulombs que pasa en una cierta sección a lo largo de un cable. Encontrar (a) la carga total que pasa en la sección que cruza; (b) el tiempo en el que exac-

tamente 1 C tuvo que pasar; (c) la corriente en $t = 5$ s; y (d) la corriente en $t = 8$ s.



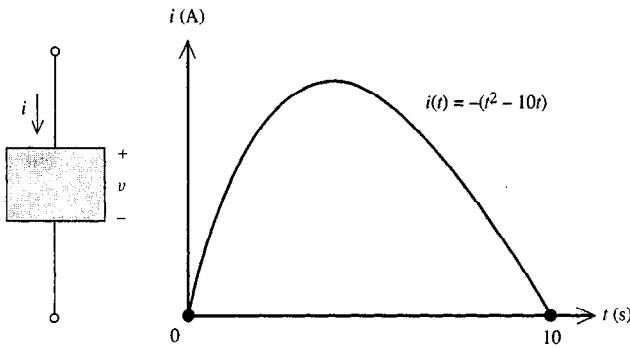
PROBLEMA P1.5

1.6. ¿Cuánto tiempo nos puede tomar con una fuerza de 10 N acelerar un objeto de 1000-lb de masa a una velocidad de 55 mph?

1.7. Un elemento de una pulgada de largo lleva una corriente uniforme de 2 mA. Si la energía suministrada al elemento es $w(t) = 4t^2$ J, $0 \leq t \leq 2$ s, dibuja $v(x)$, la distribución potencial a lo largo del elemento, en $0 \leq x \leq 1$, y encuentra la potencia máxima suministrada al elemento en $0 \leq t \leq 2$ s.

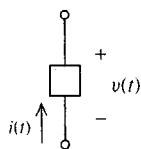
1.8. Si 10 J de trabajo son requeridos para mover $\frac{1}{4}$ C de carga negativa del punto a al punto b , encontrar v_{ab} y v_{ba} .

1.9. Si $v(t) = 4t$ V e $i(t)$ está mostrada, encontrar la potencia $p(t)$ disipada por el elemento y la energía total suministrada al elemento entre los tiempos $t = 0$ y $t = 10$.



PROBLEMA P1.9

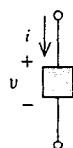
- 1.10.** Repite el problema 1.9 para $v(t) = 4(t - 5)$ V.
- 1.11.** La potencia suministrada a un elemento es $p = 10t \cos^2 t$ W y el voltaje es $v(t) = 2 \cos t$ V. Encontrar la corriente que entra a la terminal positiva y la carga entre los tiempos 0 y 2π s.
- 1.12.** Un elemento tiene $v(t) = 4e^{-t}$ V para $t \geq 0$ s. Si deseamos que este elemento suministre una energía neta de $2t$ J para $t \geq 0$, ¿qué $i(t)$ necesitamos?



PROBLEMA P1.12

- 1.13.** Muestre que por definición de un elemento pasivo, cualquier elemento satisface $v = mi$, donde $m \geq 0$ y los elementos variables i y v satisfacen la convención de la señal pasiva, es pasivo.

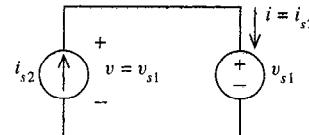
- 1.14.** El elemento mostrado satisface $v = 2i + 1$. ¿Es éste un elemento activo o pasivo? Encontrar la energía neta entre $t = -\infty$ y $t = 1$ s si $v = 0$ para $t < 0$ y $v = \frac{1}{2}$ V para $t \geq 0$.



PROBLEMA P1.14

- 1.15.** Un elemento tiene una corriente y un voltaje constante, $v = +100$ V e $i = +10$ A, con i y v satisfaciendo la convención de señal pasiva. ¿Cuánta energía se requiere para mover cada coulomb a través del elemento? ¿Cuánto tiempo me toma mover un coulomb a través del elemento? Repetir si $i = -10$ A.

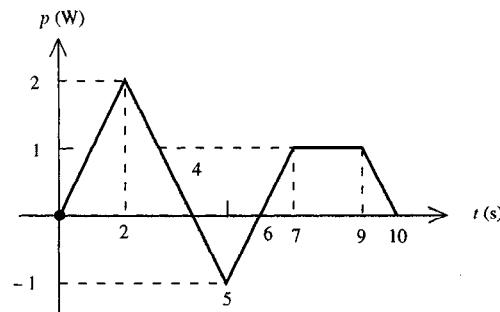
- 1.16.** Si $v_{s1} = 100$ V e $i_{s2} = -10$ A, ¿qué fuente está suministrando energía y cuál está disipándose? Permaneciendo i_{s2} fija para -10 A, ¿cómo podrá ser v_{s1} si 1000 J/h fueron suministrados por la fuente de corriente a la fuente de voltaje?



PROBLEMA P1.16

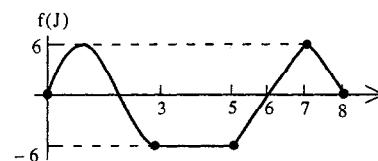
- 1.17.** Si una fuente de corriente y una fuente de voltaje están conectados al costado uno de otro como en el problema 1.16, ¿son los valores v_{s1} e i_{s2} para ambas fuentes que están suministrando igual a la potencia no cero de una y otra? Si es esto, ¿cuáles son los valores? Y si no, mostrar por qué no.

- 1.18.** La energía absorbida por un elemento de circuito está mostrada. ¿En qué tiempo está la energía neta en un máximo? ¿Cuál es el máximo valor de la energía neta?



PROBLEMA P1.18

- 1.19.** La energía neta $f(t)$ en joules absorbida por un elemento es mostrada en la figura [$f(t)$ igual a energía neta desde $t = -\infty$ al tiempo t]. $f(t) = 6 \sin \frac{\pi}{2}t$ para $0 \leq t \leq 3$ y siendo después la pieza lineal mostrada. ¿Cuál es la potencia pico suministrada al elemento? ¿Cuál es la potencia pico disipada por el elemento? ¿Es esto un elemento pasivo o activo?

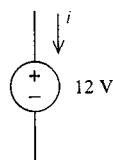


PROBLEMA P1.19

- 1.20.** Supongamos que un elemento cumple $v = Ki^p$ donde i y v satisfacen la convención de la señal pasiva, $K > 0$, y p es un número entero positivo. Encontrar esos valores de p para los cuales el elemento es pasivo.

1.21. Un elemento tiene una potencia a razón de 1 kW . Si el elemento satisface la ecuación $v = 2i + di/dt$, ¿cuál es el máximo voltaje $v(t)$ que necesitamos tener para atravesar el elemento si $i(t) = 4 \cos 2t \text{ A}$?

1.22. Un circuito interruptor se selecciona para abrirse si la corriente que atraviesa la fuente de voltaje alcanza los $\pm 20 \text{ A}$ (Esto es, si $|i| > 20$). Si la energía neta suministrada por la fuente desde $t = -\infty$ al tiempo t es 0 para $t < 1 \text{ s}$ y $10(\cos \pi t + 1) \text{ J}$ para $t \geq 1 \text{ s}$, ¿el circuito interruptor alguna vez se activará? Si es así, ¿cuándo se abrirá por primera vez?



PROBLEMA P1.22

1.23. Un cierto elemento con i y v satisfacen la convención de la señal pasiva y obedecen a la ecuación $i(t) = \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau + i(t_0)$. deseamos suministrar a este elemento 5 J de energía usando un voltaje constante entre $t = 0$ y $t = 1 \text{ s}$. ¿Cuál debería ser el valor de este voltaje? ¿Cuál es la potencia pico que necesitamos suministrar?

1.24. Una cierta batería con carga llena almacena $+5000 \text{ C}$ de carga. Si $i(t) = 2e^{-t} \text{ A}$ (t medido en segundos). ¿Cuánto tiempo se necesitará si posteriormente la batería se descarga completamente?

1.25. Cuando es cargada completamente una batería de coche almacena carga dependiendo de la temperatura. Si $q_0(T) = \frac{3}{4}T + 15$, donde $q_0(T)$ es la carga almacenada (unidades en kilocoulombs) y T es la temperatura Fahrenheit, ¿cuánto tiempo necesitamos para intentar poner en marcha el coche en una temperatura de 100°F ? Suponiendo que en cada intento nos lleva 10 s , jalando 90 A de corriente de la batería.

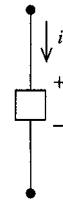
1.26. Un tostador eléctrico está conectado al voltaje de línea $v = 115\sqrt{2} \cos 120\pi t \text{ V}$ jalando una corriente de $i = 2\sqrt{2} \cos 120\pi t \text{ A}$. ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo de potencia disipada del tostador? ¿Cuánto tiempo toma al tostador disipar 6000 J de energía?

cia disipada del tostador? ¿Cuánto tiempo toma al tostador disipar 6000 J de energía?

Problemas más complejos

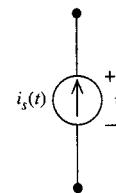
1.27. El potencial eléctrico en una distancia r a lo lejos de una cierta carga eléctrica es $20/r \text{ V}$ (r en metros). ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un $+1\text{-C}$ de carga de 1 m de distancia a 10 m ? Si el movimiento fue hecho en una velocidad uniforme arriba de 9 s , ¿cuál podría ser la máxima potencia requerida?

1.28. El elemento mostrado tiene la relación $v(t) = |i(t)|$ entre estos la corriente y el voltaje son variables. Esboza la potencia $p(t)$ si $i(t) = 10 \cos 2\pi t$. ¿Es el elemento activo o pasivo?



PROBLEMA P1.28

1.29. La potencia suministrada por una fuente de corriente independiente es $p(t) = 15e^{-2t} \text{ sen } t \text{ W}$ para $t \geq 0$. Si el voltaje que atraviesa la fuente es $v(t) = 30e^{-t} \text{ V}$ para $t \geq 0$, encontrar la función fuente $i_s(t)$ y determinar la energía total suministrada por la fuente para $0 \leq t < \infty$.



PROBLEMA P1.29

1.30. Determinar si el resto del circuito el cual describe la fuente en el problema 1.29 que está conectada es pasivo o activo. Justifica tu respuesta.



2

Circuitos resistivos



André Marie Ampère
1775-1836

A la primera le llamaré “tensión eléctrica” [voltaje] y a la segunda “corriente eléctrica”.

André Marie Ampère

El 11 de septiembre de 1820 se hizo el sorprendente anuncio ante la Academia Francesa de Ciencias sobre el descubrimiento del físico danés Hans Christian Oersted de que la corriente eléctrica produce un efecto magnético. Un miembro de la Academia, profesor de matemáticas francés, André Marie Ampère, se emocionó mucho y al cabo de una semana había repetido el experimento de Oersted; le dio una explicación matemática y, además, descubrió que las corrientes eléctricas en conductores paralelos ejercen una fuerza magnética de uno al otro.

Ampère nació en Lyon, Francia, y desde muy temprana edad empezó a leer las grandes obras de la biblioteca paterna. A los 12 años asistió a la biblioteca de Lyon, y como casi todas las mejores obras sobre matemáticas se escribían en latín, logró dominar esta lengua en unas cuantas semanas. A despecho de dos abrumadoras tragedias personales —a la edad de 18 años presenció la ejecución de su padre en la guillotina por los revolucionarios franceses, y luego su joven y bienamada esposa murió después de sólo cuatro años de matrimonio— Ampère fue un brillante y prolífico científico. Formuló muchas de las leyes de la electricidad y el magnetismo y se le considera el precursor de la electrodinámica. La unidad de corriente eléctrica, el *ampere*, tiene ese nombre en su honor desde 1881.

Contenido del capítulo

- **2.1 Leyes de Kirchhoff**
- **2.2 Ley de Ohm**
- **2.3 Subcircuitos equivalentes**
- **2.4 Series equivalentes y división de voltaje**
- **2.5 Equivalentes en paralelo y división de corriente**
- **2.6 Equivalentes de Thevenin y Norton**
- **Resumen**
- **Problemas**



El elemento en los circuitos más simples que se utiliza es la resistencia. Todos los conductores eléctricos exhiben propiedades características de una resistencia. Cuando fluyen corrientes por los conductores, los electrones que constituyen la corriente entran en colisión con la celosía o red de los átomos en el conductor. Esto impide o resiste el movimiento de los electrones. Mientras mayor sea el número de colisiones, mayor será la resistencia del conductor. En otros materiales la carga que llevan y el medio que los rodea pueden ser distintos donde los electrones libres fluyen a través de celosías de cristal, pero el principio de movimiento de la carga se resiste y permanece igual. Consideraremos que una resistencia es cualquier dispositivo que posee una resistencia eléctrica. Materiales como éstos suelen utilizarse en la fabricación de resistencias que incluyen aleaciones metálicas y compuestos de carbono; en el caso de las resistencias éstos se depositan en substratos de circuitos-integrados (chips), semiconductores.

En este capítulo, se introducen dos leyes generales que dominan el flujo de corriente y el patrón de voltajes en un circuito, éstas son la ley de corriente de Kirchhoff y la ley de voltaje de Kirchhoff. Después revisaremos la relación básica entre corriente y voltaje en resistencias, la ley de Ohm. Una vez que se conocen estas herramientas, se inicia el estudio del análisis sistemático de circuitos. Se introducen los conceptos fundamentales de circuitos equivalentes. Las simplificaciones de que se dispone mediante el uso de circuitos equivalentes se descubren, por consiguiente, en el contexto de series en paralelo y de equivalentes de Thevenin-Norton.

2.1

LEYES DE KIRCHHOFF

Para propósitos del análisis de circuitos, un circuito eléctrico se describe con base en dos características específicas: los elementos que contiene y cómo se interconectan. Para determinar el voltaje y la corriente resultantes no se requiere nada más.

En esta sección se consideran dos leyes básicas que determinó en 1847 el físico alemán Gustav Kirchhoff (1824-1887), quien en forma conjunta define cómo la interconexión de elementos los obliga a una posible corriente o voltaje. Estas leyes son válidas para circuitos que contienen elementos de todo tipo: resistencias, inductores, capacitores,

fuentes y otros. Estas leyes son la ley de corrientes de Kirchhoff y la ley de voltajes de Kirchhoff. Estas dos leyes de interconexión, junto con las leyes de elementos describen el comportamiento de cada elemento individual en el circuito, son todas las ecuaciones que se necesitan para el análisis sistemático de circuitos. La ley del elemento para una resistor y la ley de Ohm, se analizan en la sección siguiente, y los métodos de análisis sistemático de circuitos se estudian en el capítulo 4.

Nuestro desarrollo en las leyes de Kirchhoff no incluye pruebas rigurosas. Éstas son mejor explicadas en el contexto del estudio de los campos electromagnéticos, la teoría en que se basan las leyes de Kirchhoff. Para propósitos de la teoría de circuitos, son suficientes la definición de leyes y la justificación de su uso.

Un *circuito* consiste en dos o más elementos que se conectan mediante conductores perfectos. Los conductores perfectos son cables o alambres que permiten el flujo de corriente con cero resistencia (sin acumulación de carga o voltaje bajo a lo largo del cable, sin potencia o energía disipada). Para circuitos se define también que la energía puede considerarse como acumulada o concentrada, en forma completa en cada elemento del circuito, por lo que también el circuito se denomina *circuito de parámetros-concentrados*.

Un punto de conexión de dos o más elementos del circuito, junto con todo el cable¹ conectado sin lugares abiertos en este punto, se denomina *nodo*. En la figura 2.1(a) se muestra un ejemplo de un circuito con tres nodos. Hay dos formas de indicar los nodos en diagramas: encerrar en una línea punteada el nodo, como el nodo 1 y 3, o marcar con un punto en medio del nodo, como el nodo 2 de esta figura. Se puede utilizar cualquiera de los dos; es importante recordar que un nodo es todo el cable en contacto directo con un punto dado, por lo que dos puntos que son atravesados por un cable el cual está conectado a lo largo de éstos serán considerados partes del mismo nodo. Los puntos señalados como *a* y *b* en la figura 2.1(a) son parte del mismo nodo, designado como nodo 1. Estamos listos para estudiar todas las leyes importantes de Kirchhoff.

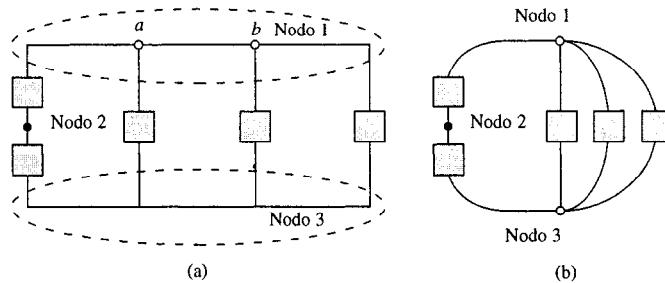


FIGURA 2.1 (a) Circuito de tres nodos; (b) mismo circuito en otro dibujo.

La ley de corriente de Kirchhoff (LCK) postula que:

La suma algebraica de las corrientes que entran por cualquier nodo son cero.

¹ Los alambres de elementos que se conectan de manera frecuente se les llama “cables” aunque pueden tomar completamente diferentes formas físicas. Por ejemplo, las pistas de los circuitos-integrados (chips) son angostas y poco profundas, conducen canales llamados *trazos* depositados dentro del substrato del chip.

Por ejemplo, las corrientes que entran al nodo de la figura 2.2 son i_1 , i_2 , $-i_3$, e i_4 (ya que i_3 sale, entonces $-i_3$ entra). Por lo tanto, al aplicar LCK para este caso se tiene

$$i_1 + i_2 + (-i_3) + i_4 = 0$$

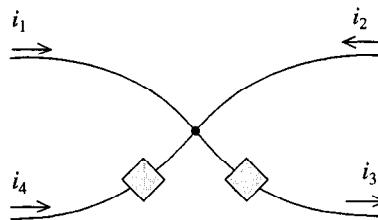


FIGURA 2.2 Corrientes fluyendo hacia un nodo.

En apoyo al argumento, supongamos que la suma sea diferente de cero. En tal caso tendríamos

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = \Psi \neq 0$$

donde Ψ tiene unidades de coulombs por segundo y por tanto debe ser la razón de cambio con la cual las cargas se acumulan en el nodo. Sin embargo, un nodo consta de conductores perfectos y no puede acumular carga. Además, un principio básico de la física establece que las cargas no pueden crearse ni destruirse (conservación de la carga). Por tanto, nuestra suposición no es válida, y Ψ debe ser cero, demostrando que la LCK es admisible. Por cada carga que entra al nodo, sale otra en forma inmediata, por lo que la corriente neta que entra y sale del nodo en un instante de tiempo es exactamente igual a cero.

Existen varias formas de enunciar las LCK, lógicamente todas son equivalentes, pero cada una expresa una pequeña diferencia. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación de la LCK por -1 obtenemos

$$(-i_1) + (-i_2) + i_3 + (-i_4) = 0$$

Si examinamos esta ecuación, cada término del lado izquierdo es una corriente que *existe* en el nodo. Al generalizar llegamos a la segunda forma de la LCK.

La suma algebraica de las corrientes que salen de cualquier nodo es cero.

Después, volvemos a arreglar la ecuación anterior en la forma

$$i_1 + i_2 + i_4 = i_3$$

donde las corrientes que tienen su dirección de referencia que entra al nodo son reunidas en un lado y las que salen del nodo en el otro lado. Todos los signos de menos desaparecen, y obtenemos la tercera forma de la LCK.

La suma de las corrientes que entran a cualquier nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

Dependiendo de la dirección de referencia de las corrientes que afectan a un nodo, una de estas tres formas puede ser utilizada de forma conveniente cuando es requerida una LCK. En general, una LCK puede ser expresada de forma matemática como

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (2.1)$$

donde i_n es la n -ésima corriente que entra (o sale) del nodo y N es el número de corrientes de nodo.

Ejemplo 2.1

Como un ejemplo de la LCK, encontremos la corriente i de la figura 2.3. Sumando las corrientes que entran al nodo, obtenemos

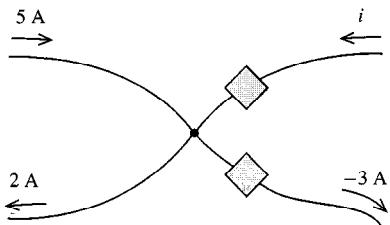


FIGURA 2.3 Ejemplo de la LCK.

$$5 + i - (-3) - 2 = 0$$

o bien

$$i = -6 \text{ A}$$

Observemos que i es -6 A que entran al nodo y es equivalente a 6 A que salen del mismo. Por tanto, no es necesario suponer la dirección correcta de la corriente cuando asignamos las direcciones de referencia de las corrientes variables. De todos modos llegamos a la respuesta correcta al final.

Podemos encontrar la corriente i de una manera más directa si observamos, que si i fluye entrando al nodo, debe ser igual a la suma de todas las demás corrientes si definimos que éstas fluyen saliendo del nodo (cambiando su dirección de referencia si es necesario), tenemos

$$i = -3 + 2 + (-5) = -6 \text{ A}$$

la cual coincide con la respuesta anterior.

Pasemos ahora a la ley de voltajes de Kirchhoff, la cual postula que

La suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero.

Para ilustrar lo anterior, apliquemos este postulado a la trayectoria cerrada $abcda$ de la figura 2.4, dando

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

donde el signo algebraico de cada voltaje se ha considerado positivo al ir de $+ \rightarrow -$ (de mayor a menor potencial) y negativo al ir de $- \rightarrow +$ (de menor a mayor potencial) al atravesar el elemento.

Como en el caso de la LCK, supongamos temporalmente lo contrario, que la suma no es cero. Es decir

$$-v_1 + v_2 - v_3 = \Phi \neq 0$$

donde Φ tiene unidades de volts y es igual a la diferencia de potencial que pasa entre el punto inicial y el punto final. Aunque esto es una trayectoria cerrada, los dos puntos son uno y lo mismo, además un nodo puede no tener diferencia de potencial en sí mismo.

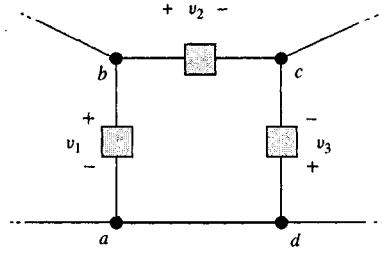


FIGURA 2.4 Voltajes alrededor de una trayectoria cerrada.

Esta suposición es inválida, y la forma admisible de la LVK es demostrada. La LVK es una parte del principio general de física en el que la diferencia de potencial a lo largo de una trayectoria cerrada en algún campo de energía conservativo suma cero. Los campos eléctricos producidos en los circuitos de parámetros-agrupados son dichos campos, (por ejemplo) el campo de gravedad. Si exploramos a lo largo de una trayectoria con partes altas y bajas, la suma de todas las altitudes variables alrededor de una trayectoria cerrada son cero, por esto regresamos a la altitud (potencial gravitacional) en el que empezamos.

Como en el caso de la LCK, hay dos declaraciones de importante valor de la LVK. Multiplicando cada lado en la *suma de los bajos voltajes* de la LVK por -1 obtenemos la *suma de los altos voltajes*.

La suma algebraica de las caídas de voltaje a lo largo de alguna trayectoria cerrada es cero.

La forma final de la LVK que se presenta cuando son encontrados los voltajes de $+ a -$ en la dirección del movimiento alrededor de la trayectoria cerrada son sumados en un lado de la ecuación y de $- a +$ en el otro lado, como en la malla de la figura 2.4, nos da

$$v_1 + v_3 = v_2$$

La suma de las caídas de voltaje es igual a la suma de las elevaciones de voltajes a lo largo de una trayectoria cerrada.

En general la LVK puede ser expresada de forma matemática como

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad (2.2)$$

donde v_n es el n -ésimo voltaje bajo (o alto) en una malla que contiene N voltajes. Los signos de los voltajes son anotados como en las ilustraciones: positivo cuando pasan de $+ a -$ en la suma de voltajes bajos o cuando pasan de $- a +$ en la suma de voltajes altos, y negativo cuando pasan en sentido opuesto.

Ejemplo 2.2

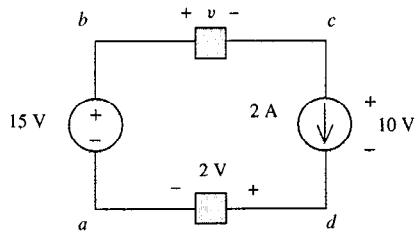


FIGURA 2.5 Circuito que ilustra la LVK.

Vamos a usar la LKV para encontrar v en la figura 2.5. Empezando el recorrido de la malla en el sentido de las manecillas del reloj en el punto a , usando la suma de las caídas de voltaje de la LVK, tenemos

$$-15 + v + 10 + 2 = 0$$

o $v = 3$ V. Con un recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj desde el punto b , obtenemos

$$+15 - 2 - 10 - v = 0$$

da el mismo resultado. La suma de las elevaciones de voltaje altos nos da como resultado estas mismas dos ecuaciones, la primera empieza el recorrido en el sentido opuesto de las manecillas del reloj en el punto b , la segunda empieza su recorrido en el sentido de las manecillas del reloj en el punto a . Por último, igualando los voltajes de caída y de elevación en el sentido de las manecillas del reloj, tenemos

$$v + 10 + 2 = 15$$

De manera clara, ninguna de estas ecuaciones es más explicativa que las otras. Su elección es de conveniencia a la izquierda o de alguna convención arbitraria. Todas las formas son iguales, por lo que adoptamos la convención del uso de la suma de las caídas de voltaje que empiezan su recorrido en el sentido de las manecillas del reloj.

Existe una situación común, sin embargo, donde la suma de las caídas de voltaje será muy útil. Supongamos que hay un simple voltaje desconocido en una malla, tal como v en la figura 2.5, el cual deseamos encontrar. Recorriendo la malla en la dirección $+a-$ del voltaje desconocido (en el sentido de las manecillas del reloj en la figura 2.5), sumando los voltajes de caída, igualándolos con cero y pasando todos los voltajes al otro lado de la ecuación a excepción del voltaje desconocido, tenemos

$$v = +15 - 2 - 10$$

donde el valor de v puede calcularse de manera inmediata. Si examinamos esta ecuación, el lado izquierdo es el voltaje de caída que va del punto b al punto c , mientras que el lado derecho es la suma negativa de voltaje de caída que va desde c hasta b , en otras palabras, es la suma de caídas de voltaje entre el punto b al c por una ruta alternativa (en el sentido opuesto de las manecillas del reloj) $badc$. En realidad, la caída de voltaje entre dos nodos es el mismo a pesar de la trayectoria usada al calcularla, en el caso presente tenemos

$$v = v_{bc} = v_{ba} + v_{ad} + v_{dc}$$

$$\text{o } v = 15 - 2 - 10 = 3 \text{ V}$$

De este modo, usando el principio según el cual *la caída de voltaje entre dos nodos es igual a la suma de caídas de voltaje entre los mismos nodos a lo largo de cualquier trayectoria*, una malla que contiene un simple voltaje desconocido puede de manera conveniente resolver y encontrar dicho voltaje.

Usando un mismo razonamiento, es fácil demostrar que *una corriente deseada dentro de un nodo es igual a la suma de las demás corrientes en el nodo, contando el flujo externo como positivo*. Esto puede ser usado para encontrar una sencilla corriente desconocida en un nodo y poder ser empleada para resolver el ejemplo final en la exposición de la LCK en esta sección.

Ejemplo 2.3

Vamos a utilizar la LCK y la LVK para encontrar todas las corrientes y voltajes desconocidos en la figura 2.6. Sumando las caídas de voltaje alrededor de la malla derecha en sentido de las manecillas del reloj,

$$v_1 + 5 + 3 + 2 = 0$$

$$\text{o} \quad v_1 = -10 \text{ V}$$

Repetiendo para la malla izquierda,

$$11 - v_2 - 9 - (-10) = 0$$

$$\text{o} \quad v_2 = 12 \text{ V}$$

En la ecuación de la malla izquierda tenemos que $v_1 = -10 \text{ V}$. Podemos encontrar v_2 sin conocer v_1 por la ecuación dada de la malla externa:

$$v_2 = -9 + 5 + 3 + 2 + 11 = 12 \text{ V}$$

Aquí la caída de voltaje que pasa por un elemento se junta a la suma de caídas de voltaje entre los mismos dos puntos a lo largo de otra trayectoria.

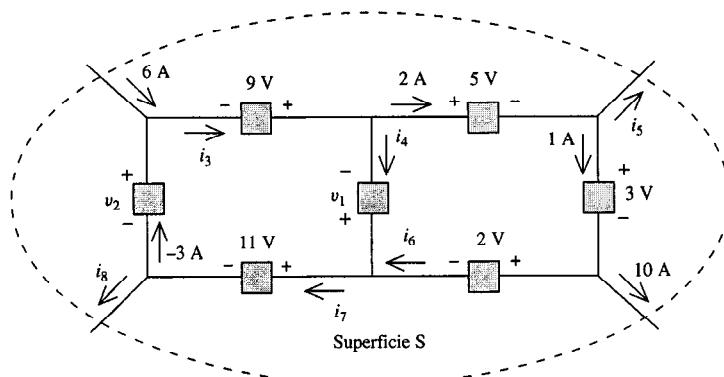


FIGURA 2.6 Circuito para el ejemplo 2.3.

Después determinamos las corrientes desconocidas. Desde la parte superior-izquierda del nodo, aplicando la LCK en que la suma de corrientes que entran es igual a la suma de corrientes que salen tenemos

$$i_3 = 6 + (-3) = 3 \text{ A}$$

Desde el nodo inmediato a la derecha, tenemos

$$i_4 = 3 + (-2) = 1 \text{ A}$$

donde i_4 fluye hacia afuera, 3 A y -2 A fluyen hacia dentro (+2 A que salen es igual a -2 A que entran). Desde el lado superior-derecho del nodo, obtenemos

$$i_5 = 2 + (-1) = 1 \text{ A}$$

mientras que desde la parte inferior derecha tenemos

$$i_6 = 1 + (-10) = -9 \text{ A}$$

Como final tenemos,

$$i_7 = i_4 + i_6 = -8 \text{ A}$$

$$\text{y} \quad i_8 = -(-3) + i_7 = -5 \text{ A}$$

Observamos que estas leyes de Kirchhoff son indiferentes a los *rastros* de los elementos que se hayan en un circuito; ellas solamente le dan importancia a la *topología* de circuitos, es decir cómo están interconectados los elementos.

Antes de concluir nuestro estudio de las leyes de Kirchhoff, observamos que si la suma de corrientes que entran a una región cerrada de un circuito, tal como está señalado por la superficie S de la figura 2.6, donde la carga no es cero, puede estar acumulada en algún lugar en esta área. Esto puede implicar una violación de la LCK en uno o varios nodos del área. Esto ilustra la forma generalizada de la LCK.

La suma algebraica de corrientes que entran a una superficie cerrada es cero.¹

Aplicando la LCK generalizada al circuito de la figura 2.6 podemos sumar las corrientes dentro de la superficie S e igualarlas a cero, como

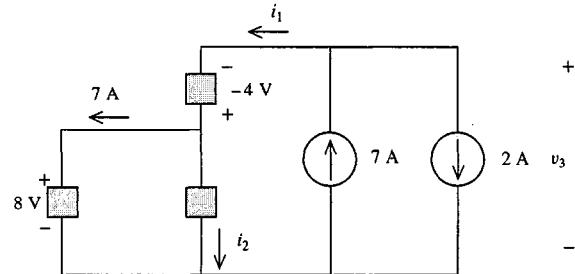
$$6 + (-i_5) + (-10) + (-i_8) = 0$$

En el ejemplo 2.3, los valores de i_5 e i_8 que fueron calculados usando la forma nodal de la LCK va a ser $i_5 = 1 \text{ A}$ e $i_8 = -5 \text{ A}$, que es consistente con el resultado.

EJERCICIOS

- 2.1.1.** Encontrar i_1 e i_2 .

Respuesta $i_1 = 5 \text{ A}$; $i_2 = -2 \text{ A}$



EJERCICIO 2.1.1

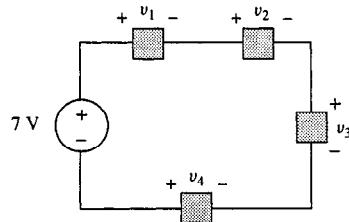
- 2.1.2.** En el circuito del ejercicio 2.1.1, encontrar v_3 .

Respuesta 12 V

¹ La superficie no puede pasar a través de un elemento, que es considerada a estar concentrada en un punto en las redes de parámetros-agrupados.

2.1.3. Dibuje una malla que satisfaga la ecuación $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 - 7 = 0$. Asuma que esta ecuación es la LVK en que la suma de las caídas de voltaje pasan en el sentido de las manecillas del reloj.

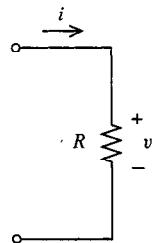
Respuesta



EJERCICIO 2.1.3

2.2 LEY DE OHM

Georg Simon Ohm (1787-1854), un físico alemán, tiene el crédito de la formulación de la relación corriente-voltaje en un resistor, basada en experimentos realizados en 1826. En 1827 publicó los trabajos en una ponencia titulada "La cadena galvánica, tratada matemáticamente". Por su trabajo, la unidad de resistencia se llama *ohm*. Sin embargo, es una ironía que Henry Cavendish (1731-1810), un químico inglés, hubiera descubierto los mismos resultados 46 años antes. Si no hubiera omitido la publicación de sus hallazgos, la unidad de resistencia bien hubiera podido llamarse *caven*.



La ley de Ohm postula que el voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la corriente que pasa por la resistencia. La constante de proporcionalidad es el valor de la resistencia en ohms. El símbolo de circuitos de la resistencia se muestra en la figura 2.7. Para el elemento la corriente i y el voltaje v definidos para satisfacer la convención de la señal pasiva introducida en la sección 1.3 (la flecha indica la dirección de referencia de la corriente que entra y el signo más al final de la dirección de referencia del voltaje), la ley de Ohm es

$$v = Ri \quad (2.3)$$

donde $R \geq 0$ es la resistencia en ohms.

El símbolo utilizado para representar el ohm es la letra griega mayúscula *omega* (Ω). Puesto que por (2.3), tenemos $R = v/i$ también en forma dimensional,

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$$

Ejemplo 2.4

Si $R = 3 \Omega$ y $v = 6 \text{ V}$ en la figura 2.7, la corriente es

$$i = \frac{v}{R} = \frac{6 \text{ V}}{3 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Si R es cambiada a $1 \text{ k}\Omega$ (usando los prefijos de potencia a la 10 de la Tabla 1.1), entonces con el mismo voltaje llegamos a la corriente

$$i = \frac{6 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 6 \text{ mA}$$

El proceso se abrevia para anotar esto $V/k\Omega = mA$, $V/M\Omega = \mu A$, y así sucesivamente.

Puesto que R es constante, (2.3) se describe una gráfica ($i-v$) de corriente-voltaje lineal, como está mostrado en la figura 2.8(a). Por esta razón, cuando una resistencia cumple la ley de Ohm se le llama *resistencia lineal*. Resistencias con características diferentes de $i-v$ son llamadas resistencias *no lineales*. En las resistencias no lineales, la resistencia varía en función de la corriente que fluye a través de ellas. Un ejemplo sería una ordinaria lámpara incandescente, en la que se muestra su típica gráfica $i-v$ en la figura 2.8(b). Dado que una serie de ecuaciones lineales son más fáciles de resolver que las serie de ecuaciones no lineales, la incorporación de resistencias no lineales dentro una red complica el análisis en forma drástica.

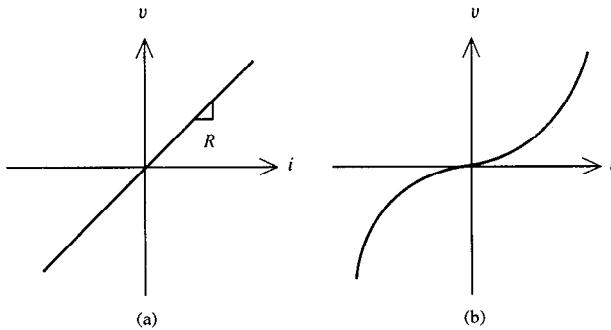


FIGURA 2.8 (a) Gráfica $i-v$ para un ejemplo de una resistencia lineal;
(b) gráfica $i-v$ para un ejemplo de una resistencia no-lineal.

En realidad, todas las resistencias prácticas son no lineales debido a que la resistencia es afectada por condiciones tales como la temperatura, que se relaciona con la corriente que fluyó o fluye a través del elemento (cuando la corriente fluye ocasiona calor). Muchos materiales, sin embargo, se aproximan bastante a resistencias lineales ideales en un rango limitado de corrientes y condiciones ambientales. En este texto nos centraremos de manera exclusiva sobre elementos lineales, incluyendo resistencias lineales (por lo que de aquí en adelante nos referiremos a ellas como “resistencias”). Implícito en la elección a concentrarnos en elementos lineales obtuvimos como resultado que nuestras ecuaciones y técnicas trabajarán solamente en un rango de operación limitado. De una resistencia de $1-k\Omega$ obtenida de un laboratorio se obtuvo 1 mA de corriente cuando se le aplicó un voltaje a través de una fuente de 1-V , pero no espere lo mismo en una resistencia de $1-k\Omega$ en la que fluye una corriente de 1 kA y se excita con una fuente de alimentación de 1-MV . Con toda seguridad usted medirá cero corriente, debido a que después de un impulso transitorio breve se quemará la resistencia dejando solamente un rastro de humo y un olor desagradable en el cuarto (o peor).

Empezamos a considerar la forma normal la ley de Ohm $v = Ri$ si la terminal variable satisface la convención de la señal pasiva. Si elegimos exponer esta ley usando variables que violen la convención, la forma que tome la ley de Ohm cambiará. En la figura 2.9, suponemos que vamos a utilizar las variables i y v_1 , y también i y v que son usadas en la figura 2.7, como elementos de corriente y voltaje variables, donde $v_1 = -v$. Despues, sustituyendo v_1 por v en $v = Ri$ llegamos a la ley de Ohm $v_1 = -Ri$. Ambas $v = Ri$ y esta última ecuación son expresiones válidas de la ley de Ohm. Para evitar el signo menos, tenemos que optar casi siempre por una corriente y voltaje variable del resistor satisfaga la convención de la señal pasiva.

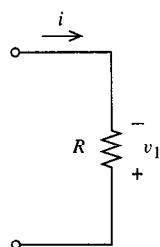


FIGURA 2.9 Resistencia con variables i y v_1 terminales sin cumplir la convención de la señal pasiva.

En la sección 1.4, los elementos pasivos fueron definidos como aquellos incapaces de suministrar energía positiva neta. Para resistencias la potencia instantánea es

$$p = vi = R i^2 = \frac{v^2}{R} \quad (2.4)$$

donde v e i tienen que ser asumidos a satisfacer la convención de la señal pasiva. Observe que, puesto que p es siempre positivo para un resistor ($R \geq 0$, y el cuadrado de i y v son además no negativos) entonces la energía neta disipada por un elemento, y la integral de esta potencia instantánea p , deben ser siempre no negativas. Así una resistencia en realidad satisface la definición de un elemento pasivo. Los resistores disipan, pero no suministran bajo ninguna circunstancia, potencia eléctrica o energía.

Otra cantidad importante muy útil en el análisis de los circuitos es conocida como *conductancia*, definida por

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.5)$$

La unidad SI para la conductancia es el *siemens*, representado por S, en honor a los hermanos Werner y William Siemens, dos notables ingenieros alemanes de las pos-trimerías del siglo XIX. Así, 1 S = 1 A/V. (Otra unidad de conductancia, usada ampliamente en los Estados Unidos, es el *mho*, que es ohm escrito al revés. El símbolo para el *mho* es la omega invertida.) Al combinar (2.3) a (2.5), vemos que la ley de Ohm y las fórmulas para la potencia instantánea pueden ser expresadas en términos de conductancia como

$$i = Gv \quad (2.6)$$

y

$$p = \frac{i^2}{G} = Gv^2 \quad (2.7)$$

Los conceptos importantes de corto circuito y circuito abierto pueden ser definidos en términos de resistencia. Un *corto circuito* es una resistencia de cero ohms, en otras palabras es un conductor perfecto capaz de llevar cualquier cantidad de corriente sin sufrir una caída de voltaje por donde pasa. Un *circuito abierto* es una resistencia de cero siemens de conductancia, en otras palabras es un perfecto aislante capaz de soportar cualquier voltaje sin permitir que fluya corriente a través de él. En forma clara de la (2.5), un circuito abierto es equivalente a una resistencia infinita o a un cable roto. Dos puntos pueden ser

corto-circuitados juntándolos con un cable, el que siempre vamos a asumir como conductor perfecto. Vamos a poder abrir un circuito en estos puntos quitando todos los conductos que lleven corriente-directa entre ellos.

Ejemplo 2.5

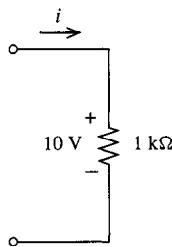


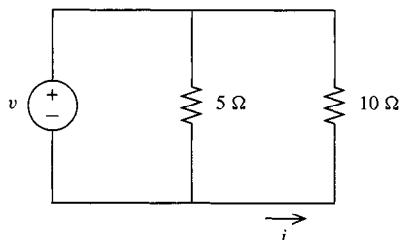
FIGURA 2.10 Circuito para el ejemplo 2.5.

Deseamos determinar la corriente i y la potencia p absorbidas por una resistencia de $1\text{-k}\Omega$ en la figura 2.10 y la energía que disipa cada media hora.

Puesto que i y v juntos satisfacen la convención de la señal pasiva, vamos a utilizar la ley de Ohm en la forma $v = Ri$. Entonces $i = 10\text{ V}/1000\ \Omega = 10\text{ mA}$ y $p = vi = (10\text{ V})(0.01\text{ A})$, o 100 mW . Puesto que esta potencia es constante cada media hora, el total de energía absorbida durante el periodo de t_0 a $t_1 = t_0 + (30\text{ min})(60\text{ s/min})$ s es, por (1.7),

$$w(t_1) - w(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} pdt \\ = (0.1\text{ W})(1800\text{ s}) = 180\text{ J.}$$

EJERCICIOS



EJERCICIO 2.2.3

- 2.2.1.** El voltaje terminal de una resistencia de $10\text{-k}\Omega$ es 5 V . Encontrar (a) la conductancia, (b) la corriente terminal, y (c) la potencia disipada.

Respuesta (a) 0.1 mS ; (b) 0.50 mA ; (c) 2.5 mW

- 2.2.2.** Un cable largo lleva 3 A de corriente mientras que disipa 72 W . ¿Cuál es la resistencia del cable y el voltaje bajo que cruza a lo largo de éste?

Respuesta $R = 8\ \Omega$; $v = 24\text{ V}$

- 2.2.3.** Encontrar (a) la corriente i y (b) la potencia suministrada a los resistores si $v = -100\text{ V}$.

Respuesta (a) $+10\text{ A}$; (b) 1 kW al resistor de $10\text{-}\Omega$, 2 kW al resistor de $5\text{-}\Omega$.

2.3

SUBCIRCUITOS EQUIVALENTES

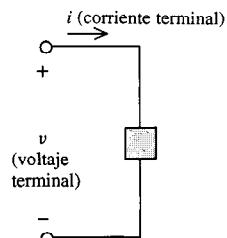


FIGURA 2.11
Subcircuito de dos-terminales. La región sombreada puede contener cualquier interconexión de elementos.

Una estrategia general que vamos a utilizar en el análisis de circuitos eléctricos es la *simplificación dondequiera que sea posible*. Veremos cómo mover una parte de un circuito, reemplazando éste con subcircuitos sencillos que contengan algunos elementos, sin alterar la corriente o voltaje que salen de esa región. El circuito simple puede ser analizado, y sus resultados pueden igualmente aplicarse al circuito original complejo. Tal labor es posible cuando el circuito original y los subcircuitos reemplazados son equivalentes el uno al otro en un sentido específico el cual será definido.

Un subcicuito es una parte de un circuito. Un subcicuito contiene un número de elementos interconectados, pero sólo dos terminales accesibles, por lo que es llamado *subcicuito de dos-terminales*. Ejemplos que incluyen elementos de dos-terminales están ilustrados en la figura 1.10 y cualquier circuito arbitrario en el que se tenga un par de cables se hará accesible para ser medido o para interconectarse con otros elementos. El voltaje que pasa a través y la corriente que entra en estas terminales son llamados *voltaje terminal* y *corriente terminal* del subcicuito de dos-terminales, como en la figura 2.11.

El comportamiento de un subcicuito de dos-terminales, que “hace” que cualquier circuito lo contenga, es descrito en forma completa por la *ley terminal*. La ley terminal está en función de la forma $v = f(i)$ o $i = g(v)$, donde i y v son las variables terminales.

Subcircuitos de dos-terminales que contienen solamente un simple elemento fueron introducidos en la sección 1.1. Para estos elementos sencillos del subcicuito, se les llamó *elementos de dos-terminales*, la ley de la terminal es también referida como la *ley del elemento*. La ley del elemento para una resistencia es la ley de Ohm, $v = f(i) = Ri$ [o $i = g(v) = Gv$]. La ley del elemento para la fuente de voltaje independiente de la figura 2.12(a) es, para la LVK, $v = v_s$. Esta ley del elemento es de la forma $v = f(i)$, donde la $f(i)$ es la constante¹ igual a v_s . La independencia del voltaje terminal v donde la corriente i fluye a través de la fuente es lo que caracteriza a este elemento como una fuente de voltaje ideal. La ley del elemento para la fuente de corriente independiente como la mostrada en la figura 2.12(b) es $i = i_s$ para la LCK. Una fuente de corriente independiente mantiene que esta corriente terminal i se especifique como una función fuente con valor i_s , a pesar de este voltaje terminal.

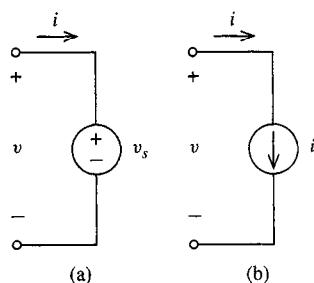


FIGURA 2.12 Elementos de fuente independiente. v_s , i_s son las funciones fuente y v , i las variables terminales.

Las leyes de las terminales para las fuentes de corriente y voltaje ideal son especificadas en términos de una sola terminal variable. Todos los demás elementos, tales como la resistencia y los subcircuitos con ciertos elementos, tienen leyes de terminales que son ecuaciones vinculadas a sus dos variables terminales. La ley de terminales es la necesaria para entender la acción de los elementos y los subcircuitos.

Vamos al punto central de este tema. *Subcircuitos con dos-terminales son considerados como equivalentes si tienen la misma ley de terminal*. Un subcicuito con la ley de terminal $v = f_1(i)$ y una segunda ley de terminal $v = f_2(i)$ son equivalentes si $f_1(i) = f_2(i)$ para cada i , o si $g_1(v) = g_2(v)$ para cada v .

Ejemplo 2.6

Vamos a encontrar las leyes de terminales para los dos subcircuitos de la figura 2.13. Eso para 2.13(a) es claramente $v = 2i$. En (b), por la ley de Ohm aplicada a cada resistor, $v_{21} = i$, $v_{22} = i$, y por la LVK, $v = v_{21} + v_{22}$ o $v = i + i = 2i$. Puesto que las leyes de terminales son idénticas, los subcircuitos en equivalentes en realidad.

¹ Constante significa que no depende de i . Las funciones fuente v_s e i_s pueden siempre variar con el tiempo, $v_s = v_s(t)$ e $i_s = i_s(t)$.

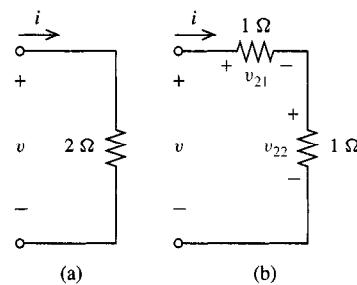


FIGURA 2.13 Subcircuitos equivalentes.

El significado del concepto de equivalencia es que los *subcircuitos equivalentes pueden ser libremente cambiados sin alterar su corriente o voltaje externo*. Suponemos que un circuito de dos-terminales *A* es movido desde un circuito a un subcircuito equivalente *B* insertado en este lugar como en la figura 2.14. Para alguna ecuación que tengamos que escribir para el circuito (a), debe de corresponder una ecuación idéntica y verdadera de (b). Por ejemplo, alrededor de la malla exterior vamos a tener para cualquiera de los dos casos

$$v_2 + v - v_3 - v_1 = 0$$

y reescribiendo esta ecuación en términos de corriente para aplicar las leyes de terminales tenemos,

$$5i_2 + f_1(i) - 5 - 4i_1 = 0$$

para (a) y

$$5i_2 + f_2(i) - 5 - 4i_1 = 0$$

para (b)

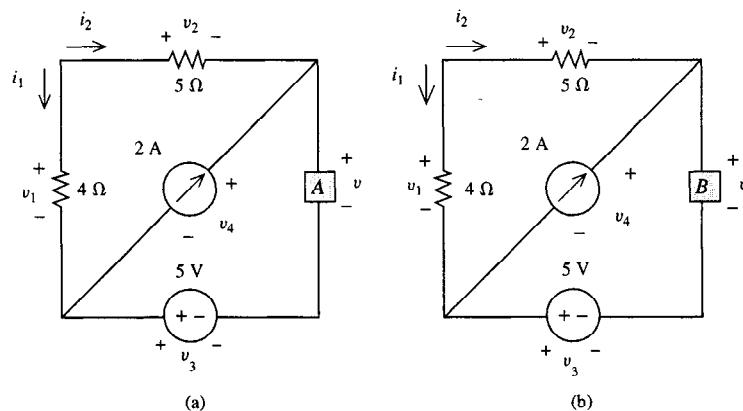


FIGURA 2.14 Subcircuitos equivalentes intercambiados.

Claramente, estas ecuaciones son idénticas solamente si los circuitos son equivalentes. Puesto que las ecuaciones corresponden a dos circuitos equivalentes y son idénticas, se necesitan sus soluciones. Concluimos que los circuitos equivalentes resultan en corrientes y voltajes iguales en un circuito al que ellos están conectados.

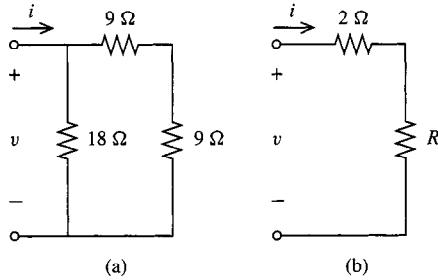
El concepto de equivalencia de circuitos nos demuestra su utilidad en simplificar problemas de circuitos. Procedemos por reemplazar algunos subcircuitos complejos por sencillos. Clases de circuitos equivalentes van a ser descubiertos en este capítulo incluyendo equivalentes serie-paralelo y Thevenin-Norton. La prueba para equivalencia siempre será identificada de las leyes de las terminales de dos subcircuitos.

Mientras las corrientes y voltajes *externos* de subcircuitos equivalentes no cambian cuando uno es intercambiado por otro en algún circuito, el comportamiento *interno* de los equivalentes puede ser diferente por completo. Por ejemplo, en el caso anterior no hay un elemento en la figura 2.14(b) con el mismo voltaje terminal como el elemento en la figura 2.14(a). Todo esto es protegido por su equivalencia es por esto que ellos pueden libremente intercambiarse en un circuito sin afectar alguna corriente o voltaje externo. Basado en sus efectos (corrientes y voltajes resultantes) en el resto del circuito, no hay forma de decir que haya dos equivalentes en el circuito.

Por último, mientras haya una diferencia práctica entre los términos subcircuito y circuito, de las partes frente al todo, se aclarará a menudo de lo que se está hablando en el contexto. Dondequiera que esto ocurra, usaremos libremente el término circuito para referirnos a cualquiera de los dos ya sea un circuito completo o un subcircuito; así, de este modo utilizaremos los términos circuito equivalente y circuitos de dos terminales. Sólo donde sea necesario enfatizar la parte incompleta de un circuito usaremos el término subcircuito.

EJERCICIOS

- 2.3.1.** Encontrar las leyes de terminales para los dos circuitos dibujados.
Respuesta (a) $v = 9i$; (b) $v = (2 + R)i$



EJERCICIO 2.3.1

- 2.3.2.** Encontrar el valor para R para que los dos circuitos del Ejercicio 2.3.1 sean equivalentes.
Respuesta $R = 7 \Omega$

- 2.3.3.** Encontrar un equivalente del circuito de dos-terminales mostrado en 2.3.1(a) contenido solamente un simple elemento.
Respuesta Resistor de 7Ω

Ahora que las leyes de Ohm y de Kirchhoff, así como la noción de circuitos equivalentes han sido introducidos, estamos preparados para analizar circuitos resistivos. Comenzamos con un *circuito sencillo*, el cual definimos como aquel que puede describirse por completo por una sola ecuación. Un tipo, el cual será considerado en esta sección, es un circuito consistente en una sola trayectoria cerrada, o malla, de elementos. Por la LCK, cada elemento tiene una corriente común, digámos i . Entonces la ley de Ohm y la LVK aplicada alrededor de la trayectoria producen una ecuación en i que describe por completo al circuito.

Dos elementos contiguos se dice que están conectados en *serie* si en su parte de nodo común no tiene otras corrientes que entran a él. Elementos no contiguos están en serie si cada uno de ellos está en serie con el mismo elemento. También las cadenas de elementos en serie pueden formarse en cualquier longitud. Por ejemplo, en la figura 2.15(a) las resistencias R_1 y R_2 están en serie debido a que ellos tienen un acceso único al nodo común; en forma similar, R_2 y R_3 están en serie. Puesto que R_1 y R_3 están ambos en serie con el mismo elemento R_2 , ellos están en serie tanto con uno como con el otro. Observamos esto, que por la LCK, elementos conectados en serie todos llevan la misma corriente.

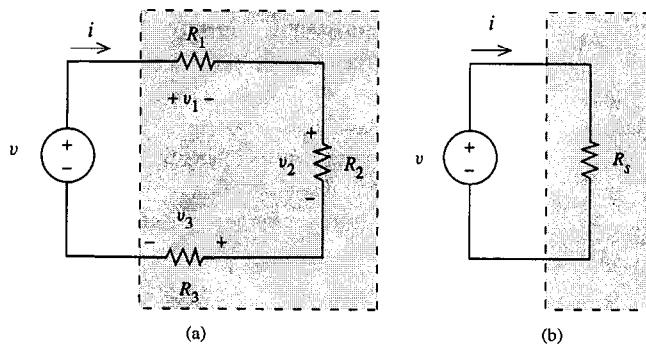


FIGURA 2.15 (a) Circuito de malla-simple; (b) circuito equivalente.

La redes de mallas-sencillas de esta sección consisten de manera íntegra de elementos conectados en serie. Considerando el primer circuito de la figura 2.15(a). El primer paso en el análisis de éste o cualquier circuito es el asignar las variables de corriente o voltaje, poniendo nombres y dirección de referencia, a cada elemento. Puesto que todos los elementos en la malla están en serie, llevan una corriente común, la cual vamos a marcar como i y le vamos a asignar la dirección de referencia en el sentido de las manecillas del reloj. Podemos tener asignado a ésta la dirección de referencia en sentido opuesto a las manecillas del reloj, tiene que ser de preferencia, al final para poder obtener las conclusiones pertinentes. Esto nunca es necesario si de alguna manera sugerimos la dirección de referencia "correcta" en orden hasta llegar a la respuesta correcta. La elección opuesta de la dirección de referencia para i solamente nos dará el resultado con el signo opuesto cuando se calcule este valor. Por tanto para cada número de I , I amps con el sentido de las manecillas del reloj es el mismo como $-I$ amps en el sentido opuesto de las manecillas del reloj, los dos resultados necesitan ser idénticos.

Como siguiente vamos hacer que las variables de voltaje v_1 , v_2 y v_3 se asigne a los resistores R_1 , R_2 , R_3 de manera respectiva. Observamos que estas direcciones de referencia de voltaje escogidas tienen que satisfacer la convención de la señal pasiva en conjunto con la dirección de referencia de la corriente escogida para su corriente común i . Esto nos

permite utilizar la ley de Ohm para los resistores sin algún signo de menos. Aplicando la LVK,

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

Aplicando la ley de Ohm a cada término en el lado derecho de esta ecuación y multiplicándolos por el factor común i ,

$$v = (R_1 + R_2 + R_3)i \quad (2.8)$$

Después, conociendo la función fuente v , podemos resolver la corriente i para la malla.

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.8) o (2.9) también cumplen la ley de terminales para el subcircuito de dos-terminales sombreado en azul en la figura 2.15(a), puesto que están ligadas a la corriente terminal i y al voltaje terminal v (por la LVK, v es tanto la función fuente de la fuente de voltaje como el voltaje terminal dentro de la región sombreada). Examinando la figura 2.15(b), la ley de la terminal de esta región sombreada es

$$v = R_s i$$

Comparando este resultado con la ecuación (2.8), observamos que estas leyes de terminales son idénticas; por tanto los dos circuitos sombreados de la figura 2.15 son equivalentes si R_s es la suma de las tres resistencias

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

De manera generalizada concluimos que, para N resistencias conectadas en serie tenemos,

$$R_s = \sum_{i=1}^N r_i \quad (2.10)$$

Una cadena de resistencias en serie es equivalente a una simple resistencia que es la suma de las resistencias en serie. Esta resistencia equivalente puede de forma fácil ser sustituido en cualquier circuito sin cambiar ninguna corriente o voltaje externo de los circuitos equivalentes de estos mismos.

Continuando con nuestro análisis de la figura 2.15(a), sustituimos la corriente de la ecuación (2.9) en la ley de Ohm $v_1 = R_1 i$ para la primera resistencia, obtenemos

$$v_1 = \frac{R_1}{R_s} v$$

De manera similar,

$$v_2 = \frac{R_2}{R_s} v$$

y

$$v_3 = \frac{R_3}{R_s} v$$

Observamos que estos voltajes están en proporción a sus resistencias. Este es el *principio de la división de voltaje: el voltaje que pasa a través de resistores en serie es dividido en proporción directa a sus resistencias*. Por esta razón, el circuito de la figura 2.15(a) se llama *divisor de voltaje*. Resistencias mayores tienen caídas de voltajes mayores en el divisor de voltaje.

Ejemplo 2.7

Buscar los valores para R_1 y R_2 en la figura 2.16 si el voltaje que pasa por R_2 es de 8 V. Con $v_2 = 8$, por la LVK $v_1 = 4$. Puesto que R_1 y R_2 forman un divisor de voltaje, sus voltajes están en proporción a sus resistencias. Entonces una razón de voltaje de $v_2/v_1 = 2$ requiere una razón de resistencia $R_2/R_1 = 2$. Despejando R_2 tenemos que $R_2 = 2R_1$, por lo tanto obtenemos que $R_1 = 1\Omega$ y $R_2 = 2\Omega$.

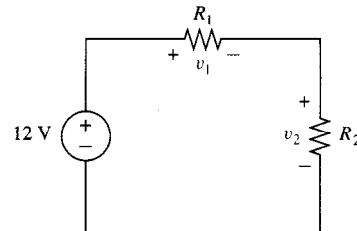


FIGURA 2.16 Ejemplo de divisor de voltaje.

Ejemplo 2.8

Como otro ejemplo, suponemos $v = 120 \text{ sen } t \text{ V}$ en la figura 2.17. Vamos a determinar la corriente de la malla, los voltajes resistivos, y la potencia disipada o entregada del elemento. Reemplazando las tres resistencias en serie por una equivalente de 60Ω , la corriente de la malla por la ley de Ohm es

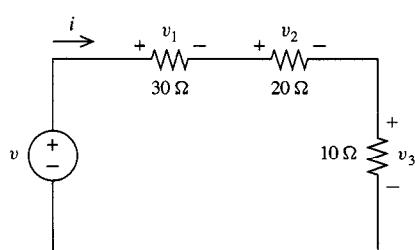


FIGURA 2.17 Circuito de malla-simple

Aunque no especificamos el uso del principio del divisor de voltaje, observamos que estos tres voltajes están en proporción a sus resistencias.

Después calculamos las potencias. Puesto que v_1 , v_2 y v_3 satisfacen cada uno la convención de la señal pasiva relativa a i , la potencia disipada para estos elementos es sólo su producto vi o

$$p_1 = v_1 i = 120 \text{ sen}^2 t \text{ W}$$

$$p_2 = v_2 i = 80 \text{ sen}^2 t \text{ W}$$

$$p_3 = v_3 i = 40 \text{ sen}^2 t \text{ W}$$

Observamos que estas potencias disipadas son también proporcionales a las resistencias. Estos resultados del principio del divisor de voltaje y de estos elementos en serie llevan una corriente común. Finalizando, i y v juntas violan la convención de la señal pasiva para la fuente (los puntos fuera de la dirección de referencia de la corriente, no están dentro del final del signo + de la dirección de referencia del voltaje). Así de este modo el producto vi significa que la potencia

instantánea es *suministrada*, y no disipada, por el elemento. Entonces la potencia entregada por la fuente es

$$vi = 240 \operatorname{sen}^2 t \text{ W}$$

Por lo que la potencia entregada en este circuito es igual, en cada instante de tiempo, de la potencia total disipada. Esto está ilustrado en el *teorema de Tellegen*, o conservación de la potencia eléctrica, la cual se estudia en el capítulo 10.

En forma posterior vamos a considerar la conexión en serie de N fuentes de voltaje como en la figura 2.18(a). Por la LVK, el voltaje total v es la suma algebraica de todas las funciones fuente:

$$v = v_{s1} + v_{s2} + \cdots + v_{sN}$$

Esto también es la ley de la terminal para un circuito de dos terminales. Comparando la ley de la terminal $v = v_s$ para la figura 2.18(b), concluimos que estas dos son equivalentes si

$$v_s = v_{s1} + v_{s2} + \cdots + v_{sN}$$

Una cadena de fuentes de voltaje son equivalentes a una simple fuente de voltaje donde la función fuente es la suma algebraica de las funciones fuentes en serie.

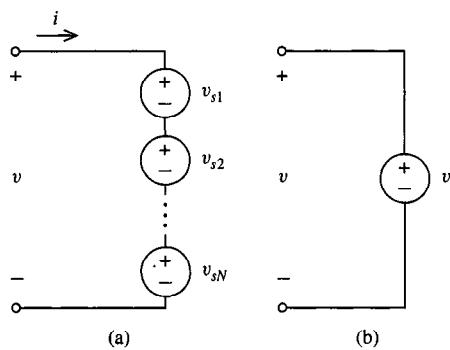


FIGURA 2.18 (a) Fuentes de voltaje en serie; (b) circuito equivalente.

Ejemplo 2.9

Encontrar i .

Puesto que las tres fuentes de voltaje están en serie, vamos a poder reemplazarlas por una simple fuente equivalente. Con las direcciones de referencia como están indicadas en la figura 2.19,

$$v_s = v_{ba} = -7 + 18 + 5 = 16 \text{ V}$$

donde $v_R = 16 = 4i$, de este modo $i = 4 \text{ A}$. Observamos que tenemos que asignar la dirección de referencia opuesta para la función fuente v_s , en el que en este caso podemos tener $v_s = -16 \text{ V}$ y $v_R + v_s = 0$, de este modo $v_R = +16 \text{ V}$ y otra vez tenemos $i = 4 \text{ A}$. Esto no es necesario si suponemos la óptima dirección de referencia para una función fuente equivalente; tenemos que hacerlo para ambos casos.

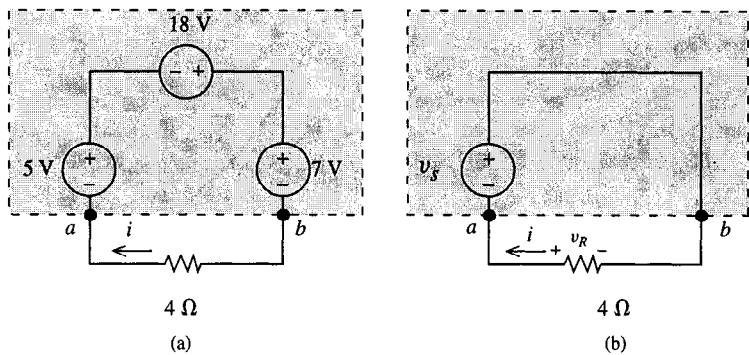


FIGURA 2.19 (a) Circuito de malla-simple; (b) circuito equivalente.

Por último, consideremos la interconexión en serie del último elemento encontrado en circuitos resistivos, la fuente de corriente. De la figura 2.20(a), tenemos $i_{s1} = i_{s2} = \dots = i_{sN}$, y en la parte superior del nodo i es igual a este valor común $i = i_{s1}$. De la figura 2.20(b), observamos $i = i_s$, y los circuitos son equivalentes si la función fuente simple i_s es igual al valor común de las funciones fuente de la corriente en serie.

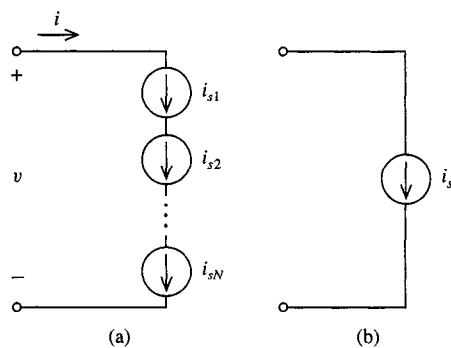


FIGURA 2.20 (a) Fuentes de corriente en serie; (b) circuito equivalente.

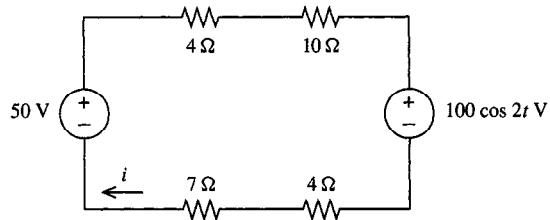
Pero, ¿qué pasará si las funciones fuente de la corriente en serie son dadas sin estar todas iguales? De manera aparente, se va a acumular carga en un nodo conectado a dos fuentes diferentes y la LCK va a ser violada. Sin embargo sabemos que esto no puede pasar, puesto que hemos acordado que esta LCK no puede ser violada por ningún circuito de parámetros-agrupados. Este es el caso de *suposiciones matemáticas inconsistentes*. Cualquiera de las dos leyes de elementos dadas son incorrectas o la LCK es violada. Una vez que la inconsistencia matemática es descubierta en algún problema presentado, no hay nada más que hacer que anotar esto y detenernos. Ecuaciones inconsistentes no pueden ser resueltas. En la realidad, si tuviéramos conectado en serie dos fuentes de corriente con funciones de fuente diferente, ellos no podrían comportarse como fuentes de corriente ideal donde sus corrientes fueran independientes de sus voltajes. Lo “dado” puede ser una parte de la ley del elemento, ocasionando las anteriores suposiciones de la consistencia.

Concluimos que *una cadena de fuentes de corriente en serie necesita tener funciones de fuente iguales, en que el caso de la cadena es equivalente a cualquiera de ellas. Si las funciones fuente dadas no son iguales, existe una inconsistencia matemática y el circuito no puede ser analizado.*

EJERCICIOS

- 2.4.1.** Reduce el circuito a dos elementos equivalentes, encuentra i y la potencia instantánea disipada por la fuente de 50-V.

Respuesta $2 - 4 \cos 2t$ A, $200 \cos 2t - 100$ W



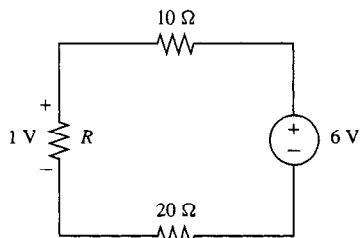
EJERCICIO 2.4.1

- 2.4.2.** Encuentre R .

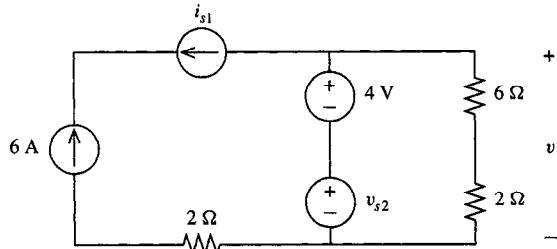
Respuesta 6Ω

- 2.4.3.** Encontrar los valores para i_{s1} y v_{s2} teniendo que $v = 4$ V.

Respuesta -6 A; 0 V



EJERCICIO 2.4.2



EJERCICIO 2.4.3

2.5

EQUIVALENTES EN PARALELO Y DIVISIÓN DE CORRIENTE

Otro importante circuito simple es el circuito resistivo con un solo par de nodos. Sólo como circuitos de malla-simple producen en forma natural las interconexiones seriales y divisores de voltaje, circuitos con un solo par de nodos son mostrados en esta sección llegando a igualar las ideas prácticas de interconexión paralela y división de corriente.

Dos elementos están conectados en *paralelo* si forman una malla sin contener otros elementos. Por la LVK, elementos en paralelo tienen el mismo voltaje que pasa por ellos. El circuito con un solo par de nodos de la figura 2.21 contienen tres resistencias y una fuente de corriente estando todos en paralelo, puesto que ningún par de los cuatro elementos forma una malla que contenga otros elementos.

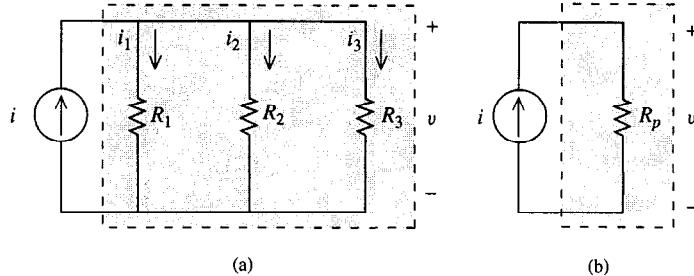


FIGURA 2.21 (a) Circuito con un solo par de nodos; (b) circuito equivalente.

Nombramos el voltaje común de estos elementos como v y definimos las corrientes resistivas a satisfacer la convención de la señal pasiva con respecto de v . Aplicando la LCK a la parte superior del nodo tenemos,

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Usando la ley de Ohm en la forma $i = Gv$ para cada término en el lado derecho de la ecuación y multiplicándolo por el factor de voltaje común tenemos,

$$i = (G_1 + G_2 + G_3)v \quad (2.11)$$

donde cada conductancia G_i es la inversa de la resistencia correspondiente R_i . Entonces, conociendo la función fuente de corriente i , podemos resolver para v :

$$v = \frac{i}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (2.12)$$

La ecuación (2.11) o (2.12) cumple también con la ley de la terminal para el circuito de dos-terminales sombreadas en azul en la figura 2.21(a), puesto que está ligada a la corriente terminal i y el voltaje v . La ley de la terminal para el circuito sombreado en la figura 2.21(b) en términos de la conductancia $G_p = 1/R_p$ es

$$i = G_p v$$

Comparando ésta con la ecuación (2.11), los dos circuitos sombreados de la figura 2.21 son equivalentes si G_p es la suma de las tres conductancias.

$$G_p = G_1 + G_2 + G_3$$

Generalizando llegamos a la conclusión que para N resistencias conectados en paralelo, *una serie de resistencias en paralelo son equivalentes a una resistencia simple en donde su conductancia es la suma de las conductancias paralelas*. Para señalar la resistencia equivalente tenemos

$$G_p = \sum_{i=1}^N G_i \quad (2.13)$$

donde $R_p = 1/G_p$ y recordando que $R_i = 1/G_i$ para cada i , tenemos la ecuación (2.13) en términos de las resistencias

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (2.14)$$

Una serie de resistencias en paralelo son equivalentes a una resistencia simple donde su valor es la inversa de la suma de las inversas de las resistencias en paralelo.

Esta ley inversa-inversa tiene una forma uniforme simple cuando $N = 2$. En este caso (2.14) favorece

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

o

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.15)$$

La resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo es el producto de sus resistencias divididas por la suma. Desgraciadamente, esta regla del *producto-por-la-suma* no se aplica de manera directa a la serie de más de dos resistencias en paralelo. En este caso, va a ser usada la ecuación (2.13) o (2.14).

Observamos que por la ecuación (2.13) esta suma de resistencias en paralelo pueden solamente incrementar la conductancia equivalente, en otras palabras decrece la resistencia equivalente. Poniendo resistencias en paralelo reduce por debajo de esto la resistencia total de alguno de ellos de manera individual. Para N igual a $R-\Omega$ resistores en paralelo, por la ecuación (2.14) $R_p = R/N$; en otras palabras poniendo N igual resistencias en paralelo reduce la resistencia por un factor de N .

Continuando nuestro análisis de la figura 2.21(a), sustituimos el voltaje de la ecuación (2.12) en la ley de Ohm en la forma $i_1 = G_1 v$ para el primer resistor, obtenemos

$$i_1 = \frac{G_1}{G_p} i \quad (2.16a)$$

De forma similar,

$$i_2 = \frac{G_2}{G_p} i \quad (2.16b)$$

$$\text{y} \quad i_3 = \frac{G_3}{G_p} i \quad (2.16c)$$

Observamos que estas corrientes están todas en proporción a sus conductancias. Este es el *principio de la división de corriente: la corriente que pasa por resistores paralelos se dividen en proporción directa a sus conductancias*. Por esta razón, el circuito de la figura 2.18(a) es llamado *divisor de corriente*. Pequeñas resistencias (mayores conductancias) tienen mayores flujos de corriente en un divisor de corriente.

Para dos resistencias en paralelo, $G_p = G_1 + G_2$ y las ecuaciones (2.16a) y (b) pueden ser reescritas en términos de las resistencias $R_1 = 1/G_1$, $R_2 = 1/G_2$, y $R_p = 1/G_p$ como en la ecuación (2.17a)

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad (2.17a)$$

y

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \quad (2.17b)$$

Para dos resistencias en paralelo, la corriente es dividida inversamente con sus resistencias. Observamos que hay que tener el mismo cuidado con esto que con la regla del producto-por-la-suma: éste trabaja sólo en el caso de dos resistores exactos en paralelo.

Ejemplo 2.10

Vamos a determinar cómo fueron entregados los 18 mA por una fuente divididos entre cuatro resistencias en la figura 2.22. Dadas sus resistencias, observamos que sus conductancias son $G_1 = 4 \text{ mS}$, $G_2 = G_3 = 2 \text{ mS}$, y $G_4 = 1 \text{ mS}$. Despues las corrientes van a ser, por el principio del divisor de corriente, en las siguientes proporciones 4 a 2 a 2 a 1, con R_1 teniendo la mayor corriente y R_4 la menor. La conductancia paralela equivalente es la suma

$$G_p = 4 + 2 + 2 + 1 = 9 \text{ mS}$$

y por la ecuación (2.16), para este caso de las cuatro resistencias en paralelo tenemos,

$$i_1 = \frac{G_1}{G_p} i = \frac{4}{9} (18 \text{ mA}) = 8 \text{ mA}$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_p} i = \frac{2}{9} (18 \text{ mA}) = 4 \text{ mA}$$

$$i_3 = \frac{G_3}{G_p} i = \frac{2}{9} (18 \text{ mA}) = 4 \text{ mA}$$

$$i_4 = \frac{G_4}{G_p} i = \frac{1}{9} (18 \text{ mA}) = 2 \text{ mA}$$

Observamos que estas corrientes están en proporciones previsibles (4:2:2:1).

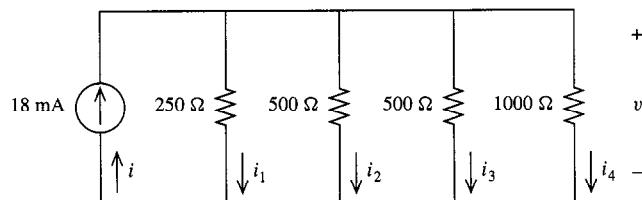


FIGURA 2.22 Ejemplo de divisor de corriente.

Continuando el ejemplo, vamos a ver cómo se divide la potencia. El voltaje v es encontrado desde la equivalente

$$v = \frac{i}{G_p} = \frac{18 \text{ mA}}{9 \text{ mS}} = 2 \text{ V}$$

o dividiendo cualquiera de sus corrientes resistivas calculadas arriba por la conductancia de este resistor. Entonces observamos que este v y cada corriente resistiva en la figura 2.22 satisfacen la convención de la señal pasiva, la potencia disipada en R_1 es

$$p_1 = vi_1 = (2 \text{ V})(8 \text{ mA}) = 16 \text{ mW}$$

De manera similar, p_2 y p_3 son encontrados siendo 8 mW y p_4 es 4 mW. Girando a la fuente, puesto que v e i juntas violan la convención de la señal pasiva para la fuente, la potencia suministrada por el elemento (es algo más que disipada por) está dada por el producto vi

$$vi = (2 \text{ V})(18 \text{ mA}) = 36 \text{ mW}$$

Así, de este modo los 36 mW producidos por la fuente son divididos entre las resistencias que comprenden la corriente dividida en la misma razón como las corrientes mismas, y la potencia suministrada es igual a la potencia disipada por el circuito entero.

Continuamos considerando las fuentes de corriente conectadas en paralelo. Estudiando la figura 2.23(a),

$$i = i_{s1} + i_{s2} + \dots + i_{sN}$$

mientras, que para la figura 2.23(b), $i = i_s$. La ley de la terminal se identifica si

$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \dots + i_{sN}$$

Una serie de fuentes de corriente en paralelo son equivalentes a una fuente de corriente simple donde su función fuente es la suma de las funciones fuente en paralelo.

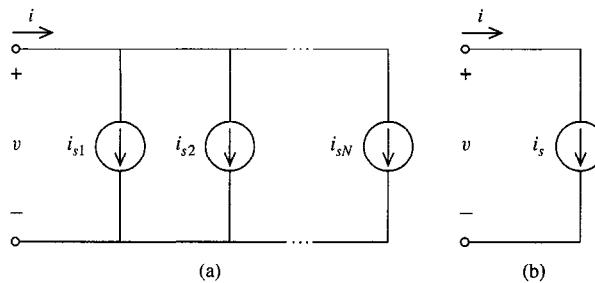


FIGURA 2.23 (a) Fuentes de corriente en paralelo; (b) circuito equivalente.

Ejemplo 2.11

Encontrar v e i_1 en la figura 2.24.

Puesto que las dos fuentes de corriente están en paralelo, pueden ser reemplazadas por una fuente de corriente equivalente como

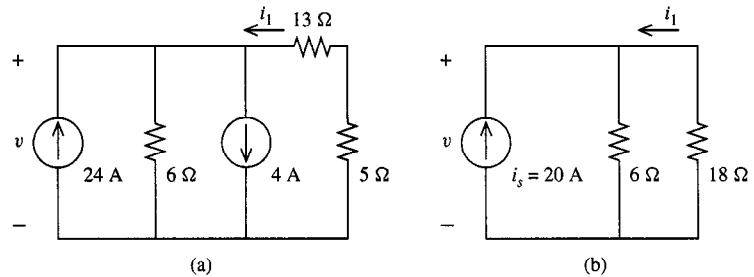


FIGURA 2.24 (a) Un circuito; y (b) su equivalente.

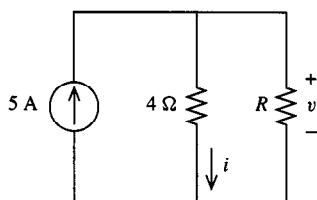
la mostrada. Observamos que, con la dirección de referencia seleccionada para la fuente equivalente, $i_s = +24 - 4 = +20$ A. Los dos resistores en serie son equivalentes al resistor simple de $18\text{-}\Omega$, que está entonces en paralelo con el resistor de $6\text{-}\Omega$, y por la regla del producto-por-la-suma para dos resistencias en paralelo,

$$R_{eq} = \frac{(18)(6)}{18 + 6} = \frac{9}{2}\Omega$$

Entonces $v = R_{eq}i_s = (9/2)(20) = 90$ V e $i_1 = -v/18 = -5$ A. Observamos aquí el signo de menos en la ley de Ohm, puesto que i_1 fluye afuera del final positivo de v y este par de variables violan la convención de la señal pasiva.

Finalizando, las fuentes de voltaje en paralelo son vulnerables a los problemas de inconsistencia matemática; esto lo observamos en la sección anterior con fuentes de corriente en serie. Si dos o más fuentes de voltaje en paralelo son todas iguales, podrán ser reemplazados por una fuente simple equivalente de valor común, y si no son iguales, entonces habrá una inconsistencia entre la LVK y las leyes de los elementos para estas fuentes. *Una serie de fuentes de voltaje en paralelo necesita tener iguales funciones fuente, en donde el caso de cualquiera de ellos serán equivalentes a la serie entera. Si las funciones fuente dadas no son todas iguales habrá una inconsistencia matemática y el circuito no podrá ser analizado.*

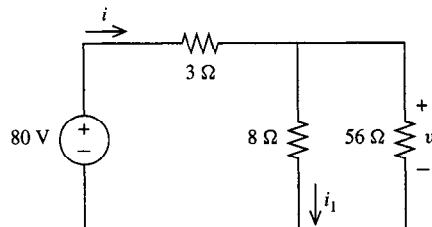
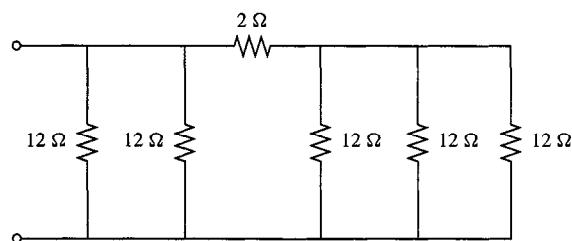
EJERCICIOS



EJERCICIO 2.5.1

- 2.5.1.** Encontrar R y v si $i = 1$ A
Respuesta 1Ω ; 4 V

- 2.5.2.** Determinar la resistencia equivalente de este circuito.
Respuesta 3Ω



EJERCICIO 2.5.4

EJERCICIO 2.5.2

2.5.3. Deseamos construir una resistencia equivalente $6/5\text{-}\Omega$ colocando algún número de resistores N_1 de $100\text{-}\Omega$ y algún número de resistores N_2 de $3\text{-}\Omega$ todos en paralelo. ¿Cuántos se necesitan de cada uno?

Respuesta $N_1 = 50; N_2 = 1$

2.5.4. Encontrar la resistencia equivalente vista por la fuente y utilizada por ésta para encontrar i , i_1 , y v .

Respuesta $10 \Omega; 8 \text{ A}; 7 \text{ A}; 56 \text{ V}$

2.6 EQUIVALENTES DE THEVENIN Y NORTON

Los equivalentes series y paralelos descritos hasta este momento son limitaciones de elementos del mismo tipo: resistencias en serie con otras resistencias, fuente de corriente en paralelo con fuentes de corriente. En esta sección vamos a desarrollar un par de equivalentes, llamados formas de Thevenin y Norton, conteniendo ambos, resistencias y fuentes. Son demostrados para ser de gran utilidad en la simplificación de cualquier análisis de problemas de circuitos.

Consideremos el par de circuitos de dos-terminales mostradas en la figura 2.25. Aplicando la LVK a (a),

$$v = -R_T i + v_T \quad (2.18)$$

mientras que la LCK se aplica también a la parte superior del nodo de (b) obtenemos

$$i_N = i + \frac{v}{R_N} \quad (2.19a)$$

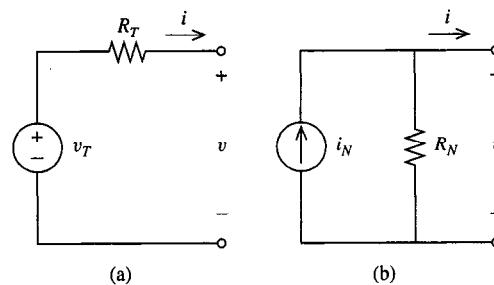


FIGURA 2.25 (a) Forma de Thevenin y (b) subcircuitos en la forma de Norton.

Resolviendo lo último para v ,

$$v = -R_N i + R_N i_N \quad (2.19b)$$

Comparando la ley de la terminal para el circuito (a) dado en la ecuación (2.18) como con la (b) en la ecuación (2.19b), son idénticas y de este modo los circuitos son equivalentes si $R_T = R_N$ y $v_T = R_N i_N$. El circuito de la figura 2.25(a) es llamado *la forma de Thevenin, una combinación en serie de una fuente de voltaje equivalente de Thevenin v_s y una resistencia equivalente de Thevenin R_T* , y en la figura 2.25(b) la *forma de Norton, una combinación en paralelo de una fuente de corriente equivalente de Norton i_N y una resistencia equivalente de Norton R_N* .

La forma de Thevenin con una fuente de voltaje v_T y una resistencia en serie R_T es equivalente a la forma de Norton con una fuente de corriente i_N y una resistencia en paralelo R_N , si

$$\begin{aligned} &(a) \quad R_T = R_N, \quad \text{y} \\ &(b) \quad v_T = R_N i_N \end{aligned} \quad (2.20)$$

De nuestro tema anterior de equivalencias tratado en la sección 2.3, sabemos que dos subcircuitos equivalentes pueden ser fácilmente intercambiados en cualquier circuito sin alterar alguna corriente o voltaje externo de los subcircuitos. Si esto es a nuestro favor, podemos reemplazar la forma de Thevenin por la forma de Norton (o viceversa) antes de calcular la corriente o voltaje deseado.

El siguiente ejemplo muestra cómo esto lo podemos hacer a nuestro favor.

Ejemplo 2.12

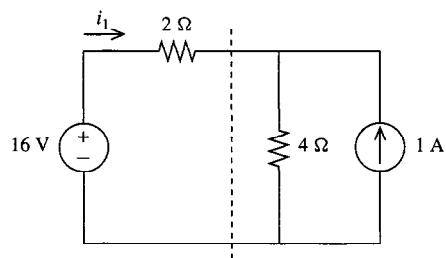


FIGURA 2.26 Circuito para el ejemplo 2.11.

Encontrar i_1 en la figura 2.26.

Primero, reemplazamos la forma de Norton a la derecha de la línea punteada por su equivalente de Thevenin. Puesto que $R_N = 4 \Omega$ e $i_N = 1 \text{ A}$, para ser equivalente requerimos que $R_T = 4 \Omega$ y $v_T = (4)(1) = 4 \text{ V}$. Realizando este intercambio, tenemos el circuito de la figura 2.27(a). Esta red de malla-sencilla puede ser nuevamente simplificada combinando las resistencias en serie y las fuentes en serie, obtenemos el circuito de la figura 2.27(b). Para este circuito, $i_1 = 12/6 = 2 \text{ A}$. Observamos que estas simplificaciones en serie adicionales no son posibles antes de la transformación Thevenin-Norton.

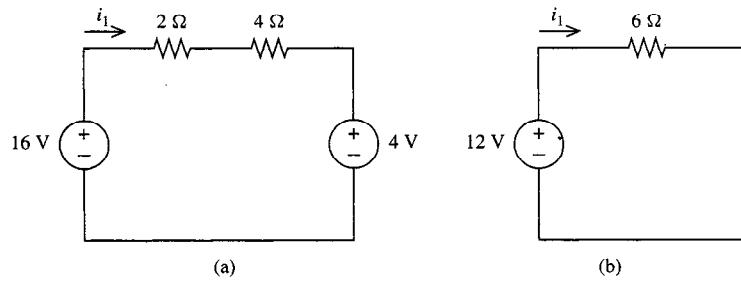


FIGURA 2.27 (a) Circuito de la figura 2.26 después de la transformación de Thevenin-Norton; (b) elementos en serie resumidos.

Como siguiente paso vamos a considerar un circuito resistivo con dos terminales arbitrario con la ley de la terminal $v = f(i)$ como está mostrado en la figura 2.28(a). Comparando la ley de la terminal con la forma de Thevenin. La ecuación (2.18), los dos circuitos de la figura 2.28(a) y (b) son equivalentes si

$$f(i) = -R_T i + v_T \quad (2.21)$$

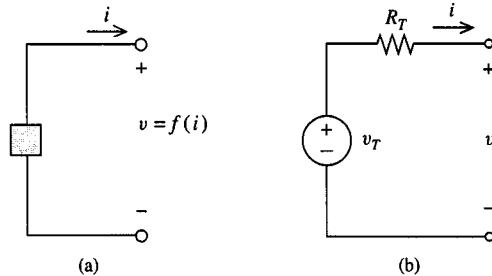


FIGURA 2.28 (a) Circuito de dos-terminales; (b) forma de Thevenin.

Dando $f(i)$, podemos encontrar el elemento superior ($-R_T$) y mientras los valores interceptados de (v_T) satisfacen este requisito la ley de la terminal $v = f(i)$ describe una línea recta. Esto siempre será en el caso con circuitos resistivos de interés aquí, que sólo contengan resistores lineales y fuentes independientes. Estos resultados desde la linearidad de las leyes de Kirchhoff y las leyes de los elementos nos dan como conclusión que las combinaciones de las ecuaciones lineales permanecen siempre de manera lineal.

La ecuación (2.21) se concluyó por la selección de R_T y v_T así, de este modo la parte superior de $f(i)$ es igual a $-R_T$ y la intersección es v_T . La forma de Thevenin resultante, de la figura 2.26(b), es entonces equivalente al circuito dado, de la figura 2.26(a). El equivalente de Norton puede ser encontrado hallando primero el equivalente de Thevenin y después realizar la transformación de Thevenin-Norton descrita por la ecuación (2.20). O el equivalente de Norton puede ser encontrado de manera directa igualando la parte superior de $f(i)$ a $-R_N$ y la intersección a $R_N i_N$.

Ejemplo 2.13

Se requiere el voltaje v_0 de la figura 2.29(a). Primero simplificamos el circuito reemplazando el circuito del lado derecho de la línea punteada por su equivalente de Norton. Para hacer esto, calculamos su ley de la terminal. Por la LCK,

$$i_1 = 10 + i - 6 = i + 4$$

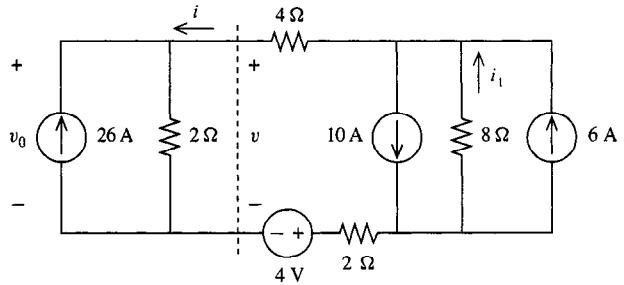
y por la LCK

$$v = -4i - 8i_1 - 2i + 4$$

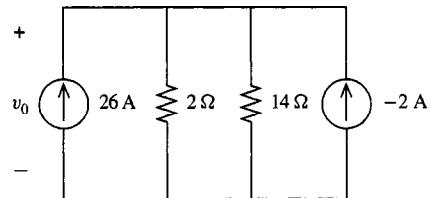
Combinando ambas, tenemos la ley de la terminal

$$v = -14i - 28$$

Entonces por la forma de Thevenin equivalente tenemos que $R_T = 14 \Omega$ y $v_T = -28$ V, y por la forma equivalente de Norton tenemos que $R_N = R_T = 14 \Omega$ e $i_N = v_T/R_N = -2$ A. Seleccionamos la forma de



(a)



(b)

FIGURA 2.29 Circuito para el ejemplo 2.13.

Norton y después el circuito es reemplazado, como se muestra en la figura 2.29(b). Éste es un circuito simple del tipo de -un-solo-par-de-nodos, por la LCK

$$26 - 2 = \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{14}$$

$$\text{o } v_0 = 42 \text{ V.}$$

Como ilustra este ejemplo, un circuito con varios elementos teniendo equivalentes de Thevenin y Norton puede llegar a tener sólo dos elementos. Si reemplazamos el circuito original por su equivalente de dos-elementos se tiene el efecto deseado de la simplificación del circuito.

Si damos la ley de la terminal para un circuito, esto facilita el encontrar los equivalentes de Thevenin y Norton. En ejemplos anteriores hayamos la ley de la terminal desde el diagrama de un circuito aplicando las leyes de Kirchhoff y las leyes de los elementos. Esto puede ser más conveniente para determinar de forma directa los equivalentes del diagrama del circuito. Asignando $i = 0$ en la ecuación (2.21) tenemos,

$$f(0) = v_T \quad (2.22)$$

Por la ley de la terminal $v = f(i)$, $f(0)$ necesita ser el voltaje terminal del circuito dado cuando su corriente terminal i sea cero. Puesto que ninguna corriente puede fluir si las terminales del circuito están abiertas, $f(0)$ es llamado el *voltaje del circuito-abierto* $v = v_{oc}$ del circuito, y vemos que por la ecuación (2.22) este voltaje equivalente de Thevenin v_T es igual al voltaje del circuito-abierto del circuito. Si en cambio las terminales abiertas-del-circuito las corto-circuitamos fluirá una *corriente de corto-circuito* $i = i_{sc}$. Puesto que $v = f(i)$, y a través de un corto circuito no hay voltaje $v = 0$, la ecuación (2.21) en el caso de un corto-circuito será

$$0 = -R_T i_{sc} + v_T \quad (2.23)$$

que será resuelta por R_T . Combinando estos dos resultados,

Dando un subcircuito con un voltaje v_{oc} de circuito-aberto y una corriente i_{sc} de corto-circuito, su equivalente de Thevenin puede ser encontrado de

$$(a) \quad v_T = v_{oc} \quad y \quad (2.24a)$$

$$(b) \quad R_T = v_{oc}/i_{sc}$$

Utilizando la ecuación (2.20) no permite la traducción de estos resultados a la forma de Norton.

Dando un subcircuito con un voltaje de circuito abierto v_{oc} y una corriente de corto-circuito i_{sc} sus equivalentes de Norton pueden ser encontrados de

$$(a) \quad i_N = i_{sc} \quad y \quad (2.24b)$$

$$(b) \quad R_N = v_{oc}/i_{sc}$$

Ejemplo 2.14

Encontrar los equivalentes de Thevenin y Norton para el circuito de la figura 2.30.

Para encontrar v_{oc} , asumimos que las terminales del circuito están abiertas, en otras palabras $i = 0$. Después, sin corriente en el resistor 6Ω , por la división de voltaje

$$v_1 = \left(\frac{12}{16} \right) 24 = 18 \text{ V}$$

y por la LVK alrededor de la malla izquierda $v = v_{oc} = 0 + 18 = 18 \text{ V}$. Así, de este modo la fuente de voltaje equivalente de Thevenin es $v_T = v_{oc} = 18 \text{ V}$. Para encontrar i_{sc} , asumimos que las terminales están corto-circuitadas, $v = 0$. Después las dos resistencias agrupadas del lado izquierdo están en paralelo (forman una malla que no contiene otras caídas de voltaje), y por la regla de producto-por-la-suma

$$R_{eq} = \frac{(12)(6)}{12 + 6} = 4 \Omega$$

En este caso v_1 es, por la división de voltaje de 24 V entre los dos resistores de 4Ω ,

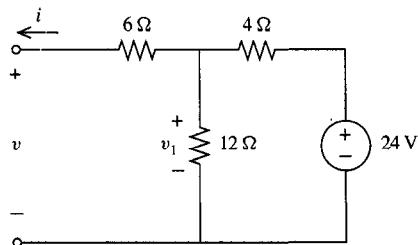
$$v_1 = \frac{4}{8} 24 = 12 \text{ V}$$

Puesto que v_1 es también el voltaje que pasa por el resistor de 6Ω sobre estas condiciones de corto-circuito, por la ley de Ohm $v_1 = 6i$. Entonces, resolviendo para $i = i_{sc}$,

$$i_{sc} = \frac{v_1}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

Por lo tanto $R_T = v_{oc}/i_{sc} = 18/2 = 9 \Omega$. La forma de Thevenin corresponde a la forma de Norton ($R_N = R_T = 9 \Omega$, $v_T = v_{oc} = 18 \text{ V}$, $i_N = i_{sc} = 1/2 \text{ A}$) como está mostrado en la figura 2.31.

FIGURA 2.30 Circuito para el ejemplo 2.14.



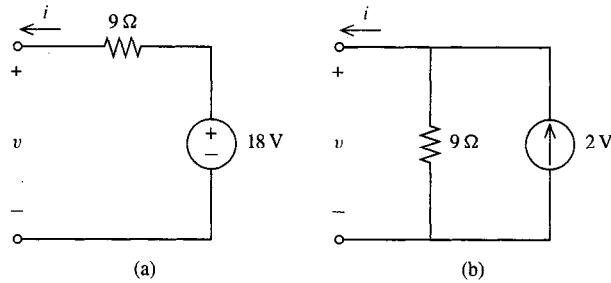


FIGURA 2.31 (a) Equivalente de Thevenin; (b) equivalente de Norton.

Hay otra forma de encontrar la resistencia común $R_T = R_N$ en las formas de Thevenin y Norton, que es más fácil que calcular la razón del voltaje de circuito-aberto v_{oc} y la corriente corto-circuitada i_{sc} . Regresando a la ecuación (2.20) y recordando que $f(i)$ para circuitos resistivos lineales describe una relación de línea-recta, observamos que si todas las fuentes internas independientes de un circuito se fijan a cero (se “suprime”, para usar más terminología gráfica), esto puede hacer que la intersección de esta línea recta sea cero; esto es, la ley de la terminal $v = -R_T i + v_T$ llega a su forma simple $v = -R_T i$. Estos resultados nos demuestran que, en la ausencia de fuentes internas, el voltaje de circuito abierto v_{oc} necesita ser cero, puesto que no hay una fuente de potencia que se quede para crear algunas corrientes o voltajes en algún lugar del subcircuito. Entonces, con todas las fuentes internas suprimidas, y definiendo $i' = -i$, tenemos $v = -R_T / (-i')$ o

$$R_T = v/i'|_{\text{fuentes suprimidas}} \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) sugiere que R_T (o R_N) *puede ser calculada como una resistencia que aparece en las terminales de una subred cuando todas las fuentes internas tengan que ser suprimidas*. El signo cambia $i' = -i$ siendo necesario crear un par de terminales variables (i' , v) y que éstas satisfagan la convención de la señal pasiva así, de este modo la ley de Ohm se queda sin signo de menos.

Observamos que estas fuentes suprimidas significan que están fijando sus funciones fuente a cero. Puesto que una fuente de voltaje de 0-V es sencilla en un corto circuito, *fuentes de voltaje independientes que son suprimidas se reemplazan por cortos circuitos*. De manera similar, puesto que una fuente de corriente de 0-A está en un circuito abierto, las fuentes de *corriente independiente suprimidas son reemplazadas por circuitos abiertos*.

Ejemplo 2.15

Considerando el circuito de la figura 2.30. Después de suprimir las fuentes internas, tenemos el circuito mostrado en la figura 2.32. La resistencia mostrada dentro de estas terminales es encontrada por la combinación de los resistores de 12Ω y 4Ω en paralelo en una

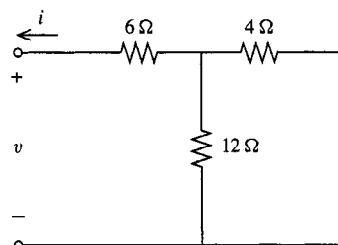


FIGURA 2.32 Circuito para el ejemplo 2.15.

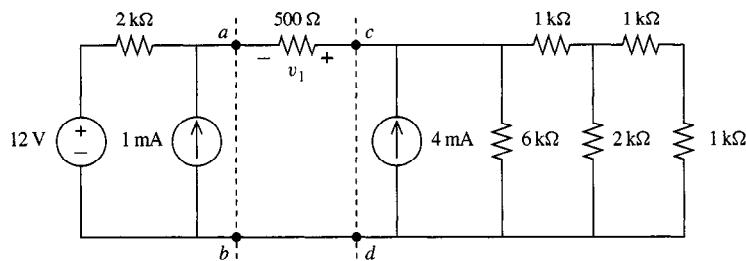
equivalente simple de 3Ω y sumando ésta a la resistencia de 6Ω dicha equivalente está en serie, con lo que obtenemos $R_T = R_N = 9\Omega$. Coinciendo esto con nuestro cálculo anterior en el ejemplo 2.14.

Encontrar las equivalentes de Thevenin-Norton para un circuito dado no es ni más ni menos difícil tan sólo hay que encontrar alguna de las dos de su voltaje de circuito-abierto, corriente de corto-circuito, y mostrando la resistencia con las fuentes internas suprimidas. Si los circuitos contienen varias mallas y nodos, esto todavía no puede dejarnos claro cómo encontrar estas cantidades. Los métodos sistemáticos para encontrar cualquier corriente o voltajes en algún circuito van a ser desarrollados en el capítulo 4. Por ahora nos conformamos con estar conscientes del poder de los equivalentes de Thevenin y Norton para simplificar el análisis de circuitos y ser capaces de calcular y además utilizar estas equivalentes en circuitos sencillos.

EJERCICIOS

2.6.1. Encontrar el equivalente de Thevenin del circuito de la derecha de la línea cd .

Respuesta $v_T = 6\text{ V}$; $R_T = 1.5\text{ k}\Omega$



EJERCICIO 2.6.1

2.6.2. Repetir el ejercicio 2.6.1 para el circuito de la derecha de la línea ab .

Respuesta $v_T = 14\text{ V}$; $R_T = 2\text{ k}\Omega$

2.6.3. Usar los resultados de los ejercicios anteriores para encontrar v_1 .

Respuesta -1 V

RESUMEN

El comportamiento de un circuito eléctrico es una consecuencia de dos factores: los comportamientos individuales de cada elemento que se hayan en el circuito, y la manera en que son interconectados. Hay dos leyes de interconexión, las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff. Cada tipo de elemento tiene sus leyes características del elemento (o $i-v$), una ecuación implica a sus terminales variables. Este capítulo introduce dos elementos, resistencias y fuentes independientes que, cuando son interconectados, forman circuitos resistentivos. Otros van a ser introducidos en capítulos posteriores.

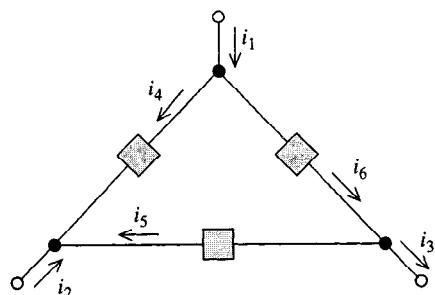
- La LCK afirma que la corriente neta que entra a un nodo o región es cero.
- La LVK afirma que la caída de voltaje neta alrededor de una malla cerrada es cero.

- La ley de $i-v$ para resistencias, la Ley de Ohm, es $v = Ri$, en donde R es la resistencia en Ohms, y es válida mientras i y v satisfacen la convención de la señal pasiva.
- Las resistencias son elementos pasivos, esto es, no pueden suministrar potencia.
- Dos subcircuitos son equivalentes si tienen la misma ley $i-v$. Subcircuitos equivalentes pueden de manera fácil ser intercambiados sin cambiar alguna variable externa. Son incluidos ejemplos de equivalentes serie-paralelo y Thevenin-Norton.
- Son añadidas resistencia en serie y conductancia en paralelo.
- La resistencia en paralelo cumple la ley recíproca-recíproca: la resistencia equivalente corresponde a la suma de las correspondientes resistencias en paralelo.
- Voltajes en serie se dividen en proporción a su resistencia, corrientes en paralelo se dividen en proporción a su conductancia (o inversamente proporcional a su resistencia).
- Una forma de Thevenin es la interconexión en serie de la fuente de voltaje y un resistor en un circuito de dos-terminales y una forma de Norton es la interconexión en paralelo de la fuente de corriente y un resistor.
- Cualquier subred de dos-terminales tienen una forma equivalente Thevenin y una forma equivalente de Norton. Éstas pueden ser encontradas determinando el voltaje de circuitoabierto, la corriente de corto-circuito, y la resistencia mostrada en el par de terminales.
- Las transformaciones de Thevenin y Norton son útiles en reemplazar una región seleccionada de un circuito para ser analizado por uno más sencillo sin que resulte algún cambio de corrientes o voltajes externos.

Mientras que la LCK, la LVK, las leyes $i-v$ y los subcircuitos equivalentes son introducidos aquí en el contexto de circuitos resistivos estudiados en el dominio del tiempo, estas ideas fundamentales pueden aplicarse igualmente para ensanchar nuestro alcance en capítulos posteriores a incluir otros tipos de elementos y otros dominios de análisis.

PROBLEMAS

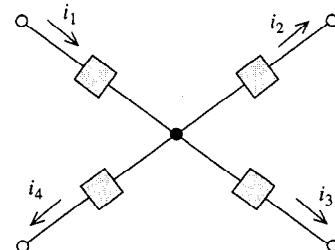
2.1. Escribe la LCK para cada nodo.



PROBLEMA P2.1

2.2. Escribe la LCK para este nodo:

- En la forma el total de las que entran es igual a cero.
- En la forma el total de las que salen es igual a cero.
- En la forma las que entran es igual a las que salen.



PROBLEMA P2.2

2.3. Las ecuaciones de la LCK para un cierto circuito de tres-nodos son :

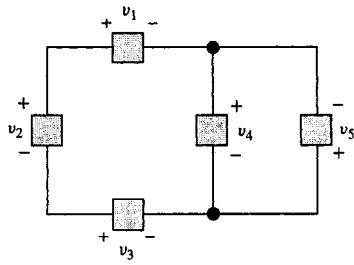
$$\text{Nodo 1: } i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$\text{Nodo 2: } -i_1 - i_2 - i_4 = 0$$

$$\text{Nodo 3: } i_3 + i_4 = 0$$

Dibuja el circuito, indicando las direcciones de referencia de las corrientes.

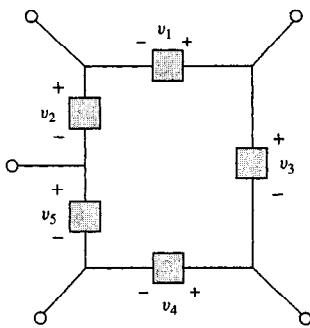
2.4. Escribe la LVK alrededor de cada una de las tres mallas.



PROBLEMA P2.4

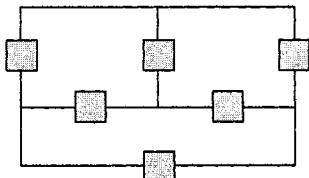
2.5. Escribe la LVK para esta malla:

- En la forma el total de las caídas es igual a cero.
- En la forma el total de los aumentos es igual a cero.
- En la forma el total de las caídas es igual al total de los aumentos.



PROBLEMA P2.5

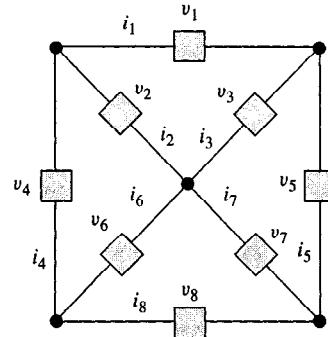
2.6. Asignar nombres y direcciones de referencia a todos los voltajes, después escribir la LVK para cada una las siete mallas de este circuito.



PROBLEMA P2.6

2.7. Suministrar las direcciones de referencia siendo que estas ecuaciones de la LCK son todas válidas, y la convención de la señal pasiva se cumple en cualquier lugar.

$$\begin{aligned} i_1 + i_4 - i_2 &= 0 \\ i_7 + i_8 - i_5 &= 0 \\ i_1 + i_3 - i_5 &= 0 \\ i_6 - i_4 - i_8 &= 0 \\ i_2 + i_3 - i_6 - i_7 &= 0 \end{aligned}$$



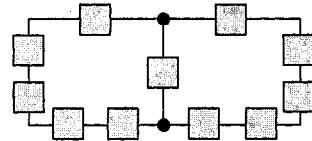
PROBLEMA P2.7

2.8. ¿Cuántas respuestas diferentes hay en el Problema 2.7 anterior, en que LCK de cada nodo está dada la diferencia? Justifica.

2.9. En un circuito dado, suponemos que escribimos la LCK para cada nodo en la forma el total de las que entran es igual a cero.

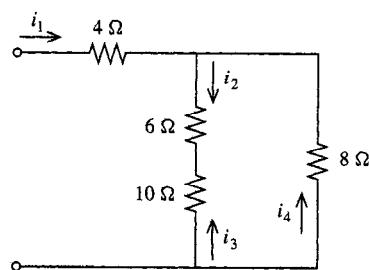
- ¿En cuántas ecuaciones dando un elemento se presenta la corriente? ¿Con qué signos? Justifica.
- Si todas estas ecuaciones son asociadas, ¿qué obtenemos?
- Utilizar (b) para mostrar que la última ecuación del nodo es exacta a la suma negativa de todas las anteriores.

2.10. Asignar nombres y direcciones de referencia; después escribir la LCK a cada nodo y la LVK alrededor de cada malla.



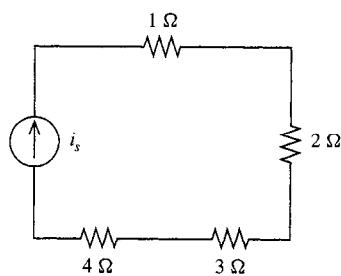
PROBLEMA P2.10

2.11. Asignar las direcciones de referencia del voltaje para cada resistencia cumpliendo con la convención de la señal pasiva. Determinar cada voltaje si $i_1 = 2 \text{ A}$ e $i_4 = -4 \text{ A}$.



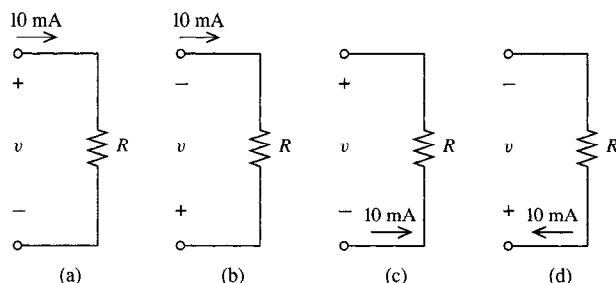
PROBLEMA P2.11

2.12. Asignar las direcciones de referencia del voltaje para los cinco elementos siendo que la caída de voltaje que pasa por cada elemento es positiva en la dirección del sentido de las manecillas del reloj; después, asignar las direcciones de referencia de la corriente cumpliendo con la convención de la señal pasiva.



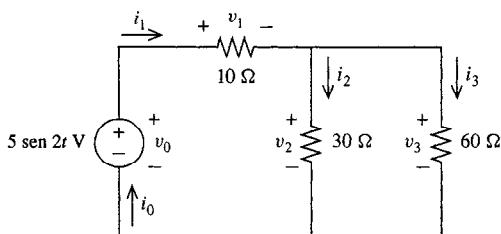
PROBLEMA P2.12

2.13. Encontrar el v para cada subcemento. En cada caso, $R = 1 \text{ k}\Omega$



PROBLEMA P2.13

2.14. Encontrar todas las corrientes y voltajes.

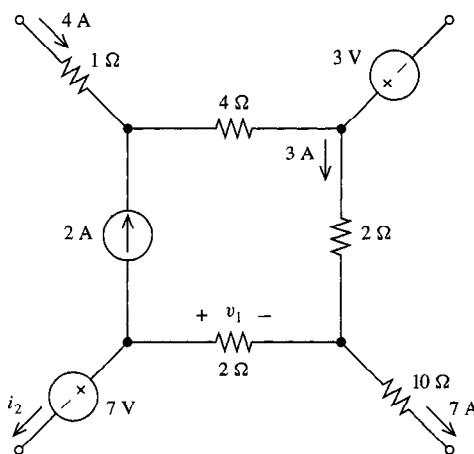


PROBLEMA P2.14

2.15. Determinar la potencia suministrada por, o disipada por, cada uno de los cuatro elementos en el circuito del problema 2.14.

2.16. ¿Mediante qué factor podemos aumentar la función fuente en el circuito del problema 2.14 si deseamos que se suministre el doble de potencia al resto del circuito? Justifica.

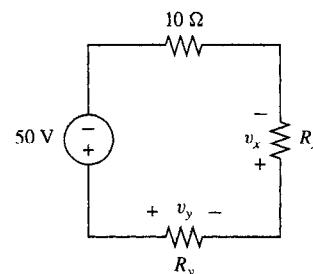
2.17. Encontrar el v_1 , i_2 , y la potencia producida (o disipada) por la fuente de voltaje de 7-V.



PROBLEMA P2.17

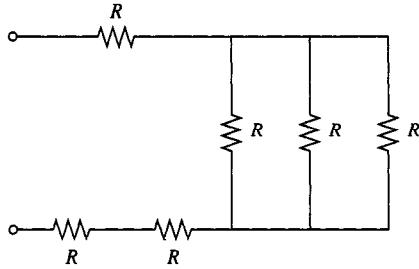
2.18. Diseñar un divisor de voltaje el cual entrega +3, +6, +12 y +24 V, todos con una terminal negativa común. Todos los resistores necesitan ser números enteros múltiplos de $1 \text{ k}\Omega$, y la fuente de voltaje debe de tener el mayor voltaje posible.

2.19. Si el $v_x = 10 \text{ V}$ y el $v_y = 20 \text{ V}$, encontrar la R_x y la R_y .



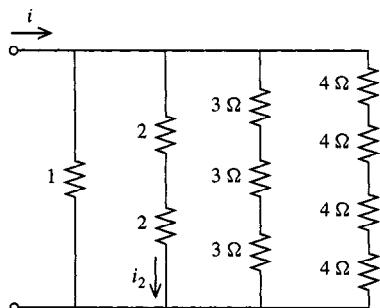
PROBLEMA P2.19

2.20. ¿Qué R necesito tener para fijar la resistencia equivalente de este circuito a 300Ω ?



PROBLEMA P2.20

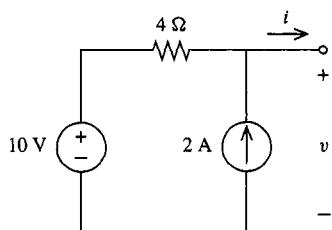
- 2.21.** Encontrar i y la potencia total disipada para este circuito si $i_2 = 1$ A.



PROBLEMA P2.21

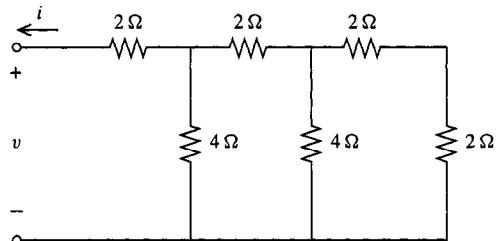
- 2.22.** Determinar la resistencia equivalente del circuito del Problema 2.21.

- 2.23.** Encontrar la ley de la terminal $v = f(i)$. Reescribir ya, que $i = g(v)$.



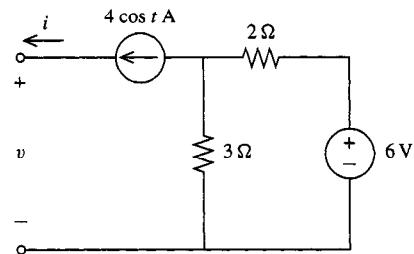
PROBLEMA P2.23

- 2.24.** Encontrar la ley de la terminal $v = f(i)$. Reescribir ya, que $i = g(v)$.



PROBLEMA P2.24

- 2.25.** Encontrar la ley de la terminal para este circuito. Observando que sólo existe en este caso una de las dos formas $v = f(i)$ e $i = g(v)$.

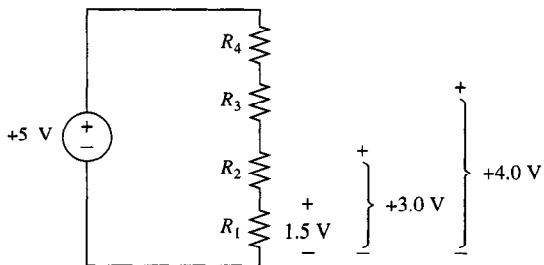


PROBLEMA P2.25

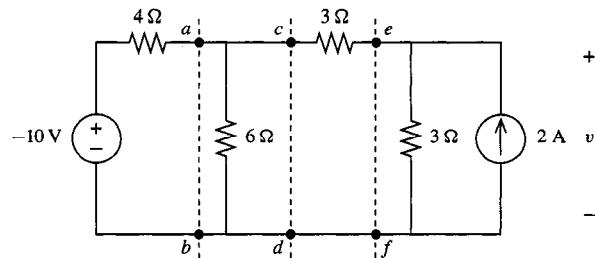
- 2.26.** Un divisor de voltaje es construido utilizando una batería de +24-V y resistores de 1-k Ω . Diseñe un divisor de voltaje con una salida de +18 V utilizando los menores resistores posibles. Diseñe otro con una salida de +18.1 V.

- 2.27.** Un divisor de corriente es construido utilizando una fuente de corriente constante de +2-mA y resistores de 1-M Ω . Diseñe un divisor de corriente con una salida de +1.5-mA. Diseñe otro con una salida de +1.51-mA.

- 2.28.** Si todos los resistores en un divisor de voltaje están en escala por el mismo factor α , ¿cómo afecta éste a los voltajes que pasan por ellos? ¿Cómo a las corrientes que pasan por ellos? ¿A la potencia? Utilice estos resultados para diseñar un divisor de voltaje usando una fuente de +5-V con salidas de +4.0, +3.0, y +1.5 V (todas con respecto a la terminal negativa común) y una potencia disipada de 1 mW. Empiece por considerar que R_1 es 1 Ω ; calcule las otras R en escala.

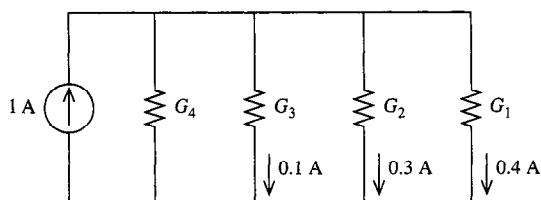


PROBLEMA P2.28



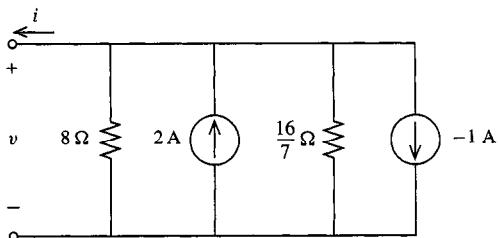
PROBLEMA P2.31

2.29. Si las conductancias de todas las resistencias en un divisor de corriente están en escala por el mismo factor α , ¿cómo afecta éste a las corrientes que pasan por ellos? ¿A los voltajes que pasan por ellos? ¿A la potencia? Utilice estos resultados para diseñar un divisor de corriente usando una fuente de +1-A con salidas de 0.4, 0.3, y 0.1 A y una potencia disipada de 1 mW. Empiece a considerar que G_1 es 1 S; calcule las otras G en escala.



PROBLEMA P2.29

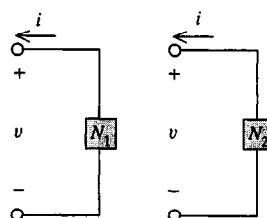
2.30. Encuentre el circuito equivalente de Thevenin



PROBLEMA P2.30

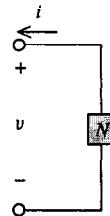
2.31. Encuentre el equivalente de Norton del lado izquierdo de ab , después el equivalente de Thevenin del lado izquierdo de cd , después el equivalente de Norton del lado izquierdo de ef . Como punto final hay que encontrar v teniendo que simplificar todo a un circuito de dos-nodos.

2.32. Suponer que las leyes de las terminales para N_1 y N_2 son $v = -2i + 1$ y $v = -4i - 7$. Encontrar el equivalente de Thevenin si N_1 y N_2 se encuentran en serie.



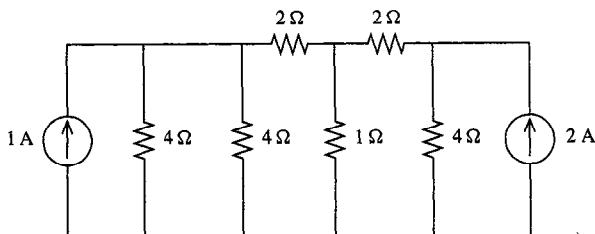
PROBLEMA P2.32

2.33. Diez copias idénticas de un subcircuito N con la ley de la terminal $i = g(v) = -\frac{1}{3}v + 2$ están puestas en serie. Encontrar la ley de la terminal del subcircuito nuevo y su equivalente de Norton.



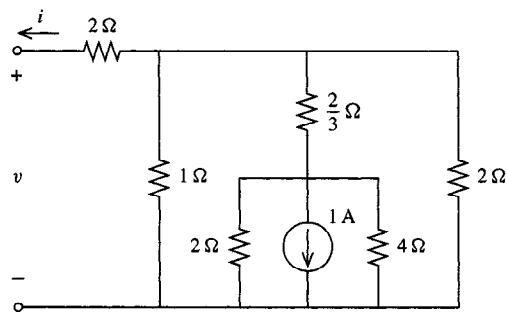
PROBLEMA P2.33

2.34. Utilice las series de transformaciones de Thevenin-Norton y serie-paralelo para reducir este circuito mostrado a un circuito sencillo de dos-nodos. ¿Cuáles variables del circuito original permanecen inmóviles en el circuito simple?



PROBLEMA P2.34

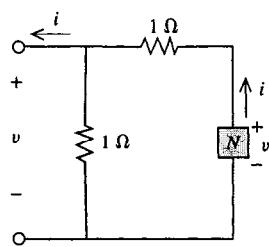
- 2.35. Encuentre el equivalente de Thevenin para este circuito; primero encuentre y utilice el equivalente de Thevenin de la fuente de corriente y sus resistores en paralelo.



PROBLEMA P2.35

- 2.36. Encuentre el equivalente de Norton del subcristo del Problema 2.35.

- 2.37. N cumple con la ley de la terminal $v = -7i + 4$. Encontrar las equivalentes de Thevenin y Norton para este circuito dado.

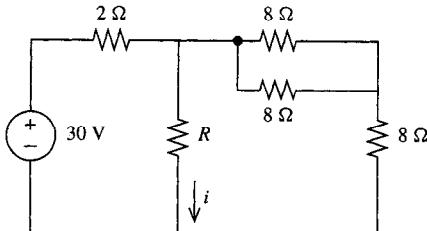


PROBLEMA P2.37

- 2.38. ¿Bajo qué circunstancias existe el equivalente de Thevenin de un subcristo dado, pero no existe el equivalente de Norton? Dé un ejemplo.

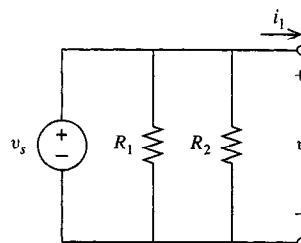
- 2.39. ¿Bajo qué circunstancias existe el equivalente de Norton de un subcristo dado, pero no existe el equivalente de Thevenin? Dé un ejemplo.

- 2.40. Encuentre el equivalente de Thevenin de todo el circuito a excepción del resistor R -ohm. Después encuentre R siendo que $i = 1$ A.



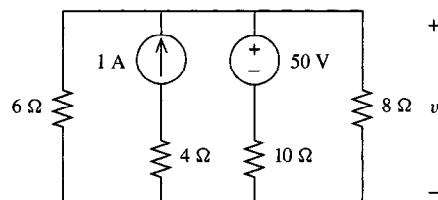
PROBLEMA P2.40

- 2.41. Encuentre el equivalente de Thevenin de este subcristo. Utilice esto para demostrar que las resistencias en paralelo con las fuentes de voltaje no tienen efecto en el resto del circuito. Encuentre una relación similar que involucre resistores y fuentes de corriente.



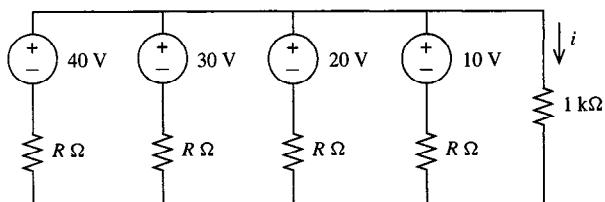
PROBLEMA P2.41

- 2.42. Encuentre v . Utilice una transformación de Thevenin-Norton para ayudarse.



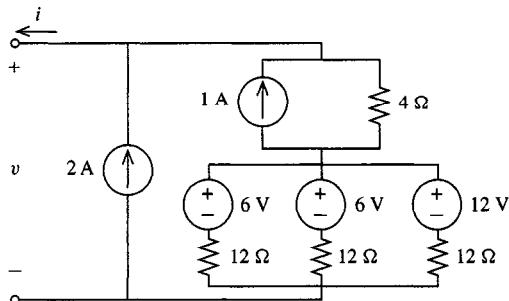
PROBLEMA P2.42

- 2.43. Encuentre un valor para R siendo que $i = 1$ mA.



PROBLEMA P2.43

2.44. Encuentre los equivalentes de Thevenin y Norton.



PROBLEMA P2.44

Problemas más complejos

2.45. Un cierto circuito tiene 7 elementos y las ecuaciones obedecen la LCK

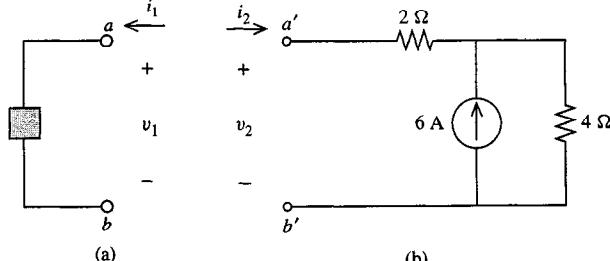
$$\begin{aligned}i_1 &= i_2 \\i_2 &= i_3 - i_4 \\i_3 &= i_1 + i_5 \\i_3 + i_5 + i_6 &= 0\end{aligned}$$

(a) Dibuja el circuito, colocando las corrientes i_1, i_2, \dots, i_7 y los voltajes v_1, \dots, v_7 . Define que los voltajes de cada elemento cumplen con la convención de la señal pasiva.

(b) Escribe las tres ecuaciones distintas de la LCK para este circuito.

2.46. (a) Encuentre la ley $i-v$ $v_2 = f_2(i_2)$ para el circuito mostrado en (b).

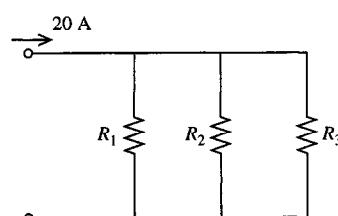
(b) Si $v_1 = 3i_1 - \sin t$, los nodos $a-a'$ están conectados juntos, y los nodos $b-b'$ están conectados juntos, encuentre i_1 y v_2 .



PROBLEMA P2.46

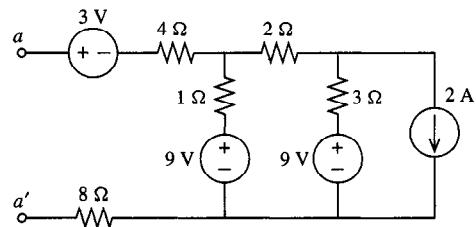
2.47. Utilizando algún número de resistores de 10Ω , diseñe un subcristalo donde su resistencia equivalente sea 144.7Ω .

2.48. Una corriente total de 20 A se divide entre 3 resistores como se muestra. Si el mayor es $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, encuentre R_2 y R_3 siendo que los 12 A fluyen a través de R_3 y $R_2 = 2R_3$.



PROBLEMA P2.48

2.49. Dibuje los equivalentes de Thevenin y Norton del circuito mostrado.



PROBLEMA P2.49

3

Fuentes dependientes y amplificadores operacionales (Op Amps)



Georg Simon Ohm
1787-1854

Por conducto de este documento presento al público una teoría de la electricidad galvánica [Ley de Ohm].

Georg Simon Ohm

La más básica y ampliamente utilizada de todas las leyes de electricidad, la Ley de Ohm, fue publicada en 1827 por el físico alemán Georg Simon Ohm, en su gran obra *La cadena galvánica, tratada matemáticamente*. Sin la Ley de Ohm, no podríamos analizar ni siquiera la cadena galvánica más simple (circuitos eléctricos), pero al momento de su publicación, la obra de Ohm, fue denunciada por los críticos como “una red de veleidades desnudas”, cuyo “único objetivo” era “apartarse de la dignidad de la naturaleza”.

Ohm nació en Erlangen, Bavaria, y fue el primogénito de siete hijos en una familia de clase media baja. Fracasó en sus estudios en la Universidad de Erlangen, pero en 1811 regresó y recibió su doctorado y el primero de una serie de puestos de enseñanza de matemáticas, todos ellos modestos y mal pagados. Para mejorar su situación, se inició en la investigación eléctrica aprovechando cualquier oportunidad permitida por sus labores magisteriales, y sus actividades culminaron en su famosa ley. A pesar de las erróneas críticas de su obra, Ohm recibió durante su vida la fama que le fue debida. La Real Sociedad de Londres le otorgó la medalla Copley en 1841, y la Universidad de Munich le otorgó el puesto de profesor de física en 1849. Fue también honrado póstumamente cuando se eligió el *ohm* como unidad de resistencia eléctrica.

Contenido del capítulo

- 3.1 Definiciones
- 3.2 Circuitos con fuentes dependientes
- 3.3 Amplificadores operacionales (Op Amps)
- 3.4 Papel de la retroalimentación negativa
- 3.5 Configuraciones básicas utilizando Op Amps
- 3.6 Interconexión de unidades Op Amp
- 3.7 Op Amps prácticos
- Resumen
- Problemas



Las fuentes de voltaje corriente de los capítulos 1 y 2, son fuentes independientes, como se definió anteriormente en la sección 1.4. También tenemos fuentes *dependientes* que son sumamente importantes en materia de circuitos, particularmente para comprender los circuitos electrónicos (circuitos que contienen elementos como transistores o bulbos que necesitan ser conectados a fuentes de poder). En el presente capítulo, definiremos las fuentes dependientes y consideraremos un elemento adicional de circuitos, el amplificador operacional u *op amp*. Las fuentes dependientes son vitales en el diseño de amplificadores electrónicos y una gran variedad de otros circuitos de gran interés práctico. Los op amps se comportan como fuentes dependientes y son una forma conveniente de satisfacer el requisito de fuentes dependientes en estos circuitos.

En primer lugar, analizaremos unos cuantos circuitos simples que contienen resistencias y fuentes, tanto dependientes como independientes. Como veremos, el análisis es muy similar al que se realizó en el capítulo 2. Luego volveremos nuestra atención al op amp y su comportamiento como elemento de circuito lineal. Se presentarán modelos ideales y no ideales de op amps y se explorarán los usos de estos modelos en el análisis de circuito de op amp. Se presentará un conjunto de circuitos de unidades de op amp, circuitos fácilmente analizables de los que puede construir comportamientos de circuitos complejos mediante su combinación. El capítulo concluye con una revisión de los op amps prácticos en el mundo real de paquetes físicos, limitaciones finitas y límites ambientales.

3.1 DEFINICIONES

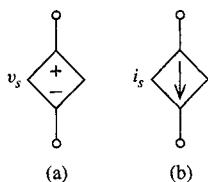


FIGURA 3.1
(a) Fuente de voltaje dependiente; (b) fuente de corriente dependiente.

Una *fuente de voltaje dependiente* o *controlada*, es una fuente cuyo voltaje entre terminales depende de, o está controlado por un voltaje o corriente definido en otro lugar del circuito. Las fuentes de voltaje controladas están categorizadas por el tipo de variable de control. Una *fuente de voltaje controlada por voltaje* (FVCV) está controlada por un voltaje, y una *fuente de voltaje controlada por corriente* (FVCC) está controlada por una corriente. El símbolo para una fuente de voltaje dependiente con una función de fuente v_s aparece en la figura 3.1 (a).

Una *fuente de corriente dependiente* o *controlada*, es una fuente cuyas corrientes dependen de, o están controladas por, un voltaje o corriente definidos en otro lugar del circuito. Una *fuente de corriente controlada por un voltaje* (FCCV) es controlada por un voltaje y una *fuente de corriente controlada por corriente* (FCCC) está controlada por una

corriente. El símbolo para una fuente de corriente dependiente con un valor (fuente de función) i_s aparece en la figura 3.1(b).

La figura 3.2 ilustra los cuatro tipos de fuentes controladas *lineales*, y muestra el voltaje o corriente del que dependen. Las cantidades μ y β son constantes adimensionales, designadas comúnmente como *ganancia de voltaje* y *ganancia de corriente*, respectivamente. Las constantes r y g tienen dimensiones de ohms y siemens, unidades de resistencia y conductancia, y por consiguiente son designadas respectivamente *transresistencia* y *transconductancia* el prefijo *trans*, es para recordarnos que la corriente y el voltaje no son medidos en el mismo lugar. Estos cuatro parámetros miden cada uno la proporción de la variable de control producida por unidades de variable de control.

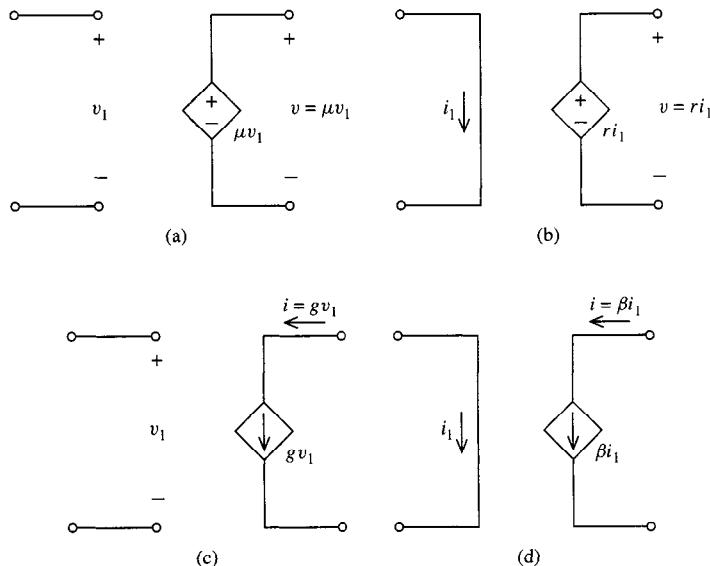


FIGURA 3.2 (a) FVCV; (b) FVCC; (c) FCCV; (d) FCCC.

Las fuentes dependientes *no lineales* son aquellas en donde la variable controlada no es simplemente proporcional a la variable de control, como en las fuentes dependientes *lineales* descritas anteriormente. En el presente texto, nos interesaremos únicamente en el estudio de los circuitos lineales, y por consiguiente, las fuentes controladas no lineales no se volverán a considerar.

Como ejemplo de un circuito que contiene una fuente dependiente, en la figura 3.3 tenemos una fuente independiente, una fuente dependiente y dos resistencias. La fuente dependiente es una (FVCC) con corriente de control i_1 y transresistencia $r = 0.5 \Omega$. Nótese que si i_1 fuera redefinida como la corriente que fluye hacia abajo por el ramal derecho de este circuito, en lugar del ramal medio, la fuente controlada sería entonces un elemento cuyo voltaje sería 0.5 veces su propia corriente, y por consiguiente, sería idéntica a una resistencia ordinaria de 0.5Ω . Esto ilustra que solamente si la variable de control está situada *en otra parte* del circuito, entonces el elemento debe ser representado verdaderamente como fuente controlada.

Las fuentes dependientes son esenciales para producir *amplificadores*, circuitos que producen salidas más potentes que sus entradas. También son integrales a los filtros activos (que se estudiarán en el capítulo 14) y para circuitos electrónicos de todo tipo. Entre la multitud de sus usos importantes, las fuentes dependientes son utilizadas para evitar la sobrecarga, para aislar una parte del circuito de la otra, y para obtener exóticos comportamientos como resistencia negativa. Como vimos en el capítulo 2, el resistor es un elemento pasivo con resistencia positiva. Sin embargo, mediante las fuentes dependientes, podemos

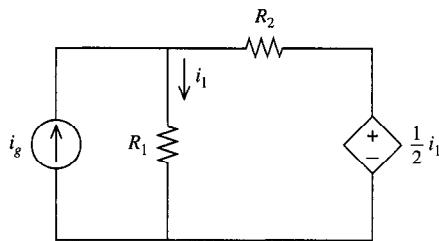


FIGURA 3.3 Circuito que contiene una fuente dependiente.

crear circuitos que presenten resistencia negativa como lo veremos posteriormente (ejercicio 3.2.3).

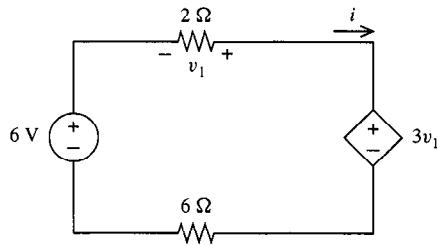
3.2 CIRCUITOS CON FUENTES DEPENDIENTES

Los circuitos que contienen fuentes dependientes son analizados del mismo modo que aquellos que no poseen fuentes dependientes. Pueden aplicarse todas las herramientas presentadas en el capítulo 2, las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff, la ley de Ohm para resistencias, equivalentes en series-paralelo, equivalentes de Thevenin-Norton y divisores de voltaje y corriente. En el capítulo 4, desarrollaremos resistencias sistemáticas para utilizar estas herramientas, siguiendo un plan paso a paso que nos permitirá resolver cualquier variable en cualquier circuito. Por ahora, nos conformaremos con utilizar las herramientas del análisis del circuito sobre una base “*ad hoc*”, y limitar nuestro tratamiento a circuitos relativamente pequeños.

Ejemplo 3.1

Obtégase la corriente i en la figura 3.4. La fuente dependiente es una FVCV con ganancia de voltaje de +3 controlada por el voltaje v_1 .

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff (LVK) alrededor del circuito obtenemos



$$-v_1 + 3v_1 + 6i = 6 \quad (3.1)$$

y por la ley de Ohm

$$v_1 = 2(-i) = -2i \quad (3.2)$$

Utilizando (3.2) podemos eliminar v_1 de (3.1), lo que resulta en

$$2(-2i) + 6i = 6$$

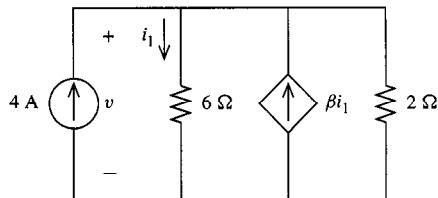
o $i = 3$ A. Por consiguiente, la fuente dependiente complicó el procedimiento, pero sólo en la medida en que se requirió la ecuación adicional (3.2).

Utilicemos este ejemplo para considerar además el significado de la ganancia de voltaje μ . Teniendo la ganancia de voltaje de 3, hemos determinado que la corriente i es de 3 A. Si esta ganancia se duplicara, simplemente reemplazaríamos $3v_1$ por $6v_1$ en (3.1), y repetiríamos los pasos subsiguientes para obtener $i = -1.5$ A. Previamente se definió que el parámetro de fuente controlada (μ , β , r , o g)

FIGURA 3.4 Ejemplo de fuente dependiente.

multiplica el tamaño de la variable controlada por unidad de variable de control. Esto no implica que los voltajes y corrientes del circuito se multipliquen en la misma proporción. Al duplicarse la ganancia de voltaje en este ejemplo, se modificó i de 3 A a -1.5 A, en tanto que el voltaje controlado (voltaje de terminal FVCV) invirtió el signo, pero no modificó su magnitud. Lo único que se duplicó fue la *proporción* del voltaje controlado por unidad de voltaje de control, y no una corriente o voltaje en particular.

EJERCICIOS



EJERCICIO 3.2.2

- 3.2.1.** En el circuito de la figura 3.4, añádase una resistencia de $18\text{-}\Omega$ paralelo con la resistencia de $6\text{-}\Omega$ dado, y obténgase i , v_1 , y la resistencia vista por la fuente independiente (es decir, la resistencia que, al unirse a través de la fuente independiente en lugar del resto del circuito, tendría la misma respuesta i).

Respuesta 12 A; -24 V; $0.5\text{ }\Omega$

- 3.2.2.** Obténgase la ganancia de corriente β que resulta en $v = 8\text{ V}$.

Respuesta 1

- 3.2.3.** En el circuito del ejercicio 3.2.2, cámbiese la resistencia de $2\text{-}\Omega$ a $12\text{-}\Omega$ y obténgase la resistencia vista por la fuente independiente para $\beta = 2$ (ver el ejercicio 3.2.1 para una definición de “resistencia vista”). Nótese que es posible una resistencia negativa, únicamente cuando está presente una fuente dependiente.

Respuesta -12 Ω

3.3

AMPLIFICADORES OPERACIONALES (OP AMPS)

Una fuente dependiente tiene la importante capacidad de generar una corriente o voltaje que es una versión *amplificada* de su variable de controladora. Un elemento de circuito práctico que representa esta capacidad es el *amplificador operacional (op amp)*, definido como *un dispositivo electrónico que bajo las circunstancias adecuadas se comporta como una fuente de voltaje controlada por voltaje (FVCV) con una ganancia sumamente elevada*. El símbolo de circuito para el op amp aparece en la figura 3.5(a). La terminal marcada por un signo positivo en el símbolo del circuito, se conoce como *entrada no inversora*, la *entrada de inversión* mediante el signo menos, y la terminal no marcada es la *salida*. Los

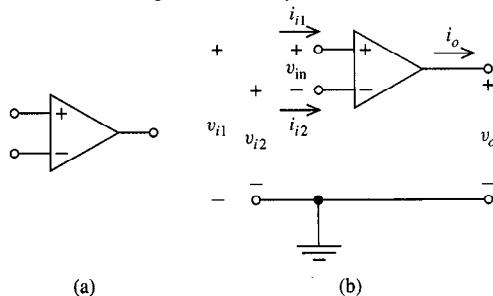


FIGURA 3.5 Amplificador operacional (op amp): (a) símbolo de circuito; (b) corrientes y voltajes.

voltajes en estos tres nodos, v_{i1} , v_{i2} y v_o , respectivamente, están todos definidos en relación a *tierra*, un nodo que generalmente se omite del símbolo de circuito del op amp, pero que es parte de todo circuito op amp. El voltaje de entrada del op amp, o voltaje a través de las terminales de entrada del op amp, es

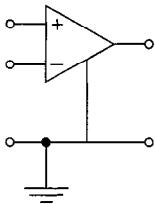


FIGURA 3.6 Símbolo de circuito alternativo para el op amp.

$$v_{in} = v_{i1} - v_{i2}$$

A veces se añade un cuarto cable al símbolo de circuito, como se muestra en la figura 3.6, para mostrar explícitamente la conexión al nodo de tierra. Adoptaremos la convención de tres cables de la figura 3.5(a) al dibujar op amps en circuitos.

Puesto que el op amp es un dispositivo electrónico, debe conectarse correctamente una fuente de poder del régimen adecuado para darle energía. Esta es una de las “circunstancias adecuadas”, requeridas en la definición para obtener un comportamiento útil del op amp, y estas consideraciones serán discutidas brevemente en la sección 3.7. Aunque los circuitos de op amp con buen comportamiento no pueden ser construidos y operados físicamente sin la debida consideración a la forma en que pueden asegurarse estas circunstancias adecuadas, el comportamiento de los op amps como elementos de circuitos lineales pueden analizarse suponiendo que esto ya ha sido hecho. Una discusión satisfactoria de estas condiciones, y cómo satisfacerlas, debe ser diferida a un curso de electrónica, que con frecuencia sigue cursos de circuitos básicos como el presente. Para nuestro propósito de comprender cómo se comportan los op amp en circuitos lineales, *supondremos que el entorno adecuado para este comportamiento fue establecido en todas las redes de op amp que analizaremos*. En particular, puesto que las fuentes de poder nos ayudan a establecer estas circunstancias, pero por otra parte no influyen en el comportamiento lineal del op amp, por lo general se omitirán de los diagramas de circuito con op amps.

Bajo las condiciones de operación adecuadas, presumiblemente un op amp se comporta como una FVCV con alta ganancia. El modelo de circuito más simple para un op amp, llamado *modelo de amplificador ideal de voltaje ideal* y que aparece en la figura 3.7, consiste únicamente en una FVCV y un cable de conexión. Nótese que este modelo muestra que v_o , el voltaje de salida del op amp, está controlado por v_{in} , la diferencia entre los voltajes de las terminales de entrada del op amp. La ganancia de voltaje A dicta el grado de amplificación del voltaje de entrada al pasar por el op amp (proporción de v_o contra v_{in}). Con frecuencia se designa a A como la *ganancia de trayectoria abierta* del op amp. Esta nomenclatura se relaciona con el concepto de retroalimentación que se discutirá en la siguiente sección. Como veremos, los op amps son frecuentemente utilizados en configuraciones donde la salida del op amp está conectada de vuelta a la entrada. Estos circuitos se conocen como *trayectoria cerrada*, y en general tienen diferentes ganancias (proporción

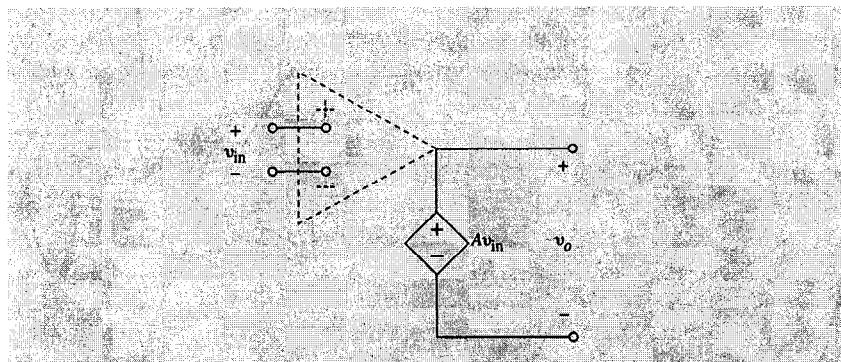


FIGURA 3.7 Modelo de circuito op amp de amplificador de voltaje ideal.

de salida contra entrada) que el op amp de trayectoria abierta (sin retroalimentación), cuya ganancia de trayectoria abierta es simplemente la ganancia de voltaje FVCV A.

Para utilizar este modelo, simplemente reemplazamos el símbolo de circuito op amp por el modelo, y aplicamos los métodos de la sección anterior para analizar el circuito resultante.

Ejemplo 3.2

Supóngase que conectamos una fuente independiente a través de las terminales de entrada de un op amp, y una resistencia de carga entre la salida y tierra. La fuente tiene una equivalencia Thevenin de voltaje de 1 mV y una equivalencia Thevenin de resistencia de $10\text{ k}\Omega$. La resistencia de carga es $50\text{ k}\Omega$, y el op amp tiene una ganancia de trayectoria abierta de 100,000. Obténgase la corriente de fuente i_s y el voltaje de carga v_1 .

Examinando la figura 3.8(b), no puede haber una corriente ($i_s = 0\text{ A}$) a través de la resistencia de $10\text{-k}\Omega$, puesto que está en serie con un circuito abierto. Por consiguiente, por LVK, $v_{in} = 0.001\text{ V}$. De este modo, el voltaje de la FVCV es $100,000 \times 0.001 = 100\text{ V}$, que por LVK es también v_1 . Podemos ver que el voltaje de fuente fue amplificado por la ganancia de trayectoria abierta, y transferida a través de la carga. Nótese también que el poder transmitido a la carga no provino de la fuente independiente, la cual no produce poder puesto que $i_s = 0\text{ A}$. Debió provenir del op amp o, específicamente, de la fuente de poder que da energía al op amp, aun cuando esta necesaria fuente de poder no se muestra explícitamente.

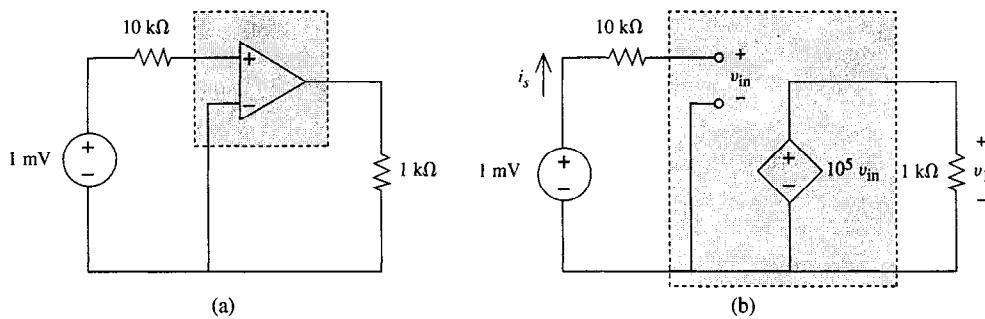


FIGURA 3.8 Circuito para el ejemplo 3.2: (a) módulos de circuito; (b) sustitución del modelo de amplificador de voltaje ideal.

Al reflexionar sobre el modelo del amplificador de voltaje ideal de la figura 3.7, se hacen patentes algunas limitaciones aparentes. En primer lugar, el modelo predice que el op amp no utiliza ninguna corriente de la fuente de entrada (las terminales de entrada están en circuitos abiertos), por consiguiente, ningún poder, y sin embargo, realiza su labor de amplificación. Pero la física básica sugiere que cualquier amplificador debe utilizar por lo menos algo de poder de su fuente con el fin de captar la señal que se supone debe amplificar. La comunicación siempre requiere que la fuente tenga un mínimo gasto de poder con el fin de transmitir el mensaje, y sin embargo, el modelo predice que no se requiere de ningún poder. En segundo lugar, se hace aparente una predicción igualmente dudosa en el lado de salida del modelo. Si se aplica una resistencia de carga a través de la salida, al reducir su valor una y otra vez, la corriente, y por consiguiente la potencia transmitida a la carga mediante el op amp, puede hacerse arbitrariamente grande (el voltaje de carga queda

fijo por el voltaje de entrada y la ganancia de trayectoria abierta, en tanto que la potencia a la carga es de v_1^2/R). Sin embargo, todo dispositivo en el mundo real, tiene una capacidad finita de poder máximo.

Un *modelo mejorado de op amp*, que da un remedio a estas limitaciones al añadir dos resistencias al modelo ideal de amplificador de voltaje, aparece en la figura 3.9. R_i se designa como resistencia de entrada, y R_o como *resistencia de salida*. El modelo de amplificador de voltaje ideal, puede considerarse como un caso especial del modelo mejorado, con $R_i = \infty$ y $R_o = 0$. Mediante la condición de que estos valores sean ambos distintos de 0 y finitos en el modelo mejorado, garantizamos que la fuente gastará algún poder, y que se desarrollarán corrientes y poderes finitos máximos a través de la carga, sin importar cuán pequeña sea la resistencia de carga. Los valores típicos para op amps comunes son: $R_i = 1\text{ M}\Omega$ y $R_o = 30\Omega$. Al igual que el modelo anterior, el modelo mejorado se utiliza sustituyéndolo por el símbolo de circuito op amp en el circuito que se analizará.

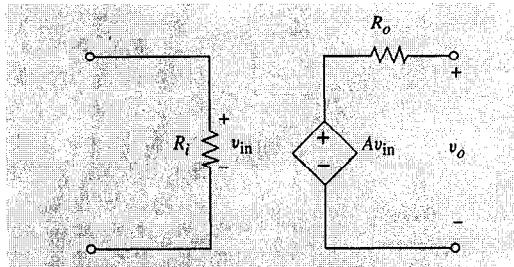


FIGURA 3.9 Modelo mejorado de op amp.

Ejemplo 3.3

Utilizaremos el modelo de op amp mejorado con $R_i = 1\text{ M}\Omega$, $R_o = 30\Omega$, y $A = 10^5$ para determinar v_2 en el circuito que aparece en la figura 3.10(a). Luego de la sustitución, el circuito es igual al que aparece en la figura 3.10(b). Para simplificar el análisis, todo aquello que está a la izquierda de la línea punteada, se convierte primeramente a su equivalente de Thevenin. El voltaje de circuito abierto en las terminales a y b es, por divisor de voltajes,

$$v_{oc} = v_T = \frac{60 \times 10^3}{90 \times 10^3} v_1 = \frac{2}{3} v_1$$

y la resistencia que entra en las terminales ab con la fuente v_1 eliminada, es el equivalente paralelo de las resistencias $60\text{-k}\Omega$ y $30\text{-k}\Omega$:

$$R_T = \frac{(30 \times 10^3)(60 \times 10^3)}{90 \times 10^3} = 20\text{ k}\Omega$$

Sustituyendo el circuito equivalente de Thevenin, obtenemos el circuito de la figura 3.11. Designando i , a la corriente de la trayectoria cerrada, aplicando LVK alrededor de la trayectoria cerrada,

$$2.02 \times 10^6 i + 10^5 v_{in} - \frac{2}{3} v_1 = 0$$

Pero puesto que $i = v_{in}/10^6$, esto puede ser resuelto para v_{in} :

$$v_{in} = \frac{2}{3} \times 10^{-5} v_1$$

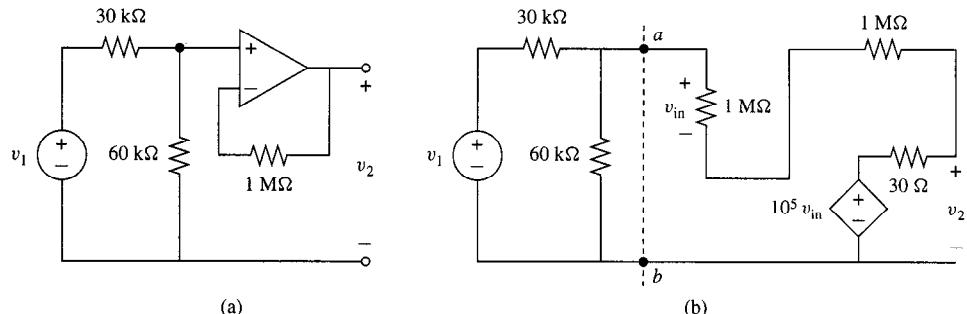


FIGURA 3.10 (a) Circuito para el ejemplo; (b) después de sustituir el op amp por el modelo mejorado de op amp.

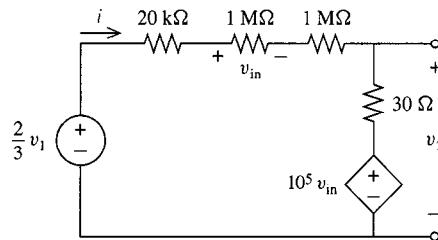


FIGURA 3.11 Circuito de la figura 3.10, después de la sustitución por los equivalentes de Thevenin.

Finalmente, puesto que

$$v_2 = 10^5 v_{in} + 30i$$

Obtenemos el resultado deseado:

$$v_2 = \frac{2}{3} v_1$$

¿Qué modelo de op amp debe usarse en un problema dado? Como en muchos análisis basados en modelos, siempre hay cierta distancia entre los objetos físicos y cualquiera de sus modelos. Podría pensarse en una secuencia infinita de modelos cada vez más precisos y complejos para representar un objeto dado. El mejor modelo que se utiliza no es necesariamente el más preciso, sino más bien el más simple con el que se obtiene la precisión requerida para un cierto propósito. Por ejemplo, la ley de Ohm por sí misma es únicamente un modelo simple y de bajo orden para el comportamiento de corriente y voltaje de una resistencia física típica. Ninguna resistencia física obedece exactamente la ley de Ohm. Por consiguiente, puede mejorarse las predicciones de las leyes de Ohm utilizando modelos más complejos. Existen modelos más precisos sobre rangos específicos de corriente y voltaje para tipos específicos de resistencias, pero son innecesarios para la mayoría de los propósitos del análisis de circuito y ciertamente son más difíciles de utilizar. Utilizamos la ley de Ohm porque es simple, y sin embargo, es preciso para muchas resistencias físicas sobre un rango relativamente amplio de corrientes, voltajes y temperaturas.

Debe utilizarse el modelo de amplificador de voltaje ideal más simple en aquellas circunstancias donde sus predicciones no difieren significativamente de las del modelo mejorado. En el ejemplo 3.2, utilizamos el modelo mejorado con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$ y $R_o = 30 \Omega$ y el

mismo $A = 100,000$ del caso anterior y por un cálculo de divisores de voltajes en la trayectoria cerrada de entrada, el voltaje de entrada es

$$v_{in} = \frac{0.001 R_i}{R_i + 10,000} = 0.00099 \text{ V} \quad (3.3)$$

en comparación a los 0.001 V del caso anterior, en tanto que una segunda división de voltaje es aplicada a la trayectoria cerrada de salida demuestra que

$$v_1 = \frac{(99.0)50000}{50,000 + R_o} = 98.9 \text{ V} \quad (3.4)$$

Ninguna corriente o voltaje cambió en más de una fracción de 1% que, para casi todos los propósitos, significa que el modelo simple es suficientemente preciso. Conforme avanzemos en nuestro conocimiento de los análisis de circuitos con op amps, desarrollaremos criterios para una selección de modelos. Por lo pronto, el modelo que utilizaremos siempre será especificado en cada problema que requiera análisis de un circuito con op amps.

Los dos modelos presentados en esta sección son fáciles de utilizar, y en muchas circunstancias predicen con mucha precisión, el comportamiento real de los op amp físicos. Sin embargo, nunca debemos olvidar que un modelo es distinto del dispositivo en modelo. Un op amp físico es construido con muchos transistores, resistencias, y otros elementos. La

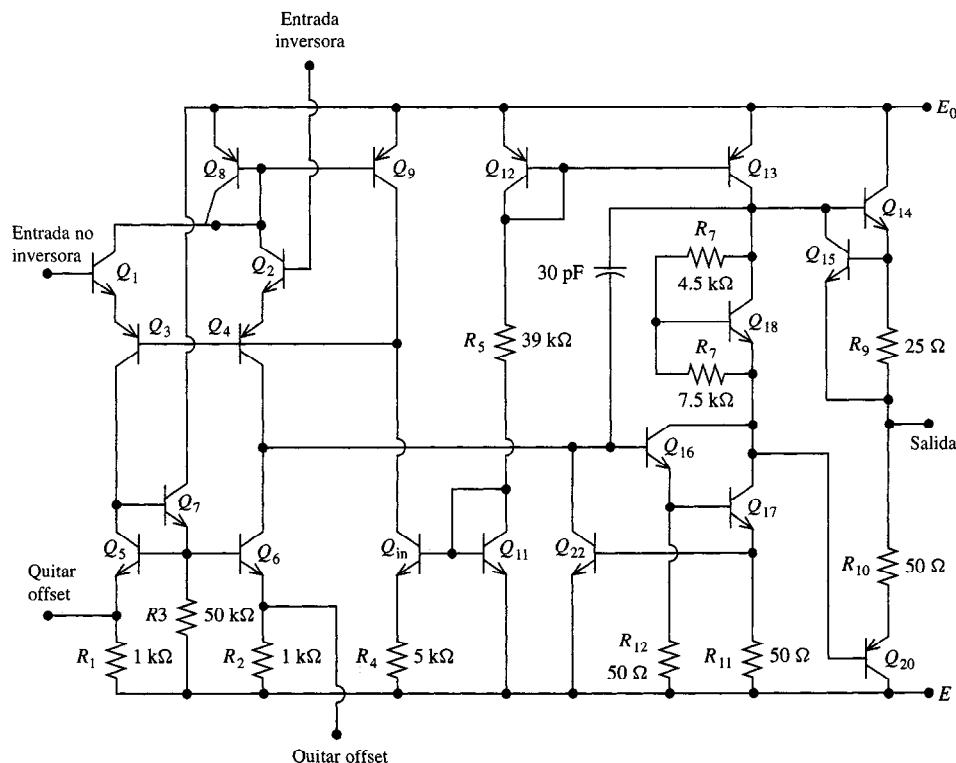


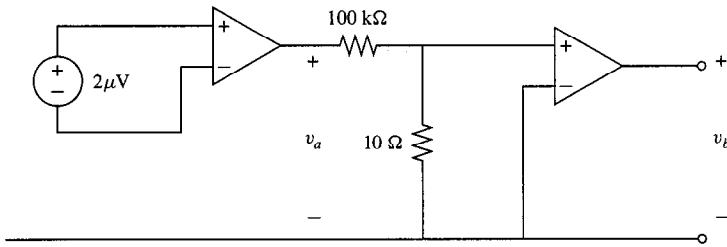
FIGURA 3.12 El op amp 741. (Cortesía de Fairchild Semiconductor Corp.)

figura 3.12 es el diagrama de circuito para el op amp 741, uno de los op amps más populares, económicos y de baja potencia. Aparece para ilustrar la distancia entre un modelo simple, como los de las figuras 3.7 y 3.9 y el circuito que se modela. Este diagrama de circuito es complicado porque no es cosa sencilla crear un dispositivo que, bajo las circunstancias adecuadas, se consulte como una fuente de voltaje controlada por voltaje de alta ganancia. Se necesita una considerable complejidad de circuitos para diseñar un dispositivo calculado para comportarse de modo tan simple.

EJERCICIOS

3.3.1. Determínense los voltajes v_a y v_b utilícese el modelo de amplificador de voltaje ideal con ganancia de trayectoria abierta $A = 1\,000,000$.

Respuesta 0.200 V; 2.00 V



EJERCICIO 3.3.1

3.3.2. Repítase el ejercicio 3.3.1. con el modelo mejorado de op amp utilizando $R_i = 1\,M\Omega$, $R_o = 30\,\Omega$. ¿Los voltajes están dentro del 1% del ejercicio 3.3.1? ¿Dentro del rango de 0.1%?

Respuesta 0.200 V; 2.00 V; sí; sí

3.3.3. Utilizando el mismo circuito que aparece en el ejercicio 3.3.1, el modelo de op amp mejorado del ejercicio 3.3.2, supóngase que se conectó una resistencia de carga R_1 a través de v_b , ¿Para qué valor de R_1 la corriente transmitida a R_1 será máxima? ¿Cuál sería esta corriente máxima?

Respuesta 0 Ω; $\frac{1}{15}\text{A}$

3.3.4. Vuélvase a hacer el ejemplo 3.3 utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal para op amp. ¿Concuerdan los resultados con el ejemplo en el que se utilizó el modelo mejorado de op amp?

Respuesta $v_2 = \frac{2}{3} v_1$; sí

3.4 PAPEL DE LA RETROALIMENTACIÓN NEGATIVA

Los op amps típicos pueden tener ganancias de trayectoria abierta que están en el rango de 10^5 a 10^6 o más, sin embargo, relativamente pocos circuitos requieren de amplificaciones de voltaje tan grande. ¿Por qué se requiere del op amp que se comporte como una FVCV de

alta ganancia, si esta ganancia pocas veces se utiliza para crear una amplificación de voltaje tan extrema? Para comprender cómo la ganancia de trayectoria abierta puede convertirse en otros beneficios no menos importantes para un buen diseño del circuito que la simple amplificación, consideraremos el concepto de la retroalimentación negativa.

Se dice que existe *retroalimentación negativa* en el circuito eléctrico, o sistema dinámico de cualquier tipo, *si cualquier cambio en la salida tiene el efecto algebraico opuesto sobre la entrada*. En un sistema de retroalimentación negativa, un aumento en el valor algebraico de la salida (más positivo o menos negativo), produce una disminución en el valor algebraico de la entrada (menos positivo o más negativo), y viceversa. Considérese a un atleta que corre en un maratón. Defínase como entrada la concentración de oxígeno en la sangre, y como salida la velocidad de carrera resultante del atleta. Si en cierto punto se decide aumentar el ritmo (aumento de salida), se consumirá oxígeno con más rapidez, y los niveles de oxígeno disminuirán a su vez (disminución de entrada). Si en vez de ello se reduce el ritmo, se quema menos oxígeno por unidad de tiempo, y aumentará su concentración en la sangre (aumento de entrada), debido a la disminución del ritmo (disminución de salida). Esto es un ejemplo de un sistema de retroalimentación negativa. Los cambios en la salida de un sistema de retroalimentación negativa producen cambios de entrada opuestos, que hacen que la salida tienda a su valor inicial. Por este proceso los sistemas de retroalimentación negativa tienden a resistir el cambio y, por consiguiente, a *estabilizar* sus propias salidas.

En un circuito con op amps puede lograrse una retroalimentación negativa al dotarla de una trayectoria de corriente entre la terminal de salida y la terminal inversora de entrada. Considérese el circuito de la figura 3.13(a), llamado circuito *seguidor de voltaje* por razones que inmediatamente serán aparentes. Sustituyendo el op amp por su modelo ideal de amplificación de voltaje de la figura 3.8(b), aplicando LVK alrededor de la trayectoria izquierda se obtiene

$$-v_1 + v_{in} + Av_{in} = 0 \quad (3.5)$$

o $v_{in} = v_1/(A + 1)$. La trayectoria derecha demuestra que $v_2 = Av_{in}$. Eliminando v_{in} de estas dos últimas ecuaciones, y despejando para v_2 , se obtiene el resultado de la ecuación (3.6)

$$v_2 = \frac{A}{A + 1} v_1 \quad (3.6)$$

Verifiquemos primero qué es verdaderamente un circuito de retroalimentación negativa. Si el voltaje de salida del op amp v_2 se incrementara ligeramente, el voltaje en la terminal inversora de salida v_{i2} se incrementaría por la misma cantidad, en tanto que el voltaje en la entrada no inversora no sería afectada (es determinada solamente por v_1). Puesto que $v_{in} = v_{i1} - v_{i2}$, el incremento en la salida v_2 del op amp ciertamente provocará

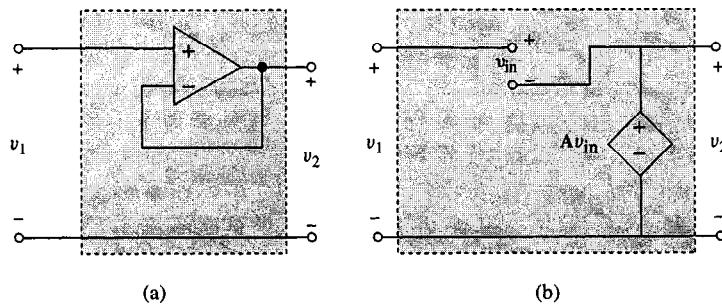


FIGURA 3.13 Seguidor de voltaje: (a) diagrama de circuito; (b) utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal.

una disminución algebraica en la entrada v_{in} del op amp, señal definitiva de una retroalimentación negativa.

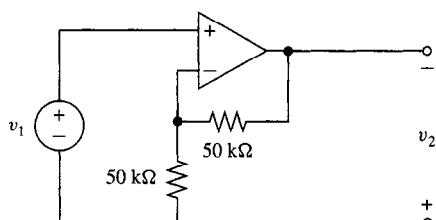
A continuación, comparemos el comportamiento resumido en (3.6), con los circuitos op amp de la sección anterior, en donde no se aplica retroalimentación negativa. Cuando se aplicó directamente el voltaje v_1 a través de las terminales de entrada del op amp sin retroalimentación, el voltaje de salida del op amp v_2 era Av_1 . Con retroalimentación negativa, la proporción de la salida v_2 contra la entrada del circuito v_1 , o *proporción de transferencia de voltaje*, cayó de A a $A/(A + 1)$. Para $A = 100,000$, esta es una caída de una proporción de transferencia de voltaje de 100,000 a una cantidad que es un poco menos que 1. Ciertamente, para cualquier valor razonablemente grande de A , la proporción de transferencia de voltaje es muy cercana a uno; de ahí su nombre *seguidor de voltaje* (la salida v_2 “sigue” o coincide con la entrada v_1 sin amplificación o cualquier otro cargo).

Al hacer la conexión de retroalimentación negativa, parece que hemos desechado la ganancia $A = 100,000$, y lugar de ello, nos quedamos con una proporción de transferencia de voltaje (con retroalimentación, de aproximadamente uno). ¿Qué hemos ganado a cambio de la tremenda reducción de amplificación disponible? Y supóngase que con el tiempo, y conforme el circuito envejece, la ganancia de trayectoria abierta en nuestro op amp se reduce en 10%, de 100,000 a 90,000. En el circuito que no tiene retroalimentación negativa, la proporción de transferencia de voltaje cambiará entre estos dos valores, o cambiará a razón de una parte en 10. En nuestro seguidor de voltaje, $A/(A + 1)$ irá de 0.999990 a 0.999989 cuando A declina de 100,000 a 90,000, un cambio de una parte en 10^6 . Por consiguiente, con un costo de una reducción de cinco órdenes de magnitud en la amplificación, hemos ganado un incremento de cinco órdenes de magnitud en la constancia (disminución en la sensibilidad) del factor de amplificación en el circuito.

La constancia de ganancia es de vital importancia en muchas aplicaciones, y muy útil en casi todas las demás. Utilizando la tecnología moderna de circuitos integrados, es fácil construir op amps con alta ganancia de trayectoria abierta, y hacerlo de modo económico. Pero es muy difícil regular el valor de la ganancia con alta precisión. Supóngase que dos ops amps que salen de la línea de producción tienen ganancias de trayectoria abierta que difieren en 10%. En circuitos donde se utilizan estos op amps, que de otro modo serían idénticos, tienen salidas que también difieren el 10%, y la eficiencia del producto electrónico resultante no podría garantizarse en ningún grado de precisión. Utilizando op amps únicamente para estabilizar configuraciones de retroalimentación negativa, puede hacerse que las variaciones de un circuito final a otro sean muy bajas, aun cuando las variaciones de un op amp a otro sean también altas. Otras variaciones de ganancia compensadas por la retroalimentación negativa incluyen las relacionadas con la temperatura, el envejecimiento de otros elementos de circuitos conectados al op amp, y una resistencia de carga variable. La retroalimentación negativa es también esencial para disminuir variaciones indeseables de ganancia con la frecuencia, es decir, aumentar la amplitud de banda de la etapa, como se discutirá en el capítulo 14.

En resumen, *utilizar la retroalimentación negativa cambia la ganancia bruta por constancia en la ganancia*. Los circuitos resultantes son altamente sensibles al valor numérico de la ganancia A del op amp de trayectoria abierta, únicamente a condición de que A sea razonablemente grande. Las proporciones de transferencias de voltaje en estos circuitos puede fijarse seleccionando el tipo de circuito y los valores de cualquier elemento externo (por ejemplo, resistencias como las de la figura 3.15), lo cual es más fácilmente controlable por el diseñador del circuito, que las ganancias de op amp de trayectoria abierta. Las configuraciones de retroalimentación negativa son a veces designadas como circuitos de *trayectoria cerrada*, puesto que la trayectoria de alimentación transmitida a través del op amp, y la trayectoria de retroalimentación, en conjunto, forman una trayectoria cerrada. Debido a su extrema utilidad para crear diseños confiables de circuitos, todos los circuitos con op amps analizados en el resto de este texto, serán del tipo de retroalimentación negativa.

EJERCICIOS



EJERCICIO 3.4.2

- 3.4.1.** Determíñese la proporción de transferencia de voltaje v_2/v_1 de un seguidor de voltaje utilizando el modelo op amp mejorado con $A = 100,000$, $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$, y $R_o = 30 \Omega$ y con una resistencia de carga de $R_L = 100 \Omega$ conectado a través de v_2 . ¿Está dentro del rango del 1% del que se calculó utilizando el modelo ideal de amplificador de voltaje?

Respuesta 1.00; sí

- 3.4.2.** Determíñese la proporción de la transferencia de voltaje v_2/v_1 . Utilícese el modelo de amplificador de voltaje ideal.

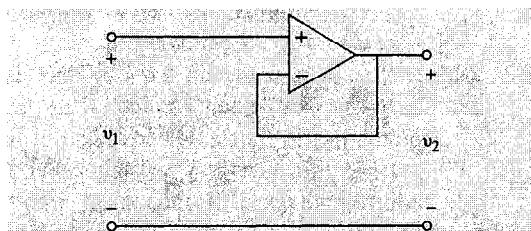
Respuesta $2A/(A + 2)$, o en el límite alto de ganancia de trayectoria abierta, $v_2/v_1 = 2$.

3.5

CONFIGURACIONES BÁSICAS UTILIZANDO OP AMPS

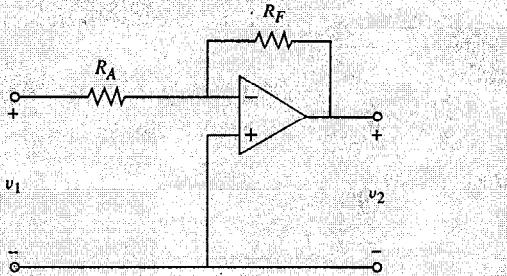
En la presente sección presentaremos varios circuitos simples con op amps que se utilizan frecuentemente como *módulos* o *configuraciones* en el diseño de circuitos más complejos. Cada configuración realiza una sola operación básica, tales como la amplificación de su entrada, o la adición de dos entradas o más. Interconectando estas configuraciones, pueden construirse resultados más complejos, en la misma forma en que una expresión matemática arbitrariamente complicada puede evaluarse por la simple aplicación paso por paso de operaciones de suma, resta, multiplicación y división, o una pared construida apilando adecuadamente unidades hechas de ladrillos o de piedra.

La primera configuración básica es el *seguidor de voltaje* que aparece en la figura 3.14. Para ésta y otras configuraciones que se describirán en esta sección, lo que el circuito "hace" queda resumido en su ecuación de transferencia de voltaje. La ecuación de transferencia de voltaje especifica el voltaje de salida en términos del voltaje (o voltajes) de entrada cuando la puerta de salida está en circuito abierto. El circuito seguidor de voltaje fue analizado en la sección anterior, donde se obtuvo que la ecuación de transferencia de voltaje es simplemente $v_2 = v_1$. Por consiguiente, lo que el seguidor de voltaje hace es producir un voltaje de salida que es igual (sigue) al voltaje de entrada. Esto puede parecer un logro más bien modesto, pero como veremos en la siguiente sección, los seguidores de voltaje son de extrema utilidad práctica. Nótese que el voltaje de entrada a este circuito, v_1 , no debe confundirse con el voltaje de entrada al op amp, v_{in} . La ecuación de transferencia de vol-



$$\text{Ecuación de transferencia de voltaje: } v_2 = v_1 \quad (3.7)$$

FIGURA 3.14 Seguidor de voltaje.



$$\text{Ecuación de transferencia dc de voltaje: } v_2 = -R_F/R_A v_1. \quad (3.8)$$

FIGURA 3.15 Amplificador inversor.

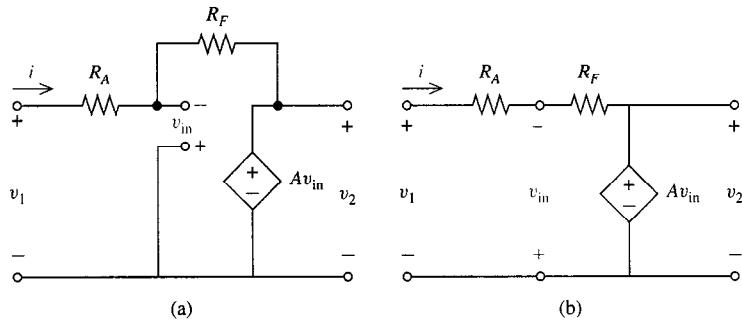


FIGURA 3.16 Análisis del amplificador inversor: (a) utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal; (b) redibujado para más claridad.

taje y la proporción correspondiente de transferencia de voltaje (proporción del voltaje de salida contra el voltaje de entrada, v_2/v_1 en la figura 3.14) son definidos en términos de la entrada a y la salida del circuito, y no la entrada del op amp que está contenida en el circuito.

La ecuación de transferencia de voltaje para el seguidor de voltaje, fue derivada utilizando el modelo ideal de amplificación de voltaje. Puede derivarse este mismo resultado utilizando el modelo mejorado de op amp de la figura 3.9, como se muestra en el ejercicio 3.5.1. Para cada configuración, el uso de los modelos de amplificador de voltaje ideal y de op amp mejorado, se obtiene la misma ecuación de transferencia de voltaje en el límite, conforme A tiende a infinito (que utilizaremos para definir la función de transferencia de voltaje, porque sabemos que A será muy grande para op amps prácticos). Debido a que el análisis es un poco más laborioso utilizando el modelo mejorado del op amp con sus dos resistencias adicionales, pero los resultados no difieren en el límite de ganancia alta de op amp de los que se derivan utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal que es más simple, utilizaremos este último para estudiar cada configuración.

La segunda configuración es el *amplificador inversor* de la figura 3.15. Adviértase que este circuito incorpora la retroalimentación negativa, como lo demuestra la trayectoria de la corriente de la salida a la entrada inversora. Ciertamente, todas las configuraciones incorporarán retroalimentación negativa. Reemplazando el op amp por su modelo ideal de amplificador de voltaje, se obtiene el circuito de la figura 3.16(a).

Examinando la figura 3.16(b)

$$v_{in} = -A v_{in} - R_F i$$

Resolviendo para i y utilizando el hecho de que $v_2 = Av_{in}$,

$$i = \frac{-(A+1)}{R_F} v_{in} = \frac{-(A+1)}{R_F} \frac{v_2}{A} \quad (3.9)$$

Aplicando LVK alrededor de la trayectoria cerrada exterior,

$$v_2 = v_1 - (R_A + R_F)i \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.9) en (3.10) para eliminar i , se obtiene

$$v_2 = v_1 + \frac{R_A + R_F}{R_F} \frac{A+1}{A} v_2 \quad (3.11)$$

Reagrupando los términos con v_2 y despejando para v_2 , se obtiene el resultado

$$v_2 = \frac{-R_F}{R_A + \frac{1}{A}(R_A + R_F)} v_1 \quad (3.12)$$

En el límite superior de ganancia de op amp, conforme A se hace arbitrariamente grande, tenemos la ecuación de transferencia de voltaje para el amplificador inversor:

$$v_2 = \frac{-R_F}{R_A} v_1 \quad (3.13)$$

De (3.13), vemos que la proporción de transferencia de voltaje es siempre negativa para el amplificador inversor, y de ahí su nombre. Esta configuración funciona para crear una copia invertida y a escala de la entrada con el factor de escala (amplificación) impuesto por la elección del diseñador de las resistencias externas R_F y R_A . Igual que el resto de las unidades, la ecuación de transferencia de voltaje no presenta dependencia de la ganancia de trayectoria abierta A , una consecuencia de nuestra insistencia en la retroalimentación negativa.

La siguiente configuración es el *sumador inversor* de la figura 3.17. Difiere del amplificador inversor en el hecho de que tiene más de una entrada. Para analizar este circuito, primero lo convertimos a un amplificador inversor equivalente, y luego utilizamos los resultados que obtuvimos para este circuito. El equivalente de Thevenin de este circuito a la izquierda de la línea punteada en la figura 3.18(a) se evalúa convenientemente primero sustituyendo cada combinación de series de fuentes de voltaje y resistencias por su equivalente menor, y luego sumando las fuentes de corriente y combinando resistencias paralelas. El resultado aparece en la figura 3.18(b).

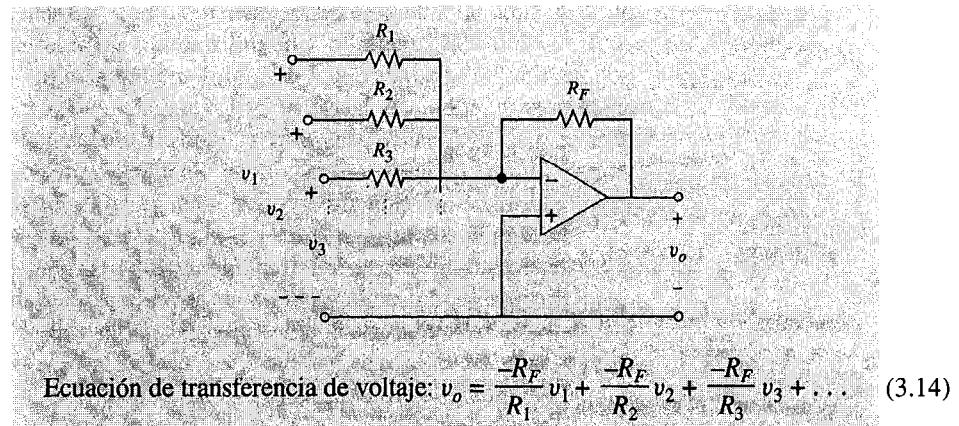


FIGURA 3.17 Sumador inversor.

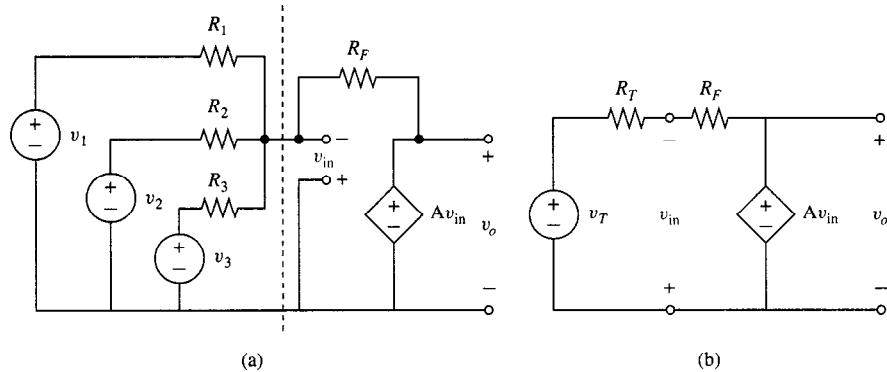


FIGURA 3.18 Análisis del sumador inversor: (a) utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal; (b) luego de la transformación de Thevenin.

En la figura 3.18(b),

$$R_T = R_1 // R_2 // R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (3.15)$$

$$v_T = R_T \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right) \quad (3.16)$$

Para fijar las ideas, en la figura 3.18(a) se han mostrado exactamente tres entradas, y se han utilizado en los cálculos anteriores. La figura 3.18(b) contiene un amplificador inversor de una sola entrada con voltaje de entrada v_T y una proporción de transferencia de voltaje $-R_F/R_T$. Aplicando la ecuación de transferencia de voltaje (3.13) para este circuito con una entrada $v_1 = v_T$ y una resistencia de entrada $R_A = R_T$, se obtiene la ecuación de transferencia de voltaje para el caso de tres entradas, o en general, (añadiendo la elipsis, "...") la ecuación de transferencia de voltaje de la ecuación (3.14). Esta salida de sumador inversor es la suma de sus entradas invertidas y a escala.

Si se desea amplificar sin cambio de signo puede utilizarse el *amplificador no inversor* que aparece en la figura 3.19. Reemplazando el op amp con su modelo ideal de ampli-

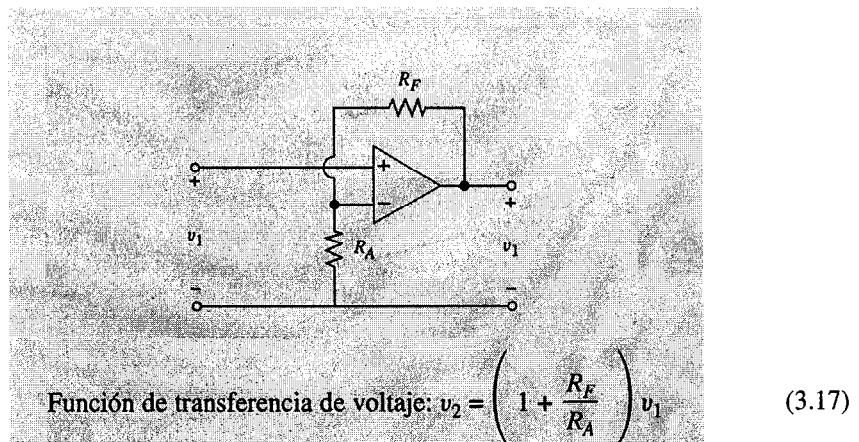


FIGURA 3.19 Amplificador no inversor.

fificador de voltaje, se obtiene lo que aparece en la figura 3.20. Examinando el circuito de salida, R_F y R_A están en series a través de v_2 , o por división de voltajes

$$v_{R_A} = \frac{R_A}{R_A + R_F} v_2 \quad (3.18)$$

Aplicando LVK alrededor de la trayectoria izquierda, se obtiene

$$v_1 = v_{\text{in}} + v_{R_A} \quad (3.19a)$$

Sustituyendo v_2/A por v_{in} y (3.18) por v_{R_A} se obtiene

$$v_1 = \frac{v_2}{A} + \frac{R_A}{R_A + R_F} v_2 \quad (3.19b)$$

El primer término tiende a cero en el límite de ganancia de op amp, con lo que se obtiene la ecuación de transferencia de voltaje (3.17). De este modo, por ejemplo, $R_F = 10 \text{ k}\Omega$, $R_A = 5 \text{ k}\Omega$ resulta en una proporción de transferencia de voltaje de $+3$. Obsérvese que, aun cuando el amplificador inversor no tiene restricciones sobre la magnitud de transferencia de voltaje, la proporción de transferencia de voltaje no inversora debe ser mayor que uno (para resistencias pasivas con resistencia no negativa). Para conseguir valores menores a uno, el voltaje debe ser primero dividido (ver ejercicio 3.5.2) antes de ser una entrada a un amplificador no inversor.

El *sumador no inversor*, de la figura 3.21 puede utilizarse exactamente como el sumador (inversor) anterior. Primero conviértase a un circuito equivalente de una sola entrada

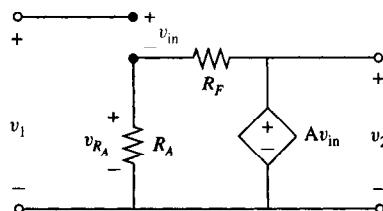
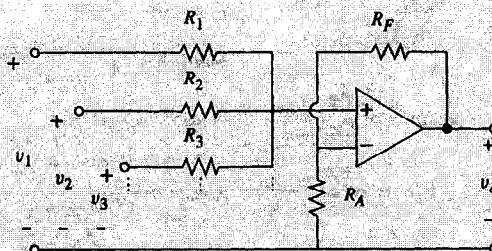


FIGURA 3.20 Reemplazamiento con el modelo ideal de amplificador de voltaje.



$$\text{Ecuación de transferencia de voltaje: } v_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right) \left(\frac{R_T}{R_1} v_1 + \frac{R_T}{R_2} v_2 + \frac{R_T}{R_3} v_3 + \dots \right) \quad (3.20a)$$

$$\text{donde } R_T = R_1//R_2//R_3//\dots \quad (3.20b)$$

FIGURA 3.21 Sumador no inversor.

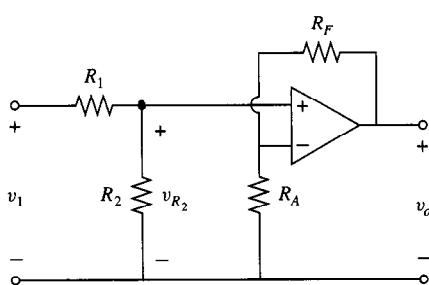
por la transformación de Thevenin y luego aplíquese la ecuación de transferencia de voltaje para el caso de una sola entrada que ya fue determinado. Por (3.17), la ecuación de transferencia de voltaje para el sumador no inversor es

$$v_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right) v_T \quad (3.21)$$

con v_T dado por (3.16). Aunque (3.16) es específica a tres entradas, la elipsis... en (3.20), indican nuevamente, la generalización inmediata a cualquier cantidad de entradas v_1, v_2, \dots . Esta unidad tiene el efecto de triplicar y sumar sus entradas (sin inversión de signo).

Estos cinco circuitos constituyen la mayor parte de las configuraciones que utilizaremos. Posteriormente, se presentará un circuito adicional. Esto es de algún modo sorprendente, dada la simplicidad de estos circuitos, que sean suficientes para construir muchos circuitos de considerable significado práctico. Lo único que debemos considerar, es la forma en que se interconectan, como lo haremos en la siguiente sección, y permitir que los inductores y capacitores en las unidades estén listos, con el fin de comprender y diseñar muchos circuitos interesantes como filtros y computadoras analógicas.

EJERCICIOS



EJERCICIO 3.5.2

3.5.1. Utilizando el modelo de op amp mejorado (figura 3.9) con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$ y $R_o = 30 \Omega$, determine primero la salida v_2 del seguidor de voltaje (figura 3.14) en término de la ganancia A del op amp, y luego en el límite superior de ganancia de op amp. ¿La ecuación de transferencia de voltaje concuerda con lo que se calculó anteriormente en (3.7)?

Respuesta $\frac{A + 0.00003}{A + 1.00003} v_1; v_1; \text{sí}$

3.5.2. Este ejercicio demuestra cómo obtener una proporción de transferencia de voltaje positiva menor a uno. Utilizando el modelo de op amp ideal, determine el voltaje v_{R2} . Luego determine v_o , haciendo notar que v_{R2} es la entrada al amplificador no inversor. Especifíquense valores para las resistencias que resulten en una proporción general de transferencia de voltaje de un tercio (la respuesta no es única).

Respuesta $\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1; \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right) v_1; R_F = R_A; R_1 = 5R_2$

3.5.3. Diseñese un sumador no inversor cuya ecuación de transferencia de voltaje es $v_o = 2 v_1 + 5 v_2$.

Respuesta En la figura 3.21, elíjase cualquier R_A y R_2 ; luego fíjese $R_F = 6 R_A$ y $R_1 = 2.5 R_2$.

3.6 INTERCONEXIÓN DE UNIDADES OP AMPS

Las configuraciones de op amp son módulos simples que pueden conectarse entre sí para producir comportamientos de circuito más complejos. En esta sección consideraremos una forma particularmente útil de interconectar estos módulos, y cómo predecir el comportamiento del circuito interconectado a partir de los módulos que conforman sus partes.

Una *puerta* en un circuito es un par de cables a los que puede conectarse otro subcristo. Los circuitos con configuraciones con op amp tienen cada uno una puerta de salida, y por lo menos una puerta de entrada. Los circuitos que contienen una sola entrada y una sola puerta de salida, por ejemplo el seguidor de voltaje y los amplificadores inversores y no inversores de la sección anterior, son designados *circuitos de dos puertas*. Aquellas puertas adicionales, tales como los sumadores inversores y no inversores, son designados *circuitos de n-puertas*.

La forma más directa de conectar un par de circuitos de dos puertas, es conectar la puerta de salida de uno con la puerta de entrada del otro. Esto se conoce como *interconexión en cascada* de dos puertas. Conectar en cascada dos (o más) circuitos de dos puertas, da como resultado un circuito interconectado que también tiene dos puertas, como se muestra en la figura 3.22. Aquí, v_1 es el voltaje de entrada al circuito general en cascada y v_3 es el voltaje de salida.

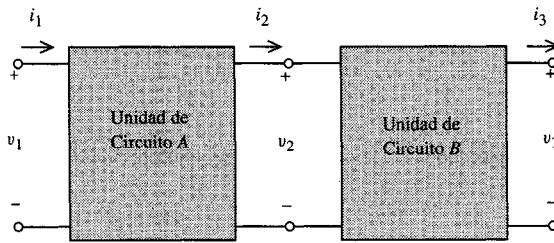


FIGURA 3.22 Interconexión en cascada de dos configuraciones con op amp.

Cada unidad op amp se caracteriza por su ecuación de transferencia de voltaje, que especifica el voltaje de salida como función de voltaje o voltajes de entrada, bajo la condición de que la puerta de salida esté en circuito abierto. Cuando las unidades op amp están interconectadas, lo que describe su comportamiento es la función de transferencia de voltaje a través de todo el circuito interconectado. Por consiguiente, para unidades op amp de dos puertas en cascada, determinaremos la ecuación de transferencia de voltaje en general.

En referencia a la figura 3.22, sea que la puerta de salida (v_3) esté en circuito abierto, como se requiere por la definición de la ecuación en transferencia de voltaje. Aplicando la ecuación a transferencia de voltaje para la unidad B , $v_3 = K_B v_2$, donde K_B es la proporción de transferencia de voltaje. Luego, para obtener la ecuación a transferencia de voltaje $v_3 = K_C v_1$ para la cascada general, lo único que necesitamos es expresar v_2 en términos de v_1 . Si $i_2 = 0$ la salida de la unidad A también está en circuito abierto, y v_2 se obtiene aplicando la ecuación de transferencia de voltaje $v_2 = K_A v_1$ de A . El resultado total es por consiguiente $v_3 = K_A K_B v_1$; es decir, $K_C = K_A K_B$.

Ejemplo 3.4

Téngase la ecuación de transferencia de voltaje (entrada v_1 , salida v_3 , para el circuito de la figura 3.23. Utilícese el modelo de amplificador de voltaje ideal para los op amps.

La configuración a la extrema derecha, es un amplificador no inversor con $v_3 = (1 + R_F/R_A)v_2$ o $v_3 = 3v_2$. $i_2 = 0$ puesto que el modelo de amplificador de voltaje ideal para su op amp tiene una entrada en circuito abierto. La configuración a la izquierda es un amplificador inversor con proporción de transferencia de voltaje $-R_F/R_A = -4$. Puesto que su puerta de salida está en circuito abierto ($i_2 = 0$), v_2 puede evaluarse exactamente utilizando la ecuación de transferen-

cia de voltaje para esta unidad, $v_2 = -4v_1$. Luego, combinando, $v_3 = 3(-4v_1) = -12v_1$. La proporción de transferencia de voltaje para la cascada es producto de las proporciones de transferencia de voltaje individuales.

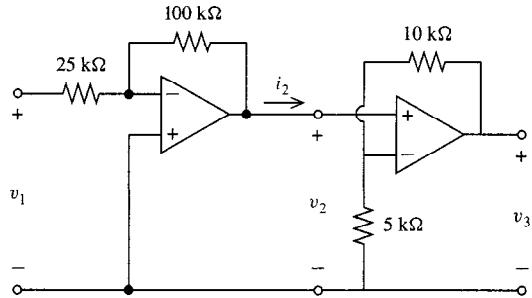


FIGURA 3.23 Circuito para el ejemplo 3.5.

Supóngase que i_2 no es igual a cero en la figura 3.22. El modelo de amplificador de voltaje ideal del op amp predice que el voltaje de salida de cada unidad debe ser independiente de i_2 , puesto que es sólo el voltaje a través de una FVCV (véase figura 3.7), cuya función de fuente no depende de la corriente de salida i_2 . De modo que aunque se suponga en su definición la salida de circuito abierto, la ecuación de transferencia de voltaje sigue aplicándose al calcular el voltaje de salida para un circuito de unidades, aun cuando la salida no está en el circuito abierto. Este análisis utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal sugiere que conectar una carga, como en el caso de ultra unidad op amp, a la puerta de salida de una unidad anterior, no afectará el voltaje de salida.

Por consiguiente, *para unidades en cascada, la proporción general de transferencia de voltaje es simplemente el producto de las proporciones individuales de transferencia de voltaje*, únicamente a condición de que el modelo de amplificador de voltaje de los op amps pueda utilizarse con precisión. El mismo principio también se aplica a unidades op amp de n -puertas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5

Obtégase la ecuación de transferencia de voltaje del circuito de la figura 3.24. Utilícese el modelo de amplificador de voltaje ideal para los op amps.

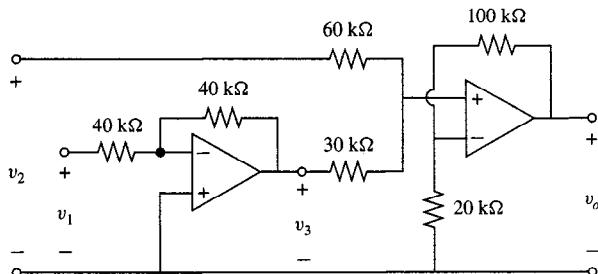


FIGURA 3.24 Circuito para el ejemplo 3.6.

La unidad de la derecha es un sumador no inversor de dos entradas con el voltaje de v_2 y v_3 y salida v_o . Utilizando la ecuación de

transferencia de voltaje 3.17 para esta unidad,

$$v_o = \left(1 + \frac{100K}{20K}\right) (60K//30K) \left(\frac{v_2}{60K} + \frac{v_3}{30K}\right)$$

donde K es la multiplicación por 10^3 , y \parallel es el operador paralelo equivalente.

$$60K//30K = \frac{1}{1/60K + 1/30K} = 20K$$

Entonces,

$$v_o = 2v_2 + 4v_3 \quad (3.22)$$

La unidad restante es un amplificador inversor del

$$v_3 = \frac{-40K}{40K} v_1 = -v_1$$

Combinando estos dos resultados, la ecuación de transferencia de voltaje total es

$$v_o = 2v_2 + 4(-v_1) = 2v_2 - 4v_1 \quad (3.23)$$

Combinando unidades de distintos tipos, debemos obtener resultados que van más allá de lo que sería posible utilizando uno solo. Este ejemplo demuestra cómo una *diferencia*, en contraposición a una suma inversora o no inversora de voltajes, puede generarse combinando unidades inversoras y no inversoras.

El principal resultado de esta sección, es decir, que cuando las configuraciones con op amps se conectan en cascada, y que por consiguiente la ecuación general de transferencia de voltaje puede obtenerse simplemente combinando las ecuaciones de transferencia de voltaje de cada unidad individual, se justifica utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal para cada op amp. El resultado se obtuvo a partir de la falta de dependencia del voltaje de salida y sobre la corriente de salida. El modelo op amp mejorado de la figura 3.9 contiene una resistencia adicional R_o en su trayectoria cerrada de salida. La corriente producida por sus FVCV, que abastece tanto la corriente de salida (i_2 en la figura 3.22) y la corriente a la trayectoria de retroalimentación presente en toda configuración con op amp, deben todas pasar a través de R_o . Por LVK, el modelo op amp mejorado predice, por consiguiente, que el voltaje de salida se reducirá conforme aumenta la corriente de salida (su suma es igual a $A v_{in}$, que no depende de esta corriente). Los dos modelos parecen discordantes respecto a si el voltaje de salida quedará constante, como lo predice el modelo de amplificador de voltaje ideal, o disminuirá conforme aumente la corriente de salida, como lo sugiere el modelo mejorado.

¿Qué modelo nos da la predicción correcta? Como puede anticiparse al llamarlo un modelo de op amps “mejorado”, las mediciones directas verifican que, conforme se incrementa la corriente de salida en cualquier configuración, su voltaje de salida declina como lo predice el modelo mejorado. La disminución de voltaje de carga (salida) con corriente de carga se conoce como *cargar* y es un fenómeno general, que no sólo está restringido a las configuraciones con op amps. Como se exploró en el ejercicio 3.6.1, la carga es una consecuencia de la división de voltaje entre la resistencia interna y la resistencia de carga. Debe ocurrir un cierto grado de carga cada vez que una fuente tiene una resistencia equivalente de Thevenin no nula, y está conectada a través de una resistencia de carga finita.

¿Debemos entonces abandonar nuestros resultados principales, derivados mediante el modelo de amplificador de voltaje ideal, que no tiene resistencia interna y por consiguiente no manifiesta carga? Para niveles suficientemente bajos de corriente de salida el grado de carga, es decir, la reducción del voltaje de salida es despreciable, y nuestros resultados tienen una excelente precisión. Los niveles de corriente pueden mantenerse bajos al hacer que las resistencias de los circuitos de unidades se mantengan altas, lo que explica por qué se utilizan valores de $5k\Omega$ y más en ejemplos y problemas.

En resumen, para obtener una buena aproximación, una cascada de configuraciones con op amps tiene una ecuación de transferencia de voltaje que puede calcularse simplemente combinando las ecuaciones de transferencia de voltaje individuales. *Para dos-puertas en cascada, la proporción general de transferencia de voltaje es el producto de las proporciones de transferencia de voltaje de dos-puertas que constituyen el circuito.* Utilizando esta regla de combinación, los circuitos que involucran unidades múltiples pueden destinarse para lograr objetivos relativamente complejos, y sin embargo ser analizados fácilmente multiplicando estas proporciones de diferencia de voltaje. El rango y versatilidad del enfoque de unidades para el diseño de circuitos con op amps, sugerido por los resultados de esta sección, serán apreciados en su totalidad al introducir capacitores e inductores en las unidades, lo cual se hará en el capítulo 7.

EJERCICIOS

3.6.1. Considérese una fuente con resistencia equivalente de Thevenin R_T y un voltaje equivalente de Thevenin v_T . Si se coloca una carga de R_L ohms a través de las terminales de la fuente como en la figura 3.25(a), (a) ¿Cuál es el voltaje de la carga del circuito abierto (es el voltaje a través de R_L cuando R_L es infinito)? (b) Obténgase el valor para la resistencia R_L en donde la carga ha reducido v_L a la mitad de su valor máximo (circuito abierto). (c) Si se inserta un seguidor de voltaje entre la fuente y la carga como se muestran en la figura 3.25(b), demuéstrese que se elimina la carga. La *amortiguación* de una fuente desde una carga para eliminar la carga, es uno de los principales usos de un seguidor de voltaje.

Respuesta v_T, R_T, V_L (sin amortiguador) = $(R_L + V_T)/(R_L + R_T)$, pero V_L (con amortiguador) = V_T . La carga reduce el voltaje de salida por un factor igual a la proporción de divisor de voltaje.

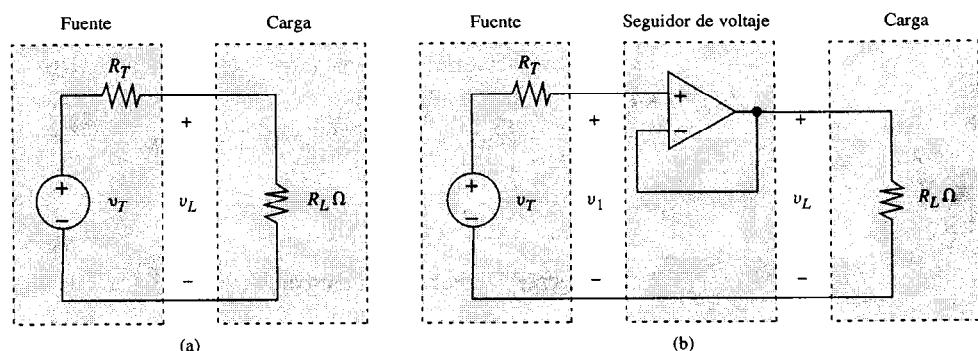
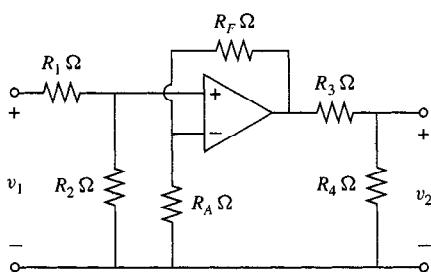


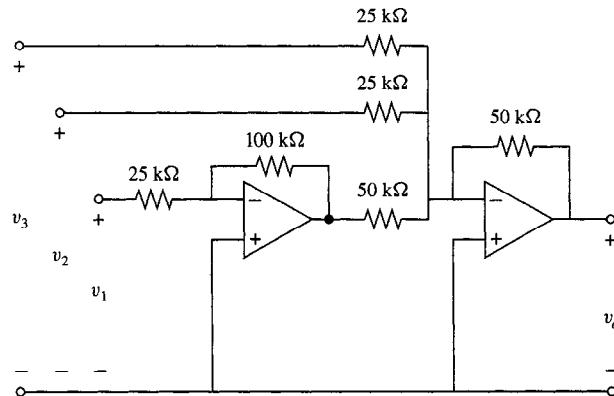
FIGURA 3.25 Sobrecarga con y sin un aislador entre la fuente y la carga: (a) conexión directa; (b) conexión aislada utilizando un seguidor de voltaje.

3.6.2. Diséñese un circuito con una ecuación de transferencia de voltaje $v_o = 8v_1 - 2v_2 - v_3$. Utilícese únicamente unidades inversoras, y selecciónense todas las resistencias para que estén en el rango de entre $5\text{ k}\Omega$ a $500\text{ k}\Omega$.

Respuesta Exprésese v_o como $v_o = -2(-4v_1) - 2v_2 - v_3$. Considérese el término entre paréntesis como la medida de un amplificador inversor con salida v_1 y proporción de transferencia de voltaje -4 . Luego diríjase este voltaje, junto con los voltajes v_2 y v_3 , a un sumador inversor con proporciones de transferencia de voltaje apropiados (-2 , -2 y -1).



EJERCICIO 3.6.3



EJERCICIO 3.6.2

3.6.3. Determinese la proporción de transferencia de voltaje v_2/v_1 .

$$\text{Respuesta} \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_F}{R_A} \right) \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

3.7 OP AMPS PRÁCTICOS

Los op amps no son meramente diagramas esquemáticos a los que se pueden aplicar las leyes de los análisis de circuitos, sino dispositivos físicos con tamaño y peso, que requieren fuentes de poder y atención a otras consideraciones prácticas. A continuación, se hará una breve introducción a las cuestiones de presentación física y límites en su eficiencia y entorno. Estos temas se examinan a un nivel de detalle más satisfactorio en los cursos de circuito electrónicos, que típicamente siguen un primer curso en un análisis de circuitos.

Empaque físico

Las primeras generaciones de op amps comerciales, que hicieron su aparición hace más de 50 años, eran dispositivos grandes y pesados fabricados con bulbos y componentes *RLC* discretos. Su tamaño, costo y apetito de energía, limitaron su uso a las aplicaciones más críticas, particularmente para realizar operaciones matemáticas cruciales en computadoras predigitales para unidades de control de disparo en baterías de defensa aérea. De ahí el nombre “amplificador operacional”. En 1962, la empresa Fairchild Electronics introdujo

el μ A709, el primer op amp monolítico, miniaturizado en un chip de silicón del grosor de una cáscara de huevo y que ocupaba una fracción de pulgada cuadrada. Las notables reducciones en tamaño y costo creados mediante este uso de la tecnología de circuitos integrados, abrieron las puertas al uso generalizado de op amps en un amplio rango de aplicaciones industriales y electrónicas al consumidor. Las sucesivas generaciones de op amps han aprovechado los avances en microelectrónica, lo que dio por resultado una integración, eficiencia y confiabilidad constantemente mejoradas, y a precios menores que el de un timbre postal. Actualmente, el op amp es una verdadera maravilla de la invención y el refinamiento, y es una de las principales piezas de batalla del diseño electrónico moderno.

Los op amps actualmente están disponibles en una variedad de empaques y usos convenientes. El más popular de ellos, el op amp μ A741 para propósitos generales, en una presentación dual de 8 clavijas en línea (DIP) aparece en la figura 3.26. Las clavijas 4 y 7 están asignadas para conectarse a la fuente de poder. Si no se aplican las corrientes adecuadas dc por la fuente de poder a los niveles de voltaje que se indican, los transistores contenidos en el circuito con op amp no actuarán para producir la FVCV con comportamiento de alta ganancia que caracteriza a todos los op amps funcionales.

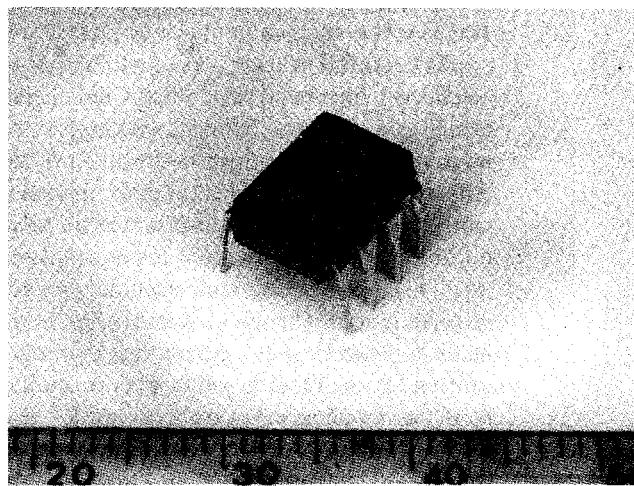


FIGURA 3.26 Un op amp (el μ A741 en una presentación DIP de 8 clavijas). Escala en milímetros.

Además de su presentación como chips separados, los op amps son frecuentemente utilizados como módulos contenidos en otros chips de circuitos integrados. Los seguidores de voltajes se utilizan comúnmente como aisladores en las clavijas de entrada y salida de circuitos integrados para evitar la sobrecarga. Los op amps conforman partes esenciales de convertidores analógicos a digitales (AD) y digitales a analógicos (DA), amplificadores de instrumentación, filtros activos y muchos otros módulos electrónicos a nivel de chip. No es infrecuente que se designen docenas de módulos op amp en un solo chip de circuito integrado a gran escala (CIGE).

Eficiencia y límites del entorno

El op amp fue definido en la sección 3.3 como un dispositivo electrónico que, bajo ciertas circunstancias, se comporta como una FVCV con alta ganancia. Entre las circunstancias que necesitan establecerse incluyen condiciones y operaciones adecuadas del entorno dentro de una “envoltura de eficiencia” o rango permisibles de las variables de circuito. Poniendo cuidadosa atención a estas limitaciones, el op amp, a pesar de su complejidad

física, ciertamente se comportará como se predice por su simple modelo de amplificador de voltaje ideal.

Las condiciones del entorno que necesitan mantenerse, incluyen utilizar una fuente de poder que desarrolle los voltajes correctos y que esté libre de picos y caídas, una protección adecuada de otras señales electrónicas y magnéticas, y que opere en el rango correcto de temperatura. La microminiaturización, con todos sus beneficios, pone muchos elementos en una superficie sumamente pequeña, lo que puede provocar sobrecalentamiento y fallas del circuito. La refrigeración adecuada de tableros de circuitos densamente poblados es una importante consideración para diseñar sistemas electrónicos modernos. Para circuitos sumamente densos, tales como la unidad procesadora central de las supercomputadoras, se requieren de elaborados sistemas de refrigeración para disipar el calor producido.

Las limitaciones de la eficiencia incluyen el voltaje, la corriente, la potencia y la frecuencia. Todos los voltajes y corrientes deben mantenerse dentro del régimen lineal de operación. Típicamente, esto significa que los voltajes no pueden exceder los valores de la fuente de poder; y las corrientes deben estar estrictamente limitadas por los valores indicados. Si se produce demasiado voltaje de salida, el op amp recortará la señal cerca de sus valores para fuentes de poder; es decir, la salida se limitará en amplitud por los valores positivos y negativos de la fuente de poder. Si se necesita demasiada potencia, el circuito no se conformará a su comportamiento lineal predicho o, lo que es más lamentable, se sobrecalentará y finalmente se fundirá. Ciertamente, en los diseños de op amp más populares, se construyen circuitos limitantes de corriente para protegerlos de este fenómeno. Los op amps también están limitados en la banda de frecuencia sobre la que pueden actuar. Aunque existen op amps más especializados para bandas más anchas, la mayoría de los circuitos de op amp están diseñados para operar sobre frecuencias muy por debajo de 1 MHz. La dependencia de frecuencia de los op amps serán considerados en el capítulo 14.

El diseñador experimentado de circuitos con op amps tomará en consideración otros factores prácticos: golpes y vibraciones, corrientes y voltajes desviados, y límites acumulados de régimen (por ejemplo, máximo régimen de cambio en volts/segundo), y no es de sorprender que un dispositivo electrónico como un op amp pueda hacerse funcionar bien en manos de un experimentado diseñador de circuito. Lo que sí es sorprendente, es que los circuitos con op amp bien comportados pueden ser hechos más bien fácilmente por aquellos que no necesariamente son expertos. Lo único que se necesita es utilizar los op amps actuales, altamente miniaturizados e integrados, unas cuantas resistencias y baterías poco costosas, para construir un circuito con op amp que se comporta con un alto grado de precisión, como lo predice el modelo de amplificador de voltaje ideal del op amp.

RESUMEN

Las fuentes dependientes, aquellas cuyas funciones de fuente dependen del valor de una corriente o voltaje de otra parte del circuito, se utilizan para construir un modelo de comportamiento de dispositivos activos como los transistores y op amps. Un op amp es un dispositivo que, bajo las condiciones adecuadas, se comporta como una fuente de voltaje controlada por voltaje con muy alta ganancia. Los op amps son unos de los dispositivos activos más versátiles, y serán tratados como un elemento de circuito básico por el resto del presente libro.

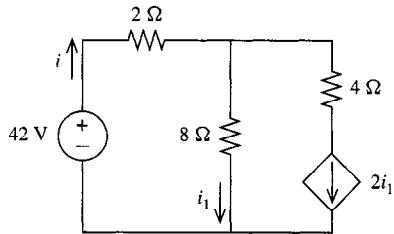
- Los circuitos que contienen fuentes dependientes pueden analizarse al tratar las fuentes como si fuesen dependientes, y luego sustituyendo la variable de control en la función de fuente dependiente.
- El modelo de amplificador de voltaje ideal para el op amp consiste de una entrada de circuito abierto y una salida de fuente de voltaje controlada por voltaje.

- El modelo mejorado del op amp reemplaza la entrada de circuito abierto con una resistencia de entrada alta pero finita (por ejemplo, $1 M\Omega$), y añade una baja resistencia (por ejemplo, 30Ω) en serie con el circuito de salida. Este modelo es más preciso, pero contiene más elementos.
- Un op amp está en una configuración de retroalimentación negativa cuando un incremento en su voltaje de salida produce una disminución en su voltaje de salida.
- La retroalimentación negativa es necesaria para un comportamiento del op amp útil en todas sus aplicaciones para circuitos lineales, tales como las configuraciones con op amp: amplificadores y sumadores inversores y no inversores, y el seguidor de voltaje.
- La ecuación de transferencia de voltaje es una ecuación lineal que relaciona el voltaje o voltajes de entrada de un circuito con op amp con su voltaje de salida. La proporción de voltaje de entrada contra salida se conoce como proporción de transferencia de voltaje.
- La proporción de transferencia de voltaje de dos configuraciones con op amp conectadas en cascada es el producto de sus proporciones de transferencia de voltaje individuales.

Los diagramas de circuito para op amps físicos son complicados, y contienen muchos transistores y otros elementos. Pero cuando se configuran adecuadamente, puede construirse un modelo muy simple para los op amps, y son un elemento esencial en el diseño de circuitos modernos.

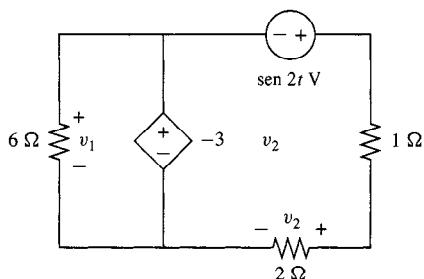
PROBLEMAS

3.1. Obténgase i .



PROBLEMA P3.1

3.2. Obténgase v_1

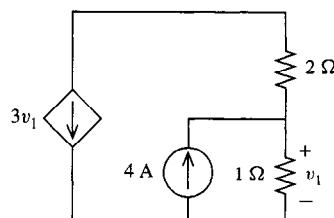


PROBLEMA P3.2

3.3. Dibújese el símbolo de circuito para dos fuentes controladas distintas, cada una de ellas equivalente a una resistencia de $1-k\Omega$.

3.4. Dense ejemplos de una fuente controlada activa y una fuente controlada pasiva (ver problema 3.3).

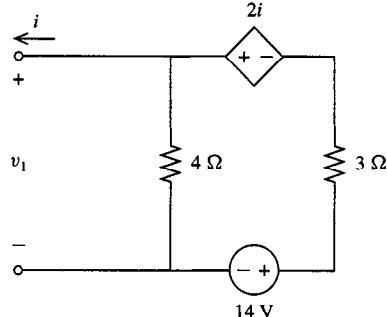
3.5. ¿Cuál da más potencia, la fuente independiente o la dependiente?



PROBLEMA P3.5

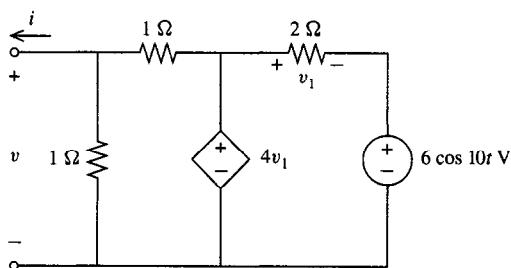
3.6. ¿Para qué valor de transconductancia de la fuente dependiente del problema 5.5 surge una inconsistencia matemática?

3.7. Obténgase el circuito equivalente de Thevenin



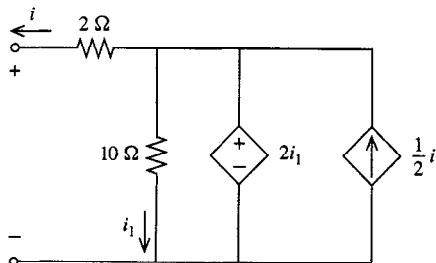
PROBLEMA P3.7

3.8. Obténganse los equivalentes de Thevenin y de Norton



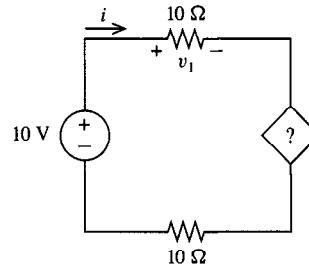
PROBLEMA P3.8

3.9. Este circuito es equivalente a una sola resistencia ¿cuál es ésta?



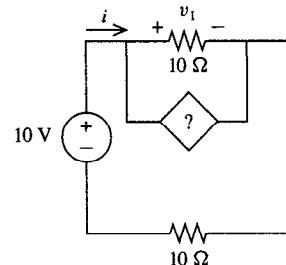
PROBLEMA P3.9

3.10. Deseamos hacer que $i = 1$ A. Obténganse dos tipos distintos de fuentes dependientes que pueden hacer esto, especificando sus funciones de fuente.



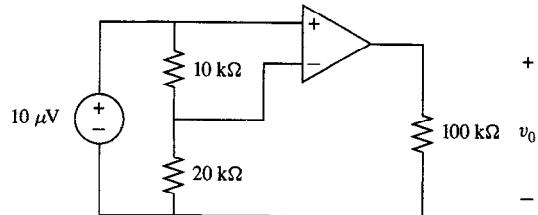
PROBLEMA P3.10

3.11. Deseamos hacer que $i = -1$ A. Obténganse dos tipos distintos de fuentes dependientes que puedan hacer esto, especificando sus funciones de fuente.



PROBLEMA P3.11

3.12. Obténgase v_o . Utilícese el modelo del op amp ideal con $A = 100,000$.



PROBLEMA P3.12

3.13. Repítase el problema 3.12, pero utilícese el modelo mejorado de op amp con parámetros $A = 100,000$, $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, y $R_o = 30 \text{ }\Omega$.

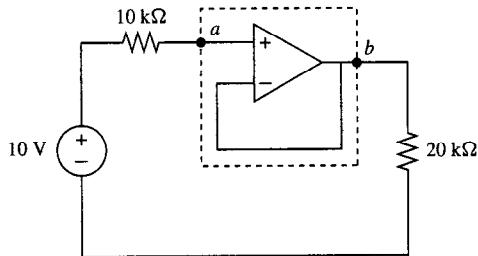
3.14. Demuestre que el modelo mejorado del op amp de la figura 3.9 puede ser redibujado utilizando una FCCC en vez de una FVCV.

3.15. Utilizando un amplificador inversor, diseñe un circuito con $v_2 = -9v_1$. Manténganse las resistencias de entre 5 a 500 kΩ.

3.16. Utilizando un amplificador inversor, diseñe un circuito con $v_2 = -\frac{1}{9}v_1$. Mantenga la resistencia en el rango de entre 5 a 500 kΩ.

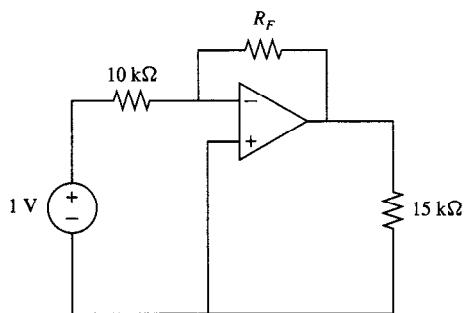
3.17. Utilizando un amplificador no inversor, diseñe un circuito con $v_2 = 7v_1$. Mantenga todas las resistencias en el rango de entre 5 a 500 kΩ.

3.18. Compárese la potencia transmitida a la resistencia de 20-kΩ en este circuito aislador, con un circuito igual donde se elimina el seguidor de voltaje (*a* y *b* conectados entre sí).



PROBLEMA P3.18

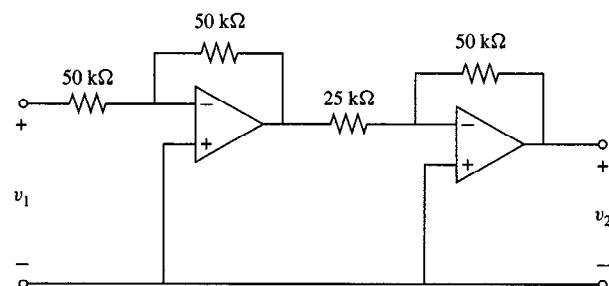
3.19. Si deseamos dar $\frac{1}{2}$ mW de potencia a la carga de 15-kΩ, $R_F = ?$



PROBLEMA P3.19

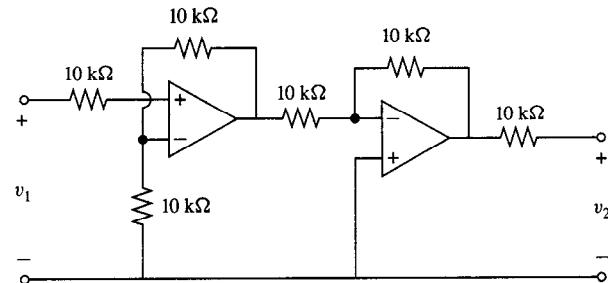
3.20. Utilizando un divisor de voltaje seguido de un amplificador no inversor, diseñe un circuito con $v_2 = +\frac{1}{7}v_1$. ¿Podemos invertir el orden de estos dos subcircuitos y obtener el mismo resultado?

3.21. Obténgase k en la transferencia de voltaje $v_2 = kv_1$.



PROBLEMA P3.21

3.22. Obténgase k en la función de transferencia de voltaje $v_2 = kv_1$.



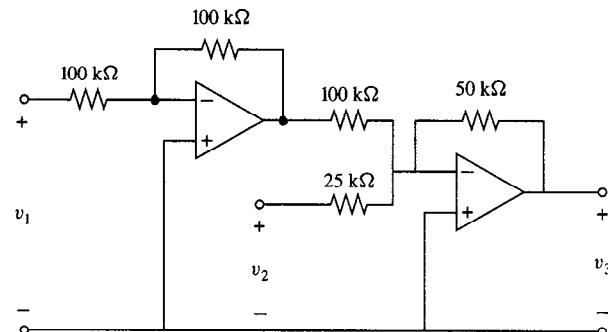
PROBLEMA P3.22

3.23. Demuéstrese cómo se puede crear un circuito con $v_2 = 1000v_1$ al conectar en cascada tres etapas de amplificador *idénticas*. Manténganse todas las R en el rango de entre 5 a 500 kΩ.

3.24. Diseñe un circuito con $v_3 = -2v_1 - 5v_2$. Manténganse todas las resistencias en el rango de entre 5 y 500 kΩ.

3.25. Diseñe un circuito con $v_5 = -v_1 - 2v_2 - 3v_3 + 4v_4$. Manténgase todas las resistencias en el rango de entre 5 a 500 kΩ.

3.26. Obténgase la función de transferencia de voltaje $v_3 = k_1v_1 + k_2v_2$.



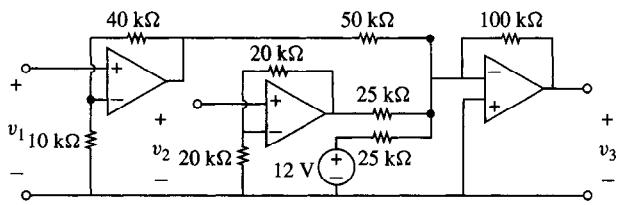
PROBLEMA P3.26

3.27. Diseñe un circuito con $v_3 = 3v_1 = 2v_2$ utilizando un solo sumador no inversor.

3.28. Repítase 3.26 utilizando dos etapas inversoras en vez de una sola no inversora.

3.29. Si todas las resistencias externas en cualquiera de las configuraciones fueran multiplicadas por la misma constante, ¿qué efecto tendría esto sobre la función de transferencia de voltaje? Sobre las corrientes que pasan a través de la resistencia externa?

3.30. Obténgase la ecuación de transferencia de voltaje (entradas v_1 , v_2 ; salida v_3).



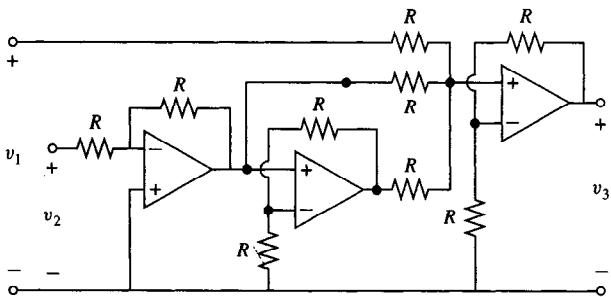
PROBLEMA P3.30

Problemas más complejos

3.31. Diseñese un circuito con $v_3 = 5v_1 = 4v_2$ en los dos sentidos.

(1) Utilícese únicamente op amps, en configuraciones inversoras.

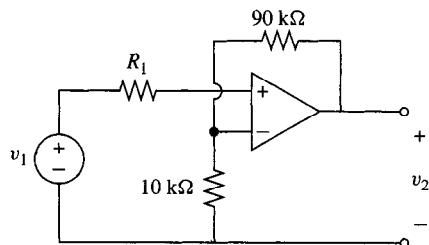
3.32. Obténgase la función de transferencia de voltaje $v_3 = k_1v_1 + k_2v_2$ cuando $R = 100 \text{ k}\Omega$. Repítase con $R = 10 \text{ k}\Omega$.



PROBLEMA P3.32

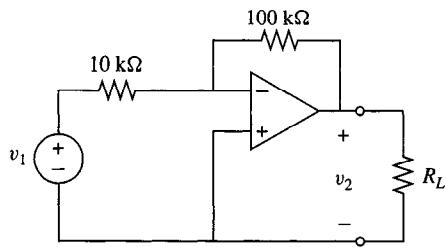
3.33. Diseñe un circuito que satisfaga $v_5 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4$. Manténganse todas las R dentro del rango de entre 5 a 500 $\text{k}\Omega$.

3.34. ¿Para qué rango de resistencias R_i los valores de v_2 , calculados utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal de la figura 3.7 y el modelo mejorado de la figura 3.9, difieren en por lo menos 1%?. Utilícese $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 30 \Omega$.



PROBLEMA P3.34

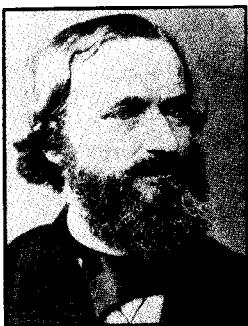
3.35. ¿Para qué rango de resistencia R_L los valores de v_2 , calculados utilizando el modelo de amplificador de voltaje ideal de la figura 3.7 y el modelo mejorado de la figura 3.9, difieren en por lo menos 1%?. Utilícese $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 30 \Omega$.



PROBLEMA P3.35

4

Métodos de análisis



Gustav Robert Kirchhoff
1824–1887

Debe haber aquí una cuestión fundamental [acerca de sus investigaciones con Bunsen].

Gustav Robert Kirchhoff

La ley de Ohm es fundamental para circuitos eléctricos, pero para poder analizar aun los circuitos más simples, se requiere de dos leyes fundamentales formuladas en 1847 por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff. Estas leyes, la ley de corriente y la ley de voltaje de Kirchhoff, son notables si se considera que el principal interés de Kirchhoff fue su innovadora investigación en espectroscopía, realizada en conjunto con el químico alemán Robert Bunsen, a quien le debemos el mechero de Bunsen. En ese campo, hay otra ley de Kirchhoff: la ley de radiación.

Kirchhoff nació en Königsberg, Prusia Oriental, hijo de un abogado. Ingresó a la Universidad de Königsberg a la edad de 18 años, donde se doctoró cinco años después. Al recibir este título, en 1847, casó con la hija de Friedrich Richelot, uno de sus famosos profesores de matemáticas, y al mismo tiempo recibió una beca para continuar sus estudios en París. Cabe hacer notar que estas becas rara vez se otorgaban. Los disturbios políticos que desembocaron en la ola de revoluciones europeas de 1848 lo obligaron a cambiar sus planes, y fue profesor en Berlín. Dos años después, conoció a Bunsen, y ambos iniciaron su famosa colaboración. El gran éxito de Kirchhoff en espectroscopía alejó la atención de sus contribuciones a otras ramas de la física, aunque sin sus leyes eléctricas, la teoría de circuitos no existiría.

Contenido del capítulo

- **4.1 Linealidad y proporcionalidad**
- **4.2 Superposición**
- **4.3 Análisis nodal**
- **4.4 Circuitos que contienen fuentes de voltaje**
- **4.5 Análisis de mallas**
- **4.6 Circuitos que contienen fuentes de corriente**
- **4.7 Principio de corto virtual para op amp**
- **4.8 Análisis de circuito con computadora utilizando SPICE**
- **Resumen**
- **Problemas**



En el capítulo 2 consideramos métodos para analizar circuitos simples; recordamos aquí que son aquellos que pueden describirse por una sola ecuación con una sola incógnita de corriente o voltaje. Si se desea describir circuitos más generalizados, se requiere de un conjunto de ecuaciones simultáneas con varias variables de circuitos.

En el presente capítulo resolveremos el desafío de estos circuitos más generalizados desarrollando métodos sistemáticos para formular y resolver conjuntos de ecuaciones que permiten un *análisis completo de cualquier circuito lineal*. Consideraremos dos métodos; el primero se basa especialmente en la ley de corriente de Kirchhoff (método conocido como análisis nodal), y el segundo, en la ley de voltaje de Kirchhoff (análisis de redes).

Cada uno de estos métodos origina un conjunto de ecuaciones que sólo contienen un pequeño subconjunto de todos los voltajes y corrientes en el circuito. A partir de lo descrito en los capítulos previos, ya debe ser evidente que el análisis completo de un circuito debe ser realizado primeramente *descomponiendo el circuito*, es decir, obteniendo los valores de unas cuantas variables de los circuitos más importantes. Una vez que éstas se resuelven, es fácil obtener las demás. Por ejemplo, en un circuito simple que consiste en un solo circuito cerrado, la variable más importante es la corriente del circuito cerrado. Una vez que se descompone el circuito al obtener la corriente, podemos obtener todos los voltajes del circuito aplicando las leyes de los elementos individuales con corrientes conocidas (y, desde luego, todo elemento de corriente es igual a la corriente del circuito cerrado).

Iniciamos con las secciones 4.1 y 4.2, donde se demuestra cómo pueden usarse los principios de proporcionalidad y superposición para dividir un problema de circuitos lineales que involucran varias fuentes, en problemas de componentes, donde cada uno involucra una sola variable, o una sola fuente. Esto a veces puede emplearse para simplificar circuitos más generalizados y, por consiguiente, para resolverlos utilizando los métodos previamente descritos, que generalmente son aplicables únicamente a circuitos simples. Luego desarrollaremos los métodos de análisis nodal y de análisis de redes, dos técnicas indispensables en la práctica del análisis y diseño de circuitos. Los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales presentados en la sección 4.7 facilitan el análisis de circuitos que contienen op amps. El capítulo concluye con las primeras nociones del programa de computadora SPICE de simulación de circuitos y análisis. Utilizaremos con frecuencia el SPICE en el transcurso de nuestro estudio para revisar nuestros resultados numéricos, y para obtener experiencia práctica con un rango de circuitos más amplio de lo que podría resolverse cómodamente sin el nivel de apoyo computarizado proporcionado por una

computadora digital. Por ejemplo, al resolver 10 ecuaciones simultáneas de análisis de circuitos, el encanto se pierde definitivamente luego de las primeras horas de cálculos hechos a mano, y SPICE nos libera de una tarea de esta naturaleza.

4.1

LINEALIDAD Y PROPORCIONALIDAD

En el capítulo 2 definimos una resistencia lineal como todo aquél que satisface la ley de Ohm

$$v = Ri$$

y consideramos los circuitos que están hechos de resistencias lineales y fuentes independientes. Definimos fuentes dependientes en el capítulo 3, y analizamos circuitos que contienen fuentes dependientes e independientes. Todas las fuentes independientes que consideramos tenían funciones de fuente de la forma

$$y = kx \quad (4.1)$$

donde k es una constante, y las variables x y y son variables de circuito (voltajes o corrientes). Es claro que la ley de Ohm es un caso especial de (4.1). En (4.1) la variable y es proporcional a la variable x , y la gráfica de y contra x es una recta que pasa por el origen. Por esta razón, algunos autores se refieren a los elementos caracterizados por (4.1) como *elementos lineales*. Para nuestros propósitos, definiremos un elemento lineal de un modo más general, que incluye a (4.1) como caso especial. Si x y y son variables de circuito asociadas con un elemento de dos terminales, entonces diremos que el elemento es *lineal* si multiplicar x por una constante K es igual a la multiplicación de y por la misma constante K . Esto se conoce como *propiedad de proporcionalidad*, y evidentemente también se aplica a todos los elementos que satisfacen (4.1) puesto que, al multiplicar ambos lados por K ,

$$(Ky) = k(Kx)$$

Por consiguiente, un elemento descrito por (4.1) es lineal. Además, los elementos con leyes terminales de las formas

$$y = k \frac{dx}{dt}, \quad y = k \int x(t) dt \quad (4.2)$$

son también lineales, puesto que estas leyes también implican que

$$(Ky) = k \left(\frac{d}{dt} Kx \right), \quad (Ky) = k \int (Kx) dt$$

El op amp es un elemento de terminales múltiples, y se describe con más de una ecuación. Sin embargo, utilizaremos el op amp únicamente en modo retroalimentador, como se definió en el capítulo 3, y en este caso los circuitos resultantes del modelo del op amp consisten de elementos lineales. En este caso, los modelos presentados en el capítulo 3, compuestos de fuentes linealmente dependientes y resistencias lineales, pueden utilizarse en vez del op amp. En consecuencia, podemos agregar el op amp a nuestra lista de elementos lineales.

Definiremos un *circuito lineal* como todo circuito que sólo contiene elementos lineales y fuentes independientes. Como ejemplo, casi todos los circuitos considerados hasta el momento son lineales. Ciertamente, en el presente texto nuestra atención se limitará ex-

clusivamente a circuitos lineales. Este enfoque a los circuitos lineales se debe a dos razones: en primer lugar, una gran cantidad de circuitos interesantes, como amplificadores y filtros, son lineales; segundo, las técnicas de análisis de circuitos lineales son muy poderosas, y forman la base de todos los análisis de circuitos, sean estos lineales o no lineales.

Las ecuaciones de análisis de un circuito lineal se obtienen aplicando LVK, LCK y las leyes de elementos para cada elemento en el circuito. Las ecuaciones resultantes pueden expresarse generalmente como

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = y \quad (4.3a)$$

donde las x_i son variables de circuitos (corrientes y/o voltajes), y y es una suma algebraica neta de fuentes independientes. Por ejemplo, si (4.3a) es una ecuación LVK alrededor de un circuito cerrado compuesto de resistencias y fuentes independientes de voltaje, cada x_i puede ser una corriente, cada a_i (positiva o negativa) un valor de resistencia, y y es la suma algebraica de funciones de fuentes de voltaje. Si (4.3a) es una ecuación LCK, las x_i pueden ser corrientes, las a_i son conductancias positivas o negativas, y y la corriente neta en el nodo. No es necesario que todas las variables de circuitos en una ecuación dada sean del mismo tipo y, de hecho, algunas incógnitas x_i pueden ser corrientes, y otras pueden ser voltajes.

Una suma de variables a escala, como la del lado izquierdo de (4.3a), se designa como *combinación lineal* de x_1 a x_n . Nótese que las combinaciones lineales de elementos lineales también satisfacen la *propiedad de proporcionalidad*; es decir, si cada fuente está a escala de K , cada variable de circuito estará a escala de K , puesto que (4.3a) implica que

$$a_1(Kx_1) + a_2(Kx_2) + \cdots + a_n(Kx_n) = Ky \quad (4.3b)$$

De este modo, si x_1, \dots, x_n fueran valores de variables de circuitos y y fuera la fuente, Kx_1, \dots, Kx_n serán sus valores con la fuente neta y a escala de K .

Ejemplo 4.1

Deseamos obtener i_1 e i_2 de la figura 4.1. Aplicando LVK en sentido de las manecillas del reloj alrededor del circuito cerrado izquierdo,

$$-2i_2 + 4i_1 = v_{g1} \quad (4.4a)$$

notamos que la fuente v_{g1} es igual a la combinación lineal de i_1 e i_2 . Aplicando LCK al nodo superior derecho,

$$i_1 + i_2 = i_{g2} \quad (4.4b)$$

que, como todas las ecuaciones LCK y LVK en un circuito lineal, también iguala una combinación lineal de variables de circuito a un valor neto de fuente. Resolviendo ésta última para i_2 , y utilizando esto para eliminar i_2 de (4.4a), la corriente i_1 resulta ser

$$i_1 = \frac{1}{6}v_{g1} + \frac{1}{3}i_{g2} \quad (4.5a)$$

y sustituyendo el valor de i_1 en (4.4b),

$$i_2 = -\frac{1}{6}v_{g1} + \frac{2}{3}i_{g2} \quad (4.5b)$$

La solución expresa las variables de circuito como combinaciones lineales de las fuentes. Por el principio de proporcionalidad, multiplicar por 2 cada fuente duplicará las variables de circuito. Exa-

FIGURA 4.1 Circuito lineal con dos puentes.

minando (4.5), si v_{g1} y i_{g2} son duplicadas, los lados derechos de estas ecuaciones se duplican, y por consiguiente también i_1 e i_2 .

Ejemplo 4.2

Utilizaremos el principio de proporcionalidad para ayudar a calcular v_1 en el circuito de la figura 4.2. Este circuito a veces se conoce como *circuito en escalera*, debido a su configuración, que efectivamente se meja una escalera. Nótese que la incógnita está muy alejada de la única variable de circuito que conocemos inicialmente, el valor de la fuente. Por consiguiente, es de esperarse que haya varias ecuaciones con muchas incógnitas si comenzamos a escribir ecuaciones en el lado de fuentes de la escalera.

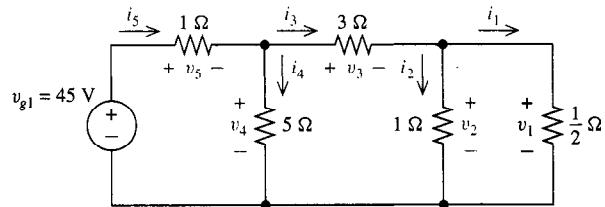


FIGURA 4.2 Ejemplo de circuito en escalera.

En vez de eso, supongamos una solución, $v_1 = 1$ V, y veamos a dónde nos lleva esta suposición. Si $v_1 = 1$ V, entonces seguramente $i_1 = 2$ A, por la ley de Ohm, y $v_2 = 1$ V, puesto que los elementos paralelos tienen la misma caída de voltaje. Por consiguiente, $i_2 = 1$ A, y en el nodo superior derecho, $i_3 = i_2 + i_1 = 3$ A. Puesto que i_3 fluye a través de una resistencia de 3Ω , $v_3 = 9$ V. Luego, por LVK, $v_4 = v_3 + v_2 = 10$ V. Continuando de derecha a izquierda de este modo, $i_4 = 2$ A, $i_5 = i_3 + i_4 = 5$ A, $v_5 = 5$ V y, finalmente, si nuestra suposición ($v_1 = 1$ V) fuera la correcta, obtendríamos $v_{g1} = v_4 + v_5 = 15$ V.

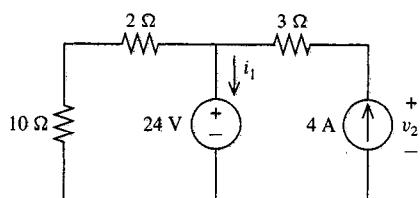
Esto no es correcto, puesto que realmente $v_{g1} = 45$ V. Pero, después de todo, esto no era más que una suposición para poder empezar. Por la relación de proporcionalidad, si una fuente de 15 V da una salida de $v_1 = 1$ V, como descubrimos anteriormente, entonces nuestra fuente de 45 V dará el triple, por lo que la respuesta correcta debe ser

$$v_1 = \frac{45}{15}(1) = 3 \text{ V}$$

Este método de suponer una respuesta para la salida, y trabajando en retroceso para obtener la entrada correspondiente para finalmente ajustar la salida supuesta, con el objeto de que ésta sea consistente con la entrada real mediante la relación de proporcionalidad, es particularmente fácil de aplicar a la red en escalera, pero también puede aplicarse a otro tipo de circuitos.

Un circuito no lineal es, desde luego, uno que tiene por lo menos un elemento cuya relación terminal no es de la forma (4.1) o (4.2). En el ejercicio 4.1.4 se da un ejemplo, en el que puede verse que no se aplica la propiedad de proporcionalidad.

EJERCICIOS



EJERCICIO 4.1.1

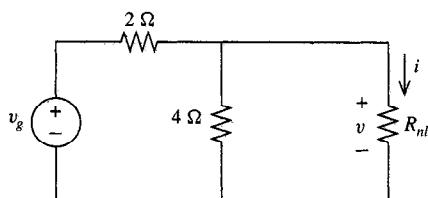
- 4.1.1.** Encuéntrense i_1 y v_2 , con (a) los valores de fuente que se muestran, (b) los valores de fuente divididos entre 2, y (c) los valores de fuente multiplicados por -2. Nótese cómo se aplica el principio de proporcionalidad en (b) y (c).

Respuestas (a) 2 A, 36 V; (b) 1 A, 18 V; (c) -4 A, -72V

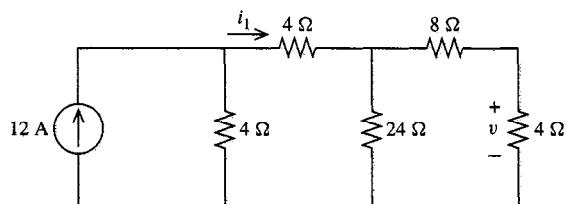
- 4.1.2.** Supongamos que $v_{g1} = 90$ V en la figura 4.2. Encuéntrese v_1 , i_1 , v_2 , i_2 , v_3 , i_3 , v_4 , i_4 , v_5 e i_5 .

Respuestas 6 V; 12 A; 6 V; 6 A; 54 V; 18 A; 60 V; 12 A; 30 V; 30 A

- 4.1.3.** Encuéntrense v e i mediante el principio de proporcionalidad.
Respuestas 8 V; 3 A



EJERCICIO 4.1.4



EJERCICIO 4.1.3

- 4.1.4.** En este circuito, R_{nl} es una resistencia no lineal con ley de terminal $v = 2i^3$. Encuéntrese la función de fuente v_g que soporta $i = 1$ A, y luego para $i = 2$ A, y demuéstrese que el principio de proporcionalidad *no* se satisface. ¿Por qué?

Respuestas 5 V; 28 V. La violación del principio de proporcionalidad es que estas respuestas no están en proporción 1:2 (se trata de un circuito no lineal).

4.2

SUPERPOSICIÓN

En esta sección consideraremos circuitos lineales con más de una fuente independiente. Como veremos, la propiedad de linealidad hace posible el análisis de estos circuitos sumando las respuestas debidas a cada fuente por separado.

Recuérdese de (4.3) que cada ecuación de circuito puede expresarse como

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = y$$

donde las x_i son variables de circuitos, y y es el valor neto de la fuente en esta ecuación LCK o LVK. Específicamente, supóngase que hay exactamente dos fuentes, y_a y y_b :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = y_a + y_b \quad (4.6)$$

Ahora supóngase que eliminamos la fuente b ; es decir, fijamos en cero su función y_b , pero el resto del circuito queda intacto. Entonces, en este nuevo circuito, tendríamos una ecuación correspondiente a la anterior:

$$a_1x_1^a + a_2x_2^a + \cdots + a_nx_n^a = y_a \quad (4.7a)$$

En esta ecuación, el lado izquierdo sería la misma combinación lineal que la anterior (las a_i no fueron modificadas), puesto que únicamente cambió el valor de la fuente y_b , y no así los elementos lineales o su colocación en el circuito. Los valores de las variables de circuito serán diferentes debido a la sola presencia de la fuente única a , y se designan con un superíndice a . x_i^a es por consiguiente la respuesta a la fuente a por sí sola. Si en lugar de ello eliminamos la otra fuente, la fuente b , la ecuación de circuito será

$$a_1x_1^b + a_2x_2^b + \cdots + a_nx_n^b = y_b \quad (4.7b)$$

Como en el caso anterior, las a_i en (4.7b) serán idénticas a las de (4.6), y las x_i^b son respuestas únicamente de la fuente b . Sumando las ecuaciones (4.7a) y (4.7b),

$$a_1(x_1^a + x_1^b) + a_2(x_2^a + x_2^b) + \cdots + a_n(x_n^a + x_n^b) = y_a + y_b$$

Comparando (4.6) con la última ecuación, finalmente llegamos a nuestro resultado final. Considerando a cada una de las variables de circuitos x_i como respuestas de este circuito a las fuentes, obtenemos:

$$x_i = x_i^a + x_i^b$$

o la respuesta general de un circuito que contiene varias fuentes es la suma de las respuestas a cada fuente individual, eliminando las otras fuentes. Este es el principio de superposición.

Nuestra justificación anterior supuso exactamente dos fuentes, pero es claro que puede aplicarse, realizando una leve generalización, al caso de varias fuentes. Recuérdese del capítulo 2 que las fuentes de corriente se eliminan, o son fijadas en cero, reemplazándolas con circuitos abiertos y reemplazando a las fuentes de voltaje con circuitos cerrados. Nótese también que *la superposición, en general, sólo es válida para circuitos lineales*, aquellos para los que puede suponerse (4.6), del mismo modo en que el principio de proporcionalidad puede garantizarse únicamente para circuitos lineales.

Ejemplo 4.3

Primeramente considérese el circuito de la figura 4.1, que se analizó en la sección anterior. Las variables de circuito i_1 e i_2 fueron halladas en (4.5). Utilicemos ahora la superposición para obtener estas respuestas. Primero eliminamos la fuente de corriente, lo que origina el circuito modificado de la figura 4.3(a), y determinamos i_1^a e i_2^a . Este es el problema de la componente a , y i_1^a e i_2^a son las componentes de las respuestas i_1 e i_2 debidas a la fuente a (la fuente de voltaje). Este es un circuito de una sola vuelta, y

$$i_1^a = \frac{v_{g1}}{6}$$

$$i_2^a = -\frac{v_{g1}}{6}$$

Pero luego eliminamos la fuente de voltaje, lo que provoca el problema de la componente *b* que aparece en la figura 4.3(b). Por división de corrientes,

$$i_1^b = \frac{1}{3}i_{g2}$$

$$i_2^b = \frac{2}{3}i_{g2}$$

Por el principio de superposición, cada respuesta es la suma de las componentes de las respuestas, o

$$i_1 = i_1^a + i_1^b = \frac{1}{6}v_{g1} + \frac{1}{3}i_{g2}$$

$$i_2 = i_2^a + i_2^b = -\frac{1}{6}v_{g1} + \frac{2}{3}i_{g2}$$

Ciertamente, estos resultados concuerdan con los cálculos anteriores (4.5).

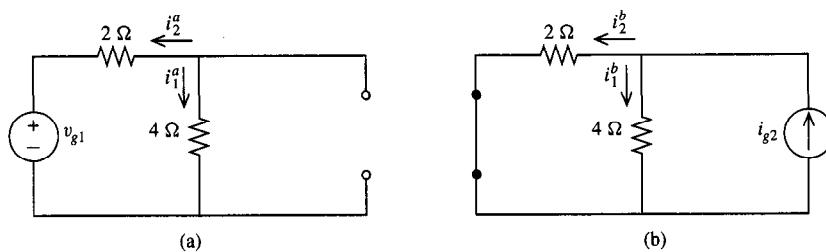


FIGURA 4.3 (a) Problema de componente *a*; (b) problema de componente *b*.

El ejemplo 4.3 demuestra que existe un intercambio en el uso de la superposición. Por una parte, se deben resolver dos (o más) problemas de componentes en vez de la componente única que se nos dio originalmente. Por otra parte, cada problema de componentes es más simple que el original, porque contiene una sola fuente, y porque eliminar fuentes reduce el número de nodos y/o vueltas del circuito. Ciertamente, ambos problemas de componentes en el ejemplo 4.3 involucra circuitos simples (vueltas únicas en la componente *a*, un par único de nodo en la componente *b*), en tanto que el circuito original no era simple, y no podía ser analizado sin resolver las ecuaciones simultáneas con dos incógnitas [(4.4a) y (4.4b)].

Ejemplo 4.4

Como segundo ejemplo, obtengamos el voltaje *v* en el circuito con tres fuentes independientes que aparecen en la figura 4.4. Utilizando la superposición, obtendremos los componentes de *v* provenientes separadamente de cada fuente, refiriéndonos a la fuente 6-V como fuente *a*, a la fuente 18-V como fuente *b* y a la fuente 2-A como fuente *c*.

En la figura 4.5(a), aparece el problema de la componente *a*, en donde se han eliminado las fuentes *b* y *c*. Eliminando la fuente 18-V une a los nodos *b* y *d* para formar un solo nodo. Se ha dibujado el circuito para mostrar esto. El equivalente paralelo de las resistencias

2Ω y 6Ω es $\frac{3}{2}$ de Ω , y puede obtenerse v^a mediante una división de voltajes:

$$v^a = \frac{3(6)}{(3 + 3/2)} = 4 \text{ V}$$

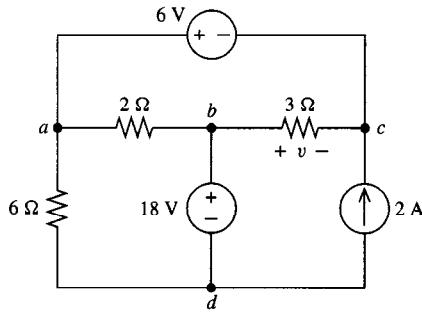


FIGURA 4.4 Ejemplo con tres fuentes independientes.

En la figura 4.5(b) se muestra el problema de la componente b . Eliminando la fuente 6-V ha hecho que se unan los nodos a y c tal y como aparece en la figura. Nuevamente, luego de sustituir las resistencias 2Ω , y 3Ω , por su equivalente paralelo $6/5$ de Ω , puede obtenerse v^b por emisión de voltajes.

$$v^b = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{5} + 6}(18) = 3 \text{ V}$$

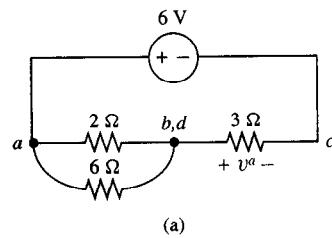
El problema de la componente c [Figura 4.5(c)], tiene tres resistencias en paralelo.

$$v^c = -\frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}(2) = -2 \text{ V}$$

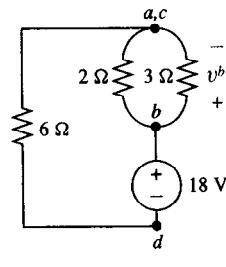
Por superposición, el valor de v es la suma de sus componentes:

$$v = v^a + v^b + v^c = 4 + 3 - 2 = 5 \text{ V}$$

Nótese que hemos resuelto un conjunto de problemas de circuitos simples en lugar de un problema original que, de no ser por la superposición, habría requerido ecuaciones simultáneas.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.5 (a) Componente a ; (b) componente b ; (c) componente c .

La superposición es una poderosa herramienta que nos permite resolver corrientes y voltajes en circuitos *lineales* que contienen varias fuentes al añadir (superponer) voltajes y corrientes componentes. En general, la superposición no funcionará en circuitos no lineales (aquellos que contienen uno o más elementos no lineales). Su validez también está limitada, aun en circuitos lineales, a cálculos de corrientes y voltajes. En particular, el poder total disipado por un elemento de un circuito lineal, en general *no* es la suma de los poderes separados debidos a cada fuente. Esto se debe a que la potencia es una función *no lineal* de las variables de circuito corriente y voltaje. El uso de la superposición está limitada a calcular corrientes y voltajes en circuitos lineales.

Ejemplo 4.5

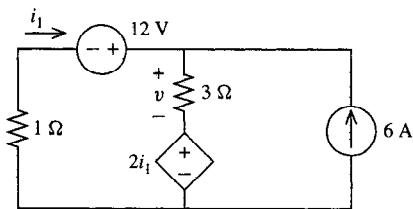


FIGURA 4.6 Ejemplo con una fuente dependiente.

Este ejemplo ilustra el uso adecuado de la superposición cuando debe calcularse la potencia, y también su uso cuando existe en el circuito una fuente dependiente. Deseamos obtener el voltaje v y la potencia disipada por la resistencia 3Ω , en el circuito 4.6. Para obtener v , utilizaremos la superposición. Únicamente las fuentes *independientes* generan componentes, por lo que las descompondremos en dos problemas de componentes a y b , como aparece en la figura 4.7. Para la componente a , eliminaremos la fuente de corriente. La figura 4.7(a) es un circuito de una sola vuelta con la ecuación LVK

$$-12 + 3i_1^a + 2i_1^a + i_1^a = 0$$

$$\text{o } i_1^a = 2 \text{ A, y}$$

$$v^a = 3i_1^a = 6 \text{ V}$$

En el problema de la componente b , eliminando la fuente de voltaje, LCK en el nodo superior produce una corriente hacia abajo a través de la rama media de $6 + i_1^b$. Por consiguiente, LVK alrededor de la vuelta izquierda es

$$i_1^b + 3(6 + i_1^b) + 2i_1^b = 0$$

$$\text{o } i_1^b = -3 \text{ A, y}$$

$$v^b = 3(6 + i_1^b) = 9 \text{ V}$$

Luego, por superposición de voltajes componentes,

$$v = v^a + v^b = 6 + 9 = 15 \text{ V}$$

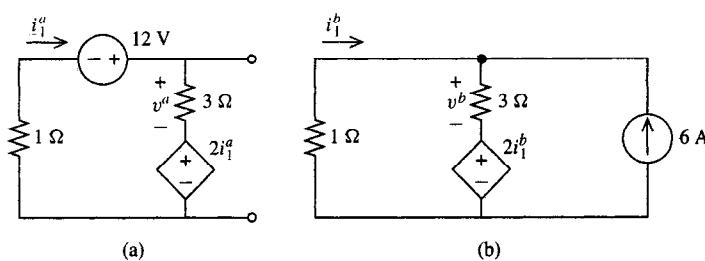


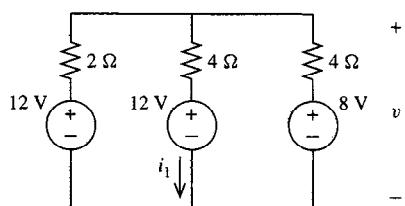
FIGURA 4.7 (a) Componente a ; (b) componente b .

También necesitamos la potencia que pasa a través de la resistencia de 3Ω . Puesto que conocemos su voltaje v ,

$$P = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{3} = 75 \text{ W}$$

Nótese que obtuvimos v por suposición, y utilizamos el voltaje total v después de la superposición de componentes de voltaje para calcular la potencia. De haber calculado la potencia que pasa por la resistencia en los problemas de componentes separadamente, y hubiéramos tratado de superponerlos, esto nos habría dado un resultado distinto y erróneo, puesto que la suma de las potencias componentes, $(v^a)^2/R + (v^b)^2/R$, no es la misma que la potencia debida a la suma de las componentes $v^2/R = (v^a + v^b)^2/R$. Aun en circuitos lineales, la potencia no se superpone, y esto ocurre únicamente con el voltaje y la corriente.

EJERCICIOS



EJERCICIO 4.2.2

4.2.1. Resolver el ejercicio 4.1.1. utilizando superposición.

4.2.2. Obténgase v e i_1 por superposición. Compruébese mediante las transformaciones Thevenin-Norton.

Respuesta $11 \text{ V}; -\frac{1}{4} \text{ A}$

4.2.3. Reemplácese la 8 V del ejercicio 4.2.2., por $4i_1$, convirtiendo una fuente independiente en fuente dependiente. Obténganse v e i_1 por superposición.

Respuesta $8 \text{ V}; -1 \text{ A}$

4.3

ANÁLISIS NODAL

En esta sección desarrollaremos un método general de análisis de circuitos en donde los voltajes son las incógnitas que deben obtenerse. Para muchas redes, una elección conveniente de voltaje es el conjunto de los *voltajes de nodo*. Puesto que un voltaje se define como el existente entre dos nodos, es conveniente seleccionar el nodo en la red que sea *nodo de referencia*, y luego asociar un voltaje a cada uno de los demás nodos. *El voltaje de cada uno de los nodos que no son de referencia con respecto al nodo de referencia, se define como el voltaje de nodo*. Es una práctica común seleccionar direcciones de referencia para estos voltajes, de forma que los extremos positivos estén todos en los nodos que no son de referencia, y los extremos negativos estén todos en el nodo de referencia. Para un circuito que contiene N nodos, habrá $N - 1$ nodos que no son de referencia, y por consiguiente $N - 1$ voltaje de nodo. El análisis nodal es el método en el que descompondremos el circuito, es decir, resolveremos un conjunto clave de variables de circuito, obteniendo los voltajes de nodo en sí. Cualquier otra corriente o voltaje podrá obtenerse fácilmente una vez que se descomponen el circuito.

Comúnmente se elige como nodo de referencia al nodo al que se conecta la mayor cantidad de ramales. Muchos circuitos prácticos están construidos sobre una base o chasis metálico, y generalmente se conectan varios elementos al chasis, que se convierte en la elección lógica para el nodo de referencia. En muchos casos, tales como sistemas eléctricos

de potencia, el chasis es conectado a tierra, convirtiéndose en parte de un nodo único chasis-tierra. Por esta razón, el nodo de referencia es comúnmente designado como *tierra* o *nodo de tierra*. Por consiguiente, el nodo de referencia está a potencial de tierra o potencial cero, y puede considerarse que cualquier otro nodo tiene un potencial que está algún potencial mayor o menor a cero, especificado por el valor de su voltaje de nodo.

Las ecuaciones del análisis nodal se obtienen aplicando LCK en los nodos. Recuérdese que cada término en una ecuación LCK es un elemento de corriente. Para una resistencia, esta corriente es proporcional a su voltaje. Este voltaje, al igual que cualquier otro elemento de voltaje, es igual a un voltaje de nodo (si uno de los extremos del elemento está unido al nodo de referencia), o la diferencia de los voltajes de nodo (si ambos extremos están unidos a nodos que no son de referencia). Por ejemplo, en la figura 4.8, el nodo de referencia es el nodo 3 con potencial cero o tierra. El símbolo que aparece junto al nodo 3, es el símbolo convencional de tierra, como se especificó anteriormente en el capítulo 3. Los nodos que no son de referencia 1 y 2, tienen voltajes de nodo v_1 y v_2 . Por consiguiente, el elemento de voltaje v_{12} con la polaridad que aparece es

$$v_{12} = v_1 - v_2$$

Los otros voltajes de elemento que aparecen son

$$v_{13} = v_1 - 0 = v_1$$

y

$$v_{23} = v_2 - 0 = v_2$$

Pueden establecerse estas ecuaciones aplicando LVK alrededor de las mallas (reales o imaginarias). Evidentemente, si conocemos todos los voltajes de nodo, podemos obtener todos los voltajes de elemento, y por consiguiente todas las corrientes de elemento.

La aplicación de LCK en un nodo, expresando cada corriente incógnita en términos de los voltajes de nodo, resulta en una *ecuación de nodos*. Claramente, es posible simplificar las ecuaciones resultantes cuando el nodo de referencia es elegido como el nodo con el mayor número de elementos conectados a éste. Sin embargo, como veremos posteriormente, este no es el único criterio para seleccionar el nodo de referencia, aunque con frecuencia es el más común.

Puesto que aplicaremos LCK sistemáticamente a los nodos de circuito, el caso más directo a considerar es el de los circuitos cuyas únicas fuentes son fuentes de corriente independientes. Iniciaremos la discusión con ejemplos de este tipo. En la red que aparece en la figura 4.9(a), hay tres nodos, sombreados y numerados como se muestra en la figura. [Esto es más fácil de notar en la otra versión que aparece en la figura 4.9(b).] Puesto que hay cuatro elementos conectados en el nodo 3, lo seleccionamos como nodo de referencia, identificándolo por el símbolo de tierra que aparece.

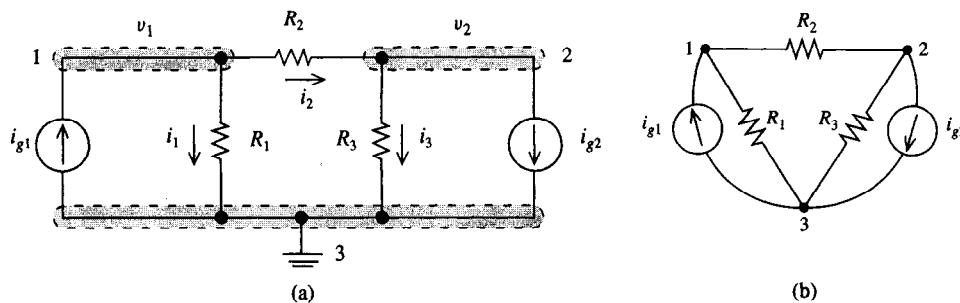


FIGURA 4.9 Circuito que contiene fuentes independientes de corriente.

Antes de escribir las ecuaciones de nodo, considérese el elemento que aparece en la figura 4.10, donde v_1 y v_2 son voltajes de nodo. El voltaje de elemento v está dado por

$$v = v_1 - v_2$$

y por consiguiente, por la ley de Ohm, obtenemos

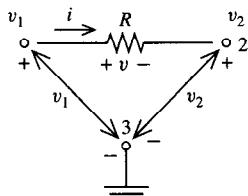


FIGURA 4.10 Elemento único.

donde $G = 1/R$ es la conductancia. Es decir, *la corriente del nodo 1 al nodo 2 a través de una resistencia es la diferencia del voltaje de nodo en el nodo 1, y el voltaje de nodo en el nodo 2, divididos por la resistencia R, o multiplicado por la conductancia G*. Esta relación nos permitirá escribir rápidamente las ecuaciones de nodo por inspección, directamente en términos de los voltajes de nodo.

Volviendo ahora al circuito de la figura 4.9, la suma de las corrientes que salen del nodo 1, deben ser cero, o

$$i_1 + i_2 - i_{g1} = 0$$

En términos de los voltajes de nodo, esta ecuación se convierte en

$$G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) - i_{g1} = 0$$

Pudimos obtener esta ecuación directamente utilizando el procedimiento del párrafo precedente. Aplicando LCK en el nodo 2 de modo similar, obtenemos

$$-i_2 + i_3 + i_{g2} = 0$$

$$\text{o } G_2(v_2 - v_1) + G_3 v_2 + i_{g2} = 0$$

En vez de sumar a cero las corrientes que salen del nodo, podríamos haber utilizado la forma de LCK que iguala la suma de las corrientes que salen del nodo a la suma de corrientes que entran al nodo. De haberlo hecho así, los términos i_{g1} e i_{g2} habrían aparecido en el lado derecho de la ecuación:

$$G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) = i_{g1}$$

$$G_2(v_2 - v_1) + G_3 v_2 = -i_{g2}$$

Reagrupando estas dos ecuaciones, el resultado es

$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_2 = i_{g1} \quad (4.8a)$$

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = -i_{g2} \quad (4.8b)$$

Estas ecuaciones presentan una simetría que puede ser utilizada para describir las ecuaciones en la forma reagrupada (4.8), directamente por inspección del diagrama de circuito. En 4.8(a), el coeficiente de v_1 es la suma de conductancia de los elementos conectados al nodo 1, en tanto que el coeficiente del nodo v_2 es el negativo de la conductancia del elemento que conecta el nodo 1 al nodo 2. Esto mismo es vigente para (4.8b) si se intercambian los números 1 y 2. Por consiguiente, el nodo 2 juega el papel en (4.8b) del nodo 1 en (4.8a). Es decir, es el nodo en donde se aplica LCK. En cada ecuación, el lado derecho es la corriente desde las fuentes de corriente que entran al nodo correspondiente.

En general, en las redes que contienen únicamente conductancias y fuentes de corriente, LCK aplicado en el k -ésimo nodo, con el voltaje de nodo v_k , puede ser escrito del

modo siguiente. En el lado izquierdo de la ecuación del nodo k , el coeficiente del voltaje del k -ésimo voltaje del nodo es la suma de las conductancias conectadas al nodo k , y los coeficientes de los otros voltajes del nodo son los negativos de las conductancias entre esos nodos y el nodo k . El lado derecho de esta ecuación consiste en la corriente neta que fluye hacia el nodo k debido a las fuentes de corriente.

Este patrón predecible facilita escribir las ecuaciones de nodo. Nótese que los signos, positivos en el lado izquierdo de la ecuación para los términos v_k , negativos para otros términos de voltaje de nodo, y positivos en el lado derecho de la ecuación para las fuentes de corriente que fluyen hacia el nodo k , son una consecuencia de la forma elegida de LCK. En tanto que podrían utilizarse otras formas de un modo igualmente correcto, preferimos utilizar la forma recomendada, con la ventaja de que los términos siempre caen en este patrón. Ayuda a hacer que los patrones de signos sean fijos y predecibles, para poder enfocar nuestra atención a asuntos más importantes cuando se analiza un circuito.

El análisis nodal consiste en escribir las ecuaciones de nodo LCK descritas anteriormente, en todos los nodos del circuito que no son de referencia. Con esto se obtienen $N - 1$ ecuaciones lineales, con un número similar de incógnitas (los voltajes de nodo). Como se discute en el apéndice C, estas ecuaciones son linealmente independientes y, por consiguiente, se garantiza que poseen una solución única. Los voltajes de nodo pueden encontrarse por una variedad de medios, incluyendo la eliminación de Gauss, la regla de Cramer y la inversión de matrices.

Ejemplo 4.6

Considérese el circuito de la figura 4.11. Se seleccionó el nodo inferior como nodo de referencia, puesto que muchos elementos se conectan a éste. Las resistencias son marcadas según sus conductancias.

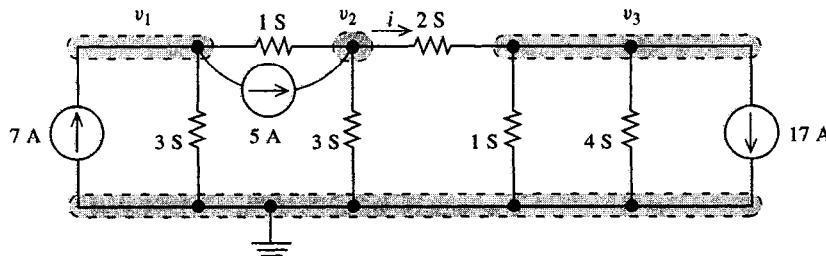


FIGURA 4.11 Circuito para el ejemplo 4.6.

Puesto que hay tres nodos que no son de referencia, y se obtendrán tres ecuaciones con tres incógnitas de voltaje de nodo. El nodo v_1 , notamos que la suma de conductancias es $3 + 1 = 4$, el negativo del nodo de conexión de conductancia v_2 al nodo v_1 es -1 , y la corriente neta de fuente que entra al nodo 1 es $7 - 5 = 2$. Por consiguiente, la primera ecuación de nodo es

$$4v_1 - v_2 = 2 \quad (4.9)$$

De manera similar, en los nodos v_2 y v_3 , obtenemos

$$-v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 5 \quad (4.10a)$$

$$-2v_2 + 7v_3 = 17 \quad (4.10b)$$

Podemos resolver (4.9) y (4.10) para los voltajes de nodo utilizando cualquiera de una variedad de métodos para resolver ecuacio-

nes simultáneas. Tres de estos métodos son la inversión de matrices, la regla de Cramer y la eliminación Gaussiana. Para el lector que no está familiarizado con estos métodos, en el apéndice A aparece una descripción de estos métodos. Seleccionando la regla de Cramer, primero obténgase el determinante de la matriz coeficiente, dada por

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145 \quad (4.11)$$

Para determinar v_1 , se sustituye la primera columna de la matriz coeficiente por el vector de constantes en el lado derecho de (4.9)-(4.10), calcúlese su determinante, y divídase por el determinante de la matriz coeficiente que ya se obtuvo.

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ 17 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1 \text{ V}$$

v_2 , se obtiene reemplazando la segunda, y v_3 , reemplazando la tercera columna de la matriz coeficiente y calculando como se hizo anteriormente, obteniéndose $v_2 = 2 \text{ V}$ y $v_3 = 3 \text{ V}$.

Ahora que hemos descompuesto el circuito obteniendo los voltajes de nodo, podemos obtener fácilmente cualquier otro voltaje o corriente. Por ejemplo, si deseamos obtener la corriente i en el elemento 2-S, esto está dado por

$$i = 2(v_2 - v_3) = 2(2 - 3) = -2 \text{ A}$$

Nótese que la matriz coeficiente que aparece en (4.11) es simétrica [los elementos (i, j) y (j, i) son iguales]. Esto proviene del hecho de que la conductancia entre los nodos i y j , es la misma que hay entre los nodos j e i . La simetría simplifica aún más la escritura de las ecuaciones de nodo. En tanto que la simetría sea cierta como regla general para todos los circuitos que no contienen fuentes dependientes, la simetría de la matriz coeficiente no puede considerarse como dada en ese caso, como lo veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.7

Considérese el circuito de la figura 4.12, que contiene fuentes de corriente dependientes. Comenzaremos escribiendo las ecuaciones de nodo exactamente como si las fuentes fueran independientes. En el nodo 1,

$$(1)(v_1) + (1)(v_1) + (2)(v_1 - v_2) = 5 - 5i$$

Y en el nodo 2,

$$\frac{1}{2}(v_2) + (2)(v_2 - v_1) = 5i + 2v$$

Luego expresamos las variables de control para las fuentes dependientes i y v en estas ecuaciones, en términos de los voltajes del nodo. Por la ley de Ohm,

$$i = v_1$$

y por inspección

$$v = v_1 - v_2$$

Sustituyendo las últimas dos ecuaciones en las dos previas,

$$(1)(v_1) + (1)(v_1) + (2)(v_1 - v_2) = 5 - 5v_1$$

$$\frac{1}{2}(v_2) + (2)(v_2 - v_1) = 5v_1 + 2(v_1 - v_2)$$

Estas dos ecuaciones con dos incógnitas pueden ser resueltas por la regla de Cramer, la inversión de matrices o la eliminación de Gauss, como se deseé. Seleccionando la inversión de matrices, primero la reescribimos como

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -9 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

El determinante de la matriz coeficiente es $(9)(9/2) - (-9)(-2) = 45/2$ y la inversa es

$$\frac{2}{45} \begin{bmatrix} 9/2 & 2 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/45 \\ 2/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/45 \\ 2/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

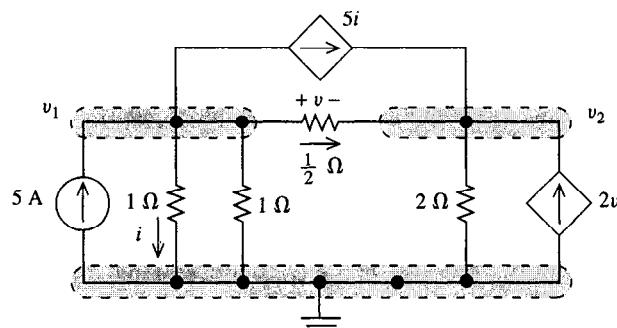
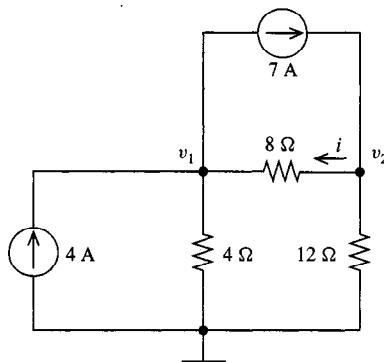


FIGURA 4.12 Circuito que contiene fuentes dependientes.

A partir de este ejemplo vemos que la presencia de fuentes dependientes destruye la simetría de la matriz coeficiente (véase 4.12) y que en tales circuitos los elementos de esta matriz ya no pueden ser interpretados simplemente como sumas de conductancias, puesto que también contribuyen las fuentes dependientes. Por otra parte, la presencia de fuentes dependientes no complica significativamente el análisis nodal, requiriendo solamente un paso adicional de sustitución, reemplazando variables de control por voltajes de nodo.

EJERCICIOS

- 4.3.1.** Asígnese a todas las resistencias de la figura 4.9 el valor de 1Ω y a ambas funciones de fuentes de corriente el valor 1 A . Utilizándose el análisis nodal, obténganse los voltajes de nodo y las tres corrientes marcadas.



EJERCICIO 4.3.2

Respuesta $v_1 = 1 \text{ V}$; $v_2 = -1 \text{ V}$; $i_1 = 1 \text{ A}$; $i_2 = 2 \text{ A}$; $i_3 = -1 \text{ A}$

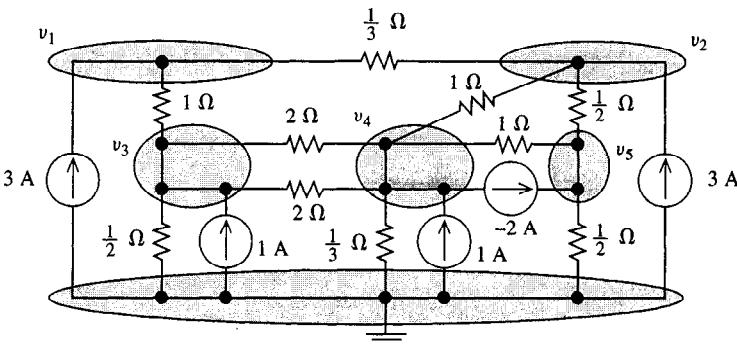
- 4.3.2. Utilizado análisis nodal, obténgase v_1 , v_2 , e i.

Respuesta 4 V; 36 V; 4 A

- 4.3.3. Escrbanse las ecuaciones nodales directamente en forma de matriz vector. No se resuelva.

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



EJERCICIO 4.3.3

4.4

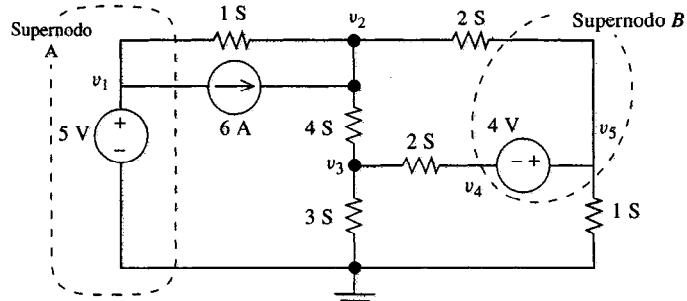
CIRCUITOS QUE CONTIENEN FUENTES DE VOLTAJE

De primera impresión puede parecer que la presencia de las fuentes de voltaje en un circuito complican el análisis nodal. Ya no es posible escribir las ecuaciones de nodo LCK, puesto que no hay forma de expresar las corrientes a través de estos elementos de circuito en términos de sus voltajes de nodo. Como se discutió en el capítulo 2, la ley de elemento para una fuente de voltaje no relaciona su corriente con su voltaje, por lo que no podemos usarlo para reemplazar una incógnita de corriente por una incógnita de voltaje en ecuación de nodo.

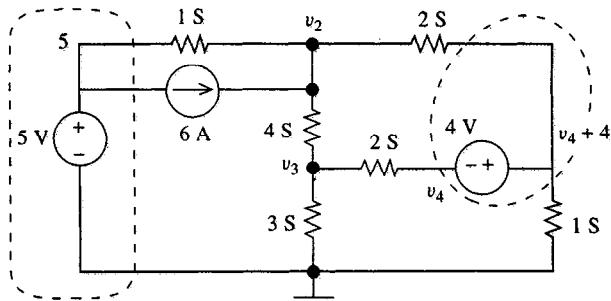
Sin embargo, y como lo veremos, el análisis nodal en la presencia de fuentes de voltaje resulta no ser más complicado, requiriendo únicamente una pequeña modificación en el método básico para escribir las ecuaciones de análisis nodal presentado en la sección anterior. De hecho, llegaremos a preferir las fuentes de voltaje, puesto que en realidad reducen el número de ecuaciones simultáneas de nodo que deben resolverse, a razón de una ecuación menos en la fuente de voltajes fijados.

Ejemplo 4.8

Para ilustrar el procedimiento, considérese el circuito de la figura 4.13. Para nuestra conveniencia, marcamos las resistencias por sus conductancias. Nótese que incluimos cada fuente de voltaje en una región separada indicada por línea punteada. Recordando que la forma generalizada de LCK postula que todas las corrientes que entran a una región cerrada deben sumar cero como lo hacen para los nodos



(a)



(b)

FIGURA 4.13 (a) Circuito que contiene fuentes de voltaje; (b) voltajes de nodo en supernodos reetiquetados.

ordinarios, nos referiremos a cada una de estas regiones como un *supernodo*.

Cada supernodo contiene dos nodos, un nodo que no es de referencia, y otro nodo que puede ser un segundo nodo no de referencia (como el supernodo *B* en la figura 4.13) o el nodo de referencia (como el supernodo *A*). Los supernodos que contienen el nodo de referencia, tienen una variable de voltaje de nodo, como v_1 en la figura 4.13(a). Pero puesto que no hay un elemento con una caída de voltaje conocida que conecta a v_1 a un voltaje de nodo conocido (cero, puesto que es el nodo de referencia), v_1 de hecho no es una incógnita y puede determinarse inmediatamente:

$$v_1 = 5 + 0 = 5 \text{ V}$$

Similarmente, los supernodos que no contienen el nodo de referencia, tienen dos variables de voltaje de nodo [v_4 y v_5 , en la figura 4.13(a)]. Sin embargo, puesto que su diferencia es conocida,

$$v_5 - v_4 = 4$$

podemos considerar sólo uno de estos voltajes de nodo como incógnita, por ejemplo, v_4 , y la otra variable en términos de v_4 como

$$v_5 = v_4 + 4$$

El número de voltajes de nodo desconocidos se reducen así por el número de fuentes de voltaje independientes. Esto aparece en la figura 4.13(b) volviendo a marcar cada supernodo de forma que cada uno de sus voltajes de nodo queda expresado como la suma algebraica de los voltajes de nodo en el otro más la caída de voltaje conocida en la fuente de voltaje.

Para completar la formulación de las ecuaciones de análisis nodal, *apliquemos LCK a todos los supernodos que no contienen los nodos de referencia y a todos los demás nodos de no referencia*. Esto tiene el efecto de reducir el número de ecuaciones de nodo a razón de una por supernodo. *La presencia de fuentes de voltaje reduce de este modo el número de ecuaciones, y el número de incógnitas en el análisis nodal a razón de una por fuente de voltaje*. Por ejemplo, en la figura 4.13(a) hay cinco nodos que no son de referencia, y si las fuentes de voltaje fueran todas fuentes de corriente, se necesitaría de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Sin embargo, debido a que hay dos fuentes de voltaje, podemos descomponer el circuito utilizando sólo tres ecuaciones con tres incógnitas, como lo demostraremos a continuación.

No necesitamos una ecuación LCK para el supernodo A porque contiene el nodo de referencia. Haciendo referencia a la figura 4.13(b), igualando las corrientes que salen del nodo 2 a través de las resistencias hacia la corriente neta que entra al nodo 2 mediante las fuentes de corriente en el nodo acostumbrado,

$$(1)(v_2 - 5) + (4)(v_2 - v_3) + (2)(v_2 - [v_4 + 4]) = 6$$

en tanto que en el nodo 3

$$(4)(v_3 - v_2) + (3)(v_3 - 0) + (2)(v_3 - v_4) = 0$$

y en el supernodo B,

$$(2)(v_4 - v_3) + (2)([v_4 + 4] - v_2) + (1)([v_4 + 4] - 0) = 0$$

Reescribiendo estas ecuaciones en forma de vector-matriz,

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}$$

La matriz coeficiente tiene las mismas propiedades que tenía en ausencia de fuentes de voltaje: los elementos de la diagonal son la suma de todas las conductancias que entran al nodo o supernodo en donde la ecuación fue escrita; el elemento (i, j) es la suma negativa de conductancias que conectan el nodo de la ecuación i -ésima, o supernodo con la ecuación j -ésima, y por consiguiente la matriz es simétrica. Sin embargo, el vector fuente en el lado derecho de la ecuación, ya no es simplemente corriente neta debida a fuente de corriente, puesto que ahora ya también contiene términos debidos a las fuentes de voltaje.

Ejemplo 4.9

Como segundo ejemplo, obtengamos v e i en el circuito de la figura 4.14. Asignando voltajes de nodo de 0 V y $0 + 20 = 20$ V a un supernodo, y v y $v + 3$ al otro, hay un supernodo que no contiene el nodo de

referencia, y por consiguiente, debemos escribir una ecuación LCK. Sumando las corrientes en esta región del modo acostumbrado,

$$\frac{1}{6 \times 10^3}([v + 3] - 20) + \frac{1}{2 \times 10^3}([v + 3] - 0) + \frac{1}{4 \times 10^3}(v - 0) = 6 \times 10^{-3}$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $v = 8$ V. Descomponiendo el circuito, ahora podemos obtener fácilmente cualquier otra variable de circuito, como puede ser i . Esta corriente es

$$i = \frac{1}{6 \times 10^3}([v + 3] - 20) = \frac{1}{6 \times 10^3}(-9) = -3/2 \text{ mA}$$

Nótese que, aunque hay tres nodos de no referencia en este problema, tuvimos que resolver una sola ecuación con una sola incógnita, en lugar de tres con tres incógnitas, por la benéfica presencia de las dos fuentes de voltaje.

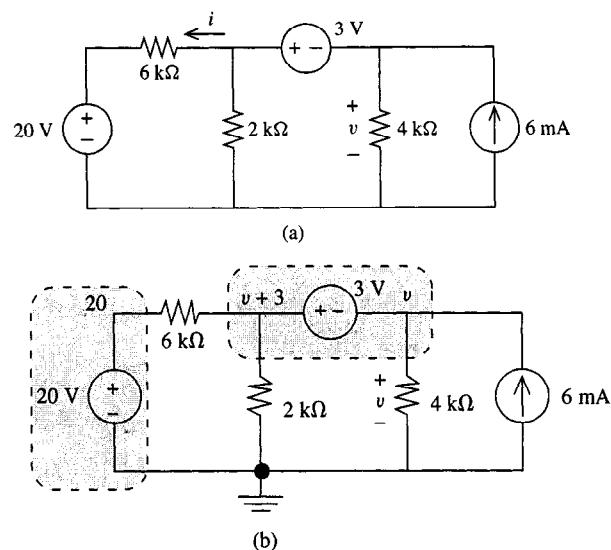


FIGURA 4.14 (a) Circuito para el ejemplo 4.8; (b) Redibujado con voltajes de nodos y supernodos renombrados.

Ejemplo 4.10

Considérese a continuación un ejemplo que contiene una fuente dependiente de voltaje como aparece en la figura 4.15. En el ejemplo 4.7 tratamos inicialmente fuentes de corriente dependientes como si fuesen independientes, con el fin de escribir la ecuaciones nodales, y luego reemplazamos sus variables de control por voltajes de nodo. Ahora procedemos del mismo modo.

Se necesitan ecuaciones en los nodos v_1 y v_2 , pero no en cualquiera de los supernodos, puesto que ambos contienen el nodo de referencia. Las dos ecuaciones necesarias son:

$$4v_1 + 2(v_1 - v_2) = 10 \quad (4.13a)$$

$$2(v_2 - v_1) + 9(v_2 - 10v) = -6 \quad (4.13b)$$

Al escribir estas ecuaciones procedemos como si la fuente de voltaje dependiente fuera una fuente independiente del valor $10v$. A continuación reemplazamos la variable de control por voltajes de nodo. Puesto que v es el voltaje de elemento entre los nodos con voltajes dados como $10v$ y v_1

$$v = 10v - v_1$$

o $v = \frac{1}{9}v_1$. Sustituyendo esto en (4.13b), (4.13a) se convierte en

$$\begin{aligned} 6v_1 - 2v_2 &= 10 \\ -12v_1 + 11v_2 &= -6 \end{aligned}$$

Resolviendo por eliminación Gaussiana, multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ y la sumamos a la primera, con lo que obtenemos

$$v_2 = 2 \text{ V}$$

Sustituyendo esto en la primera ecuación, obtenemos $v_1 = 7/3$ V. Descomponiendo el circuito, puede completarse el análisis por inspección. Por ejemplo, la corriente i es

$$i = 2(v_2 - v_1) = 2(2 - 7/3) = 4/3 \text{ A}$$

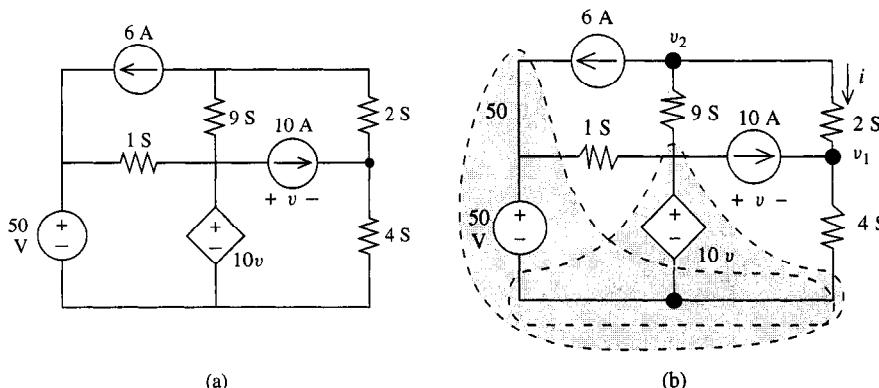
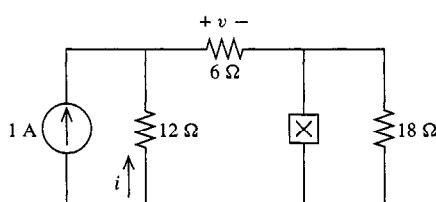


FIGURA 4.15 (a) Circuito que contiene fuentes de voltaje dependientes; (b) redibujado para mostrar los supernodos.

EJERCICIOS



EJERCICIO 4.4.1

- 4.4.1.** Utilizando análisis nodales, obténgase v si el elemento x es una fuente de voltaje independiente 3-V con la terminal positiva en la parte superior.

Respuesta 3 V

- 4.4.2.** Obténgase v en el ejercicio 4.4.1 si el elemento x es una fuente de corriente independiente 2-A dirigida hacia abajo.

Respuesta 8 V

- 4.4.3.** Obténgase v en el ejercicio 4.4.1 si el elemento x es una fuente de voltaje dependiente de $12i$ V con la terminal positiva en la parte inferior.

Respuesta 12 V

4.4.4. Siendo x la fuente de voltaje independiente del ejercicio 4.4.1, supóngase que deseamos un valor de +5 V para v . ¿Cuál debe ser la función de fuente para x ?

Respuesta -3 V

4.5

ANÁLISIS DE MALLAS

En el análisis nodal de las secciones anteriores aplicamos LCK en los nodos que no son de referencia del circuito. Ahora consideraremos un método relacionado conocido como *análisis de mallas*, en donde se aplica LVK a ciertas trayectorias cerradas en el circuito. Como veremos, en este caso las incógnitas de las ecuaciones resultantes serán corrientes.

En esta sección restringiremos nuestra atención a circuitos *planos*, es decir, circuitos que pueden dibujarse en una superficie plana (como una hoja de papel) de forma que no se cruzan elementos o cables de conexión. En este caso, el plano está dividido por el diagrama en el circuito en distintas áreas, del mismo modo en que el marco sólido en una ventana separa y delinea cada vidrio individual. La frontera cerrada de cada área de vidrio, se conoce como *malla* del circuito. Por consiguiente, una malla es un caso especial de circuito *cerrado*, a la que consideraremos como una trayectoria cerrada de elementos en el circuito que nunca pasan más de una vez por algún nodo o elemento. En otras palabras, una malla es un circuito cerrado que no contiene elementos dentro de ésta.

Ejemplo 4.11

El circuito de la figura 4.16 es plano y contiene tres mallas, identificadas por las flechas. La malla 1 contiene los elementos R_1 , R_2 , R_3 y v_{g1} ; la malla 2 contiene R_2 , R_4 , v_{g2} , y R_5 ; y la malla 3 contiene R_5 , v_{g2} , R_6 , y R_3 .

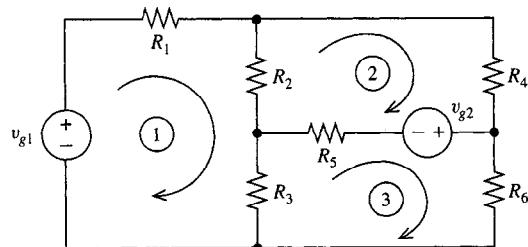


FIGURA 4.16 Circuito plano con tres mallas.

En el caso de los circuitos *no planos* (es decir, aquellos que no son planos), no podemos definir mallas y, en consecuencia, no puede realizarse el análisis de malla. Por eso, el análisis de malla no es tan general como el análisis nodal, que no tiene esta restricción topológica. Sin embargo, aún puede emplearse una técnica basada en LVK aun en circuitos no planos. El procedimiento en este caso es similar al análisis de malla, pero las ecuaciones no se formulan tan fácilmente. Esta técnica, el *análisis de mallas generalizadas*, se resume brevemente en el apéndice C. Afortunadamente, la gran mayoría de los circuitos eléctricos que necesitaremos analizar en la práctica son planos, y podemos elegir para ellos el análisis nodal y de malla. Para circuitos no planos, el único método general que se ha desarrollado en este texto es el análisis nodal.

Definimos una *corriente de malla* como la corriente que circula en una malla. Si un elemento está situado en una sola malla, tales como v_{g1} o R_2 en la figura 4.16, transporta una corriente de elemento que es igual a su corriente de malla (corriente de malla i_1 para v_{g1} , i_2 para R_2). Si un elemento está localizado entre estas dos mallas, tales como R_2 en la misma figura, su corriente de elementos, la suma algebraica de las dos corrientes de malla que circulan por ésta ($i_1 - i_2$ para el elemento R_2). Marcando las corrientes de elemento con letras mayúsculas, y las corrientes de malla con minúsculas, tanto R_1 como v_{g1} tienen la misma corriente de elemento e I_1 , donde

$$I_1 = i_1$$

La corriente de elemento I_3 definida como positiva hacia abajo a través de R_3

$$I_3 = i_1 - i_2$$

El análisis de malla consiste en escribir LVK alrededor de cada malla en el circuito, utilizando como incógnita las corrientes de malla. Queda garantizado que el sistema resultante de ecuaciones es linealmente independiente, como se describe en el apéndice C, y por consiguiente posee una solución única. Igual que con las ecuaciones nodales, puede obtenerse la solución por cualquier método conveniente como la eliminación Gaussiana, la regla de Cramer, o la inversión de matrices.

Ejemplo 4.12

Considérese el circuito de la figura 4.17. Escribiendo LVK en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la primera malla

$$R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = v_{g1}$$

y en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la segunda malla

$$R_2 i_2 + R_3(i_2 - i_1) = -v_{g2}$$

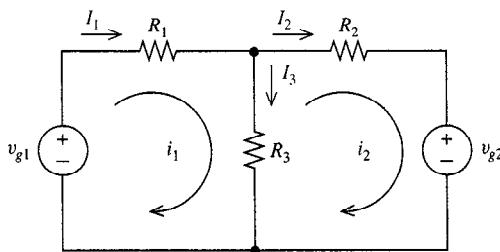


FIGURA 4.17 Circuito con dos mallas.

Nótese que en la segunda ecuación expresamos las corrientes de elemento a través de R_3 como $i_2 - i_1$, de forma que sus flechas direccionalas de referencia apuntan hacia la misma dirección en que cruzamos la trayectoria cerrada (en el sentido de las manecillas del reloj). De esta forma, la caída de voltaje positiva en esta ecuación LVK. Si hubiéramos utilizado menos $i_1 - i_2$, como la corriente de elemento, como lo hicimos en la primera ecuación, entonces habríamos tenido un signo negativo frente al término correspondiente, $-R_3(i_1 - i_2)$. Siempre utilizaremos direcciones de referencia de corriente de elemento implícitas que apuntan en la misma dirección en la que recorremos la malla, haciendo de este modo que los signos sean positivos para todos los términos de caída de voltaje resistivo. Desde luego, esto es por conveniencia; nunca es incorrecto reemplazar un término como $+R_3(i_2 - i_1)$ por $-R_3(i_1 - i_2)$ en cualquier ecuación.

También existe un *método abreviado* para escribir ecuaciones de malla que es similar al método nodal abreviado de la sección 4.2. Reagrupando las dos ecuaciones del ejemplo 4.12

$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3i_2 = v_{g1} \quad (4.14a)$$

$$-R_3i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -v_{g2} \quad (4.14b)$$

Notamos que en la primera ecuación, correspondiente a la primera malla, el coeficiente de la primera corriente es la suma de las resistencias asociadas con la primera

malla, y el coeficiente de la otra corriente de malla es el negativo de la resistencia común a esa malla y a la primera malla. El lado derecho de la primera ecuación es la alza neta de voltaje de la dirección transversal debido a fuentes de voltaje en la primera malla. Este mismo patrón se aplica a cada ecuación. *En el lado izquierdo en la ecuación de malla k el coeficiente de la corriente malla k es la suma de las resistencias de la malla k y los coeficientes de las otras corrientes de malla son los negativos de las resistencias de la frontera entre sus mallas y la malla k. El lado derecho de la ecuación de malla k consiste de la alza neta de voltaje en esta malla debido a las fuentes de voltaje.* Este procedimiento abreviado es consecuencia de seleccionar todas las corrientes de malla en la misma dirección (que en la figura 4.17 están en el sentido de las manecillas del reloj) y escribiendo LVK conforme se recorre cada malla en la dirección de su corriente de malla. Desde luego, el método abreviado se aplica únicamente cuando no hay fuentes presentes excepto las fuentes independientes de voltaje.

Ejemplo 4.13

En la figura 4.16 definimos i_1 , i_2 , e i_3 , como las corrientes de malla que circulan en el sentido de las manecillas del reloj en las mallas 1, 2, y 3, respectivamente. Aplicando el método abreviado a la malla 1, obtenemos

$$(R_1 + R_2 + R_3)i_1 - R_2i_2 - R_3i_3 = v_{g1} \quad (4.15a)$$

Puede comprobarse este resultado aplicando LVK a la malla 1, con la consecuencia de

$$R_1i_1 + R_2(i_1 - i_2) + R_3(i_1 - i_3) = v_{g1}$$

Los dos resultados son evidentemente los mismos.

Asimismo, aplicando LVK a las mallas 2 y 3, se obtiene

$$-R_2i_1 + (R_2 + R_4 + R_5)i_2 - R_5i_3 = -v_{g2} \quad (4.15b)$$

$$-R_3i_1 - R_5i_2 + (R_3 + R_5 + R_6)i_3 = v_{g2} \quad (4.15c)$$

Se completa el análisis resolviendo estas tres ecuaciones de malla para las tres corrientes de malla incógnitas.

La misma simetría está presente en las ecuaciones de malla como se hizo notar en las ecuaciones nodales. Reescribiendo las tres ecuaciones de malla (4.15) como una sola ecuación de vector-matriz, obtenemos

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{g1} \\ -v_{g2} \\ v_{g2} \end{bmatrix}$$

Los elementos diagonales son las sumas de las resistencias en las mallas, y los elementos fuera de la diagonal son los negativos de las resistencias comunes a las mallas correspondientes al renglón y columna del elemento. Es decir, $-R_2$ en el renglón 1, columna 2; o en el renglón 2 columna 1, es el negativo de la resistencia común a las mallas 1 y 2, y así sucesivamente. Por consiguiente la matriz es simétrica. Del mismo modo que en el análisis nodal, no se preserva esta simetría si hay presentes fuentes dependientes.

Ejemplo 4.14

Buscamos la corriente i en la figura 4-18. Este circuito contiene una fuente de voltaje dependiente. Al igual que en el análisis nodal, trabajamos con fuentes dependientes escribiendo en primer lugar las ecuaciones de análisis como si la fuente fuera independiente; luego la reemplazamos con la variable de control por las variables deseadas del método de análisis (en este caso, las corrientes de malla). Utilizando el método abreviado,

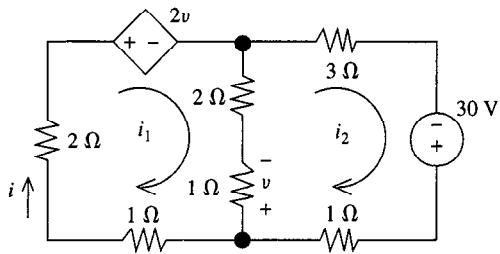


FIGURA 4.18 Ejemplo con una fuente dependiente.

$$6i_1 - 3i_2 = -2v \quad (4.16a)$$

$$-3i_1 + 7i_2 = 30 \quad (4.16b)$$

En la ecuación 4.16, 6Ω es la resistencia alrededor de la malla 1, 7Ω es alrededor de la malla 2, -3Ω es el negativo de la resistencia neta en la frontera entre las mallas, $-2v$ es la alza de voltaje en el sentido de las manecillas del reloj debido a las fuentes de voltaje en la malla 1, y 30 es la alza debida a las fuentes en la malla 2. Reemplazando la variable de control v por $1(i_2 - i_1)$ mediante la ley de Ohm,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

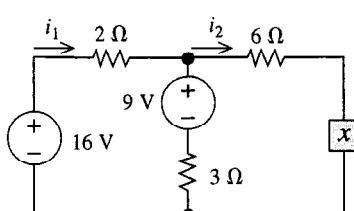
La resolveremos para i_1 , que es la corriente deseada i , utilizando la regla de Cramer. El determinante de la matriz coeficiente es

$$\Delta = (4)(7) - (-1)(-3) = 25$$

Reemplazando la primera columna de la matriz coeficiente por el vector de los lados derechos y calculando el determinante,

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 30 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{5} \text{ A}$$

EJERCICIOS



EJERCICIO 4.5.3

- 4.5.1.** Utilizando el análisis de malla, obténganse i_1 e i_2 en la figura 4.17 si $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $v_{g1} = 9\text{ V}$, y $v_{g2} = -5\text{ V}$.

Respuesta 3 A; 2 A

- 4.5.2.** Repítase el ejercicio 4.5.1 con $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $v_{g1} = 21\text{ V}$, y $v_{g2} = 0$. Compruébese utilizando la resistencia equivalente y la división de corrientes.

Respuesta 9 A; 6 A

- 4.5.3.** Utilizando el análisis de malla, obténgase i_1 e i_2 si el elemento x es una fuente de voltaje independiente de 6-V con la terminal positiva arriba.

Respuesta 2 A; 1 A

- 4.5.4.** Repítase el ejercicio 4.5.3 si el elemento x es una fuente de voltaje dependiente de $6i_1\text{ V}$ con la terminal positiva abajo.

Respuesta 5 A; 6 A

Al igual que en el caso del análisis nodal con fuente de voltaje, el análisis de malla da por resultado menos ecuaciones si están presentes fuentes de corriente. Para ilustrar esto, consideremos el circuito de la figura 4.19(a) que tiene dos fuentes de corriente y una fuente de voltaje.

Los circuitos con tres mallas, en ausencia de fuentes de corriente, tendrán tres corrientes de malla desconocidas. Sin embargo, nótese que cada fuente de corriente que tiene de frontera sólo una malla, como i_{g1} en la figura 4.19(a), provoca una corriente de malla *desconocida* menos, puesto que la corriente de malla debe concordar con la función de fuente de corriente dada. Por consiguiente, volvemos a marcar la corriente de malla i_3 en la figura 4.14(b) por su valor conocido

$$i_3 = -i_{g1}$$

Similarmente, para cada fuente de corriente en la frontera entre las dos mallas, una de las dos corrientes de malla puede expresarse en términos de la otra. La fuente de corriente entre las mallas 1 y 2, permite renombrar i_2 en términos de i_1 puesto que al examinar la figura 4.19(a)

$$i_{g2} = i_2 - i_1$$

$$\text{o} \quad i_2 = -i_{g2} + i_1$$

como se muestra en la figura 4.14(b). *La presencia de fuentes de corriente, por consiguiente, reduce el número de incógnitas en el análisis de malla a razón de una por fuente de corriente.*

A continuación consideraremos la selección de un conjunto de ecuaciones LVK para coincidir con este número reducido de corrientes desconocidas. Imagínese el circuito resultante si elimináramos todas las fuentes de corriente reemplazándolas por circuitos abiertos. Algunas de estas mallas corresponden a mallas del circuito original, otras a trayectorias cerradas en el circuito original que no son mallas en el circuito original puesto que no están vacías, y tienen fuentes de corriente dentro de ellas. Estas se llaman *supermallas*. Este nuevo circuito tiene una malla menos por fuente de corriente que el original. La aplicación de LVK alrededor de trayectorias cerradas en el circuito definido como el conjunto de mallas que resulta cuando se eliminan todas las fuentes de corriente, resulta en el conjunto completo de ecuaciones de análisis de malla para circuitos que contienen fuentes de corriente. En la figura 4.19(b), si se eliminan las fuentes de corriente, quedaría una sola malla que atravesaría las tres resistencias y la fuente de voltaje. Esta no es una malla del circuito original, puesto que incluye una fuente de corriente.

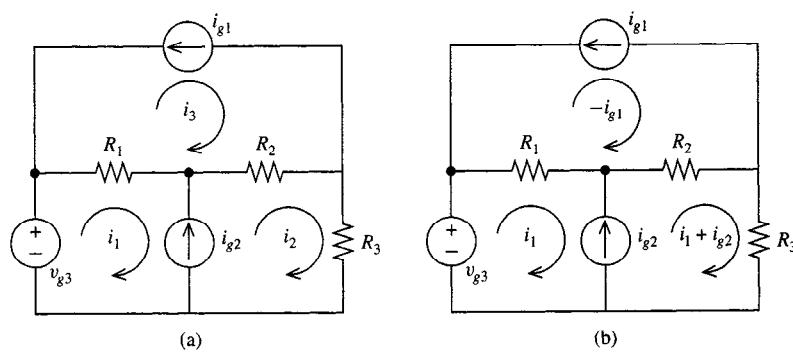


FIGURA 4.19 (a) Circuito con fuentes de corriente; (b) corrientes de malla reetiquetadas.

Escribiendo LVK alrededor de esta supermalla del circuito original,

$$R_1(i_1 + i_{g1}) + R_2(i_1 + i_{g2} + i_{g1}) + R_3(i_1 + i_{g2}) = v_{g3}$$

Esta es una ecuación única con una sola corriente de malla desconocida i_1 . Resolviendo,

$$i_1 = \frac{v_{g3} - R_1 i_{g1} - R_2(i_{g1} + i_{g2}) - R_3 i_{g2}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Esta solución es considerablemente más sencilla que las tres ecuaciones con tres incógnitas de corrientes de malla que obtendríamos si las fuentes de corriente fueran fuentes de voltaje. Por esta razón preferimos tener fuentes de corriente en el análisis de malla.

Ejemplo 4.15

Apliquemos el análisis de malla en el circuito de la figura 4.20(a). Examinando esta figura, las fuentes de corriente están relacionadas con las corrientes de malla por

$$9 = i_1 - i_3 \quad (4.17a)$$

$$\text{y} \quad 2v_x = i_4 - i_3 \quad (4.17b)$$

Resolviendo (4.17a) para i_3

$$i_3 = i_1 - 9$$

y (4.17b) para i_4 ,

$$i_4 = 2v_x + i_3 = 2v_x + i_1 - 9$$

Estas ecuaciones nos permiten volver a marcar las cuatro corrientes de malla en términos de únicamente dos corrientes de malla desconocidas, i_1 e i_2 . Esto aparece en la figura 4.20(b).

Las dos ecuaciones requeridas para hallar estas dos corrientes de malla desconocidas se obtienen imaginando que se eliminan las fuentes de corriente. En este circuito modificado sólo existen dos mallas, una correspondiente a la malla 2 del circuito original, y la otra a la supermalla que consiste de la unión de las mallas anteriores 1, 3, y 4 de la figura 4.20(a). Nótese que esta supermalla es una trayectoria

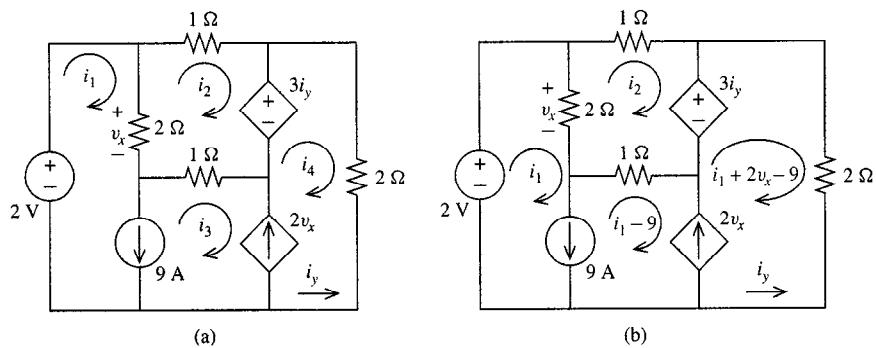


FIGURA 4.20 (a) Un circuito más complicado; (b) corrientes de malla reetiquetadas.

cerrada, pero *no* una malla en nuestro verdadero circuito de la figura 4.20(a) o (b), puesto que las fuentes de corriente están dentro de su frontera (de ahí que se designe como supermalla). Escribiendo LVK alrededor de la malla 2 en la figura 4.20(b),

$$1i_2 + 3i_y + 1(i_2 - i_1 + 9) + 2(i_2 - i_1) = 0 \quad (4.18a)$$

y alrededor de la supermalla,

$$2(i_1 - i_2) + 1(i_1 - 9 - i_2) - 3i_y + 2(i_1 + 2v_x - 9) - 2 = 0 \quad (4.18b)$$

Reagrupando términos comunes,

$$-3i_1 + 4i_2 = -9 - 3i_y \quad (4.19a)$$

$$5i_1 - 3i_2 = 29 - 4v_x + 3i_y \quad (4.19b)$$

Hasta ahora hemos ignorado el hecho que dos de las fuentes son, en realidad, dependientes. Ésta es la misma estrategia de dos pasos que utilizamos en el análisis nodal en la presencia de fuentes dependientes. Para completar el análisis, las variables de control v_x e i_y serán reemplazadas por corriente de malla. Inspeccionando el circuito diagrama de la figura 4.20(b), esto se logra inmediatamente.

$$v_x = 2(i_1 - i_2) \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned} y \quad i_y &= -(i_1 + 2v_x - 9) \\ &= -(i_1 + 2[2(i_1 - i_2)]) - 9 \\ o \quad i_y &= -5i_1 + 4i_2 + 9 \end{aligned} \quad (4.20b)$$

Utilizando (4.20) para eliminar v_x e i_y de (4.19), se obtiene

$$-18i_1 + 16i_2 = -36$$

$$28i_1 - 23i_2 = 56$$

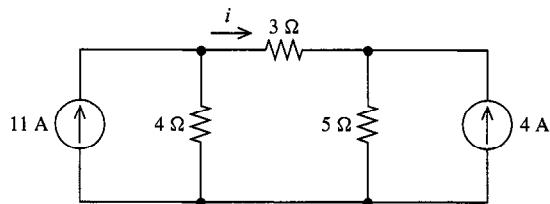
Resolviendo, obtenemos que $i_1 = 2$ A e $i_2 = 0$ A. Este resultado puede confirmarse utilizando cualquiera de los métodos de álgebra lineal (Gauss, Cramer, o inversión de matrices), o sustituyendo de nuevo i_1 o i_2 en estas dos ecuaciones.

Descomponiendo el circuito de este modo, puede recuperarse cualquier otra variable que sea necesaria. Las otras dos corrientes de malla pueden obtenerse de sus marcas en la figura 4.20(b) en términos de i_1 e i_2 . A partir de la ley de Ohm se obtienen todos los voltajes resistivos.

En general, antes de analizar cualquier circuito, cabe hacer notar la cantidad de ecuaciones que se requieren en el análisis nodal y en el análisis de malla, y elegir el método con menos ecuaciones. El número de ecuaciones nodales es el número de nodos (-1, que es el nodo de referencia), menos el número de fuentes de voltaje. El número de ecuaciones de mallas es número de mallas menos el número de fuentes de corriente. Asimismo, se supone que los equivalentes en serie y paralelos sean sustituidos donde esto sea posible antes de realizar el análisis nodal o de malla. Los elementos en serie multiplican innecesariamente el número de nodos; igualmente, los elementos paralelos hacen que proliferen las mallas.

EJERCICIOS

4.6.1. Utilizando el análisis de malla, obténgase i



EJERCICIO 4.6.1

Respuesta 2 A

4.6.2. Utilizando el análisis de malla, obténgase v en la figura 4.6. Esto se obtuvo en el ejemplo 4.5 utilizando superposición.

Respuesta 15 V

4.6.3. En la figura 4.19(a), sean $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $i_{g1} = 4 \text{ A}$, $i_{g2} = 6 \text{ A}$, y $v_{g3} = 52 \text{ V}$. Encuéntrese la potencia que va hacia R_3 .

Respuesta 18 W

4.7

PRINCIPIO DE CORTO VIRTUAL PARA OP AMP

En el capítulo 3 se desarrolló un enfoque general de análisis de circuitos que contienen op amps. Cada op amp en el diagrama de circuito es sustituido por un modelo adecuado, por ejemplo, el modelo ideal de amplificador de voltaje de la figura 3.7 o el modelo perfeccionado de la figura 3.9. Puesto que estos modelos contienen únicamente elementos convencionales de dos terminales tales como resistencias, y fuentes dependientes, el circuito resultante puede analizarse del mismo modo en que se haría con cualquier otro circuito lineal.

Hay otro enfoque para analizar circuitos de op amps que, donde sea aplicable, es mucho más fácil de realizar. No requiere reemplazar op amp por modelos, pero se aplica directamente al diagrama de circuito original. Para cada op amp en el circuito (figura 4.21), se emplean dos reglas:

1. La corriente que entra a las terminales de entrada del op amp es cero; $i_{i1} = i_{i2} = 0$.
2. El voltaje a través de las terminales del op amp es cero: $v_{in} = 0$.

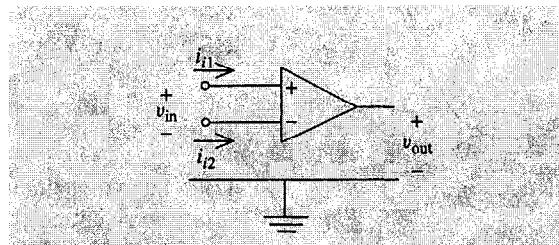


FIGURA 4.21 Principios de corto circuito y circuito abierto virtuales.

La primera de estas reglas asegura que la entrada de op amp se comporta como un circuito abierto. Puesto que el modelo ideal de amplificador de voltaje de la figura 3.7 utiliza una entrada de circuito abierto, esta regla, el *principio de circuito abierto virtual*, no es difícil de justificar. La segunda regla asegura que la entrada de op amp también se comporta como un corto circuito (no hay caída de voltaje a través de sus terminales). Esta regla, el *principio de corto virtual*, requiere un poco más de razonamiento. Primero damos ejemplos del uso de estas reglas, y luego consideraremos la justificación del principio de corto virtual y las principales suposiciones bajo las que es válido.

Ejemplo 4.16

En la sección 3.5 se analizó el circuito de amplificador de inversión que aparece en la figura 4.22. Reemplazando el op amp por su modelo ideal de amplificador de voltaje con la ganancia A de trayectoria abierta, se obtuvo que el voltaje de salida v_2 está dado por

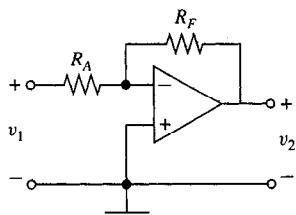


FIGURA 4.22 Amplificador de inversión.

$$v_2 = \frac{-R_F}{R_A + \frac{1}{A}(R_A + R_F)} v_1 \quad (4.21a)$$

En el límite alto de ganancia del op amp (ya que A se hace arbitrariamente grande), tenemos que se repite la relación de transferencia de voltaje para el amplificador de inversión (3.8).

$$v_2 = -\frac{R_F}{R_A} v_1 \quad (4.21b)$$

Ahora mostraremos cómo puede derivarse (4.21b) de los principios de circuito abierto virtual y corto circuito virtual *sin recurrir a modelos o rebasando los límites*. Puesto que la terminal de entrada sin inversión en la figura 4.22 está en tierra, por el principio de corto virtual, también lo está la terminal de inversión de entrada. Por consiguiente, el nodo que conecta a los dos resistores está en el potencial de tierra, indicando que el total del voltaje v_1 está a través de R_A y v_2 está a través de R_F . Sumando las corrientes en este nodo,

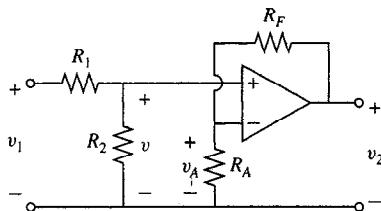
$$\frac{v_1}{R_A} + \frac{v_2}{R_F} = 0 \quad (4.22)$$

En esta ecuación la corriente que entra al op amp en este nodo es cero por el principio de circuito abierto virtual. Reagrupando levemente (4.22), se obtiene la relación de transferencia de voltaje (4.21b).

Ejemplo 4.17

Encuentre v_2 en la figura 4.23.

Puesto que no fluye corriente al op amp en la terminal de inversión de entrada (por el principio de circuito abierto virtual), R_F y R_A están en serie, y por consiguiente dividen el voltaje v_2 , con



$$v_A = \frac{R_A}{R_A + R_F} v_2$$

Dado que no cae ningún voltaje a través de la entrada del op amp (el principio de circuito corto virtual), también ocurre lo mismo con el voltaje en la entrada no inversora de entrada o

$$v = v_A$$

FIGURA 4.23 Circuito para el ejemplo 4.17.

Examinando la trayectoria cerrada izquierda, R_1 y R_2 están en serie a través de v_1 (nuevamente, no hay corriente en el op amp debido al principio de circuito abierto virtual). Por consiguiente, por la división de voltaje v_1 ,

$$v = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1$$

Combinando estas últimas tres ecuaciones, debe ser que

$$\begin{aligned} \frac{R_A}{R_A + R_F} v_2 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1 \\ \text{o} \quad v_2 &= \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right) \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) v_1 \end{aligned}$$

Para justificar el principio de circuito abierto virtual, razonamos del modo siguiente. Supóngase que en un circuito de op amp dado, el voltaje de salida del op amp es finito en el límite alto de ganancia del op amp, conforme la ganancia A del op amp se hace arbitrariamente grande. Puesto que el voltaje de salida es A veces la entrada, *conforme A se hace arbitrariamente grande, el voltaje de salida del op amp seguirá siendo finito únicamente si el voltaje de entrada se hace arbitrariamente pequeño*. Pasando al límite alto de ganancia del op amp, la entrada debe ser exactamente cero porque de otro modo tendríamos el producto de una entrada no nula por una ganancia infinita produciendo un voltaje de salida infinito, contradiciendo la suposición de que la salida debe ser finita.

Por consiguiente, para circuitos cuyos voltajes de salida del op amp son finitos en el límite alto de ganancia del op amp, se cumple el principio de corto virtual ¿Qué clase de circuito es éste? ciertamente, el circuito descrito por (4.21a) está en esta clase. Nótese que conforme A crece, el voltaje de salida del op amp v_2 tiende no al infinito, sino más bien al valor finito $(-R_F/R_A)v_1$ especificado en (4.21b).

Ciertamente, cualquier circuito con retroalimentación negativa, tales como todos los circuitos construidos a base de op amp descritos en el capítulo 3, tendrán un comportamiento lo suficiente "bueno" para tender a una salida finita en el límite alto de ganancia del op amp. Por consiguiente, *podemos utilizar los principios de circuito virtual corto y abierto (4.21) para analizar cualquier circuito con op amps que utiliza retroalimentación negativa*. Como se ha hecho notar previamente, sólo los circuitos de esta clase son circuitos con op amps prácticamente lineales, puesto que el resto tendrán voltajes de salida del op amp "que se funden", excediendo los índices físicos de voltaje de salida cuando se conectan. Esta violación de los límites seguros provoca un comportamiento ciertamente no lineal, y quizás rápidamente destructivo. De modo que nuestras reglas de circuito corto o abierto serán válidos para cualquier circuito lineal con op amps que nos sea útil.

Ejemplo 4.18

Los circuitos con op amps analizados hasta ahora han sido de la clase simple, es decir, reducibles a una sola ecuación. Este ejemplo demuestra cómo resolver un problema general de circuito op amp. Utilizaremos el análisis nodal junto con los principios de corto o circuito abierto virtual. Buscaremos la corriente de carga i y el voltaje v .

El circuito de la figura 4.24 tiene dos voltajes de nodo desconocidos marcados como v_1 y v_2 por el principio corto virtual, la terminal de inversión de entrada está a potencial de tierra, y hemos marcado su voltaje de nodo como 0 V. Por consiguiente necesitamos dos ecuaciones de nodo. Para circuitos que no contienen op amps, escribi-

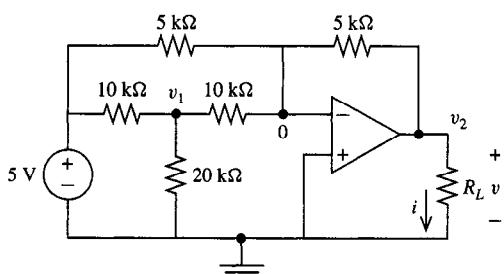


FIGURA 4.24 Un circuito con op amps más complicado.

mos LCK en cada nodo o supernodo que contiene un voltaje de nodo desconocido. Cuando están presentes los op amps, modificamos esta estrategia *escribiendo LCK en el nodo de inversión de entrada, en vez del nodo de salida del op amp*. Respectivamente, en el nodo 1 y en el nodo de entrada no de inversión,

$$\frac{1}{10 \times 10^3} + \frac{1}{20 \times 10^3} v_1 + \frac{1}{10 \times 10^3} (v_1 - 5) = 0 \quad (4.23a)$$

$$\frac{1}{10 \times 10^3} (0 - v_1) + \frac{1}{5 \times 10^3} (0 - 5) + \frac{1}{5 \times 10^3} (0 - v_2) = 0 \quad (4.23b)$$

El principio de circuito abierto virtual fue utilizando en (4.23b). Resolviendo (4.23a) para v_1 , obtenemos

$$v_1 = 2 \text{ V}$$

y sustituyéndolo en (4.23b),

$$v_2 = \frac{1.2}{-0.2} = -6 \text{ V}$$

Por consiguiente, las incógnitas deseadas son $i = -6/1000 = -6 \text{ mA}$ y $v = 5 - v_1 = 3 \text{ V}$.

Seremos consistentes en no escribir ecuaciones de nodo en nodos de salida del op amp para evitar complicaciones debidas a la naturaleza incompleta de los diagramas de circuito del op amp. Como se mencionó en el capítulo 3, hay varias conexiones a los op amp que no aparecen en el diagrama de circuito. En particular, la guía que conecta la salida de op amp a tierra generalmente se omite (ver figura 3.6). Ciertamente, dibujando el op amp como un dispositivo de tres terminales parece violar la LCK generalizada, puesto que cada una de las dos corrientes de entrada es cero (el principio de circuito abierto virtual), en tanto que la corriente de salida del op amp generalmente no es cero. La guía de salida a tierra que no aparece hace difícil determinar directamente la corriente de salida del op amp, y por consiguiente difícil de escribir ahí una ecuación de nodo. En vez de ello, elegimos escribir LCK en el nodo de inversión de entrada, donde pueden determinarse fácilmente todas las corrientes. Una vez que se descompone el circuito, la corriente de salida del op amp puede obtenerse fácilmente, si esto se desea.

Las reglas de los principios de corto circuito o de circuito abierto virtuales son designadas “virtuales” porque en práctica la corriente de entrada y el voltaje de entrada a los op amps físicos que se operan en circuitos de retroalimentación negativa son suficientemente pequeños para ser virtualmente, aunque no exactamente, cero. Esto es exactamente lo que esperaríamos si la entrada de op amp tuviera una resistencia alta pero no infinita, y la ganancia A del op amp fuera grande pero finita (condiciones características del op amp físico). Los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales son excelentes aproximaciones y pueden utilizarse para simplificar el análisis cuando se operan op amps en el modo lineal y de retroalimentación negativa. Nótese, sin embargo, que el uso del principio del corto virtual se aplica de forma exacta únicamente en el límite alto de ganancia del op amp. Si se desean variables de circuito para una ganancia finita A específica, debe utilizarse el método de sustitución de modelo, aunque menos conveniente, desarrollado en el capítulo 3.

EJERCICIOS

- 4.7.1. Utilícese los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales para obtener la proporción de transferencia de voltaje v_2/v_1 para el amplificador no inversor de la figura 3.19

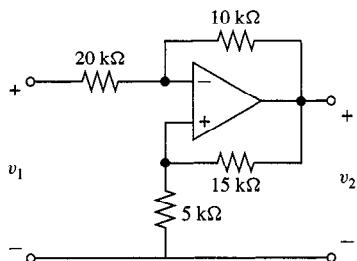
Respuesta $1 + R_F/R_A$

- 4.7.2. Utilícese los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales para obtener la proporción de transferencia de voltaje para el seguidor de voltaje de la figura 3.14.

Respuesta 1

- 4.7.3. Utilícese el análisis nodal y los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales para obtener la proporción de transferencia de voltaje v_2/v_1 .

Respuesta -4/5



EJERCICIO 4.7.3

4.8

ANÁLISIS DE CIRCUITO CON COMPUTADORA UTILIZANDO SPICE

En este capítulo hemos visto que los circuitos resistivos lineales generales pueden ser analizados eficientemente escribiendo y luego resolviendo un conjunto de ecuaciones simultáneas nodales y de malla. Los cálculos que se requiere hacer manualmente para un circuito simple son mínimos, y es razonable hacerlos para dos o tres incógnitas (voltajes de nodo o corrientes de malla). Pero resolver a mano seis ecuaciones con seis incógnitas, o veinte ecuaciones con veinte incógnitas, requiere de mucho tiempo. Además, la gran cantidad de pasos requeridos, hacen que el proceso de resolver a mano sea propenso a errores, lo que requiere aún más tiempo de cuidadosas revisiones paso por paso. Tristemente, la mayor parte del tiempo de este gran trabajo se dedica a realizar cálculos repetitivos, con poca satisfacción en términos de aprendizaje o nuevos descubrimientos.

Por esta razón, generaciones de estudiantes de ingeniería eléctrica tenían que conformarse con trabajar con un número limitado de circuitos, cada uno de éstos de tamaño muy modesto. La valiosa experiencia que podría ganarse mediante un análisis más amplio y explorar circuitos más grandes, fue puesto de lado por la desagradable posibilidad del precio que esto exigía, horas de repetitivos "cálculos" manuales.

Afortunadamente, este ya no es el caso. La tecnología moderna nos ofrece la computadora digital, una espléndida herramienta capaz de aliviarnos del peso del tedioso e ineficiente uso de tiempo inherente a los prolongados cálculos manuales. Durante las últimas cuatro décadas, la computadora revolucionó la forma en que se hace cualquier tipo de ingeniería, así sea en el diseño de una estación espacial, el perfeccionamiento de dispositivos automotrices para control de emisiones, o el análisis de circuitos eléctricos. Con el apoyo en la computadora para cálculos repetitivos, pueden resolverse problemas más grandes y más realistas, y puede obtenerse más experiencia con sistemas más complejos. Tanto el estudiante como el practicante de ingeniería se benefician de la oportunidad de una experiencia más avanzada y realista para resolver problemas, que se logran por la ayuda de una computadora equipada con los programas de software adecuados.

En tanto que hay muchos programas de computadora útiles para ayudarnos en el análisis de circuitos eléctricos, nos concentraremos en uno que está ampliamente disponible en una variedad de plataformas para computadora. Este programa de software se conoce como SPICE ("Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis"; "Programa de Simulación con Énfasis en Circuitos Integrados").

Utilizaremos con frecuencia esta herramienta. Un uso común será revisar los resultados manuales (muchos de los problemas en los capítulos subsiguientes piden que el estudiante resuelva un problema de circuitos manualmente, y luego se “revise utilizando SPICE”). Un segundo uso será resolver problemas que involucran muchos nodos y/o mallas. Un tercer uso importante de SPICE será explorar el efecto de cambiar el valor de un sólo elemento de circuito, tales como una resistencia específica dentro de un circuito. Esto es especialmente importante para el diseño de “prueba y error”, donde podemos probar varios valores de un elemento de circuito antes de adoptar uno cuyo efecto sea un mejor funcionamiento del circuito. Típicamente, debe repetirse todo el análisis numérico para cada valor que se pruebe, y el esfuerzo involucrado elimina efectivamente los cálculos a mano como una posibilidad realista en muchos estudios de diseño. La alternativa a los procesos repetidos es escribir una ecuación que describa explícitamente la dependencia funcional de una medida seleccionada del funcionamiento del circuito sobre el parámetro en cuestión, y luego resolver de algún modo esta ecuación para el valor óptimo. En el caso de circuitos complejos, esto es pocas veces una alternativa práctica para el proceso repetitivo de prueba y error.

SPICE resultará ser útil en cada una de estas formas, pero sigue siendo únicamente una herramienta computarizada. Una forma en la que no podemos utilizar SPICE es sustituirlo por el proceso intelectualmente estimulante, y a veces doloroso de adquirir conocimientos y habilidad en el manejo de los conceptos y métodos. La capacidad para resolver problemas se profundiza únicamente mediante el pensamiento concentrado y la experiencia repetida. Del mismo modo en que poseer una buena calculadora no significa que se tenga un contador capaz, o que el acceso a un sintetizador digital de música no necesariamente hace a un compositor notable, del mismo modo el trabajo que puede verdaderamente realizar una computadora con circuitos eléctricos solamente nos ahorra un poco de tiempo. Pero puesto que es un recurso preciado para cualquier estudiante ocupado o profesionista, aprovecharemos hasta donde nos sea posible esta herramienta que tanto tiempo nos ahorra.

El programa SPICE, desarrollado con el apoyo de la Fundación Nacional de Ciencias, con estudiantes y miembros de la Facultad de la Universidad de California en Berkeley, se ha convertido en la norma *de facto* para la simulación de circuitos analógicos. El éxito de SPICE se debe a una combinación de virtudes: el programa es poderoso, fácil de operar y económico, tiene soporte en la mayor parte de los programas de significado para la ingeniería, y se mantiene bien. No con esto pretendemos sugerir que SPICE es absolutamente el mejor producto disponible para análisis de circuito; ciertamente, hay paquetes de software más poderosos y más completos que están disponibles comercialmente. Pero SPICE realiza lo que se necesita para nuestros propósitos y está disponible y es más económico que otros programas.

El programa PSPICE, una versión de SPICE reescrita para computadoras personales tales como la familia de computadoras personales IBM; la Apple Macintosh, y otras plataformas de computadoras más pequeñas, se utiliza con frecuencia para ilustrar este texto. Aunque tienen diferencias en algunas características, donde sea posible nos enfocaremos a características comunes para los “dialectos” SPICE y PSPICE. Ciertamente, cuando hacemos referencia a SPICE, nos referimos genéricamente a ambos, SPICE, escrito en la Universidad de California en Berkeley para computadoras grandes, y PSPICE, escrito para la empresa Micro-Sim Corporation para diversas computadoras personales y estaciones de trabajo. Cuando sea necesario distinguirlos lo haremos explícitamente. Se han desarrollado otras variantes de SPICE, tales como HSPICE y SPICE-Plus, que son considerablemente similares.

Se recomienda al estudiante que no conozca SPICE revisar el apéndice D. El resto de esta sección se dedica a una introducción a los formatos SPICE y comandos necesarios para la clase de problemas de análisis de circuito que hemos estudiado hasta ahora, los circuitos resistivos lineales con fuentes independientes (dc) constantes.

Antes de que pueda hacerse funcionar el programa SPICE, el primer paso es la creación de un *archivo de entradas* SPICE. El propósito del archivo de entradas SPICE es

triple: especificar completamente el circuito que deseamos analizar, poner en alerta al programa SPICE respecto al tipo de análisis que deseamos hacer, y para identificar las variables de salida deseadas. El archivo de entrada SPICE tiene formato similar a un archivo de texto originario (Archivo ASCII) y típicamente se crea con un programa de utilería de software llamado *editor de texto* que está disponible en el sistema de computadora que se utiliza.¹

El archivo de entrada SPICE se organiza como un conjunto de declaraciones, cada una de las cuales termina con el valor ENTER. La primera declaración es una *declaración de título*, identificando el problema que se estudia. No hay un formato particular para esta declaración, excepto que la primera columna debe quedar en blanco. La última declaración es la *declaración END*. Todas las demás declaraciones se escriben entre estas dos.

El circuito es identificado por un conjunto de *enunciados de elementos*. Cada enunciado especifica el tipo de elemento, su nombre, lugar en el circuito y su valor de elemento. El formato para un enunciado de elemento de la resistencia es

RXXXXX	N1	N2	VALUE
--------	----	----	-------

donde R indica que se trata de una resistencia, XXXX es su nombre, N1 y N2 son los dos nodos de sus terminales, y VALUE es su resistencia en ohms. Nótese que los símbolos de los archivos de entrada o de salida de SPICE siempre se distinguirán por el uso del tipo de letra que aparece.

El formato para una fuente independiente de voltaje dc es

VXXXXX	N1	N2	DC	VALUE
--------	----	----	----	-------

y la fuente independiente dc es

IXXXXX	N1	N2	DC	VALUE
--------	----	----	----	-------

Aunque no es importante para una resistencia el orden en que se hace la lista de nodo, en el caso de las fuentes independientes se usa el orden para especificar la dirección de referencia. El signo más de la dirección de referencia de la fuente de voltaje se toma en el nodo N1, y la flecha de la dirección de referencia de la fuente de corriente se considera como que apunta de N1 a N2. VALUE es la función de fuente en volts (para la fuente de voltaje) o amperes (para la fuente de corriente).

El archivo de entrada a SPICE también contendrá declaraciones de control que especifica en el tipo de análisis que se realizará y las salidas que se revisarán. El modo por omisión de análisis es dc; por consiguiente, en ausencia de declaraciones especificando otros nodos de análisis (tales como declaraciones de .AC o .TRAN utilizados en capítulos posteriores), obtendremos la solución dc que nos interesa generar. La salida puede ser una lista de números o puede graficarse. Para circuitos dc, cuyas variables de circuito no varían respecto al tiempo, sólo necesita considerarse la salida numérica. Para dar salida a una lista de números, el enunciado de control es

.PRINT	DC	CVLIST
--------	----	--------

¹ Se parte de la suposición que el lector está familiarizado con el sistema operativo, un editor de textos y un comando para imprimir un archivo de texto en la pantalla o al papel en el sistema de la computadora en la que se hace correr SPICE.

CVLIST es una lista de las variables de circuito que deseamos imprimir. A cada voltaje en la lista se le da el formato **V(I,J)**, el voltaje de nodo en el nodo *I*, menos el que está en el nodo *J*, (si *J* = 0, es decir, el nodo de referencia, puede omitirse el segundo argumento). A cada corriente en **CVLIST** se le da el formato **I(NXXXX)**. Esta es la corriente *I* a través del elemento **NXXXX**, con la fecha de referencia para *I* apuntando del primer nodo al segundo nodo que aparece en la declaración de elementos para **NXXXX**. Por ejemplo, **V(2,5)** es el voltaje en el nodo 2 menos el voltaje en el nodo 5, **V(3)** es el voltaje en el nodo 3 al nodo 0 (tierra), e **I(VREF)** es la corriente a través de la fuente de voltaje **VREF**, con la dirección de referencia de corriente señalando desde el extremo positivo de **VREF** (el primer nodo de la declaración de elemento **VREF**) hacia el extremo negativo.

Ejemplo 4.19

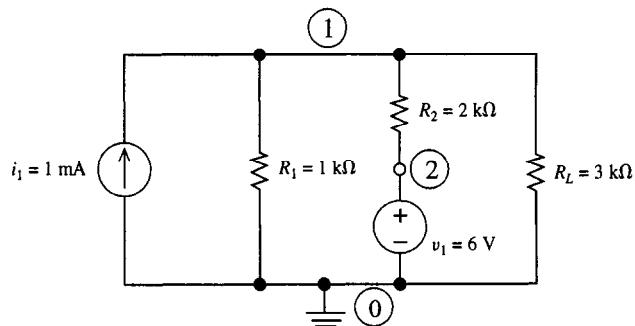
Como primer ejemplo de SPICE, considérese el circuito de la figura 4.25, donde las designaciones del nodo han sido puestas dentro de un círculo para mayor claridad. Nótese que el nodo de referencia está designado como nodo 0. El archivo de entrada SPICE que resultará en un análisis dc y la salida de los valores de voltaje del nodo 1 y la corriente *i* a través de la fuente 6 V aparece a continuación.

```

Archivo de entrada de SPICE para el primer ejemplo.
*Declaración de título.
*Declaración de elementos.
IS1    0    1    DC    1MA
VS1    2    0    DC    6
R1    1    0    1KIL0HM
R2    1    2    2K
RL    1    0    3K
*Declaraciones de control:
.PRINT    DC    V(1)    I(VS1)
+Tipo de análisis por ausencia para dc
.END

```

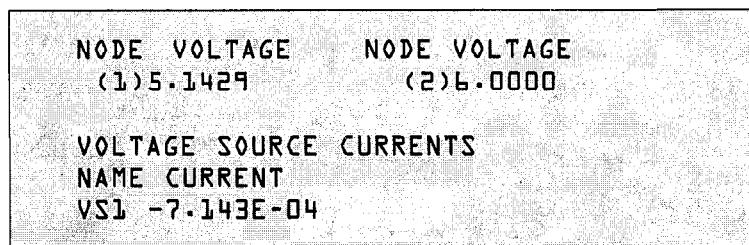
Nótese que los enunciados de elementos describen totalmente el circuito (dónde está cada elemento, y cuáles son las direcciones de referencia de la fuente).



Los enunciados de elementos comprenden una representación completa del diagrama de circuito.

Las unidades por omisión de los valores de elementos son voltios, amperios y ohms a menos que se especifique de otro modo. Por consiguiente, el valor de 6 en la declaración de elemento de la fuente de voltaje significa 6 voltios. La escala de las unidades pueden ser de potencias de 10 si se pone un sufijo apropiado al valor numérico: M significa 10^{-3} , K significa 10^{+3} , etc. (ver apéndice D para una lista completa). Se ignoran otros sufijos (tales como A en la declaración de elemento ISI, que se añade únicamente para mayor claridad). Toda línea que se inicia con un asterisco * es un comentario y es ignorada por el programa SPICE.

Supóngase que en el archivo de entrada de SPICE es escrito en la computadora y se guarda bajo el nombre EX4-19.CIR. El programa de análisis de circuito SPICE puede iniciarse ahora, utilizando una sintaxis de comando que varía con la variante de SPICE, y el sistema operativo que se utilice. Al llamar al programa SPICE, el usuario especifica EX4-19.CIR como el archivo de entrada que se analizará y enunciará un nombre para el archivo de salida que se creará (típicamente, EX-19.0UT). En cuanto la ejecución está completa, el examen de este archivo de salida en la pantalla o como copia en papel revelará (entre otros materiales, tales como un mensaje del archivo de entrada SPICE), las líneas,



NODE VOLTAGE	NODE VOLTAGE
(1) 5.1429	(2) 6.0000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS	
NAME	CURRENT
VS1	-7.143E-04

Por consiguiente, los valores para el voltaje del nodo 1 y la corriente i son 5.1429 V y -0.7143 mA, respectivamente.

Una limitación algo peculiar en algunas versiones de SPICE es que sólo pueden incluirse corrientes que pasan a través de fuentes independientes de voltaje en la declaración de salida como parte de CVLIST. Esta limitación está, por ejemplo, en las versiones 1 y 2 de SPICE y también en la versión 3 de SPICE cuando se utiliza "modo de lote". A las corrientes de salida que no fluyen a través de fuentes independientes de voltaje, debemos añadir una *fuente de voltaje vacía*, una fuente de voltaje de +0 V volts en serie con la corriente deseada. Esta fuente no tendrá ningún otro efecto en el circuito, puesto que ninguna corriente de voltaje puede cambiarse al incluirlo. La mayoría de las variantes de SPICE tales como PSPICE, permiten la forma más generalizada I(NXXXX) en CVLIST, y las fuentes de voltaje vacías no se necesitan para IMPRIMIR corrientes. La documentación para la variante específica y la versión de SPICE debe ser consultada para determinar si únicamente se permiten las corrientes que pasan por fuentes independientes de voltaje.

Junto con las resistencias y fuentes independientes discutidas anteriormente, los circuitos resitivos también pueden contener fuentes dependientes. Éstos vienen en los cuatro

“sabores” ilustrados en la figura 3.1. En SPICE, los cuatro tipos de fuentes dependientes tienen declaraciones de elementos con los siguientes formatos

FVCV:	XXXXXX	N1	N2	NC1	NC2	MU
FCCV:	GXXXXX	N1	N2	NC1	NC2	G
FCCC:	FXXXXX	N1	N2	VCONT		BETA
FVCC:	HXXXXX	N1	N2	VCONT		R

Las convenciones para estos elementos están ilustrados en la figura 4.26. En cada caso, N1 y N2 son los nodos fuente. Para las fuentes de voltaje (FVCV y FVCC), N1 está en el extremo positivo y en N2 en el extremo negativo, y la dirección de referencia de voltaje, del mismo modo en que se tenía la convención para declaraciones de fuentes de voltaje independiente. Para las fuentes de corriente (FCCV y FCCC), la flecha, que indica la dirección de referencia de la corriente, señala de N1 a N2, nuevamente consistente con el caso de las fuentes independientes. NC1 y NC2 son los nodos del voltaje de control, con NC1 en su extremo positivo. VCONT es el nombre de una fuente de voltaje independiente a través de la que fluye la corriente de control. Esta corriente está definida con una flecha de dirección de referencia que señala del nodo positivo de VCONT al negativo. Si deseamos utilizar una corriente de control que no fluya a través de una fuente de voltaje independiente, necesitamos insertar una fuente de voltaje vacía en serie con esta corriente.

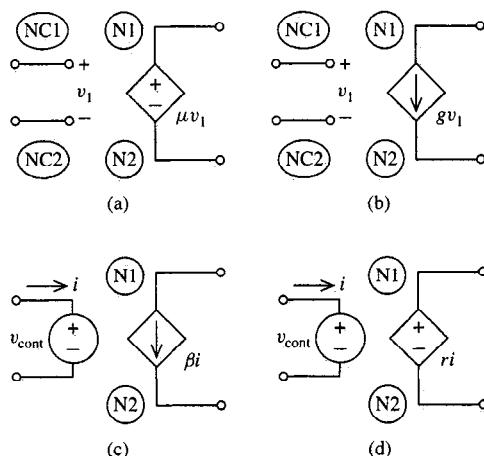


FIGURA 4.26 Convenciones de fuentes dependientes en SPICE.

El campo final en cada uno de estos elementos es la constante que multiplica la variable de control para dar la función de fuente de corriente. Éstos fueron definidos en el capítulo 3 como ganancia de voltaje μ para las FVCV, la transconductancia g para las FCCV, la ganancia de corriente β para las FCCC, y la transresistencia r para las FVCC.

Ejemplo 4.20

Este ejemplo contiene dos fuentes controladas, una FCCC y una FVCV. Puesto que la corriente de control no fluye a través de una fuente de voltaje, debemos insertar una fuente de voltaje vacía en serie para permitir que ésta corriente sea utilizada. Deseamos determinar el

voltaje v y también la potencia disipada por la resistencia de 2Ω (ver figura 4.27). SPICE siempre da salida a la potencia emitida por cada fuente independiente en un problema dc sin que se lo pida. Sin embargo, la potencia emitida por o disipada por otros elementos, debe ser calculada manualmente de la corriente y el voltaje. De manera que imprimiremos v y la corriente de la fuente de 4-V , que resulte estar en serie y por consiguiente transmitir la misma corriente de la corriente deseada a través de la resistencia 2Ω . A continuación se expone el archivo de entrada a SPICE.

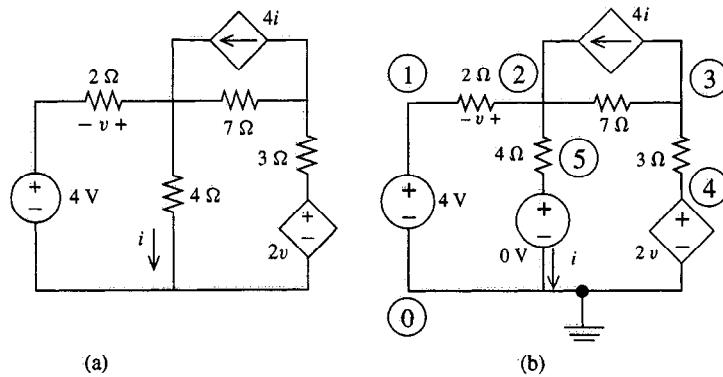


FIGURA 4.27 (a) Circuito (b) preparado para entrada como archivo de entrada de SPICE.

```

Archivo de entrada de SPICE para el segundo ejemplo.
*
V1 1 0 DC 4
R1 1 2 2
R2 2 5 4
*Aqui viene la fuente de voltaje vacia:
VD 5 0 0
R3 2 3 7
*Aqui entra el FCCC con ganancia de corriente 4:
F1 3 2 VD 4
R4 3 4 3
Y el FVCV con ganancia de voltaje 2:
E1 4 0 2 1 2
.PRINT DC V(2,1) I(V1)
.END

```

La salida resultante de SPICE nos muestra que la corriente de la fuente de 4-V es -1.4 A y el voltaje v es -28.0 V . Por consiguiente, la potencia disipada por la resistencia de 2Ω es $(-1.4)(-28.0) = 39.2\text{ W}$.

SPICE tiene muchos enunciados adicionales de elementos, modos de análisis y otras características que consideraremos conforme surja la necesidad de tratarlos en los títulos siguientes. Por lo pronto, nos conformaremos con el análisis DC de circuitos resistivos lineales, e introduciremos solamente dos capacidades adicionales de SPICE: el barrido dc y el subcircuito.

El barrido dc se realiza cuando deseamos pasar por varios valores de una fuente dc, en cada ocasión realizando un análisis dc e imprimiendo las salidas. Este modo de análisis es útil, por ejemplo, para determinar si una variable de salida excederá índices especificados sobre un rango anticipado de valores de entrada (fuente dc). Un modo de análisis de barrido dc es iniciado incluyendo una declaración de control **.DC** en el archivo de entrada de SPICE.

.DC	SNAME	START	STOP	DELTA
------------	--------------	--------------	-------------	--------------

SNAME es el nombre de la fuente independiente que deberá ser barrida (corriente o voltaje), **START** y **STOP** son los valores inicial y final de fuente deseados, y **DELTA** es el incremento en los sucesivos valores de fuente dentro del barrido. El siguiente ejemplo incluirá un barrido dc.

Una poderosa característica de SPICE es la capacidad de definir subcircuitos, que puede escribirse una sola vez en un archivo de entrada SPICE, y luego tomado como referencia con la frecuencia que se necesite sin necesidad de repetir sus declaraciones de elementos. Cada vez que se necesita del subcircuito, éste es “llamado”, de una manera similar a una llamada de subrutina en FORTRAN o al invocar una función en C. El subcircuito es definido incluyendo un conjunto de líneas que se inician con una declaración **.SUBCKT**, y que terminan con una declaración **.ENDS** (fin de subcircuito). El formato es

.SUBCKT	SUBNAME	NA	NB	NC...
*Las declaraciones de elementos de subcircuito van aca.				
...				
...				
.ENDS				

SUBNAME es un nombre que se da al circuito. Los campos restantes en la declaración **.SUBCKT** son los números de nodos del subcircuito en donde el subcircuito será conectado al circuito principal. El subcircuito es llamado de otra parte en el archivo de entrada SPICE por una declaración de la forma.

X	YYYYYY	N1	N2	N3...	SUBNAME
----------	---------------	-----------	-----------	--------------	----------------

Aquí, **X** indica una llamada del subcircuito, **YYYYYY** es un identificador arbitrario de esta invocación particular de subcircuito, **N1**, **N2**, **N3**, ... son números de nodo dentro del circuito principal al que se conecta la subrutina y **SUBNAME** es el nombre del subcircuito que se utilizará.

SPICE recibe la información de cuál nodo del subcircuito conectar a cuál nodo del circuito principal según el orden en que aparecen los nodos. *El primer nodo en la declaración **.SUBCKT** estará conectado al primer nodo en la declaración de llamada de la subrutina X, el segundo a la segunda, y así sucesivamente.* Los números de nodo dentro de

una definición de subcircuitos son independientes de los números del nodo en la parte principal del archivo de entrada de SPICE (con la única excepción del nodo de referencia o tierra común, nodo cero, que siempre se refiere al mismo nodo donde quiera que éste aparezca). Esta numeración independiente de nodos corresponde al uso independiente de variables "formales" en una subrutina FORTRAN o función C y variables "reales" en el programa principal. La numeración independiente de nodos es lo que nos permite insertar la misma subrutina en varios lugares distintos en el circuito principal sin provocar confusión.

Ejemplo 4.21

Como ejemplo final, consideremos el circuito que contiene dos op amps que aparece en la figura 4.28. Reemplazaremos cada op amp por el modelo de circuito mejorado de la figura 3.9 (repetido en la figura 4.29), definiendo este modelo de op amp como un **.SUBCKT** para evitar entrar dos veces a la declaración de elementos. El tipo de análisis que realizaremos es un barrido dc de la fuente dc independiente entre los límites de -5 y +5 voltios, imprimiendo los voltajes de salida del op amp. Nótese que el mismo número de nodos es utilizado independientemente en el circuito principal y en el subcircuito. El archivo de entrada SPICE utilizado es:

```

Ex4-25: circuito con dos op amps.

*
*Circuito principal
VGl    1      0      DC      1
R1     1      2      10K
R2     2      3      20K
X1     0      2      3      OPAMP
*El orden en los nodos en el enunciado anterior coincide.
*Orden en el enunciado .subckt: + in, - in, out.
R3     4      0      16K
R4     4      5      48K
X2     3      4      5      OPAMP
*Aqui vienen los circuitos con op amps.
.SUBCKT OPAMP  1      2      3
*Nodo 1 esta en el +in, 2 esta en el -in, y 3 en el nodo de salida.
RIN    1      2      1MEG
E1     4      0      1      2      100K
R0     4      3      30
.ENDS
*Finalmente las declaraciones de modo de análisis y salida.
.DC      VGl    -5      +5      1
.PRINT  DC      V(3)      V(5)
.END

```

Luego de hacer correr el SPICE con este archivo de entrada, la salida contiene las siguientes líneas:

$VG1$	$V(3)$	$V(5)$
-5.00E+00	1.00E+01	4.00E+01
-4.00E+00	8.00E+00	3.20E+01
-3.00E+00	6.00E+00	2.40E+01
-2.00E+00	4.00E+00	1.60E+01
-1.00E+00	2.00E+00	7.99E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
1.00E+00	-2.00E+00	-7.99E+00
2.00E+00	-4.00E+00	-1.60E+01
3.00E+00	-6.00E+00	-2.40E+01
4.00E+00	-8.00E+00	-3.20E+01
5.00E+00	-1.00E+01	-4.00E+01

Éstas son las salidas del op amp para un voltaje de entrada $VG1$, barrido desde -5 a $+5$ V por incrementos de $+1$ V. Nótese que en cada renglón $V(3) = -2 VG1$, confirmando la observación de que la primera etapa del op amp es un amplificador inversor con ganancia de $-R_2/R_1 = -2$. Además, $V(5) = 4 V(3)$, puesto que $V(3)$ es una entrada en un amplificador no inversor con ganancia de $(1 + R_4/R_3) = +4$. También nótese que los valores de $V(3)$ y

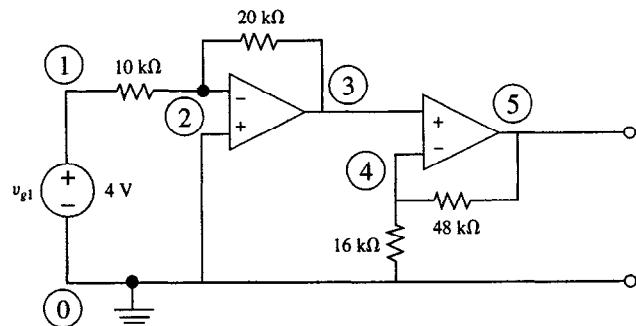


FIGURA 4.28 Circuito para el ejemplo 4.21.

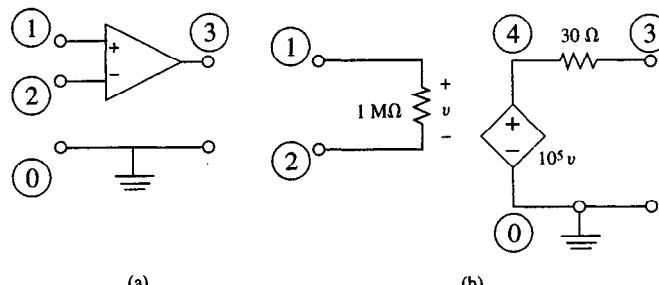


FIGURA 4.29 Subcircuito para el ejemplo 4.21.

$V(5)$ ambos tienen escala con $VG1$, una consecuencia del principio en proporcionalidad. Por ejemplo, los valores de estas variables para $VG1 = 2$ V son el doble de aquellos para $VG1 = 1$ V.

A pesar de todo su poder, SPICE es apenas un algoritmo numérico y tendrá errores de redondeo. Por ejemplo, $V(5)$ es exactamente cuatro veces $V(3)$, como era de esperarse, para casi todos los valores de $V(3)$. Pero el valor $V(3) = 2.0000$ V se obtiene $V(5) = 7.9999$ V, y no 8.000 V. SPICE no es un algoritmo dotado de inteligencia artificial. Hace estrictamente cálculos numéricos y no simbólicos. Con ayuda de una calculadora, podríamos sorprendernos de que la división de un número grande seguido de la multiplicación por el mismo número a veces no vuelve al valor original de la pantalla, por lo que no podemos esperar de SPICE que dé valores exactos, sino apenas aproximaciones numéricas.

EJERCICIOS

- 4.8.1. Escribase un archivo de entrada de SPICE para el circuito que aparece en el ejercicio 4.1.1.

Respuesta

```
Exercise 4.8.1 SPICE input file
R1  0    1    10
R2  1    2    2
V1  2    0    DC   24
R3  2    3    3
I2  0    3    DC   4
.PRINT DC I(V1) V(3,0)
.END
```

- 4.8.2. Escrifbase un archivo de entrada a SPICE para la figura 4.6.

Respuesta

```
Exercise 4.8.2 SPICE input file
R1  1    0    1
V1  2    1    DC   12
R2  2    3    3
H1  3    0    V1   -2
I2  0    2    DC   6
.PRINT DC I(V1) V(2,3)
.END
```

El *negativo* del valor $I(V1)$ corresponderá a la variable de salida deseada i en la figura. Podría evitarse este cambio de signo, así como el signo negativo en la transresistencia de la fuente controlada (ver la declaración H), al poner una fuente de voltaje vacía en serie con la fuente 12-V, pero con dirección de referencia puesta a la fuente 12-V.

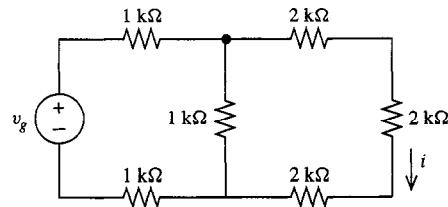
En este capítulo se presentan herramientas de gran generalidad para el análisis de circuitos lineales: el principio de superposición, los métodos de análisis nodal y de malla, y un programa de computadora capaz de simular amplios rangos de circuitos, llamado SPICE.

- Los circuitos lineales satisfacen el principio de la proporcionalidad: multiplicando las fuentes independientes por el mismo factor, multiplica de modo similar todas las respuestas.
- También satisfacen el principio de la superposición: la respuesta total es la superposición o suma de respuestas a cada fuente independiente cuando se eliminan las demás.
- En el análisis nodal, las variables principales son los voltajes de nodo, y LCK es escrita en todos los nodos excepto el nodo de referencia.
- En el análisis nodal, cada fuente de voltaje define un supernodo que contiene sólo una incógnita de voltaje de nodo, y LCK es aplicada al supernodo.
- En el análisis de malla, las variables principales son las corrientes de malla, y LVK es escrita alrededor de todas las mallas.
- En el análisis de mallas cada fuente de corriente define una supermalla que contiene una sola corriente de trayectoria cerrada desconocida, y LVK es aplicada alrededor de la supermalla.
- Una vez que se descompone un circuito, es fácil expresar cualquier corriente o voltaje deseados en términos de las variables principales conocidas (voltajes de nodo o corrientes de malla).
- Los principios de corto circuito virtual y circuito abierto virtual para analizar los circuitos con op amps en configuraciones de retroalimentación negativa postulan que el voltaje que pasa a través, y la corriente que pasa dentro, las terminales de entrada del op amp, son ambas iguales a cero.
- Se recomienda el análisis nodal para circuitos con op amp utilizando los principios de circuito abierto virtual o de corto virtual. No se escriban las ecuaciones nódales LCK en los nodos de salida del op amp.
- SPICE requiere de un archivo de entrada que detalla el circuito, establece el modo deseado de operación, e indica las variables y formatos de salida deseados.

Los ejemplos en este capítulo aplican el principio de superposición, y los métodos de análisis de mallas y nodos, estrictamente a circuitos resistivos en el dominio del tiempo. Esto no es una limitación de tales métodos, sino que refleja la limitada experiencia que hemos ganado hasta ahora. La superposición, así como el análisis de mallas y nodos seguirán aplicándose, y serán nuestras herramientas básicas, durante todo este libro: en el análisis de los circuitos lineales que contienen elementos de almacenamiento (capítulos 5-7), los que se estudian en el dominio del fasor (capítulos 8-11), el dominio s (capítulos 12-15), y el dominio de fourier (capítulo 16).

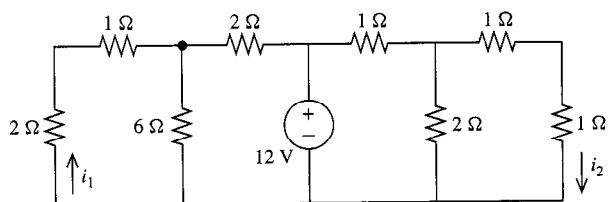
PROBLEMAS

4.1. Si $i = 1 \text{ A}$, ¿cuánto debe ser v_g ? Utilícese esto para determinar i si $v_g = 1 \text{ kV}$.



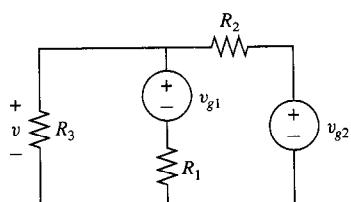
PROBLEMA P4.1

4.2. Utilícese la proporcionalidad para obtener i_1 e i_2 .



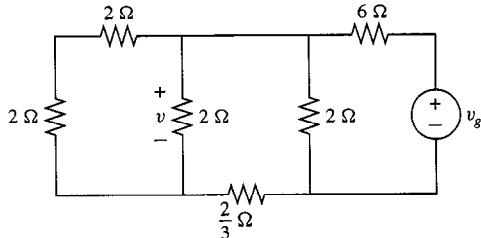
PROBLEMA P4.2

4.3. Exprésese v como una combinación lineal de las dos funciones de fuente v_{g1} , v_{g2} ,



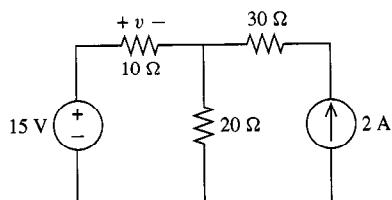
PROBLEMA P4.3

4.4. Utilícese la proporcionalidad para obtener la función de fuente v_g que hace $v = 6$ V.



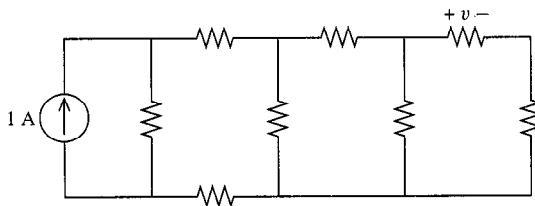
PROBLEMA P4.4

4.5. ¿Por qué factor debemos multiplicar en *ambas* funciones de fuente para obtener $v = +1$ V a través de la resistencia de $10\text{-}\Omega$?



PROBLEMA P4.5

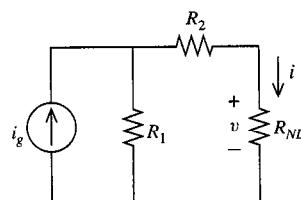
4.6. Obténgase v utilizando el principio de proporcionalidad. Todas las resistencias son de $10\text{ }\Omega$.



PROBLEMA P4.6

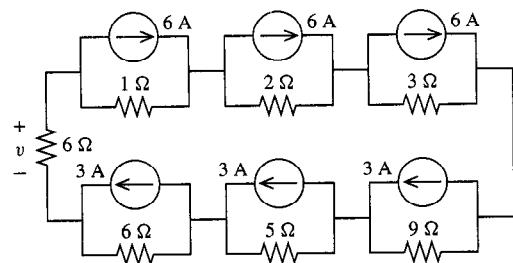
4.7. ¿Qué predice el principio de proporcionalidad que sucederá a un circuito lineal si todas las fuentes independientes son multiplicadas por 0?

4.8. R_1 y R_2 son resistencias lineales, pero R_{NL} satisface $i = e^{-v}$. Demuéstrese que este circuito viola el principio de proporcionalidad.



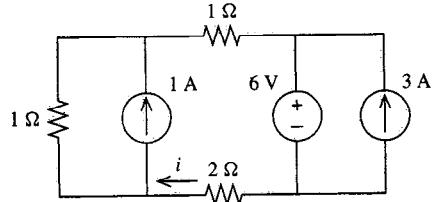
PROBLEMA P4.8

4.9. Obténgase v por superposición. Compruébese utilizando las proporciones Thevenin-Norton.

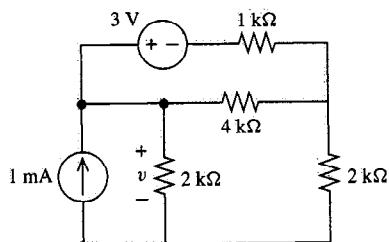


PROBLEMA P4.9

4.10. Resuélvase para i por superposición.

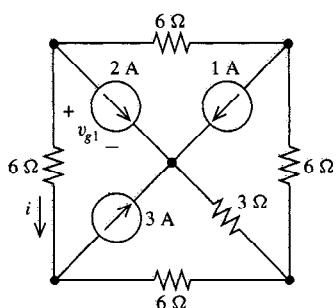


PROBLEMA P4.10



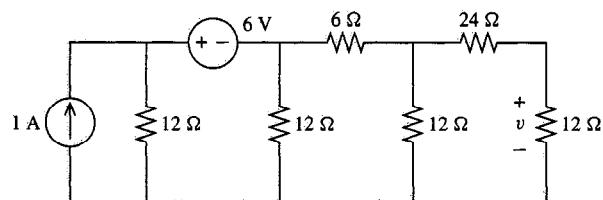
PROBLEMA P4.13

4.11. Utilícese la superposición para obtener v_{g1} e i .



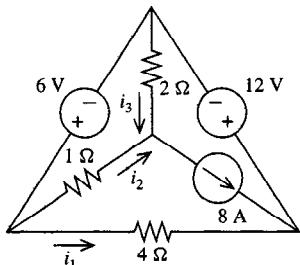
PROBLEMA P4.11

4.14. Utilícese la superposición para obtener v . Para cada problema de componentes, utilícese el principio de proporcionalidad; es decir, asúmase que la componente $v = 1$ V.



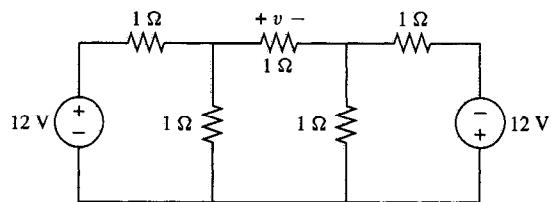
PROBLEMA P4.14

4.12. Utilícese la superposición para obtener las tres corrientes resistivas que se muestran.



PROBLEMA P4.12

4.15. Repítase el problema 4.14 para el siguiente circuito.



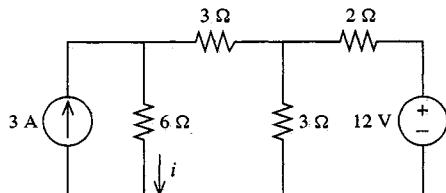
PROBLEMA P4.15

4.13. Utilícese la superposición para obtener v . Compruébese utilizando las transformaciones Thevenin-Norton.

4.16. Resuélvase el problema 4.13 si la fuente de voltaje dependiente es reemplazada por una fuente de voltaje independiente (una misma dirección de referencia) con la función de fuente $-3v$.

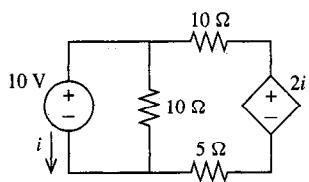
4.17. (a) Obténgase i utilizando superposición.

(b) Obténgase i si la fuente de corriente es multiplicada por k_1 y la fuente de voltaje es multiplicada por k_2 . Exprésese en términos de k_1 y k_2 .



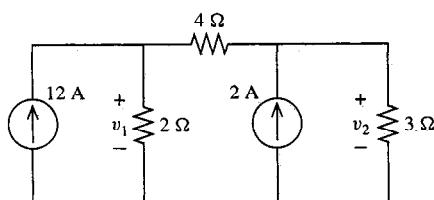
PROBLEMA P4.17

4.18. Obténgase la potencia desarrollada por la fuente dependiente.



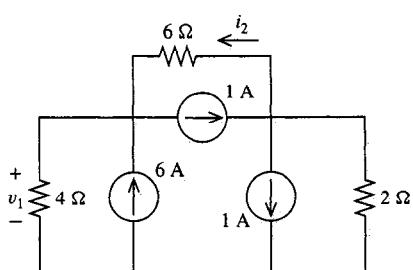
PROBLEMA P4.18

4.19. Utilícese el análisis nodal para obtener las variables indicadas. Compruébese mediante superposición.



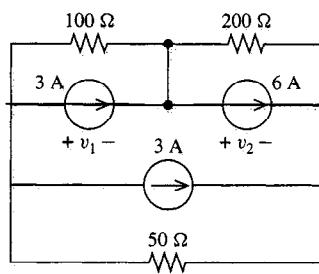
PROBLEMA P4.19

4.20. Repítase el problema 4.19 para el siguiente circuito.



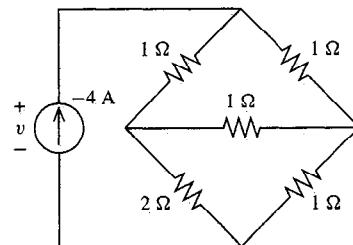
PROBLEMA P4.20

4.21. Repítase el problema 4.19 para el siguiente circuito.



PROBLEMA P4.21

4.22. Utilícese el análisis nodal para obtener v del siguiente circuito.



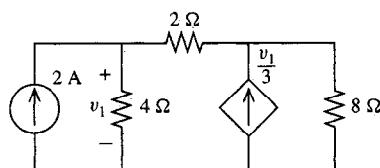
PROBLEMA P4.22

4.23. ¿Con qué reemplazaremos la función de fuente -4-A en el problema 4.22 para que $v = 1 \text{ kV}$?

4.24. ¿Con qué debemos substituir la función de fuente 6-A en el problema 4.20 para que $v_1 = 0$?

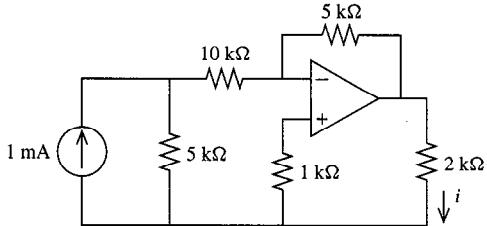
4.25. Repítase el problema 4.20 si la fuente independiente de 6-A es reemplazada por FCCC (con la misma dirección de referencia) con la función de fuente $3i_2$.

4.26. Utilícese el análisis nodal para descomponer el circuito. Luego asígnense direcciones de referencia para todas las corrientes y voltajes de elemento y determínense sus valores.



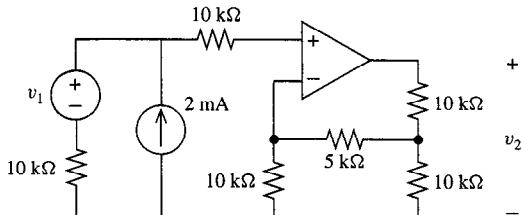
PROBLEMA P4.26

- 4.27.** Obténgase i mediante análisis nodal. Utilícese el modelo ideal FVCV para el modelo op amp, con una ganancia de op amp de $A = 10^5$.



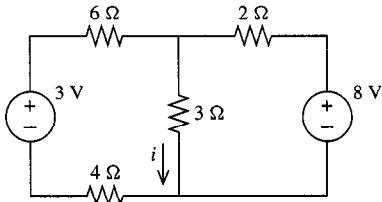
PROBLEMA P4.27

- 4.28.** Obténgase v_2 como función de v_1 . Utilícese análisis nodal, reemplazando el op amp por su modelo ideal FVCV con $A = 10^6$.



PROBLEMA P4.28

- 4.29.** Repítase el problema 4.19 para el siguiente circuito.



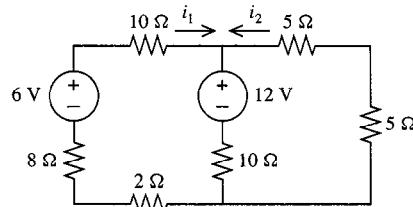
PROBLEMA P4.29

- 4.30.** Reemplácese la fuente independiente de 8-V en el problema 4.29 con una FVCC de $8i$ (con la misma dirección de referencia). Obténgase i .

- 4.31.** Demuestre que, por la misma definición de los voltajes de nodo, se satisface automáticamente LVK alrededor de cualquier trayectoria cerrada.

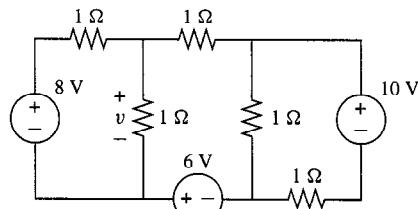
- 4.32.** Demuéstrese que, por la misma definición de las corrientes de malla, se satisface automáticamente LCK en cada nodo.

- 4.33.** Utilícese el análisis de mallas para obtener las variables indicadas. Compruébese utilizando superposición.



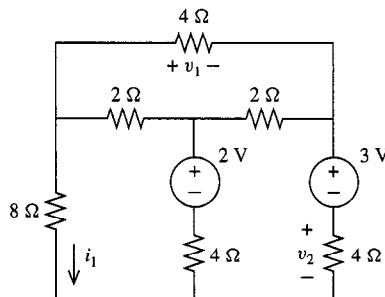
PROBLEMA P4.33

- 4.34.** Repítase el problema 4.33 para el siguiente circuito.



PROBLEMA P4.34

- 4.35.** Utilícese el análisis de malla para obtener las variables indicadas. Resuélvase las ecuaciones de malla por la regla de Cramer.



PROBLEMA P4.35

- 4.36.** Repítase el problema de 4.35 utilizando inversión de matrices.

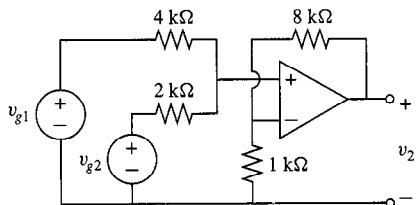
- 4.37.** Repítase el problema 4.35 utilizando la eliminación de Gauss.

- 4.38.** Repítase el problema 4.35 si la fuente independiente de 2 V es reemplazada por una FVCV (misma dirección de referencia) con la función de fuente $-2v_1$.

- 4.39.** Resuélvase el problema 4.22 por análisis de malla.

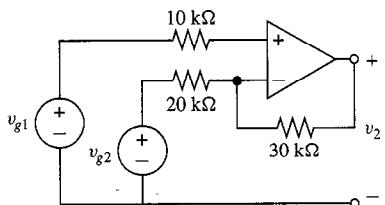
4.40. Resuélvase el problema 4.14 utilizando análisis nodal, y resuélvase nuevamente mediante análisis de malla.

4.41. Utilizando los principios del corto circuito virtual y circuito abierto virtual, obténgase v_2 en términos de v_{g1} y v_{g2} .



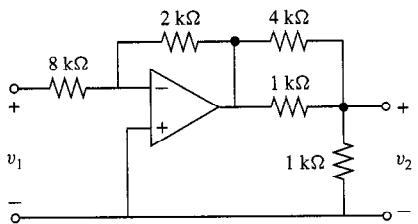
PROBLEMA P4.41

4.42. Repítase el problema 4.41 del siguiente circuito.



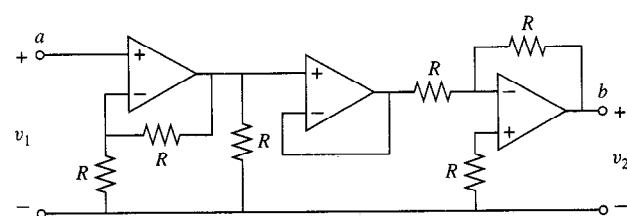
PROBLEMA P4.42

4.43. Utilícese los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales para obtener la proporción de transferencia de voltaje v_2/v_1 .



PROBLEMA P4.43

4.44. Repítase el problema 4.43 para este circuito. $R = 10 \text{ k}\Omega$.



PROBLEMA P4.44

4.45. Repítase el problema 4.44, pero añádase una resistencia de $10\text{-k}\Omega$ entre a y b .

Problemas usando SPICE

4.46. Utilícese SPICE para resolver el problema 4.2.

4.47. Utilícese SPICE para resolver el problema 4.10.

4.48. Utilícese SPICE para resolver el problema 4.14.

4.49. Utilícese SPICE para resolver el problema 4.33. Hágase un barrido de 0 a 12 V en la fuente de 6-V con incremento de 1 V.

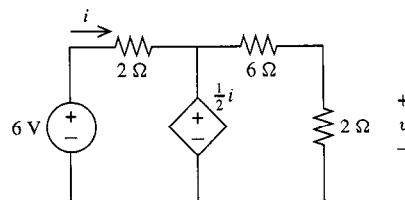
4.50. Utilícese SPICE para resolver el problema 4.43. Sustitúyase el op amp por el modelo op amp mejorado de la figura 3.9, con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 30 \Omega$, y $A = 10^5$.

4.51. Utilícese SPICE para resolver el problema 4.45. Reemplácese los op amps según las instrucciones del problema 4.50.

4.52. Este problema está destinado para comprobar qué tan cercanas a 0 están la corriente y voltaje de entrada a un op amp (como lo sugieren los principios de circuito abierto y corto circuito virtuales). En el circuito del problema 4.44 reemplácese cada op amp por su modelo mejorado (Figura 3.9) con $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, $R_o = 30 \Omega$ y $A = 10^5$. Sea $v_1 = 1 \text{ V}$. Utilícese SPICE para determinar las corrientes que entran a cada op amp, y los voltajes a través de estas entradas.

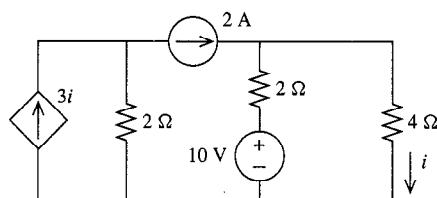
Problemas más complejos

4.53. Obténgase v utilizando el principio de proporcionalidad.



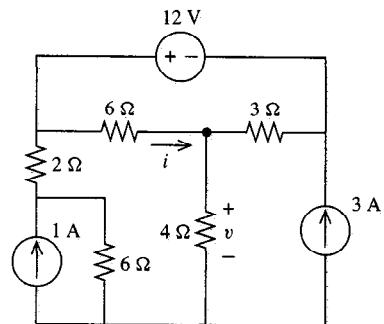
PROBLEMA P4.53

4.54. Obténgase i mediante superposición.



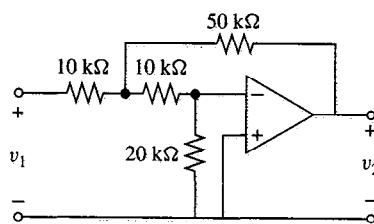
PROBLEMA P4.54

4.55. Resuélvase por análisis nodal. Luego resuélvase nuevamente utilizando análisis de malla. Obténganse todas las variables indicadas.



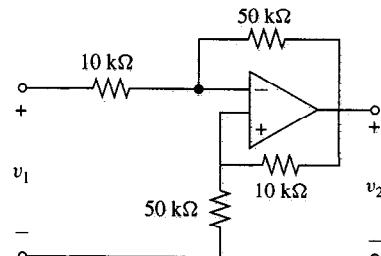
PROBLEMA P4.55

4.56. Utilíicense los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales para obtener la proporción de transferencia de voltaje v_2/v_1 .

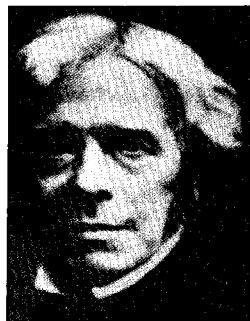


PROBLEMA P4.56

4.57. Utilíicense los principios de corto circuito y circuito abierto virtuales para encontrar la proporción de transferencia de voltaje v_2/v_1 .



PROBLEMA P4.57



Michael Faraday
1791-1867

Mi mayor descubrimiento
fue Michael Faraday.

Sir Humphry Davy

5

Elementos de almacenamiento de energía

El 29 de agosto de 1831, Michael Faraday, el gran químico y físico inglés, descubrió la inducción electromagnética cuando observó que moviendo un imán por una bobina de alambre de cobre lo que originaba una corriente eléctrica que fluía por el alambre. Puesto que los motores y generadores eléctricos se basan en este principio, el descubrimiento de Faraday transformó profundamente el curso de la historia mundial. Cuando años después el Primer Ministro británico le preguntó qué aplicación podrían tener sus descubrimientos, Faraday repuso: "Algún día será posible aplicarles impuestos".

Faraday, uno entre 10 hijos de un herrero, nació cerca de Londres. Primero se inició como aprendiz de encuadrador, pero a la edad de 22 años realizó su sueño de la infancia, al convertirse en asistente de su ídolo, el gran químico Sir Humphry Davy, en la Real Institución. Permaneció en la Institución durante 54 años, tomando el puesto de Davy cuando éste se retiró. Faraday fue quizás el mejor científico experimental que haya vivido, obteniendo logros en casi todas las áreas de la ciencia física que se investigaron en su época. Para describir los fenómenos que investigó, él y un amigo científico-filósofo inventaron nuevas palabras como electrólisis, electrolito, ion, ánodo y cátodo. Para honrarlo, la unidad de capacitancia se denomina *farad*.

Contenido del capítulo

- 5.1 Capacitores
- 5.2 Almacenamiento de energía en capacitores
- 5.3 Capacitores en serie y en paralelo
- 5.4 Inductores
- 5.5 Almacenamiento de energía en inductores
- 5.6 Inductores en serie y en paralelo
- 5.7 Estado estable en DC
- 5.8 Capacitores e inductores prácticos
- 5.9 Circuitos singulares
- Resumen
- Problemas



Hasta ahora hemos considerado únicamente circuitos resistivos, es decir, circuitos que contienen resistores y fuentes (op amps, que pueden reemplazarse por modelos que consisten en resistencias y fuentes). Las características terminales de estos elementos son ecuaciones algebraicas simples cuyo resultado son ecuaciones de circuito que son a su vez algebraicas. En este capítulo introduciremos dos importantes elementos de circuitos dinámicos, el capacitor y el inductor, cuyas ecuaciones de terminales son ecuaciones integrodiferenciales (que involucran derivadas y/o integrales) en vez de ecuaciones algebraicas. Estos elementos se conocen como *dinámicos* porque almacenan energía que posteriormente puede ser recuperada. Por esta razón, otro término que se emplea es *elementos de almacenamiento*. Describiremos en primer lugar la propiedad de capacitancia y discutiremos el modelo matemático de un capacitor ideal. Luego se presentarán las características de terminales y relaciones de energía, seguidas por equivalentes para conexiones en paralelo y en serie de dos o más capacitores. Luego repetiremos este mismo procedimiento para el inductor. El capítulo concluirá con una explicación sobre inductores y capacitores prácticos y sus circuitos equivalentes.

5.1 CAPACITORES

Un capacitor es un dispositivo de dos terminales que consiste de dos cuerpos conductores separados por un material no conductor. Este material no conductor se conoce como *aislante* o *dieléctrico*. Debido al dieléctrico, las cargas no pueden moverse de un cuerpo conductor al otro dentro del dispositivo. Por consiguiente, deben ser transportadas entre los cuerpos conductores, mediante un circuito externo conectado a las terminales del capacitor. Uno de estos dispositivos, de tipo muy simple y conocido como capacitor de placas paralelas, aparece en la figura 5.1. Los cuerpos conductores son conductores planos y rectangulares, separados entre sí por el material dieléctrico.

Comenzando con un capacitor que inicialmente no tiene carga, supóngase que mediante un circuito externo transferimos q coulombs de carga de una placa a la otra. Para determinar la diferencia de potencial resultante, imaginamos una carga de prueba de $+1\text{-C}$ que se mueve posteriormente entre los puntos b y a en la figura 5.1. Puesto que la carga de prueba es positiva, y hay una carga de $+q$ en la placa hacia la que nos movemos, debe

realizarse trabajo para moverla. Debe realizarse un trabajo igual sobre ésta, debido a la fuerza atractiva de la carga $-q$ en la placa de la que salimos. Por consiguiente, a partir de la definición de diferencia de potencial entre dos puntos en el espacio presentada en el capítulo 2, conforme se realiza trabajo neto para transportar una carga de prueba de $+1\text{-C}$ entre los dos puntos, la placa con la carga $+q$ está a un potencial más alto que el otro, es decir,

$$v_{ab} = f(q) \quad (5.1a)$$

donde aparentemente la función f es creciente, puesto que mientras mayor sea la carga separada q , mayor será el trabajo realizado en la carga de prueba.

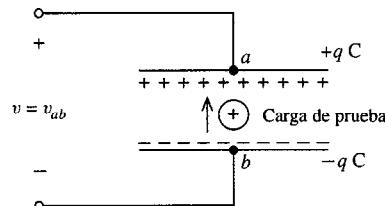


FIGURA 5.1 Capacitor de placas paralelas.

Para muchos capacitores físicos, la relación general de carga-voltaje (5.1a) es lineal. Un *capacitor lineal* se define como un dispositivo de dos terminales, cuya relación carga-voltaje es una línea recta que pasa por el origen, $v_{ab} = f(q) = Kq$, o

$$q = Cv \quad (5.1b)$$

Aquí, $v = v_{ab}$ es el voltaje entre las placas, y $C = 1/K$ es la pendiente de la gráfica de q como función de v . C se conoce como la *capacitancia* del dispositivo, y se mide en dimensiones de coulombs por volt. La unidad de capacitancia se conoce como *farad* (F), en honor al famoso físico británico Michael Faraday (1791-1867). Un capacitor de un farad separará una carga de un coulomb por cada voltio de diferencia de potencial entre sus placas.

Es interesante hacer notar que en el ejemplo anterior, la carga neta dentro del capacitor es siempre cero. Las cargas que se retiran de una placa simple aparecen en la otra, de forma que la carga total sigue siendo cero. También debemos observar que las cargas que salen de una terminal entran a la otra. Este hecho es congruente con la condición de que la corriente que entra a una terminal, debe salir de la otra en un dispositivo de dos terminales, como consecuencia de LCK. Puesto que la corriente se define como la razón de cambio de la carga, al diferenciar (5.1b), obtenemos

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (5.2)$$

que es la relación corriente-voltaje o ley de terminal para un capacitor.

El símbolo de circuito para el capacitor y la convención corriente-voltaje que satisface (5.2) aparece en la figura 5.2. Es aparente que mover una carga de $+q$ en la figura 5.1 de la placa inferior a la superior, representa una corriente que fluye hacia la terminal superior y por consiguiente hacia la placa superior. El movimiento de esta carga hace que

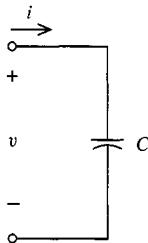


FIGURA 5.2 Símbolo de circuito para un capacitor.

la terminal superior se haga más positiva que la inferior por una cantidad v . Por consiguiente, se satisface en la convención corriente-voltaje de la figura 5.2. De este modo, para que se satisfaga la ley de terminales (5.2), las direcciones de referencia de la corriente y el voltaje deben relacionarse como se muestra en la figura 5.2, donde la flecha apunta hacia el extremo positivo de la dirección de referencia de voltaje. Ésta es la convención de signo pasivo que se nos requirió utilizar anteriormente con las resistencias. Si se viola la convención de signo pasivo al invertir la dirección de referencia del voltaje o la corriente, entonces la corriente que entra a la terminal positiva es $-i$ y (5.2) se convierte en

$$i = -C \frac{dv}{dt}$$

Recordaremos que, para este caso, también se requirió un signo menos en la ley de Ohms.

Ejemplo 5.1

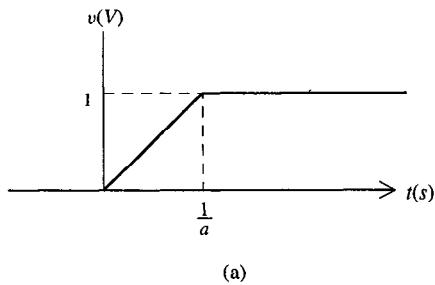
Como ejemplo, supongamos que el voltaje de un capacitor $1-\mu\text{F}$ es $v = 6 \cos 2t$ V. Entonces, con variables de terminal que satisfacen la convención de signo pasivo, como en la figura 5.2,

$$\begin{aligned} i &= Cdv/dt = (10^{-6})(-12 \sin 2t) \\ &= -12 \sin 2t \mu\text{A} \end{aligned}$$

En (5.2) vemos que si v es constante, entonces la corriente i es cero. Por consiguiente, *un capacitor actúa como un circuito abierto a un voltaje dc*. Por otra parte, mientras más rápidamente cambie v , mayor será la corriente que fluirá a través de sus terminales.

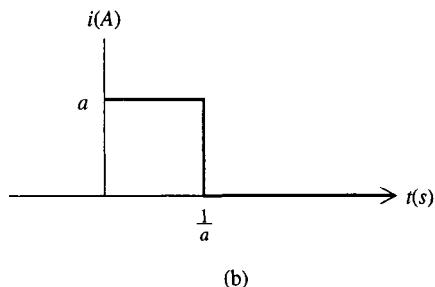
Ejemplo 5.2

Consideremos un voltaje que aumenta linealmente de cero a 1 V en a^{-1} s, dado por



$$\begin{aligned} v &= 0, & t < 0 \\ &at, & 0 \leq t \leq a^{-1} \\ &1, & t > a^{-1} \end{aligned}$$

Si este voltaje se aplica a las terminales de un capacitor 1-F (un valor desusadamente grande, elegido para conveniencia numérica), la corriente resultante (en amperes) es



$$\begin{aligned} i &= 0, & t < 0 \\ &a, & 0 \leq t \leq a^{-1} \\ &0, & t > a^{-1} \end{aligned}$$

En la figura 5.3 se muestran gráficas de v e i . Podemos ver que i es cero, cuando v es constante, y que es igual a una constante cuando v aumenta linealmente. Si la pendiente a se hace más grande, por consiguiente i debe incrementarse. Es aparente que si $a^{-1} = 0$ (a es infinita), v cambia abruptamente (en un tiempo cero) de 0 a 1 V.

FIGURA 5.3 Ondas de voltaje y corriente en un capacitor 1-F.

En general, todo cambio instantáneo o abrupto de voltaje, como en el del ejemplo anterior, requiere que fluya por el capacitor una corriente infinita. Sin embargo, una corriente infinita es un imposibilidad física. Por consiguiente, los cambios instantáneos o abruptos en el voltaje que pasa por un capacitor no son posibles, y *el voltaje que pasa a través de un capacitor es siempre continuo aun cuando la corriente pueda ser discontinua*. Esto se conoce como *principio de continuidad*. (En la sección 5.9 se examinarán los circuitos que parecen violar este principio, pero que contienen en sí contradicciones matemáticas.)

Si el voltaje es continuo respecto al tiempo, entonces, por (5.1b), la carga también debe serlo. De este modo, una postulación alternativa del principio de continuidad, que es particularmente útil en circuitos con varios capacitores, es que la *carga total no puede cambiar instantáneamente* (conservación de la carga).

Obtengamos ahora $v(t)$ en términos de $i(t)$ integrando ambos lados de (5.2) entre los instantes t_0 y t . El resultado es

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (5.3a)$$

donde $v(t_0) = q(t_0)/C$ es el voltaje sobre C en el instante t_0 . En esta ecuación, el término dentro de la integral representa el voltaje que se acumula sobre el capacitor en intervalos de t_0 a t , donde $v(t_0)$ es el que se acumula de $-\infty$ a t_0 . El voltaje $v(-\infty)$ se considera como cero. De este modo, una forma alternativa de (5.3a) es

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (5.3b)$$

Ejemplo 5.3

Al aplicar (5.3b), obtenemos el área asociada con una gráfica de i desde $-\infty$ a t . En la figura 5.3, por ejemplo, puesto que $v(-\infty) = 0$ y $C = 1 \text{ F}$, obtenemos

$$v(t) = \frac{1}{1} \int_{-\infty}^t (0) d\tau + v(-\infty) = 0, \quad t \leq 0$$

Por consiguiente, $v(0) = 0$, y

$$v(t) = \int_0^t a d\tau + v(0) = at, \quad 0 \leq t \leq a^{-1}$$

Esta última ecuación demuestra que $v(1/a) = 1$, de manera que

$$v(t) = \frac{1}{1} \int_{1/a}^t (0) d\tau + v \frac{1}{a} = 1, \quad t \geq a^{-1}$$

lo que concuerda con que $v(t)$ en la figura 5.3. En este ejemplo vemos que $v(t)$ e $i(t)$ no necesariamente tienen la misma forma. Específicamente, sus máximos no necesariamente ocurren al mismo tiempo, ni tampoco sus mínimos, a diferencia del caso del resistor. De hecho, una inspección de la figura 5.3 revela que la corriente puede ser discontinua aun cuando el voltaje debe ser continuo, como se postuló anteriormente.

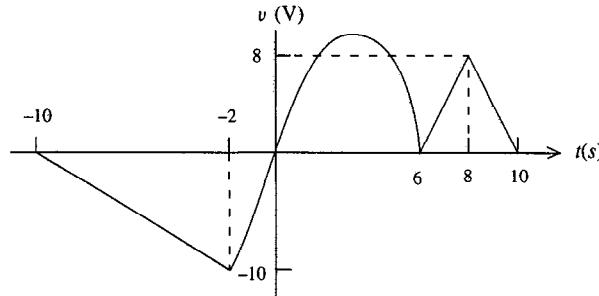
EJERCICIOS

5.1.1. Un capacitor 100-nF , tiene una voltaje $v = 10 \sin 1000t$ V. Obtén-gase su corriente.

Respuesta $\cos 1000t$ mA.

5.1.2. Un capacitor $400\text{-}\mu\text{F}$ tiene un voltaje como el que se muestra a continuación. Es lineal por tramos, excepto para $0 \leq t \leq 6$, $v(t) = (t)(6 - t)$. Obtén-gase su corriente i en $t = -4, -1, 1, 5, y 9$ s.

Respuesta $-0.5, 2, 1.6, -1.6, -1.6$ mA



EJERCICIO 5.1.2

5.1.3. Una corriente constante de 10 mA energiza un capacitor $10\text{-}\mu\text{F}$ (entra por su terminal de voltaje positivo). Si el capacitor fue inicialmente ener-gizado a 5 V, obtén-gase la carga y voltaje en el capacitor después de 20 ms.

Respuesta 0.25 mC; 25 V

5.1.4. Sea la gráfica del ejercicio 5.1.2. la gráfica de la corriente en milí-amperes, respecto al tiempo en milisegundos en un capacitor $0.25\text{-}\mu\text{F}$. Obtén-gase el voltaje en $t = -4, -1, 6, y 9$ ms.

Respuesta $-90, -190, -56, 0$ V.

5.2

ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN CAPACITORES

El voltaje de terminal que cruza un capacitor está acompañado por la separación de cargas entre las placas de capacitor. Estas cargas tienen fuerzas eléctricas que actúan sobre ellas. Un *campo eléctrico*, una magnitud básica en la teoría electromagnética, se define como la fuerza dependiente de la posición que actúa sobre una carga positiva unitaria. De este modo, las fuerzas que actúan sobre las cargas del capacitor pueden considerarse como re-sultado de un campo eléctrico. Por esta razón, se dice que la energía almacenada o acumu-lada en un capacitor está almacenada en el campo eléctrico situado entre sus placas. Cuantitativamente, la energía almacenada en un capacitor, a partir de (1.6) y (5.2), está dada por

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t vi \, d\tau = \int_{-\infty}^t v \left(C \frac{dv}{d\tau} \right) d\tau$$

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t Cv \, dv = \frac{1}{2} Cv^2(t) \quad (5.4)$$

Esta última igualdad proviene del hecho de que $v(-\infty) = 0$.

A partir de este resultado, podemos ver que $w_c(t) \geq 0$. Por consiguiente, por (1.7), *el capacitor es un elemento de circuito pasivo*. El otro elemento pasivo que hemos encontrado hasta ahora es el resistor. Como hemos visto, los resistores disipan energía. A diferencia del resistor, el capacitor ideal no puede disipar energía alguna. La energía neta $w_c(t)$ que se le alimenta mediante el circuito externo, está almacenada en el campo eléctrico dentro del dispositivo y puede recuperarse en su totalidad.

Considérese, por ejemplo, un capacitor 1-F que tiene un voltaje de 10 V. La energía almacenada es

$$w_c = \frac{1}{2} Cv_2 = 50 \text{ J}$$

Supóngase que el capacitor no está conectado a ningún circuito externo, de forma que no puede fluir ninguna corriente adicional y, por consiguiente, permanecen constantes la carga, el voltaje y la energía. Si ahora conectamos una resistencia a través del capacitor, fluye una corriente a través de éste, conforme las cargas separadas en las placas se buscan una a la otra, hasta que toda la energía almacenada (50 J) se disipa mediante la resistencia en forma de calor, el voltaje a través de la combinación RC queda en cero. En el capítulo 6 se hará un análisis sistemático de circuitos de esta especie.

Como se señaló anteriormente, el voltaje en un capacitor es una función continua respecto al tiempo. Así, por (5.4), observamos que *la energía almacenada en el capacitor es también continua*. Esto no es sorprendente, puesto que de otro modo, la energía debería ser transportada de un lugar al otro en un tiempo cero. Puesto que la potencia es el régimen de cambio de energía por unidad de tiempo, el cambio instantáneo de energía requiere de potencia infinita, lo que es una imposibilidad física.

Para ilustrar la continuidad del voltaje de un capacitor, consideremos la figura 5.4, que contiene un *interruptor ideal* que se abre en $t = 0$, como se indica. Un interruptor ideal está definido como un elemento de dos terminales que pasa instantáneamente de un circuito abierto, a un circuito cerrado. A menos que se especifique de otro modo, todos los interruptores que se utilizan en este libro se consideran como ideales.

Para discutir el efecto de la acción del interruptor, primero necesitamos considerar dos tiempos cerca de $t = 0$. Denotaremos como $t = 0-$ al instante justo antes de la acción de interruptor, y $t = 0+$ como el momento justo después de la acción del interruptor. Teóricamente no ha pasado ningún tiempo entre $0-$ y $0+$, pero los dos tipos representan estados radicalmente distintos del circuito. $v_c(0-)$ es el voltaje del capacitor justo antes de que el interruptor actúe, y $v_c(0+)$ es el voltaje inmediatamente después de la acción del interruptor. De manera similar, $i_C(0-)$ e $i_C(0+)$ son la corriente de capacitancia justo antes y después del cambio de estados del interruptor. Más formalmente, $v_c(0-)$ es el límite de $v_c(t)$ conforme t tiende a cero desde la izquierda [con valores negativos ($t < 0$)], y $v_c(0+)$ es el límite conforme t tiende a cero desde la derecha [pasando por valores positivos ($t > 0$)]. En verdad, matemáticamente, los instantes $0-$ y $0+$ son ficciones convenientes sin una definición precisa (¿Cuándo es el primer instante mayor que cero?), aunque los valores de las variables del circuito tales como $v_C(0-)$ y $v_C(0+)$ están definidas de forma precisa mediante los límites izquierdo y derecho.

Ejemplo 5.4

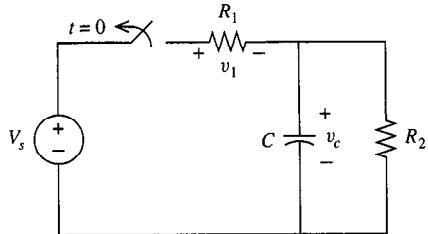


FIGURA 5.4 Circuito que ilustra la continuidad del voltaje de capacitor.

Supóngase que en la figura 5.4 tenemos $V_s = 6 \text{ V}$ y $v_c(0) = 4 \text{ V}$. Justo antes de la acción del interruptor ($t = 0-$) tenemos $v_1(0-) = V_s - v_c(0-) = 2 \text{ V}$. Inmediatamente después de que se abre el interruptor, tenemos $v_1(0+) = 0$, puesto que no fluye corriente en R_1 (está en serie con un circuito abierto). Sin embargo, puesto que v_c , un voltaje capazitivo, debe ser continuo, tenemos

$$v_c(0+) = v_c(0-) = 4 \text{ V}$$

De este modo, el voltaje en la resistencia R_1 cambió abruptamente, pero el del capacitor no lo hizo. El voltaje en R_2 es el mismo del voltaje del capacitor, y por consiguiente, tampoco cambió abruptamente.

Aunque aparentemente prohibido por el principio de continuidad, pueden dibujarse diagramas de circuito en donde los voltajes del capacitor parecen forzados a cambiar abruptamente. Por ejemplo, considérense dos capacitores y un interruptor ideal que forman una trayectoria cerrada. Si los capacitores tienen voltajes no iguales justo en el momento en el que el interruptor se cierra, sus valores deben seguir siendo desiguales en $t = 0+$, por continuidad, mientras que por LVK sus voltajes deben ser iguales en $t = 0+$. Aparentemente, debemos conceder un flujo infinito de energía (aceptando la violación de principio de continuidad) o no aplicar LVK en estos circuitos. En la sección 5.9 consideraremos con más detalle estos *circuitos singulares*. Los circuitos singulares son similares a los circuitos discutidos en el capítulo 2, en el sentido de que contienen fuentes de voltaje no iguales en paralelo, o fuentes de corriente en serie. Estos circuitos conducen a contradicciones matemáticas y no pueden analizarse consistentemente. En la práctica, la contradicción se elimina reemplazando los elementos ideales por modelos físicos más precisos, incluyendo la resistencia equivalente de Thevenin en el caso de las fuentes del capítulo 2, y la resistencia de fugas en paralelo en el presente caso de los capacitores. En el mundo real, las leyes de continuidad y de Kirchhoff ambas son válidas en los circuitos físicos unidos.

EJERCICIOS

- 5.2.1. Un capacitor $0.2\text{-}\mu\text{F}$ tiene una carga de $20\text{ }\mu\text{C}$. Obténgase su voltaje y energía.

Respuesta 100 V; 1 mJ.

- 5.2.2. Si la energía almacenada en un capacitor 0.5-F , es de 25 J , obténgase su voltaje y carga.

Respuesta 10 V; 5 C

- 5.2.3. En la figura 5.4, sea $C = \frac{1}{4} \text{ F}$, $R_1 = R_2 = 4 \Omega$, y $V = 20 \text{ V}$. Si la corriente en R_2 en $t = 0-$ es de 2 A orientado hacia abajo, obténgase en $t = 0-$ y en $t = 0+$ (a) la carga en el capacitor, de la corriente en R_1 orientada a la derecha, (b) la corriente en R_1 orientada hacia la derecha, (c) la corriente en C orientada hacia abajo, y (d) dv_C/dt .

Respuesta (a) 2, 2 C ; (b) 3, 0 A ; (c) 1, -2 A ; (d) $4, -8 \text{ V/s}$.

En esta sección determinaremos los equivalentes para conexiones en serie y en paralelos de capacitores. Recuérdese que dos subcircuitos son equivalentes si tienen la misma ley de terminales. Obtendremos una equivalente de la ley de terminales para capacitores conectados en serie, a partir de una sola capacitancia, la capacitancia equivalente para series, y lo repetiremos para el caso paralelo.

Primero consideremos la conexión en serie de N capacitores, como se muestra en la figura 5.5(a). Aplicando LVK, obtenemos

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_N \quad (5.5)$$

Utilizando la ley de terminales (5.3a),

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(\frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i d\tau + v_1(t_0) \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i d\tau + v_2(t_0) \right) + \dots + \left(\frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i d\tau + v_N(t_0) \right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^t i d\tau + v(t_0) \end{aligned}$$

donde por fin utilizamos (5.5). Ésta es la ley de terminales deseada para los capacitores conectados en serie. La ley de terminales para la figura 5.5b es simplemente

$$v(t) = \frac{1}{C_s} \int_t^t i d\tau + v(t_0)$$

Las dos leyes de terminales son idénticas; por consiguiente, los circuitos son equivalentes si

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \quad (5.6)$$

El equivalente de una cadena de capacitores conectados en serie es un solo capacitor cuya capacitancia inversa es la suma de los inversos de la capacitancia de la serie.

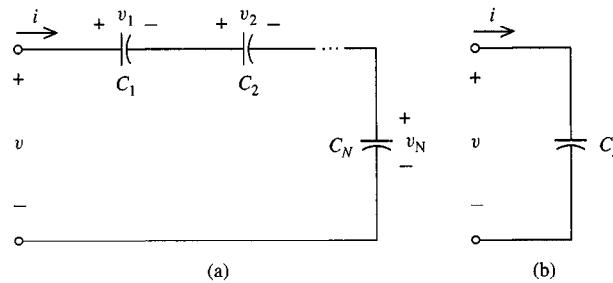


FIGURA 5.5 (a) Capacitores en serie; (b) circuito equivalente.

En el caso de dos capacitores en serie, el resultado general se simplifica a

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Para dos capacitores en serie, la capacitancia equivalente es el producto sobre la suma de las dos capacitancias individuales. En (2.15) se introdujo la regla de equivalencia de producto por suma para el caso de los resistores en paralelo. Como en el caso de los resistores en paralelo, esta regla se limita al caso especial de exactamente dos elementos de este tipo. Para tres o más capacitores en serie, el resultado general (5.6) debe usarse.

Ahora examinaremos la conexión en paralelo de N capacitores como se muestra en la figura 5.6a. Aplicando LCK en el nodo superior, se obtiene

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv}{dt}$$

o

$$i = \left(\sum_{n=1}^N C_n \right) \frac{dv}{dt}$$

En la ley de terminales correspondiente para la figura 5.6(b) es

$$i = C_p \frac{dv}{dt}$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones, las leyes terminales son idénticas y los circuitos son equivalentes si

$$C_p = \sum_{n=1}^N C_n \quad (5.7)$$

El equivalente de los capacitores en paralelo es un solo capacitor cuya capacitancia es la suma de capacitancia de los capacitores en paralelo.

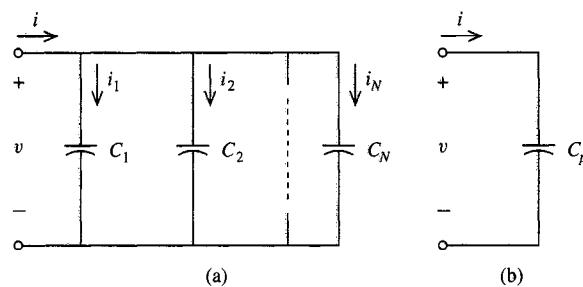


FIGURA 5.6 (a) Capacitores en paralelo; (b) circuito equivalente.

Ejemplo 5.5

Determíñese la capacitancia equivalente C_{eq} del circuito que aparece en la figura 5.7(a).

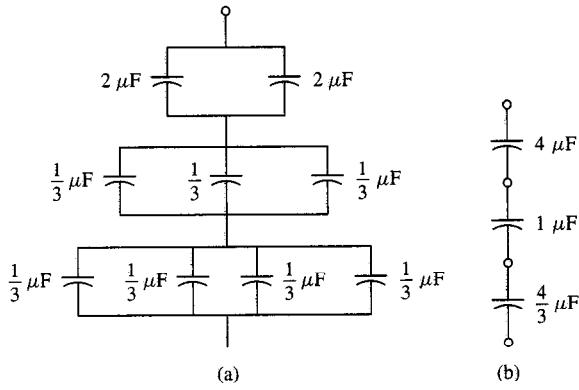


FIGURA 5.7 Circuito para el ejemplo 5.5.

Puesto que las capacitancias en paralelo se suman, la figura 5.7(a) puede simplificarse inmediatamente a su equivalente, 5.7(b). Luego, utilizando la regla de equivalencia de serie (5.6)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 2$$

$$\text{o } C_{eq} = \frac{1}{2} \text{ F.}$$

Ejemplo 5.6

Determíñese el voltaje $v_1(t)$ para $t \geq 0$ en la figura 5.8(a) si $v_1(0) = 10$ V. El equivalente de los capacitores conectados en serie aparece en la figura 5.7(b),

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{o } C_s = \frac{1}{2} \text{ F. Luego}$$

$$i = C_s \frac{d}{dt} (3 \operatorname{sen} 2t) = \frac{1}{2} (6 \cos 2t) = 3 \cos 2t \text{ A}$$

Entonces, el voltaje que pasa por el capacitor 1-F está dado por (5.3), o

$$v_1(t) = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_1(t_0) = \int_0^t (3 \cos 2\tau) d\tau + 10$$

que resulta en $v_1(t) = 3/2 \operatorname{sen} 2t + 10$ V. Nótese que evaluar este resultado en $t = 0$ da el valor inicial correcto para $v_1(t)$. También podemos comprobar que

$$i = C_1 \frac{dv_1}{dt} = 1 \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen} 2t + 10 \right) = 3 \cos 2t \text{ A}$$

lo que es consistente con el valor que calculamos para $i(t)$.

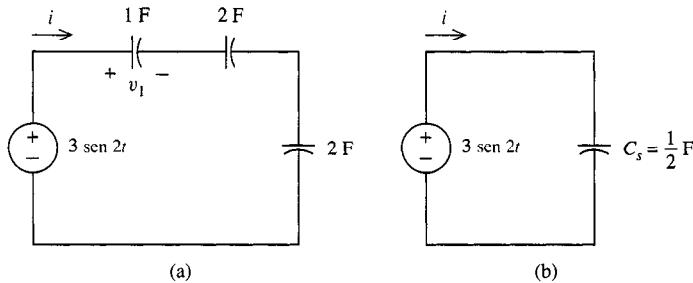


FIGURA 5.8 Figura para el ejemplo 5.6.

Es interesante hacer notar que la capacitancia equivalente de capacitores conectados en serie o en paralelo, sigue las mismas reglas que la conductancia equivalente de las conductancias en serie y en paralelo. Es decir, para el caso en paralelo, el parámetro equivalente (conductancia G_P o capacitancia C_P) es la suma de los parámetros individuales, en tanto que en serie, el parámetro equivalente (G_S o C_S), es el inverso de la suma de inversos de los parámetros individuales. Esta correspondencia resulta del hecho que las leyes determinantes para la conductancia y la capacitancia están en la misma forma: El parámetro (G o C) multiplica el voltaje de terminal (o derivada del voltaje de terminal) para obtener la corriente de terminal. Esta correspondencia funcional hace que las derivaciones anteriores de los equivalentes capacitivos correspondan línea a línea a los equivalentes de conductancia presentados anteriormente en el capítulo 2.

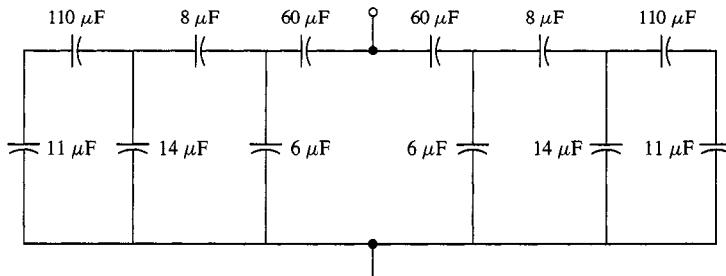
EJERCICIOS

5.3.1. Obténgase los valores máximo y mínimo de capacitancia que pueden obtenerse de diez capacitores $1\text{-}\mu\text{F}$. ¿Cómo deben conectarse?

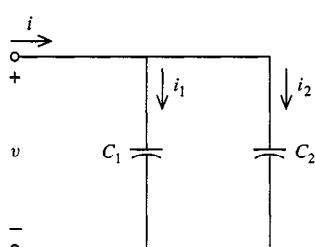
Respuesta $10\text{ }\mu\text{F}$ (en paralelo); $0.1\text{ }\mu\text{F}$ (conectados en serie).

5.3.2. Obténgase la capacitancia equivalente.

Respuesta $20\text{ }\mu\text{F}$



EJERCICIO 5.3.2



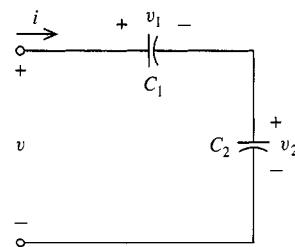
EJERCICIO 5.3.3

5.3.3. Derívese una ecuación para la división de corriente entre dos capacitores en paralelo al obtener i_1 e i_2 .

Respuesta $C_1i/(C_1 + C_2)$; $C_2i/(C_1 + C_2)$

5.3.4. Derívese una ecuación para la división de voltajes entre dos capacitores en serie inicialmente no cargados, al obtener v_1 y v_2 .

Respuesta $C_2v/(C_1 + C_2)$; $C_1v/(C_1 + C_2)$



EJERCICIO 5.3.4

5.4

INDUCTORES

En las secciones anteriores, descubrimos que las características de las terminales del capacitor son el resultado de fuerzas que existen entre cargas eléctricas debido a su separación en el espacio. Del mismo modo en que estas cargas ejercen una fuerza dependiente de la posición o *electrostáticas* entre sí, del mismo modo las cargas o corrientes en movimiento ejercen una fuerza *electrodinámica*.

La fuerza que se intercambia por dos cables vecinos que transmiten corriente, fue determinada experimentalmente por el científico francés André Marie Ampère (1775-1836) a principios del siglo XIX. Esta fuerza puede caracterizarse postulando la existencia de un *campo magnético*. A su vez, el campo magnético puede pensarse en términos de un *flujo magnético* que forma trayectorias cerradas alrededor de las corrientes eléctricas. La causa del flujo es el movimiento de carga en los cables, es decir, la corriente. El estudio de los campos magnéticos, como el de los campos eléctricos mencionados en la sección anterior, se examina en un curso dedicado a la teoría electromagnética. Aquí nos interesamos primariamente en el papel de los campos magnéticos en circuitos linealmente unidos, y principalmente en el elemento de circuito conocido como inductor.

Un *inductor* es un dispositivo de dos terminales que consiste de un alambre conductor embobinado alrededor de un núcleo. Una corriente que fluye a través del dispositivo produce un flujo magnético ϕ que forma trayectorias cerradas que pasan por las espiras, como se muestra en la figura 5.9. Supóngase que la bobina contiene N vueltas y que el flujo ϕ pasa a través de cada vuelta. En este caso, el flujo total, unido por las N vueltas de la bobina, denotado por λ es

$$\lambda = N \phi$$

Este flujo total se designa comúnmente como la *relación de flujo*. La unidad de flujo magnético es el weber (Wb) nombrado en honor al físico alemán Wilhelm Weber (1804-1891). En un inductor lineal, la relación de flujo es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del dispositivo. Por consiguiente, podemos escribir para inductores lineales

$$\lambda = Li \quad (5.8)$$

donde L , la constante de proporcionalidad, es la inductancia en webers por ampere. La unidad de 1 Wb/A se conoce como *henry* (H), nombrado en honor al físico estadounidense Joseph Henry (1797-1878).

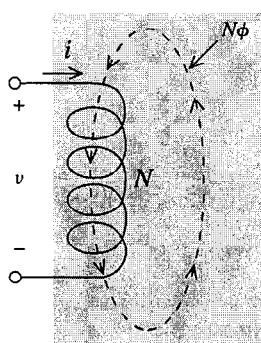


FIGURA 5.9 Modelo simple de un inductor.

En (5.8) vimos que un incremento en i produce un incremento correspondiente en λ . Este incremento en λ induce un voltaje en la bobina de N vueltas. El hecho de que los voltajes son inducidos por un flujo magnético que varía respecto al tiempo, fue descubierto por Henry. Sin embargo, Henry, al repetir el error de Cavendish con la resistencia, no publicó sus hallazgos. Como resultado, se acredita a Faraday el descubrimiento de la ley de la inducción electromagnética. Esta ley postula que el voltaje inducido es igual a la razón de cambio en el tiempo del flujo magnético total. En forma matemática, la ley es

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

que con (5.8) da la ley de terminales para un inductor:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (5.9)$$

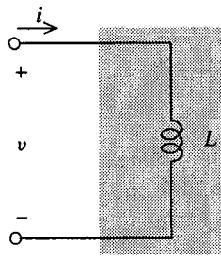


FIGURA 5.10 Símbolo de circuito para un inductor.

Claramente, conforme i aumenta, se desarrolla un voltaje en las terminales del inductor, cuya polaridad aparece en la figura 5.10. Este voltaje se opone a cualquier incremento adicional en i , porque si éste no fuera el caso, es decir, se invirtiera la polaridad, el voltaje inducido "ayudaría" a la corriente. Esto no puede ser posible físicamente, porque entonces la corriente y el voltaje se incrementarían indefinidamente.

El símbolo del circuito para el inductor, cuya ley de terminal está dada en 5.9, aparece en la figura 5.10. Al igual que en los casos del resistor y el capacitor, las direcciones de referencia del voltaje y la corriente se supone que satisfacen la convención del signo pasivo. Si se invierte cualquiera de las direcciones de referencia (pero no ambas), entonces debe introducirse un signo negativo en la ley de terminales, con lo que se obtiene $v = -L(di/dt)$.

La ley de terminal del inductor, (5.9) demuestra que si i es constante, entonces el voltaje v es cero. Por consiguiente, *un inductor actúa como un circuito cerrado a una corriente dc*. Por otra parte, mientras más rápidamente cambie i , mayor es el voltaje que aparecerá en sus terminales. Esto se debe al flujo magnético i producido que varía más rápidamente respecto al tiempo, que es la causa del voltaje v inducido de las terminales del inductor.

Ejemplo 5.7

Considérese una corriente que se incrementa linealmente de 0 a 1 V, en a^{-1} s dado por

$$\begin{aligned} i &= 0, & t < 0 \\ at, & & 0 \leq t \leq a^{-1} \\ 1, & & t > a^{-1} \end{aligned}$$

Si esta corriente se aplica a las terminales de un inductor 1-H, el voltaje resultante es

$$\begin{aligned} v &= 0, & t < 0 \\ a, & & 0 \leq t \leq a^{-1} \\ 0, & & t > a^{-1} \end{aligned}$$

En la figura 5.11 se muestran gráficas de i y v . Podemos ver que v es cero cuando i es constante, y que es igual a a cuando i aumenta

linealmente. Si a es mayor, entonces v cambia más rápidamente y también se incrementa. Es aparente que si $a^{-1} = 0$ (a es infinita) i cambia abruptamente (en un tiempo cero) de 0 a 1 V.

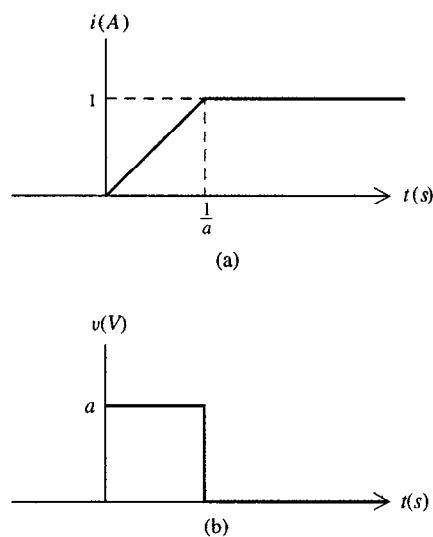


FIGURA 5.11 Formas de ondas de corriente y voltaje para un inductor 1-H.

En general, los cambios abruptos de corriente a través de un inductor, como en el ejemplo anterior, requieren que aparezca un voltaje infinito en las terminales del inductor. Como se observó en el caso del capacitor, la corriente o voltaje infinitos son una imposibilidad física. Por consiguiente, los cambios instantáneos en la corriente que pasa por un inductor son imposibles. Observamos que *la corriente que pasa a través de un inductor es siempre continua*. Esta es la otra mitad del *principio de continuidad* previamente mostrado para aplicarse a un voltaje capacitivo. La corriente inductiva es también continua, aun cuando el voltaje que pasa por un inductor puede cambiar discontinuamente, al igual que la corriente capacitiva.

Otro paralelo interesante a nuestra discusión anterior del capacitor, se revela al comparar el ejemplo 5.7 con el ejemplo 5.2. Podemos ver al invertir las funciones de i y v , que se produce el mismo par de terminales en el inductor y en el capacitor. Esto es menos sorprendente cuando notamos que las leyes de terminales para estos dos elementos, $i = C(dv/dt)$ y $v = L(di/dt)$, son de la misma forma, donde únicamente aparecen intercambiados la corriente y el voltaje. Esta *dualidad* del capacitor y el inductor hacen que los resultados restantes para el inductor sean sumamente parecidos a los obtenidos previamente para el capacitor.

Obtengamos la corriente $i(t)$ en términos del voltaje $v(t)$ para el inductor. Integrando (5.9) del tiempo t_0 a t y despejando para $i(t)$, obtenemos

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0) \quad (5.10)$$

En esta ecuación, el término integral representa la acumulación de corriente del tiempo t_0 a t , en donde $i(t_0)$ es la corriente t_0 . Obviamente, $i(t_0)$ es la corriente que se acumula de $t = -\infty$ a t_0 , en donde $i(-\infty) = 0$. Una alternativa a (5.10) es

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

Ejemplo 5.8

Considérese un inductor 1-H. En la aplicación de (5.10), obtenemos el área neta bajo la gráfica de v desde $-\infty$ a t , puesto que $i(t_0)$ representa el área de $-\infty$ a t_0 . Por ejemplo, fijando $t_0 = 0$ en la figura 5.11, podemos calcular la corriente $t = 1/a$ y ésta es

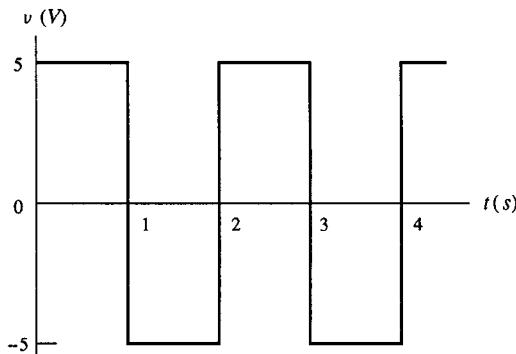
$$i\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{1} \int_0^{1/a} v(\tau) d\tau + 0 = \int_0^{1/a} a d\tau = 1 \text{ A}$$

Si preferimos, podemos fijar $t_0 = \frac{1}{2}a$, un instante donde $i(t_0)$ es $\frac{1}{2}$, y volver a calcular

$$i\frac{1}{a} = \frac{1}{1} \int_{1/2a}^{1/a} v(\tau) d\tau + v\frac{1}{2a} = \int_{1/2a}^{1/a} a d\tau + \frac{1}{2} = 1 \text{ A}$$

En este ejemplo, vemos que v e i al igual que en el caso del capacitor, no necesariamente tienen la misma variación respecto al tiempo. Por ejemplo, una inspección de la figura 5.11 demuestra que el voltaje puede ser discontinuo aun cuando la corriente es siempre continua.

EJERCICIOS



5.4.1. Un inductor 10-mH tiene una corriente de $50 \cos 1000t$ mA. Obténgase su voltaje y su relación de flujo. Supóngase que se satisface la convención del ciclo pasivo.

Respuesta $-0.5 \sin 1000t$ V; $0.5 \cos 1000t$ mWb.

5.4.2. Obténgase la corriente $i(t)$ para $t > 0$ en un inductor de 20-mH que tiene un voltaje de $-5 \sin 50t$ V si $i(0) = 5$ A. Supóngase que se satisface la convención del signo pasivo.

Respuesta $5 \cos 50t$ A.

5.4.3. Obténgase la corriente en un inductor 0.5-H, para $0 \leq t \leq 2$ s, si $i(0) = 0$ y el voltaje es el que aparece.

Respuesta $10t$ A, $0 \leq t \leq 1$; $10(2-t)$ A, $1 < t \leq 2$

EJERCICIO 5.4.3

5.5 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN INDUCTORES

Una corriente i que fluye a través de un inductor provoca un enlace de flujo total λ que pasa a través de las vueltas de la bobina del inductor. Del mismo modo en que se realizó trabajo al mover cargas entre las placas de un capacitor, el circuito externo debe realizar un tra-

jo similar para establecer el flujo ϕ . Se dice que este trabajo o energía se almacena en el campo magnético. Tal y como fue el caso para la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor, el circuito externo puede recuperarlo después. Utilizando (1.6) y (5.9), la energía almacenada en un inductor está dada por

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t vi \, d\tau = \int_{-\infty}^t \left(L \frac{di}{d\tau} \right) i \, d\tau \quad (5.11a)$$

$$= \int_{i(-\infty)}^{i(t)} Li \, di = \frac{1}{2} LI^2(t) \quad (5.11b)$$

Una inspección de este resultado revela que $w_L(t) \geq 0$. Por consiguiente, por (1.7), vemos que *el inductor es un elemento de circuito pasivo*. El inductor ideal, como en el caso del capacitor ideal, no disipa ninguna energía. Considerese, por ejemplo, un inductor 2-H que transmite una corriente de 5 A. La energía almacenada es

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 = 25 \text{ J}$$

Supóngase que este inductor se desconecta instantáneamente del circuito externo que causó el flujo de la corriente de 5-A, y se conecta simultáneamente con un resistor. La corriente fluirá a través de la combinación del inductor y resistor hasta que el resistor disipe toda la energía previamente almacenada en el inductor (25 J), y la corriente se haga cero. Un análisis completo de este tipo de circuitos se presenta en el capítulo 6.

Ejemplo 5.9

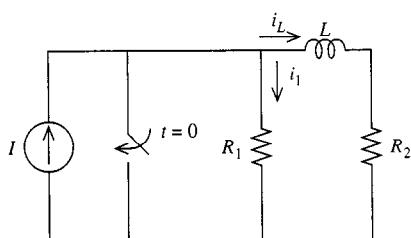


FIGURA 5.12 Circuito para el ejemplo 5.9.

Puesto que las corrientes inductivas son continuas, la energía almacenada en un inductor, como la que se almacena en un capacitor, también es continua. Para ilustrar esto, considérese el circuito de la figura 5.12, que contiene un interruptor que está cerrado en $t = 0$, como se indica. Supóngase que $i_L(0-) = 2 \text{ A}$ e $I = 3 \text{ A}$. Luego $i_1(0-) = 3 - 2 = 1 \text{ A}$. Justo después de que se cierra el interruptor, tenemos $i_1(0+) = 0$, puesto que el circuito se corta a través de R_1 . Sin embargo, tenemos, que por continuidad

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 2 \text{ A}$$

Por consiguiente, la corriente de la resistencia cambió abruptamente, pero no así la corriente inductiva.

En la sección 5.9 se da un ejemplo de un circuito singular para el que las corrientes inductivas parecen ser discontinuas. Como en el caso de los circuitos capacitivos singulares, la discontinuidad aparente en la energía almacenada en los inductores no puede explicarse mediante el modelo de circuito unido ideal. Los circuitos físicos que tienen inductores, contienen una resistencia asociada que no permite los voltajes infinitos del inductor que deben acompañar los cambios abruptos en las corrientes del inductor. Nos concentraremos primariamente en circuitos de este tipo.

5.5.1. Derívese la energía almacenada en un inductor en términos del enlace de flujo λ de la inductancia L .

Respuesta $\lambda^2/2L$.

5.5.2. Un inductor de 40-mH tiene una corriente $i = 100 \cos 10\pi t$ mA. Obténgase el enlace de flujo, voltaje y la energía en $t = 1/30$ s.

Respuesta 2 mWb ; $-20\sqrt{3}\pi \text{ mV}$, $50\mu\text{J}$.

5.5.3. Un inductor de 2-mH tiene un voltaje de $v = 2 \cos 1000t$ V con $i(0) = 1.5$ A. Obténgase la energía almacenada en el inductor en $t = \pi/6$ ms. ¿Cuál es la energía mínima almacenada, y en qué tiempo? ¿Cuál es la energía máxima almacenada, y en qué tiempo?

Respuesta 4 mJ ; $\frac{25}{4} \text{ mJ}$ en $t = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$; $1/4 \text{ mJ}$ en $t = (2n + 1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, \dots$

5.5.4. En la figura 5.12, sea $I = 5$ A, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $L = 2$ H, e $i_1(0-) = 2$ A. Si el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$, obténganse $i_L(0-)$, $i_L(0+)$, $i_1(0+)$, y $di_L(0+)/dt$.

Respuesta 3 A; 3 A; 0 ; -6 A/s

5.6

INDUCTORES EN SERIE Y EN PARALELO

En esta sección determinaremos la inductancia equivalente para conexiones de inductores en serie y en paralelo. Del mismo modo en que obtuvimos los equivalentes capacitivos en serie y en paralelo para que siguieran las reglas derivadas para las conductancias, ahora veremos que los inductores en serie y en paralelo tienen equivalentes, cuyos valores siguen las mismas reglas que derivamos para los resistores.

Primero considérese la conexión en serie de N inductores que se muestra en la figura 5.13(a). Sumando las caídas de voltaje alrededor de la trayectoria cerrada, y utilizando la ley de terminales $v = L(di/dt)$,

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N L_n \right) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

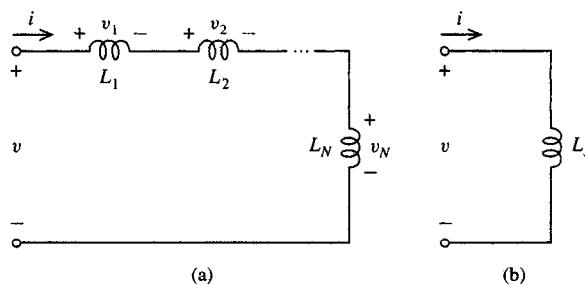


FIGURA 5.13 (a) Inductores en serie; (b) circuito equivalente.

Comparando la ley de terminales de la figura 5.13(b), $v = L_S(di/dt)$, los dos circuitos son equivalentes si

$$L_S = \sum_{n=1}^N L_n \quad (5.12)$$

El equivalente de una cadena de inductores conectados en serie es un solo inductor cuya inductancia es la suma de las inductancias individuales.

El caso en paralelo se ilustra en la figura 5.14(a). Sumando corrientes en el nodo superior, y utilizando la ley de terminales en la forma (5.10),

$$\begin{aligned} i(t) &= \left(\frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v d\tau + i_1(t_0) \right) + \left(\frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v d\tau + i_2(t_0) \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{L_N} \int_{t_0}^t v d\tau + i_N(t_0) \right) \end{aligned}$$

Agrupando los términos y considerando que $i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$, la ley de terminales es

$$i(t) = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^t v d\tau + i(t_0)$$

Comparando la ley de terminales de la figura 5.12(b) dada en (5.10), coinciden si

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \quad (5.13)$$

El equivalente de los inductores en paralelo es un solo inductor cuya inductancia inversa es la suma de los inversos de las inductancias en paralelo.

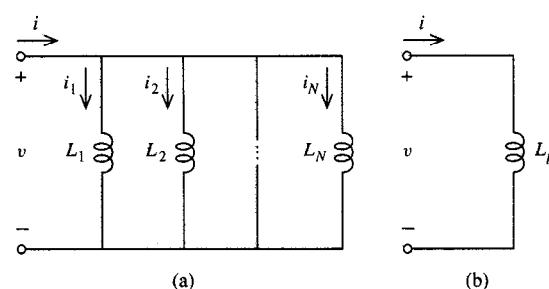


FIGURA 5.14 (a) Inductores en paralelo; (b) circuito equivalente.

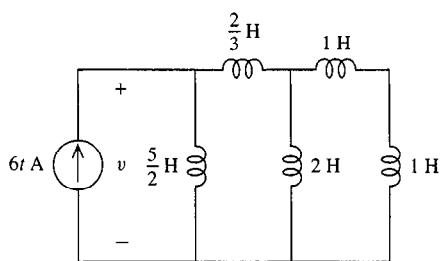
En el caso de dos inductores en paralelo L_1 y L_2 , (5.13) puede simplificarse a

$$L_P = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

lo que es directamente análogo a la equivalencia de dos resistencias en paralelo (2.15). Como se mencionó anteriormente en ese caso, la regla de producto por suma rige para exactamente dos elementos. Para tres o más, no debe aplicarse el resultado (5.13)

Ejemplo 5.10

Deseamos obtener v en la figura 5.15. Primero obtendremos un inductor equivalente. Los dos inductores 1-H en serie son equivalentes a un inductor 2-H, que está en paralelo con el inductor 2-H que aparece en la figura. Su equivalente en paralelo es



$$L_{eq1} = \frac{(2)(2)}{2+2} = 1 \text{ H}$$

L_{eq1} está a su vez en serie con $\frac{2}{3}$ de H, lo que da una serie de equivalente de $\frac{5}{3}$ de H. Finalmente, esto está en paralelo con el inductor $5/2$ -H para un equivalente general L_{eq} :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{5/3} + \frac{1}{5/2} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

FIGURA 5.15 Circuito para el ejemplo 5.10. y $L_{eq} = 1 \text{ H}$. Luego, para este circuito,

$$v = 1 \frac{d}{dt}(6t) = 6 \text{ V}$$

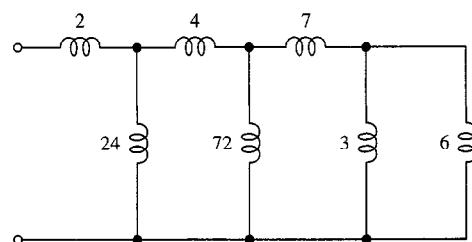
EJERCICIOS

5.6.1. Encuéntrense los valores máximos y mínimos de inductancia que pueden obtenerse utilizando cinco inductores de 20-mH y diez inductores de 10-mH.

Respuesta 200 mH; 800 μH

5.6.2. Obténgase la inductancia equivalente. Los valores de inductor que aparecen están expresados en milihenries.

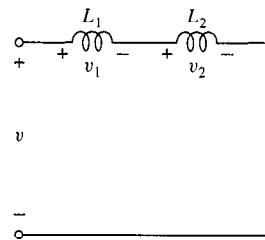
Respuesta 10 mH



EJERCICIO 5.6.2

5.6.3. Derívese una ecuación para división de voltajes entre dos inductores en serie, al obtener v_1 y v_2 .

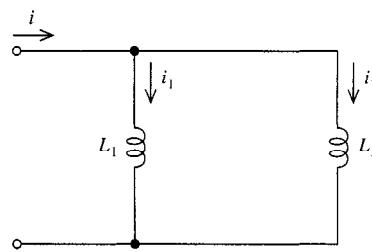
Respuesta $L_1 v / (L_1 + L_2)$; $L_2 v / (L_1 + L_2)$



EJERCICIO 5.6.3

5.6.4. Derívese una ecuación para división de corrientes entre dos inductores en paralelo, sin corriente inicial, al obtener i_1 e i_2 .

Respuesta $\frac{L_2 i}{L_1 + L_2}$; $\frac{L_1 i}{L_1 + L_2}$



EJERCICIO 5.6.4

5.7

ESTADO ESTABLE EN DC

Antes de presentar los capacitores e inductores, nos concentraremos en los circuitos resitivos, aquellos que contienen únicamente resistencias y fuentes. En los circuitos resitivos cuyas fuentes independientes son dc (valores constantes), es significativo que todas las corrientes y voltajes también sean dc. Esto proviene del hecho de que las ecuaciones de análisis nodal o de malla no contienen cantidades que varían respecto al tiempo. Las soluciones de estas ecuaciones serán obviamente constantes, es decir, valores dc. Sustituyendo estos voltajes de nodo constantes o corrientes de malla en la ley de Ohm para obtener las variables de circuitos restantes, producirá únicamente más corrientes y voltajes dc.

Se dice que un circuito está en *estado estable dc* si todas las corrientes y voltajes en ese circuito son constantes. Sin duda, únicamente los circuitos cuyas fuentes independientes son todas dc tienen la posibilidad de llegar a un estado estable dc, porque si alguna función de fuente no fuese constante, esa corriente o voltaje no sería dc. A partir de lo dicho en el párrafo anterior, los circuitos resitivos que contienen únicamente fuentes independientes dc están siempre en el estado estable dc. Sin embargo, el hecho de que los inductores y capacitores introduzcan las derivadas integrales en las ecuaciones del análisis, hace que las soluciones que varían respecto al tiempo, sean una posibilidad distinta aun cuando

las fuentes sean constantes. La relación del estado estable dc con los circuitos que contienen inductores y capacitores se considerará a continuación.

En este capítulo ya se hizo notar que, puesto que $i = Cdv/dt$ es la ley de terminales para un capacitor, si v es una constante, entonces $i = 0$, es decir, el capacitor es equivalente a un circuito abierto. De igual manera, si i es una constante, entonces el hecho de que $v = L(di/dt)$ sugiere que el inductor es equivalente a un circuito cerrado, puesto que su voltaje $v = 0$. Por consiguiente, *en el estado estable dc, donde todas las corrientes y voltajes son constantes, podremos analizar el circuito sustituyendo inductores por circuitos cerrados y capacitores por circuitos abiertos*.

Ejemplo 5.11

Supóngase que el circuito de la figura 5.16(a) está en estado estable dc. Obténganse i y v .

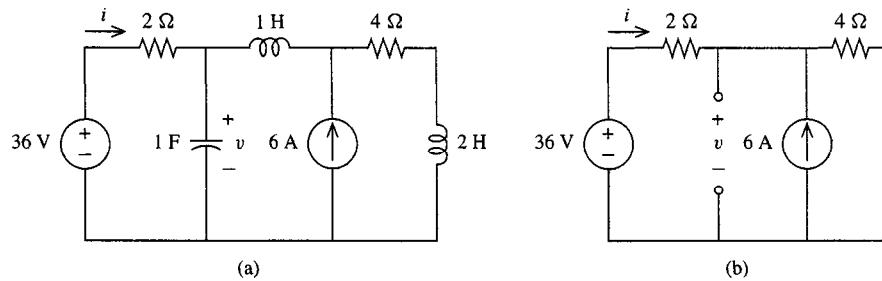


FIGURA 5.16 (a) Circuito; (b) equivalente en estado estable dc.

En el estado estable dc podemos sustituir inductores por circuitos cerrados y capacitores por circuitos abiertos, como se muestra en la figura 5.16(b). Aplicando el análisis de malla, éste es un circuito de dos mallas. La presencia de la fuente de corriente reduce el análisis a una sola ecuación alrededor de la supermalla que consiste en la trayectoria cerrada exterior,

$$2i + 4(i + 6) = 36$$

o $i = 2$ A. Entonces, por LVK

$$v = 4(i + 6) = 4(8) = 32 \text{ V}$$

El suponer un estado estable dc en *circuitos RLC* (aquejlos con resistencias, inductores y capacitores), que contienen únicamente fuentes dc, nos lleva a resultados autoconsistentes. Reemplazando inductores y capacitores por circuitos abiertos y cerrados, nos queda para analizar un circuito resistivo, y por consiguiente se nos garantiza un resultado de estado estable de dc en el análisis. Sin embargo, la autoconsistencia únicamente demuestra que el estado estable dc es posible con estos circuitos, y no que esto sea inevitable. Como se discutirá en el capítulo 6, la mayoría de los circuitos RLC con fuentes dc, eventualmente convergen al estado estable dc. Pero algunos nunca lo hacen; incluso para aquellos que si lo hacen, el siguiente ejemplo demuestra que típicamente no “comienzan” en el estado estable dc.

Ejemplo 5.12

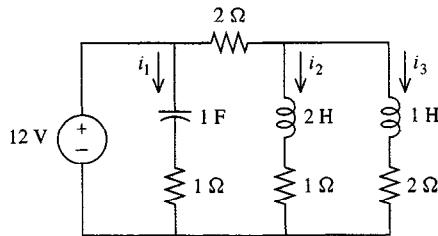
Supóngase que antes del tiempo $t = t_0$, el capacitor en la figura 5.16 tiene una carga de hasta $v = 100$ V y que en t_0 es cambiado a la posición que se muestra en el circuito. Luego, por continuidad de los

voltajes capacitivos, su valor en $t = t_0+$ será también de 100 V. Pero el valor de estado estable dc para este voltaje es de 32 V, como se muestra en el ejemplo 5.11. A partir de esto concluimos que este circuito no está en el estado estable dc en el tiempo $t = t_0+$, puesto que para $t > t_0$, por lo menos una corriente de voltaje en este circuito no será dc.

El estado estable DC es un concepto importante que volveremos a ver en varios puntos de nuestra investigación de circuitos lineales. Es particularmente útil para determinar condiciones iniciales en muchos circuitos con respuestas que varían respecto al tiempo. Afortunadamente, realizar un análisis de estado estable dc en un circuito *RLC* se simplifica al sustituir inductores y capacitores por circuitos abiertos y cerrados, convirtiéndose en el trabajo directo de resolver un circuito resistivo reducido, en lugar de un *RLC*.

EJERCICIOS

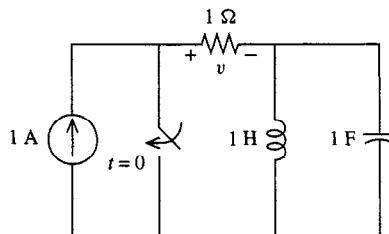
- 5.7.1.** Obténgase el valor de estado estable dc para i_1 , i_2 , e i_3 .
Respuesta 0; 3 A; $\frac{3}{2}$ A



EJERCICIO 5.7.1

- 5.7.2.** Supóngase que el circuito está en el estado estable dc justo antes de $t = 0$. Obténganse $v(0-)$ y $v(0+)$. ¿Estará este circuito en estado estable dc justo después de $t = 0$?

Respuesta 1 V; 0 V; no

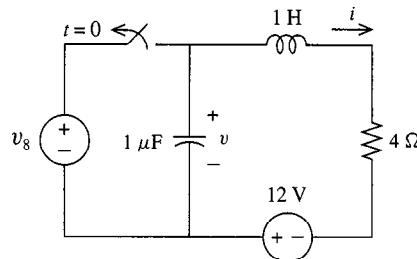


EJERCICIO 5.7.2

5.7.3. Encuéntrese el valor para la función de fuente v_g de forma que

$i(0+) = 2 \text{ A}$. Para este v_g obténganse $v(0-)$ y $v(0+)$.

Respuesta -4 V; -4 V; -4 V



EJERCICIO 5.7.3

5.8 CAPACITORES E INDUCTORES PRÁCTICOS

Los capacitores comercialmente importantes se producen como elementos discretos, o se depositan en sustratos de circuitos integrados (CI) durante el proceso de fabricación de los CI. Los capacitores discretos están disponibles en una amplia variedad de tipos, valores y regímenes de voltaje. El tipo de capacitor se clasifica generalmente por la clase de dieléctrico que se utiliza, y su capacitancia se determina por el tipo de dieléctrico y la geometría física del dispositivo. Régimen de voltaje o voltaje de trabajo, es el máximo voltaje que puede aplicarse al capacitor sin producir daños. Los voltajes que exceden este valor pueden dañar permanentemente el dispositivo, destruyendo o dañando el dieléctrico.

Los capacitores discretos simples pueden construirse utilizando dos franjas de hoja metálica separadas por un material aislante dieléctrico. Las hojas y los dieléctricos son comprimidos juntos, en hojas que luego son enrolladas o dobladas en una presentación compacta. Los conductores eléctricos unidos a cada hoja metálica, constituyen las terminales del capacitor.

A diferencia de los capacitores ideales, los capacitores prácticos disipan cantidades pequeñas, pero no nulas, de energía. Esto se debe primariamente a *corrientes filtradas* que fluyen dentro del material dieléctrico en el dispositivo. Los dieléctricos prácticos tienen una conductancia no nula, que permite que la carga se filtre directamente de una placa de capacitor a la otra (internamente, además de la corriente no filtrada que se mueve a través de la trayectoria del circuito externo). La corriente filtrada puede incluirse en un modelo de circuito para un capacitor práctico, reemplazando una resistencia en paralelo con el capacitor ideal, como se muestra en la figura 5.17.

Entre los tipos comunes de capacitores discretos, diseñados según sus dieléctricos, se incluyen los de cerámica, Mylar, Teflón y poliestireno. Además, los valores capacitivos mayores son generalmente de tipo electrolítico, que requieren un uso polarizado (una terminal de capacitor debe conservarse un potencial más alto que el otro). Los materiales y estructuras de los capacitores de circuitos integrados, dependen de la tecnología CI que se utiliza, que frecuentemente consiste de una fina capa de un óxido dieléctrico aislante entre las capas de materiales semiconductores tratados, que actúan como placas conductoras.

Los inductores prácticos están disponibles únicamente como elementos discretos (o prearmados en paquetes electrónicos que contienen muchos elementos discretos), y no

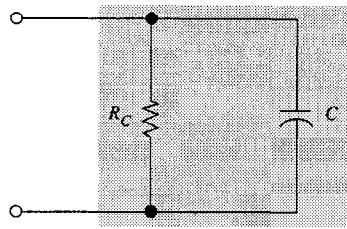


FIGURA 5.17 Modelo de circuito para un capacitor práctico.

como constituyentes de circuitos integrados. Como los capacitores prácticos, disipan una pequeña cantidad de energía, aunque no nula. Esta dissipación resulta de pérdidas asociadas con el hecho de que el cable que forma la bobina del inductor tiene cierta resistencia, y también de pérdidas del núcleo (pérdidas debidas a corrientes inducidas en el núcleo por el intenso campo magnético que está presente en el lugar). El flujo magnético se enfoca mejor en el núcleo del inductor mediante el uso de materiales ferromagnéticos, pero esto también incrementa las pérdidas del núcleo. Puede hacerse un modelo de estas pérdidas insertando una resistencia en serie en el modelo del circuito para un inductor práctico, como se muestra en la figura 5.18.

La no disponibilidad de inductores CI, una consecuencia de la dificultad de reproducir bobinas en superficies planas y también por las malas propiedades magnéticas de casi todos los materiales CI, han limitado el uso de inductores en el diseño moderno de circuitos miniaturizados. Se han dedicado muchos esfuerzos para obtener diseños sin inductores para aplicaciones CI. Sin embargo, aún hay muchas aplicaciones electrónicas donde los inductores son comunes, y éstas van de circuitos telefónicos y receptores de radio, a fuentes de poder y motores eléctricos.

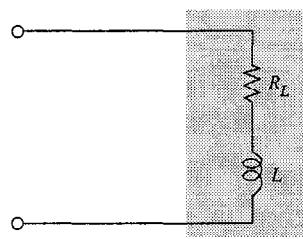


FIGURA 5.18 Modelo de circuito para un inductor práctico.

EJERCICIOS

- 5.8.1.** Supónganse que deseamos construir un capacitor 1-F al poner capacitores $10\text{-}\mu\text{F}$ en paralelo. ¿Cuántos se necesitan? Si la resistencia filtrada es de $10\text{ M}\Omega$, para cada capacitor $10\text{-}\mu\text{F}$, ¿cuál será la resistencia y corrientes de filtración totales, si el capacitor 1-F se pone sobre una fuente dc de 100-V?

Respuesta $100,000; 100\ \Omega; 1\text{ A}$

- 5.8.2.** Suponer que creamos un inductor de 50-mH , al hacer 10,000 vueltas de alambre fino alrededor de una forma de 1 cm de diámetro. Si el alambre tiene una resistencia de $0.01\ \Omega/\text{cm}$, ¿cuánta energía disipará el inductor si transmite una corriente de 20 mA dc? ¿Cuál sería esta cantidad si el inductor práctico fuera un inductor ideal?

Respuesta $40\pi\text{ mW}; 0\text{ mW}$.

5.9

CIRCUITOS SINGULARES

Un circuito se conoce como *circuito singular* si al activar un interruptor ocurre un evento que *parece* violar el principio de continuidad, produciendo discontinuidades en los voltajes del capacitor o las corrientes del inductor. En esta sección consideraremos estos circuitos, y mostraremos cómo la aparente violación puede ser interpretada y resuelta consistentemente.

Ejemplo 5.13

Consideraremos en primer lugar la figura 5.19(a) en donde los capacitores 1-F C_1 y C_2 tienen voltajes de 1 V y 0 V, respectivamente, justo antes de cerrar el interruptor. Es decir, $v_1(0-) = 1$ V y $v_2(0-) = 0$ V. Justo antes de cerrar el interruptor, la continuidad requiere que $v_1(0+) = 1$ y $v_2(0+) = 0$. Pero LVK aplicada en el tiempo 0+ estipula que $v_1(0+) + v_2(0+) = 0$. Aparentemente, la continuidad o LVK fueron violadas. ¿Cuál es la regla que debe regir en este caso?

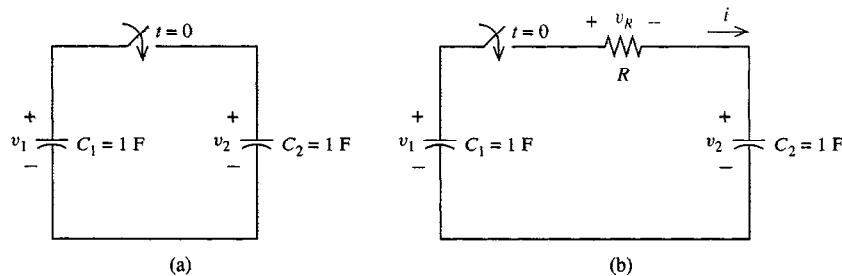


FIGURA 5.19 (a) Circuito singular con capacitores;
(b) modelo de circuito mejorado.

Recordemos que nuestra justificación de la continuidad se basó en la aseveración de que las corrientes y voltajes infinitos no son posibles en circuitos *prácticos*. En el reino de las matemáticas puras, no hay nada malo en el concepto de infinito. Nos es muy útil imaginar a qué tiende la función $f(x) = 1/x$ conforme x tiende a cero, o cuál es la suma de todos los enteros positivos hasta N , conforme N se hace cada vez mayor.

Lo que está mal en los circuitos singulares, es que no son modelos útiles para *circuitos prácticos*, aquellos que pueden aproximarse en la práctica del mundo real mediante métodos físicos. Son similares a otros circuitos imprácticos que hemos identificado previamente, es decir, fuentes de voltaje paralelo, o fuentes de corriente en serie, con funciones de fuente distintas. Anteriormente concluimos que la ley de terminales para una fuente independiente ideal, tan útil en el contexto de la mayoría de los circuitos, choca irreconciliablemente con las leyes de Kirchhoff para estos circuitos tan peculiares. Acordamos en ese caso *resolver las contradicciones aparentes, cuando surjan, mediante el uso de un mejor modelo*. En el caso de las fuentes, esto fue hecho añadiendo una resistencia de equivalencia de Thevenin o Norton finita y no nula al modelo de la fuente ideal, eliminando efectivamente el conflicto matemático. Si insistimos obstinadamente en los modelos de fuente originales e inadecuados para estos circuitos, debemos simplemente admitir una contradicción matemática inherente, y negarnos a seguir analizando este circuito contradictorio.

En el caso de los circuitos singulares de la figura 5.19(a), la contradicción aparente entre las leyes de continuidad y de Kirchhoff también se elimina utilizando un mejor modelo de circuitos. Uno de estos modelos toma en cuenta la resistencia no nula de cualquier cable práctico, añadiendo una resistencia en serie en la trayectoria, como se muestra en la figura 5.19(b). Entonces satisfacemos la continuidad, es decir, $v_1(0+) = 1$ y $v_2(0+) = 0$, y al mismo tiempo satisfacemos LVK, puesto que la diferencia de estos voltajes ahora se explicará como una caída de voltaje sobre el cable v_R , donde $v_R(0+) = v_1(0+) - v_2(0+) = 1$ V. Nótese que si la resistencia de cable R es pequeña, como podríamos esperarlo en la práctica, entonces por la ley de Ohm, la corriente en el cable, $i(0+) = v/R = 1/R$, será muy grande. Ciertamente, en el límite, conforme R se hace más y más pequeña, la corriente tiende a

infinito, el valor “práctico” exigido por el circuito de la figura 5.19(a). Desde luego, normalmente, no necesitamos construir un modelo para la resistencia del cable, puesto que no se requiere que esto limite la corriente a un valor finito.

El segundo ejemplo de un circuito singular aparece en la figura 5.20(a). Nuevamente es aparente una contradicción entre las leyes de continuidad y de Kirchhoff en el tiempo $t = 0+$, la continuidad de tiempo de la corriente inductiva de la ley de corriente de Kirchhoff aplicada en el nodo a . Nuevamente, la solución de este conflicto requiere el uso de un modelo más práctico. Supongamos que debiéramos construir físicamente este circuito. ¿Qué ocurriría al prender el interruptor? El poder almacenado en el campo magnético del inductor caería instantáneamente a cero, como debería hacer si la corriente cayera instantáneamente a cero. La corriente buscaría otra ruta. Ciertamente, nos saludaría una chispa sumamente visible que saltaría por la brecha de aire producida cuando se abriera el interruptor. En la figura 5.17(b), se incluye un modelo para la conductividad de la brecha de aire. Si la conductancia G es pequeña, como sería de esperarse en la práctica (el aire es un mal conductor), entonces por continuidad con $i(0+) = 1 \text{ A}$, tenemos $v(0+) = 1/G$, un valor grande. Ciertamente, este circuito sugiere el diseño de un sistema de ignición de punto de ruptura para automóvil, en donde el objetivo es producir un voltaje sumamente alto al interrumpir la corriente que pasa por la bobina o inductor de ignición con un par de puntos móviles de ruptura. El arco inevitable que predice nuestro análisis, es lo que causa que estos puntos se corrían y eventualmente fallen.

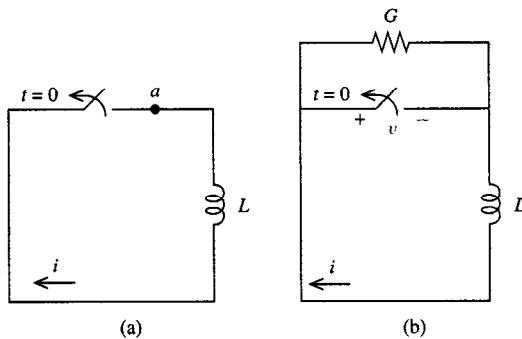


FIGURA 5.20 (a) Circuito singular con interruptor; (b) modelo de circuito mejorado.

EJERCICIOS

- 5.9.1.** Suponer que $i = \frac{1}{2} \text{ A}$ en la figura 5.20(b). Si la conductancia de la brecha de aire es $G = 10 \mu\text{S}$ entre las terminales del interruptor, ¿cuánto voltaje se produce en la brecha de aire, inmediatamente después de abrir el interruptor?

Respuesta 50 kV

- 5.9.2.** Si se carga un capacitor ideal de $100-\mu\text{F}$ a 100 V , y de pronto se corta con un cable conductor ideal, suponiendo que LVK no se viola, ¿cuánta energía arrojará instantáneamente el capacitor? En la misma situación, utilizando un modelo práctico, incluimos una resistencia de cable de 0.01Ω

en serie con el capacitor ideal. ¿Cuál es el flujo de corriente a través del cable después de que se conecta? ¿Cuál es su valor de estado estable dc?

Respuesta 1/2 J; 10 kA; 0 A

RESUMEN

El presente capítulo añade los capacitores e inductores al conjunto de elementos de circuito que utilizaremos, completando así la lista. Sus leyes $i-v$ contienen derivadas e integrales, introduciendo así el cálculo, y en particular las ecuaciones diferenciales, en un lugar central. Aunque no son capaces de generar energía, estos elementos almacenan energía del resto del circuito y, posteriormente, la devuelven al circuito. Esto produce un comportamiento más complejo del que son capaces las resistencias, lo que será examinado en los siguientes dos capítulos.

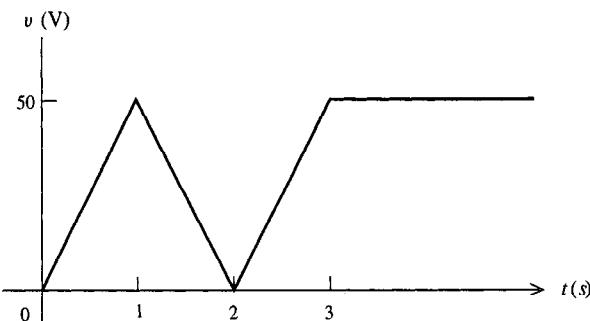
- Los capacitores obedecen la ley $i-v$, $i = Cdv/dt$, donde C es la capacitancia expresada en Farads y se supone que i y v satisfacen la convención de signo pasivo.
- Un capacitor almacena energía en el campo eléctrico entre sus placas. Su valor es $1/2 Cv^2$.
- La capacitancia en paralelo suma, y la capacitancia en serie obedece la ley de recíproco-recíproco.
- Los inductores obedecen la ley $i-v$, $v = Ldi/dt$, en donde L es la inductancia en Henries, y se supone que i y v satisfacen la convención de signo pasivo.
- En un inductor la energía se almacena en el campo magnético que rodea sus espiras. Su valor es $1/2 Li^2$.
- La inductancia en serie suma, la inductancia en paralelo obedece la ley recíproco-recíproco.
- En el estado estable DC, $dv/dt = di/dt = 0$, de forma que los capacitores se comportan como circuitos abiertos, y los inductores como circuitos cerrados.
- El principio de continuidad postula que las corrientes inductivas y voltajes capacitivos no pueden brincar discontinuamente. Para hacerlo, se necesita de una energía infinita.
- Los circuitos singulares son aquellos donde se violan las leyes de Kirchhoff o el principio de continuidad. Esto puede evitarse con el uso de modelos de circuito más realistas.

PROBLEMAS

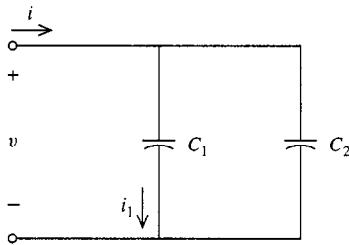
5.1. Obténgase la corriente i que pasa a través de un capacitor $20-\mu\text{F}$, cuyo voltaje es $v(t) = 2t \cos 6t$ V. Suponer que se satisface la convención de signo pasivo.

5.2. Obténgase la corriente i que pasa a través del capacitor $1-\text{F}$, cuyo voltaje v es el que aparece, (a) suponiendo que i y v satisfacen la convención de signo pasivo, y (b) suponiendo que no la satisfacen.

5.3. Si este subcircuito tiene una ley de terminales $i = 12$ (dv/dt) e i_1 es igual a $20 \cos 2t$ A cuando v es $4 \sin 2t$ V. Obténgase C_1 y C_2 .



PROBLEMA P5.2



PROBLEMA P5.3

5.4. Un capacitor de 3-pF está en serie con una fuente de corriente de valor $i = 5 \sin 1000\pi t \mu\text{A}$. Si $v(0) = 0 \text{ V}$, ¿cuál es el voltaje v en $t = 1 \text{ ms}$? ¿En $t = 1 \text{ s}$? Suponer que v e i satisfacen la convención de signo pasivo.

5.5. Un capacitor de $10\text{-}\mu\text{F}$ tiene $i = 3e^{-t} \text{ A}$ para $t \geq 0$. Si se determina que su voltaje v (que satisface la convención de signo pasivo en relación a i) es -10 V en $t = 3 \text{ s}$, ¿Qué debe ser $v(0)$?

5.6. Obténgase el voltaje v en un capacitor 1-F , cuya corriente en miliamperios está dada en la gráfica del problema 5.2.

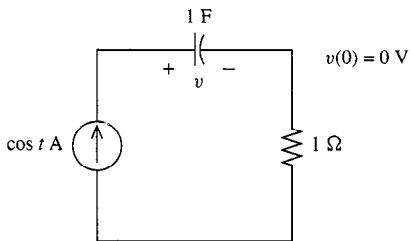
5.7. Obténgase la energía almacenada en el capacitor en el problema 5.1 respecto al tiempo.

5.8. Obténgase la energía almacenada en el capacitor del Problema 5.5 (a) en $t = 3 \text{ s}$ y (b) en el límite conforme $t \rightarrow \infty$.

5.9. Se obtiene que un capacitor con carga igual y opuesta de $4 \mu\text{C}$ en cada placa tiene un voltaje de 80 V . Obténgase su capacitancia en la energía almacenada.

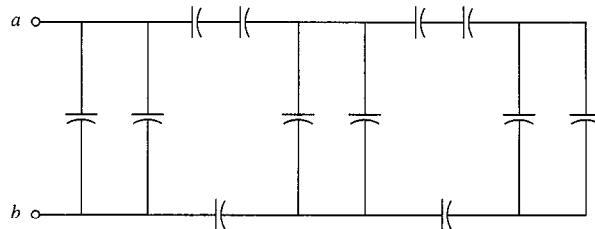
5.10. Se coloca un capacitor de $100\text{-}\mu\text{F}$ en paralelo con una fuente de voltaje independiente de $te^{-t} \text{ V}$ en $t = 0$. ¿En qué tiempo será máxima la energía transferida por la fuente al capacitor? ¿Cuál será esta energía máxima?

5.11. Determinar la energía almacenada en el capacitor y la energía disipada por la resistencia como funciones de t para $t \geq 0$. Conforme t crece más y más, ¿cuál elemento será el mayor "cliente" de energía neta de la fuente?



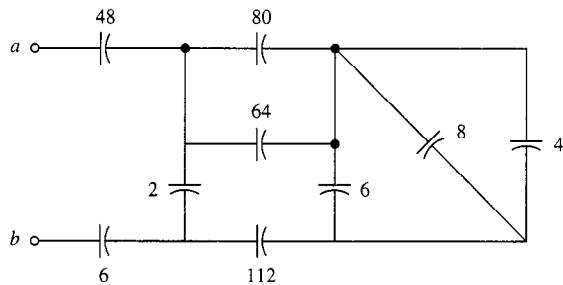
PROBLEMA P5.11

5.12. Todos los capacidores son $1 \mu\text{F}$. Obténgase la capacitancia equivalente en $a-b$.



PROBLEMA P5.12

5.13. Las capacitancias están en picofarads. Obténgase la capacitancia equivalente en $a-b$.

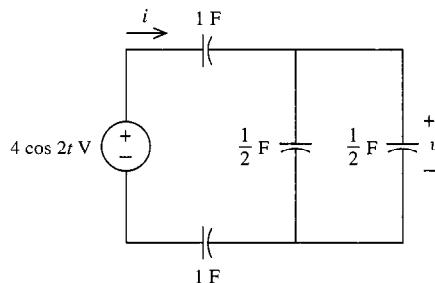


PROBLEMA P5.13

5.14. ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la interconexión en serie de m subcircuitos, donde cada uno consiste de n capacidores de C-Farad en paralelo? Utilícese este resultado para diseñar un capacitor $41/42 \mu\text{Fd}$ que utiliza únicamente capacidores $1/3 \text{ Fd}$.

5.15. Dejemos construir un capacitor $12.35\text{-}\mu\text{F}$ fuera de los capacidores $10\text{-}\mu\text{F}$. Demuéstrese cómo puede hacerse esto. ¿Cuántos capacidores $10\text{-}\mu\text{F}$ se necesitan?

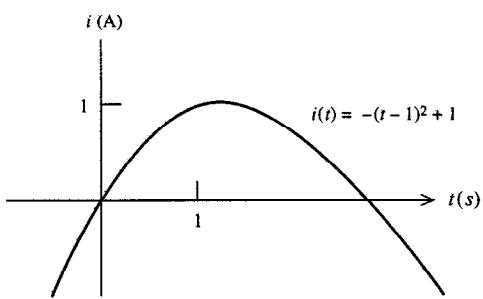
5.16. Obténgase i y v para $t \geq 0$ si todos los capacidores son descargados inicialmente en $t = 0$.



PROBLEMA P5.16

5.17. Obténgase el voltaje v sobre un inductor 20-mH sobre una corriente $i(t) = 4 \sin 10\pi t + 1 \text{ A}$. Supóngase que se satisface la convención de signo pasivo.

5.18. Obténgase el voltaje v sobre un inductor 1-H, cuya corriente i aparece en la figura. Supóngase que se satisface la convención de signo pasivo.



PROBLEMA P5.18

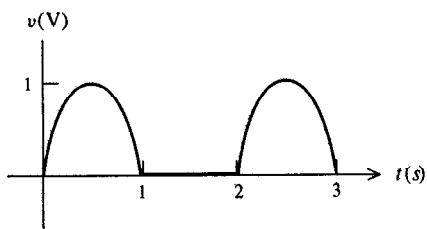
5.19. Si un inductor con corriente $i(t) = 20 \cos 100t$ mA tiene un voltaje $v(t) = 5 \sin 100t$ V, (a) ¿cuál es su inductancia?, (b) ¿ i y v satisfacen juntas la convención de signo pasivo?

5.20. ¿Para qué valor de ω , la amplitud del voltaje sobre un inductor de 2-mH con corriente $i = 18 \cos \omega t$ A será de +12 V?

5.21. Resolver el problema 5.2 si v es el voltaje sobre un inductor de 50-mH, e $i(0) = 0$.

5.22. ¿Qué clase de formas de onda de voltaje producirán formas de onda de corriente lineal a tramos a través de un inductor? Justificar.

5.23. Sea $v(t) = \sin \pi t$ V para $0 \leq t \leq 1$ y $2 \leq t \leq 3$, pero de otro modo $v(t) = 0$. Si este es el voltaje en un inductor, obténgase la corriente que pasa por éste para $t \geq 0$. Suponer que $i(0) = 1$ A y este i y v juntas satisfacen la convención de signo pasivo.



PROBLEMA P5.23

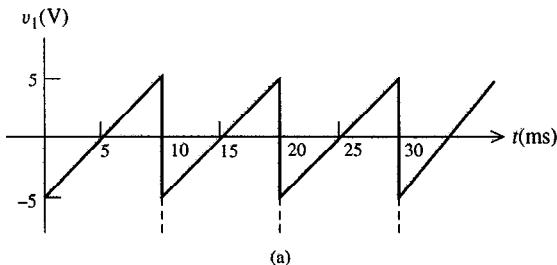
5.24. Obténgase la energía almacenada respecto a t para el inductor del problema 5.17.

5.25. Repítase el problema 5.24 para el inductor del problema 5.18.

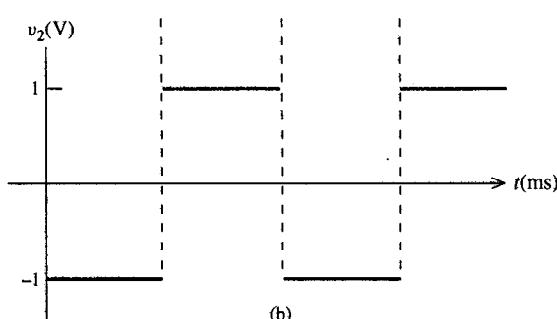
5.26. ¿Cuál es la energía máxima que debe generarse por la fuente de voltaje de $10 \cos 2t$ V que es puesta en paralelo con

un inductor 10-mH en $t = 0$. Supóngase que la corriente induciva en $t = 0-$ es cero.

5.27. Si $i(0) = 10$ A es la corriente inicial de n inductor 1-H, obténgase las corrientes para $t > 0$ para los dos voltajes que aparecen en la figura. Supóngase que se satisface la convención de signo pasivo.



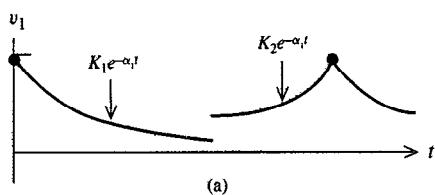
(a)



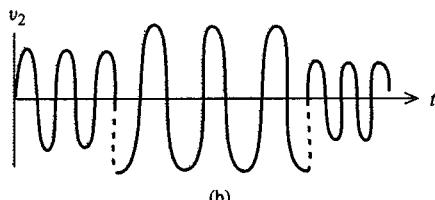
(b)

PROBLEMA P5.27

5.28. ¿Qué tipo de ondas de corriente en los inductores producirán ondas de voltaje exponenciales a tramos como la que se muestra en (a)? ¿Sinusoidales a tramos como en (b)?



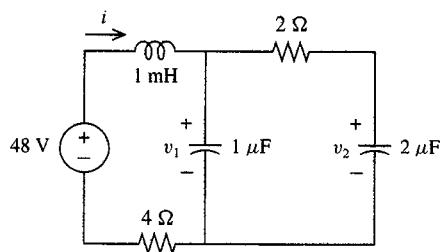
(a)



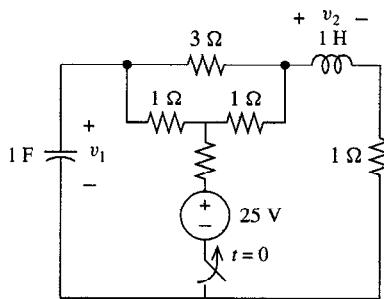
(b)

PROBLEMA P5.28

5.29. Obténganse i , v_1 y v_2 en el estado estable dc.

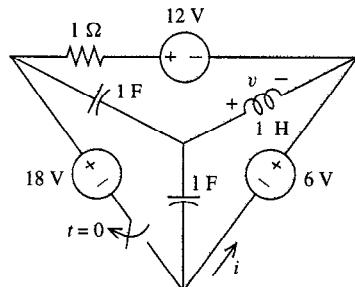


PROBLEMA P5.29



PROBLEMA P5.32

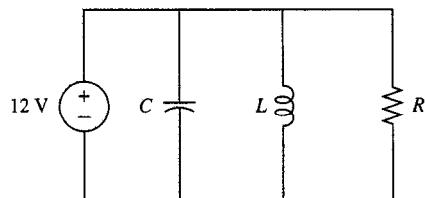
5.30. Este circuito está en estado estable dc en $t = 0-$. Obténganse $v(0-)$, $v(0+)$, $i(0-)$ y $i(0+)$.



PROBLEMA P5.30

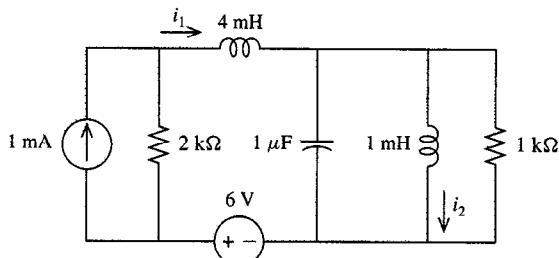
5.33. Obténgase (w_2/w_1) , la proporción de energía almacenada en dos inductores en serie si ambos se inician en $t = 0$ con $i(0) = 0$.

5.34. Demuéstrese que este circuito no tiene un estado estable dc. ¿Por qué?



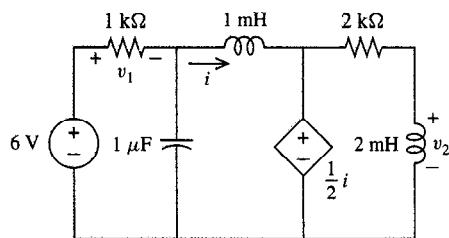
PROBLEMA P5.34

5.31. Obténganse las corrientes de estado estable dc i_1 e i_2 .



PROBLEMA P5.31

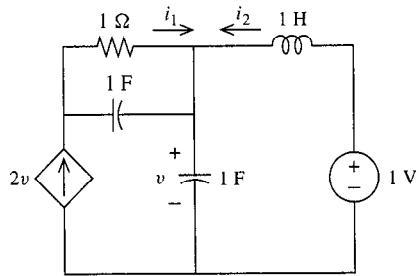
5.35. Repítase el Problema 5.29 para este circuito.



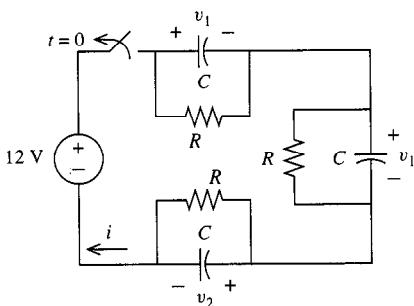
PROBLEMA P5.35

5.32. Si el circuito está en estado estable dc en $t = 0-$, obténganse v_1 y v_2 en $t = 0-$ y $t = 0+$.

5.36. Repítase el Problema 5.31 para este circuito.

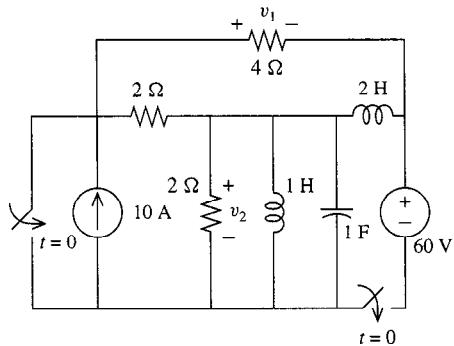


PROBLEMA P5.36



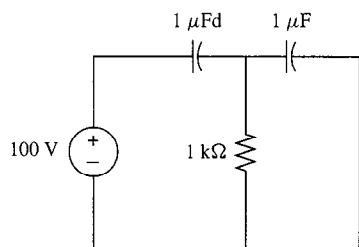
PROBLEMA P5.40

5.37. Repítase el Problema 5.32 para este circuito. Nótese que hay dos interruptores, ambos actúan en el mismo tiempo $t = 0$.



PROBLEMA P5.37

5.38. Obténgase la energía en estado estable dc que está alimentada por la fuente (a) en el circuito que aparece en la figura; (b) después de reemplazar los capacitores ideales por capacitores prácticos, con una resistencia filtrada de $1\text{-M}\Omega$.



PROBLEMA P5.38

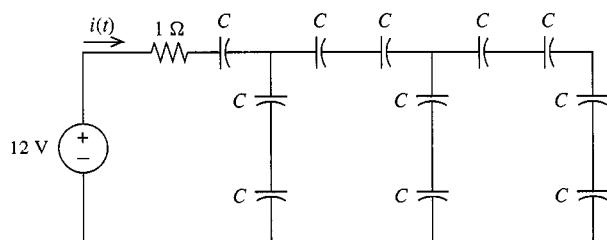
5.39. Repítase el Problema 5.34, utilizando inductores y capacitores prácticos en lugar de los ideales que se muestran. ¿Sigue vigente la misma conclusión?

5.40. Suponer que el circuito está en estado estable dc en $t = 0-$. Obténgase $i(0-)$ e $i(0+)$, en términos de R y C .

Problemas más complejos

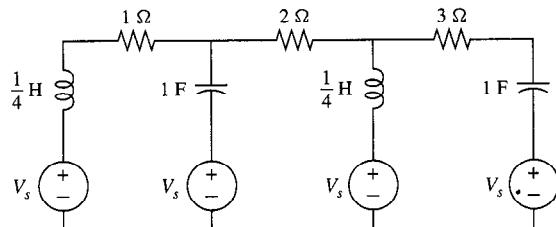
5.41. Dibújese un subcircuito que contenga cinco capacitores y dos terminales marcadas $a-b$, de forma que ninguno de los capacitores esté en serie o en paralelo. ¿Es esto posible con un subcircuito de 4 capacitores? De ser así, dibújelos.

5.42. Obténgase C de forma que $i(t) = 12e^{-4t}$ A, $t > 0$. Suponer que todos los voltajes capacitivos son 0 en $t = 0-$.



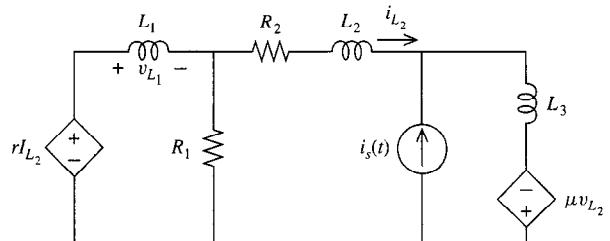
PROBLEMA P5.42

5.43. Obténgase la energía de estado estable dc disipada por cada una de las tres resistencias, y producida por cada una de las cuatro fuentes.



PROBLEMA P5.43

- 5.44.** Escriba (no resuelva) las ecuaciones de malla. Las únicas incógnitas deben ser corrientes de malla. Luego repítase para ecuaciones de nodo.



PROBLEMA P5.44



6

Circuitos de primer orden



Joseph Henry
1797-1878

Borréngase estos dos nombres [Joseph Henry y Michael Faraday] y la civilización del mundo presente sería imposible.

H. S. Carhart

El gran descubrimiento de Michael Faraday de la inducción electromagnética, en 1831, fue reproducido de manera independiente, y aproximadamente al mismo tiempo, por el físico estadounidense Joseph Henry, pero se dio crédito del descubrimiento a Faraday porque sus resultados se publicaron primero. Sin embargo, Henry se hizo famoso como descubridor de la inductancia (llamada auto-inductancia) de una bobina, y como el inventor de poderosos electroimanes capaces de alzar miles de kilogramos de peso. Fue el físico más famoso de Estados Unidos durante el siglo XIX, y también primer secretario del recién formado Instituto Smithsoniano.

Henry nació cerca de Albany, New York, Estados Unidos, y pasó sus primeros años en la pobreza. Su ambición era la de ser actor, hasta que por casualidad, a la edad de 16 años, se topó con un libro de ciencia que lo hizo dedicar su vida a adquirir conocimientos. Se inscribió en la Academia Albany, y al graduarse recibió el puesto de maestro. En 1832 se unió a la facultad del Colegio de New Jersey, actualmente Princeton, y en 1846 se unió al Instituto Smithsoniano. En su honor, la unidad de inductancia recibió el nombre *Henry*, 12 años después de su muerte.

Contenido del capítulo

- **6.1** Circuitos simples *RC* y *RL* sin fuentes
- **6.2** Constantes de tiempo
- **6.3** Circuitos generales de primer orden sin fuentes
- **6.4** Circuitos con fuentes dc
- **6.5** Superposición en circuitos de primer orden
- **6.6** La función escalón unitario
- **6.7** Respuestas en escalón y de pulso
- **6.8** SPICE y la respuesta transitoria
- Resumen
- Problemas



En el capítulo 4 se analizaron circuitos resistivos, y en el capítulo 5 se hizo una introducción de los dos elementos de almacenaje de energía, los capacitores y los inductores. En este capítulo, analizaremos la clase de circuitos que se obtienen al añadir un elemento de almacenaje a los circuitos resistivos. Este circuito se conoce como *circuito de primer orden*, porque, como veremos, el elemento de almacenamiento da como resultado una ecuación diferencial de primer orden que caracteriza al circuito.

Primero examinaremos circuitos simples *RC* y *RL* que no contienen fuentes independientes. Sin estas fuentes, toda respuesta de circuito puede ser únicamente el resultado de potencia inicial capacitiva o inductiva almacenada dentro del circuito, y por consiguiente, *dictada por la naturaleza* del circuito en sí. Por esta razón, la respuesta se conoce como respuesta natural del circuito. La respuesta natural se caracteriza por una sola constante de tiempo, o ritmo de decaimiento exponencial.

Luego de nuestro estudio de circuito sin fuentes, consideraremos la respuesta total de circuitos de primer orden que contienen fuentes. Descubriremos que consiste de dos partes aditivas, una respuesta natural, de forma idéntica a la respuesta en ausencia de fuentes, y una *respuesta forzada*, gobernada por la forma de las funciones forzadas (funciones de fuente de las fuentes independientes). Se considerará en detalle el caso donde todas las fuentes independientes son dc, es decir, constantes. Posteriormente se discutirán las fuentes escalonadas y de pulsos, y sus respuestas. El capítulo concluye con la forma en que puede utilizarse SPICE para determinar respuestas en estos circuitos.

6.1

CIRCUITOS SIMPLES *RC* Y *RL* SIN FUENTES

Comenzaremos nuestro estudio de circuitos de primer orden considerando el circuito simple de trayectoria cerrada que contiene únicamente un capacitor y una resistencia, como se muestra en la figura 6.1. Supóngase que el capacitor está energizado a un voltaje de V_0 volts en un *tiempo inicial*, que consideraremos como $t = 0$. “Tiempo inicial” significa el inicio del periodo que nos interesa, y no el momento de la construcción del circuito (el circuito debe tener una historia que se extiende más allá de nuestro tiempo inicial, puesto que el valor de V_0 volts debió ser establecido mediante un circuito externo antes de este momento).

Puesto que en la red no hay fuentes de corriente o voltaje, la respuesta del circuito (v o i) se debe enteramente a la energía inicialmente almacenada en el capacitor. La energía en el tiempo inicial $t = 0$ es, por (5.4),

$$w_C(0) = \frac{1}{2}CV_0^2 \quad (6.1)$$

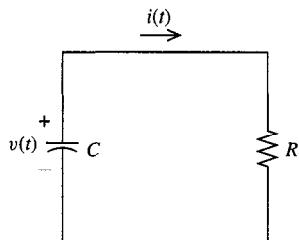


FIGURA 6.1 Circuito RC sin fuente.

Buscamos determinar $v(t)$ para $t > 0$. Aplicando LCK en el nodo superior,

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

o bien,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \quad (6.2)$$

lo que es una *ecuación diferencial de primer orden*. (El *orden* de una ecuación diferencial está definido como el orden de la derivada de mayor orden de la función incógnita que contiene la ecuación.)

Existen varios métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Un método muy directo es reagrupar los términos de la ecuación, para separar las variables v y t . Estas variables pueden ser separadas al reescribir (6.2) como

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt$$

Entonces, obteniendo la integral indefinida en cada miembro de la ecuación, obtenemos

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int dt \quad (6.3)$$

o bien

$$\ln(v) = -\frac{t}{RC} + k$$

donde k es la constante de integración. Aplicando la función exponencial a ambos lados, obtenemos

$$v = Ke^{-(t/RC)} \quad (6.4)$$

donde e es la base de los logaritmos naturales, $e = 2.71828\dots$, y $K = e^{+k}$.

Para que esta solución sea válida en el intervalo de interés $t > 0$, la continuidad requiere que $v(0)$ coincida con la condición inicial especificada $v(0) = V_0$. De este modo, en tanto que $v(t)$ en (6.4) satisface la ecuación diferencial para cualquier K , sólo un valor único de K en esta solución satisfará tanto la ecuación diferencial como la condición inicial. Esto se obtiene forzando $v(0)$ en (6.4) al valor requerido de V_0 :

$$v(0) = Ke^0 = K = V_0$$

donde

$$v(t) = V_0e^{-(t/RC)} \quad (6.5)$$

Nótese que todas las variables de circuitos se obtienen inmediatamente a partir de (6.5), aunque por el momento nos concentraremos únicamente en el capacitor $v(t)$.

En la figura 6.2 aparece una gráfica de la respuesta del circuito $v(t)$. El voltaje se inicia en V_0 , tal como se pidió en nuestra condición, y decréce exponencialmente a cero respecto al tiempo. El ritmo al que decréce a cero está dado por el producto RC del circuito. Puesto que esta respuesta está gobernada por los elementos del circuito en sí, y no por alguna fuente independiente que “fuerza” un comportamiento distinto durante $t \geq 0$, esta

respuesta se conoce como *respuesta natural* del circuito. La respuesta natural es equivalente a la respuesta en ausencia de fuentes independientes.

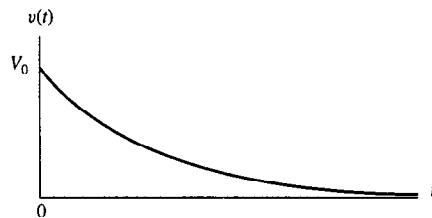


FIGURA 6.2 Voltaje $v(t)$ en el circuito de la figura 6.1.

En cualquier tiempo t , la energía almacenada en el capacitor $w_C(t)$ está dada por $\frac{1}{2}Cv^2(t)$. La resistencia no almacena energía; por consiguiente, la energía total almacenada en el circuito en el momento t es, por (6.5),

$$w_C(t) = \frac{1}{2}C [V_0 e^{-(t/RC)}]^2 = \frac{1}{2}CV_0^2 e^{-2t/RC}$$

Comparándolo con la energía almacenada inicial dada por (6.1),

$$w_C(t) = w_C(0)e^{-2t/RC} \quad (6.6)$$

Nótese que la energía almacenada decrece exponencialmente a cero desde su valor inicial $w(0)$. ¿A dónde va esta energía perdida? Sabemos que la potencia disipada por una resistencia es

$$p_R(t) = \frac{v_R^2}{R} = \frac{[V_0 e^{-(t/RC)}]^2}{R}$$

Integrando del tiempo inicial 0 al tiempo t , obtenemos que la energía total disipada por la resistencia del tiempo 0 al t es:

$$\begin{aligned} w_R(t) &= \frac{V_0^2}{R} \int_0^t e^{-2\tau/RC} d\tau \\ &\text{o} \quad w_R(t) = \frac{1}{2}CV_0^2 (1 - e^{-2t/RC}) = w_C(0) (1 - e^{-2t/RC}) \end{aligned}$$

Comparando esta última con (6.6), podemos ver a dónde fue la energía faltante.

$$w_C(0) - w_C(t) = w_R(t)$$

A cada instante de tiempo, el decrecimiento de la potencia almacenada en el capacitor de $t = 0$ es exactamente igual a la energía total disipada por la resistencia hasta ese momento. Conforme el tiempo aumenta, queda menos potencia almacenada en el circuito; y en el límite, conforme t se hace muy grande, toda la energía almacenada inicial $w_C(0)$ se disipa en la resistencia como calor, y no queda ninguna energía almacenada. Conforme esto ocurre, $v(t)$ y todos los demás voltajes y corrientes en el circuito también tienden a cero. Claramente, es la energía interna almacenada en el tiempo inicial la que produce esta respuesta “natural”.

Ejemplo 6.1

Considérese el circuito de la figura 6.1 con $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 1 \text{k}\Omega$, y un inicial de $v(0) = 5\text{V}$ a través del capacitor. Deseamos obtener la corriente $i(t)$ y la potencia máxima disipada por la resistencia.

De (6.5), el capacitivo es

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} = 5e^{-1000t} \text{ V}$$

Luego, puesto que $v(t)$ es también el que pasa a través de la resistencia,

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 0.005e^{-1000t} \text{ A}$$

El poder disipado por la resistencia es

$$p_R(t) = \frac{v^2(t)}{R} = 0.025e^{-2000t} \text{ W}$$

Por consiguiente, la potencia máxima de 25 mW se disipa justo en el momento $t = 0$. Esto es confirmado por la gráfica en la figura 6.2, que demuestra que la mayor reducción de voltaje capacitivo, y por consiguiente la potencia almacenada, ocurre en el tiempo inicial.

Ahora examinaremos el circuito simple RL que aparece en la figura 6.3. Al igual que con el circuito RC anterior, no hay fuentes independientes, y la respuesta será producida por la energía inicial almacenada, que en este caso es proporcional al cuadrado de la corriente inicial $i(0) = I_0$ que pasa a través del inductor. La energía almacenada en el tiempo inicial es, por (5.11),

$$w_L(0) = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Aplicando LVK,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\text{o } \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \quad (6.7)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (6.2) para el circuito RC . Por consiguiente, podremos resolverlo por el mismo método de separación de variables.

Sin embargo, observemos que puesto que la presente ecuación es de la misma forma que (6.2), es de esperar que su solución sea también de la misma forma. Sabemos que la forma de esta solución anterior, dada en (6.5), es una constante por una función exponencial del tiempo. Guiados por esta experiencia, introduzcamos una *solución natural tentativa*

$$i(t) = Ke^{st} \quad (6.8)$$

donde K y s son constantes a determinar. Si la solución natural tentativa realmente resuelve la ecuación diferencial, podemos sustituirla en la ecuación, o bien,

$$\frac{d}{dt}(Ke^{st}) + \frac{R}{L}(Ke^{st}) = 0$$

de donde obtenemos

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)(Ke^{st}) = 0$$

Si nuestra solución natural tentativa funciona, esta ecuación debe ser válida para toda $t \geq 0$. Sin embargo, el factor Ke^{st} no puede ser cero para $t \geq 0$, puesto que eso requeriría que $K = 0$; por consiguiente $i(t) = 0$ para toda $t \geq 0$, lo que contradice el valor inicial $i(0) = I_0$. Concluimos que si la solución natural tentativa es válida, esto se debe a

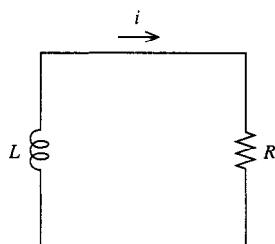


FIGURA 6.3 Circuito RL sin fuente.

que el otro factor es cero:

$$s + \frac{R}{L} = 0 \quad (6.9)$$

Esto se conoce como *ecuación característica* para esta ecuación diferencial, y su solución s especifica el exponente en la solución de la ecuación diferencial, que en este caso es

$$s = -\frac{R}{L}$$

Concluimos que una solución natural válida debe ser de la forma más específica

$$i(t) = Ke^{-(\frac{R}{L})t}$$

Toda $i(t)$ de esta forma satisface la ecuación diferencial (6.7). La otra prueba que debe pasar esta solución es que satisfaga la condición inicial dada $i(0) = I_0$. Aplicando esta condición,

$$i(0) = I_0 = Ke^0 = K$$

La única solución natural tentativa que satisface tanto la condición inicial como la ecuación diferencial, es aquella con constantes específicas s y K , o bien,

$$i(t) = I_0 e^{-(\frac{R}{L})t} \quad (6.10)$$

lo que es la solución deseada. Podemos comprobar esta solución sustituyendo la $i(t)$ dada en (6.10) en la ecuación diferencial original que utilizamos para resolver (6.7), y confirmando que coincide con la condición inicial requerida. La solución satisface estas pruebas.

Revisemos nuestro razonamiento. Supusimos una forma exponencial para solucionar la ecuación, y luego obtuvimos valores para sus parámetros s y K que hicieron que nuestra suposición pudiera demostrarse como correcta. Es indudable que el resultado es la solución deseada, puesto que resuelve la ecuación diferencial y tiene el valor inicial correcto, y lo único que pedimos de una solución es que cumpliera estas dos condiciones.

Ejemplo 6.2

Para demostrar el método de ecuaciones características en el caso de un tiempo inicial distinto de cero, consideremos el circuito de la figura 6.3 con $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, y corriente inicial $i(t_0) = 3 \text{ A}$ al momento $t_0 = 10 \text{ s}$. Por (6.7) obtenemos

$$\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

La ecuación característica es $s + 2 = 0$ o $s = -2$. Por consiguiente, la solución natural es

$$i(t) = Ke^{-2t}$$

y evaluando en $t_0 = 10$ con el fin de obtener las condiciones iniciales,

$$i(t_0) = 3 = Ke^{-2(10)}$$

con lo que se obtiene $K = 3e^{+20}$. Por tanto, la corriente deseada es

$$i(t) = 3e^{20}e^{-2t} \text{ A}$$

$$\text{o} \quad i(t) = 3e^{-2(t-10)} \text{ A}$$

En la figura 6.4 se muestra una gráfica de esta corriente.

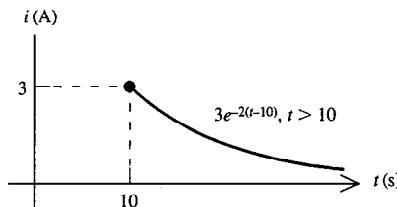


FIGURA 6.4 $i(t)$ en el ejemplo 6.2 para $t \geq 10$.

Examinando (6.5) y (6.10), notamos que el voltaje capacitivo y la corriente inductiva en estos circuitos de una sola trayectoria cerrada y sin fuentes, son ambas funciones exponenciales decrecientes. Puesto que la derivada de una exponencial es también una función exponencial, la corriente que pasa por el capacitor $i = C(\frac{dv}{dt})$ y el que pasa a través del inductor $v = L(\frac{di}{dt})$ en estos circuitos son también funciones exponenciales decrecientes con los mismos exponentes. El significado de las constantes $1/RC$ y R/L en estas funciones exponenciales será examinado en la siguiente sección.

EJERCICIOS

- 6.1.1.** En la figura 6.1, sean $t_0 = 0$, $V_0 = 10 \text{ V}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$. Obténgase v e i en $t = 1 \text{ ms}$, $t = 2 \text{ ms}$ y $t = 5 \text{ ms}$.

Respuesta 3.68 V, 3.68 mA; 1.35 V, 1.35 mA; 0.067 V, 0.067 mA.

- 6.1.2.** Si $v(0) = +10 \text{ V}$, ¿en qué tiempo $v(t)$ será igual a +1 V?

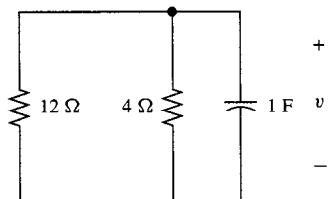
Respuesta 6.9 s

- 6.1.3.** Si $w(t)$ es la potencia almacenada en el capacitor del ejercicio 6.1.2, obténgase una fórmula para $w(t)$, $t > 0$. ¿En qué momento queda la mitad de la potencia almacenada original?

Respuesta $50e^{-2t/3} \text{ J}$; 1.04 s

- 6.1.4.** En la figura 6.3, $R = 1\text{k}\Omega$. Si el voltaje a través del inductor, definido para satisfacer la convención de signo pasivo junto con i , es $v_L(t) = 10e^{-200t}$ para $t > 0 \text{ s}$, obténgase L y la corriente inicial $i(0)$.

Respuesta 5H; 10 mA



EJERCICIO 6.1.2

6.2

CONSTANTES DE TIEMPO

En las redes que contienen elementos de almacenamiento de energía, es muy útil caracterizar con un solo número el ritmo en que la respuesta natural decae a cero. La cantidad llamada constante del tiempo del circuito realiza esta función.

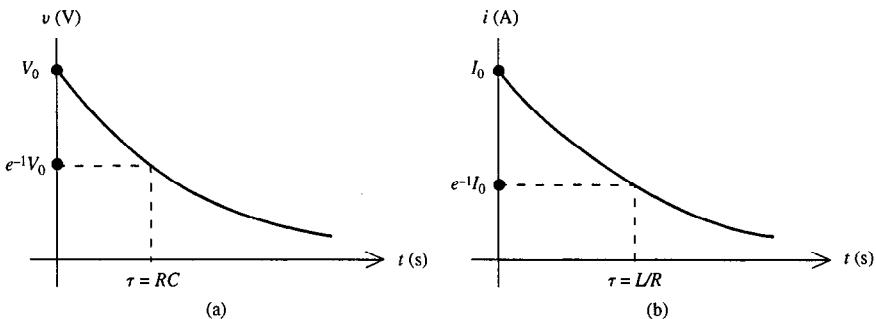


FIGURA 6.5 (a) Respuesta de circuito RC ; (b) respuesta de circuito RL .

Considérese la gráfica que aparece en la figura 6.5(a), que ilustra una respuesta natural (el voltaje capacativo) para el circuito simple RC que se discutió en la sección anterior. El tiempo requerido para que la respuesta natural decaiga por un factor de $1/e$ se define como la *constante del tiempo* del circuito, que designaremos como τ . Para el circuito RC dado, la respuesta natural es

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad (6.11)$$

Por definición de la constante de tiempo τ , necesitamos que τ satisfaga

$$v(t + \tau)/v(t) = 1/e$$

o

$$v(t + \tau) = e^{-1} v(t)$$

Reemplazado por el voltaje v , esta ecuación se convierte en

$$V_0 e^{-(t + \tau)/RC} = e^{-1} V_0 e^{-t/RC}$$

o, luego de cancelar factores comunes,

$$\tau = RC \quad (6.12)$$

Las unidades de τ están en $\Omega\text{-F} = (\text{V/A})(\text{C/V}) = (\text{C/A}) = \text{s}$. En términos de la constante de tiempo τ , la respuesta natural es

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad (6.13)$$

A partir de la figura 6.5(b) se puede calcular de forma similar la constante de tiempo para el circuito RL , con

$$i(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$$

En este caso tenemos

$$I_0 e^{-(R/L)(t + \tau)} = e^{-1} I_0 e^{-(R/L)t}$$

que, después de cancelar términos iguales, identifica a la constante de tiempo τ como

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (6.14)$$

y podemos describir la respuesta en términos de τ como

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad (6.15)$$

Nuevamente, las unidades de la constante de tiempo τ están dadas en $(H/\Omega) = [V/(A/s)]/[V/A] = s$.

Tanto en los circuitos RC como los RL , a cada τ segundos la respuesta natural se reduce en un factor de $1/e$ en relación a su valor al inicio del primer intervalo de la constante de tiempo. La respuesta al final de la primera constante de tiempo se reduce a $e^{-1} = 0.368$ de su valor inicial. Al final de dos constantes de tiempo, es igual a $e^{-2} = 0.135$ de su valor inicial, y al final de cinco constantes de tiempo se convierte en $e^{-5} = 0.0067$ de su valor inicial. Por consiguiente, después de cuatro o cinco constantes de tiempo, la respuesta es esencialmente cero.

En cuanto al circuito RC de la figura 6.1, podemos ver en la figura 6.2 que el voltaje capacitivo $v(t)$ decréce exponencialmente a cero con la constante de tiempo $\tau = RC$. Terminemos nuestros análisis de este circuito considerando otras variables de circuito. Por LVK, el voltaje resistivo es exactamente igual a $v(t)$. Puede obtenerse la corriente de malla dividiendo el voltaje resistivo entre R , y por consiguiente es también un decaimiento exponencial con $\tau = RC$. *Todas las corrientes y voltajes son decaimientos exponenciales con la misma constante de tiempo τ* . Al examinar el circuito RL de la figura 6.3, notamos que en este caso también es verdad este mismo postulado. El comportamiento de todas las respuestas de los circuitos es fijada por una sola constante de tiempo, $\tau = RC$ en el circuito RC y $\tau = L/R$ en el circuito RL . Es por eso que designamos a τ como constante de tiempo del *circuito*, en vez de ser la constante de tiempo de cualquier corriente o voltaje específicos dentro del circuito.

En la figura 6.6 se muestra una interesante propiedad de las funciones exponenciales. Una tangente a la curva en $t = 0$ interseca el eje del tiempo en $t = \tau$. Esto puede verificarse fácilmente considerando la ecuación de una recta tangente a la curva en $t = 0$, dada por

$$v_1(t) = mt + V_0$$

donde m es la pendiente de la recta. Diferenciando v , obtenemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-V_0}{\tau} e^{-(t/\tau)}$$

Por consiguiente, la pendiente de v en $t = 0$ es $-V_0/\tau$. Entonces, con $m = -V_0/\tau$,

$$v_1(t) = \frac{-V_0}{\tau} t + V_0$$

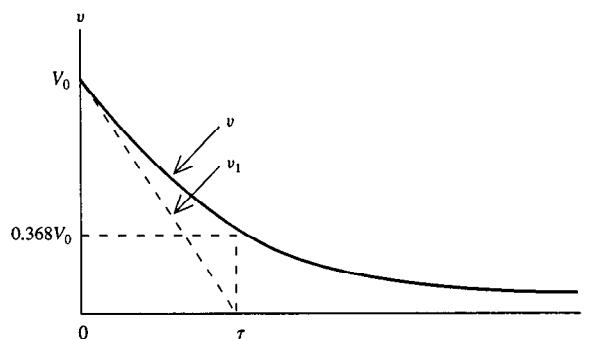


FIGURA 6.6

y

$$v_1(\tau) = 0$$

como se aseguró en primer lugar. De manera similar, una tangente a la curva en el tiempo t_1 interseca el eje de tiempo en $t_1 + \tau$ (ver problema 6.9). Este hecho es muy útil para dibujar la función exponencial.

De la figura 6.6, podemos ver que una definición alternativa de la constante de tiempo es el tiempo necesario para que la respuesta natural se haga cero, si ésta disminuye a un ritmo constante igual al ritmo inicial de decaimiento. Desde luego, no decrece a un ritmo constante, puesto que en todas partes su ritmo de decaimiento es proporcional a su valor, que tiende constantemente a cero.

Conocer la constante de tiempo nos permite predecir la forma general de la respuesta, (6.13) o (6.15), pero para completar la solución debemos conocer el valor inicial V_0 o I_0 . Con frecuencia, necesitamos interruptores para determinar esto en un circuito. Puesto que las corrientes inductivas y los voltajes capacitivos son continuos (como se discutió en el capítulo 5), los valores deseados, justo después de la acción del interruptor en $0+$, pueden determinarse a partir del estado del circuito justo antes, en $t = 0-$.

Ejemplo 6.3

Para ilustrar el procedimiento, obtengamos el voltaje del capacitor $v(t)$ en la figura 6.7(a), suponiendo que el circuito estaba en estado estable dc justo antes de abrir el interruptor. En el estado estable dc el capacitor puede ser sustituido por (es equivalente a) un circuito abierto. La resistencia a la izquierda de este circuito abierto es

$$R_{\text{eq}} = 8 + \frac{(3)(6)}{3+6} = 10 \Omega$$

y, por división de voltajes,

$$v(0-) = \frac{100 R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}} + 15} = 40 \text{ V}$$

El circuito se abre en $t = 0$. Por continuidad del voltaje capacitivo, $v(0+) = v(0-) = 40 \text{ V}$. Para $t > 0$, tenemos un circuito sin fuente, como se muestra en la figura 6.7(b), donde las resistencias a la izquierda del capacitor fueron sustituidas por su equivalente $R_{\text{eq}} = 10 \Omega$. La constante de tiempo para esta red RC es simplemente el producto de la capacitancia y la resistencia equivalente, dado por

$$\tau = R_{\text{eq}}C = (10)(1) = 10 \text{ s}$$

Por consiguiente, por (6.13), el voltaje es

$$v(t) = 40e^{-\frac{t}{10}} \text{ V}$$

Cada 10 s, el voltaje disminuirá por un factor de $1/e$, o 0.368. Después de 50 s, el voltaje declina a $40e^{-5} = 0.27 \text{ V}$, lo que ilustra que después de 5 constantes de tiempo, la respuesta se reduce en más de dos órdenes de magnitud. Por consiguiente, después de 10 constantes de tiempo, hay una reducción de más de 4 órdenes de magnitud, después de 15 constantes de tiempo hay una reducción de más de 6 órdenes de magnitud, y así sucesivamente.

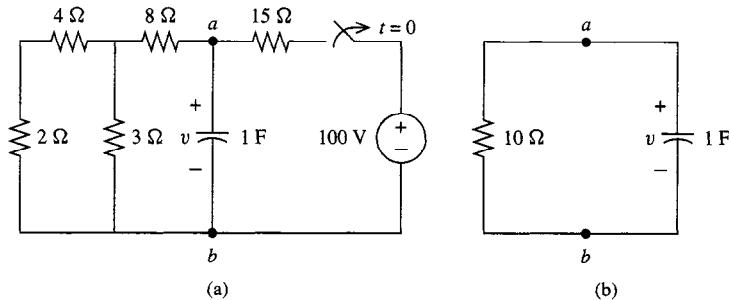


FIGURA 6.7 (a) Circuito para el ejemplo 6.3; (b) equivalente para $t \geq 0$.

EJERCICIOS

- 6.2.1.** En un circuito RC , determíñese (a) τ para $R = 2\text{k}\Omega$ y $C = 10\mu\text{F}$, (b) C para $R = 10\text{k}\Omega$ y $t = 20\mu\text{s}$, y (c) R para $v(t)$ en un capacitor $2\mu\text{F}$ para que se reduzca a la mitad cada 20 ms .

Respuesta (a) 20 ms ; (b) 2 nF ; (c) $14.43\text{ k}\Omega$

- 6.2.2.** Un circuito RC consiste en una resistencia $20\text{-k}\Omega$ y un capacitor $0.05\text{-}\mu\text{F}$. Se desea disminuir la corriente en la red en un factor de 5 sin cambiar el voltaje del capacitor. Obténganse los valores necesarios de R y C .

Respuesta $100\text{ k}\Omega, 0.01\text{ }\mu\text{F}$

- 6.2.3.** En un circuito RL de una sola trayectoria cerrada, se determina que la corriente es de 2 mA en $t = 10\text{ ms}$ y $100\text{ }\mu\text{A}$ en $t = 46\text{ ms}$. Obténgase la constante de tiempo τ y la corriente inicial en el momento $t = 0$.

Respuesta $12\text{ ms}, 4.6\text{ mA}$

6.3

CIRCUITOS GENERALES DE PRIMER ORDEN SIN FUENTES

En la sección anterior, al examinar los circuitos simples RC y RL de primer orden, vimos que tenían respuestas decrecientes gobernadas por una sola constante de tiempo. Generalizando, es de esperarse el mismo comportamiento de cualquier circuito que sea equivalente, sea simple (que pueda resolverse mediante una sola ecuación) o no.

Ejemplo 6.4

Deseamos determinar la constante de tiempo del circuito de la figura 6.8(a). Primero debemos obtener un circuito equivalente de la forma simple 6.8(b).

$$C_{\text{eq}} = \frac{(4)(12)}{(4 + 12)} = 3\text{ F}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{(20)(5)}{(20 + 5)} = 4\text{ }\Omega$$

La constante de tiempo τ en la figura 6.8(b) es

$$\tau = R_{\text{eq}}C_{\text{eq}} = (4)(3) = 12\text{ s}$$

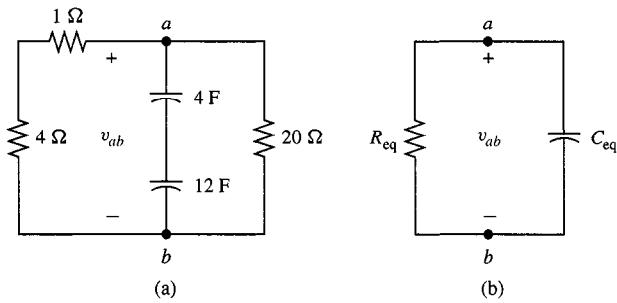


FIGURA 6.8 (a) Circuito RC ; (b) circuito equivalente.

Puesto que las figuras 6.8(a) y (b) representan circuitos equivalentes, el voltaje $v_{ab}(t)$ debe ser el mismo. Este tiene una constante de tiempo 12 s en (b), de forma que debe ser el mismo en (a). Ciertamente, todas las corrientes y voltajes en las figuras 6.8(a) y (b) decaen exponencialmente a cero con una $\tau = 12\text{ s}$.

Con base en este ejemplo podemos advertir que los circuitos RC que contienen un solo equivalente R_{eq} y C_{eq} pueden ser analizados mediante reducción a estos equivalentes, con $\tau = R_{eq}C_{eq}$. Claramente, esto mismo se aplica a circuitos RL con inductancias y resistencias equivalentes, con $\tau = L_{eq}/R_{eq}$. Sin embargo, nótese que no siempre es posible utilizar reglas de circuitos en serie y en paralelo para obtener estos equivalentes. El siguiente ejemplo muestra un enfoque general en este caso.

Ejemplo 6.5

Deseamos obtener la constante de tiempo del circuito de la figura 6.9(a). El circuito a la derecha del inductor es puramente resistivo, y buscamos su resistencia equivalente R_{eq} . Puesto que ninguna de las resistencias está en serie o en paralelo, no podemos utilizar equivalentes en serie-paralelo. Para obtener R_{eq} , forzaremos a i para que fluya al circuito, como se muestra en la figura 6.9(b), y determinaremos el resultante v . Puesto que la ley de terminales para el circuito es $v = R_{eq}i$, la proporción entre v e i es la R_{eq} deseada.

La figura 6.9(b) es un circuito de tres mallas con una fuente de corriente, de forma que se requieren dos ecuaciones de malla. Las ecuaciones de malla son

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$$

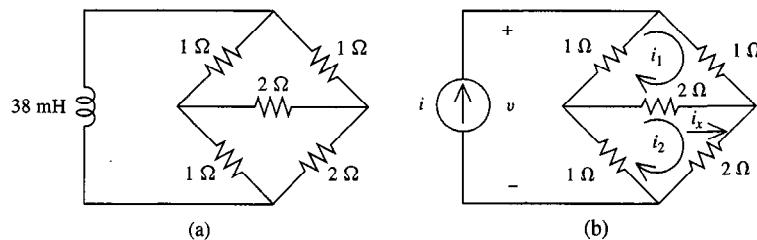


FIGURA 6.9 (a) Circuito RL ; (b) Circuito a determinar R_{eq} .

Invirtiendo la matriz, el determinante es $(4)(5) - (-2)(-2) = 16$, y

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 7i \\ 6i \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Aplicando LVK alrededor de la trayectoria cerrada exterior,

$$\begin{aligned} v &= v_{ab} = 1i_1 + 2i_2 \\ &= \frac{1}{16} (7i + 12i) \\ &= \frac{19}{16} i \end{aligned}$$

Por consiguiente, $R_{eq} = \frac{19}{16} \Omega$ y

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0.038}{19/16} = 0.032 \text{ s} = 32 \text{ ms}$$

Los circuitos con op amps también presentan un comportamiento de primer orden cuando contienen un elemento de almacenaje, o cuando todos los elementos de almacenaje se combinan en un solo equivalente. Pueden analizarse eficientemente utilizando análisis nodal y los principios de circuito abierto y cerrado virtuales que se discutieron en la sección 4.7.

Ejemplo 6.6

Supóngase que en $t = 0$, la salida en la figura 6.10 es $v_2(0) = V_0$ y que $v_g(t) = 0$ para $t > 0$. Deseamos obtener $v_2(t)$ para $t > 0$. Por el principio de circuito cerrado virtual, el nodo 1 está a potencial de tierra. Sumando corrientes en este nodo,

$$\frac{v_g - 0}{R_A} + \frac{v_2 - 0}{R_F} + C \frac{d(v_2 - 0)}{dt} = 0$$

o, con $v_g = 0$ para $t > 0$,

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{R_F C} v_2 = 0$$

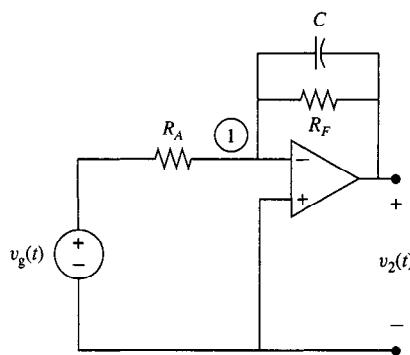


FIGURA 6.10 Circuito para el ejemplo 6.6.

Esta es nuestra ecuación diferencial de primer orden convencional y no forzada, con la solución

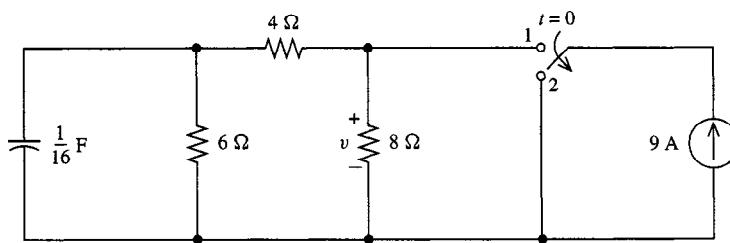
$$v_2(t) = v_2(0)e^{-\frac{t}{R_F C}} = V_0 e^{-\frac{t}{R_F C}}$$

En resumen, en un circuito sin fuentes que contiene un solo elemento de almacenamiento, o el equivalente de un solo elemento de almacenamiento, sucede que todas sus respuestas decaen a cero con una constante de tiempo $\tau = RC$ en el caso RC , o $\tau = L/R$ en el caso RL . Sin embargo, nótese que los circuitos con dos o más elementos de almacenaje no siempre tienen un solo elemento de almacenaje equivalente, y por consiguiente no podrá descomponerse resolviendo una sola ecuación diferencial de primer orden. Éstos no son circuitos de primer orden, y su respuesta no puede caracterizarse por una sola constante de tiempo. Entre los ejemplos de este caso, se incluye cualquier circuito con capacitores e inductores y el circuito RC del problema 6.16. Estos circuitos serán examinados en el capítulo 7.

EJERCICIOS

- 6.3.1.** El circuito está en el estado estable en $t = 0-$, y el interruptor se mueve de la posición 1 a la posición 2 en $t = 0$. Obténgase la respuesta $v(t)$ para $t > 0$. ¿Cuál es la constante de tiempo τ ?

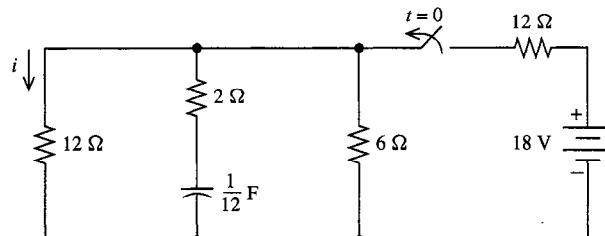
Respuesta $16e^{-4t}$ V; $\frac{1}{4}$ s



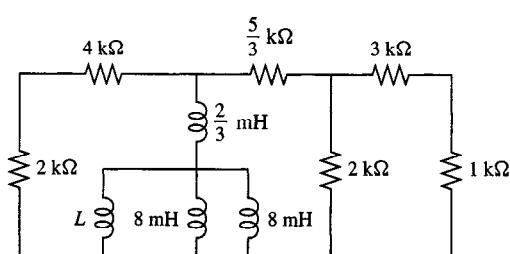
EJERCICIO 6.3.1

- 6.3.2.** Obténgase i para $t > 0$ si el circuito está en estado estable $t = 0-$.

Respuesta $\frac{1}{4} e^{-2t}$ A



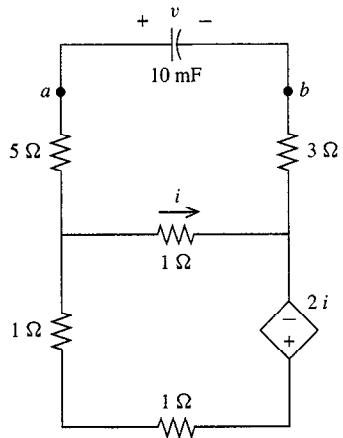
EJERCICIO 6.3.2



EJERCICIO 6.3.3

- 6.3.3.** ¿Para qué valor de L la constante de tiempo τ será $1 \mu s$?

Respuesta 2 mH



- 6.3.4. (a) Obténgase la resistencia equivalente de circuito bajo $a-b$. (b) Utilícese el resultado para obtener $v(t)$ para $t > -1$ si $v(-1) = 20V$.

Respuesta 10 Ω; $20e^{-10(t+1)}$

EJERCICIO 6.3.4

6.4 CIRCUITOS CON FUENTES DC

En las secciones anteriores consideramos circuitos sin fuentes, cuyas respuestas son el resultado de energías iniciales almacenadas en capacitores e inductores. Todas las fuentes independientes de corriente o voltaje fueron eliminadas o apagadas en los circuitos antes de obtener las respuestas naturales. Se demostró que estas respuestas, al surgir en circuitos que contienen un solo capacitor o inductor equivalente, decaen exponencialmente a cero con el tiempo.

En esta sección examinaremos circuitos que, además de tener potencias almacenadas iniciales, están impulsados por fuentes independientes constantes (dc) de voltaje o corriente. Para estos circuitos, obtenemos soluciones que son resultado de las potencias almacenadas iniciales, y de las potencias abastecidas continuamente por las fuentes. Obtendremos que las respuestas, en este caso, constan de dos partes, una de las cuales es, al igual que las fuentes en sí, una constante.

Iniciemos la discusión considerando el circuito de la figura 6.11. La red está formada por la conexión en paralelo de una fuente de corriente constante y una resistencia que es activada en el momento $t = 0$ a través de un capacitor con un voltaje $v(-0) = V_0$ V. Para $t > 0$, el interruptor es cerrado, y la ecuación nodal en el nodo superior está dada por

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = I_0$$

o bien

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{I_0}{C} \quad (6.17)$$

Esta ecuación diferencial de primer orden es idéntica al caso RC sin fuente (6.2), excepto por el hecho de que se sumó un *término forzado* en el lado derecho. Un término forzado en una ecuación diferencial es un término $f(t)$ independiente de las funciones de tiempo que se desconocen.

Al igual que en el caso no forzado, esta ecuación diferencial de primer orden puede ser resuelta por separación de variables o por el método de solución tentativa. Elegiremos este último, puesto que este método se extiende a circuitos de orden mayor donde no puede utilizarse la separación de variables.

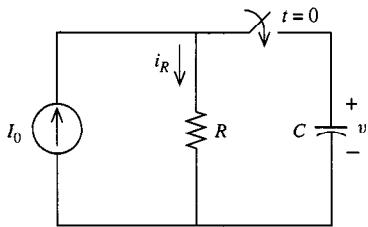


FIGURA 6.11 RC con fuente dc.

Examinando (6.17), vemos que el lado izquierdo es una combinación lineal de v y su derivada, en tanto que el lado derecho es una constante. Por consiguiente $v(t)$ debe ser una función del tiempo con la propiedad de que una combinación lineal de v y su derivada es igual a una constante para toda $t > 0$. ¿Qué clase de funciones tienen esta propiedad? Ciertamente, si $v(t)$ es igual a una constante, entonces pertenece a esta clase de funciones, porque la derivada de una constante es cero; de forma que toda combinación lineal de una constante y su derivada es, tal y como se pidió, también una constante.

Guiados por esta observación, utilicemos una *solución forzada tentativa* de la forma

$$v_f(t) = A$$

donde A es una constante que debe determinarse. Del mismo modo en que utilizamos la solución natural tentativa utilizada anteriormente, la sustituiremos en la ecuación diferencial que debe satisfacer para probar su validez. Sustituyendo v por $v_f(t) = A$ en (6.17),

$$\frac{d}{dt}A + \frac{A}{RC} = \frac{I_0}{C}$$

o bien

$$A = I_0R$$

De este modo, hemos obtenido una función de tiempo (constante) $v_f(t)$ que satisface la ecuación diferencial:

$$v_f(t) = I_0R$$

Toda función de tiempo que satisfaga la ecuación diferencial forzada se conoce como *solución forzada*. Hemos obtenido una solución forzada para (6.17).

Sin embargo, hay una segunda condición que debe satisfacer toda solución propuesta a nuestro problema original. No es suficiente que satisfaga la ecuación diferencial, como se demostró en el caso de $v_f(t)$. Una solución válida también debe satisfacer la condición inicial $v(0-) = v(0+) = V_0$ V (utilizamos la continuidad de voltajes capacitivos para proyectar V_0 a través del tiempo de activación del interruptor $t = 0$). Evaluando nuestra solución forzada $v_f(t)$ en $t = 0+$, obtenemos $v_f(0+) = I_0R$. De este modo, la solución forzada concuerda con la condición inicial si y sólo si $V_0 = I_0R$. Examinando la figura 6.11, V_0 e I_0 son claramente el resultado de casos separados; V_0 es una condición inicial establecida antes de $t = 0$, e I_0 es una función de fuente independiente. Por consiguiente, en tanto que $V_0 = I_0R$ puede satisfacerse para elecciones particulares de condiciones iniciales y funciones de fuente, no hay razón para que esta ecuación sea válida en general.

Por consiguiente, si nuestra solución forzada $v_f(t)$ satisface las condiciones iniciales, hemos obtenido la solución; es $v(t) = v_f(t)$. En la mayoría de los casos, $v_f(t)$ satisfará las condiciones iniciales. Aparentemente estamos atorados, porque no hay un parámetro libre adicional en esta solución forzada $v_f(t)$, que podamos utilizar para satisfacer la condición inicial.

Hagamos que $v_n(t)$ denote cualquier solución a la versión *no forzada* de nuestra ecuación diferencial; es decir, $v_n(t)$ satisface

$$\frac{dv_n}{dt} + \left(\frac{1}{RC} \right) v_n = 0 \quad (6.18)$$

La versión no forzada se forma al fijar el término forzado en cero. De trabajos anteriores, sabemos que la solución natural tentativa para v_n es la forma

$$v_n = Ke^{st}$$

con una ecuación característica

$$s + \frac{1}{RC} = 0$$

o $s = -1/RC$, de modo que

$$v_n = Ke^{-(1/RC)t} \quad (6.19)$$

Hasta este momento, hemos descubierto una v_f que resuelve la ecuación diferencial forzada (6.17), y una v_n que, para todo valor de su parámetro libre K , satisface la ecuación diferencial no forzada asociada.

Considérese finalmente una *suma de soluciones forzadas naturales*, $v = v_n + v_f$. Sustituyendo esto por la suma de v en el lado izquierdo de (6.17),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_n + v_f) + \frac{1}{RC}(v_n + v_f) &= \left[\frac{dv_n}{dt} + \frac{1}{RC}v_n \right] + \left[\frac{dv_f}{dt} + \frac{1}{RC}v_f \right] \\ &= [0] + \left[\frac{I_0}{C} \right] \end{aligned}$$

donde el primer término a la derecha es igual a cero puesto que v_n satisface la ecuación diferencial no forzada, y la segunda es igual a $\frac{I_0}{C}$ puesto que a v_f satisface la versión forzada. De este modo, vemos que $v = v_n + v_f$ satisface la ecuación *diferencial forzada sin importar el valor del parámetro libre K en la solución natural v_n* . Volviendo a la condición de que se satisfaga no sólo la ecuación diferencial forzada sino también la ecuación inicial,

$$v(t) = v_n(t) + v_f(t) = Ke^{\frac{-t}{RC}} + RI_0 \quad (6.20)$$

Evaluando en $t = 0$, se satisface la condición inicial si

$$v(0+) = V_0 = K(1) + RI_0$$

la cual requiere que

$$K = V_0 - RI_0$$

Insertando esto en (6.20), hemos obtenido la solución deseada a la ecuación diferencial forzada (6.17) con una condición inicial

$$v(t) = (V_0 - RI_0)e^{-(1/RC)t} + RI_0$$

Esta solución puede comprobarse al sustituirla en (6.17), y notando que al evaluarla en $t = 0$ se obtiene el valor inicial especificado V_0 .

Resumiendo este método, los siguientes pasos resuelven la ecuación diferencial forzada con condiciones iniciales dadas:

1. Utilizando una solución forzada tentativa igual a la constante desconocida A , y sustituirla en la ecuación diferencial forzada para obtener la solución forzada.
2. Utilizando una solución natural tentativa igual a Ke^{st} , sustituirla en la ecuación diferencial no forzada, y resolviendo la ecuación característica para s .
3. La solución total es la suma de las soluciones natural y forzada. Evalúese la suma en el tiempo inicial e igualese al valor inicial requerido para obtener K .

Ejemplo 6.7

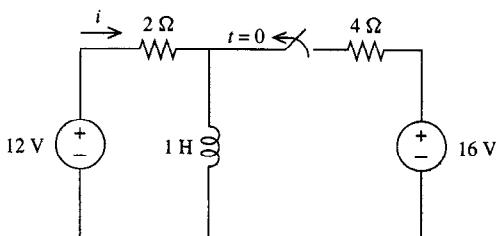


FIGURA 6.12 Circuito para el ejemplo 6.7.

Deseamos obtener $i(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 6.12. Antes de $t = 0$, el circuito es el que aparece en la figura 6.13(a). Suponiendo que este circuito tuvo suficiente tiempo para llegar al estado estable dc antes de $t = 0$, el inductor actúa como un circuito cerrado y

$$i_L = i + i_1 = \frac{12}{2} + \frac{16}{4} = 10 \text{ A}$$

en $t = 0-$. En $t = 0$ se abre el circuito, y para $t > 0$ el circuito se vuelve a dibujar como en la figura 6.13(b). En este circuito, aplicando LVK

$$\frac{di}{dt} + 2i = 12 \quad (6.21)$$

y $i(0+) = i(0-) = 10 \text{ A}$ por continuidad de corrientes inductivas. La solución forzada tentativa es $i_f = A$, y al insertar esto en la ecuación diferencial forzada (6.21)

$$0 + 2A = 12$$

o $A = 6$. La versión no forzada de esta ecuación es

$$\frac{di_n}{dt} + 2i_n = 0$$

con una ecuación característica

$$s + 2 = 0$$

o $s = -2$. Sumando estos resultados,

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) = Ke^{-2t} + 6$$

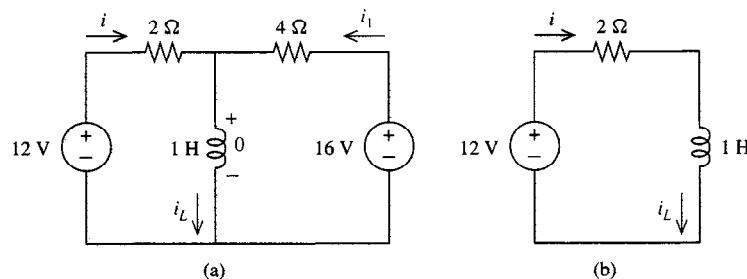


FIGURA 6.13 (a) Circuito antes de $t = 0$; (b) circuito después de $t = 0$.

e igualando con las condiciones iniciales,

$$i(0+) = 10 = K(1) + 6$$

Concluimos que $K = 4$ y la solución total es

$$i(t) = 4e^{-2t} + 6 \text{ A}$$

Ejemplo 6.8

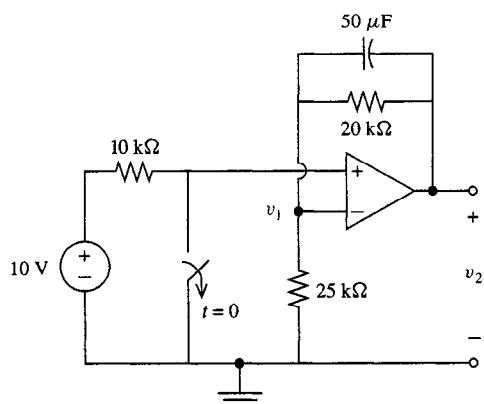


FIGURA 6.14 Circuito para el ejemplo 6.8.

Este ejemplo, que aparece en la figura 6.14, demuestra la aplicación de estas ideas a circuitos con op amps. El circuito está en estado estable dc justo antes de la activación del interruptor en $t = 0$, y deseamos obtener $v_2(t)$ para todos los momentos t . Con la entrada del op amp puesta a tierra para $t < 0$, v_1 y v_2 son cero para $t < 0$. Para $t > 0$, el voltaje en el nodo 1 es 10 V, puesto que el voltaje en la entrada no inversora es 10 V por el principio de circuito abierto virtual, y v_1 es igual a este valor por el principio de circuito cerrado virtual. La ecuación de nodos en el nodo de entrada inversor es, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{25 \times 10^3}\right)(10 - 0) + (50 \times 10^{-6}) \frac{d}{dt}(10 - v_2) + \\ \left(\frac{1}{20 \times 10^3}\right)(10 - v_2) = 0 \\ \text{o} \\ \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 18 \end{aligned} \quad (6.22)$$

La solución forzada tentativa es $v_{2f} = A$, y sustituyéndola en (6.22), $A = 18$. La ecuación característica de la versión no forzada de (6.22) es $s + 1 = 0$, o bien,

$$v_{2n}(t) = Ke^{-t}$$

Luego, la solución total es

$$v_2(t) = v_{2n}(t) + v_{2f}(t) = Ke^{-t} + 18$$

En $t = 0+$, no hay flujo de corriente a través de la resistencia de $10 \text{ k}\Omega$, de forma que el voltaje en la entrada no inversora es 10 V. Puesto que no ocurre una caída de voltaje a través de las terminales de entrada del op amp (por el principio de corto circuito virtual), también $v_1(0+) = 10 \text{ V}$. La continuidad del voltaje capacitivo requiere que

$$v_2(0+) - v_1(0+) = v_2(0-) - v_1(0-) = 0 - 0 = 0$$

Por consiguiente también $v_2(0+) = 10 \text{ V}$, y evaluando la constante K

$$v_2(0+) = K(1) + 18 = 10 \text{ V}$$

o $K = -8$. Por consiguiente

$$v_2(t) = 18 - 8e^{-t} \text{ V}, \quad t \geq 0 \quad (6.23)$$

que, combinada con la observación anterior de que $v_2(t) = 0$ para $t < 0$, completa la solución para todo t .

La presencia del op amp no alteró el hecho de que un elemento de almacenamiento único resultará en una sola ecuación diferencial de primer orden (6.22). Como se recomendó en el capítulo 4, utilizamos análisis nodal con circuitos con op amps, y escribimos nuestra ecuación de nodos en un nodo de entrada del op amp en lugar del nodo de salida.

Ejemplo 6.9

Nuestro ejemplo final, con el circuito que aparece en la figura 6.15, ilustra un circuito general de primer orden que contiene varias fuentes dependientes e independientes. En este circuito, buscamos la corriente $i(t)$ a través del inductor para $t > 0$, donde $i(0-) = 2 \text{ A}$.

Estos problemas pueden ser resueltos utilizando varios métodos. Un método básico sería el de realizar un análisis de malla o nodal en el circuito. Esto resultaría en ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden que, por sustitución, podrían reducirse a una sola ecuación diferencial de primer orden. Esta reducción no siempre es directa, y recomendamos otros métodos para asegurar esa ecuación diferencial de primer orden única. En este ejemplo, utilizaremos la estrategia de simplificación mediante la transformación Thevenin-Norton. En la siguiente sección, se desarrollará otro método basado en la superposición.

Obtendremos la transformada de Thevenin de todo el circuito menos su elemento de almacenamiento. Luego, reemplazando todos los elementos de almacenaje por su equivalente de dos elementos, quedaremos con el análisis de un solo circuito simple de trayectoria cerrada. Para hacer esto, obtendremos el voltaje de circuito abierto v_{oc} y la corriente de corto circuito i_{sc} definida en la figura 6.16 en las terminales ab del inductor. De la figura 6.16(a) se obtiene v_{oc} . Aplicando LVK,

$$1i_1 + 2i_1 + 2(i_1 + 10) = 80$$

o $i_1 = 12$. Luego, alrededor de la trayectoria cerrada izquierda, nuevamente por LVK

$$1(12) + v_{oc} + 3(12) = 80$$

de forma que $v_{oc} = 32 \text{ V}$. Para obtener i_{sc} en la figura 6.16(b), escribimos las dos ecuaciones de análisis de malla requeridas,

$$1i_1 = -3v + 80$$

$$2i_2 + 2(i_2 + 10) = 3v$$

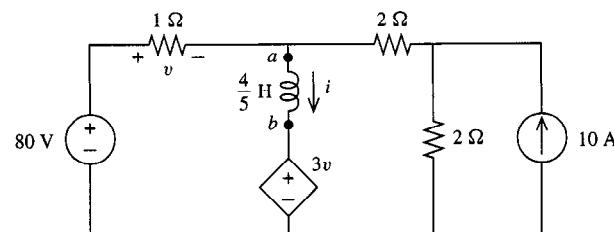


FIGURA 6.15 Circuito para el ejemplo 6.9.

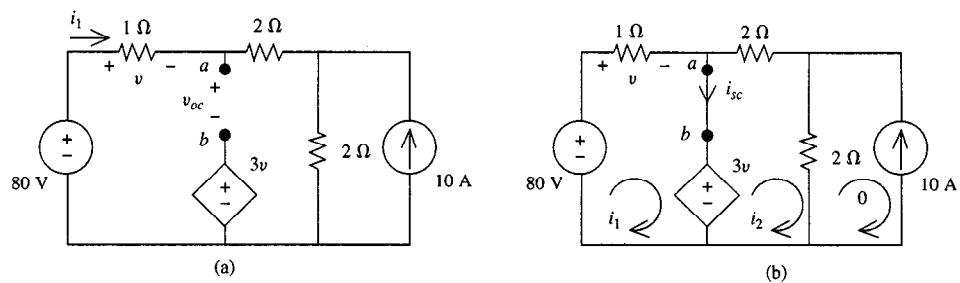


FIGURA 6.16 (a) Circuito para v_{oc} ; (b) circuito para i_{sc} .

Sustituyendo $v = i_1$, por la primera ecuación de malla obtenemos $i_1 = 20$. Utilizando esto en la segunda, obtenemos

$$2i_2 + 2(i_2 + 10) = 3(20) = 60$$

o $i_2 = 10$. Luego

$$i_{sc} = i_1 - i_2 = 20 - 10 = 10 \text{ A}$$

En la figura 6.17 se muestra el equivalente de Thevenin. Hemos reducido el problema a otro problema que nos es más familiar. Por LVK, alrededor de este circuito *RL* simple,

$$\frac{di}{dt} + 4i = 40 \quad (6.24)$$

con la condición inicial $i(0-) = i(0+) = 2 \text{ A}$. Ya hemos resuelto varias veces esta ecuación diferencial de primer orden, y

$$i(t) = Ke^{-4t} + A = 10 - 8e^{-4t} \text{ A} \quad (6.25)$$

donde $A = 10$, que obtuvimos al sustituir $i_f = A$ en (6.24), y K al igualarlo con la condición inicial.

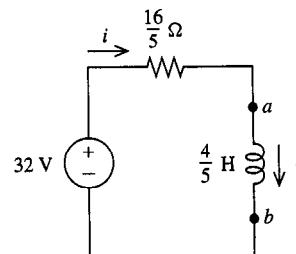


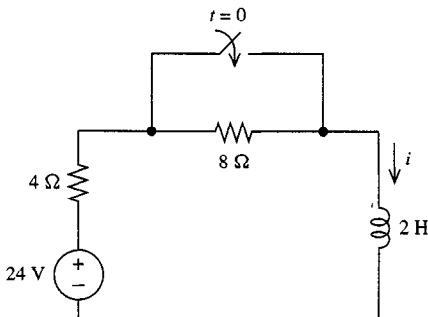
FIGURA 6.17 Circuito equivalente a la figura 6.15.

Las soluciones que hemos obtenido hasta ahora en este capítulo, son con frecuencia designadas en términos más descriptivos. Dos de estos términos que se usan ampliamente son la *respuesta transitoria* y la *respuesta de estado estable*. La respuesta transitoria es la porción transitoria de la respuesta total, que tiende a cero al crecer respecto al tiempo. Por otra parte, la respuesta de estado estable, es la parte de la respuesta total que queda después de que la respuesta transitoria se hace cero. En el caso de fuentes dc, la respuesta de estado

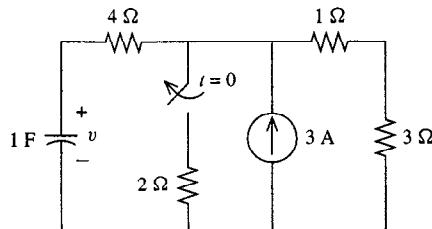
estable es constante, y es el estado estable dc discutido en la sección 5.7. En este último ejemplo, para las variables de respuesta $i(t)$ dadas en (6.25), la respuesta transitoria es $-8e^{-4t}$ A y la respuesta de estado estable dc es 10 A.

EJERCICIOS

- 6.4.1.** Obténgase v para $t > 0$ si el circuito está en estado estable en $t = 0-$.
Respuesta $12 - 8e^{-t/8}$ V



EJERCICIO 6.4.2



EJERCICIO 6.4.1

- 6.4.2.** El circuito está en estado estable en $t = 0-$. Obténgase i para $t > 0$.
Respuesta $6 - 4e^{-2t}$ A.

- 6.4.3.** Resuélvase el ejercicio 6.4.1 si el interruptor se cierra en $t = 0$, en vez de abrirse.
Respuesta $4 + 8e^{-3/16t}$ V

6.5

SUPERPOSICIÓN EN CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

En nuestra discusión de circuitos resistivos, vimos que la superposición puede ser aplicada al análisis de circuitos con más de una fuente. La respuesta general se calcula como una superposición (es decir, una suma) de respuestas individuales a cada fuente, donde se eliminan las demás fuentes.

Para ver cómo se aplica la superposición en el caso de circuitos de primer orden, considere la ecuación diferencial general de primer orden que gobierna todos estos circuitos,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.26)$$

En esta ecuación, $x(t)$ es la variable de circuito (corriente o voltaje) y $f(t)$ la función forzada. Si eliminamos todas las fuentes independientes en el circuito, tendremos la ecuación no forzada, es decir, $f(t)$ reemplazada por 0, pero de otra forma la ecuación queda sin modificar. Sea que $x_{ic}(t)$ resuelve el problema con las fuentes independientes eliminadas, es decir,

$$\frac{dx_{ic}}{dt} + \frac{1}{\tau}x_{ic} = 0, \quad x_{ic}(t_0) = x_0$$

Aquí, $x_{ic}(t)$ es la respuesta debida a las condiciones iniciales. Ahora supongamos que encendemos las fuentes en el circuito, pero en verdad eliminamos la condición inicial. En este caso designaremos a la respuesta $x_s(t)$, la respuesta debida a las fuentes independientes, lo

que satisface

$$\frac{dx_s}{dt} + \frac{1}{\tau}x_s = f(t), \quad x_s(t_0) = 0$$

Es fácil ver que la superposición de estas dos respuestas $x(t) = x_{ic}(t) + x_s(t)$ satisface la ecuación diferencial forzada original, puesto que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x &= \frac{d}{dt}(x_{ic} + x_s) + \frac{1}{\tau}(x_{ic} + x_s) \\ &= \left(\frac{d}{dt}x_{ic} + \frac{1}{\tau}x_{ic} \right) + \left(\frac{d}{dt}x_s + \frac{1}{\tau}x_s \right) = 0 + f(t)\end{aligned}$$

y además satisface la condición inicial,

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_{ic}(t_0) + x_s(t_0) \\ &= x_0 + 0\end{aligned}$$

Esto demuestra que *la respuesta total es una superposición de la respuesta de la condición inicial, donde se eliminan todas las fuentes independientes, y la respuesta a fuentes independientes con la condición inicial eliminada*. La condición inicial puede ser considerada como otra fuente, junto con las fuentes independientes. Esto tiene sentido físico, puesto que la condición inicial es ciertamente una fuente de energía para la respuesta natural. $x_{ic}(t)$ es la respuesta natural a esta “fuente de condición inicial”, donde se eliminan las demás fuentes (independiente), y debe superponerse con la respuesta forzada $x_s(t)$ impulsada por estas fuentes independientes, para la que a su vez se elimina la fuente de condición inicial.

En el caso donde hay más de una fuente independiente, la superposición puede aplicarse para calcular $x_s(t)$, la respuesta forzada con las condiciones iniciales eliminadas. Es decir, *la respuesta forzada $x_s(t)$ es la superposición de las respuestas a cada una de las fuentes independientes, con todas las demás eliminadas (incluyendo las condiciones iniciales)*.

Ejemplo 6.10

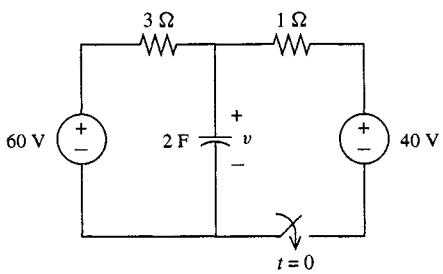


FIGURA 6.18 Circuito para el ejemplo 6.10.

Considérese el circuito de la figura 6.18, en donde deseamos obtener v . Antes de $t = 0$ el interruptor está abierto, y, como se muestra en la figura 6.19(a), está en el estado estable dc $v(0-) = 60 \text{ V}$. En $t = 0$ se cierra el interruptor, y para $t > 0$ tenemos el circuito de la figura 6.19(b). Calcularemos v para $t > 0$ como superposición de tres componentes: componentes forzadas debidas a las dos fuentes independientes, y una componente natural debida a la condición inicial $v(0+) = v(0-) = 60 \text{ V}$.

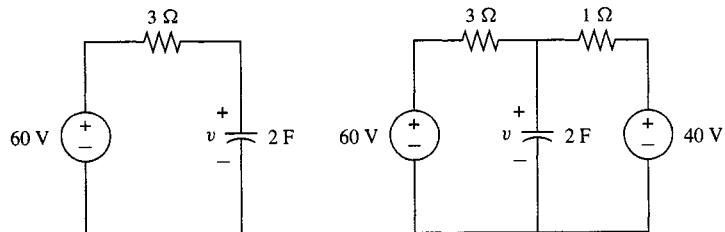


FIGURA 6.19 (a) Equivalente para $t < 0$; (b) Para $t > 0$.

Denotaremos la componente debida a la fuente de 60-V como v_{1s} . Eliminando la otra fuente, la ecuación de nodo en el nodo central superior es

$$\frac{1}{3}(v_{1s} - 60) + \frac{1}{1}(v_{1s} - 0) + \frac{2dv_{1s}}{dt} = 0$$

o

$$\frac{dv_{1s}}{dt} + \frac{2}{3}v_{1s} = 10 \quad (6.27)$$

La condición inicial impuesta sobre v_{1s} es $v_{1s}(0+) = 0$, puesto que debemos eliminar las condiciones iniciales al calcular las componentes forzadas. La solución a (6.27) con las condiciones iniciales dadas, utilizando el método descrito en la sección anterior, puede ser fácilmente comprobable como

$$v_{1s}(t) = 15[1 - e^{-(2/3)t}]$$

La componente debida a la fuente de 40-V, v_{2s} se obtiene eliminando la fuente de 60-V (y la condición inicial). La ecuación nodal se convierte en

$$\frac{1}{3}v_{2s} + \frac{1}{1}(v_{2s} - 40) + \frac{2dv_{2s}}{dt} = 0$$

o

$$\frac{dv_{2s}}{dt} + \frac{2}{3}v_{2s} = 20 \quad (6.28)$$

con $v_{2s}(0+) = 0$, la solución es

$$v_{2s}(t) = 30[1 - e^{-(2/3)t}]$$

La componente final es $v_{ic}(t)$, que se obtiene eliminando ambas fuentes independientes, y excitando una respuesta al utilizar la verdadera condición inicial. De la figura 6.19(b), al cerrar las dos fuentes de voltaje, las dos resistencias quedan en paralelo con un equivalente de $\frac{3}{4}\Omega$ y $RC = (3/4)(2) = 3/2$ en este circuito sin fuente, o

$$\frac{dv_{ic}}{dt} + \frac{2}{3}v_{ic} = 0 \quad (6.29)$$

con la condición inicial $v_{ic}(0+) = v_{ic}(0-) = 60$. La solución es $v_{ic} = Ke^{-2/3t}$, donde K se calcula para que se obtenga la condición inicial, o

$$v_{ic}(t) = 60e^{-(2/3)t} \text{ V}$$

Hemos obtenido las respuestas impulsadas por cada fuente, las dos fuentes independientes, y la condición inicial. Sólo nos queda superponer las componentes:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{ic}(t) + v_{1s}(t) + v_{2s}(t) \\ &= 15e^{-(2/3)t} + 45 \text{ V} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Ésta es la solución para $t > 0$, donde $v(t) = 60 \text{ V}$ es la solución para $t < 0$.

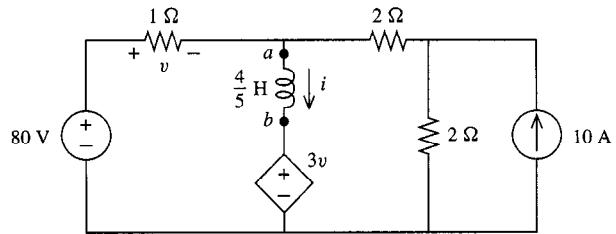


FIGURA 6.20 (a) Circuito para el ejemplo 6.11.

Ejemplo 6.11

Volveremos a resolver el ejemplo 6.9 utilizando superposición. Para nuestra conveniencia, repetiremos el diagrama de circuito que aparece en la figura 6.15. Primero calcularemos i_{ic} , la componente de i debida a las condiciones iniciales con todas las fuentes independientes eliminadas. En este caso, las resistencias pueden ser reemplazadas por un equivalente de valor $R_{eq} = \frac{4}{5}$, y tenemos un circuito de una sola trayectoria cerrada como se muestra en la figura 6.21. Aplicando LVK,

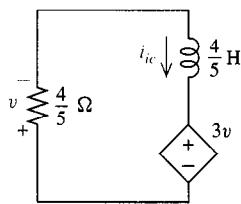


FIGURA 6.21 (a) Circuito para el componente i_{ic} .

$$\frac{4}{5} \left(\frac{di_{ic}}{dt} \right) + 3v + \frac{4}{5} i_{ic} = 0 \quad (6.31)$$

Utilizando la ley de Ohm, $v = \frac{4}{5} i_{ic}$, y dividiendo entre $\frac{4}{5}$, lo anterior es

$$\frac{di_{ic}}{dt} + 4i_{ic} = 0$$

El valor inicial dado es $i(0-) = i(0+) = 2$ A, lo que conduce a la componente

$$i_{ic}(t) = 2e^{-4t} \text{ A} \quad (6.32)$$

A continuación necesitamos las componentes forzadas i_{f1} debidas a la fuente de voltaje independiente, e i_{f2} debido a la fuente de corriente. Para determinar i_{f1} eliminamos las condiciones iniciales y todas las demás fuentes independientes, en este caso la fuente de corriente, como se muestra en la figura 6.22(a). Aquí, el ramal que contiene el inductor fue dibujado a la derecha por comodidad.

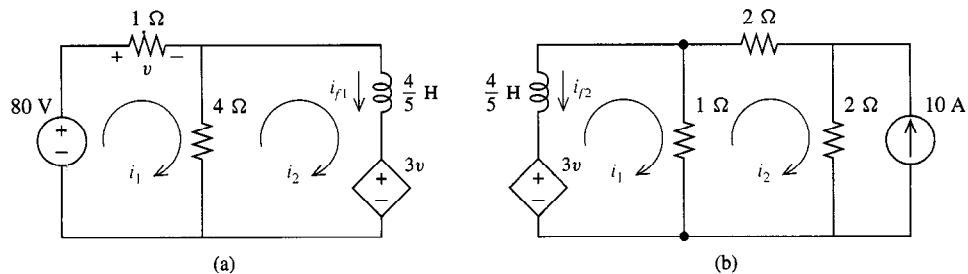


FIGURA 6.22 (a) Circuito para el componente i_{f1} ; (b) circuito para i_{f2} .

En las ecuaciones de malla para la figura 6.22(a) son

$$i_1 + 4(i_1 - i_2) = 80$$

$$\frac{4}{5} \frac{d}{dt} i_2 + 3i_1 + 4(i_2 - i_1) = 0$$

Resolviendo la primera de estas ecuaciones para i_1 y sustituyéndola en la segunda, resulta

$$\frac{d}{dt} i_2 + 4i_2 = 20, \quad i_2(0+) = 0$$

con una corriente inductiva inicial cero, puesto que ésta es una respuesta forzada donde se eliminan las condiciones iniciales. La solución a lo anterior es

$$i_2(t) = 5(1 - e^{-4t}) = i_{f1}(t) \quad (6.33)$$

La componente tercera y última, $i_{2f}(t)$, se calcula eliminando la fuente de voltaje, y volviendo a poner la fuente de corriente en el circuito, como se muestra en la figura 6.22(b) (para nuestra conveniencia, los dos ramales paralelos de la izquierda se dibujaron en orden inverso). Las ecuaciones de malla son

$$\frac{4}{5} \left(\frac{di_1}{dt} \right) + (i_1 - i_2) - 3(i_2 - i_1) = 0$$

$$2i_2 + 2(i_2 + 10) + (i_2 - i_1) = 0$$

Resolviendo la segunda ecuación de malla para i_2 y sustituyéndola en la primera,

$$\frac{di_1}{dt} + 4i_1 = -20, \quad i_1(0+) = 0$$

utilizando nuevamente la corriente inductora inicial cero para derivar las condiciones iniciales. Esta solución es

$$i_1(t) = -5(1 - e^{-4t}) \text{ A}$$

De la figura 6.22(b), vemos que

$$i_{f2}(t) = -i_1(t) = 5(1 - e^{-4t}) \text{ A} \quad (6.34)$$

Utilizando superposición, la solución total es la suma de las componentes (6.32) a (6.34):

$$i(t) = i_{ic}(t) + i_{f1}(t) + i_{f2}(t)$$

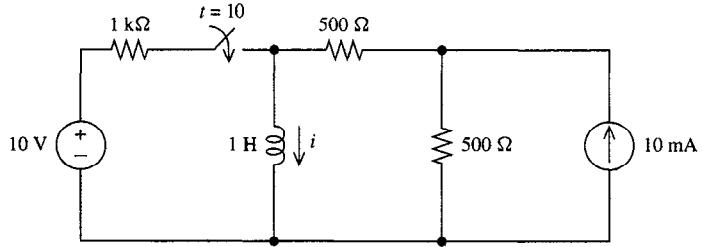
$$= 2e^{-4t} + 10(1 - e^{-4t}) = 10 - 8e^{-4t} \text{ A}$$

que concuerda con nuestro resultado del ejemplo 6.9.

EJERCICIOS

6.5.1. Utilice superposición para obtener i para $t > 10$ s. Suponer que el circuito está en estado estable dc en el instante $t = 10$ s.

Respuesta $5 + 10 [1 - e^{-500(t-10)}]$ A

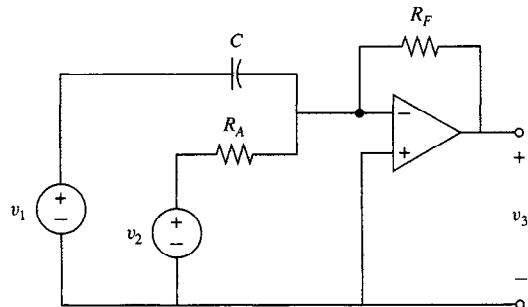


EJERCICIO 6.5.1

6.5.2. Repítase el ejercicio 6.4.1 utilizando el método de la transformación de Thevenin.

6.5.3. Utilice superposición para obtener v_3 en términos de v_1 y v_2 .

$$\text{Respuesta } v_3 = -R_F C \frac{dv_1}{dt} - \frac{R_F}{R_A} v_2$$



EJERCICIO 6.5.3

6.6

LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

En las secciones anteriores analizamos circuitos en los que las fuentes independientes fueron insertadas súbitamente a las redes. En el instante en que se aplican estas fuentes, cambian abruptamente los voltajes o corrientes en los puntos de aplicación. Las funciones forzadas cuyos valores cambian de este modo se conocen como *funciones singulares*, puesto que tienen un instante de tiempo en donde presentan un comportamiento singular o desusado.

Hay muchas funciones singulares que son útiles para análisis de circuitos. Una de las más importantes es la *función escalón unitario*, nombrada de este modo por el ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925). La función escalón unitario es aquella función que es igual a cero para todos los valores negativos de su argumento, e igual a 1 para todos los valores positivos de su argumento. Si denotamos la función escalón unitaria por el símbolo $u(t)$, su descripción matemática es

$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	(6.35)
---	--------

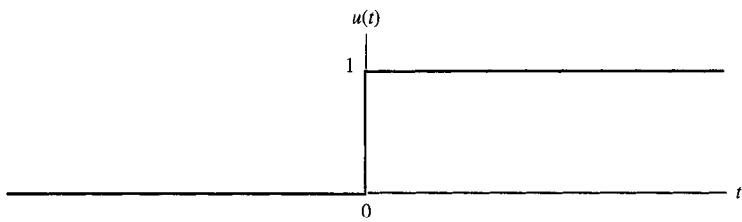


FIGURA 6.23 Gráfica de la función escalón unitario $u(t)$.

De la gráfica que aparece en la figura 6.23 vemos que en $t = 0$, $u(t)$ cambia abruptamente de 0 a 1. En ninguna otra parte cambia su valor, excepto en este momento “singular” en su comportamiento. Algunos autores definen a $u(0)$ como 1; otros prefieren $u(0) = \frac{1}{2}$; pero nosotros dejaremos $u(t)$ indefinida en $t = 0$.

Un voltaje que pasa de 0 a V volts en $t = 0$, puede ser representado por el producto $Vu(t)$. Claramente, este voltaje es 0 para $t < 0$, y V volts para $t > 0$. En la figura 6.24(a) se muestra una fuente de escalón de voltaje de V volts. En la figura 6.24(b) aparece un circuito equivalente a esta fuente. Existe un corto circuito para $t < 0$, y el voltaje es cero. Para $t > 0$, aparece un voltaje V en las terminales de circuito equivalente.

Los circuitos equivalentes para una fuente de escalón de corriente de I amperes aparecen en la figura 6.25. Existe un circuito abierto para $t < 0$, y la corriente es cero. Para $t > 0$, la activación del interruptor hace que una corriente terminal de I amperes fluya en las terminales del circuito equivalente.

Las fuentes de escalones unitarios del tipo que aparece en las figuras 6.24 y 6.25 se utilizarán con frecuencia en los circuitos que involucren fuentes que se activan instantáneamente. Nótese en estas figuras que las formas de escalón unitario de las figuras 6.24(a) y 6.25(a) son esquemáticamente más simples que las combinaciones de fuentes e interruptores dc que reemplazan en las figuras 6.24(b) y 6.25(b), lo que da lugar a diagramas de circuito más simples.

Esta representación de variables con interruptores mediante escalones unitarios no está limitada a los casos simples que se mostraron anteriormente. Del mismo modo en que utilizamos el escalón unitario para representar un voltaje o corriente que salta de cero a otro valor en $t = 0$, podemos utilizar sumas de funciones escalones unitarios a escala y desplazadas respecto al tiempo para representar un voltaje o corriente “en escalera”, es decir, cualquier función con discontinuidades de salto que permanecen constantes entre los saltos.

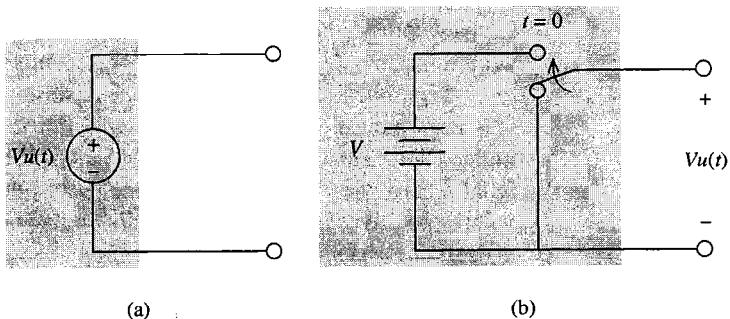


FIGURA 6.24 (a) Fuente de escalón de voltaje de V volt; (b) circuito equivalente.

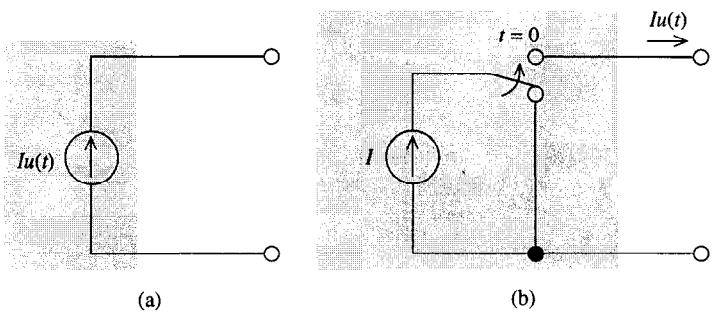


FIGURA 6.25 (a) Fuente de escalón de corriente de I amperes; (b) circuito equivalente.

Volviendo a la definición de la función escalón unitario dada en (6.35), supongamos que sustituimos t por $t - t_0$ en los tres lugares donde esto ocurre, lo que resulta en

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (6.36)$$

La gráfica de esta función aparece en la figura 6.26. $u(t - t_0)$ es el escalón unitario desplazado respecto al tiempo por t_0 a la derecha, es decir, retardada por t_0 segundos.

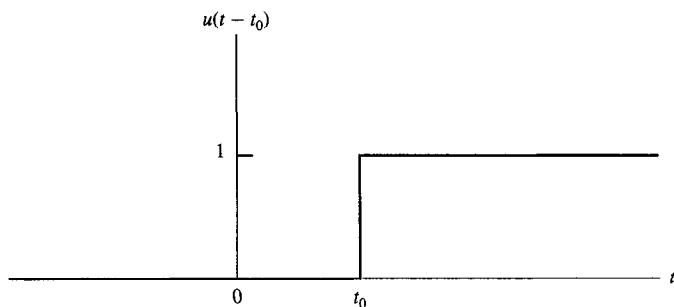


FIGURA 6.26 Escalón unitario desplazado respecto al tiempo.

Ejemplo 6.12

Considérese el $v(t)$ formado como combinación lineal de un escalón unitario con un segundo escalón unitario desplazado respecto al tiempo:

$$v(t) = K_1 u(t) + K_2 u(t - t_0)$$

Supongamos primero que el segundo escalón unitario está desplazado a la derecha (retardado); en otras palabras, $t_0 > 0$. Determinaremos el valor de $v(t)$ utilizando (6.35) y (6.36). Para $t < 0$ no se “activa” aún ningún escalón unitario, y $v(t) = 0$. Para t en el intervalo $0 < t < t_0$, se activa el primer escalón unitario (su argumento es positivo), pero no así el segundo (su argumento sigue siendo negativo), de modo que $v(t) = K_1$. Después de t_0 , ambos se activan y $v(t) = K_1 + K_2$.

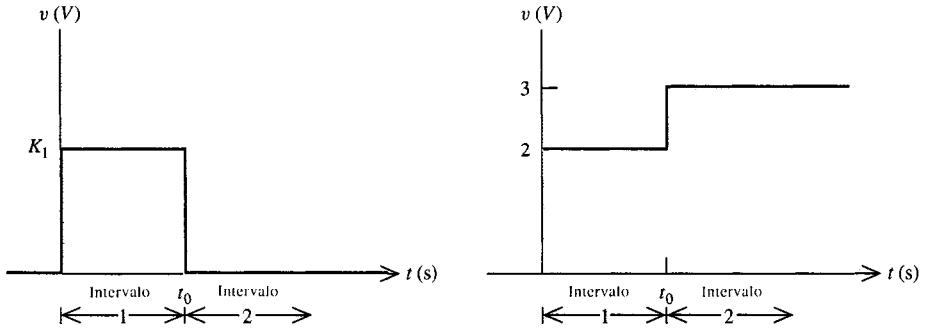


FIGURA 6.27 Dos combinaciones lineales de escalones unitarios desplazados.

De este modo,

$$\begin{aligned} v(t) &= 0, & t < 0 \\ &= K_1, & 0 < t < t_0 \\ &= K_1 + K_2, & t > t_0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Mediante una selección adecuada de los factores de escala K_1 y K_2 , podemos crear cualquier valor de nivel deseado en los intervalos marcados como 1 y 2 en la figura 6.27. Por ejemplo, con $K_2 = -K_1$ tenemos el pulso de voltaje rectangular que aparece en la figura 6.27(a), y con $K_1 = 2$ y $K_2 = 1$ tenemos una función en escalera con los valores de nivel 2 y 3 que se muestran en la figura 6.27(b).

También podemos *invertir respecto al tiempo* un escalón unitario. Sustituyendo t por $-t$ en (6.35),

$$\begin{aligned} u(-t) &= 1, & t < 0 \\ &= 0, & t > 0 \end{aligned}$$

Los escalones unitarios invertidos respecto al tiempo son útiles para describir fuentes con valores no nulos hasta el momento de activación del interruptor, tras lo cual son desactivados del circuito.

Ejemplo 6.13

Considérese el circuito de la figura 6.28(a). Para toda $t < 0$ la fuente de voltaje tiene un valor de 10 V, como se muestra en la figura 6.28(b), lo que produce una corriente de estado estable dc $i(0-) = 2$ A. Despues de $t = 0$, la fuente puede ser sustituida por un circuito cerrado [puesto que $u(-t) = 0$ para $t > 0$], lo que produce el circuito de la figura 6.28(c). De nuestros análisis anteriores de los circuitos RL simples sin fuente, sabemos que (6.10)

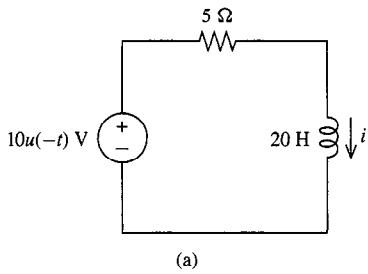
$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \text{ A}$$

con $\tau = L/R = 4$ y I_0 determinadas por la condición inicial,

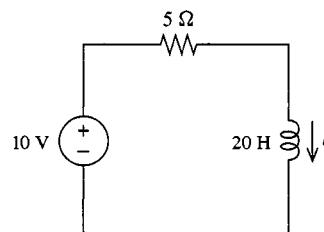
$$i(0+) = i(0-) = 2 = I_0(1)$$

y la solución total es:

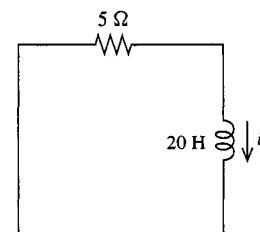
$$i(t) = 2e^{-t/4} \text{ A}$$



(a)



(b)



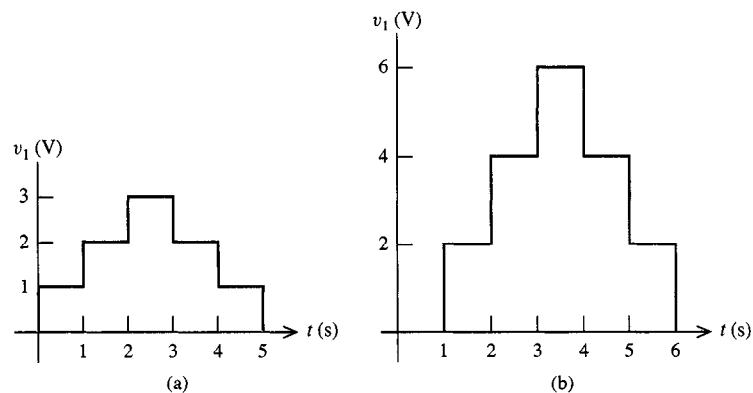
(c)

FIGURA 6.28 (a) Circuito con fuente de escalón invertida respecto al tiempo; (b) equivalente para $t < 0$; (c) equivalente para $t > 0$.

EJERCICIOS

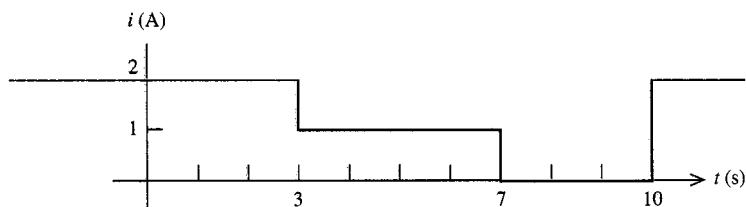
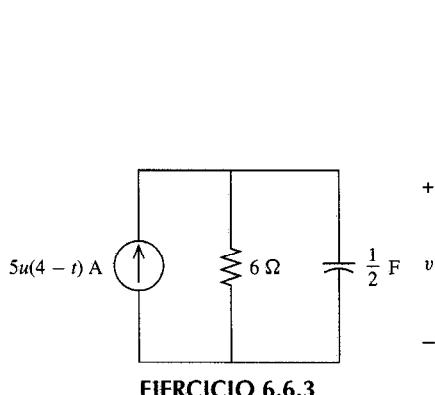
6.6.1. Exprésese $v_1(t)$ como una suma de escalones unitarios a escala y desplazados respecto al tiempo. ¿Cómo se relaciona $v_2(t)$ con $v_1(t)$? Utilícese ambas para expresar $v_2(t)$ como una suma de escalones unitarios a escala y desplazados respecto al tiempo.

Respuesta $u(t) + u(t - 1) + u(t - 2) - u(t - 3) - u(t - 4) - u(t - 5)$;
 $v_2(t) = 2v_1(t - 1); 2[u(t - 1) + u(t - 2) + u(t - 3) - u(t - 4) - u(t - 5) - u(t - 6)]$



EJERCICIO 6.6.1

6.6.2. Exprese $i(t)$ como suma de dos escalones unitarios invertidos respecto al tiempo, y un escalón unitario normal.



6.6.3. Obténgase $v(t)$ para $t > 4$. Suponga que el circuito está en estado estable dc justo antes del instante de salto del escalón unitario.

Respuesta $30e^{-(t-4)/3}$ V

6.7

RESPUESTAS EN ESCALÓN Y DE PULSO

La respuesta en escalón está definida como la respuesta de un circuito que tiene sólo una fuente independiente que es una función de escalón unitario. Las fuentes de respuesta y de escalón pueden ser una corriente o un voltaje.

Puesto que la fuente de escalón unitario presenta una función de fuente cero hasta el instante $t = 0^-$, la respuesta en estado estable dc por el circuito en $t = 0^-$, también debe ser cero. No puede haber potencia inicial almacenada en los elementos de almacenaje en el instante singular cuando la fuente cambia, porque no hay una fuente en $t < 0$ para energizar los elementos de almacenaje. Por consiguiente, la respuesta en escalón es la respuesta a la entrada de escalón unitario, sin que haya energía inicial almacenada en el circuito.

Ejemplo 6.14

Como ejemplo, obtengamos la respuesta en escalón $v(t)$ en el circuito RC simple de la figura 6.29(a), que tiene una entrada de $v_g(t) = u(t)$ V. En la figura 6.29(b) se muestra el circuito equivalente. Para $t < 0$, $v_g(t) = 0$ y por consiguiente el estado estable dc en $t = 0^-$ es $v(0^-) = 0$ V. Por continuidad de los voltajes capacitivos, también $v(0^+) = 0$ V. Aplicando LCK para $t > 0$,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{1}{RC} \quad (6.38)$$

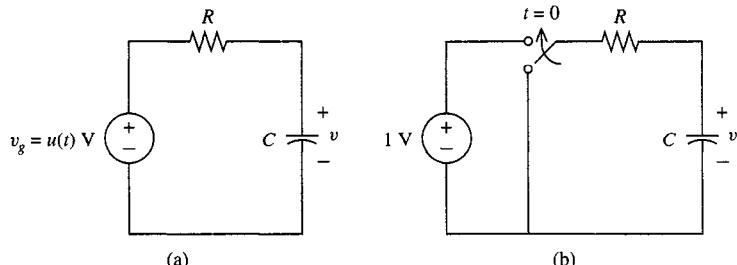
La ecuación característica es

$$s + \frac{1}{RC} = 0$$

Lo que conduce a la respuesta natural

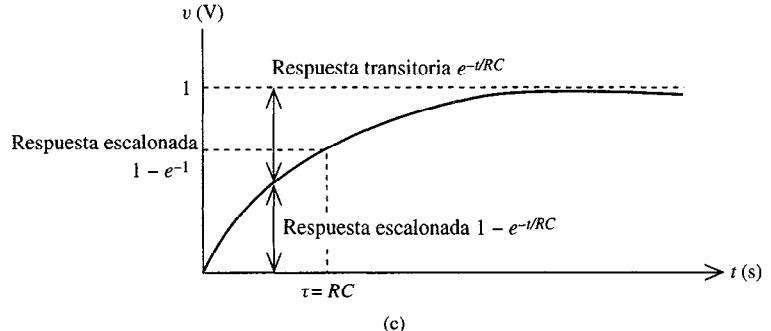
$$v_n(t) = Ke^{-t/RC} \quad (6.39)$$

La solución forzada tentativa es $v_f = A$ que, al sustituirse en (6.38), resulta en $A = 1$. Combinando esto con la solución natural (6.39), la



(a)

(b)



(c)

FIGURA 6.29 (a) Circuito RC con entrada de escalón de voltaje; (b) circuito equivalente; (c) respuesta en escalón del circuito RC .

solución total es

$$v(t) = Ke^{-t/RC} + 1$$

Finalmente, igualando la condición inicial $v(0+) = 0$ se obtiene $K = -1$. El resultado es

$$\begin{aligned} v(t) &= 0, & t < 0 \\ &= 1 - e^{-t/RC}, & t > 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

donde hemos utilizado el hecho de que antes del instante singular todas las corrientes y voltajes sean cero. Esto puede ser reescrito de una forma algo más concisa, como

$$v(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \quad (6.41)$$

evitando la forma de “lista de lavandería” de (6.40). La respuesta en escalón aparece en la figura 6.29(c).

Nuevamente, es la constante de tiempo la que nos describe el ritmo al que la respuesta transitoria decae a cero. Cada periodo de duración de una constante de tiempo, la transitoria reduce en e^{-1} veces su valor al inicio de ese periodo. Los circuitos con constantes de tiempo pequeñas llegan a su valor de estado estable con más rapidez.

Nótese que por (6.41) la multiplicación de cualquier otra función de tiempo por un escalón unitario fuerza el producto a ser cero antes del instante singular, y a ser igual a la otra función de tiempo después de esto. Utilizaremos frecuentemente esta conveniente propiedad del escalón unitario para simplificar otras ecuaciones que surjan en capítulos siguientes.

Ejemplo 6.15

Como segundo ejemplo, obtengamos $v_2(t)$ en el circuito de la figura 6.30, que consiste en una resistencia, un capacitor, y un op amp, cuando la entrada es una fuente de voltaje de estado unitario. La ecuación nodal en la terminal inversora del op amp es, al dividirse por C ,

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC}v_1$$

Integrando ambos lados de la ecuación entre los límites de $0+$ y t , obtenemos

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_{0+}^t v_1(\tau) d\tau + v_2(0+) \quad (6.42)$$

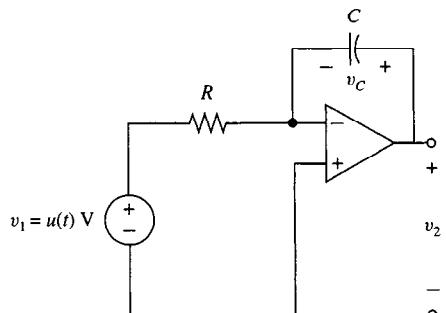


FIGURA 6.30 Circuito para el ejemplo 6.15.

En tanto que nuestro actual interés se centra en el caso específico $v_1(t) = u(t)$, nótese que por (6.42) el efecto general de este circuito es crear un voltaje de salida de $v_2(t)$ proporcional a la integral de la entrada $v_1(t)$, más una constante. Por esta razón, el circuito se conoce como *integrador*. Algunos autores prefieren el término “integrador inversor” debido al signo negativo en la ecuación de transferencia de voltaje (6.42).

En el caso de una entrada de escalón unitario $v_1(t) = u(t)$, todos los voltajes y corrientes en circuitos son cero en $0-$ y, por continuidad, también, $v_C(0+) = 0$ V. El principio de corto circuito virtual nos dice que la terminal inversora está a potencial de tierra; por consiguiente $v_C = v_2$ y el término de condición inicial en (6.42) es $v_2(0+) = 0$ V. Para $t > 0$, el integrando $v_1(t) = u(t) = 1$; por consiguiente

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_{0+}^t d\tau + 0 = \left(-\frac{1}{RC}\right)t$$

La respuesta en escalón de nuestro circuito integrador es 0 para $t < 0$ y el anterior para $t > 0$ o bien, utilizando multiplicación por $u(t)$ para que esta ecuación sea concisa, para toda t

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC}tu(t)$$

La función $tu(t)$ se conoce como función de *singularidad de rampa unitaria* y aparece en la figura 6.31(a). Nuestra respuesta de escalón $v_2(t)$ es una función de rampa en dirección negativa, a escala de $-1/RC$ y aparece en la figura 6.31(b).

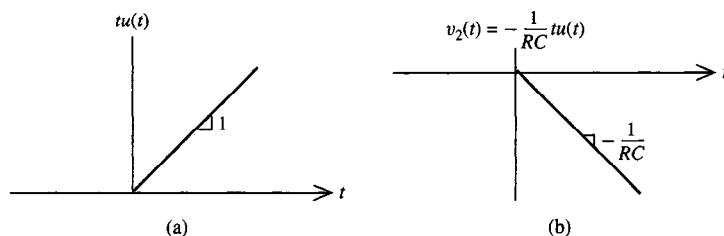


FIGURA 6.31 (a) Función de rampa unitaria; (b) respuesta en escalón del circuito de la figura 6.30.

La respuesta de pulso está estrechamente relacionada con la respuesta en escalón. En la sección anterior vimos la forma en que una combinación lineal de dos escalones unitarios puede ser utilizada para producir un pulso rectangular, por ejemplo, el de la figura 6.27(a). Ahora consideraremos la respuesta de un circuito de primer orden a una entrada de pulso. Como hicimos anteriormente, supondremos que no hay otras fuentes independientes presentes en el circuito.

Antes del salto de la izquierda, o *borde conductor* del pulso, no hay corrientes o voltajes por la misma razón que se mencionó en la respuesta en escalón; la respuesta de estado estable dc a una fuente de valor cero debe ser cero. Nada ha sido prendido hasta ahora. Durante el pulso, la respuesta debe ser idéntica a una respuesta en escalón, puesto que el pulso y las entradas en escalón de amplitud igual, sólo diferirán después del segundo instante de salto, lo cual aún no ha ocurrido. Finalmente, después del segundo instante de salto, o *borde seguidor* del pulso, la fuente vuelve a ser cero. Sólo necesitamos calcular la respuesta de un circuito sin fuentes con las condiciones iniciales adecuadas (aplicadas en el borde seguidor del pulso).

Ejemplo 6.16

Para ilustrar la respuesta de pulso de un circuito de primer orden, considérese la figura 6.32(a), donde la fuente es el pulso de corriente

$$i_g(t) = 6(u(t) - u(t - 1)) \text{ A}$$

Esta fuente es cero antes de $t = 0$, abastece 6 A durante el intervalo $0 < t < 1$, y luego se vuelve a apagar. Esto se esboza en la figura 6.33(a). Reemplazando la fuente y la resistencia de 5Ω por su equivalente de Thevenin, tenemos el circuito de una sola trayectoria cerrada de la figura 6.32(b). Aplicando LVK alrededor de la trayectoria cerrada y dividiendo entre 5, obtenemos

$$\frac{di}{dt} + i = i_g(t) \quad (6.43)$$

Antes de $t = 0$, todas las corrientes y voltajes son cero, puesto que no hay fuente de energía que estimule respuestas no nulas. Por consiguiente, $i(0-) = i(0+) = 0$ A. Para $0 < t < 1$, $i_g(t) = 6$, y para este intervalo de tiempo tenemos

$$\frac{di}{dt} + i = 6, \quad i(0+) = 0 \quad (6.44)$$

La ecuación característica es $s + 1 = 0$, y la respuesta natural es Ke^{-t} . La solución forzada tentativa es A , y sustituyéndola vemos que

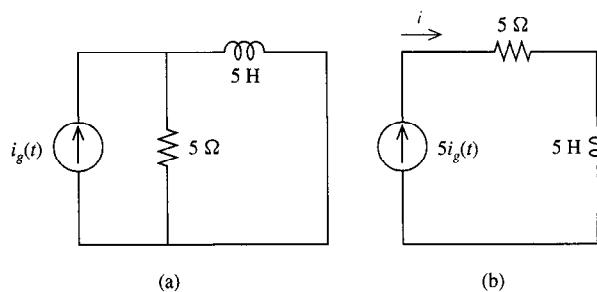


FIGURA 6.32 (a) Circuito para el ejemplo 6.16; (b) circuito equivalente.

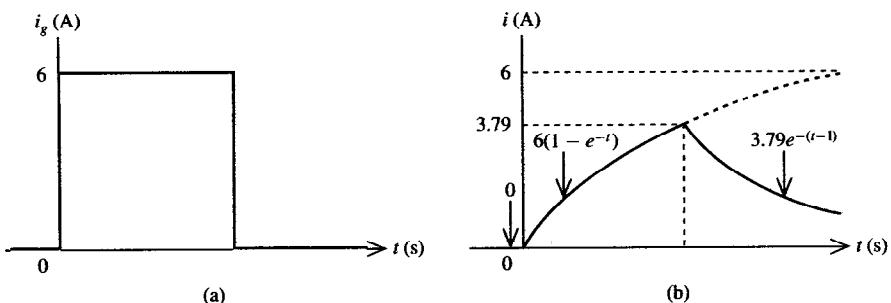


FIGURA 6.33 (a) Fuente de corriente de pulso; (b) respuesta de pulso.

\$A = 6\$. Igualando la condición inicial cero,

$$i(0+) = K(1) + 6$$

o \$K = -6\$. Tenemos hasta ahora que \$i(t) = 0\$ para \$t < 0\$, y

$$i(t) = 6(1 - e^{-t}) \text{ A}, \quad 0 < t < 1 \quad (6.45)$$

Esta porción de la respuesta aparece en la figura 6.33(b). La línea punteada muestra que, si la fuente no volvió a apagarse en \$t = 1\$, la respuesta tenderá al valor 6, lo que es característico de la respuesta en escalón para la ecuación (6.44). Esto sólo puede ser lo razonable, puesto que si la fuente no se volviera a apagar, sería una fuente de escalón.

Volviendo a (6.43), para \$t > 1\$ tenemos \$i_g(t) = 0\$ o

$$\frac{di}{dt} + i = 0, \quad t > 1 \quad (6.46)$$

De este modo, en el intervalo \$t > 1\$, necesitamos resolver únicamente un circuito de primer orden no forzado. La constante de tiempo es \$\tau = 1\$ y la solución es

$$i(t) = Ke^{-t}, \quad t > 1 \quad (6.47)$$

Puesto que (6.45) es válida para \$t > 1\$, su condición inicial debe estar en \$t = 1+\$, justo después del borde seguidor del pulso. Ya hemos determinado la corriente justo antes de este instante, puesto que es por (6.45)

$$i(1-) = 6(1 - e^{-1}) = 3.79 \text{ A}$$

Por continuidad de corrientes inductivas, también \$i(1+) = 3.79\$. Para simplificar la igualación de condiciones iniciales, reescribiremos la solución natural (6.47) como

$$i(t) = K_1 e^{-(t-1)}, \quad t > 1 \quad (6.48)$$

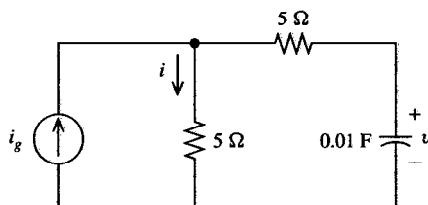
Estas dos formas son equivalentes, con la nueva \$K_1\$ desconocida que sustituye \$K\$ (\$K = K_1 e^1\$). Luego, por (6.48) evaluada en el instante \$1+\$, \$K_1 = 3.79\$ y

$$i(t) = 3.79e^{-(t-1)} \text{ A}, \quad t > 1$$

Lo que completa toda la historia temporal de \$i(t)\$. En la figura 6.33(b) se muestra una gráfica de esta respuesta de pulso.

Comparando la entrada de pulso a la respuesta de pulso en la figura 6.33, vemos que el efecto de este circuito de primer orden ha sido el de suavizar la entrada, y frenar sus transiciones abruptas. Aunque el pulso brinca instantáneamente a su valor completo en $t = 0$, su respuesta de pulso crece suavemente para $0 < t < 1$. Y aunque el pulso regresa instantáneamente a cero en $t = 1$, su respuesta decréce a cero continuamente con la constante de tiempo $\tau = 1$ s. Este efecto suavizante es característico de una clase de circuitos conocidos como filtros pasa-bajas, que serán examinados en el capítulo 14.

EJERCICIOS



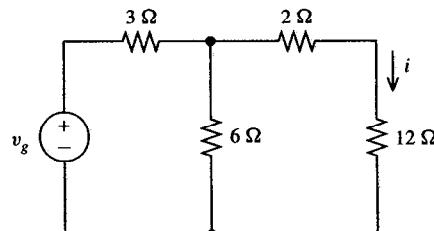
EJERCICIO 6.7.1

- 6.7.1.** Obténganse las respuestas escalón i y v [la respuesta en escalón implica $i_g = u(t)$ A]:

$$\text{Respuesta } (1 - \frac{1}{2}e^{-10t})u(t) \text{ A}; 5(1 - e^{-10t})u(t) \text{ V}$$

- 6.7.2.** Obténgase la respuesta i a $v_g = 42u(t)$ V.

$$\text{Respuesta } 2(1 - e^{-7t})u(t) \text{ A}$$



EJERCICIO 6.7.2

- 6.7.3.** Obténgase la respuesta del ejercicio 6.7.2. para obtener la respuesta i a $v_g = 210u(t)$ V.

$$\text{Respuesta Por linealidad, } 10(1 - e^{-7t})u(t) \text{ A.}$$

6.8

SPICE Y LA RESPUESTA TRANSITORIA

Anteriormente se hizo una presentación de SPICE, y se utilizó para analizar circuitos resitivos con fuentes de dc. El programa, desde luego, hace mucho más que esto. A continuación, discutiremos su uso para obtener respuestas transitorias para circuitos que contengan elementos de almacenamiento y fuentes independientes que son dc, de escalón unitario, pulsos, o sumas de escalones desplazados.

En la sección 4.8 se presentó el formato básico de un archivo de entrada de SPICE, así como las declaraciones de elementos para resistencias, fuentes dc y fuentes lineales controladas. El formato para declaraciones de elementos de almacenamiento (capacitores e inductores) es:

CXXXXX	N1	N2	VALUE	<IC = VOLTS>
LXXXXX	N1	N2	VALUE	<IC = AMPS>

Aquí, C o L indican si se trata de un capacitor o inductor, XXXXX es el nombre dado al capacitor o inductor específico, N1 y N2, son los nodos de elementos, y VALUE es la capacitancia en farads o la inductancia en henrys. El campo final es opcional (se utilizarán paréntesis triangulares para marcar campos opcionales en las declaraciones de SPICE), que consiste en las condiciones iniciales. El tiempo inicial en la que se aplican estas condiciones es siempre el instante cero, $t = 0$. La dirección de referencia para el voltaje capacitivo inicial de valor VOLTS tiene su signo positivo en el nodo N1, y para la corriente inductiva inicial AMPS, tiene una flecha señalando de N2 a N1.

La declaración de control que dará instrucciones a SPICE para realizar un análisis transitorio es la declaración .TRAN, cuyo formato básico es

.TRAN	TSTEP	TSTOP	<UIC>
--------------	--------------	--------------	--------------------

TSTEP es el tiempo entre los valores que se imprimirán o graficarán (en breve se describirán las declaraciones de salida para análisis transitorio). TSTOP es el final del intervalo de tiempo, que se supone iniciado en el instante $t = 0$, durante el cual se realizará el análisis y se producirán salidas. La inclusión del campo opcional UIC, da instrucciones a SPICE para utilizar las condiciones iniciales especificadas por el usuario en las declaraciones de elementos de almacenaje. Si este campo está ausente, SPICE calculará el estado estable dc en $t = 0-$ y utilizará las corrientes de inductor de estado estable y los voltajes de capacitor como condiciones iniciales.

La salida de un análisis transitorio puede imprimirse como lista de números, o puede graficarse. Los formatos para estas declaraciones de control de salida son

.PRINT	TRAN	CVLIST
.PLOT	TRAN	CVLIST

donde CVLIST es la lista de las variables de circuito deseadas.

Ejemplo 6.17

Este ejemplo ilustra el uso de SPICE para determinar condiciones iniciales y el análisis transitorio subsiguiente. Buscamos la corriente $i_L(t)$ en la figura 6.34. Puesto que la fuente de voltaje es $12u(-t)$ V, su valor para $t < 0$, es de 12 V. Puede obtenerse la condición inicial $i_L(0+) = i_L(0-)$ sustituyendo el inductor con un circuito cerrado, y obteniendo el valor dc para i_L con la fuente 12-V en su lugar.

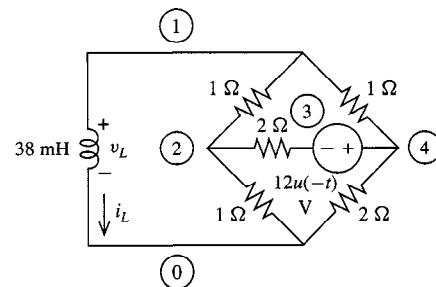


FIGURA 6.34 Circuito para el ejemplo 6.17.

```

Ejemplo 6.17 run 1: determining the IC
*PONER UNA FUENTE V INACTIVA EN LUGAR DE LA
*L EN CORTO PARA QUE PODAMOS IMPRIMIR IL = I(VD)
VD      1      0      DC      0
R1      1      2      1
R2      1      4      1
R3      2      3      2
*AQUI ESTA LA FUENTE DE 12 V
VS      4      3      DC      12
R4      2      0      1
R5      4      0      2
.PRINT  DC      I(VD)
.END

```

La salida impresa contiene las líneas

VOLTAGE SOURCE CURRENTS	
NAME	CURRENT
VD	6.316E-01
VS	-3.789E+00

Por consiguiente, la corriente inicial es $i_L(0-) = i_L(0+) = 0.6316 \text{ A}$. Para $t > 0$ el circuito está libre de fuentes, y el archivo de entrada para graficar $i_L(t)$ para $t \geq 0$, utilizando esta condición inicial es

```

Ejemplo 6.17 run 2: the response for t>0
*DAR ENTRADA A LA IC CALCULADA EN LA VUELTA 1
L1      0      1      38M      IC=0.6316
R1      1      2      1
R2      1      4      1
R3      2      3      2
*LA SIGUIENTE DECLARACION PUEDE OMITIRSE, Y SE PUEDE
*RENUMERAR LOS NODOS SI ESTO SE PREFIERE.
VS      3      4      DC      0
R4      2      0      1
R5      4      0      2
.TRAN  0.2    10      UIC
*PONGASE UNA FUENTE V INACTIVA SI SU VERSION DE SPICE
*NO PERMITE FORMAS COMO I(L1)
.PLOT      TRAN      I(L1)
.END

```

La salida aparece en la figura 6.35. La corriente $i_L(t)$ decae exponencialmente a partir de su valor inicial, como debe hacerlo toda variable de circuito RC o RL sin fuente. Para determinar τ , nótese que al final de una constante de tiempo, la respuesta decae a

$e^{-t}(0.6316) = 0.2324$ V. Examinando la figura 6.35, esto ocurre en 32 ms, de forma que τ es igual a 32 ms. Nótese que esto concuerda con la constante de tiempo calculada en el ejemplo 6.5 utilizando el mismo circuito, lo que fue hecho sin ayuda de SPICE.

También puede utilizarse SPICE para calcular respuestas en escalón y en pulso. Para determinar la respuesta en escalón, sólo necesitamos fijar condiciones iniciales en 0, e incluir la fuente de escalón independiente como fuente dc en el archivo de entrada SPICE. Las respuestas de pulso son manejadas

```
**** 10/10/94 09:20:11 ****      Evaluación Pspice (Enero 1991) ****
Ex 6.17 vuelta 2: la respuesta para t > 0.

***** ANALISIS TRANSITORIO      TEMPERATURA = 27.000 DEG C
*****
***** TIEMPO I(L1) ****
TIEMPO      I(L1)
(*)----- 0.0000E+00  2.0000E-01  4.0000E-01  6.0000E-01  8.0000E-01
0.000E+00  6.316E-01 .
4.000E-03  5.575E-01 .
8.000E-03  4.923E-01 .
1.200E-02  4.344E-01 .
1.600E-02  3.830E-01 .
2.000E-02  3.382E-01 .
2.400E-02  2.984E-01 .
2.800E-02  2.631E-01 .
3.200E-02  2.324E-01 .
3.600E-02  2.050E-01 .
4.000E-02  1.808E-01 .
4.400E-02  1.597E-01 .
4.800E-02  1.409E-01 .
5.200E-02  1.242E-01 .
5.600E-02  1.097E-01 .
6.000E-02  9.678E-02 .
6.400E-02  8.534E-02 .
6.800E-02  7.536E-02 .
7.200E-02  6.649E-02 .
7.600E-02  5.863E-02 .
8.000E-02  5.178E-02 .
8.400E-02  4.568E-02 .
8.800E-02  4.028E-02 .
9.200E-02  3.557E-02 .
9.600E-02  3.138E-02 .
1.000E-01  2.767E-02 .
1.040E-01  2.444E-02 .
1.080E-01  2.156E-02 .
1.120E-01  1.901E-02 .
1.160E-01  1.679E-02 .
1.200E-01  1.481E-02 .
1.240E-01  1.306E-02 .
1.280E-01  1.154E-02 .
1.320E-01  1.018E-02 .
1.360E-01  8.974E-03 .
1.400E-01  7.925E-03 .
1.440E-01  6.992E-03 .
1.480E-01  6.165E-03 .
1.500E-01  5.791E-03 .
```

FIGURA 6.35 Salida de análisis transitorio de SPICE.

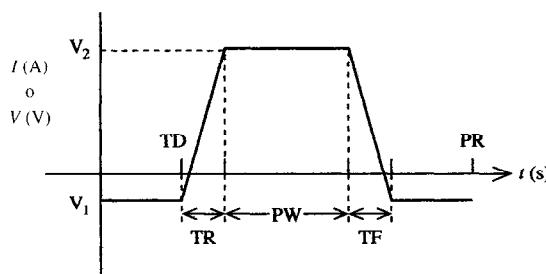


FIGURA 6.36 Parámetros de una fuente de pulso SPICE.

de modo similar, excepto en que enunciamos la fuente como *fuente de pulso* mediante el uso de enunciados de elementos

VXXXXX	N1	N2	PULSE(V1	V2	TD	TR	TF	PW	PR)
IXXXXX	N1	N2	PULSE(V1	V2	TD	TR	TF	PW	PR)

Los siete números dentro de los paréntesis especifican los parámetros de la fuente de pulso, como se muestra en la figura 6.36. Los tiempos de subida y caída de los pulsos TR y TF no pueden fijarse en cero. Para modelar activaciones instantáneas de interruptores, estos valores deben fijarse a cantidades menores que la constante de tiempo de circuito.

Ejemplo 6.18

Calcularemos la respuesta de pulso y de escalón unitario $v_2(t)$ para el circuito op amp que aparece en la figura 6.37. Utilizaremos el modelo op amp mejorado (Fig. 3.9).

```

Ejemplo 6.18 (FIG. 6.38)
*PARA LA RESPUESTA EN ESCALON UTILIZAREMOS UNA FUENTE DC
VG      1      0      DC      1
RA      1      2      25K
RF      2      3      50K
CF      2      3      20U    IC=0
XOA     0      2      3      OPAMP
*AQUI ESTA EL SUBCIRCUITO CON OP AMP.
.SUBCKT  OPAMP    1      2      3
*EL NODO 1 ES LA SALIDA +IN, 2 -IN, 3
RIN     1      2      1MEG
E1      4      0      1      2      100K
ROUT    4      3      30
.ENDS
*FINALMENTE, LAS DECLARACIONES DE CONTROL
.TRAN    0.1    10    UIC
.PLOT    TRAN    V(3)    V(1)
.END

```

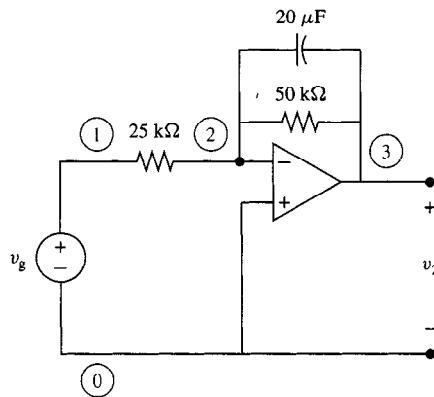


FIGURA 6.37 Circuito para el ejemplo 6.18.

La salida de respuesta en escalón aparece en la figura 6.38. En base al ejemplo 6.6; sería de esperar que la respuesta de escalón tuviera una declinación transitoria a cero con la constante de tiempo $\tau = R_F C_F$ o $(50 \text{ k}\Omega)(20 \mu\text{F}) = 1000 \text{ ms}$, es decir, 1 s. En la figura 6.38 podemos notar que el valor de estado estable es -2V, donde la transitoria inicial debe ser +2 V y el valor después de una constante de tiempo debería ser de $e^{-1}(2) - 2 = -1.26$. Esto ocurre en $t = 1.00 \text{ s}$, tal y como se esperaba.

Continuando con el ejemplo, obtendremos la respuesta de pulso a un pulso de entrada de amplitud 1 V y duración 1 s. Reemplazando la declaración de elemento VG en el archivo de entrada SPICE por

```
VG 1 0 PULSE ( 0 1 0 1M 1M 1 10 )
```

y volviendo a correr SPICE, tenemos la salida de respuesta de pulso que aparece en la figura 6.39. Las respuestas de pulso y de escalón son idénticas hasta que el borde seguidor del pulso ($t = 1 \text{ s}$), después de que la respuesta de pulso presenta un decaimiento natural a cero con una constante de tiempo $\tau = 1 \text{ s}$, en tanto que la respuesta de escalón continua hacia el estado estable dc de forzado de -2 V. De la figura 6.37, vemos que en el estado estable dc, con el capacitor equivalente a un circuito abierto, este es un amplificador inversor (como se discutió en el capítulo 3), con una proporción de transferencia de voltaje de -2. De este modo, con una entrada de escalón unitario, deberíamos acercarnos mucho a este estado estable después de entre 5 y 10 constantes de tiempo (de 5 a 10 s). Los datos en la figura 6.38 confirman esto.

Además del estilo burdo y de impresión de líneas de la gráfica que permite la declaración .PLOT, PSPICE permite que las terminales equipadas con adaptadores de gráficas muestren salidas graficadas con la máxima resolución de pantalla disponible. La declaración de control

```
.PROBE
```

cuando se añade al archivo de entrada, resulta en la creación de un archivo auxiliar de datos que apoya la operación de PROBE, un programa de software postprocesador de gráficas que viene en paquete con PSPICE.

***** 10/10/94 09:26:24 ***** Evaluación PSpice (Enero 1991) *****

EJEMPLO 6.18: RESPUESTA EN ESCALÓN

**** ANALISIS TRANSITORIO TEMPERATURA = 27.000 DEG C

TIEMPO V(3)
(*)----- -2.0000E+00 -1.5000E+00 -1.0000E+00 -5.0000E-01 0.0000E+00
0.000E+00 -7.956E-06 *
1.000E-01 -1.894E-01 *
2.000E-01 -3.594E-01 *
3.000E-01 -5.140E-01 *
4.000E-01 -6.548E-01 *
5.000E-01 -7.844E-01 *
6.000E-01 -8.996E-01 *
7.000E-01 -1.006E+00 *
8.000E-01 -1.100E+00 *
9.000E-01 -1.187E+00 *
1.000E+00 -1.264E+00 *
1.100E+00 -1.335E+00 *
1.200E+00 -1.398E+00 *
1.300E+00 -1.456E+00 *
1.400E+00 -1.507E+00 *
1.500E+00 -1.555E+00 *
1.600E+00 -1.597E+00 *
1.700E+00 -1.636E+00 *
1.800E+00 -1.670E+00 *
1.900E+00 -1.702E+00 *
2.000E+00 -1.730E+00 *
2.100E+00 -1.756E+00 *
2.200E+00 -1.779E+00 *
2.300E+00 -1.801E+00 *
2.400E+00 -1.820E+00 *
2.500E+00 -1.837E+00 *
2.600E+00 -1.852E+00 *
2.700E+00 -1.867E+00 *
2.800E+00 -1.879E+00 *
2.900E+00 -1.891E+00 *
3.000E+00 -1.901E+00 *
3.100E+00 -1.911E+00 *
3.200E+00 -1.919E+00 *
3.300E+00 -1.927E+00 *
3.400E+00 -1.934E+00 *
3.500E+00 -1.940E+00 *
3.600E+00 -1.946E+00 *
3.700E+00 -1.951E+00 *
3.800E+00 -1.956E+00 *
3.900E+00 -1.960E+00 *
4.000E+00 -1.964E+00 *
4.100E+00 -1.967E+00 *
4.200E+00 -1.970E+00 *
4.300E+00 -1.973E+00 *
4.400E+00 -1.976E+00 *
4.500E+00 -1.978E+00 *
4.600E+00 -1.980E+00 *
4.700E+00 -1.982E+00 *
4.800E+00 -1.984E+00 *
4.900E+00 -1.985E+00 *
5.000E+00 -1.987E+00 *
5.100E+00 -1.988E+00 *
5.200E+00 -1.989E+00 *
5.300E+00 -1.990E+00 *
5.400E+00 -1.991E+00 *
5.500E+00 -1.992E+00 *
5.600E+00 -1.993E+00 *
5.700E+00 -1.993E+00 *
5.800E+00 -1.994E+00 *
5.900E+00 -1.995E+00 *
6.000E+00 -1.995E+00 *
6.100E+00 -1.996E+00 *
6.200E+00 -1.996E+00 *

FIGURA 6.38 Respuesta en escalón para el ejemplo 6.18.

**** 10/10/94 09:35:06 ***** Evaluación PSpice (Enero 1991). *****

EJEMPLO 6.18: RESPUESTA EN PULSO

**** ANÁLISIS TRANSITORIO TEMPERATURA = 27.000 DEG C

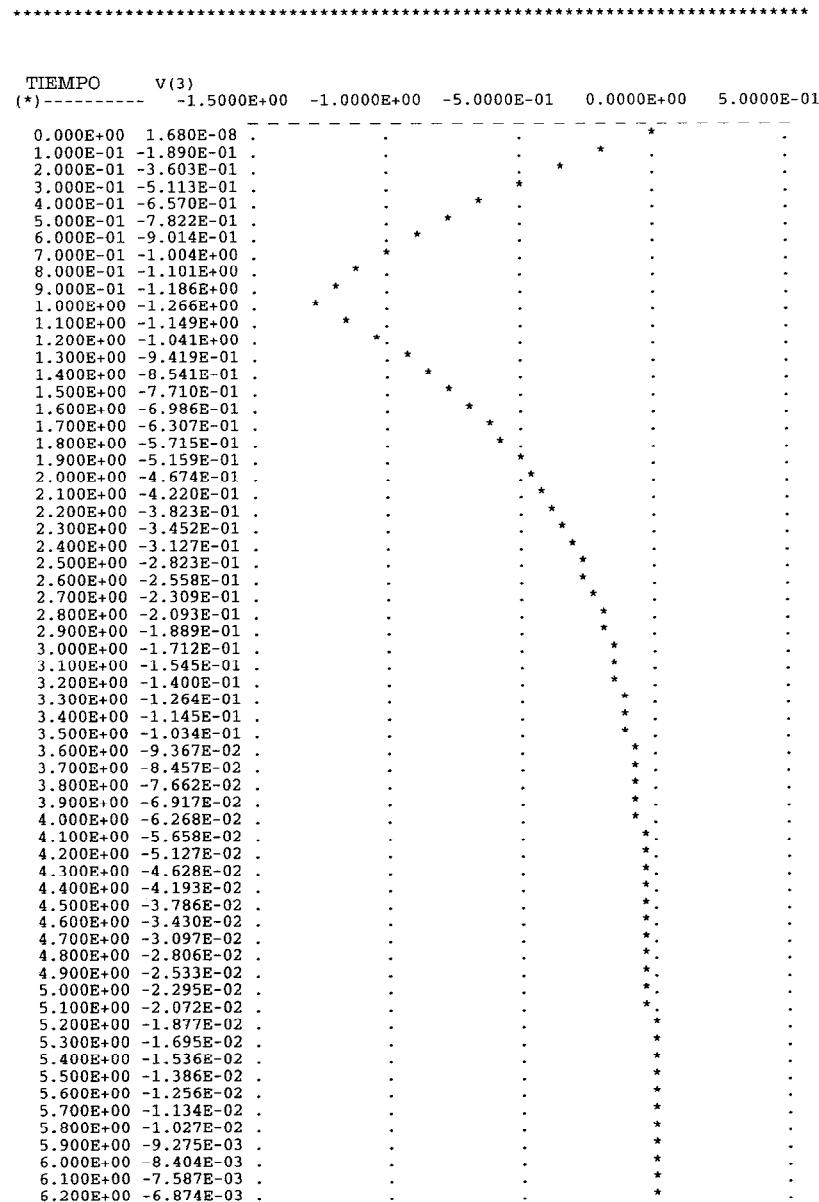


FIGURA 6.39 Respuesta en pulso para el ejemplo 6.18 (Salida .PLOT).

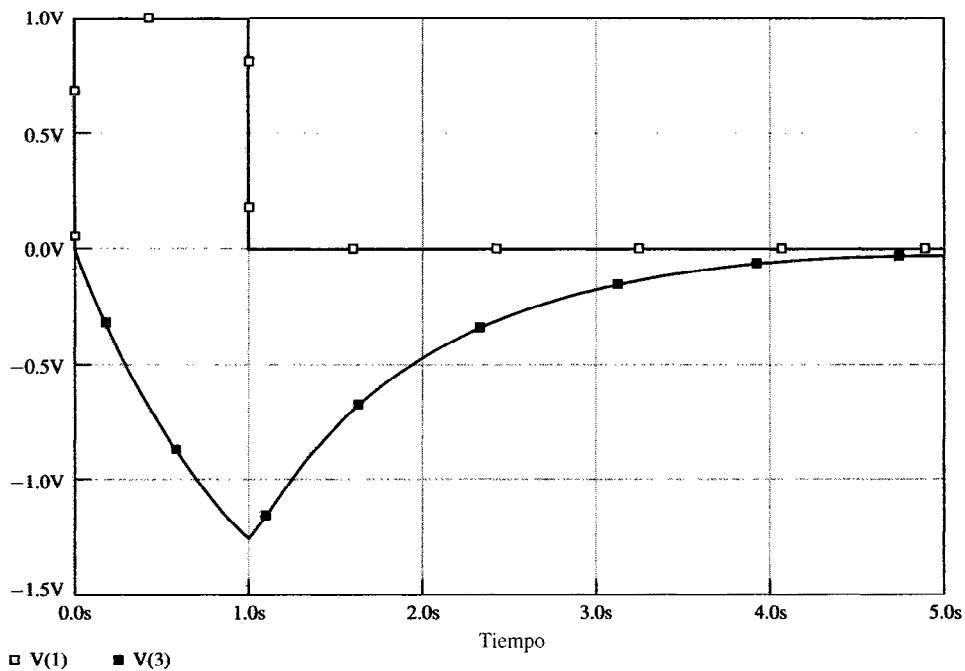


FIGURA 6.40 Respuesta de pulso para el ejemplo 6.18 (Salida de PROBE).

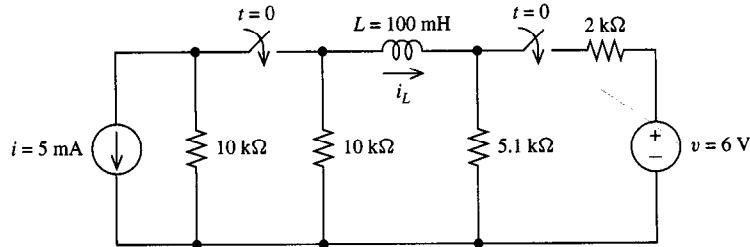
Al ejecutarse, PROBE permite que las variables de circuito sean graficadas, y que se seleccionen escalas para los ejes y otras características de la gráfica, y que además sean cambiadas interactivamente. En la figura 6.40 se muestra una gráfica PROBE de la misma respuesta en pulso graficada en la figura 6.39.¹

Finalmente, puede analizarse con SPICE un circuito con tiempos de activación de interruptor no nulos o múltiples, al desplazar el tiempo de activación del interruptor (o tiempos) a cero. Por ejemplo, supongamos que tenemos un circuito en estado estable dc en $t = 0-$, y un interruptor se activa en este instante, seguido de una segunda activación de interruptor en $t = t_0 > 0$. Para determinar las condiciones en $t = 0-$, primero debemos realizar un análisis dc del circuito con los interruptores en sus posiciones $t < 0$. Los valores resultantes son utilizados como condiciones iniciales en las declaraciones de elementos de almacenamiento para una segunda vuelta de SPICE, esta vez realizando un análisis transitorio del circuito con sus interruptores en sus posiciones $0 < t < t_0$. Terminaremos este análisis en el instante t_0 , dando salida a los valores de los voltajes capacitivos y corrientes inductivas. Estos valores son salida como condiciones iniciales para una vuelta final, utilizando el archivo de entrada de SPICE para reflejar la configuración del circuito que resulta al fijar los interruptores en sus posiciones $t > t_0$. Puesto que SPICE siempre inicia un análisis transitorio en $t = 0$, recordaremos sumar t_0 a todo instante que aparece en la salida final. En el ejercicio 6.8.3. se da un ejemplo con tiempos de activación de interruptores múltiples.

¹ Los usuarios de la versión 3 de SPICE, DESIGN CENTER, y otras variantes de SPICE o superconjuntos, también tienen acceso a gráficas de alta resolución. Consultese la guía de usuario.

EJERCICIOS

- 6.8.1.** Utilizando SPICE, obténgase (a) $i_L(0-)$ y (b) $i_L(30 \mu\text{s})$.
Respuesta -2.475 mA ; $+0.285 \text{ mA}$

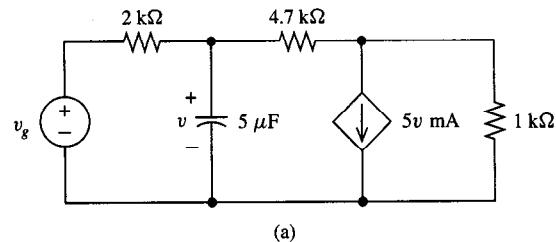


EJERCICIO 6.8.1

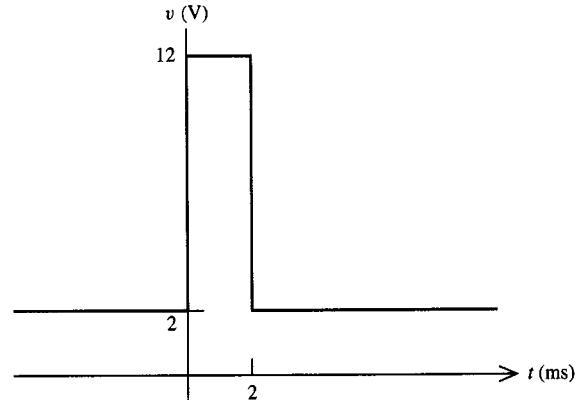
- 6.8.2.** Repítase el ejercicio 6.8.1 para el caso en donde el interruptor de la derecha se cierra en el instante $t = 20 \mu\text{s}$ en vez de $t = 0$.

Respuesta -2.475 mA ; $+0.218 \text{ mA}$

- 6.8.3.** Grafíquese la respuesta $v(t)$ para $0 < t < 10 \text{ ms}$ si v_g es un pulso de amplitud 10 V y duración 2 ms, y el valor inicial de v es $+2 \text{ V}$.



(a)

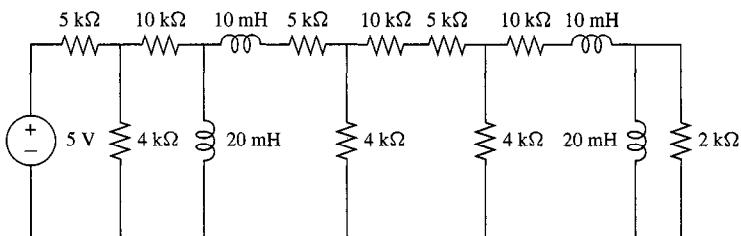


(b)

EJERCICIO 6.8.3

6.8.4. Escriba un archivo de entrada SPICE para este circuito utilizando dos subcircuitos. Suponer que todas las corrientes iniciales son cero. Omítanse las declaraciones .TRAN o .DC y las declaraciones de control de salida.

Respuesta



EJERCICIO 6.8.4

Ejercicio 6.8.4				
VS	1	0	DC	5
XR1	1	2	RSUBCKT	
XL1	2	3	LSUBCKT	
XR2	3	4	RSUBCKT	
XR3	4	5	RSUBCKT	
XL2	5	6	LSUBCKT	
RL	6	0	2K	
.SUBCKT	RSUBCKT		1	3
R1	1	2	5K	
R2	2	3	10K	
R3	2	0	4K	
.ENDS				
.SUBCKT	LSUBCKT		1	2
L1	1	2	10M	IC=0
L2	1	0	20M	IC=0
.ENDS				
.END				

RESUMEN

Los circuitos de primer orden son aquellos que pueden caracterizarse por una sola ecuación diferencial de primer orden. Pueden identificarse por la presencia de un elemento de almacenamiento equivalente único (inductor o capacitor). El comportamiento de los circuitos de primer orden pueden estudiarse al escribir y resolver sus ecuaciones diferenciales en el dominio de tiempo, que es el núcleo de este capítulo.

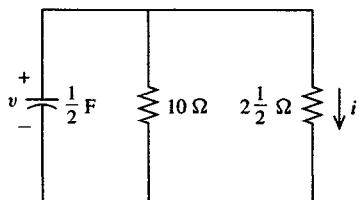
- Una ecuación diferencial de primer orden no forzada puede ser resuelta por separación de variables o por el método de ecuación característica. La solución es una función de tiempo exponencial real caracterizada por una sola constante de tiempo.

- La solución total para una solución diferencial forzada de primer orden es la suma de una solución forzada y una solución no forzada (natural). La solución natural puede obtenerse del modo anterior, eliminando los términos forzados de la ecuación diferencial. La solución forzada puede obtenerse utilizando la solución forzada tentativa.
- El multiplicador de la solución natural se determina al imponer como condición, que la solución total coincida con la condición inicial.
- Si hay más de una fuente independiente, puede utilizarse la superposición para determinar la respuesta forzada general. Para cada fuente, se eliminan todas las otras fuentes, y se superponen las respuestas forzadas resultantes.
- La función en escalón unitario $u(t)$ se define como cero para $t < 0$, y 1 para $t > 0$. Es un modelo de la función de un interruptor que se enciende $t = 0$. La respuesta en escalón unitario de un circuito es una forma común para caracterizar su comportamiento.
- Mediante SPICE pueden analizarse inductores y capacitores con condiciones iniciales arbitrarias. La declaración de control .TRAN se utiliza para generar un análisis transitorio.

A diferencia de los circuitos resistivos, los circuitos de primer orden contienen respuestas que no simplemente imitan las formas de ondas de las fuentes que los excitan. Estos son los circuitos más simples que pueden crear algo nuevo, algo que no es inherente a las entradas del circuito, es decir, funciones exponenciales reales del tiempo. Los circuitos con más de un elemento de almacenamiento pueden producir un rango más amplio de respuestas nuevas, y serán el tema de nuestro siguiente capítulo.

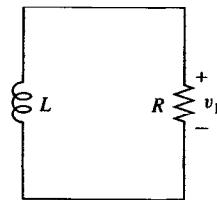
PROBLEMAS

6.1. Encuéntrese $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$ si $v(0) = 2$ V.



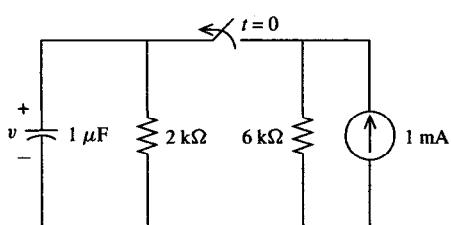
PROBLEMA P6.1

6.3. Determine $v_1(t)$ para $t > 0$ si $v(0-) = -12$ V.



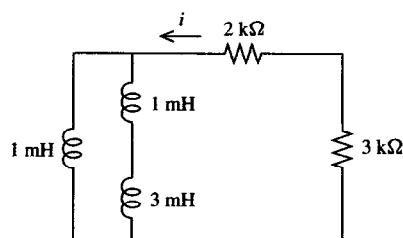
PROBLEMA P6.3

6.2. Encuéntrese $v(t)$ para $t > 0$. Suponer que el circuito está en estado estable dc en $t = 0-$.



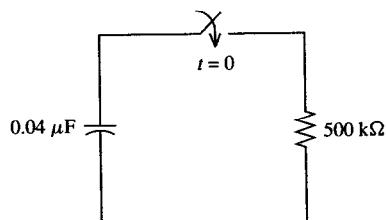
PROBLEMA P6.2

6.4. Obtenga $i(t)$, $t > 3$ s, si $i(3-) = -3$ mA.



PROBLEMA P6.4

- 6.5.** Si la potencia almacenada inicial en el capacitor en el instante $t = 0-$ es $0.18 \mu\text{J}$. ¿Cuánta energía quedará almacenada en el instante $t = 20 \text{ ms}$? ¿En el instante $t = 200 \text{ ms}$?

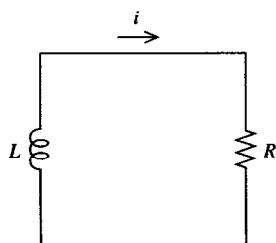


PROBLEMA P6.5

- 6.6.** La energía $w = \frac{1}{2} Li^2$ almacenada en el inductor, satisface la ecuación diferencial de primer orden forzada

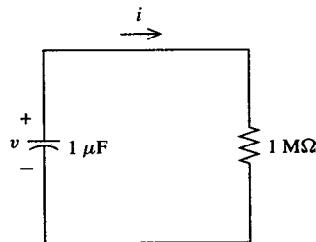
$$\frac{dw}{dt} + \alpha w = 0$$

Obtégase α .



PROBLEMA P6.6

- 6.7.** ¿Cuál es la constante de tiempo τ ? Exprésese $v(t)$ e $i(t)$ en términos de τ si $v(0) = +100 \text{ V}$.



PROBLEMA P6.7

- 6.8.** En términos de τ , ¿cuánto tiempo se requiere para que una respuesta en un circuito RC o RL no forzado decaiga en un factor de 2? ¿En un factor de 10? ¿En un factor de 1 000?

- 6.9.** Grafíquese $w(t)$ contra t para el circuito del problema 6.7. ¿Cuál es la constante de tiempo para esta forma de onda? ¿Por qué difiere de $\tau = RC$?

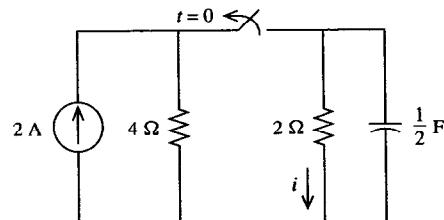
- 6.10.** De la figura 6.6, la pendiente inicial de una onda con constante de tiempo extrapolada linealmente llega a $v(t) = 0$ en $t = \tau$. ¿En qué punto una construcción similar desde el punto $v(\tau)$ se interseca con el eje horizontal?

- 6.11.** Diséñese un circuito sin fuentes con $\tau = 1 \mu\text{s}$. Si tenemos $w(0) = 1 \text{ J}$ en este circuito, ¿Cuánta energía se disipará en el instante $t = 1 \mu\text{s}$? ¿en $t = 5 \mu\text{s}$?

- 6.12.** Un circuito RL sin fuentes tiene una corriente de 4-A en el instante $t = 2 \text{ s}$ y de 1 A en el instante $t = 4 \text{ s}$. ¿Cuál fue la corriente inicial en el instante $t = 0$?

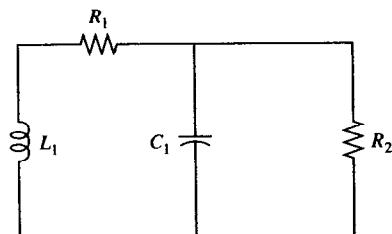
- 6.13.** Obténganse valores para R y C para que en un circuito RC sin fuente, una carga inicial de $10 \mu\text{C}$ en el instante $t = 0$ genere un voltaje de 100 V en el instante $t = 2 \text{ ms}$ y una disipación total de energía en $t > 0$ de 1 mJ .

- 6.14.** Obténgase i para $t > 0$ si el circuito está en estado estable en $t = 0-$.



PROBLEMA P6.14

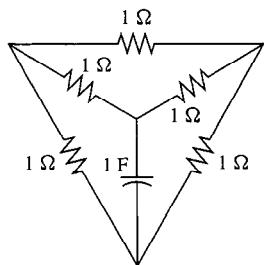
- 6.15.** Demuéstrese que este circuito está caracterizado por una ecuación diferencial de segundo orden, y por consiguiente no es un circuito de primer orden.



PROBLEMA P6.15

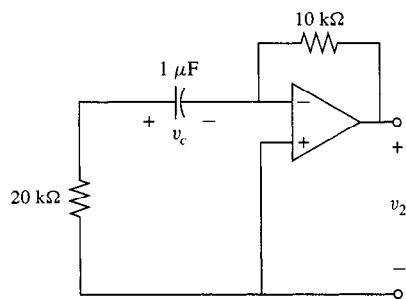
- 6.16.** Repítase el problema 6.15 para el caso en el que C_1 es sustituida por un segundo inductor L_2 .

6.17. Obténgase la constante de tiempo τ .



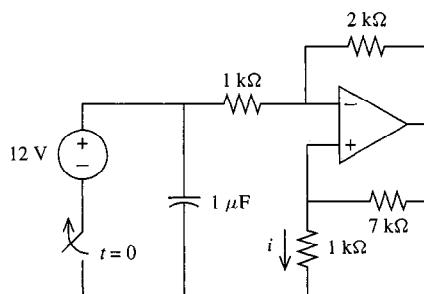
PROBLEMA P6.17

6.18. Obténgase $v_2(t)$ para $t > 0$ si $v_c(0-) = +6$ v.



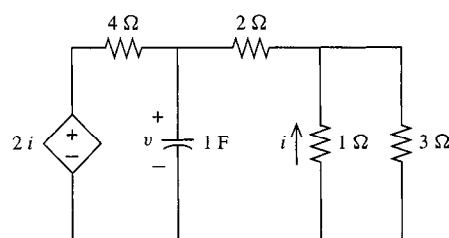
PROBLEMA P6.18

6.19. Obténgase $i(t)$, $t > 0$, si el circuito está en estado estable dc en el instante $t = 0-$.



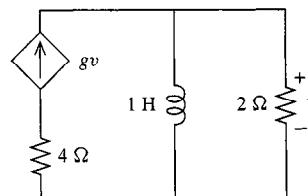
PROBLEMA P6.19

6.20. Obténgase $i(t)$ para $t > 10$ s si $v(10-) = 2$ V. Repítase para $v(10-) = 0$ V.



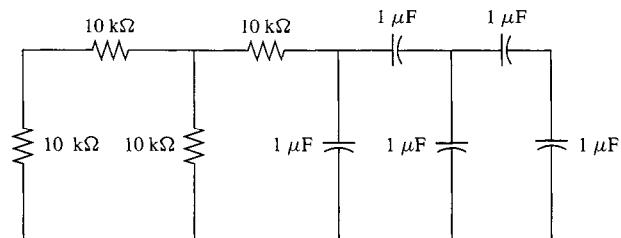
PROBLEMA P6.20

6.21. Obténgase un valor para g para que la constante de tiempo en este circuito sea $\tau = 4$ s.



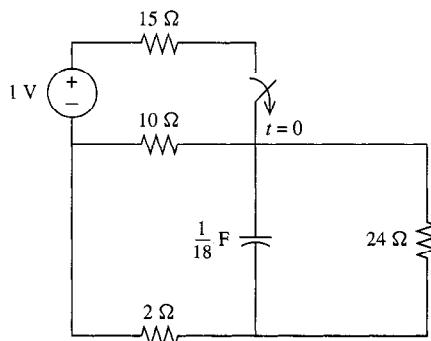
PROBLEMA P6.21

6.22. Obténgase la constante de tiempo para este circuito.



PROBLEMA P6.22

6.23. Obténganse todas las corrientes de voltaje para $t > 0$ en este circuito. Póngase en estado estable dc en $t = 0-$.



PROBLEMA P6.23

6.24. Resuelva la ecuación diferencial

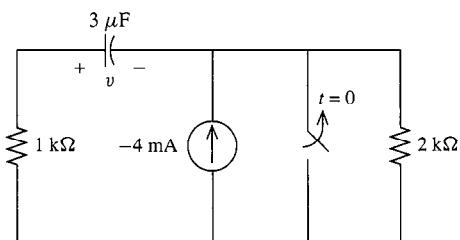
$$\frac{di}{dt} + 6i = 24, \quad i(0) = 1$$

6.25. Resuelva la ecuación

$$\int_0^t (i(\tau) + 2)d\tau + 3i(t) = 6$$

para $t > 0$ convirtiéndola en una ecuación diferencial.

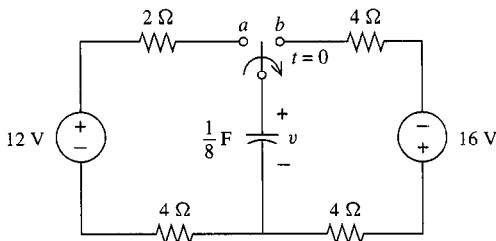
6.26. Obtenga v para $t > 0$. Supóngase un estado estable dc para $t = 0$.



PROBLEMA P6.26

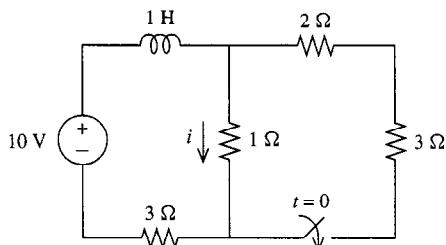
6.27. ¿En qué instante deberemos abrir el interruptor en el problema 6.26, si deseamos que el voltaje que pasa por el interruptor en $t = 40$ ms sea de 2 V?

6.28. Obténgase $v(t)$ para $t > 0$. Supóngase un estado estable dc en el instante $t = 0$.



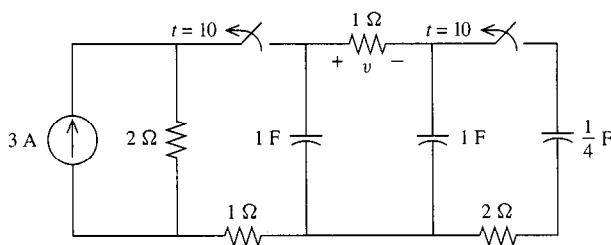
PROBLEMA P6.28

6.29. Obtenga $i(0-)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Suponer que el circuito está en estado estable dc en $t = 0$.



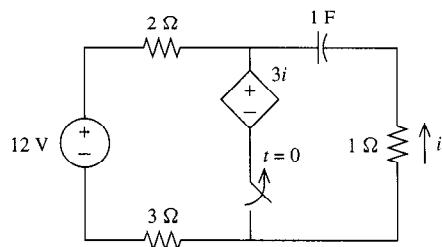
PROBLEMA P6.29

6.30. Obtenga v para $t > 10$. Supóngase un estado estable dc en $t = 10-$.



PROBLEMA P6.30

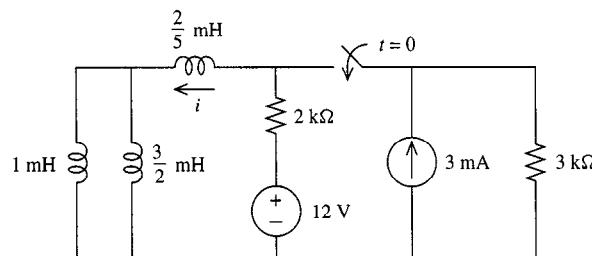
6.31. Obtenga i para $t > 0$. Supóngase un estado estable dc en $t = 0-$. La fuente controlada tiene una transresistencia de 3 Ω.



PROBLEMA P6.31

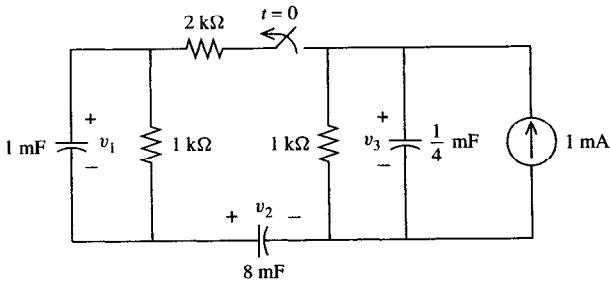
6.32. Repítase el problema 6.31 para el caso en el que el circuito se cierra, en lugar de abrirse, en el instante $t = 0$.

6.33. Obténgase i para $t > 0$. Suponer estado estable dc en el instante $t = 0$.



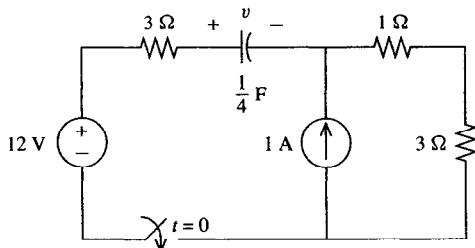
PROBLEMA P6.33

6.34. Obténgase v_1 , v_2 , y v_3 , para $t > 0$. Suponer que el circuito está en estado estable dc en el instante $t = 0-$.



PROBLEMA P6.34

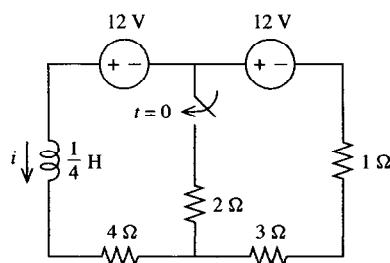
6.35. Obténgase v para $t > 0$ utilizando superposición. Suponer que el circuito está en estado estable de $t = 0-$.



PROBLEMA P6.35

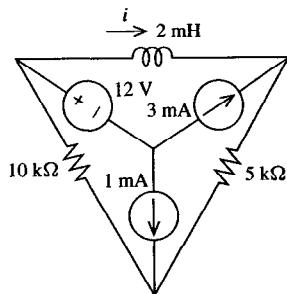
6.36. Repítase el problema 6.35 utilizando el método de la transformación de Thevenin y todos sus elementos, excepto el de almacenamiento.

6.37. Obténgase i para $t > 0$. Suponer que el circuito está en estado estable dc en $t = 0-$.



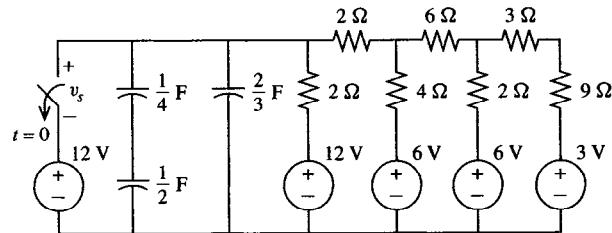
PROBLEMA P6.37

6.38. Obténganse todas las corrientes y voltajes en este circuito. Suponer $i(0-) = 0$.



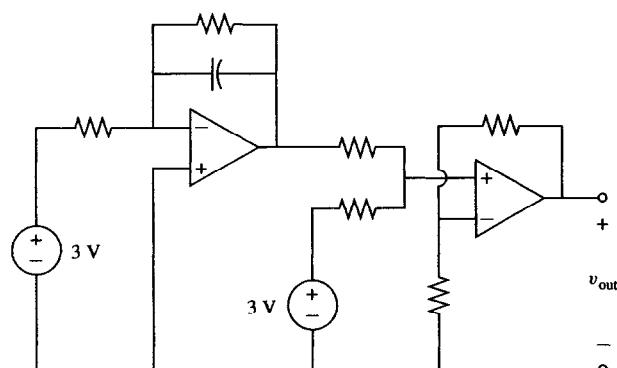
PROBLEMA P6.38

6.39. Obtenga v_s para $t > 0$. Coméntese acerca de la selección del método Norton-Thevenin contra la superposición en este problema.



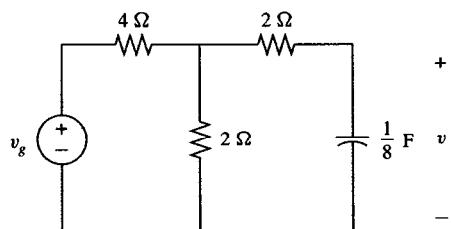
PROBLEMA P6.39

6.40. Obténgase $v_{out}(t)$ para $t > 0$. Suponer que todos los resistencias son de $10 \text{ k}\Omega$, y el capacitor es $20 \mu\text{F}$, y no tiene voltaje a través de este último en el instante $t = 0-$.

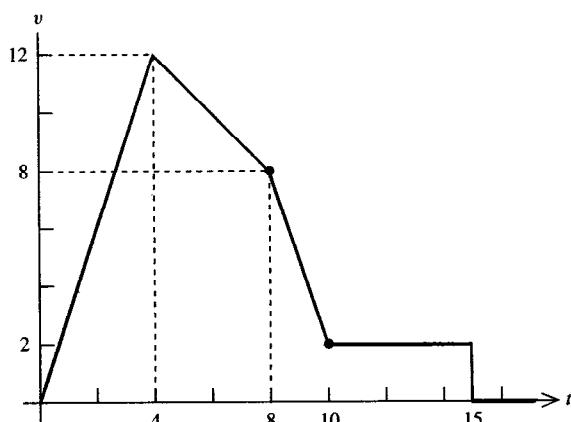


PROBLEMA P6.40

6.41. Obtener la respuesta $v(t)$.



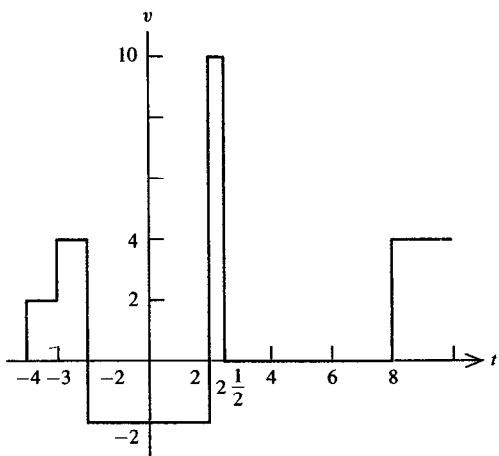
PROBLEMA P6.41



PROBLEMA P6.45

6.42. Repítase el problema 6.41 para la respuesta de pulso si $v_g(t) = u(t) - u(t - 1)$.

6.43. Expresar $v(t)$ en términos de funciones escalón.



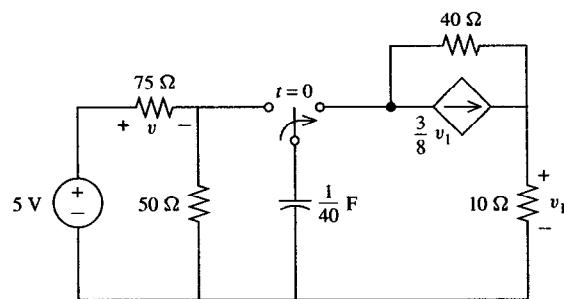
PROBLEMA P6.43

6.44. Dibujar el voltaje $v(t) = -3u(-t) + 3u(t+2) + 2u(t) - 2u(t-4)$.

6.45. Expresar $i(t)$ en términos de escalones y rampas.

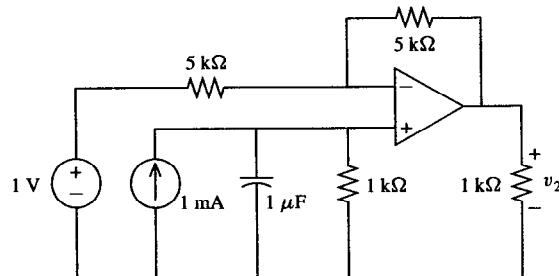
Problemas usando SPICE

6.46. Obtener v y v_1 para $t > 0$. Suponer un estado estable dc en $t = 0^-$. Compruébese utilizando SPICE. La fuente controlada tiene una transconductancia de $g = \frac{3}{8} \text{ S}$.



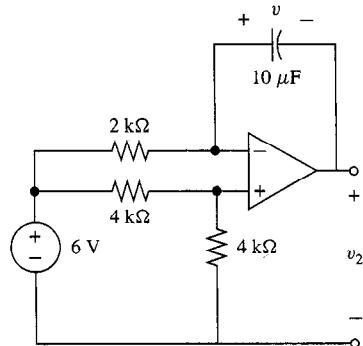
PROBLEMA P6.46

6.47. Obtener v_2 si el voltaje capacitivo en el instante $t = 0^-$ es 0. Compruébese utilizando SPICE.



PROBLEMA P6.47

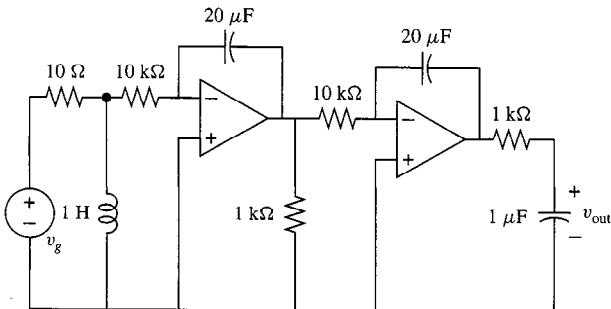
6.48. Obténgase v_2 y v para $t > t_0$ si $v(t_0) = 4$ V. Compruébese utilizando SPICE.



PROBLEMA P6.48

6.49. Resolver el problema 6.20 utilizando SPICE.

6.50. Utilice SPICE para determinar la salida del circuito a una entrada de escalón unitario. Grafiqúese la respuesta de $t = 0$ a $t = 20$ ms. Utilice subcircuitos para describir los op amps y los integradores.

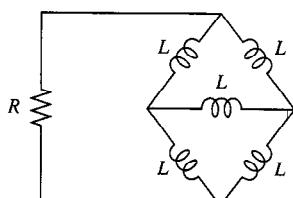


PROBLEMA P6.50

Problemas más complejos

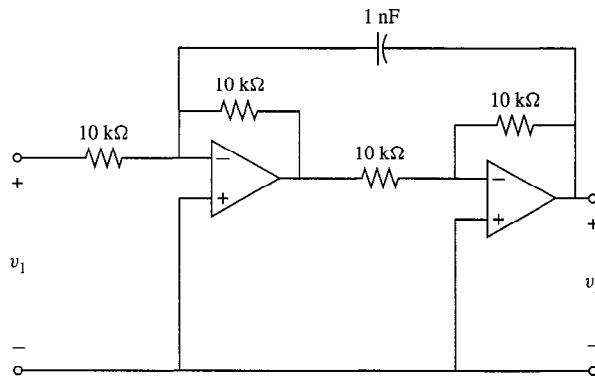
6.51. Diseñe un circuito RL sin fuente con una constante de tiempo de 10 ms utilizando únicamente inductores de 2-mH y resistencias de 1-kΩ. Use el mínimo número posible de elementos de circuitos.

6.52. Obtenga la constante de tiempo τ .



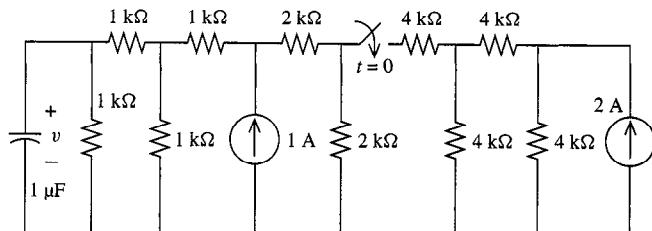
PROBLEMA P6.52

6.53. Obtenga la respuesta en escalón unitario $v_2(t)$ a la entrada $v_1(t)$.



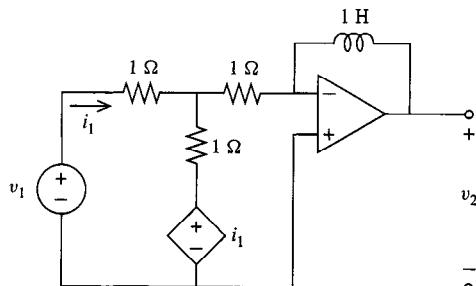
PROBLEMA P6.53

6.54. Obtenga $v(t)$, $t > 0$, si el circuito está en estado estable dc en $t = 0$.



PROBLEMA P6.54

6.55. Obtenga la ecuación de transferencia de voltaje para $v_2(t)$ en términos de $v_1(t)$.



PROBLEMA P6.55

6.56. Repita el problema 6.28 para el caso en que el interruptor se mueve $a \rightarrow b$ en $t = 0$ y luego regresa a a en el instante $t = 3$ s.



Samuel F. B. Morse
1791-1872

"¡Lo que Dios ha forjado!"
[El famoso mensaje transmitido por el primer telégrafo]

Samuel F. B. Morse

7

Circuitos de segundo orden

Muchos dicen que la primera aplicación práctica de la electricidad fue el telégrafo, desarrollado por Samuel F. B. Morse, retratista e inventor estadounidense. Morse se basó en las ideas del también famoso físico estadounidense Joseph Henry, utilizando interruptores que se abrían y cerraban para producir puntos y rayas (o clave Morse) que representan letras y números.

Morse nació en Charlestown, Massachusetts, hijo de un ministro y autor. Estudió artes en Yale y en la Real Academia de Artes de Londres, y en 1815 era moderadamente conocido. En 1826 colaboró en la fundación y fue el primer presidente de la Academia Nacional de Diseño. Pero el año anterior había fallecido su esposa, en 1826 murió su padre y en 1828 falleció su madre. Al año siguiente, el alterado Morse viajó a Europa para recuperarse y continuar sus estudios. En 1832, de regreso a casa a bordo del barco de pasajeros *Sully*, conoció a un excéntrico inventor y se interesó en el desarrollo de un telégrafo, cuyo principio ya había sido considerado por Henry. Para 1836, Morse ya tenía un modelo funcional, y en 1837 consiguió un socio, Alfred Vail, quien financió el proyecto. Sus esfuerzos fueron recompensados por una patente, y el Congreso financió un telégrafo en 1844, a través del cual Morse, el 24 de mayo de ese año, transmitiría su ya famoso mensaje "¡Lo que Dios ha forjado!"

Contenido del capítulo

- 7.1 Circuitos con dos elementos de almacenamiento
- 7.2 Ecuaciones de segundo orden
- 7.3 Respuesta natural
- 7.4 Respuesta forzada
- 7.5 Respuesta total
- 7.6 Respuesta de escalón unitario
- Resumen
- Problemas



Las ecuaciones de análisis de circuitos para circuitos lineales con elementos de almacenamiento de energía pueden expresarse como ecuaciones diferenciales lineales, porque las leyes de elementos son tales que cada término en las ecuaciones nodales o de malla son una derivada, una integral, o un múltiplo de incógnitas y las variables de fuente. Evidentemente, diferenciar una sola vez eliminará las integrales que puedan contener, de forma que, en general, las ecuaciones de análisis nodal o de malla para un circuito dado pueden ser considerados como ecuaciones diferenciales. La *ecuación descriptiva*, una sola ecuación cuya incógnita es una corriente o voltaje de salida seleccionadas, puede obtenerse mediante manipulación de estas ecuaciones de análisis.

Los circuitos que contienen elementos de almacenaje que consideramos hasta ahora, fueron circuitos de primer orden. Es decir, fueron descritos por ecuaciones diferenciales de primer orden. Este es siempre el caso, cuando hay un solo elemento de almacenaje en el circuito, cuando queda sólo uno después de la simplificación en serie-paralelo, o cuando la acción de un interruptor divide el circuito en dos o más subcircuitos independientes, donde cada uno tiene cuando más un solo elemento de almacenamiento.

En este capítulo, consideraremos circuitos de segundo orden, los cuales, como veremos, contienen dos elementos de almacenamiento, y sus ecuaciones descriptivas son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Demostraremos que la respuesta total es la suma de una respuesta natural y otra forzada, como fue el caso en los circuitos de primer orden. Un examen de la ecuación característica muestra que la respuesta natural de un circuito *RLC* no está limitada a decaimientos exponenciales reales, como en el caso de los circuitos *RC* o *RL*, sino que también incluye sinusoides, sinusoides amortiguadas y formas *t*-multiplicadas. La respuesta forzada se determina de una forma tentativa, al igual que en los circuitos de primer orden, y la respuesta total se calcula al imponerse que se satisfagan dos condiciones iniciales, derivadas de las energías iniciales almacenadas en los dos elementos de almacenamiento.

En general, los circuitos de orden *n*, que contienen *n* elementos de almacenaje, quedan descritos por ecuaciones diferenciales de orden *n*. Los resultados para los circuitos de primero y segundo orden pueden extenderse inmediatamente al caso general, utilizando los métodos basados en ecuaciones diferenciales de los capítulos 5 y 6, pero no lo haremos en el presente capítulo. Existe un método más eficiente para analizar estos circuitos de orden mayor, basado en el análisis de transformadas de Laplace, que será presentado en el capítulo 12.

Los circuitos considerados en el capítulo 6 dieron como resultado ecuaciones descriptivas de primer orden. Si el circuito tiene dos elementos de almacenamiento, un inductor y un capacitor, o dos del mismo tipo, pero no un equivalente en serie o en paralelo a un solo elemento, el circuito queda descrito por una ecuación diferencial de segundo orden.

Ejemplo 7.1

Considérese el circuito de la figura 7.1, en donde buscamos la corriente de malla i_2 . El circuito contiene dos inductores. Las ecuaciones de malla son

$$2di_1/dt + 12i_1 - 4i_2 = v_g \quad (7.1a)$$

$$-4i_1 + di_2/dt + 4i_2 = 0 \quad (7.1b)$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$i_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{di_2}{dt} + 4i_2 \right) \quad (7.2)$$

que al diferenciarla da como resultado

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{4} \left(\frac{d^2i_2}{dt^2} + 4 \frac{di_2}{dt} \right) \quad (7.3)$$

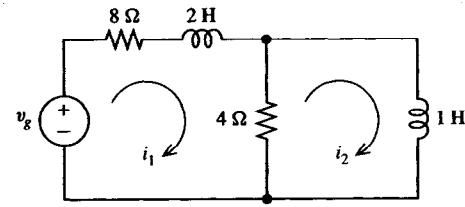


FIGURA 7.1 Circuito de segundo orden con dos inductores.

Sustituyendo (7.2) y (7.3) en (7.1a) para eliminar i_1 , obtenemos, después de multiplicar por 2, la ecuación descriptiva para i_2 :

$$d^2i_2/dt^2 + 10di_2/dt + 16i_2 = 2v_g \quad (7.4)$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden (en donde el mayor orden de diferenciación de la incógnita es 2). Por esta razón, nos referiremos a la figura 7.1 como un *circuito de segundo orden* y haremos notar que, típicamente, los circuitos de segundo orden contienen dos elementos de almacenaje.

Los dos elementos de almacenaje en un circuito de segundo orden pueden ser del mismo tipo, como en la figura 7.1, o un inductor y un capacitor, como en la figura 7.2. Éste es el muy importante *circuito en serie RLC*, al que volveremos a lo largo de este capítulo. Por LVK,

$$Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_c(t_0) + L \frac{di}{dt} = v_g$$

Diferenciando y dividiendo entre L , se obtiene:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{dv_g}{dt}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden; de ahí que el circuito *RLC* en serie sea también un circuito de segundo orden.

Existen excepciones a la regla de que los circuitos con dos elementos de almacenamiento tengan ecuaciones descriptivas de segundo orden. Si se pueden reemplazar dos o más elementos de almacenamiento del mismo tipo (inductores o capacitores) por un solo equivalente, cuenta como un solo elemento de almacenamiento para determinar el orden de la ecuación descriptiva. En otros casos, los

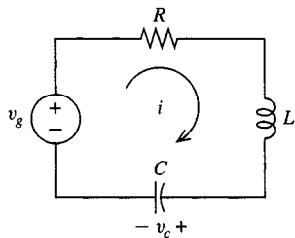


FIGURA 7.2 Circuito *RLC* en serie.

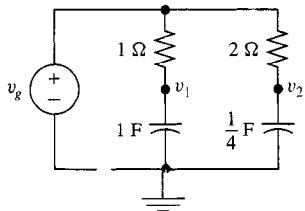


FIGURA 7.3 Circuito de primer orden con dos elementos de almacenamiento.

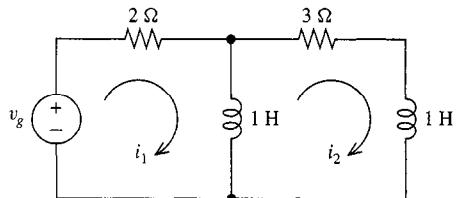
elementos de almacenaje pueden no interactuar. Por ejemplo, considérese el circuito de la figura 7.3, que tiene dos capacitores. Las ecuaciones de análisis nodal para este circuito son

$$\frac{dv_1}{dt} + v_1 = v_g$$

$$\frac{dv_2}{dt} + 2v_2 = 2v_g$$

Éstas son ecuaciones diferenciales de primer orden *no acopladas*, es decir, no hay incógnita que aparezca en ambas ecuaciones. Cada una puede ser resuelta utilizando los métodos del capítulo 6. Puesto que las ecuaciones descriptivas son de primer orden, éste no es un circuito de segundo orden, aun cuando hay en el circuito dos elementos de almacenamiento que no son reducibles a un solo equivalente. Sin embargo, si en este circuito se reemplaza la fuente de voltaje ideal por una fuente práctica, con una resistencia de equivalencia de Thevenin no nula, se obtiene un circuito de segundo orden, como se muestra en el ejercicio 7.1.2.

EJERCICIOS



EJERCICIO 7.1.1

- 7.1.1. Obténgase la ecuación que satisface la corriente de malla i_2 .

Respuesta $\frac{d^2i_2}{dt^2} + 7(\frac{di_2}{dt}) + 6i_2 = \frac{dv_g}{dt}$

- 7.1.2. Coloque una resistencia de 1–Ω en serie, con la fuente de voltaje ideal v_g en la figura 7.3, y obténganse las ecuaciones descriptivas para v_1 y v_2 .

Respuesta $\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{11}{5}\frac{dv_1}{dt} + \frac{4}{5}v_1 = \frac{2}{5}\frac{dv_g}{dt} + \frac{4}{5}v_g$,

$$\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{11}{5}\frac{dv_2}{dt} + \frac{4}{5}v_2 = \frac{4}{5}\frac{dv_g}{dt} + \frac{4}{5}v_g$$

- 7.1.3. Obténgase v_1 y v_2 en la figura 7.3 para $t > 0$ si v_g es una fuente dc ideal de +6-V, $v_1(0-) = 1$ V, y $v_2(0-) = 4$ V.

Respuesta $6 - 5e^{-t}$ V, $6 - 2e^{-2t}$ V

7.2

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

En el capítulo 6 consideramos circuitos de primer orden, y vimos que sus ecuaciones descriptivas son ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma general

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t) \quad (7.5)$$

En la sección 7.1, definimos los circuitos de segundo orden como aquellos con ecuaciones descriptivas que son ecuaciones diferenciales de segundo orden, dadas de modo general por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \quad (7.6)$$

En (7.5) y (7.6), las letras a son constantes reales; x puede ser un voltaje o una corriente, y $f(t)$ la función forzada, que es una función de tiempo conocida, y determinada por las fuentes independientes. Como ejemplo, para el circuito de la figura 7.1, la ecuación des-

criptiva es (7.4). Comparando esta ecuación con (7.6), vemos que $a_1 = 10$, $a_0 = 16$, $f(t) = 2v_g$ y $x = i_2$.

Del capítulo 6, sabemos que la respuesta total que satisface (7.5) es

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t)$$

donde $x_n(t)$ es la respuesta natural, obtenida al fijar $f(t) = 0$, y $x_f(t)$ es la respuesta forzada, que satisface la ecuación diferencial forzada (7.5).

Veamos si este mismo procedimiento puede ser aplicado a la ecuación de segundo orden (7.6). Por solución de (7.6), queremos decir cualquier función x que satisfaga idénticamente a (7.6). Es decir, cuando x es sustituida en (7.6), el miembro izquierdo de la ecuación se hace idénticamente igual a $f(t)$ para toda t dentro de una región especificada de la solución, que generalmente es $t > t_0$ para un tiempo inicial t_0 .

Si x_n es la respuesta natural, debe satisfacer la ecuación diferencial no forzada (*u homogénea*).

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + a_1 \frac{dx_n}{dt} + a_0 x_n = 0 \quad (7.7)$$

Y si x_f es la solución forzada, satisface la ecuación forzada original

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1 \frac{dx_f}{dt} + a_0 x_f = f(t) \quad (7.8)$$

Sumando (7.7) y (7.8) y reagrupando los términos, podemos escribir la ecuación como

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_n + x_f) + a_1 \frac{d}{dt}(x_n + x_f) + a_0(x_n + x_f) = f(t) \quad (7.9)$$

Comparando (7.6) y (7.9), vemos que la suma de x_n y x_f es ciertamente una solución, como lo fue en el caso de primer orden. Es decir, la x que satisface (7.6) está compuesta de dos componentes, una respuesta natural x_n que satisface la ecuación homogénea (7.7) y una respuesta natural x_f que satisface la ecuación original (7.8) o (7.6). Como veremos, la respuesta natural contendrá dos constantes arbitrarias y, al igual que en el caso del primer orden, elegiremos una solución forzada tentativa para que no posea constantes arbitrarias. En las dos siguientes secciones, consideraremos métodos para obtener las respuestas natural y forzada.

Si las fuentes independientes son tales que $f(t) = 0$ en (7.6), entonces la respuesta forzada es cero, y la solución de la ecuación diferencial es simplemente la respuesta natural. El lector que ya pasó por un curso de ecuaciones diferenciales notará que la respuesta natural y la respuesta forzada también pueden ser llamadas, respectivamente, *solución complementaria* y *solución particular*. La solución natural o complementaria contiene las constantes arbitrarias necesarias para obtener las condiciones iniciales, como se discutirá en la sección 7.5, y la solución particular, como su nombre lo sugiere, no contiene constantes libres.

EJERCICIOS

7.2.1. Demuéstrese que $x_1 = K_1 e^{-2t}$ y $x_2 = K_2 e^{-3t}$ son cada una soluciones de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

sin importar los valores de las constantes K_1 y K_2 .

7.2.2. Demuéstrese que $x_1 + x_2 = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t}$ también satisface la ecuación del ejercicio 7.2.1, sin importar los valores de K_1 y K_2 .

7.2.3. El resultado obtenido de las ecuaciones (7.7) a (7.9), en el sentido que $x_n + x_f$, es una solución en tanto que x_n sea una respuesta natural y x_f una respuesta forzada, ¿también se aplica a circuitos de tercer orden? A un orden mayor?

Respuesta Sí; sí

7.2.4. Para la ecuación diferencial de segundo orden *no lineal*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (1 + f(t))x$$

demuestre que $x_n = K_1 e^{+t} + K_2 e^{-t}$ es la respuesta natural y $x_f = x_n = e^{+2t} - e^{-2t}$ es la respuesta forzada al término forzado $f(t) = 3$; verifique si $x_n + x_f$ satisface la ecuación. El resultado de las ecuaciones (7.7) a (7.9), en el sentido de que $x_n + x_f$ es una solución en tanto que x_n sea la respuesta natural y x_f una respuesta forzada, ¿también se aplica a circuitos *no lineales*?

Respuesta No; no

7.3 | RESPUESTA NATURAL

La respuesta natural x_n , una componente de la solución $x = x_n + x_f$, debe satisfacer la ecuación no forzada, que repetimos de (7.7):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (7.10)$$

La forma tentativa para la solución natural

$$x_n(t) = K e^{st} \quad (7.11)$$

funcionó bien para el caso de primer orden. Veamos si nos ayuda en el caso de segundo orden. Toda solución natural debe satisfacer (7.10), de forma que sustituyendo x_n de (7.11),

$$\begin{aligned} & K s^2 e^{st} + K a_1 s e^{st} + K a_0 e^{st} = 0 \\ & 0 \quad K e^{st} (s^2 + a_1 s + a_0) = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Si la forma tentativa funciona, esta función debe ser verdadera para cada t , pues de otro modo (7.10) no sería vigente. La ecuación (7.12) funcionará si $K = 0$ o el factor entre paréntesis es cero (e^{st} no puede ser cero para ningún instante t). Si $K = 0$, tenemos la solución nula, $x_n(t) = 0$ para toda t . Esto corresponde al caso especial en que no hay energía almacenada. De forma más general, no tendremos $x_n = 0$ en el tiempo inicial, de forma que tampoco podremos tener $K = 0$. Esto deja únicamente la posibilidad de que el otro factor en (7.12) sea cero, o

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (7.13)$$

Ésta es la ecuación característica presentada en el capítulo 6 para circuitos de primer orden. Nótese que puede ser fácilmente derivada de (7.10), simplemente sustituyendo las derivadas por las correspondientes potencias de s . Es decir, la segunda derivada de x es reemplazada por s^2 , la primera derivada por s , y la derivada cero de x , que es x misma, es reemplazada por $s^0 = 1$.

Puesto que (7.13) es una ecuación cuadrática, no tenemos una sola solución, como en el caso del primer orden, sino en general dos soluciones, s_1 y s_2 , dadas por la

forma cuadrática como

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1^2 - 4a_0)}}{2} \quad (7.14)$$

A diferencia del caso de primer orden, tenemos dos soluciones naturales de la forma Ke^{st} , que denotamos por

$$x_{n1} = K_1 e^{s_1 t} \quad (7.15a)$$

$$x_{n2} = K_2 e^{s_2 t} \quad (7.15b)$$

Cualquiera de las dos soluciones (7.15), satisfará la ecuación no forzada para cualquier valor de K_1 o K_2 , porque sustituyendo cada una en (7.10), la reduce a (7.12). Y sabemos que, puesto que s_1 y s_2 satisfacen cada una la ecuación característica (7.13), (7.12) ciertamente será verdadera con $s = s_1$ o $s = s_2$.

De hecho, como (7.10) es una ecuación lineal, *toda combinación lineal* de las dos soluciones naturales distintas (7.14) es también una solución. Es decir,

$$x_n = x_{n1} + x_{n2} = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (7.16)$$

es una solución de (7.10) para cualquier par de valores K_1 y K_2 en tanto que s_1 y s_2 satisfagan la ecuación característica. Para verificar esto, necesitamos únicamente sustituir esta expresión por x en (7.10). La consecuencia es

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(x_{n1} + x_{n2}) + a_1 \frac{d}{dt}(x_{n1} + x_{n2}) + a_0(x_{n1} + x_{n2}) \\ = \left(\frac{d^2 x_{n1}}{dt^2} + a_1 \frac{dx_{n1}}{dt} + a_0 x_{n1} \right) + \left(\frac{d^2 x_{n2}}{dt^2} + a_1 \frac{dx_{n2}}{dt} + a_0 x_{n2} \right) \\ = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Puesto que (7.16) incluye las soluciones individuales (7.15a, b) como casos especiales, se designa como *solución general de la ecuación homogénea* si s_1 y s_2 son raíces distintas (es decir, no iguales) de la ecuación característica (7.12). Nótese que si fijamos $K_2 = 0$ en (7.16), obtenemos x_{n1} , y $K_1 = 0$ resulta en x_{n2} .

Ejemplo 7.2

Como ejemplo, repetiremos aquí la ecuación homogénea correspondiente a (7.4) en el ejemplo 7.1,

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 10 \frac{di_2}{dt} + 16 i_2 = 0 \quad (7.17)$$

y la ecuación característica es

$$s^2 + 10s + 16 = 0$$

Las raíces son $s = -2$ y $s = -8$, por lo que la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$i_2 = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-8t} \quad (7.18)$$

El lector puede verificar por sustitución directa que (7.18) satisface (7.17), sin importar el valor de las constantes no especificadas K_1 y K_2 .

Los números s_1 y s_2 se conocen como *exponentes característicos* del circuito. En el ejemplo anterior, son los reciprocos negativos de las constantes de tiempo que se considerarán en el capítulo 8. Existen dos constantes de tiempo en (7.18), en comparación a una sola en el caso del primer orden.

Para los sistemas de segundo orden, la ecuación característica es una ecuación cuadrática. A diferencia de los sistemas de primer orden, cuya ecuación característica siempre tiene una sola solución real, sus soluciones s_1 y s_2 pueden ser números reales o complejos. La naturaleza de las raíces queda determinada por el discriminante en la ecuación característica, que puede ser positivo (correspondiente a dos raíces reales distintas), negativo (raíces complejas), o cero (raíces repetidas reales). Para simplificar la discusión de estos casos, rescribiremos la ecuación característica (7.13) como

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad (7.19)$$

ω_0 se conoce como *frecuencia natural no amortiguada* y ζ se conoce como *proporción de amortiguación*. La justificación de estos nombres pronto será aparente. Comparando (7.13) con (7.19), $\omega_0^2 = a_0$ sustituyéndolos en $2\zeta\omega_0 = a_1$. Substituyéndolos en (7.14) s_1 y s_2 pueden ser expresados en términos de la frecuencia natural no amortiguada ω_0 , y la proporción de amortiguación igual a ζ .

Un circuito con ecuación característica $s^2 + a_1 s + a_0$ tiene:

$$\text{Frecuencia natural no amortiguada: } \omega_0 = +\sqrt{a_0}$$

$$\text{Proporción de amortiguación: } \zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \quad (7.20)$$

$$\text{Exponentes característicos: } s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0$$

Por ejemplo, un circuito con ecuación característica $s^2 + 2s + 16$ tiene una frecuencia natural no amortiguada $\omega_0 = +\sqrt{16} = 4$ rad/s y una proporción de amortiguación $\zeta = 2/(2)(4) = 1/4$. Los exponentes característicos para este circuito son

$$s_{1,2} = \left(-\frac{1}{4} \pm \sqrt{[-15/16]} \right) (4) = -1 \pm j\sqrt{15}$$

Aquí, $j = \sqrt{-1}$, que es la notación que utilizaremos para el número complejo de longitud unitaria dirigida sobre el eje imaginario en el plano complejo (véase el apéndice B para un repaso de los números complejos).

Ejemplo 7.3

El circuito de la figura 7.4 se conoce como *circuito RLC en paralelo*. La ecuación nodal para este circuito es

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_L(t_0) + C \frac{dv}{dt} = i_g$$

Diferenciando y dividiendo ambos lados entre C , la ecuación descriptiva para v es

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{1}{C} \frac{di_g}{dt}$$

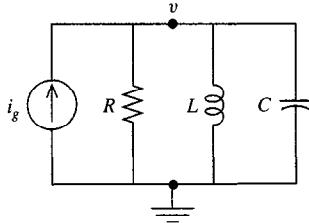


FIGURA 7.4 Circuito *RLC* en paralelo.

Entonces, la ecuación característica es

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Por (7.20), la frecuencia natural no amortiguada de este circuito es

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

y la proporción de amortiguación de este circuito paralelo *RLC* es

$$\zeta_p = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Si la proporción de amortiguación es $\zeta < 1$, entonces el discriminante $\zeta^2 - 1 < 0$, y por (7.20), los exponentes característicos son complejos. Si $\zeta > 1$, por (7.20) habrá dos exponentes característicos reales. Debido a que $\zeta = 1$ es la frontera entre estos dos comportamientos distintos, se conoce como *amortiguación crítica*.

Fijando $\zeta = 1$ y resolviendo para R , podemos definir la *resistencia paralela crítica* R_{cp} .

$$R_{cp} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Para $R > R_{cp}$, la proporción de amortiguación $\zeta < 1$, que será descrita a continuación como el caso subamortiguado, y para $R < R_{cp}$, tenemos $\zeta > 1$, el caso sobreamortiguado.

Los tres casos posibles, de que los exponentes característicos sean reales y distintos ($\zeta > 1$), reales y repetidos ($\zeta = 1$) o conjugados complejos ($\zeta < 1$), producen comportamientos radicalmente distintos de la respuesta natural en el circuito de segundo orden. Ahora consideraremos estos tres casos, denotando la parte real del exponente característico general s como σ , y la parte imaginaria ω , de forma que

$$s = \sigma + j\omega$$

Caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$)

Con $\zeta > 1$, los exponentes característicos s_1 y s_2 en (7.20) son reales y distintos, puesto que el discriminante $\zeta^2 - 1 > 0$. En este caso, cada s tiene sólo una parte real,

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_2$$

y la respuesta natural está dada por la suma de dos exponenciales reales,

$$x_n(t) = K_1 e^{\sigma_1 t} + K_2 e^{\sigma_2 t} \quad (7.21)$$

Los ejemplos incluyen el circuito de la figura 7.1 analizado en el ejemplo 7.1, y el circuito paralelo *RLC* discutido en el ejemplo 7.3 cuando R es menor que la resistencia paralela crítica R_{cp} .

Los dos exponentes característicos reales σ_1 o σ_2 pueden ser positivos, negativos o cero. Sin embargo, para circuitos que consisten únicamente de elementos pasivos impulsados por fuentes independientes, no es posible que el exponente característico sea positivo, porque un σ_1 o σ_2 positivo implica que $x_n(t)$ debe crecer en magnitud, eventualmente excediendo todas las fronteras conforme t se hace mayor. Esto no puede ocurrir, porque en un circuito pasivo con fuentes independientes eliminadas (estamos interesados en la respuesta natural), la energía total almacenada en el circuito nunca puede incrementarse más allá de la energía almacenada inicial.

La *amortiguación* es la pérdida gradual de energía almacenada inicial, es decir, el decaimiento de la respuesta natural a cero. Los circuitos pasivos con raíces reales distintas tienen respuestas naturales con dos términos, donde cada uno decrece exponencialmente a cero. Por consiguiente, $\zeta > 1$ se conoce como caso *sobreamortiguado*. En el caso sobre-amortiguado hay suficiente amortiguación para que cada término en la respuesta natural pierda constantemente amplitud. En casos de amortiguación más leve, la amortiguación puede estar acompañada de oscilaciones, como lo veremos a continuación.

Caso subamortiguado ($\zeta < 1$)

Si $\zeta < 1$, por (7.20) los exponentes característicos son complejos:

$$s_1 = \sigma + j\omega, \quad s_2 = \sigma - j\omega, \quad \omega \neq 0$$

Deben ser *conjugados* complejos (las partes reales son iguales, y también las partes imaginarias, pero estas últimas son de signo opuesto). Esto sigue inmediatamente de aplicar la fórmula cuadrática a la ecuación característica (7.14). Entonces

$$x_n(t) = e^{\sigma t} (K_1 e^{+j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t}) \quad (7.22)$$

Necesitamos utilizar algunas propiedades de los números complejos para esclarecer esta forma y reconocer su estructura. Para un circuito real, uno con leyes y fuentes de elementos puramente reales, x_n también será real. Esto requiere que K_1 y K_2 sean conjugados complejos, puesto que de otro modo la parte imaginaria de x_n en (7.22) no sería cero. Puesto que la suma de un número complejo y su conjugado es el doble de su parte real,

$$x_n = (K_1 e^{+j\omega t} + K_1^* e^{-j\omega t}) e^{\sigma t} = 2\operatorname{Re}\{K_1 e^{+j\omega t}\} e^{\sigma t} \quad (7.23)$$

donde $K_2 = K_1^*$ es el *conjugado complejo* de K_1 . La parte real de un producto de números complejos es el producto de sus partes reales, menos el producto de las partes imaginarias. Utilizando la identidad de Euler

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (7.24)$$

podemos expandir la parte real del producto de (7.23) como

$$\operatorname{Re}\{K_1 e^{+j\omega t}\} = \frac{1}{2} B_1 \cos \omega t - \frac{1}{2} B_2 \sin \omega t$$

donde, para nuestra conveniencia, definimos

$$\operatorname{Re}\{K_1\} = \frac{1}{2} B_1, \quad \operatorname{Im}\{K_1\} = \frac{1}{2} B_2$$

$$B_1 = 2 \operatorname{Re}\{K_1\}, \quad B_2 = 2 \operatorname{Im}\{K_1\}$$

La ecuación (7.22) puede entonces rescribirse en términos de cantidades reales como

$$x_n(t) = B_1 e^{\sigma t} \cos \omega t + B_2 e^{\sigma t} \sin \omega t \quad (7.25)$$

En tanto que el caso sobreamortiguado consiste en dos términos que decaen constantemente, en el caso presente (7.25) el decaimiento está modulado por (multiplicado por) oscilaciones sinusoidales de frecuencia ω rad/s. Puesto que la amortiguación es osculatoria en lugar de constante, esto se conoce como caso *subamortiguado*, que ocurre cuando la proporción de amortiguación es menor que el valor crítico de la unidad.

Nótese que la amplitud de estas oscilaciones decae como $e^{\sigma t}$, de forma que la proporción de amortiguación varía inversamente respecto a σ . El caso extremo es $\sigma = 0$, que no produce ningún decaimiento. Este es el caso *no amortiguado*, que ocurre cuando la proporción de amortiguación $\zeta = 0$. La respuesta natural no amortiguada (7.25) es un sinusode de amplitud constante cuya frecuencia es, por (7.20), $\omega = \omega_0$. Esto explica por qué ω_0 se conoce como frecuencia natural no amortiguada

Caso críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)

El último tipo que tenemos son exponentes característicos que son reales e iguales, un caso que surge cuando la proporción de amortiguación ζ es la unidad en (7.20). Esta es la línea divisoria entre los casos sobreamortiguado y subamortiguado, y se conoce como caso críticamente amortiguado

$$s_1 = s_2 = \sigma$$

En este caso, la forma general para la solución natural dada en (7.16) no contiene dos constantes libres, puesto que ambos términos pueden reducirse a uno. Si podemos satisfacer las condiciones iniciales impuestas por dos elementos de almacenaje, debemos generalizar más la forma tentativa para la solución natural. Considérese la forma tentativa

$$x_n = h(t) e^{\sigma t} \quad (7.26)$$

Hasta ahora, hemos utilizado $h(t) = 1$. Para ver si funciona otra $h(t)$, sustituimos (7.25) en la ecuación diferencial no forzada (7.10). Utilizando la regla de los productos para calcular derivadas, luego de reagrupar términos similares,

$$e^{\sigma t} [h(s^2 + a_1 s + a_0) + \frac{dh}{dt}(2s + a_1) + \frac{d^2 h}{dt^2}] = 0 \quad (7.27)$$

Evaluando esta ecuación para el presente caso de raíz repetida $s = \sigma$, el primer término entre paréntesis cuadrado es cero, puesto que σ satisface la ecuación característica, y el segundo término es cero puesto que

$$s + a_1 s + a_0 = (s - \sigma)^2 = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2$$

lo que demuestra que $a_1 = -2\sigma$, así $2s + a_1 = 2\sigma - 2\sigma = 0$. Por consiguiente (7.26) queda satisfecha si y sólo si

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = 0$$

Esta ecuación en $h(t)$ tiene soluciones

$$h(t) = K_1 + K_2 t$$

Nuestra forma tentativa modificada para este caso es a partir de (7.26) y lo anterior,

$$x_n(t) = K_1 e^{\sigma t} + K_2 t e^{\sigma t} \quad (7.28)$$

En tanto que el primer término es la conocida forma tentativa exponencial, la segunda difiere por un factor adicional de t , y se conoce como *forma t -multiplicada*. La solución natural en el caso críticamente amortiguado consiste en la suma de un término exponencial y su forma t -multiplicada asociada.

Ejemplo 7.4

Considérese el circuito RLC en serie de la figura 7.2. La ecuación descriptiva fue obtenida como

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{dv_g}{dt}$$

La ecuación característica es

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Por (7.20), la frecuencia natural no amortiguada de este circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y la proporción de amortiguación para el caso RLC serie es

$$\zeta_s = \frac{R}{2\sqrt{C/L}}$$

La *resistencia crítica en serie* R_{cs} se obtiene al resolver para R con $\zeta = 1$:

$$R_{cs} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.29)$$

Conforme R aumenta, también aumenta la proporción de amortiguación ζ_s , y para valores de R mayores que R_{cs} , el circuito está sobre-amortiguado (tiene dos exponentes característicos reales). La relación opuesta es vigente para el circuito paralelo RLC discutido en el ejemplo 7.3, en donde la proporción de amortiguación ζ_p disminuye al crecer la resistencia en paralelo, y R mayor que R_{cp} produce el comportamiento subamortiguado.

Para ilustrar el caso RLC en serie, fijemos $L = 1 \text{ H}$ y $C = 1/4 \text{ F}$ en la figura 7.2, y consideremos cómo la solución natural depende de R . La ecuación no forzada en este caso es

$$\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + 4i = 0$$

con ecuación característica

$$s^2 + Rs + 4 = 0$$

Por (7.20), $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ y $\zeta = R/4$. El caso críticamente amortiguado es $R = 4 \Omega$. En este caso $s = \sigma = -2$ es el exponente característico repetido, y

$$i_n = K_1 e^{-2t} + K_2 t e^{-2t} \quad (\text{críticamente amortiguado}) \quad (7.30)$$

El caso sobreamortiguado requiere $\zeta = R/4 > 1$. Seleccionando $R = 5 \Omega$ como ejemplo, las raíces son $s_1 = -4$ y $s_2 = -1$, y

$$i_n = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t} \quad (\text{sobreamortiguado}) \quad (7.31)$$

El caso subamortiguado $\zeta < 1$ requiere que $R < 4$. Por ejemplo, con $R = 2$, tenemos $s_1 = \sigma + j\omega = -1 + j\sqrt{3}$ y $s_2 = \sigma - j\omega = -1 - j\sqrt{3}$. En este caso, la respuesta natural es

$$i_n = K_1 e^{-t} \cos \sqrt{3}t + K_2 e^{-t} \sin \sqrt{3}t \quad (\text{subamortiguado}) \quad (7.32)$$

Para el caso no amortiguado $\zeta = 0$ no hay resistencias en serie $R = 0$. Entonces, $s_1 = \sigma + j\omega = +j2$ y $s_2 = \sigma - j\omega = -j2$, y por (7.25)

$$i_n = B_1 \cos 2t + B_2 \sin 2t \quad (\text{no amortiguado}) \quad (7.33)$$

En la figura 7.5 se muestran gráficas para estas cuatro respuestas distintas.

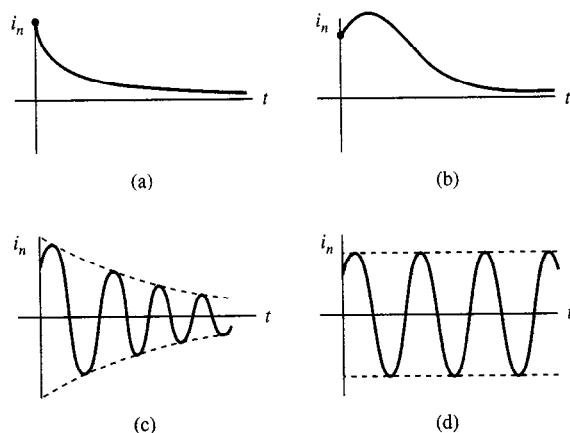


FIGURA 7.5 Respuestas naturales para un circuito de segundo orden: (a) sobreamortiguada; (b) críticamente amortiguada; (c) subamortiguada; (d) no amortiguada.

Ejemplo 7.5

En el circuito RLC en paralelo de la figura 7.4 y el ejemplo 7.3, sea $R = \frac{5}{3}\Omega$, $L = 2\text{ H}$ y $C = \frac{1}{10}\text{ F}$ sin fuente, $i_g = 0$. Si $v(0-) = 4\text{ V}$ y no hay corriente que pase a través del inductor en el instante $t = 0-$, obténgase $v(t)$ para $t > 0$.

Con fuente dependiente, sólo habrá una respuesta natural. La ecuación descriptiva, del ejemplo 7.3, es

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v &= \frac{1}{C} \frac{di_g}{dt} \\ 0 & \quad \frac{d^2v}{dt^2} + 6 \frac{dv}{dt} + 5v = 0 \end{aligned}$$

La ecuación característica es

$$s^2 + 6s + 5 = 0$$

o $s_1 = -1$ y $s_2 = -5$. Ésta es una respuesta natural sobreamortiguada,

$$v = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-5t} \quad (7.34)$$

El voltaje capacitivo es continuo, de modo que $v(0+) = v(0-) = 4\text{ V}$. Por LCK,

$$\frac{3}{5}v + i_L + \frac{1}{10} \frac{dv}{dt} = 0$$

donde i_L está definida con una flecha de referencia que señala hacia abajo en la figura 7.4. Evaluando esta ecuación en $t = 0+$,

$$\frac{3}{5}(4) + 0 + \frac{1}{10} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{0+} = 0$$

donde utilizamos la continuidad de la corriente inductiva para evaluar $i_L(0+)$. Entonces en $t = 0+$, $v = 4\text{ V}$ y $dv/dt = -24\text{ V/s}$. Aplicando estas condiciones a (7.34),

$$v(0+) = 4 = K_1 + K_2$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{0+} = -24 = -K_1 - 5K_2$$

Sumando,

$$-20 = -4K_2$$

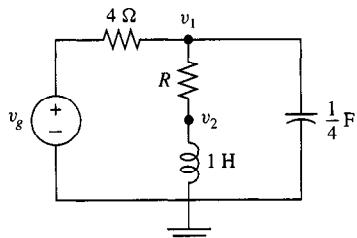
o $K_2 = 5$. Luego, sustituyendo nuevamente, $K_1 = -1$ y la solución es

$$v = 5e^{-5t} - e^{-t} \text{ V}$$

EJERCICIOS

7.3.1. ¿Qué ecuación diferencial no forzada de segundo orden tiene exponentes característicos $s_1 = -10$ y $s_2 = -3$? ¿Qué valor tienen ω_0 y ζ ? Repítase para $s_1 = -2 + j5$ y $s_2 = -2 - j5$.

Respuesta $d^2x/dt^2 + 13(dx/dt) + 30x = 0$; $\omega_0 = 5.48 \text{ rad/s}$, $\zeta = 1.19$; $d^2x/dt^2 + 4(dx/dt) + 29x = 0$; $\omega_0 = 5.39 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.37$



EJERCICIO 7.3.3

- 7.3.2. En el circuito *RLC* en serie de la figura 7.2, sean $v_g = 0$, $R = 20/9 \Omega$, $L = 1/9 \text{ H}$ y $C = \frac{1}{4} \text{ F}$. Obténgase la solución natural i_n .

Respuesta $i_n = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-18t}$.

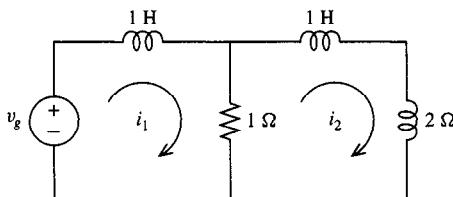
- 7.3.3. Escribanse las ecuaciones nodales para el circuito que se muestra. Resuélvase la ecuación nodal v_1 para v_2 , y utilícese esto para eliminar v_2 de la ecuación nodal diferenciada v_2 , obteniendo la ecuación descriptiva para v_1 . ¿Para qué valor de $R > 0$ queda el circuito críticamente amortiguado?

Respuesta $d^2v_1/dt^2 + (R+1)(dv_1/dt) + (R+4)v_1 = dv_g/dt - Rv_g$;

$$R = 5 \Omega$$

- 7.3.4. Obténgase la respuesta natural i_{1n} para el circuito que se muestra.

Respuesta $i_{1n} = K_1 e^{-(2+\sqrt{2})t} + K_2 e^{-(2-\sqrt{2})t}$



EJERCICIO 7.3.4

7.4. RESPUESTA FORZADA

La respuesta forzada x_f del circuito general de segundo orden debe satisfacer la ecuación diferencial o forzada (7.8), que se repite a continuación:

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1 \frac{dx_f}{dt} + a_0 x_f = f(t) \quad (7.35)$$

Hay diversos métodos para obtener x_f , pero para nuestros propósitos, utilizaremos el procedimiento de adivinar una solución de forma tentativa que haya funcionado bien hasta este momento. Examinando (7.35), notamos que para que esta ecuación sea cierta, la combinación lineal de x_f y sus derivadas debe ser igual a $f(t)$. Considérese una solución tentativa en donde x_f se adivina como combinación lineal de $f(t)$ y sus derivadas. Puesto que una combinación lineal de combinaciones lineales sigue siendo una combinación lineal, bien podría funcionar esta forma tentativa. En otras palabras, las diferenciaciones de la combinación lineal de $f(t)$ y sus derivadas requeridas en el lado izquierdo de (7.35) pueden producir en las cancelaciones requeridas para dejar únicamente $f(t)$, que es lo que se necesita para satisfacer la ecuación. Lo adecuado de cualquier forma tentativa, en último análisis, será juzgado por su capacidad de satisfacer la ecuación diferencial.

Ejemplo 7.6

Como ejemplo, consideremos la fuente dc $v_g = 16 \text{ V}$ en el circuito de la figura 7.1. Entonces, por (7.4),

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} + 10 \frac{di_2}{dt} + 16i_2 = 32 \quad (7.36)$$

La ecuación característica es

$$s^2 + 10s + 16 = (s + 2)(s + 8) = 0$$

con respuesta natural

$$i_{2n} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-8t} \quad (7.37)$$

Puesto que el término forzado $f(t)$ es una constante $f(t) = 32$, sus derivadas primera, segunda, y todas las demás, son cero. Entonces, la combinación lineal más general de $f(t)$ y todas sus derivadas, son simplemente una constante:

$$i_{2f} = A$$

Sustituyendo esta solución forzada tentativa en (7.36),

$$0 + 0 + 16A = 32$$

La forma tentativa funciona si se fija $A = 2$. Entonces, la solución total es

$$i_2 = i_{2n} + i_{2f} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-8t} + 2$$

Si conocemos la energía inicial almacenada en los inductores (o la corriente inductiva inicial) esto puede utilizarse para evaluar K_1 y K_2 como lo discutiremos en la siguiente sección.

En el caso de tenerse funciones forzadas constantes, como en este ejemplo, podemos obtener la solución forzada directamente del diagrama de circuito. En el estado estable dc todas las corrientes y voltajes serán constantes, incluyendo la incógnita en la ecuación descriptiva. Por consiguiente, la solución forzada constante debe ser idéntica al valor de estado estable dc. Recuérdese que esto puede obtenerse reemplazando inductores por circuitos cerrados, y capacitores por circuitos abiertos. Esto puede verificarse fácilmente para el circuito de la figura 7.1 utilizado en el ejemplo 7.6, reemplazando los inductores por circuitos cerrados, de forma que por LVK alrededor de la trayectoria cerrada exterior

$$i_{2f} = \frac{v_g}{8} = \frac{16}{8} = 2 \text{ A}$$

Ejemplo 7.7

Como ejemplo adicional, supóngase en la figura 7.1 que tenemos $v_g = 20 \cos 4t$ V. Entonces, por (7.4),

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} + 10\frac{di_2}{dt} + 16i_2 = 40 \cos 4t \quad (7.38)$$

La respuesta natural está dada por (7.37), como en el ejemplo 7.6. Para obtener la respuesta forzada, necesitamos la combinación lineal general de $f(t)$ y todas sus derivadas. En el caso que consideramos, $f(t) = 40 \cos 4t$ y todas sus derivadas son de la forma $C \cos 4t$ o $D \sin 4t$. Sumando estos términos, llegamos a una solución forzada tentativa de la forma

$$i_{2f} = A \cos 4t + B \sin 4t \quad (7.39)$$

Es decir, toda combinación lineal de $40 \cos 4t$ y todas sus derivadas deben ser de esta forma.

Ahora determinaremos si esta forma tentativa funciona y, de ser así, cuáles deben ser los valores de A y B . Sustituyendo (7.39) en la ecuación diferencial forzada (7.38),

$$40B \cos 4t - 40A \sin 4t = 40 \cos 4t$$

Puesto que esto debe ser cierto para toda t , los coeficientes de términos similares deben ser los mismos a ambos lados de la ecuación. En el caso de los términos $\cos 4t$ tenemos

$$40B = 40$$

y para los términos $\sin 4t$, tenemos

$$-40A = 0$$

Por consiguiente, $A = 0$ y $B = 1$, de forma que

$$i_{2f} = 0 \cos 4t + 1 \sin 4t = \sin 4t$$

Superponiendo las soluciones natural y forzada, la solución general de (7.38) están dada por

$$i_2 = i_{2n} + i_{2f} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-8t} + \sin 4t$$

Esto puede ser verificado inmediatamente por sustitución directa.

En la primera columna de la tabla 7.1 aparece una lista de las funciones forzadas $f(t)$ más comunes. La forma general de la correspondiente respuesta forzada está dada en la segunda columna. Ésta es la solución forzada tentativa. En cada caso, la forma tentativa es la combinación lineal general de $f(t)$ y sus derivadas. Si el término forzado es una suma de entradas en esta tabla, puede utilizarse la superposición para obtener separadamente la componente de la respuesta forzada debido a cada una. La respuesta forzada es entonces la suma de estas componentes.

Tabla 7.1 Soluciones forzadas tentativas para funciones forzadas comunes

Término forzado $f(t)$	Solución forzada tentativa $x_f(t)$
k	A
t	$At + B$
t^2	$At^2 + Bt + C$
t^n	$At^n + Bt^{n-1} + \dots + Ft + G$
$e^{\sigma t}$	$Ae^{\sigma t}$
e^{st}	Ae^{st}
$\sin \omega t, \cos \omega t$	$A \sin \omega t + B \cos \omega t$
$e^{\sigma t} \sin \omega t, e^{\sigma t} \cos \omega t$	$e^{\sigma t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t)$
$te^{\sigma t} \sin \omega t, te^{\sigma t} \cos \omega t$	$te^{\sigma t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + e^{\sigma t} (C \sin \omega t + D \cos \omega t)$

Ejemplo 7.8

Considérese un circuito cuya ecuación descriptiva es

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 4 + 60e^{-7t}$$

Sean i_{f1} e i_{f2} las dos componentes de la respuesta forzada que satisfacen

$$\frac{d^2i_{f1}}{dt^2} + 3\frac{di_{f1}}{dt} + 2i_{f1} = 4$$

$$\frac{d^2i_{f2}}{dt^2} + 3\frac{di_{f2}}{dt} + 2i_{f2} = 60e^{-7t}$$

La suma $i_f = i_{f1} + i_{f2}$ claramente satisface la ecuación diferencial forzada, como puede verse al sumar estas dos últimas ecuaciones. Utilizando las formas tentativas de la tabla 7.1, para $i_{f1} = A$ tenemos una constante $i_{f1} = A$ de la que

$$2A = 4$$

o $i_{f1} = 2$. Para que i_{f2} tenemos la forma tentativa $i_{f2} = Ae^{-7t}$, o

$$Ae^{-7t}[+49 - 3(7) + 2] = 60e^{-7t}$$

o $A = 2$. La solución forzada es entonces

$$i_f = i_{f1} + i_{f2} = 2 + 2e^{-7t}$$

que puede verificarse por sustitución directa en la ecuación diferencial forzada.

En los circuitos y ecuaciones descriptivas estudiadas hasta este punto, hemos utilizado formas tentativas para las soluciones natural y forzada que se han elegido de forma completamente independiente una de la otra. La forma de la solución natural depende únicamente del lado izquierdo de la ecuación descriptiva (a través de los coeficientes de la ecuación característica), en tanto que la forma de la solución forzada dependió únicamente del lado derecho [$f(t)$ en sí misma]. Sin embargo, hay una condición bajo la que las soluciones tentativas natural y forzada no pueden ser determinadas independientemente.

Considérese la ecuación (7.40), para la que la solución forzada tentativa coincide en un término en la solución natural.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 3\frac{dv}{dt} + 2v = 6e^{-t} \quad (7.40)$$

La ecuación característica es

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2) = 0$$

y la solución natural es

$$v_n = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} \quad (7.41)$$

De la tabla 7.1, para $f(t) = 6e^{-t}$, la solución forzada tentativa [que consiste en la combinación lineal general de $f(t)$ y todas sus derivadas] es

$$v_f = Ae^{-t} \quad (7.42)$$

Pero por (7.41) sabemos que la función Ae^{-t} es, de hecho, un caso especial de la solución *natural* ($K_1 = A$, $K_2 = 0$) y como tal, debe satisfacer la versión *no forzada* de (7.40) y no la ecuación forzada. La solución forzada tentativa acostumbrada no funciona en esta circunstancia; debemos modificar de algún modo (7.42), si deseamos obtener una solución forzada.

Un problema similar surgió con raíces repetidas de la ecuación característica, y se demostró que la solución es una t -multiplicación de la forma tentativa. Guiados por esa experiencia, trataremos la versión t -multiplicada de (7.42) como nueva forma tentativa,

$$v_f = Ate^{-t}$$

Calculando las derivadas

$$\begin{aligned}\frac{dv_f}{dt} &= Ae^{-t} - Ate^{-t} \\ \frac{d^2v_f}{dt^2} &= -Ae^{-t} + Ate^{-t} - Ae^{-t}\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones por v_f y sus derivadas en la ecuación forzada (7.40), las formas t -multiplicadas se cancelan, dejándonos

$$Ae^{-t}(-2 + 3) = 6e^{-t}$$

La nueva forma tentativa funciona si fijamos $A = 6$, o

$$v_f = 6te^{-t} \quad (7.43)$$

La existencia de una A , para la que funciona una nueva solución tentativa forzada y t -multiplicada, es suficiente para justificar nuestra suposición. La ecuación (7.43) es la solución forzada, y la solución total es

$$v = v_n + v_f = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t} + 6te^{-t}$$

Generalizando, cuando la solución forzada tentativa coincide en un término con la solución natural, es necesario t -multiplicar la solución forzada tentativa. Si aún siguen coincidiendo, t -multiplíquese nuevamente, y así de manera sucesiva, hasta que no coincidan.

Por último, si la solución forzada tentativa coincide con una forma t -multiplicada en la solución natural, puede ser necesario volver a t -multiplicar la solución tentativa, como se demuestra en el ejemplo 7.9, a continuación, y en el ejercicio 7.7.3.

Ejemplo 7.9

$$\frac{d^2v}{dt^2} = f(t)$$

La ecuación característica es $s^2 = 0$, o $s_1 = s_2 = 0$. Éste es un caso de raíces repetidas, y por (7.28) la solución natural es

$$v_n = K_1e^{st} + K_2te^{st} = K_1 + K_2t$$

Primero consideremos el caso en donde el término forzado es $f(t) = 2$. La solución forzada tentativa es $v_f = A$. Esto coincide con uno de los términos (K_1) de la solución natural, de forma que t -multiplicamos v_f , obteniendo $v_f = At$. Esto aún coincide con un término en la solución natural (K_2t) y reconociendo que At satisfaría la ecuación diferencial

natural y no la forzada, la volvemos a t -multiplicar, llegando a

$$v_f = At^2$$

Esto no coincide con ningún término en v_n . Sustituyéndola en la ecuación diferencial forzada,

$$2A = 2$$

o $A = 1$. La solución total es

$$v = K_1 + K_2t + t^2$$

Diferenciando dos veces, es claro que v satisface la ecuación diferencial forzada original para todo valor de las constantes libres K_1 y K_2 .

A continuación, probaremos con el término forzado $f(t) = t$. La solución forzada tentativa de la tabla 7.1 es $At + B$. Puesto que esto coincide con términos en la solución natural, la t -multiplicamos para obtener la nueva forma tentativa, $v_f = At^2$ (sólo necesitamos conservar el término de mayor orden en la forma t -multiplicada, puesto que los de orden inferior satisfarán la ecuación diferencial no forzada, y no la forzada). Esta forma tentativa ya no coincide con término alguno en la solución natural, pero al sustituirla en la ecuación diferencial,

$$\frac{d^2v_f}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(At^2) = 2A$$

que no satisface la ecuación forzada para ninguna A . El problema es que la solución tentativa original coincidió con un término t -multiplicado de la solución natural. Por consiguiente, se necesita una t -multiplicación final, con lo que se obtiene la nueva forma tentativa $v_f = At^3$. Al sustituirla nuevamente,

$$\frac{d^2}{dt^2}(At^3) = 6At$$

Que satisface la ecuación diferencial forzada en este caso [$f(t) = t$] con $A = \frac{1}{6}$. La solución forzada es por consiguiente $v_f = \frac{1}{6}t^3$ y la solución total es

$$v = K_1 + K_2t + \frac{1}{6}t^3$$

Nuevamente, podemos comprobarla con facilidad diferenciándola dos veces, haciendo notar que el resultado con seguridad satisface la ecuación diferencial original para cualquier K_1 y K_2 . Determinar estos valores para que la solución no sólo satisfaga la ecuación descriptiva, sino que también concuerde con la energía almacenada inicial en los elementos de almacenamiento, será el tema de nuestra siguiente sección.

EJERCICIOS

7.4.1. Obténgase la respuesta forzada si

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = f(t)$$

en donde $f(t)$ está dada por (a) 6; (b) $2e^{-3t} + 6e^{-4t}$; y (c) $4e^{-t} + 2e^{-3t}$.

Respuesta (a) 2; (b) $2e^{-4t} - te^{-3t}$; (c) $t(2e^{-t} - e^{-3t})$.

7.4.2. Obténgase la respuesta forzada si

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = f(t)$$

donde $f(t)$ está dada por (a) $6e^{-2t}$ y (b) $6te^{-2t}$. [Sugerencia: En (b), úsese $x_f = At^3 e^{-2t}$]

Respuesta (a) $3t^2 e^{-2t}$, (b) $t^3 e^{-2t}$

7.4.3. Obténgase la respuesta total si

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 18\sin 3t$$

$$y \quad x(0) = dx(0)/dt = 0.$$

Respuesta $\sin 3t - 3t \cos 3t$

7.4.4. Obténgase la respuesta forzada para i_2 en el circuito de la figura 7.1, si la función de fuente es $v_g = 16t^2 + \frac{11}{2}$.

Respuesta $2t^2 - \frac{5}{2}t + 2$

7.5

RESPUESTA TOTAL

La respuesta total de un circuito es la suma de sus respuestas natural y forzada, y puesto que la respuesta natural contiene constantes no determinadas, también debe ser así en el caso de la respuesta total. En el caso de primer orden estudiado en el capítulo 6, hubo una sola constante no determinada en la respuesta natural, y su valor fue especificado por la necesidad de que la solución total concordara con la energía inicial en el elemento de almacenaje (es decir, la corriente inicial en el inductor, o el voltaje inicial que pasa a través del capacitor).

Este mismo principio se aplica a circuitos de segundo orden, con dos elementos de almacenaje, cada uno abasteciendo un valor inicial necesario para definir las dos constantes no determinadas contenidas en la respuesta total. Estas dos corrientes inductivas iniciales y/o voltajes capacitivos, pueden utilizarse para determinar las condiciones iniciales requeridas para resolver la ecuación descriptiva de segundo orden.

Por ejemplo, considérese el circuito en serie *RLC* de la figura 7.6. Supongamos que se nos da el voltaje inicial $v_c(0) = -6$ V en la corriente inductiva $i(0) = 1$ A. Por LVK

$$5i + 4 \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0) + \frac{di}{dt} = 2e^{-2t}$$

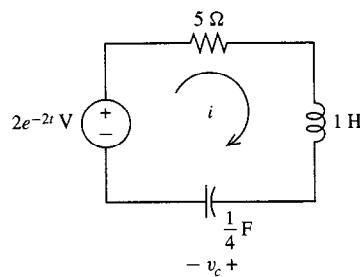


FIGURA 7.6 Circuito *RLC* en serie forzado.

Diferenciando, la ecuación descriptiva para $i(t)$ es

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 4i = -4e^{-2t} \quad (7.44)$$

Obtendremos la solución total sumando las soluciones natural y forzada. La ecuación característica es

$$s^2 + 5s + 4 = (s + 1)(s + 4) = 0$$

Con una respuesta natural para este circuito RLC en serie sobreamortiguado (con raíces reales distintas).

$$i_n = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t}$$

De la tabla 7.1, la solución forzada tentativa es $i_f = A e^{-2t}$, y sustituyendo la (7.44),

$$(4 - 10 + 4)A e^{-2t} = -4e^{-2t}$$

o $A = 2$. La solución total es entonces

$$i = i_n + i_f = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t} + 2e^{-2t} \quad (7.45)$$

Evaluando la solución total (7.45) en $t = 0$,

$$i(0) = K_1 + K_2 + 2 \quad (7.46a)$$

Diferenciando la solución total y evaluándola en $t = 0$, el valor inicial de la derivada de la incógnita debe ser

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_0 = -K_1 - 4K_2 - 4 \quad (7.46b)$$

Pueden utilizarse estas dos ecuaciones para determinar K_1 y K_2 si podemos relacionar las condiciones iniciales $i(0)$ y $di/dt|_0$ con las variables iniciales del circuito, la corriente inductiva y el voltaje capacitivo. El primero de éstos es fácil, puesto que $i(0) = 1$ A es justamente la corriente inductiva. Para relacionar $di/dt|_0$ con los valores dados, escribimos LVK alrededor de la trayectoria cerrada y la evaluamos en $t = 0$:

$$5i(0) + \left. \frac{di}{dt} \right|_0 + v_c(0) = 2$$

$$0 \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_0 = 2 + 6 - 5(1) = 3$$

Utilizando estos valores, podemos reescribir (7.46) como

$$K_1 + K_2 = -1 \quad (7.47a)$$

$$-K_1 - 4K_2 = 7 \quad (7.47b)$$

Sumando las ecuaciones (7.47a, b),

$$-3K_2 = 6$$

o $K_2 = -2$. Volviéndola a sustituir en (7.47a), $K_1 = 1$. La solución total (7.45) queda ahora totalmente especificada como

$$i = e^{-t} - 2e^{-4t} + 2e^{-2t} A$$

Los voltajes capacitivos y/o corrientes inductivas iniciales para determinar las condiciones iniciales requeridas pueden estar dadas, como en la ilustración anterior, o puede

ser necesario determinarlas del diagrama de circuito. Como se mencionó en el capítulo 6, con frecuencia se fijan las condiciones iniciales por la acción de los interruptores en el circuito, y de las fuentes que de pronto saltan de la posición “encendido” a la de “apagado”. A continuación presentaremos dos ejemplos en donde los valores iniciales son calculados, en lugar de dados, el primero en un circuito que contiene un interruptor, y el segundo que contiene una fuente en escalón.

Ejemplo 7.10

Deseamos determinar los voltajes capacitivos v_1 y v_2 para $t > 0$ en el circuito de la figura 7.7, dado que está en estado estable dc en $t = 0-$, justo antes de que se active el interruptor. Comenzamos determinando los voltajes capacitivos en $t = 0-$. Para $t < 0$, el interruptor está apagado, y en estado estable dc, por LVK alrededor de la trayectoria cerrada exterior,

$$v_1(0-) - v_2(0-) = 12(1) = 12 \text{ V}$$

Pero puesto que el interruptor fue cortado del nodo 2 para $t < 0$, $v_2(0-) = 0 \text{ V}$, y por consiguiente $v_1(0-) = 12 \text{ V}$. Por continuidad de voltajes capacitivos, $v_1(0+) = v_1(0-) = 12 \text{ V}$ y $v_2(0+) = v_2(0-) = 0 \text{ V}$. Estos valores nos permitirán calcular las condiciones iniciales en $t = 0+$ necesarias para resolver la ecuación descriptiva para $t > 0$.

El interruptor se abre en $t = 0$, y las dos ecuaciones nodales para el circuito, al configurarse en el intervalo de solución deseado $t > 0$, son

$$\frac{dv_1}{dt} + (v_1 - v_2) = 12 \quad (7.48a)$$

$$2\frac{dv_2}{dt} + 3v_2 - v_1 = 0 \quad (7.48b)$$

Para combinarlas en una sola ecuación descriptiva, despejamos (7.48a) para v_2 ,

$$v_2 = \frac{dv_1}{dt} + v_1 - 12 \quad (7.49)$$

y sustituimos esta expresión para v_2 en (7.48b), con lo que obtenemos

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_1}{dt} + v_1 - 12\right) + 3\left(\frac{dv_1}{dt} + v_1 - 12\right) - v_1 = 0$$

o, luego de dividirla entre 2,

$$\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{5}{2}\frac{dv_1}{dt} + v_1 = 18 \quad (7.50)$$

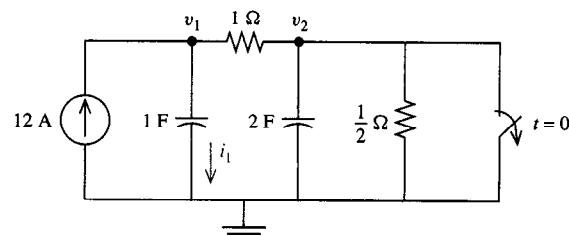


FIGURA 7.7 Circuito para el ejemplo 7.10.

Esta es la ecuación descriptiva para v_1 . Una vez que descomponemos el circuito para resolver esto para v_1 , v_2 se obtiene inmediatamente de (7.49).

La ecuación característica para (7.50) es

$$s^2 + \frac{5}{2}s + 1 = (s + 2)\left(s + \frac{1}{2}\right) = 0$$

y la solución natural es

$$v_{1n} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t/2}$$

La solución forzada tentativa es $v_{1f} = A$, que, luego de sustituirla en (7.50), da $A = 18$. Entonces, la solución total es la suma

$$v_1 = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t/2} + 18 \quad (7.51)$$

Evaluando la incógnita v_1 y su derivada en $t = 0+$,

$$v_1(0+) = K_1 + K_2 + 18 \quad (7.52a)$$

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{0+} = -2K_1 - \frac{1}{2}K_2 \quad (7.52b)$$

Para ayudar a determinar estas condiciones iniciales, nótese que la ley de elemento para un capacitor puede ser escrita

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C}$$

Entonces, puesto que v_1 es el voltaje que pasa a través del capacitor 1-F,

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{0+} = \frac{i_1(0+)}{1} \quad (7.53)$$

por LCK en el nodo 1,

$$i_1(0+) + (v_1(0+) - v_2(0+)) = 12$$

o

$$i_1(0+) = 12 - 12 = 0$$

y por (7.53) $dv_1/dt|_{0+} = 0$. Estamos listos para resolver (7.52) para K_1 y K_2 :

$$K_1 + K_2 = -6$$

$$-2K_1 - \frac{1}{2}K_2 = 0$$

Multiplicando por 2 la segunda ecuación y sumando,

$$-3K_1 = -6$$

o $K_1 = 2$, y de la primera ecuación, $K_2 = -8$. La solución total es

$$v_1 = 2e^{-2t} - 8e^{-t/2} + 6 \text{ V}$$

Para la incógnita de voltaje nodal v_1 . El otro voltaje nodal v_2 está dado en (7.49) como

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{d}{dt}(2e^{-2t} - 8e^{-t/2} + 6) + (2e^{-2t} - 8e^{-t/2} + 6) - 12 \\ &= -2e^{-2t} - 4e^{-t/2} - 6 \text{ V} \end{aligned}$$

lo que completa el análisis.

En general, una ecuación descriptiva de segundo orden, requerirá de condiciones iniciales que consistan de los valores de la incógnita y de su primera derivada. Los pasos necesarios para determinar el valor de la primera derivada en el instante $t = 0+$ no siempre son obvios. En el ejemplo 7.9, utilizamos la ley de elementos para un capacitor en la forma

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{0+} = \frac{1}{C} i_c \Big|_{0+} \quad (7.54a)$$

para determinar la derivada inicial para la incógnita v_1 . De forma similar, en el caso de un inductor, la ley de elemento en la forma

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0+} = \frac{1}{L} v_L \Big|_{0+} \quad (7.54b)$$

es con frecuencia útil para determinar la condición inicial $di_L/dt|_{0+}$. Para utilizar estas ecuaciones, es necesario conocer las corrientes y voltajes del circuito en $t = 0+$ para que se puedan evaluar sus miembros derechos. En problemas con interruptores o con escalones unitarios, generalmente sólo conocemos los voltajes capacitivos y corrientes inductivas en el instante $t = 0+$, éstos por continuidad del instante $t = 0-$ (justo antes de la activación del interruptor, o que los escalones tengan su tiempo de salto). Para determinar los voltajes y corrientes de circuito en el instante $t = 0+$, podemos dibujar un diagrama de circuito para el instante $t = 0+$, en donde aparecen los inductores como fuentes de corriente (se conocen sus corrientes en $t = 0+$) y los capacitores como fuentes de voltaje. Este diagrama de circuito en $t = 0+$ contendrá únicamente resistencias y fuentes, y será un proceso muy directo determinar los voltajes y corrientes restantes en $t = 0+$, incluyendo aquellos necesarios para evaluar (7.54). En el siguiente ejemplo se ilustra este procedimiento para determinar las condiciones iniciales.

Ejemplo 7.11

El circuito de la figura 7.8 está en estado estable dc en el instante $t = 0-$, y requeriremos $i_1(t)$ para $t > 0$. Haciendo notar que la fuente es encendida para $t < 0$, $v_c(0-) = 12 \text{ V}$ y la corriente inductiva es $i_1(0-) = 12 \text{ A}$. Para $t > 0$, el circuito no tiene fuente y las ecuaciones de malla son

$$\frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} + (i_1 - i_2) = 0 \quad (7.55a)$$

$$i_2 + 2 \int_{0+}^t i_2(\tau) d\tau + v_c(0+) + (i_2 - i_1) = 0 \quad (7.55b)$$

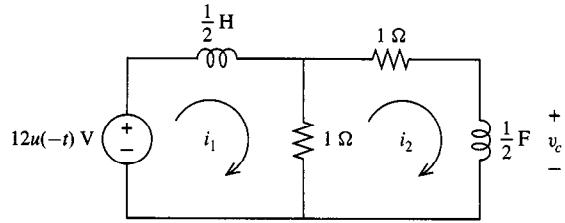


FIGURA 7.8 Circuito para el ejemplo 7.11.

Diferenciando la segunda ecuación de malla,

$$2\frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt} + 2i_2 = 0 \quad (7.56)$$

Para obtener la ecuación descriptiva i_1 , resuélvase (7.55a) para i_2 y sustítuyase en (7.56):

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{di_1}{dt} + i_1\right) - \frac{di_1}{dt} + 2\left(\frac{1}{2}\frac{di_1}{dt} + i_1\right) = 0$$

$$\text{o } \frac{d^2i_1}{dt^2} + 2\frac{di_1}{dt} + 2i_1 = 0$$

La ecuación característica es

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

con raíces conjugadas complejas $s_1 = -1 + j$ y $s_2 = -1 - j$. Éste es un sistema subamortiguado, y por (7.25) la solución natural es

$$i_{1n} = B_1 e^{-t} \cos t + B_2 e^{-t} \operatorname{sen} t \quad (7.57)$$

que es la solución total, puesto que el término forzado en la ecuación descriptiva es cero. Para evaluar las constantes B_1 y B_2 , necesitamos las condiciones iniciales $i_1(0+)$ y $di_1/dt|_{0+}$. Puesto que $i_1(0+) = 12$ A se conoce, calcularemos la derivada inicial con la ayuda de diagrama de circuito para $t = 0+$ que aparece en la figura 7.9. Nótese que el inductor aparece como fuente de corriente de valor $i_1(0-) = i_1(0+) = 12$ A, y el capacitor aparece como fuente de voltaje de valor $v_c(0-) = v_c(0+) = 12$ V. Éste es un circuito resistivo, y pueden obtenerse fácilmente todos los voltajes y corrientes. En particular para usar (7.54b) necesitamos el voltaje $v_L(0+)$. La ecuación de malla derecha en la figura 7.9 es

$$i_2(0+) + 12 + (i_2(0+) - 12) = 0$$

o $i_2(0+) = 0$. Entonces, por LVK alrededor de la trayectoria cerrada externa

$$v_L(0+) + 1(0) + 12 = 0$$

o $v_L(0+) = -12$ V. Podemos obtener la condición inicial requerida de la ecuación anterior y (7.54b), y ésta es

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0+} = 2v_L(0+) = -24$$

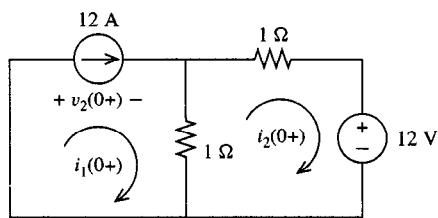


FIGURA 7.9 Circuito para $t = 0+$.

Teniendo ahora el valor inicial de i_1 , y su derivada, podemos determinar las constantes de la solución total. Evaluando (7.57) en el tiempo inicial,

$$i_1(0+) = B_1 = 12 \text{ A}$$

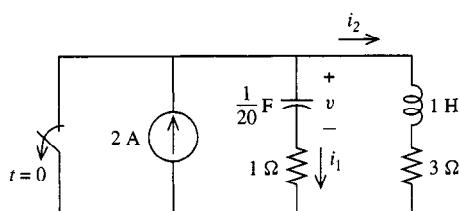
Diferenciando (7.57) y evaluando en el instante inicial,

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0+} = -B_1 + B_2 = -24$$

Utilizando $B_1 = 12$, esto implica que $B_2 = -12$, y la solución (7.57) es

$$i_1 = 12e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t) \text{ A}$$

EJERCICIOS



EJERCICIO 7.5.2

7.5.1. Obténgase $x(t)$ para $t > 0$, donde

$$\frac{dx}{dt} + 2x + \int_0^t x dt = f(t)$$

$$x(0) = -1$$

y (a) $f(t) = 1$; (b) $f(t) = t^2$.

Respuesta (a) $(2t-1)e^{-t}$; (b) $3(1+t)e^{-t} + 2t - 4$

7.5.2. Obténgase i_1 , i_2 y v para $t = 0-$ y $t = 0+$. ¿Alguno de estos valores cambia discontinuamente en $t = 0$?

Respuesta En $t = 0-$, $i_1 = i_2 = v = 0$. En $t = 0+$, $i_1 = 2 \text{ A}$, $i_2 = 0$, $v = 0$. i_1 cambió discontinuamente (no es un voltaje capacitivo ni corriente inductiva, y por consiguiente debe comportarse así).

7.5.3. Obténgase a_1 , a_0 y $f(t)$ de forma que la respuesta total $x(t)$, $t > 0$ para

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

sea $x = e^{-t} - e^{-2t} - 3 \cos t + \operatorname{sen} t$.

Respuesta 3, 2, 10 $\operatorname{sen} t$

7.5.4. Obténgase la respuesta total i si las condiciones iniciales con $i(0+) = 1$ y $di/dt|_{0+} = 0$. La fuente controlada tiene una transresistencia de $r = 1 \Omega$.

Respuesta $6e^{-t} - 2e^{-2t} + 2t - 3$

7.6

RESPUESTA DE ESCALÓN UNITARIO

La respuesta de escalón unitario de los circuitos de segundo orden presentan mucha más variedad que la de los circuitos de primer orden, presentados en el capítulo 6 como aquellos circuitos caracterizados por una sola exponencial transitoria. La sorprendente diferencia entre las formas de las respuestas naturales de los circuitos de segundo orden sobreanotadas

guados, críticamente amortiguados y subamortiguados, sugiere que sus respuestas de escálon mostrarán una igual variedad, puesto que la respuesta natural es también componente de la respuesta de escalón.

Ejemplo 7.12

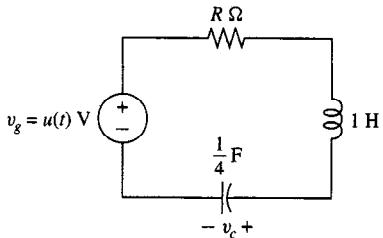


FIGURA 7.10 Circuito para el ejemplo 7.12.

Considérese el circuito RLC en serie de la figura 7.10 impulsado por una fuente $v_g = u(t)$. Determinaremos la respuesta $v_c(t)$ a la fuente de escalón unitario. Para $t < 0$ no hay una fuente que estimule una respuesta, e $i(0-) = v_c(0-) = 0$. Para $t > 0$

$$1 \frac{di}{dt} + Ri + 4 \int_{0+}^t i(\tau) d\tau + v_c(0+) = 1 \quad (7.58)$$

o, después de diferenciar,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + 4i = 0$$

Ésta es una ecuación descriptiva no forzada de segundo orden para la corriente en serie i , que se tomó en el ejemplo 7.4 para muchos valores distintos de R . La resistencia crítica para este circuito RLC en serie es, por (7.29), $R_{cs} = 2\sqrt{4/1} = 4 \Omega$. Para este valor de R , por (7.30),

$$i = K_1 e^{-2t} + K_2 t e^{-2t} \quad (\text{críticamente amortiguada}) \quad (7.59)$$

Las condiciones iniciales $i(0+)$ y $di/dt|_{0+}$ son necesarias para determinar las constantes K_1 y K_2 . Por continuidad de la corriente inductiva,

$$i(0+) = 0 \quad (7.60a)$$

Evaluando (7.58) en $t = 0+$, el término integral es cero, puesto que sus límites inferior y superior son iguales, $v_c(0+) = v_c(0-) = 0$ por continuidad de voltaje capacitivo, y

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = 1 - Ri(0+) = 1 \quad (7.60b)$$

Evaluando (7.59) en $t = 0+$ con $i(0+) = 0$, se obtiene $K_1 = 0$, y al diferenciar (7.59),

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = 1 = K_2$$

de forma que la corriente de malla en este caso críticamente amortiguado es:

$$i = t e^{-2t} \text{ A} \quad (7.61)$$

Nótese que la corriente de malla es puramente transitoria; no hay componente de estado estable. Esto puede ser anticipado directamente del diagrama de circuitos en la figura 7.10, recordando que la respuesta de estado estable dc y la respuesta en escalón coincide conforme t tiende a infinito. En el estado estable dc el capacitor es un circuito abierto, y por consiguiente no puede pasar ninguna corriente, y la corriente de malla de estado estable, en respuesta al escalón unitario debe ser cero.

Aquí nos interesamos principalmente en la respuesta v_c . Por LVK,

$$Ri + \frac{di}{dt} + v_c = u(t) \quad (7.62)$$

o, para $t > 0$,

$$v_c = 1 - Ri - \frac{di}{dt} \quad (7.63)$$

Para el caso críticamente amortiguado con $R = 4 \Omega$,

$$\begin{aligned} v_c &= 1 - 4(te^{-2t}) - \frac{d}{dt}(te^{-2t}) \\ v_c(t) &= 1 - e^{-2t} - 2te^{-2t} \text{ V} \end{aligned} \quad (7.64)$$

Nótese que la respuesta de escalón consiste de una respuesta natural transitoria de la forma (7.59), más una respuesta de estado estable dc de 1 V. En el estado estable dc, el capacitor es un circuito abierto, y 1 V es el valor del voltaje de la fuente de escalón unitario a través del circuito abierto. En la figura 7.11 se muestra esta respuesta de escalón críticamente amortiguada.

A continuación determinaremos una respuesta de escalón unitario sobreamortiguado v_c con $R = 5 \Omega$. De (7.31),

$$i = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t} \quad (\text{sobreamortiguado})$$

y utilizando las condiciones iniciales que calculamos en (7.60),

$$i(0+) = 0 = K_1 + K_2$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = 1 = -K_1 - 4K_2$$

Añadiendo estas dos últimas ecuaciones, $K_2 = -\frac{1}{3}$, y sustituyéndolo en la primera, $K_1 = 1/3$. La corriente de malla i en este caso sobreamortiguado es

$$i = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t}) \text{ A}$$

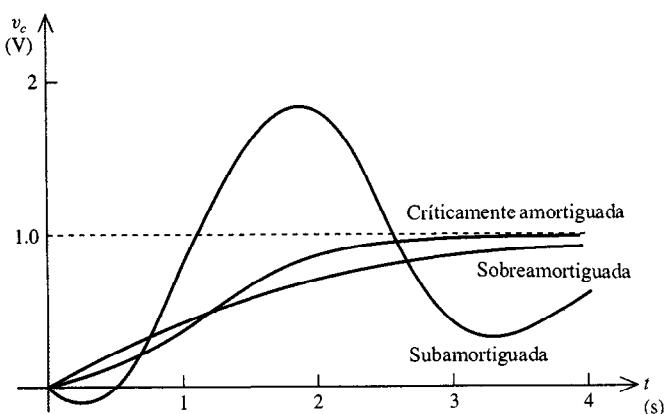


FIGURA 7.11 Comparación de tres respuestas en escalón.

Utilizando esto en (7.63),

$$\begin{aligned} v_c &= 1 - \frac{5}{3}(e^{-t} - e^{-4t}) - \frac{1}{3} \frac{d}{dt}(e^{-t} - e^{-4t}) \\ &= 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \text{ V} \end{aligned} \quad (7.65)$$

Finalmente, determinaremos la respuesta de escalón unitario para un caso subamortiguado con $R = \frac{1}{2}\Omega$. La ecuación característica es

$$s^2 + \frac{1}{4}s + 1 = 0$$

con exponentes característicos conjugados complejos $s_{1,2} = -\frac{1}{8} \pm j\sqrt{255}/8$, o

$$i = K_1 e^{-t/8} \cos \sqrt{255/8} t + K_2 e^{-t/8} \sin \sqrt{255/8} t \text{ (subamortiguados)}$$

Utilizando las mismas condiciones iniciales que en los casos anteriores,

$$i(0+) = 0 = K_1$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = 1 = -\frac{1}{8} K_1 + \sqrt{255/8} K_2$$

que nos da como resultado la corriente de malla

$$i = \frac{8}{\sqrt{255}} e^{-t/8} \sin \sqrt{\frac{255}{8}} t \text{ A}$$

y, por (7.63),

$$\begin{aligned} v_c &= 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{8}{\sqrt{255}} e^{-t/8} \sin \sqrt{\frac{255}{8}} t \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{8}{\sqrt{255}} e^{-t/8} \sin \sqrt{\frac{255}{8}} t \right) \\ &= 1 - e^{-t/8} \left(\cos \sqrt{\frac{255}{8}} t + \frac{1}{\sqrt{255}} \sin \sqrt{\frac{255}{8}} t \right) \text{ A} \end{aligned} \quad (7.66)$$

En la figura 7.11 también se muestran las respuestas de escalón sobre y subamortiguadas.

Comparando las tres respuestas de escalón, observamos que el circuito críticamente amortiguado demuestra la convergencia más rápida al estado estable de 1 V. La transitoria en el caso sobreamortiguado contiene dos términos, uno de los cuales tiene una mayor constante de tiempo ($\tau = 1$ s en comparación con $\frac{1}{2}$ s para el caso críticamente amortiguado) y por consiguiente decae a cero más lentamente que el caso críticamente amortiguado. La transitoria en la respuesta subamortiguada es oscilatoria, y la amplitud de estas oscilaciones decae a cero con una constante de tiempo aún mayor, $\tau = 8$ s. Por consiguiente, aunque la respuesta subamortiguada primero llega al valor de 1 V con más rapidez que las otras respuestas, “rebasa” este valor, y su verdadera convergencia al estado estable es aún más lenta que el caso sobreamortiguado.

Utilizando SPICE, estos resultados pueden comprobarse fácilmente. El archivo de entrada para el circuito de la figura 7.10 es

```
Series RLC step response
VG      1  0  DC  1
*RS = 0.25 OHMS (SUBAMORTIGUADO), 4 OHMS
*(CRIT. AMORT), 5 OHMS (SOBREMORTIGUADO).
RS      1  2  0.25
LS      2  3  1          IC=0
CS      3  0  0.25          IC=0
.TRAN  1  10  UIC
.PROBE
.END
```

Los resultados de las tres vueltas del programa con tres valores distintos para R_s aparecen en la figura 7.12. Estas gráficas fueron generadas por el programa PROBE postprocesador de gráficas de PSPICE. Se asemejan en mucho a las expresiones calculadas (7.64) a (7.66).

En tanto que los métodos presentados en éste y en el último capítulo pueden ser generalizados para estudiar circuitos de orden mayor

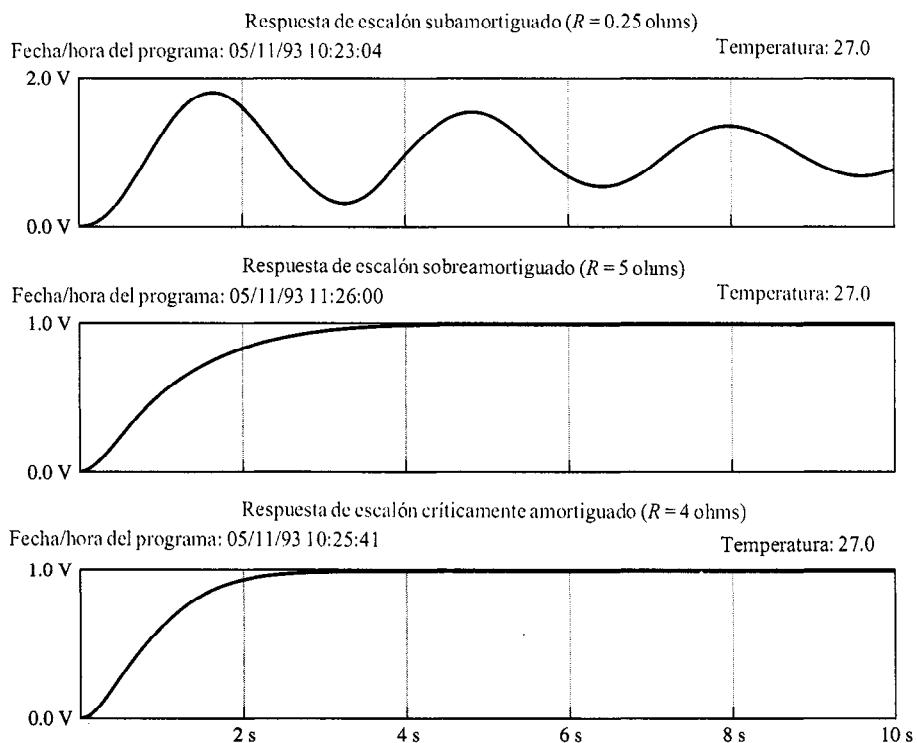
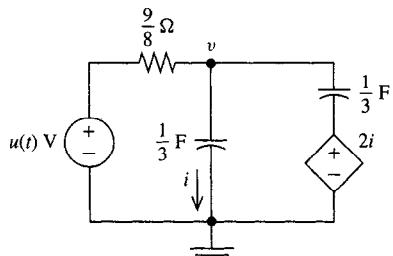


FIGURA 7.12 Salida PROBE para tres vueltas de programa PSPICE.

(aquejlos con tres o más elementos de almacenaje y exponentes característicos), existen métodos más eficientes para analizar estos circuitos. Estas técnicas serán presentadas en el contexto del análisis de transformadas de Laplace en el capítulo 12. Los métodos de dominio de tiempo de los últimos dos capítulos, basados en la solución directa de ecuaciones diferenciales, son efectivas herramientas para analizar circuitos de primero y segundo orden. Son, con menos frecuencia, el método elegido para analizar circuitos de orden mayor.

EJERCICIOS



EJERCICIO 7.6.2

- 7.6.1. Obténgase $v(0+)$, $dv/dt|_{0+}$, y la respuesta de escalón unitario v del circuito paralelo RLC de la figura 7.4 si $i_g = u(t)$, $R = 1 \Omega$, $L = \frac{9}{14} \text{ H}$, $C = \frac{1}{9} \text{ F}$.

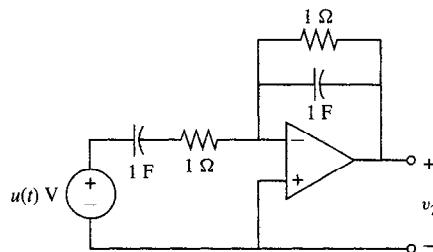
Respuesta $v(0+) = 0$; $dv/dt|_{0+} = 9$; $v = \frac{9}{5}(e^{-2t} - e^{-7t})$

- 7.6.2. Obténgase $v(0+)$, $dv/dt|_{0+}$, y la respuesta de escalón unitario v del circuito que se muestra.

Respuesta $v(0+) = 0$; $dv/dt|_{0+} = 0$; $v = 1 - \frac{1}{5}(e^{4t} + 4e^{-t})$

- 7.6.3. Obténgase la ecuación descriptiva para v_2 y la respuesta de escalón unitario.

Respuesta $d^2v_2/dt^2 + 2(dv_2/dt) + v_2 = 0$; $v_2 = -te^{-t}$



EJERCICIO 7.6.3

RESUMEN

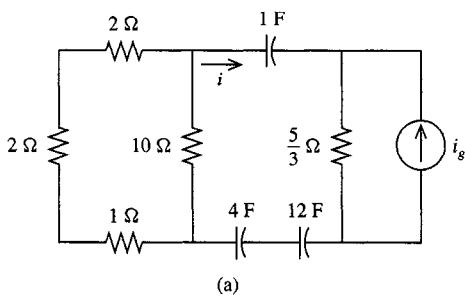
Los circuitos de segundo orden son aquellos que se caracterizan por una sola ecuación diferencial de segundo orden. Pueden ser identificados por la presencia de dos elementos de almacenamiento equivalentes (inductores y/o capacitores). Puede estudiarse su comportamiento escribiendo y resolviendo sus ecuaciones diferenciales en el dominio de tiempo, utilizando las técnicas presentadas en el capítulo 6 para circuitos de primer orden. Sin embargo, el comportamiento natural de los circuitos de segundo orden son mucho más diversos e interesantes, que varían de pares de exponenciales reales y exponenciales t -multiplicados, a sinusoidales tanto amortiguados como no amortiguados.

- La respuesta natural de un circuito de segundo orden es $K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$ donde p_1 , p_2 son raíces distintas de la ecuación característica, o si p_1 es una raíz repetida, se reemplaza el segundo término por la forma t -multiplicada $K_2 t e^{p_1 t}$.

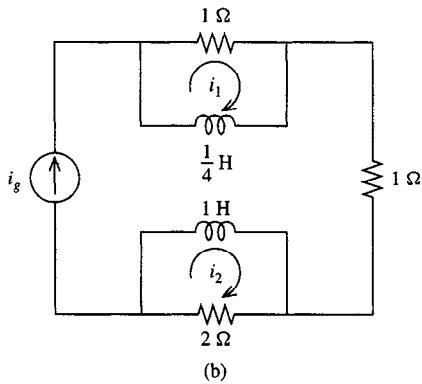
- La respuesta natural también puede ser expresada en términos de la frecuencia natural no amortiguada ω_0 y el factor de amortiguación ζ . ω_0 es la frecuencia sinusoidal en el correspondiente caso no amortiguado ($\zeta = 0$), donde ζ indica el ritmo del crecimiento o decaimiento exponencial.
- Un sistema sobreamortiguado ($\zeta > 1$) tiene dos exponentiales reales como respuesta natural, un sistema subamortiguado ($\zeta < 1$) tiene una sinusoidal amortiguada, y un sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) tiene una exponencial real y su forma t -multiplicada. Un sistema no amortiguado, con $\zeta = 0$, tiene una sinusode puro como respuesta natural.
- La respuesta forzada se obtiene sustituyendo una solución forzada tentativa, que depende de la función forzada, en la ecuación diferencial, y haciendo coincidir los coeficientes.
- La respuesta total se obtiene sumando las respuestas natural y forzada, utilizando las condiciones iniciales para determinar los coeficientes en los términos de respuesta natural.
- La respuesta de escalón unitario llega a su valor de estado estable con más rapidez en el caso críticamente amortiguado. Los circuitos sobreamortiguados tienen períodos extensos de "rebalse" o "insuficiencia", en tanto que los circuitos subamortiguados presentan oscilaciones amortiguadas alrededor del valor de estado estable.

PROBLEMAS

7.1. Escríbanse ecuaciones descriptivas para las variables indicadas. ¿Estos circuitos son de segundo orden?



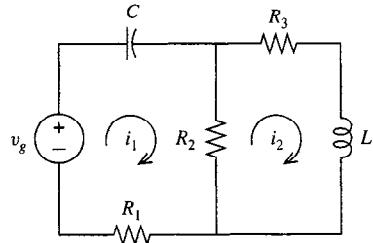
(a)



(b)

PROBLEMA P7.1

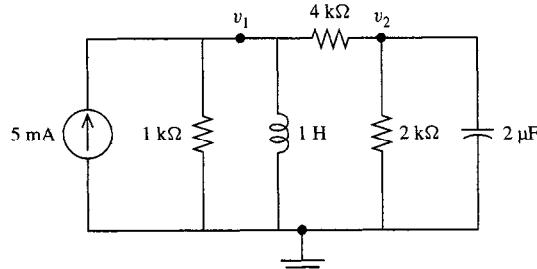
7.2. Escríbase una ecuación diferencial de segundo orden que satisfaga i_1 .



PROBLEMA P7.2

7.3. Escríbase una ecuación diferencial de segundo orden que sea satisfecha por i_2 en el diagrama para el problema 7.2.

7.4. Escríbase una ecuación diferencial de segundo orden que sea satisfecha por v_1 .



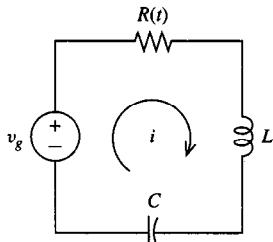
PROBLEMA P7.4

7.5. Escribáse una ecuación diferencial de segundo orden que sea satisfecha por v_2 en el diagrama para el problema 7.4.

7.6. Repítase el problema 7.2 si el inductor es sustituido por un capacitor $C_1 F$.

7.7. Repítase el problema 7.5 si el capacitor es reemplazado por un inductor $\frac{1}{4} H$.

7.8. Considerérese el circuito RLC que se muestra a continuación, en donde la resistencia varía respecto al tiempo. (a) Escribáse la ecuación descriptiva para i . (b) Si i_n e i_f son soluciones natural y forzada, ¿es su suma una solución?



PROBLEMA P7.8

7.9. Para la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

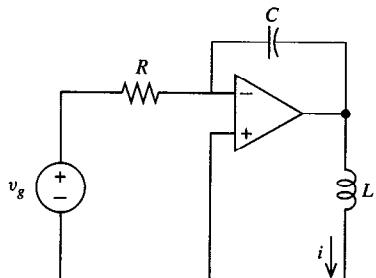
sean x_{n1} y x_{n2} las soluciones naturales, y x_{f1} , x_{f2} dos soluciones forzadas distintas. Demuestre que *toda* combinación lineal de x_{n1} y x_{n2} sigue siendo una solución natural. ¿Qué combinaciones lineales *específicas* de x_{f1} y x_{f2} serán soluciones forzadas?

7.10. Suponga que la ecuación descriptiva de segundo orden general del problema 7.9 es forzada con una $f(t)$ que es combinación lineal de m funciones forzadas.

$$f(t) = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) + \cdots + b_m f_m(t)$$

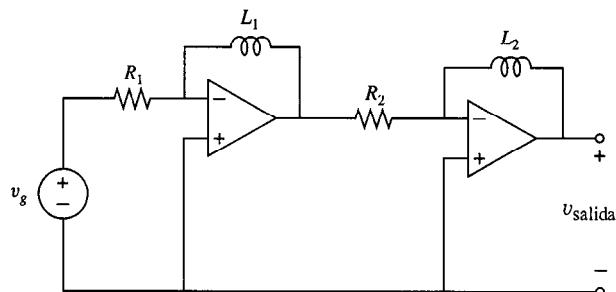
Demuestre que la solución forzada es la misma combinación lineal de soluciones forzadas para cada $f_i(t)$ por separado.

7.11. Obténgase la ecuación descriptiva para i .



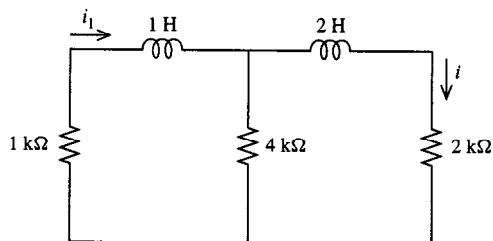
PROBLEMA P7.11

7.12. Obténgase la ecuación descriptiva para v_{salida} . ¿Es éste un circuito de segundo orden? ¿Un circuito de primer orden?



PROBLEMA P7.12

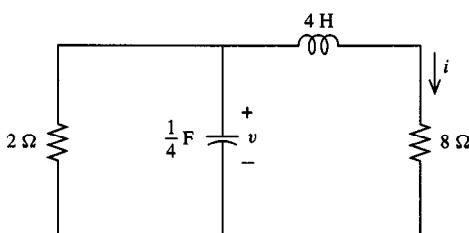
7.13. Obténgase i para $t > 0$ si $i_1(0) = 3 \text{ mA}$ e $i_2(0) = 1 \text{ mA}$.



PROBLEMA P7.13

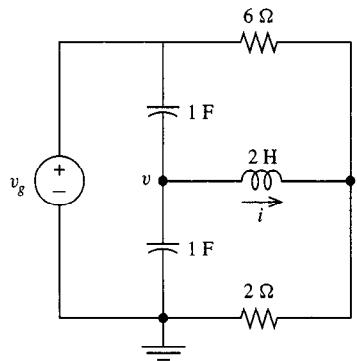
7.14. Obtenga la respuesta natural $i(t)$, $t > 0$ del circuito del problema 7.1(a) si $i(0) = 3 \text{ A}$ ($i_g = 0$).

7.15. Si $i(0) = 0$ y $v(0) = 12 \text{ V}$, obténganse *todas* las corrientes y voltajes. Demuestre que cada una es combinación de las dos mismas exponenciales.



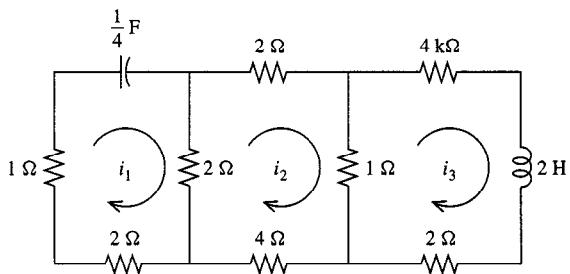
PROBLEMA P7.15

7.16. Obténgase la respuesta natural ($v_g = 0$) para $v(t)$, $t > 0$ si $v(0) = 1 \text{ V}$ e $i(0) = -2 \text{ A}$.



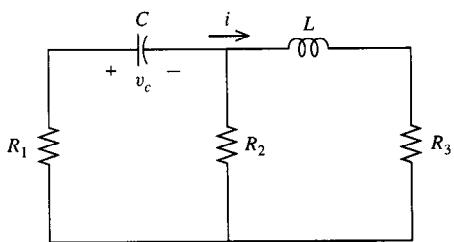
PROBLEMA P7.16

- 7.17. Obténgase la respuesta natural $i_1(t)$, $t > 0$ si $i_1(0) = 0$ y $di_1/dt|_0 = 1$.



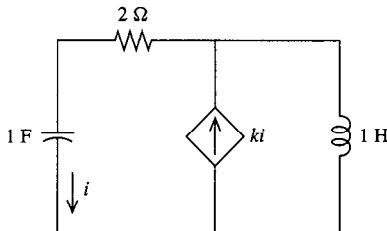
PROBLEMA P7.17

- 7.18. Obténganse la respuesta natural $i(t)$, $t > 0$, si (a) $v_c(0) = i(0) = 0$; (b) $v_c(0) = 0$, $i(0) = 1$ A.



PROBLEMA P7.18

- 7.19. Obténganse valores para k para que (a) todas las respuestas naturales $\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$; (b) la respuesta natural pueda $\rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$; (c) si este es un circuito de primer orden.



PROBLEMA P7.19

7.20.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Obténgase la respuesta natural [$f(t) = 0$] si $a_1 = 14$, $a_0 = 49$, $x(0) = 0$, y $dx/dt|_0 = 2$.

- 7.21. Escriba una ecuación diferencial de segundo orden no forzada con respuesta natural $k_1 e^{-t} \sin 2t + k_2 e^{-t} \cos 2t$. Obténganse k_1 y k_2 si las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ y $dx/dt|_0 = 4$.

- 7.22. Obtenga la solución forzada $x_f(t)$ si $f(t) = 16e^{-2t} + 4$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 8x = f(t)$$

- 7.23. Obtenga la solución forzada de la ecuación del problema 7.22 si $f(t) = 4e^{-4t}$.

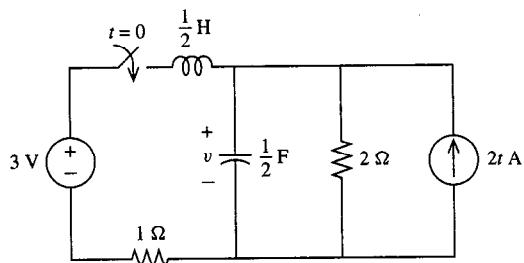
- 7.24. Obtenga la solución forzada a la ecuación del problema 7.22 si $f(t) = 4te^{-4t} + 4e^{-t}$.

- 7.25. Dibuje un circuito cuya ecuación descriptiva sea $\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + v = 2 \sin 2t$.

- 7.26. Obtenga la solución forzada $x_f(t)$.

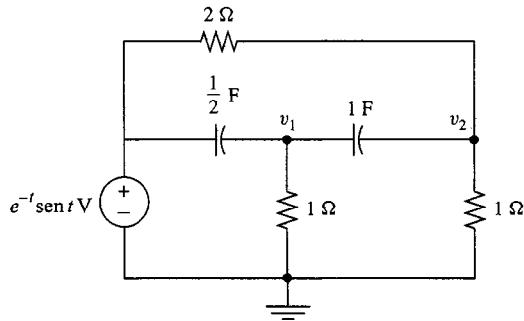
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 9x = t^4 e^{-3t} + e^{-3t}$$

- 7.27. Obtenga la solución forzada $v_f(t)$ para $t > 0$.



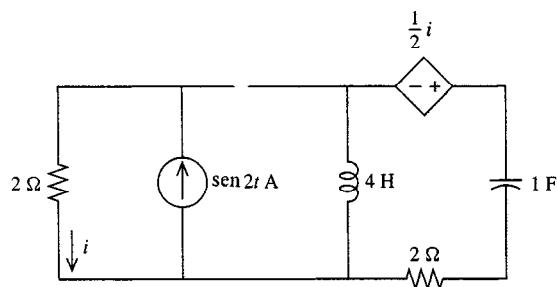
PROBLEMA P7.27

7.28. Obtenga las soluciones forzadas de v_1 y v_2 .

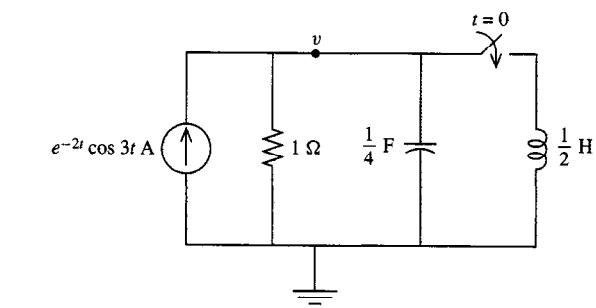


PROBLEMA P7.28

7.29. Obtenga la solución forzada $i_f(t)$. La fuente controlada tiene una transresistencia $r = \frac{1}{2} \Omega$.

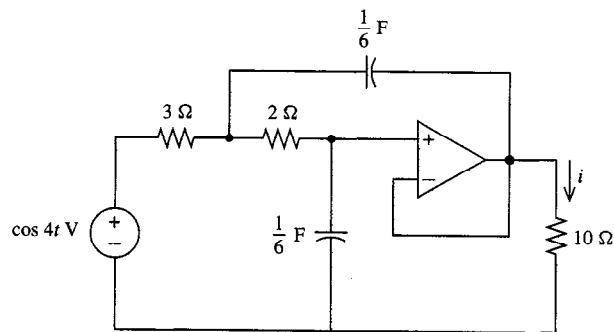


PROBLEMA P7.29



PROBLEMA P7.31

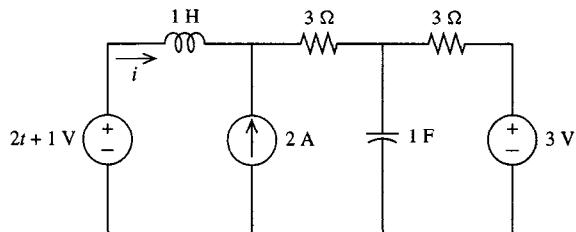
7.32. Obtenga la solución forzada $i_f(t)$.



PROBLEMA P7.32

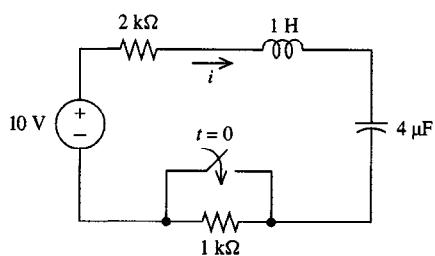
Para los problemas 7.33 a 7.45, suponga un estado estable dc en $t = 0$ y obtenga la solución total para $t > 0$ para la variable que se indica.

7.33.



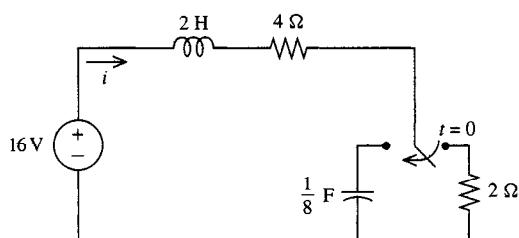
PROBLEMA P7.30

7.31. Obtenga la solución forzada $v_f(t)$.



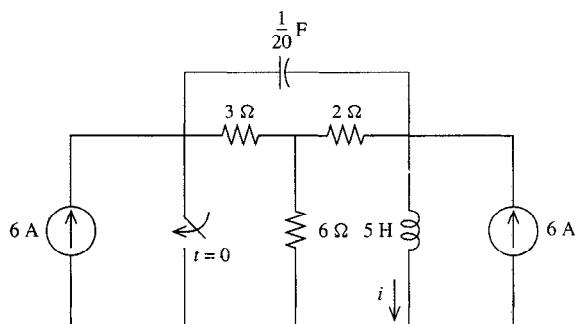
PROBLEMA P7.33

7.34.



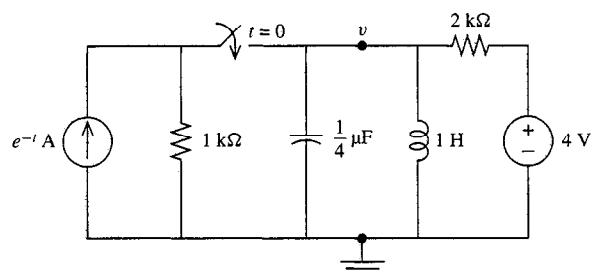
PROBLEMA P7.34

7.38.



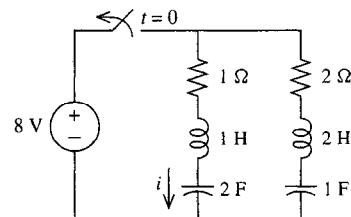
PROBLEMA P7.38

7.35.



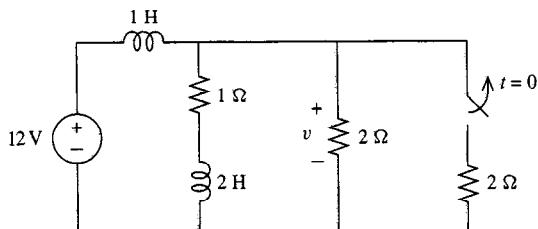
PROBLEMA P7.35

7.39.



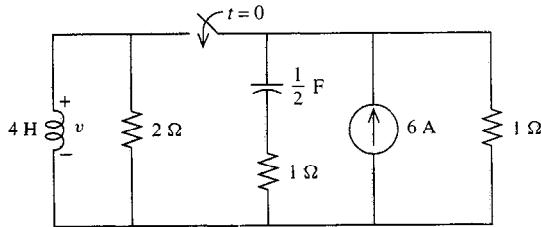
PROBLEMA P7.39

7.36.



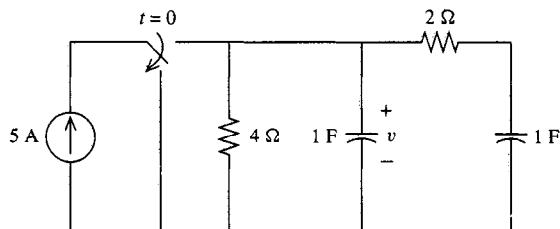
PROBLEMA P7.36

7.40.



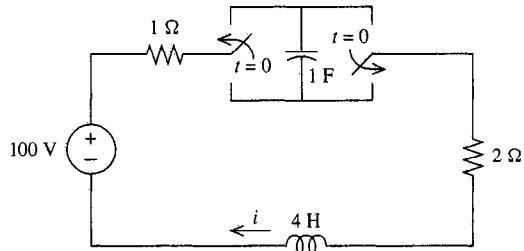
PROBLEMA P7.40

7.37.



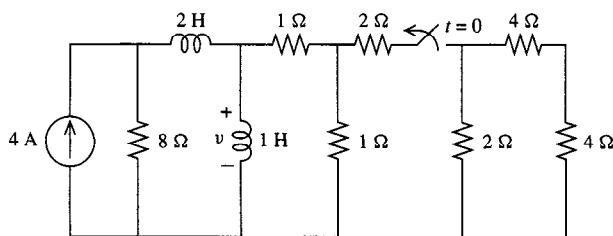
PROBLEMA P7.37

7.41.



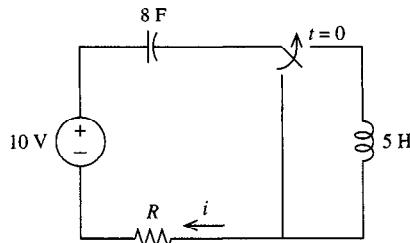
PROBLEMA P7.41

7.42.



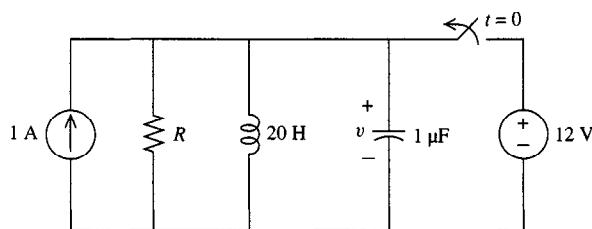
PROBLEMA P7.42

7.43. Obténgase la solución total $i(t)$ si R se fija en la resistencia crítica (amortiguación crítica).



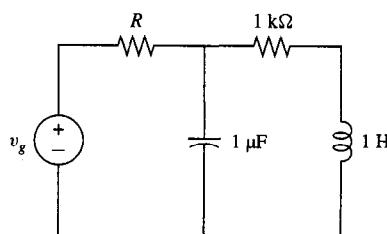
PROBLEMA P7.43

7.44. Obténgase la solución total $v(t)$ si R se fija a la resistencia crítica (amortiguación crítica).



PROBLEMA P7.44

7.45. Obténgase R para que el circuito esté sobreamortiguado con constantes de tiempo 1 ms y 4 ms.



PROBLEMA P7.45

7.46. Resuelva el problema 7.33 si el interruptor se cierra en $t = 10$ s en vez de $t = 0$.

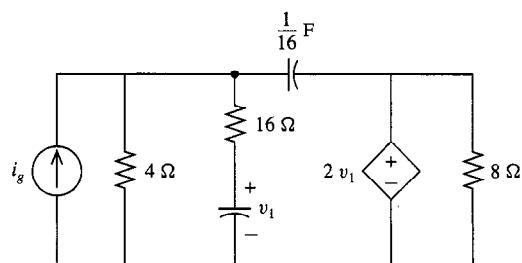
7.47. Resuelva el problema 7.34 si el interruptor se mueve a la izquierda en el instante $t = 0$ y luego a la derecha en el instante $t = 1$ s.

7.48. Resuelva el problema 7.38 si el interruptor se cierra en $t = 0$ y se vuelve a abrir en $t = 10$ s.

Problemas usando SPICE

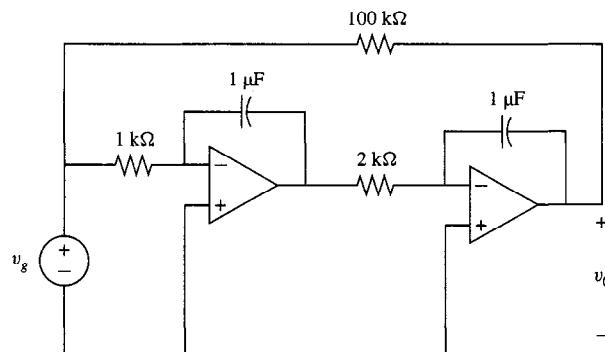
7.49. Obténgase la respuesta de escalón unitario del circuito del problema 7.1. Compruébese utilizando SPICE.

7.50. Obténgase la respuesta de escalón unitario. Compruébese utilizando SPICE.



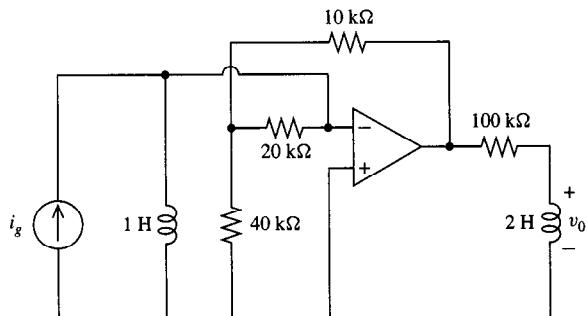
PROBLEMA P7.50

7.51. Obténgase la respuesta de escalón unitario. Compruébese utilizando SPICE.



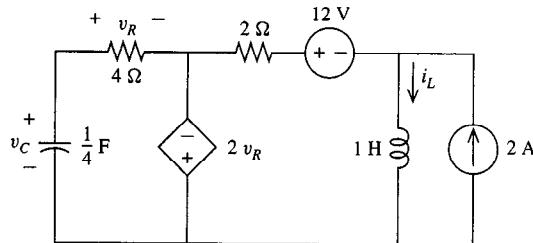
PROBLEMA P7.51

7.52. Obténgase la respuesta de escalón unitario. Compruébese utilizando SPICE.



PROBLEMA P7.52

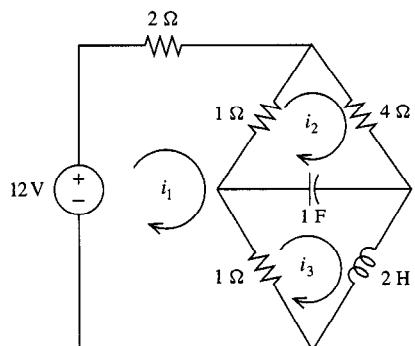
7.55. Obténgase la respuesta total $v_R(t)$ si $v_c(0) = 0$ e $i_L(0) = 1 \text{ A}$.



PROBLEMA P7.55

Problemas más complejos

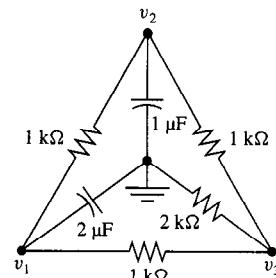
7.53. Obténgase las corrientes de malla para $t > 0$, suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero en $t = 0$.



PROBLEMA P7.53

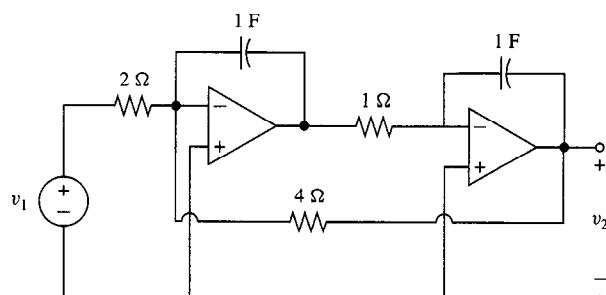
7.56. Escriba dos ecuaciones diferenciales de segundo orden distintas, donde ambas tengan la misma solución forzada $x_{1f} = x_{2f} = 2t + 1$ pero que tengan formas distintas para sus soluciones naturales. Resuelva ambas ecuaciones suponiendo condiciones iniciales cero.

7.57. Obtenga la respuesta natural $v_1(t)$, $t > 0$ (a) si $v_1(0) = v_2(0) = 0$; (b) si $v_1(0) = v_2(0) = 1 \text{ V}$. [Sugerencia: Resuelva la ecuación del nodo 1 para v_3 , y utilícelo para eliminar v_3 de las ecuaciones de los nodos 2 y 3.]



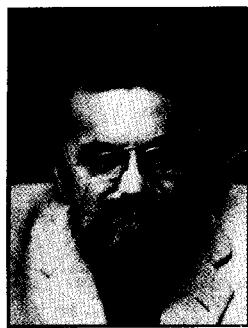
PROBLEMA P7.57

7.54. Obténgase la respuesta forzada $v_2(t)$ si $v_1(t) = 4 \cos 2t$.



PROBLEMA P7.54

Fuentes sinusoidales y fasores



Charles Proteus Steinmetz
1865-1923

Descubrí la ecuación que nos permitirá transmitir electricidad mediante corriente alterna a través de miles de millas. Reduje esto a un simple problema algebraico.

Charles Proteus Steinmetz

El uso de números complejos para resolver problemas de circuitos ac (conocido como método de fasores y que se considera en el presente capítulo) fue hecho por primera vez por el matemático e ingeniero eléctrico germano-austriaco Charles Proteus Steinmetz, en un documento de trabajo presentado en 1893. Steinmetz también fue notable por las leyes de histéresis, y por su obra acerca de la producción de relámpagos.

Steinmetz nació en Breslau, Alemania, hijo de un trabajador de los ferrocarriles gubernamentales. Sufría de una deformación congénita, y perdió a su madre cuando tenía apenas un año de edad, pero esto no le evitó ser un genio científico. Del mismo modo en que su obra sobre la histéresis atrajo posteriormente la atención de la comunidad científica, sus actividades políticas atrajeron a la policía mientras asistió a la Universidad de Breslau. Se vio obligado a huir del país justo después de terminar su tesis de doctorado, título que nunca recibió. Realizó investigación eléctrica en Estados Unidos, especialmente para la compañía General Electric. Su documento sobre números complejos revolucionó el análisis de circuitos ac, aunque en su época se dijo que sólo Steinmetz era capaz de comprender el método. En 1897 también publicó el primer libro para reducir los cálculos ac a una ciencia.

Contenido del capítulo

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">■ 8.1 Propiedades de los sinusoides■ 8.2 Ejemplo de circuito RLC■ 8.3 Fuentes complejas■ 8.4 Fasores■ 8.5 Leyes I-V para fasores■ 8.6 Impedancia y admitancia | <ul style="list-style-type: none">■ 8.7 Leyes de Kirchhoff y equivalentes de impedancia■ 8.8 Circuitos con fasores■ Resumen■ Problemas |
|--|---|



En los dos capítulos anteriores, analizamos circuitos que contienen elementos de almacenamiento, y vimos que la respuesta completa es la suma de las respuestas natural y forzada. La respuesta natural se obtiene luego de eliminar todas las fuentes independientes, y por consiguiente no es función de estas fuentes, que también son conocidas como *excitaciones* (a diferencia de las fuentes dependientes, excitan respuestas sin necesidad de unirse con otras fuentes). En cambio, la respuesta forzada, depende directamente de la forma funcional de excitación que se aplica al circuito. En el caso de una fuente dc, la respuesta forzada es una respuesta (constante) dc, una entrada exponencial provoca una respuesta forzada exponencial, etcétera.

Quizá el tipo más importante de excitación es el sinusoide. Los sinusoides aparecen en cualquier fenómeno natural, por ejemplo en el movimiento de un péndulo, la propagación de ondas de luz o sonido a través del espacio, y la vibración de cuerdas o vigas de acero. Como hemos visto, todo circuito no amortiguado de segundo orden produce una respuesta natural sinusoidal, y todo circuito subamortiguado de segundo orden tiene como respuesta natural un sinusoide decreciente.

En la ingeniería y tecnología eléctricas, las funciones de tiempo sinusoidales aparecen en el núcleo de muchas, quizás la mayoría, de las aplicaciones más importantes. Las señales de transporte generadas para sistemas de comunicación son sinusoides, y el sinusoide predomina en la industria de la generación eléctrica. Ciertamente, como veremos posteriormente en el estudio de las series de Fourier, casi toda señal útil en la ingeniería eléctrica puede representarse como suma de componentes sinusoidales.

Debido a su importancia, los circuitos con excitación sinusoidal, o en *circuitos ac*, se considerará en detalle en éste y otros capítulos subsiguientes. Puesto que para todos los circuitos lineales la respuesta natural es independiente de la excitación, y puede ser obtenida mediante los métodos de los capítulos anteriores, nos concentraremos en obtener la respuesta forzada a la excitación sinusoidal. Esta respuesta es importante en sí, porque para los circuitos estables, es la respuesta en estado estable ac la que queda, luego de que transcurre el tiempo requerido para la respuesta natural transitoria.

Interesándonos únicamente en la respuesta forzada, no nos limitaremos a circuitos de primero y segundo orden, como lo hicimos en los capítulos 6 y 7. Como veremos, los circuitos *RLC* de orden mayor pueden ser manejados, en lo que concierne a la respuesta forzada, de un modo muy similar al que fueron manejados los circuitos resistivos en el

capítulo 2. El descubrimiento de esta técnica de análisis de circuitos ac, que no presenta mayor dificultad que en el caso de circuitos dc, y que se conoce como análisis de fasores, es uno de los grandes logros intelectuales en el campo del análisis de la ingeniería. La ingeniería moderna, la eléctrica y otras serían inconcebibles sin la potencia y versatilidad del análisis de fasores, principal tema del presente capítulo.

8.1

PROPIEDADES DE LOS SINUSOIDES

Dedicaremos esta sección a revisar algunas de las propiedades de las funciones sinusoidales. Comencemos con la onda seno,

$$v(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t \quad (8.1)$$

que aparece dibujada en la figura 8.1. La *amplitud* del sinusoide es V_m que es el valor máximo que tiene la función. La *frecuencia en radianes*, o *frecuencia angular*, es ω , medida en radianes por segundo (rad/s).

El sinusoide es una función periódica, definida de forma general por la propiedad de que hay un número mínimo T tal que, para toda t ,

$$v(t+T) = v(t) \quad (8.2)$$

donde T es el *periodo*. Es decir, la función pasa por un ciclo completo, o periodo, que luego se repite cada T segundos. En el caso del sinusoide, el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8.3)$$

como puede verse a partir de (8.1) y (8.2). Por consiguiente, en 1 s la función pasa por $1/T$ ciclos, o periodos. Su *frecuencia f* es por tanto

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (8.4)$$

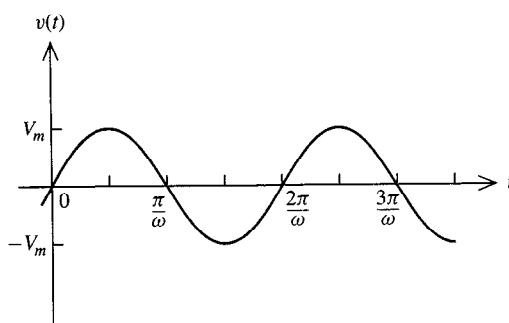


FIGURA 8.1 Función sinusoidal.

ciclos por segundo o *hertz* (abreviado Hz). Este último término, en honor al físico alemán Heinrich R. Hertz (1857-1894), es actualmente la unidad convencional para la frecuencia. La relación entre frecuencia y frecuencia de radianes, es, en base a (8.4),

$$\omega = 2\pi f \quad (8.5)$$

Una expresión sinusoidal más general está dada por

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (8.6)$$

donde ϕ es el *ángulo de fase*, o simplemente *fase*. Para ser consistentes, puesto que ωt está expresado en radianes, ϕ debe expresarse también en radianes. Sin embargo, los grados son una medida muy familiar para un ángulo. Por consiguiente, podemos escribir

$$v = V_m \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

o

$$v = V_m \sin(2t + 45^\circ)$$

de manera intercambiable, aun cuando la última expresión contiene una inconsistencia matemática formal. En ausencia del pequeño círculo que indica los grados, la unidad para los ángulos será en radianes.

La línea continua de la figura 8.2 representa a (8.6), junto con un dibujo de (8.1), en línea punteada. La curva continua es simplemente la curva punteada desplazada en ϕ/ω segundos, o ϕ radianes a la izquierda. Por consiguiente, los puntos en la curva continua, como en el caso de sus picos, ocurren ϕ radianes, o ϕ/ω s, antes de que los puntos correspondientes de la curva punteada. Según esto, podemos decir que $V_m \sin(\omega t + \phi)$ se adelanta a $V_m \sin \omega t$ por ϕ radianes (o grados). Nótese que una fase adelantada positiva ($\phi > 0$) implica un desplazamiento a la izquierda de la gráfica de la función. En general, el sinusoide

$$v_1 = V_{m1} \sin(\omega t + \alpha)$$

está adelantado al sinusoide

$$v_2 = V_{m2} \sin(\omega t + \beta)$$

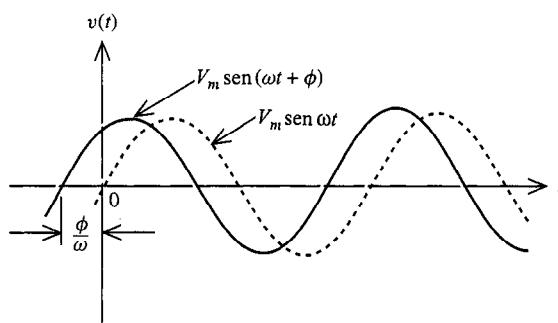


FIGURA 8.2 Dos sinusoides con fase distinta.

por $\alpha - \beta$. Una expresión equivalente es que v_2 está *retardada* respecto a v_1 por $\alpha - \beta$. En la figura 8.2, $V_m \sin \omega t$ está retardada respecto a $V_m \sin(\omega t + \phi)$ por ϕ radianes. Una fase retardada positiva implica un desplazamiento a la derecha en la gráfica de la función.

Como ejemplo, considérese

$$y \quad v_1 = 4 \sin(2t + 30^\circ)$$

$$v_2 = 6 \sin(2t - 12^\circ)$$

Por consiguiente v_1 está adelantada respecto a v_2 , (o v_2 está retardada respecto a v_1) por $30 - (-12) = 42^\circ$. La gráfica de v_1 está desplazada a la izquierda por 42° respecto a v_2 .

Hasta ahora hemos considerado más a las funciones seno que a las funciones coseno para definir sinusoides. No es importante qué forma utilicemos, puesto que

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega t \quad (8.7a)$$

$$\circ \quad \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t \quad (8.7b)$$

La única diferencia entre los senos y cosenos es, por consiguiente, el ángulo de fase. Por ejemplo, podemos escribir (8.6) como

$$v(t) = V_m \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Las ecuaciones (8.7) son entidades trigonométricas para desplazamientos de un cuarto de periodo. Los desplazamientos de medio periodo cambian el signo

$$\sin(\omega t \pm \pi) = -\sin \omega t \quad (8.8a)$$

$$\cos(\omega t \pm \pi) = -\cos \omega t \quad (8.8b)$$

en tanto que los desplazamientos de periodo completo no tienen ningún efecto:

$$\sin(\omega t \pm 2\pi) = \sin \omega t \quad (8.8c)$$

$$\cos(\omega t \pm 2\pi) = \cos \omega t \quad (8.8d)$$

Ejemplo 8.1

Para determinar en qué medida un sinusoide está adelantado o retardado respecto a otro de la misma frecuencia, primero debemos expresar a ambos como ondas seno u ondas coseno con amplitudes positivas. Por ejemplo, sea

$$y \quad v_1 = 4 \cos(2t + 30^\circ)$$

$$v_2 = -2 \sin(2t + 18^\circ)$$

Entonces, por (8.8a),

$$-\sin \omega t = \sin(\omega t + 180^\circ)$$

y tenemos

$$v_2 = 2 \sin(2t + 18^\circ + 180^\circ)$$

$$= 2 \cos(2t + 18^\circ + 180^\circ - 90^\circ)$$

$$= 2 \cos(2t + 108^\circ)$$

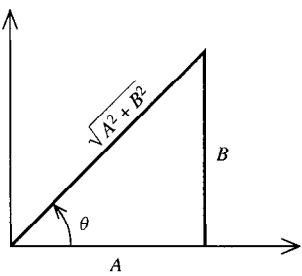


FIGURA 8.3. Triángulo útil para sumar dos sinusoides.

Comparando esta última expresión con v_1 , vemos que v_1 está adelantado respecto a v_2 $30^\circ - 108^\circ = -78^\circ$, que es lo mismo que decir que v_1 está retardada respecto a v_2 por 78° .

La suma de una onda seno y una onda coseno resulta en otro sinusode de esa misma frecuencia. Para mostrar esto, considérese

$$A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen} \omega t \right]$$

que por la figura 8.3 puede ser escrita como

$$A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \omega t \cos \theta + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \theta)$$

Por una fórmula trigonométrica, esto es igual a

$$A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \theta) \quad (8.9a)$$

donde, por la figura 8.3,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad (8.9b)$$

Puede establecerse un resultado similar si los términos seno y coseno tienen ángulos de fase distintos de cero, lo que en general indica que la suma de dos sinusoides de una frecuencia dada, resulta en otro sinusode de la misma frecuencia.

La conversión de la suma de un seno y un coseno puede ser revertida. Por (8.9),

$$M \cos(\omega t - \theta) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \quad (8.10a)$$

donde

$$A = M \cos \theta \quad (8.10b)$$

$$B = M \operatorname{sen} \theta \quad (8.10c)$$

La descomposición de un sinusode en componentes seno y coseno se conoce como *representación de cuadratura* del sinusode.

Nótese que debemos ser muy específicos en lo que significa (8.9b), puesto que algunos textos de matemáticas consideran a esta expresión como el valor principal del arco tangente y colocan a θ en un cuadrante específico. Con esto queremos decir que el lado terminal del ángulo θ es el cuadrante donde está situado el punto (A, B) .

Ejemplo 8.2

Como ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} -5 \cos 3t + 12 \operatorname{sen} 3t &= \sqrt{5^2 + 12^2} \cos \left[3t - \tan^{-1} \left(\frac{12}{-5} \right) \right] \\ &= 13 \cos(3t - 112.6^\circ) \end{aligned}$$

puesto que $\tan^{-1}(12/-5)$ está en el segundo cuadrante, porque $A = -5 < 0$ y $B = 12 > 0$.

8.1.1. Obténganse los períodos de los siguientes sinusoides:

- (a) $4 \cos(5t + 33^\circ)$
- (b) $\cos(2t + \frac{\pi}{4}) + 3 \sin(2t - \frac{\pi}{6})$
- (c) $6 \cos 2\pi t$

Respuesta (a) $2\pi/5$; (b) π ; (c) 1

8.1.2. Obténgase la amplitud y fase de los siguientes sinusoides:

- (a) $3 \cos 2t + 4 \sin 2t$
- (b) $(4\sqrt{3} - 3) \cos(2t + 30^\circ) + (3\sqrt{3} - 4) \sin(2t + 60^\circ)$ [Sugerencia: en (b) expándanse ambas funciones y utilícese (8.9).]

Respuesta (a) $5, -53.1^\circ$; (b) $5, 36.9^\circ$

8.1.3. Obténgase la frecuencia de los siguientes sinusoides:

- (a) $3 \cos(6\pi t - 10^\circ)$
- (b) $4 \sin 377t$

Respuestas (a) 3; (b) 60 Hz

8.2

EJEMPLO DE CIRCUITO RLC

Como ejemplo de un circuito con excitación sinusoidal, obtengamos la corriente de malla forzada y en el circuito y serie RLC que aparece en la figura 8.4. Por LVK,

$$2 \frac{di}{dt} + 2i + 10 \int_{0+}^t i(\tau) d\tau + v_c(0+) = 15 \cos 2t \quad (8.11a)$$

Diferenciando y dividiendo entre 2,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 5i = -15 \sin 2t \quad (8.11b)$$

De la tabla 7.1, la solución forzada tentativa es

$$i = A \cos 2t + B \sin 2t$$

Sustituyendo esto en (8.11),

$$(-4A \cos 2t - 4B \sin 2t) + (-2A \sin 2t + 2B \cos 2t) + 5(A \cos 2t + B \sin 2t) = -15 \sin 2t$$

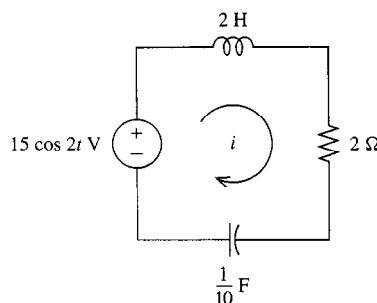


FIGURA 8.4 Circuito RLC en serie con excitación sinusoidal.

y agrupando los coeficientes de los términos seno y coseno,

$$A + 2B = 0 \quad (8.12a)$$

$$-2A + B = -15 \quad (8.12b)$$

Multiplicando por dos la primera de estas ecuaciones y sumándola a la segunda, se obtiene $5B = -15$ o $B = -3$, y sustituyéndola en la primera, $A = +6$. La respuesta forzada es

$$i = 6 \cos 2t - 3 \sin 2t \text{ A} \quad (8.13)$$

Estos dos términos de cuadratura pueden combinarse en uno, utilizando las fórmulas de conversión (8.10) de la sección anterior:

$$M = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{3}{6} \right) = -26.6^\circ$$

o

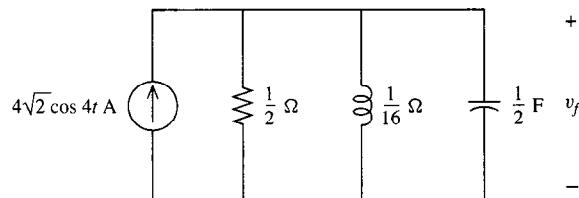
$$i = M \cos(\omega t - \theta) = 3\sqrt{5} \cos(2t + 26.6^\circ) \text{ A} \quad (8.14)$$

El método utilizado para llegar a nuestra solución (8.14) es directo, pero concordará el lector en que es algo laborioso para un simple circuito de una sola trayectoria cerrada. En particular, se hace notar la necesidad de resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas para los coeficientes de cuadratura desconocidos A y B . Para circuitos de orden mayor, puede anticiparse que el uso de este procedimiento es aún más laborioso. En el resto del presente capítulo, desarrollaremos un enfoque que ofrece una considerable ventaja para estos cálculos, que evita la necesidad de resolver dos ecuaciones simultáneas para los dos coeficientes de cuadratura A y B , y que nos permite tratar a los circuitos RLC del mismo modo en que tratamos a los circuitos puramente resistivos de los capítulos anteriores. El método utilizado anteriormente, basado en la solución de dominio de tiempo de las ecuaciones diferenciales, siempre quedará disponible, pero para problemas complejos, se preferirá el método de los fasores que se presentará a continuación.

EJERCICIOS

- 8.2.1.** Obténgase la respuesta forzada v_f

Respuesta $2 \cos(4t + 45^\circ) \text{ V}$



EJERCICIO 8.2.1

- 8.2.2.** Repítase el ejercicio 8.2.1 si se elimina el inductor del circuito.

Respuesta $2 \cos(4t - 45^\circ) \text{ V}$

Un método alternativo para tratar circuitos con fuentes sinusoidales, que será nuestro interés principal en este y muchos de los siguientes capítulos, involucra reemplazar las fuentes dadas por *fuentes complejas*, cuyas funciones de fuente tienen partes reales e imaginarias. Las corrientes y voltajes en circuitos excitados por fuentes complejas, tendrán a su vez valores complejos.

Puesto que nos basaremos mucho en los números complejos y su manejo, se recomienda a los lectores no familiarizados con números complejos, o que deseen repasar sus conocimientos, que consulten el apéndice B. Para conveniencia, revisaremos las definiciones y propiedades más importantes de los números complejos antes de continuar.

Cada número complejo es un punto en el *plano complejo*. El número complejo A se escribe en *forma rectangular* como

$$A = a + jb \quad (8.15)$$

donde $j = \sqrt{-1}$ es el número complejo de longitud unitaria sobre el eje imaginario en el plano complejo. Los números reales a y b son la *parte real*, denotados como $a = \operatorname{Re} A$, y la *parte imaginaria*, $b = \operatorname{Im} A$, del número complejo A .

El mismo número complejo A puede ser representado en *forma polar* como

$$A = |A| \angle \alpha \quad (8.16)$$

donde $|A|$, la *magnitud* de A , y $\angle \alpha$, el *ángulo* de A , están dados por

$$|A| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \quad (8.17a)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (8.17b)$$

En la figura 8.5 se muestra una relación entre las formas rectangular y polar.

La importante *identidad de Euler* está dada por

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (8.18a)$$

o, usando (8.18a) y (8.17), en su forma polar

$$e^{j\theta} = 1 \angle \theta \quad (8.18b)$$

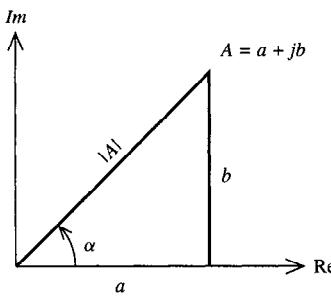


FIGURA 8.5 Representaciones rectangular y polar.

esta última forma de la identidad de Euler puede utilizarse para generar una útil forma alternativa para escribir números complejos en la forma polar. Puesto que

$$A = |A|\angle\alpha = |A|(1\angle\alpha)$$

entonces, por (8.18b), tenemos la *forma polar exponencial* para un número complejo:

$$A = |A|e^{j\alpha} \quad (8.19)$$

Las formas rectangular, polar y polar exponencial de un mismo número complejo A serán cada una convenientes en contextos distintos, y es esencial poderse mover de una a la otra.

Ejemplo 8.3

Considérese el número complejo A dado en la forma polar como $A = 4 + j3$. Entonces $|A| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ y $\alpha = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36.9^\circ$. Por consiguiente, la forma polar es

$$A = 5\angle 36.9^\circ$$

y la forma polar exponencial es

$$A = 5e^{j36.9^\circ}$$

Las tres formas describen cada una al mismo número complejo A , el mismo punto A en el plano complejo.

El comportamiento de la *función exponencial compleja* $e^{j\omega t}$ es central en nuestro estudio. Por la forma polar de la identidad de Euler (8.18b),

$$e^{j\omega t} = 1\angle\omega t$$

Examinando esta expresión, la magnitud de la exponencial compleja es siempre la unidad, en tanto que su ángulo crece uniformemente al ritmo de un radianes por segundo. De este modo, la *exponencial compleja* $e^{j\omega t}$ forma círculos unitarios en el plano complejo, iniciándose en el eje real positivo en el instante $t = 0$ y moviéndose contra las manecillas del reloj, completando un ciclo completo (o periodo), cada $T = 2\pi/\omega$ segundos. La proyección de este punto en el eje horizontal es su parte real ($\cos \omega t$), y la que se proyecta en el eje vertical es la parte imaginaria ($\sin \omega t$).

La exponencial compleja general, multiplicada y de fase desplazada $V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ en la figura 8.6(b), es similar, excepto en que $t = 0$ en su fase inicial es ϕ radianes, y forma círculos de radio V_m . Por proyección horizontal,

$$\operatorname{Re}[V_m e^{j(\omega t + \phi)}] = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

y por proyección vertical

$$\operatorname{Im}[V_m e^{j(\omega t + \phi)}] = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

que puede ser verificada por inspección de la forma rectangular de la identidad de Euler.

Ahora iremos al tema de nuestro interés principal, es decir, la aplicación de números complejos a circuitos eléctricos. Considérese el circuito lineal C de la figura 8.7, que tiene una fuente independiente v_g . Deseamos determinar la respuesta forzada a la excitación v_g . Supóngase que se eliminaron todas las demás fuentes independientes en C , así como todas las condiciones iniciales. Ahora sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones reales cualesquiera del tiempo. Supongamos que cuando utilizamos la fuente $v_g = f_1(t)$ medimos la respuesta forzada $i_1(t)$, y cuando se utiliza $v_g = f_2(t)$, la respuesta forzada es $i_2(t)$, como se muestra en la figura 8.7 (a, b). Estas respuestas a las entradas reales f_1 y f_2 son también reales. Por el principio de proporcionalidad, multiplicando la excitación f_2 por la constante j , multiplicará la respuesta i_2 por el mismo factor. Entonces, por superposición, la respuesta a la suma $f_1 + jf_2$ será la suma correspondiente de respuestas separadas $i_1 + ji_2$, como se muestra en la figura 8.7(c). En este caso, hemos utilizado el hecho de que la proporcionalidad y la superposición funcionan igualmente bien tanto para cantidades complejas como para las reales.

La figura 8.7 revela una importante propiedad de los sistemas lineales. $v_g = f_1 + jf_2$ es una fuente compleja arbitraria, e $i = i_1 + ji_2$ es su respuesta forzada. Puesto que iv es la respuesta separada a f_1 , que es la parte real de la excitación v_g , *la respuesta a la parte real de una fuente compleja es la parte real de la respuesta*. Similarmente, notando que

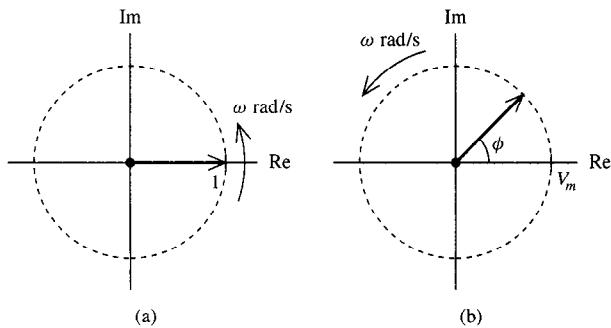
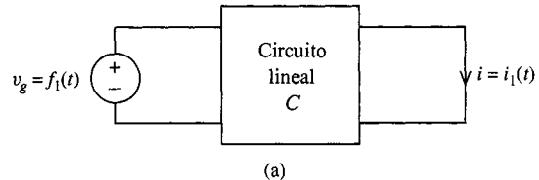
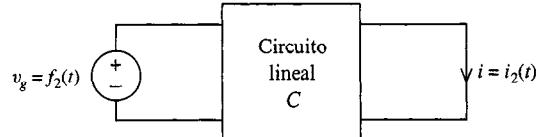


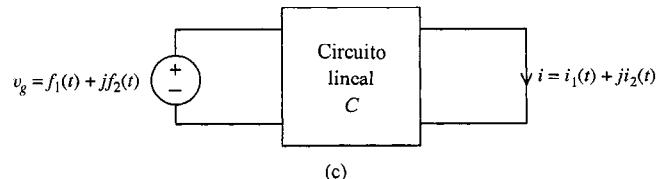
FIGURA 8.6 (a) Exponencial compleja $e^{j\omega t}$; (b) exponencial compleja general $V_m e^{j(\omega t + \phi)}$.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 8.7 (a) Respuesta a f_1 ; (b) respuesta a f_2 ; (c) respuesta a la combinación lineal $f_1 + jf_2$.

i_2 es la respuesta a f_2 , la parte imaginaria de v_g , la respuesta a la parte imaginaria de una fuente compleja es la parte imaginaria de la respuesta.

Esta asociación es particularmente significativa cuando la fuente compleja tiene la forma de una exponencial compleja $v_g = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$. Por la tabla 7.1, sabemos que la respuesta forzada a esta fuente será una exponencial compleja de la misma frecuencia ω , que denotamos como $i = I_m e^{j(\omega t + \theta)}$. Una vez obtenida la respuesta a la fuente exponencial compleja $V_m e^{j(\omega t + \phi)}$, podemos escribir inmediatamente la respuesta a las fuentes sinusoidales $V_m \cos(\omega t + \phi)$ como su parte real, y la respuesta a $V_m \sin(\omega t + \phi)$ como su parte imaginaria.

Ejemplo 8.4

Volvamos a revisar el circuito RLC de la sección 8.2. Reemplazando la fuente sinusoidal $15 \cos 2t$ V por la fuente compleja $15e^{j2t}$ V, (8.11a) es

$$2 \frac{di}{dt} + 2i + 10 \int_{0+}^t i(\tau) d\tau + v_c(0+) = 15e^{j2t}$$

Diferenciando y dividiendo entre dos, como hicimos en (8.11b),

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 5i = 15e^{j2t}$$

Sustituyendo la forma tentativa $i = Ae^{j2t}$, obtenemos

$$(-4 + j2 + 5)Ae^{j2t} = 15e^{j2t}$$

Despejando para A ,

$$A = \frac{15j}{1+j2} = 3\sqrt{5}\angle 26.6^\circ$$

La respuesta i a esta fuente compleja es Ae^{j2t} , o

$$i = (3\sqrt{5}\angle 26.6^\circ)e^{j2t} = 3\sqrt{5}e^{j(2t+26.6^\circ)} \text{ A}$$

donde la forma polar exponencial (8.19) fue utilizada en la última expresión.

Puesto que la parte real de $15e^{j2t}$ es $15 \cos 2t$, la respuesta a la fuente $v_g = 15 \cos 2t$ V es

$$\text{Re}[3\sqrt{5}e^{j(2t+26.6^\circ)}] = 3\sqrt{5} \cos(2t + 26.6^\circ) \text{ A}$$

que concuerda con nuestro cálculo anterior. Además, puesto que la parte imaginaria de $15e^{j2t}$ es $15 \sin 2t$, podemos aplicar la fuente sinusoidal $v_g = 15 \sin 2t$, donde la respuesta sería

$$\text{Im}[3\sqrt{5}e^{j(2t+26.6^\circ)}] = 3\sqrt{5} \sin(2t + 26.6^\circ) \text{ A}$$

Ejemplo 8.5

Como ejemplo adicional, obtengamos la respuesta forzada i_f de

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + 8i = 12\sqrt{2} \cos(2t + 15^\circ)$$

Primero sustituimos la excitación real por la excitación compleja,

$$v_1 = 12\sqrt{2}e^{j(2t+15^\circ)}$$

donde, para nuestra conveniencia, la fase está escrita en grados. La respuesta compleja i_1 , satisface

$$\frac{d^2i_1}{dt^2} + 2\frac{di_1}{dt} + 8i_1 = 12\sqrt{2} e^{j(2t+15^\circ)}$$

y debe tener la forma general

$$i_1 = Ae^{j2t}$$

Por consiguiente, debemos tener

$$(-4 + j4 + 8)Ae^{j2t} = 12\sqrt{2}e^{j2t}e^{j15^\circ}$$

$$0 \quad A = \frac{12\sqrt{2} e^{j15^\circ}}{4 + j4} = \frac{12\sqrt{2} / 15^\circ}{4\sqrt{2} / 45^\circ} = 3 / -30^\circ$$

que resulta en

$$i_1 = (3 / -30^\circ)e^{j2t}$$

La respuesta a la excitación original es la parte real de la respuesta a esta excitación compleja:

$$i_f = \text{Re } i_1 = 3 \cos(2t - 30^\circ)$$

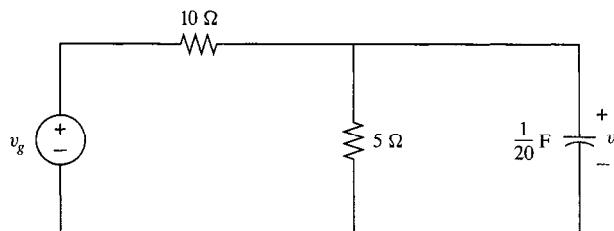
En resumen, dado un circuito excitado por una sinusode, la respuesta forzada puede obtenerse reemplazando el sinusode por una

exponencial compleja, cuya parte real (o imaginaria) es el sinusode dado. La ecuación descriptiva será más fácil de resolver, puesto que la solución forzada tentativa tendrá una sola constante indeterminada, en lugar de dos que requiere la solución de ecuaciones simultáneas para los coeficientes. Una vez resuelta, podemos fácilmente relacionar la respuesta de excitación compleja con nuestra respuesta sinusoidal deseada, tomando la parte real de la respuesta, si la fuente sinusoidal original es la parte real de la fuente exponencial compleja, o la parte imaginaria, si es la parte imaginaria de la fuente compleja.

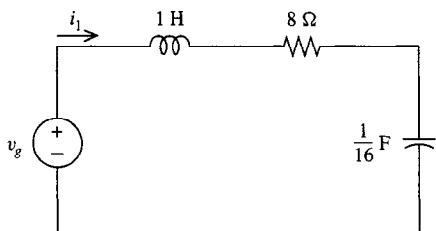
EJERCICIOS

- 8.3.1.** (a) A partir de las ecuaciones de dominio de tiempo, obténgase la respuesta v si $v_g = 10e^{j8t}$ V. (b) Utilizando el resultado en (a), obténgase la respuesta v si $v_g = 10 \cos 8t$ V.

Respuesta (a) $2e^{j(8t-53.1^\circ)}$ V; (b) $2 \cos(8t - 53.1^\circ)$ V



EJERCICIO 8.3.1



EJERCICIO 8.3.3

- 8.3.2.** Obténgase la respuesta forzada v en el ejercicio 8.3.1 si $v_g = 10 \sin 8t$ V. (Sugerencia: $\sin 8t = \text{Im } e^{j8t}$).

Respuesta $2 \sin(8t - 53.1^\circ)$ V

- 8.3.3.** Utilizando el método de la excitación compleja, obténgase la respuesta forzada i si $v_g = 20 \cos 2t$ V.

Respuesta $2 \cos(2t + 36.9^\circ)$ A

- 8.3.4.** Repítase el ejercicio 8.3.3 si $v_g = 16 \cos 4t$ V.

Respuesta $2 \cos 4t$ A

8.4

FASORES

Los resultados obtenidos en la sección precedente pueden expresarse en una forma más compacta utilizando las magnitudes llamadas *fasores*, que presentaremos en esta sección. El método de fasores para analizar circuitos se atribuye de manera general a Charles Proteus Steinmetz (1865-1923), un famoso ingeniero eléctrico que realizó investigaciones para la compañía General Electric durante los primeros años de este siglo.

Nuestro interés es la respuesta forzada de un circuito a una excitación sinusoidal en la frecuencia ω . Cada fuente sinusoidal puede ser expresada como un coseno

$$v_g(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Supóngase que sustituimos cada fuente por una fuente exponencial compleja dada por

$$v_{g1}(t) = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Comparando estas dos expresiones, podemos ver que *la fuente compleja tiene la misma frecuencia ω , y que la fuente original es la parte real de la fuente compleja que elegimos para sustituirla.*

Considérese la respuesta forzada en el nuevo circuito. Puesto que está excitada por fuentes exponenciales complejas de frecuencia ω , todas las corrientes y voltajes también serán exponenciales complejas de frecuencia ω . Esto surge de la forma de la solución forzada tentativa $Ae^{j\omega t}$. Entonces, cada corriente será de la forma

$$i_1(t) = \mathbf{I} e^{j\omega t} \quad (8.20a)$$

y cada voltaje será de la forma

$$v_1(t) = \mathbf{V} e^{j\omega t} \quad (8.20b)$$

donde \mathbf{I} y \mathbf{V} son números complejos. Definiremos \mathbf{I} y \mathbf{V} como *fasores*, es decir, los números complejos que multiplican $e^{j\omega t}$ en las expresiones para corrientes y voltajes. Para distinguirlos de otras magnitudes, los fasores serán representados en negritas. Las unidades para los fasores son las mismas que las corrientes y voltajes con las que están asociados, por consiguiente, en (8.20) \mathbf{I} hereda las unidades de i_1 , que generalmente son amperes, y \mathbf{V} tiene las mismas unidades del voltaje v_1 , generalmente en volts.

De este modo, los fasores quedan definidos en términos de la respuesta de excitaciones complejas, pero la importancia de los fasores yace en su relación directa con las respuestas sinusoidales. En el circuito sinusoidal con el que iniciamos la presente discusión, todas las respuestas forzadas son sinusoides con frecuencia ω . Sea una de estas respuestas $v(t)$. Luego de sustituir las fuentes exponenciales complejas, la misma variable de respuesta será $v_1(t) = \mathbf{V} e^{j\omega t}$, donde $\mathbf{V} = |\mathbf{V}| \angle \theta$ es su fasor de voltaje. Pero recordemos de la sección anterior que la respuesta a la parte real de una fuente es la parte real de la respuesta. Puesto que la fuente sinusoidal $V_m \cos(\omega t + \phi)$ es la parte real de la fuente compleja

$$V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) \quad (8.21)$$

entonces la respuesta sinusoidal $v(t)$ es la parte real de la respuesta compleja $v_1(t)$, o

$$v(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t})$$

Utilizando la forma exponencial polar para \mathbf{V} , y tomando la parte real,

$$v(t) = \operatorname{Re}(|\mathbf{V}| e^{j\theta} e^{j\omega t}) = |\mathbf{V}| \cos(\omega t + \theta) \quad (8.22)$$

Nótese la relación directa entre el sinusode $v(t)$ y su fasor \mathbf{V} . Por (8.22), $|\mathbf{V}|$ es la amplitud de $v(t)$ y θ su ángulo de fase. La amplitud del sinusode es la magnitud de su fasor, y el ángulo de fase del sinusode es ángulo de su fasor. De este modo, podemos escribir inmediatamente en la corriente o voltaje sinusoidal, una vez calculado su fasor.

Ejemplo 8.6

Suponer en la figura 8.8 que $v_g = 6 \cos 2t$ V. Puesto que $v_g = \text{Re}(6e^{j2t})$, utilizaremos $v_{g1} = 6e^{j2t}$ V como nuestra fuente exponencial compleja. La ecuación descriptiva es

$$\frac{di}{dt} + 4i = 6e^{j2t}$$

La solución forzada tentativa es $i_1 = Ae^{j2t}$, y aplicando esto a la ecuación anterior,

$$(j2 + 4)Ae^{j2t} = 6e^{j2t}$$

$$A = \frac{6}{4 + j2} = 1.34 \angle -26.6^\circ$$

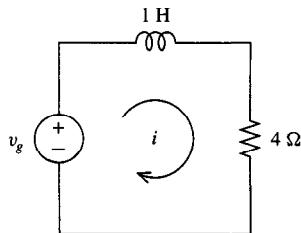


Figura 8.8 Circuito para el ejemplo 8.6.

La solución forzada es $i_1 = Ae^{j2t}$, o

$$i_1 = (1.34 \angle -26.6^\circ)e^{j2t} \text{ A}$$

La representación de fasor de i_1 es $\mathbf{I} = 1.34 \angle -26.6^\circ$ y la respuesta sinusoidal es

$$i = \text{Re}(i_1) = 1.34 \cos(2t - 26.6^\circ) \text{ A}$$

Comenzando con la forma coseno $V_m \cos(\omega t + \phi)$ para cada fuente, concluimos que cada respuesta debe ser también un coseno (8.22) de la misma frecuencia, cuya amplitud y fase son la magnitud y ángulo del fasor asociado. Para preservar esta asociación, si la fuente sinusoidal está dada en la forma $V_m \sin(\omega t + \phi)$, la convertiremos a la forma coseno utilizando (8.7b), repetida aquí como

$$\cos(\omega t + \phi - 90^\circ) = \sin(\omega t + \phi)$$

En la tabla 8.1 se muestra la relación entre estas dos fuentes y sus fasores.

Tabla 8.1 Fuentes complejas y fasores de fuente para fuentes coseno y seno

Fuente	Fuente compleja	Fasor de fuente
$A \cos(\omega t + \phi)$	$Ae^{j(\omega t + \phi)}$	$A \angle \phi$
$A \sin(\omega t + \phi)$	$Ae^{j(\omega t + \phi - 90^\circ)}$	$A \angle \phi - 90^\circ$

Ejemplo 8.7

Para obtener la respuesta forzada $i(t)$ en la figura 8.9(a), reemplazaremos la fuente $36 \cos(2t + 30^\circ) V$ por la fuente compleja $36e^{j(2t+30^\circ)} V$ y la fuente $2 \sin(2t - 15^\circ) A$, en base a la tabla 8.1, por $2e^{j(2t-105^\circ)} A$. Analizando la figura 8.9(b), la ecuación de malla única es

$$4i_1 + 3 \frac{d}{dt} [i_1 - 2e^{j(2t-105^\circ)}] = 36e^{j(2t+30^\circ)}$$

$$\text{o}$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{4}{3}i_1 = 12e^{j(2t+30^\circ)} - j4e^{j(2t-105^\circ)}$$

Combinando los términos en el lado derecho,

$$(12e^{j30^\circ} - j4e^{-j105^\circ})e^{j2t} = (12\angle 30^\circ - 4\angle -15^\circ)e^{j2t} = (9.6\angle 47.1^\circ)e^{j2t}$$

Utilizando la forma tentativa $i_1 = Ae^{j2t}$,

$$(j2A + \frac{4}{3}A)e^{j2t} = (9.6\angle 47.1^\circ)e^{j2t}$$

y resolviendo para A ,

$$A = \frac{9.6\angle 47.1^\circ}{4/3 + j2} = 4.0\angle -9.2^\circ \quad (8.23)$$

De este modo, tenemos $i_1 = (4.0 \angle -9.2^\circ)e^{j2t} A$. El fasor asociado con esta corriente es $4.0 \angle -9.2^\circ A$, y de ahí que la corriente sinusoidal correspondiente $i(t)$ tiene una amplitud 4.0 A y un ángulo de fase -9.2° , o

$$i(t) = 4.0 \cos(2t - 9.2^\circ) A$$

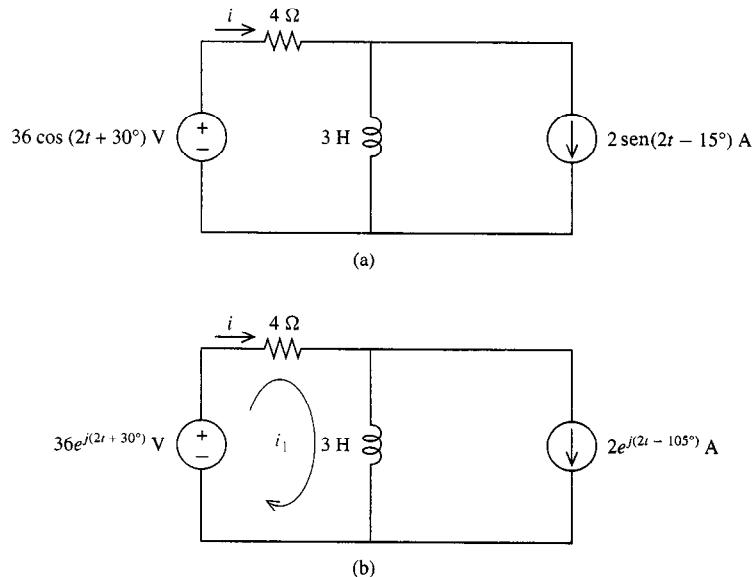


FIGURA 8.9 (a) Circuito original; (b) después de sustituir la fuente.

En el ejemplo precedente queda ilustrada una cuestión de considerable significado práctico. Nuestro trabajo con fasores nos ahorrará mucho tiempo y esfuerzo en comparación al uso de sinusoides reales, pero sólo si estamos equipados con las herramientas adecuadas. Para utilizar el método de fasores, necesitamos poder realizar cálculos como los de (8.23)

$$\frac{9.6\angle 47.1^\circ}{4/3 + j2} = 4.0\angle -9.2^\circ$$

rápida y eficientemente. Esto requiere del apoyo de cálculos adicionales a las operaciones aritméticas requeridas, y que se repetirán con tanta frecuencia en el curso de los cálculos de circuitos mediante fasores: suma, resta, multiplicación y división de números complejos, y también conversiones de la forma polar a la rectangular, y de la rectangular a la polar. *Es sumamente deseable tener acceso a una calculadora electrónica que pueda realizar cálculos con tipos de datos complejos, aritmética compleja de cuatro funciones, y conversiones rápidas y precisas con una sola tecla.* En tanto que cualquier calculadora con teclas seno, coseno, arco tangente y raíz cuadrada nos permitirá realizar todos los cálculos requeridos, son preferibles aquellas con teclas de apoyo para aritmética compleja. Se requerirán menos tecleos para resolver un problema dado, y los golpes de teclas se traducen en tiempo y desconcentración mental de los conceptos en el problema de circuitos que se trata. Todo gran fabricante de calculadoras ofrece una línea de máquinas adecuadas, y a precios relativamente económicos.

Finalmente, en nuestro trabajo con fasores nos basaremos en el principio de que la respuesta a la parte real de una fuente compleja (es decir, la respuesta a una fuente coseno), puede ser calculada como la parte real de la respuesta (es decir, la parte coseno de una exponencial compleja). Es también posible utilizar otro resultado de la sesión precedente, en el sentido de que la respuesta a la parte imaginaria de una fuente compleja es la parte imaginaria de la respuesta, para desarrollar un segundo tipo de análisis de fasores basados en senos y partes imaginarias, en vez de cosenos y partes reales. Puesto que cada tipo de análisis de fasores es suficiente, la forma alternativa de análisis de fasores no será considerada con el presente texto, excepto en uno de los problemas al final del capítulo. Utilizaremos los fasores basados en cosenos y partes reales, como en (8.22) y en los ejemplos.

EJERCICIOS

8.4.1. Obténgase la representación en fasores de (a) $6 \cos(2t + 45^\circ)$, (b) $4 \cos 2t + 3 \sin 2t$, y (c) $-6 \sin(5t - 65^\circ)$.

Respuesta (a) $6\angle 45^\circ$; (b) $5\angle -36.9^\circ$; (c) $6\angle 25^\circ$

8.4.2. Obténgase la función de dominio de tiempo representada por los fasores (a) $10\angle -17^\circ$, (b) $6 + j8$, y (c) $-j6$. En los tres casos, $\omega = 3$.

Respuesta (a) $10 \cos(3t - 17^\circ)$; (b) $10 \cos(3t + 53.1^\circ)$; (c) $6 \cos(3t - 90^\circ)$

8.5

LEYES I-V PARA FASORES

En la presente sección, demostraremos que las relaciones entre voltajes de fasor y corrientes de fasor para resistencias, inductores y capacitores son muy similares a la ley de Ohm

para resistencias. De hecho, el voltaje del fasor es proporcional a la corriente del fasor, como en la Ley de Ohm.

Considérese un circuito en donde todas las corrientes y voltajes tienen la forma $Ae^{j\omega t}$. Éste será el caso cuando las fuentes sinusoidales sean sustituidas por exponenciales complejas, y nos interesemos únicamente en la respuesta forzada.

Para el resistor de la figura 8.10,

$$v = \mathbf{V}e^{j\omega t} \quad (8.24a)$$

$$i = \mathbf{I}e^{j\omega t} \quad (8.24b)$$

donde \mathbf{V} e \mathbf{I} son fasores. Por la ley de Ohm, aplicada a (8.24),

$$\mathbf{V}e^{j\omega t} = R\mathbf{I}e^{j\omega t} \quad (8.25)$$

o, cancelando los factores $e^{j\omega t}$,

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (8.26)$$

De este modo, el fasor o relación de dominio de frecuencia para la resistencia, es exactamente la de una relación de dominio de tiempo. Las relaciones corriente-voltaje para la resistencia están ilustradas en la figura 8.11. Con $\mathbf{V} = V_m e^{j\phi_v}$ e $\mathbf{I} = I_m e^{j\phi_I}$, (8.26) se convierte en

$$V_m e^{j\phi_v} = (R I_m) e^{j\phi_I}$$

es decir, la magnitud del fasor de voltaje es igual a la magnitud del fasor de corriente multiplicado por R , y los ángulos son los mismos. Recordando que la magnitud de un fasor es la amplitud de su sinusode, y que su ángulo es el ángulo de fase del sinusode, tenemos la figura 8.11. Nótese que puesto que $\phi_v = \phi_I$, la corriente y voltaje están *en fase*.

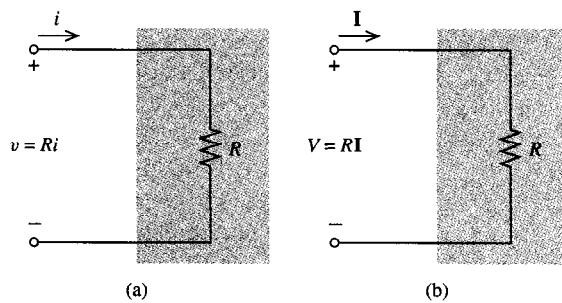


FIGURA 8.10 Relaciones de corriente-voltaje para una resistencia R en el (a) dominio de tiempo (b) dominio de frecuencia.

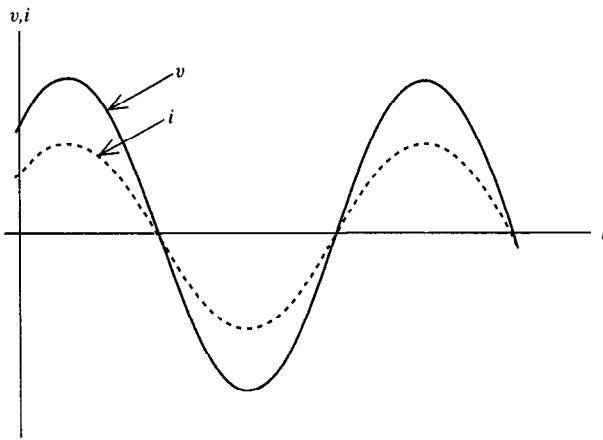


FIGURA 8.11 Ondas de voltaje y corriente para una resistencia.

Ejemplo 8.8

Como ilustración, supongamos que el voltaje

$$v = 10 \cos(100t + 30^\circ) \text{ V}$$

se aplica a través de una resistencia 5Ω , con la polaridad indicada en la figura 8.10(a). Por consiguiente, el voltaje de fasor es

$$\mathbf{V} = 10/30^\circ \text{ V}$$

y la corriente de fasor es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = \frac{10/30^\circ}{5} = 2/30^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, en la línea de tiempo tenemos

$$i = 2 \cos(100t + 30^\circ) \text{ A}$$

Esto es simplemente el resultado que obtendríamos utilizando la ley de Ohm.

En el caso del inductor, sustituyendo los voltajes y corrientes complejos en la relación de dominio de tiempo

$$v = L \frac{di}{dt}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} V_m e^{j(\omega t + \phi_v)} &= L \frac{d}{dt} [I_m e^{j(\omega t + \phi_i)}] \\ &= j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi_i)} \end{aligned}$$

Nuevamente, dividiendo el factor $e^{j\omega t}$ e identificando los fasores, obtenemos la relación del fasor

$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad (8.27)$

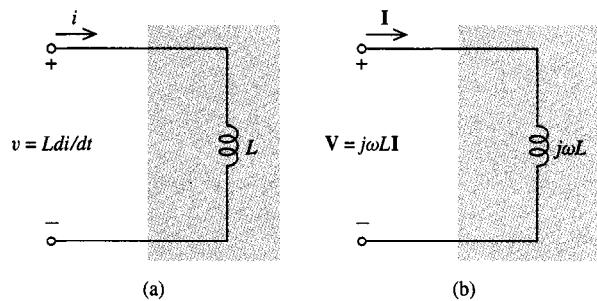


FIGURA 8.12 Relaciones corriente-voltaje para un inductor L en el (a) dominio de tiempo (b) dominio de frecuencia.

De este modo, el voltaje de fasor de \mathbf{V} , como en la ley de Ohm, es proporcional a la corriente de fasor \mathbf{I} , con el factor de proporcionalidad $j\omega L$. Las relaciones corriente-voltaje para el inductor aparecen en la figura 8.12.

Si la corriente del inductor está dada por $i = I_m \cos(\omega t + \phi_I)$, entonces por (8.27), el voltaje de fasor es

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (j\omega L)(I_m/\phi_I) \\ &= \omega L I_m / \phi_I + 90^\circ\end{aligned}$$

puesto que $j = 1/90^\circ$. Por consiguiente, en el dominio de tiempo tenemos

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi_I + 90^\circ)$$

Podemos ver que en el caso de un inductor, la corriente está *retardada* en 90° respecto al voltaje. Otra expresión que se utiliza es que la corriente y el voltaje están fuera de fase en 90° . Esto se muestra gráficamente en la figura 8.13.

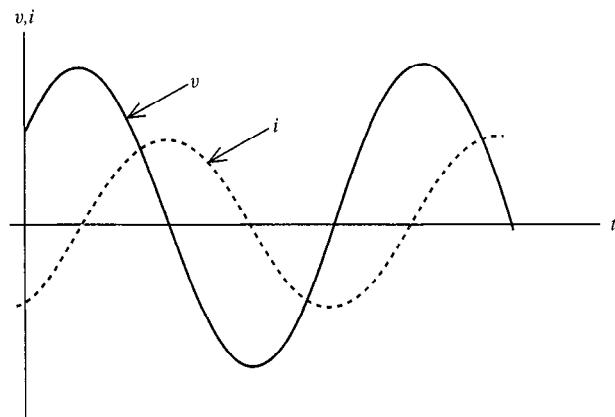


FIGURA 8.13 Ondas de voltaje y corriente para un inductor.

Finalmente, consideremos el capacitor. Sustituyendo el voltaje y corriente complejos en la relación de dominio de tiempo,

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

esto da la relación compleja,

$$\begin{aligned} I_m e^{j(\omega t + \phi_I)} &= C \frac{d}{dt} [V_m e^{j(\omega t + \phi_V)}] \\ &= j\omega C V_m e^{j(\omega t + \phi_V)} \end{aligned}$$

Nuevamente dividimos por $e^{j\omega t}$ e identificamos los fasores a fin de obtener la relación de fasor

$$\mathbf{I} = j\omega C V \quad (8.28)$$

o

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \quad (8.29)$$

De este modo, el voltaje de fasor \mathbf{V} es proporcionado a la corriente de fasor \mathbf{I} , con el factor de proporcionalidad dada por $1/j\omega C$. Las relaciones corriente-voltaje para un capacitor de los dominios de tiempo y frecuencia aparecen en la figura 8.14.

En el caso general, si el voltaje de capacitor está dado por $v = V_m \cos(\omega t + \phi_V)$ entonces por (8.28) la corriente de fasor es

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (j\omega C)(V_m/\phi_V) \\ &= \omega C V_m/\phi_V + 90^\circ \end{aligned}$$

Por consiguiente, en el dominio de tiempo tenemos

$$i = \omega C V_m \cos(\omega t + \phi_V + 90^\circ)$$

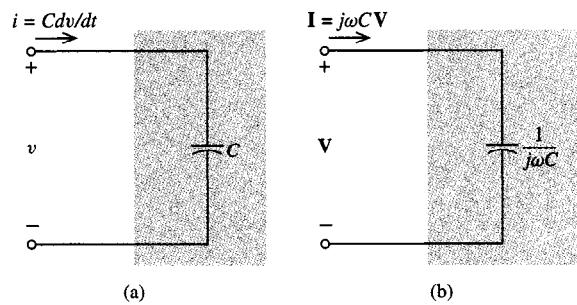


FIGURA 8.14 Relaciones de corriente-voltaje para un capacitor en el (a) dominio de tiempo y (b) dominio de frecuencia.

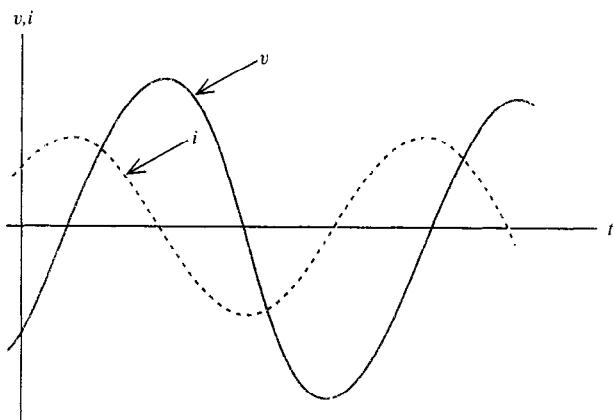


FIGURA 8.15 Ondas de voltaje y corriente para un capacitor.

que indica que en el caso de un capacitor, la corriente y voltaje están fuera de fase, donde la corriente se *adelanta* al voltaje 90° . Esto se muestra gráficamente en la figura 8.15.

Ejemplo 8.9

Como ejemplo, si $v = 10 \cos(100t + 30^\circ)$ se aplica a través de un capacitor de $1-\mu\text{F}$, entonces por (8.28), la corriente del fasor es

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= j(100)(10^{-6})(10/30^\circ) \text{ A} \\ &= 1/120^\circ \text{ mA}\end{aligned}$$

De este modo, la corriente de dominio de tiempo es

$$i = \cos(100t + 120^\circ) \text{ mA}$$

por consiguiente, la corriente está adelantada al voltaje en 90° , como debe ocurrir en todo capacitor.

EJERCICIOS

- 8.5.1.** Utilizando fasores, obténgase la corriente en estado estable ac i si $v = 12 \cos(1000t + 30^\circ)$ V en (a) la figura 8.10(a) para $R = 4 \text{ k}\Omega$; (b) figura 8.12(a) para $L = 15 \text{ mH}$; y (c) figura 8.14(a) para $C = \frac{1}{2} \mu\text{F}$.

Respuesta (a) $3 \cos(1000t + 30^\circ)$ mA; (b) $0.8 \cos(1000t - 60^\circ)$ A; (c) $6 \cos(1000t + 120^\circ)$ mA

- 8.5.2.** En el ejercicio 8.5.1, obténgase i en cada caso $t = 1 \text{ ms}$.

Respuesta (a) 0.142 mA ; (b) 0.799 A ; (c) -5.993 mA

- 8.5.3.** ¿Para qué L en la figura 8.12 producirá un voltaje sinusoidal de amplitud en 20 V una corriente de amplitud 4-mA en $\omega = 500 \text{ rad/s}$?

Respuesta 10 H

Consideremos ahora un circuito general con dos terminales accesibles, como se muestra en la figura 8.16. Si el voltaje y corriente de dominio de tiempo en las terminales están dados por

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi_V) \quad (8.30a)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_I) \quad (8.30b)$$

entonces las cantidades de fasor en las terminales son

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V_m/\phi_V \\ \mathbf{I} &= I_m/\phi_I \end{aligned} \quad (8.31)$$

Definimos la proporción de voltaje de fasor contra la corriente de fasor contra la *impedancia* del circuito que denotamos por Z . Es decir,

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I} \quad (8.32)$$

y, por (8.31),

$$Z = |Z|/\phi_Z = \frac{V_m}{I_m}/\phi_V - \phi_I \quad (8.33)$$

donde $|Z|$ es la magnitud y ϕ_Z el ángulo de Z . Evidentemente,

$$|Z| = \frac{V_m}{I_m}, \quad \phi_Z = \phi_V - \phi_I$$

La magnitud de la impedancia es la proporción de magnitudes de voltaje contra fasores de corriente, el ángulo es la diferencia de los ángulos de fasor de corriente y de voltaje.

Como puede verse en (8.32), en un circuito general la impedancia juega el papel desempeñado por la resistencia en los circuitos resistivos. Ciertamente, (8.32) es muy similar a la ley de Ohm; al igual que la resistencia, la impedancia se mide en ohms, siendo una proporción de volts contra amperes.

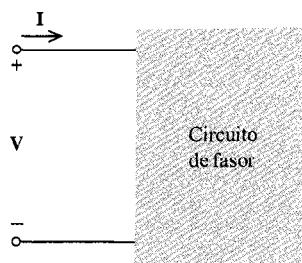


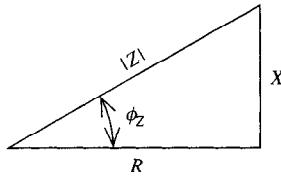
FIGURA 8.16 Circuito de fasor general.

Es importante enfatizar que la impedancia es un número complejo, siendo la proporción de dos números complejos, pero *no* es un fasor, es decir, no tiene su correspondiente función sinusoidal de dominio de tiempo, como ocurre en el caso de los fasores de voltaje y de corriente. La impedancia es una constante compleja que multiplica un fasor para producir otro.

La impedancia Z está escrita en forma polar en (8.33); en su forma rectangular, generalmente está denotada por

$$Z = R + jX \quad (8.34)$$

donde $R = \operatorname{Re} Z$ es la *componente resistiva*, o simplemente *resistencia*, y $X = \operatorname{Im} Z$ es el *componente reactivo*, o *reactancia*. En general, $Z = Z(j\omega)$ es una función compleja de $j\omega$, pero $R = R(\omega)$ y $X = X(\omega)$ son funciones reales de ω . Tanto R como X , al igual que Z , están medidos en ohms. Evidentemente, comparando (8.33) y (8.34), podemos escribir



y

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\phi_Z = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

$$R = |Z| \cos \phi_Z$$

$$X = |Z| \sin \phi_Z$$

FIGURA 8.17

Representación gráfica de la impedancia.

Estas relaciones se muestran gráficamente en la figura 8.17.

Ejemplo 8.10

Como ejemplo, supongamos en la figura 8.16 que $V = 10/\underline{56.9^\circ}$ V y $I = 2/\underline{20^\circ}$ A. Entonces tenemos

$$Z = \frac{10/\underline{56.9^\circ}}{2/\underline{20^\circ}} = 5/\underline{36.9^\circ} \Omega$$

en su forma rectangular, esto es

$$\begin{aligned} Z &= 5(\cos 36.9^\circ + j \sin 36.9^\circ) \\ &= 4 + j3 \Omega \end{aligned}$$

Las impedancias de resistencias, inductores y capacitores pueden obtenerse fácilmente de sus relaciones $V-I$ de (8.26), (8.27) y (8.29). Distinguiendo sus impedancias con los subíndices R , L , y C , respectivamente, tenemos, de estas ecuaciones y de (8.32)

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ \quad (8.35)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

En el caso de una resistencia, la impedancia es puramente resistiva, y su reactancia es cero. Las impedancias de inductores y capacitores son puramente reactivas, teniendo componentes resistivos cero. La *reactancia inductiva* está denotada por

$$X_L = \omega L \quad (8.36)$$

de forma que

$$Z_L = jX_L$$

y la *reactancia capacitativa* está denotada por

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (8.37)$$

y de este modo

$$Z_C = jX_C$$

Puesto que ω , L y C son positivos, vemos que la reactancia inductiva es positiva, y la capacitancia inductiva es negativa. En el caso general de (8.34), tenemos $X = 0$, en cuyo caso el circuito parece ser resistivo; $X > 0$, en cuyo caso su reactancia parece ser inductiva; y $X < 0$, en cuyo caso la reactancia parece ser capacitativa. Como veremos, estos casos son posibles cuando hay resistencia, inductancia y capacitancia en el circuito. Como ejemplo, el circuito con impedancia dada por $Z = 4 + j3$, que acabamos de considerar, tiene una reactancia $X = 3$, que es del tipo inductivo. En todos los casos de circuito pasivo, la resistencia R no es negativa.

El recíproco de la impedancia, denotado por

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (8.38)$$

se conoce como *admitancia* y es análoga a la conductancia (el recíproco de la resistencia) en circuitos resistivos. Evidentemente, puesto que Z es un número complejo, también lo es Y . La representación convencional es

$$Y = G + jB \quad (8.39)$$

Las magnitudes $G = \text{Re } Y$ y $B = \text{Im } Y$ se conocen respectivamente como *conductancia* y *susceptancia* y están relacionadas con los componentes de la impedancia por

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX}$$

Las unidades de Y , G , y B están todas en siemens, puesto que en general Y es la proporción de una corriente contra un fasor de voltaje.

Para obtener la relación entre las componentes de Y y Z , podemos racionalizar el último miembro de la ecuación anterior, que resulta en

$$\begin{aligned} G + jB &= \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} \\ &= \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos

$$\begin{aligned} G &= \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B &= -\frac{X}{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

Por tanto, notamos que R y G no son recíprocos, excepto que en el caso puramente resistivo ($X = 0$). Similarmente, X y B nunca son recíprocos, pero en el caso puramente reactivo ($R = 0$) son recíprocos negativos.

Ejemplo 8.11

Como ejemplo, si tenemos

$$Z = 4 + j3$$

Entonces

$$Y = \frac{1}{4 + j3} = \frac{4 - j3}{4^2 + 3^2} = \frac{4}{25} - j \frac{3}{25}$$

Por consiguiente, $G = \frac{4}{25}$ y $B = -\frac{3}{25}$.

Otros ejemplos son

$$Y_R = G$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_C = j\omega C$$

que son las admitancias de una resistencia con $R = 1/G$, un inductor, y un capacitor.

8.6.1. Obténgase la impedancia en las terminales de un subcicuito RL en serie, en las formas rectangular y polar.

$$\text{Respuesta } R + j\omega L, \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} / \tan^{-1} \omega L / R$$

8.6.2. Obténgase la admitancia en las terminales de un subcicuito RL en serie en sus formas rectangular y polar.

$$\text{Respuesta } \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}, \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} / -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

8.6.3. Obténgase la conductancia y susceptancia si Z es (a) $3 + j4$, (b) $0.4 + j0.3$, y (c) $\frac{\sqrt{2}}{2} / 45^\circ$.

$$\text{Respuesta (a) } 0.12, -0.16; \text{ (b) } 1.6, -1.2; \text{ (c) } 1, -1$$

8.7

LEYES DE KIRCHHOFF Y EQUIVALENTES DE IMPEDANCIA

Si una excitación compleja, digamos $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$, se aplica un circuito, entonces los voltajes complejos, tales como $V_1 e^{j(\omega t + \theta_1)}$, $V_2 e^{j(\omega t + \theta_2)}$, y así sucesivamente, aparecen a través de los elementos del circuito. Aplicando LVK alrededor de una trayectoria cerrada típica, resulta en una ecuación de la forma

$$V_1 e^{j(\omega t + \theta_1)} + V_2 e^{j(\omega t + \theta_2)} + \dots + V_N e^{j(\omega t + \theta_N)} = 0$$

Dividiendo entre el factor común $e^{j\omega t}$, obtenemos

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_N = 0$$

donde

$$\mathbf{V}_n = V_n / \theta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

son los voltajes de fasor alrededor de la trayectoria cerrada. Por consiguiente, *LVK es vigente para los fasores*. También se establecerá un desarrollo similar para LCK. En cualquier nodo con N ramales conectados,

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots + \mathbf{I}_N = 0$$

donde

$$\mathbf{I}_n = I_n / \theta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Por consiguiente, *LCK rige para los fasores*.

En circuitos con excitaciones sinusoidales con una frecuencia común ω , si nos interesamos únicamente en la respuesta forzada, o de estado estable ac, podemos obtener las corrientes o voltajes de fasor de todo elemento, y utilizar las leyes de Kirchhoff para com-

pletar el análisis. Por consiguiente, el análisis es idéntico al análisis de circuitos resistivos de los capítulos 2, 4 y 5, donde las impedancias reemplazan a las resistencias, y los fasores reemplazan a las corrientes y voltajes de dominio de tiempo. Una vez obtenidos los fasores, podemos convertirlos inmediatamente a las respuestas sinusoidales de dominio de tiempo de la forma acostumbrada.

Ejemplo 8.12

Como ejemplo, consideremos el circuito de la figura 8.18, que consiste de N impedancias conectadas en serie. Por LCK para fasores, la corriente de fasor única \mathbf{I} pasa por cada elemento. De este modo, los voltajes que se muestran a través de cada elemento son

$$\mathbf{V}_1 = Z_1 \mathbf{I}$$

$$\mathbf{V}_2 = Z_2 \mathbf{I}$$

⋮

$$\mathbf{V}_N = Z_N \mathbf{I}$$

y por LVK alrededor del circuito,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_N$$

$$= (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N) \mathbf{I}$$

Puesto que también debemos tener de la figura 8.18

$$\mathbf{V} = Z_{\text{eq}} \mathbf{I}$$

donde Z_{eq} es la impedancia *equivalente* que se mide en las terminales, esto implica que

$$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N \quad (8.40)$$

como en el caso de las resistencias en serie.

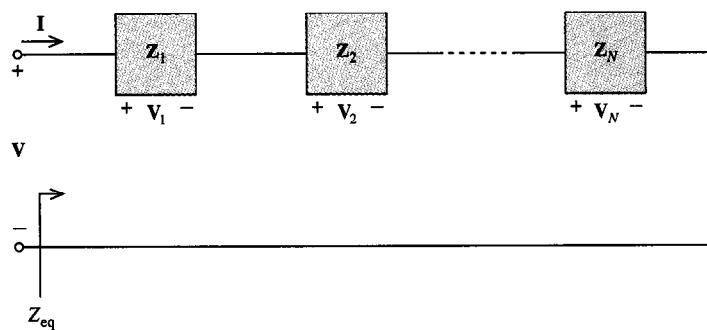


FIGURA 8.18 Impedancias conectadas en serie.

Similarmente, como en el caso de las conductancias en paralelo del capítulo 2, la admitancia equivalente Y_{eq} de N admitancias en paralelo es

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N \quad (8.41)$$

En el caso de dos elementos paralelos ($N=2$) tenemos

$$Y_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (8.42)$$

De forma similar, las reglas de división de voltaje y corriente rigen para los circuitos de fasor, con impedancias y magnitudes de dominio de frecuencia, exactamente del mismo modo que rigen para circuitos resistivos, con resistencias y magnitudes de dominio de tiempo. En el ejercicio 8.7.2 se pide al lector establecer estas reglas.

Ejemplo 8.13

Por ejemplo, volvamos al circuito RLC considerado en la sección 8.2. En la figura 8.19(a) y (b) se muestra el circuito y el circuito de fasores. Por LVK en el circuito de fasores,

$$\begin{aligned} Z_C \mathbf{I} + Z_L \mathbf{I} + R \mathbf{I} &= 15 \angle 0^\circ \\ (2 - j) \mathbf{I} &= 15 \angle 0^\circ \end{aligned}$$

para la que la corriente de fasor es

$$\mathbf{I} = \frac{15}{2 - j} = 3\sqrt{5} \angle 26.6^\circ \text{ A}$$

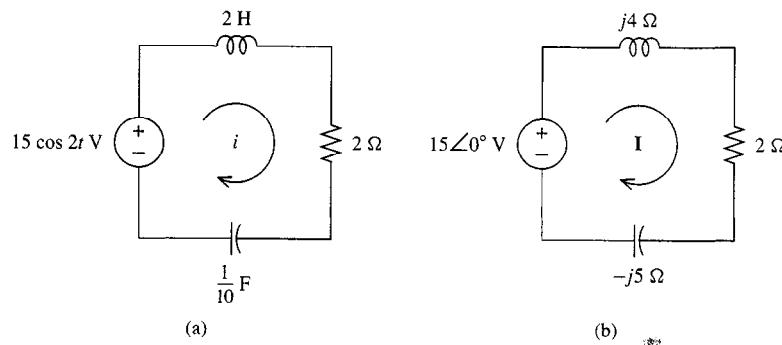


FIGURA 8.19 (a) Circuito en el dominio de tiempo; (b) circuito de fasores.

Por consiguiente, en el dominio de tiempo tenemos el mismo resultado que antes, aunque ahora calculado con considerablemente menos esfuerzo:

$$i = 3\sqrt{5} \cos(2t + 26.6^\circ) \text{ A}$$

Un método alternativo de solución, es observar que la impedancia Z vista en las terminales de fuente es la impedancia del inductor, $Z_L = j\omega L = j4$, la resistencia $Z_R = R = 2$, y el capacitor, $Z_C = 1/j\omega C = -j5$, todos conectados en serie. Por tanto,

$$Z = j4 + 2 + (-j5) = 2 - j \Omega$$

y

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z} = \frac{15\angle 0}{2 - j} = 3\sqrt{5}\angle 26.6^\circ \text{ A}$$

como lo obtuvimos anteriormente.

Esta capacidad de tratar inductores, capacitores y resistencias como elementos del tipo genérico *impedancia*, sin distinguir entre ellos al escribir ecuaciones de circuitos, es una de las principales fortalezas del método de fasores. Se pueden simplificar circuitos *RLC* utilizando equivalentes series-paralelo, divisores corriente-voltaje, y transformaciones de Thevenin-Norton, del mismo modo en que se trataron los circuitos puramente resistivos. Las impedancias en serie suman, las corrientes a través de impedancias en paralelo dividen en proporción a sus admitancias, y así sucesivamente, sin importar las identidades específicas (R , L o C) de las impedancias involucradas.

Ejemplo 8.14

En la figura 8.20 deseamos obtener $i(t)$ en estado estable. Utilizando equivalentes de impedancia en serie-paralelo,

$$Z_1 = \frac{3(2 - j2)}{3 + (2 - j2)} = 1.45 - j0.621 \Omega$$

$$Z_2 = \frac{(-j1)(Z_1 + j1)}{-j1 + (Z_1 + j1)} = 0.583 - j0.75 \Omega$$

de forma que la impedancia equivalente es

$$Z_{eq} = \frac{1}{2} + Z_2 = 1.083 - j0.75 \Omega$$

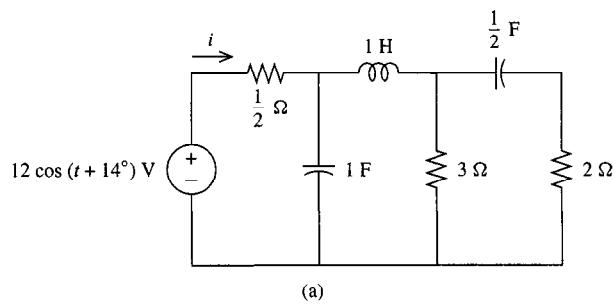
y

$$\mathbf{I} = \frac{12\angle 14^\circ}{Z_{eq}} = \frac{12\angle 14^\circ}{1.083 - j0.75} = 9.11\angle 48.7^\circ \text{ A}$$

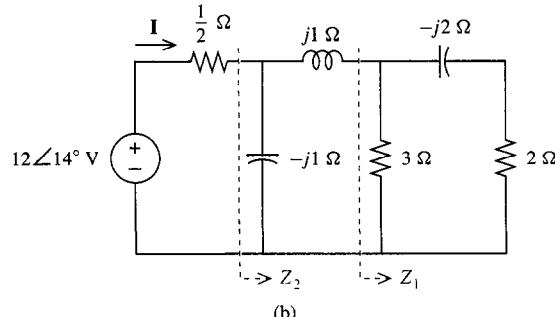
De este modo, recordando que $\omega = 1 \text{ rad/s}$,

$$i(t) = 9.11 \cos(t + 48.7^\circ) \text{ A}$$

Que es la corriente de estado estable ac deseada.



(a)



(b)

FIGURA 8.20 (a) Circuito en el dominio de tiempo; (b) circuito de fasores.

EJERCICIOS

8.7.1. Derívese (8.41).

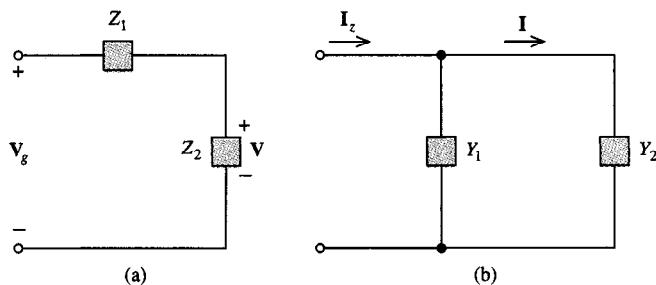
8.7.2. Demuéstrese en (a) que la regla de división de voltaje

$$\mathbf{V} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \mathbf{V}_g$$

y en (b) que la regla de división de corrientes,

$$\mathbf{I} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \mathbf{I}_g = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \mathbf{I}_g$$

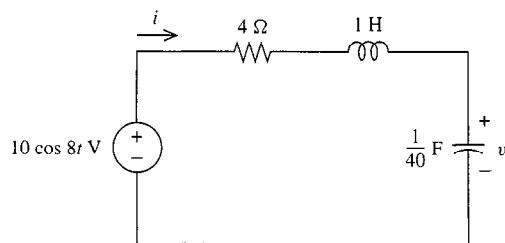
son válidas, donde $Z_1 = 1/Y_1$ y $Z_2 = 1/Y_2$.



EJERCICIO 8.7.2

8.7.3. Obténgase la corriente de estado estable i mediante fasores.

Respuesta $2 \cos(8t - 36.9^\circ)$ A



EJERCICIO 8.7.3

8.7.4. Obténgase el voltaje de estado estable v en el ejercicio 8.7.3 utilizando fasores y división de voltajes.

Respuesta $10 \cos(8t - 126.9^\circ)$ V

8.8 CIRCUITOS CON FASORES

Como lo sugiere la discusión de la sección anterior, podemos omitir los pasos de obtener la ecuación descriptiva en el dominio de tiempo, reemplazando las excitaciones y respuestas por sus funciones forzadas complejas, y luego dividiendo la ecuación entre $e^{j\omega t}$ para obtener la ecuación de fasores. Basta simplemente comenzar con el *circuito de fasores*, que definiremos como el circuito *en el dominio de tiempo con voltajes y corrientes sustituidas por sus fasores y los elementos identificados por sus impedancias*. La ecuación descriptiva obtenida de este circuito es la ecuación de fasores. La solución de esta ecuación es el fasor respuesta que entonces puede ser convertido a la respuesta de dominio de tiempo.

El procedimiento de comenzar con el circuito de fasor para obtener la respuesta de fasor es idéntica a la que se utilizó anteriormente en circuitos resistivos. La única diferencia es que las impedancias sustituyen a las resistencias.

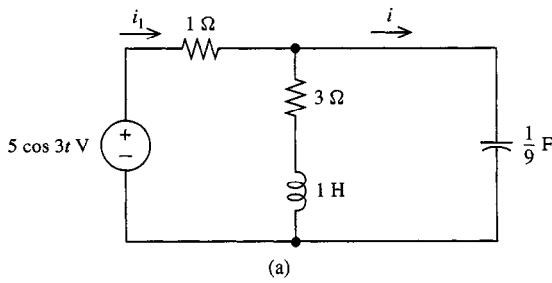
Ejemplo 8.15

Como ejemplo, obtengamos la corriente de estado estable i en la figura 8.21(a). El circuito de fasores, que aparece en la figura 8.21(b), se obtiene reemplazando las fuentes de voltaje y las corrientes por sus fasores, y marcando los elementos con sus impedancias. En el circuito de fasores, la impedancia vista de las terminales de fuente es

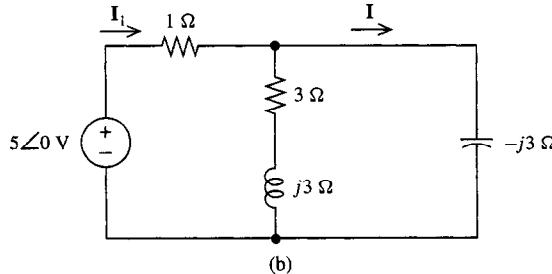
$$\begin{aligned} Z &= 1 + \frac{(3 + j3)(-j3)}{3 + j3 - j3} \\ &= 4 - j3 \Omega \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos

$$I_1 = \frac{5/0}{4 - j3} = \frac{5/0}{5/-36.9^\circ} = 1/36.9^\circ$$



(a)



(b)

FIGURA 8.21 Circuitos RLC en el dominio de tiempo y fasor.

y, por división de corrientes

$$\mathbf{I} = \frac{3 + j3}{3 + j3 - j3} \mathbf{I}_1 = \sqrt{2}/81.9^\circ \text{ A}$$

En el dominio de tiempo, la respuesta es

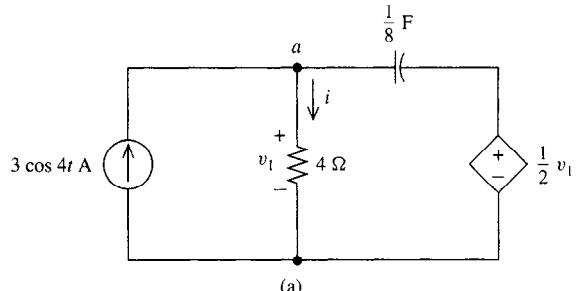
$$i = \sqrt{2} \cos(3t + 81.9^\circ) \text{ A}$$

En el caso de una fuente dependiente, como una fuente de $k v_x$ volts, controlada por un voltaje v_x , aparecerá en el circuito de fasores como una fuente $k \mathbf{V}_x$, donde \mathbf{V}_x es la representación de fasores de v_x , porque $v_x = V_m \cos(\omega t + \phi)$ en el dominio de tiempo se convertirá en $V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ cuando se aplique una excitación compleja. Dividiendo luego entre $e^{j\omega t}$ las ecuaciones, deja a v_x representada por su fasor $V_m e^{j\phi}$. Del mismo modo, $k v_x = k V_m \cos(\omega t + \phi)$ está representada por su fasor $k V_m e^{j\phi}$, que es k veces el fasor de v_x .

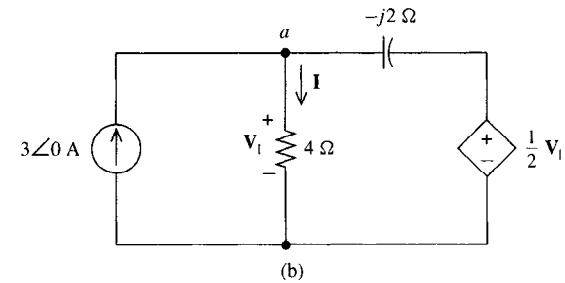
Ejemplo 8.16

Como ejemplo de un circuito que contiene una fuente dependiente, consideremos la figura 8.22(a), en la que se pide como condición obtener el valor de estado estable de i . El circuito de fasores correspondientes aparece en la figura 8.22(b). Puesto que los circuitos de fasores se analizan exactamente como circuitos resistivos, podemos aplicar LCK en el nodo a en la figura 8.22(b), lo que resulta en

$$\mathbf{I} + \frac{\mathbf{V}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{V}_1}{-j2} = 3/0 \quad (8.43)$$



(a)



(b)

FIGURA 8.22 (a) Circuito que contiene una fuente dependiente; (b) circuito de fasores correspondiente.

Por la ley de Ohm, tenemos que $\mathbf{V}_1 = 4\mathbf{I}$, que sustituido en (8.43) nos da

$$-j2\mathbf{I} + \frac{1}{2}(4\mathbf{I}) = -j6$$

o

$$\mathbf{I} = \frac{-j6}{2 - j2} = \frac{6/-90}{2\sqrt{2}/-45} = \frac{3}{\sqrt{2}}/-45^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, tenemos

$$i = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos(4t - 45^\circ) \text{ A}$$

En el caso de un op amp, el circuito de fasores es igual al circuito de dominio de tiempo. Es decir, un op amp ideal en el circuito de dominio de tiempo aparece como un op amp ideal en el circuito de fasores, porque las ecuaciones de dominio de tiempo

$$i = 0, \quad v = 0$$

que caracterizan la corriente hacia, y el voltaje a través, de las terminales de entrada retienen la firma idéntica,

$$\mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{V} = 0$$

en las ecuaciones de fasores.

El análisis de fasores es ciertamente una herramienta de gran potencia y versatilidad. Esto puede ser ya evidente por nuestro trabajo en el presente capítulo, y será enfatizado al

basarnos en el análisis de fasores para explorar importantes materias como la potencia de estado estable ac en los siguientes capítulos. Sin embargo, toda herramienta tiene un rango de aplicabilidad limitado, y es útil para recordarnos estos límites.

La primera precaución es que los fasores son útiles para obtener únicamente las respuestas *forzadas*. Si se desea la respuesta natural, debe utilizarse otra herramienta. Además, si se requiere la respuesta total, el análisis de fasores es útil para determinar únicamente la componente forzada.

La segunda precaución se refiere al uso de fasores para determinar respuestas en estado estable. Para muchos circuitos, ocurre que las respuestas naturales decaen a cero cuando $t \rightarrow \infty$. En estos circuitos, la respuesta forzada y las respuestas de estado estable son sinónimas, y los fasores (diseñados para determinar la respuesta forzada) pueden utilizarse para obtener la respuesta en estado estable. Tales circuitos se conocen como *estables*. Para los circuitos restantes o *inestables*, en general, la respuesta natural no decae a cero, y por consiguiente, la respuesta en estado estable no puede ser identificada con la respuesta forzada. *Puede utilizarse el análisis de fasores para obtener la respuesta en estado estable únicamente con circuitos estables.* Entre los ejemplos de circuitos estables, se incluyen todos los circuitos que están hechos exclusivamente de elementos pasivos y fuentes independientes, y que no tienen respuestas naturales no amortiguadas (no tienen subcircuitos *LC* que no tengan resistencia). Entre los ejemplos de circuitos inestables se cuentan aquellos con respuesta natural no amortiguada, y circuitos que poseen una respuesta natural que crece, en lugar de decaer, respecto al tiempo. Las respuestas naturales crecientes, son posibles únicamente en circuitos lineales que contienen fuentes controladas.

En general, los circuitos inestables no poseen ninguna clase de respuesta en estado estable (sus respuestas naturales crecen u oscilan periódicamente, de forma que el circuito nunca llega al estado estable, sin importar cuánto esperemos). No tiene ningún sentido tratar de definir una respuesta en estado estable para un circuito inestable; para estos circuitos pueden utilizarse fasores para calcular la respuesta forzada, aunque no la respuesta en estado estable.

Ejemplo 8.17

Determinemos la ecuación descriptiva para i en la figura 8.23. La fuente controlada tiene una transconductancia $g = 3/2$ S. Por LVK alrededor de la trayectoria cerrada izquierda,

$$i + \int_{0+}^t \left(i - \frac{3v}{2} \right) d\tau + v_c(0+) + \frac{d}{dt} \left(i - \frac{3v}{2} \right) = +4 \cos 3t$$

sustituyendo $v = i$ y diferenciando,

$$\frac{d^2i}{dt^2} - 2 \frac{di}{dt} + i = -24 \sin 3t$$

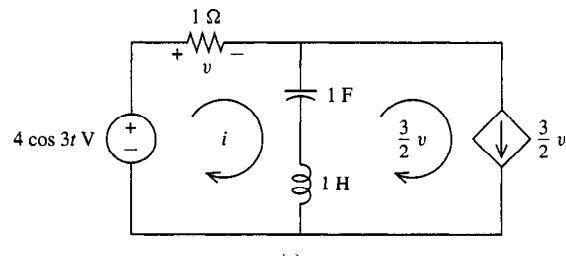
La respuesta natural se obtiene de la ecuación característica

$$s^2 - 2s + 1 = (s - 1)^2 = 0$$

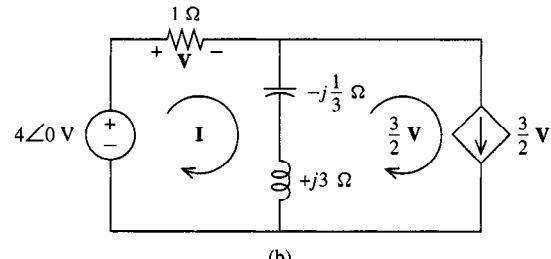
con una raíz repetida en $s = +1$, de forma que la respuesta natural es de la forma

$$i_n = K_1 e^t + K_2 t e^t$$

Nótese que, exceptuando el caso especial $K_1 = K_2 = 0$, todas las respuestas naturales crecerán en lugar de decaer cuando $t \rightarrow \infty$, de forma que no puede esperarse del circuito que posea un estado estable. Este es un ejemplo de un circuito inestable. Aún así, podemos utilizar el análisis de fasores para determinar la respuesta forzada, pero puesto



(a)



(b)

FIGURA 8.23 (a) Circuito inestable; (b) circuito de fasores para calcular una respuesta forzada (pero no en estado estable).

que el circuito es inestable, no igualaremos la respuesta forzada con la respuesta en estado estable (que no existe). Para determinar la respuesta forzada, consideremos el circuito de fasores de la figura 8.23 (b). Por LVK,

$$\mathbf{I} + \frac{j8}{3} \left(\mathbf{I} - \frac{3}{2} \mathbf{V} \right) = 4\angle 0 \text{ V}$$

donde hemos sumado las impedancias en serie. Sustituyendo $\mathbf{I} = \mathbf{V}$ y despejando para \mathbf{I} ,

$$\mathbf{I} = \frac{4\angle 0}{1 - j4/3} = 2.4\angle 53.1^\circ \text{ A}$$

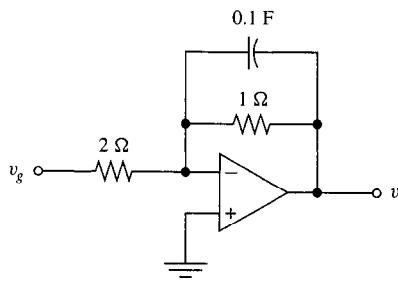
Por tanto, la corriente forzada en dominio de tiempo es

$$i_f(t) = 2.4 \cos(3t + 53.1^\circ) \text{ A}$$

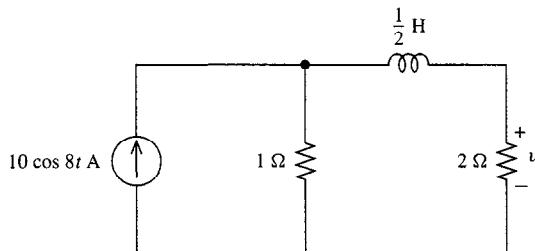
Para casi todas las condiciones iniciales, la corriente total $i = i_n + i_f$ se hará más y más grande respecto al tiempo, y nunca llegará a un estado estable.

EJERCICIOS

- 8.8.1.** Resuelva el ejercicio 8.2.1 mediante circuito de fasores.
- 8.2.2.** Obtenga el voltaje en estado estable v utilizando el circuito de fasores.
Respuesta $4 \cos(8t - 53.1^\circ) \text{ V}$



EJERCICIO 8.8.4



EJERCICIO 8.8.2

- 8.8.3. Obtener el voltaje en estado estable v en el ejercicio 8.3.1 utilizando el circuito de fasores.

Respuesta $2 \cos(8t - 53.1^\circ)$

- 8.8.4. Obtener el voltaje en estado estable v utilizando el circuito de fasores, dado que $v_g = 4 \cos 10t$ V.

Respuesta $\sqrt{2} \cos(10t + 135^\circ)$ V

RESUMEN

El método de fasores permite una determinación eficiente de la respuesta forzada en circuito sinusoidales, pasando por alto las dificultades de resolver ecuaciones diferenciales simultáneas. Para los circuitos estables, la respuesta forzada es también la respuesta en estado estable ac. El estado estable ac revela el comportamiento a largo plazo de los circuitos excitados por sinusoides y, conforme varía la frecuencia de la excitación, define la respuesta de frecuencia del circuito.

- Si una fuente sinusoidal es reemplazada por una fuente exponencial compleja, cuya parte real es idéntica a la sinusoidal original, entonces la parte real de la respuesta será la respuesta a la fuente sinusoidal original.
- Un fasor es el número (generalmente complejo) que multiplica a $e^{j\omega t}$ en la respuesta forzada de un circuito excitado por exponenciales complejas.
- La amplitud de un sinusoide es la magnitud del fasor, y el ángulo de fase de un sinusoide
- La impedancia Z de un elemento RLC es la proporción de su fasor de voltaje V contra su fasor de corriente I . $Z_R = R$, $Z_L = j\omega L$, y $Z_C = 1/(j\omega C)$.
- La admitancia Y es el inverso de la impedancia, $Y = 1/Z$.
- Un circuito de fasores es idéntico al circuito original, excepto en que los elementos RLC son marcados por sus impedancias, y cada fuente sinusoidal es reemplazada por el fasor de su correspondiente fuente exponencial compleja.
- El circuito de fasores puede ser analizado utilizando LVK, LCK y $V = ZI$ y exactamente como si se tratara de un circuito dc que tuviera resistencias y fuentes constantes, aunque complejas. No hay magnitudes que varían respecto al tiempo en el dominio de fasores.
- La respuesta sinusoidal es tan sólo la parte real de la respuesta de fasor luego de multiplicarla por $e^{j\omega t}$.
- Un circuito estable es aquel cuyas respuestas no forzadas decaen a cero para todos los valores de sus condiciones iniciales.

- Un circuito estable es aquel cuyas respuestas no forzadas decaen a cero para todos los valores de sus condiciones iniciales.

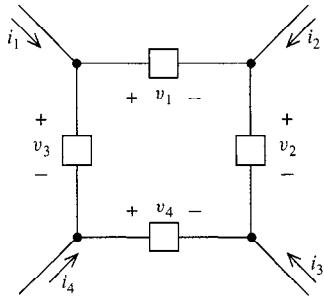
PROBLEMAS

8.1. Considerense las dos corrientes $i_1 = 4 \cos(2t + 17^\circ)$ e $i_2 = -3 \sin(2t + 0.71)$. Obténganse sus amplitudes, frecuencias, ángulos de fases en grados y radianes, y períodos. Dibújense ambos en la misma gráfica, determinando cuál es la corriente avanzada, y por cuántos grados.

8.2. Obténganse las representaciones de cuadratura de las dos corrientes del problema 8.1.

8.3. Utilizando (8.8), obténgase una expresión simple para $\sin(\omega t + n\pi)$ y $\cos(\omega t + n\pi)$ donde n es un entero. Demuestre cómo su resultado es implicado por 8.8.

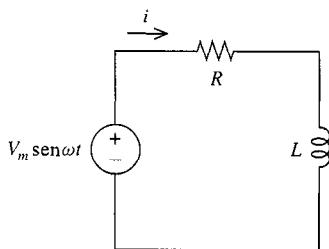
8.4. Suponer que todas las corrientes y voltajes tienen el mismo período. Obtenga v_1 si $v_2 = 4 \cos(3t - 70^\circ)$, v_3 tiene la misma amplitud como v_2 pero está avanzada respecto a v_2 por 28° , y v_4 tiene una componente en fase con amplitud 2 y componente de cuadratura 0.



PROBLEMA P8.4

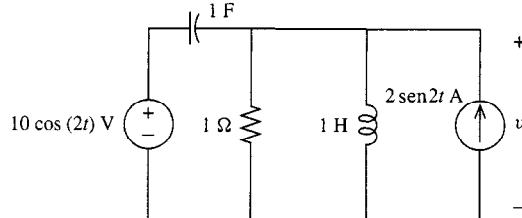
8.5. En la figura para el problema 8.4, ¿es verdad que los componentes en fase de las cuatro corrientes suman cero? ¿Es también verdad para los componentes de cuadratura? Justifique.

8.6. Escriba una ecuación diferencial para $i(t)$. Obtenga la solución forzada.



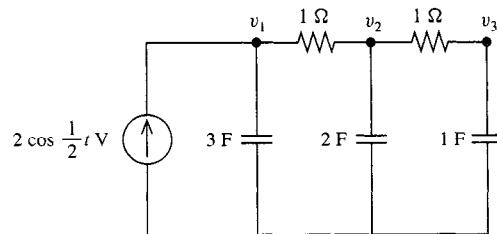
PROBLEMA P8.6

8.7. Escriba una ecuación diferencial para $v(t)$. Obtenga la solución forzada.



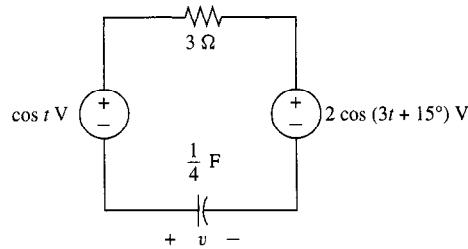
PROBLEMA P8.7

8.8. Escriba una sola ecuación diferencial de tercer orden para v_1 (Sugerencia: resuelva la ecuación de nodo 1 para v_2 , y sustituya en las otras dos ecuaciones de nodo. Resuelva la ecuación 3 para v_3). Obtenga la solución forzada.



PROBLEMA P8.8

8.9. Obtenga el voltaje forzado v resolviendo primero las ecuaciones de malla para la corriente de malla forzada.



PROBLEMA P8.9

8.10. Dibuje en el plano complejo los lugares de la exponencial compleja $(3/45^\circ)e^{j4\pi t}$ en $t = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$ y $\frac{1}{2}$ s.

8.11. Dibuje el lugar geométrico de los puntos en el plano complejo definidos por e^{ct} , $t \geq 0$ para (a) $c = -1 + j$, (b) $c = +1 + j$.

8.12. Si la exponencial compleja $Ae^{j\omega t}$ tiene una valor $2/\underline{80^\circ}$ en $t = 1s$ y de $2/\underline{-100^\circ}$ en $t = 3s$, ¿cuál es su periodo? Obtenga A y ω .

8.13. Exprese cada número complejo de tres formas: de forma rectangular, forma polar, y forma polar exponencial.

- (a) $12/\underline{19^\circ}$
- (b) $-40 + j18$
- (c) $\frac{1}{4}/\underline{-180^\circ}$
- (d) $4e^{j63^\circ}$
- (e) $16/\underline{90^\circ}$
- (f) $14 + j2$

8.14. Evalúe las siguientes expresiones. Dé la respuesta en forma polar.

- (a) $\frac{(4+j2)(2e^{-j18^\circ})}{(6-j)^2}$
- (b) $\frac{3/20^\circ}{(2+j)+(3/\underline{120^\circ})}$
- (c) $(3 - j6)(3 - j6)^* + 4/18^\circ$
- (d) $[(2 - j2) + (7e^{j45^\circ})][6/\underline{-25^\circ}]$

8.15. Para cada una de las funciones de fuentes sinusoidales especificadas, determine la fuente exponencial compleja que tiene una fuente dada como su parte real.

- (a) $4 \cos 2t$
- (b) $16 \cos(100t - 26^\circ)$
- (c) $-3 \sin(7t + 144^\circ)$
- (d) $2 \cos(6t + 10^\circ) + 3 \sin(6t - 26^\circ)$

8.16. Para cada una de las funciones de fuentes sinusoidales especificadas en el problema 8.15, determine la fuente exponencial compleja que tiene la fuente dada como su parte imaginaria.

8.17. Si la respuesta forzada a una excitación $v_g = f_1(t) + jf_2(t)$ en un circuito es $i(t) = i_1(t) + ji_2(t)$, donde f_1 , f_2 , i_1 , e i_2 son todas funciones reales ¿cuál sería la respuesta a $v_g = -f_1(t)$? ¿A $v_g = 3f_2(t) + j[f_1(t) - f_2(t)]$?

8.18. Utilizando excitaciones complejas y superposición, demuestre que si la fuente sinusoidal $v_g = A \cos(\omega t + \phi_1)$ está retardada por θ radianes, la respuesta $i(t) = \beta \cos(\omega t + \phi_2)$ a v_g también está retardada por θ radianes.

8.19.
$$\frac{dx}{dt} + 2x = 4 \cos 7t$$

Obtenga la solución forzada reemplazando la función forzada sinusoidal por una exponencial compleja. Compruébelo utilizando la solución forzada tentativa $A \cos 7t + B \sin 7t$.

8.20.
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 2 \sin(3t - 47^\circ)$$

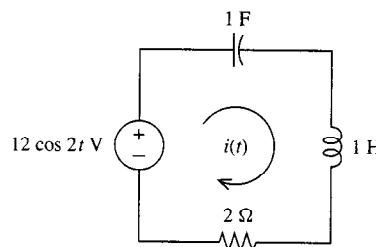
Obtenga la solución forzada reemplazando la función forzada sinusoidal. Obtenga la solución forzada reemplazando la función forzada sinusoidal por una exponencial compleja. Compruébelo utilizando la solución forzada tentativa $A \cos 3t + B \sin 3t$.

8.21.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 4 \sin t - 2 \cos(t - 27.1^\circ)$$

Obtenga las soluciones forzadas reemplazando la función forzada sinusoidal por una exponencial compleja. Compruébelo utilizando la solución forzada tentativa $A \cos t + B \sin t$.

8.22. Escriba la ecuación descriptiva como ecuación diferencial de segundo orden. Reescriba los términos del fasor \mathbf{I} . Resuelva para \mathbf{I} , y luego para la respuesta forzada $i(t)$.



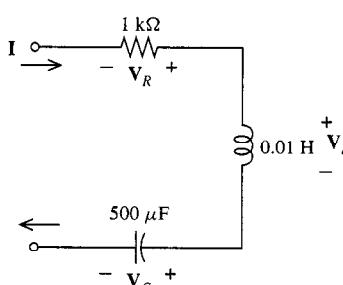
PROBLEMA P8.22

8.23. Si el fasor \mathbf{V} asociado con cierto voltaje $v(t)$ en un circuito es $\mathbf{V} = V_m/\theta_V$, ¿cuál es el fasor, si todas las fuentes independientes son multiplicadas por dos? ¿Si todas las fuentes independientes se retardan en 45° ?

8.24. Si $v(t) = 16 \cos(4t - 27^\circ) + 3 \sin(4t - 114^\circ)$ encuentre el fasor asociado con $v(t)$.

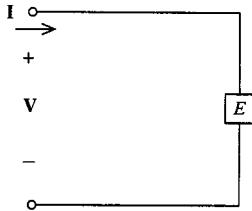
8.25. En qué frecuencia w son iguales las magnitudes de las impedancias de un inductor 1-H y un capacitor 1-F?

8.26. Para una corriente de fasor $\mathbf{I} = 1 \angle 0^\circ$ mA y $\omega = 1000$ rad/s, dibuje \mathbf{V}_R , \mathbf{V}_L y \mathbf{V}_C en el plano complejo.



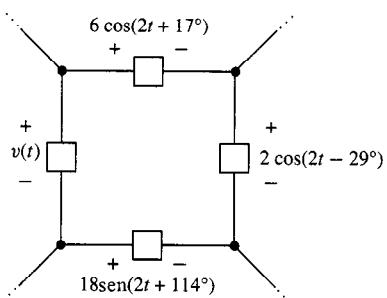
PROBLEMA P8.26

8.27. Si $\omega = 1$ kHz, $\mathbf{V} = 20/\underline{16^\circ}$ V e $\mathbf{I} = 6/\underline{-74^\circ}$ A, ¿cuál es el elemento que está en E (tipo y valor)?



PROBLEMA P8.27

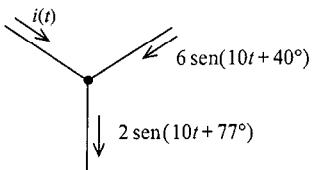
8.28. Convierta todos los voltajes a fasores. Utilice el hecho de que LVK es vigente para fasores para obtener V , y luego $v(t)$.



PROBLEMA P8.28

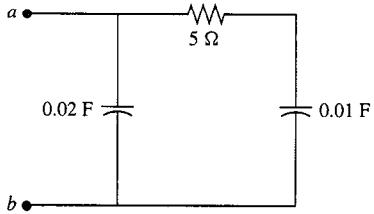
8.29. Repita el problema 8.28 sin utilizar fasores.

8.30. Convierta todas las corrientes a fasores. Utilice el hecho de que LCK rige para fasores para obtener I , luego $i(t)$.



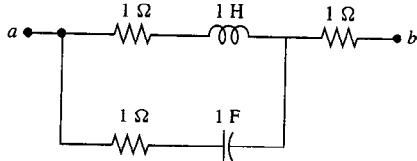
PROBLEMA P8.30

8.31. (a) Obtenga la impedancia Z entre a y b en $\omega = 10$ rad/s.
 (b) Repita con $\omega = 100$ rad/s.



PROBLEMA P8.31

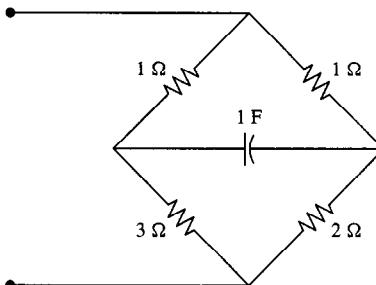
8.32. Obtenga la impedancia Z entre a y b como función de ω .



PROBLEMA P8.32

8.33. ¿En qué frecuencia ω es la susceptancia B del subcristo de dos terminales problema 8.31 igual a $B = 2$ S?

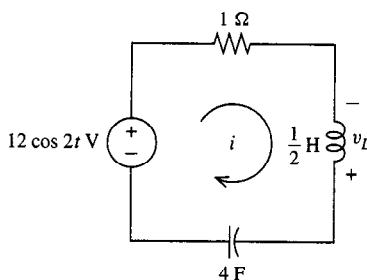
8.34. ¿Cuál es la impedancia orientada hacia este circuito de dos terminales en $\omega = 1$?



PROBLEMA P8.34

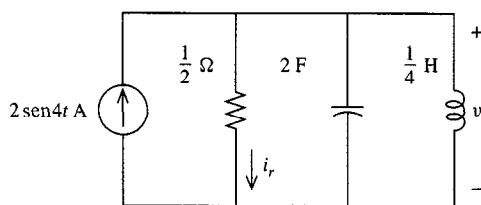
Para los problemas 8.35 a 8.44, dibuje el circuito de fasores y obtenga los valores de estado estable ac para todas las variables que se indican.

8.35.



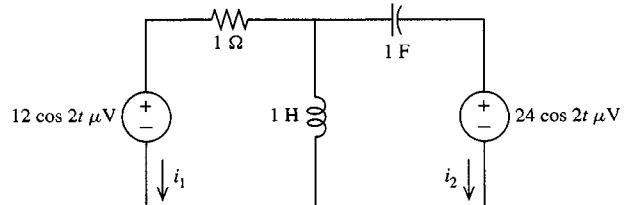
PROBLEMA P8.35

8.36.



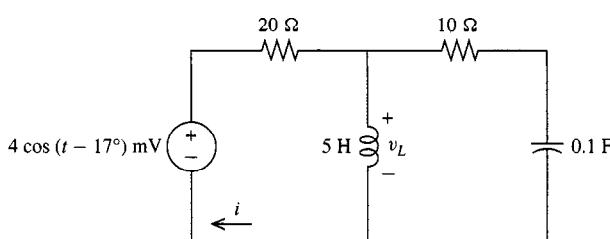
PROBLEMA P8.36

8.40.



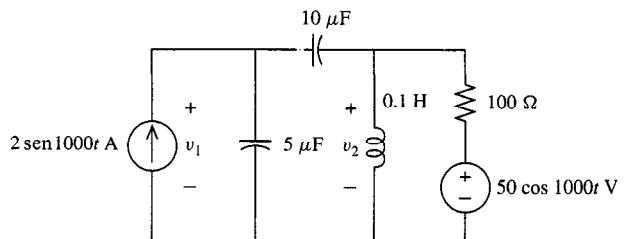
PROBLEMA P8.40

8.37.



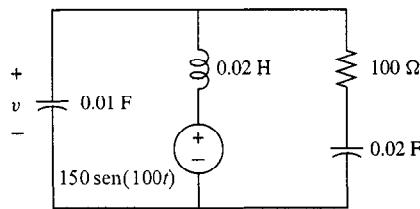
PROBLEMA P8.37

8.41.



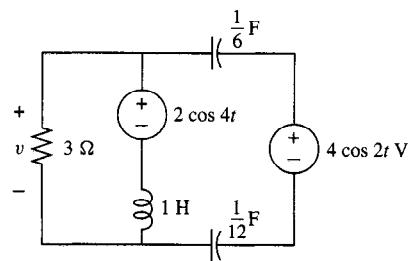
PROBLEMA P8.41

8.38.



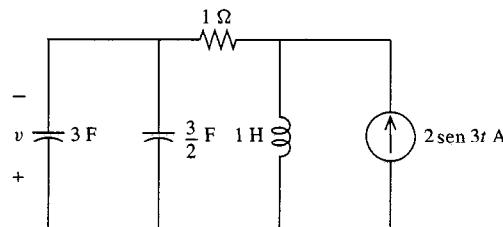
PROBLEMA P8.38

8.42.



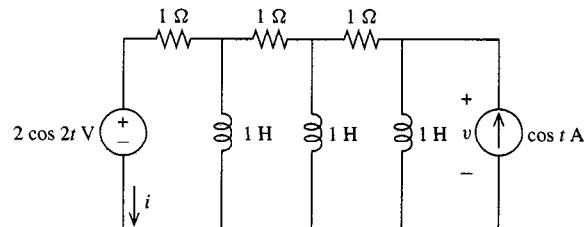
PROBLEMA P8.42

8.39.



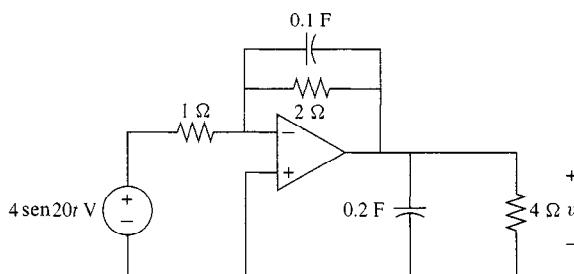
PROBLEMA P8.39

8.43.



PROBLEMA P8.43

8.44.

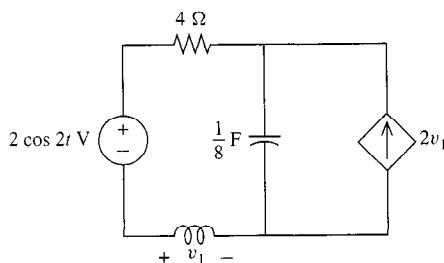


PROBLEMA P8.44

8.45. (a) Dada una fuente $A \sin(\omega t + \phi)$ en un problema de estado estable ac, suponga que utilizamos A/ϕ como la fuente de fasor correspondiente (en vez de $A/\phi - 90^\circ$ como se especificó en la tabla 8.1). En estas condiciones, ya no es verdad que la respuesta en estado estable ac será la parte real de la respuesta compleja. ¿Cómo debe modificarse este postulado, y por qué?

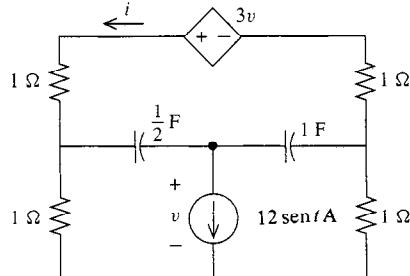
(b) Utilice esta idea, a veces conocida como enfoque "fasor seno", para resolver el problema 8.39 sin utilizar el desplazamiento de fase de 90° en la fórmula para el fasor fuente.

8.46. Obtenga v_1 . La transconductancia de la fuente controlada es de 2 S.



PROBLEMA P8.46

8.47. Obtenga i .



PROBLEMA P8.47

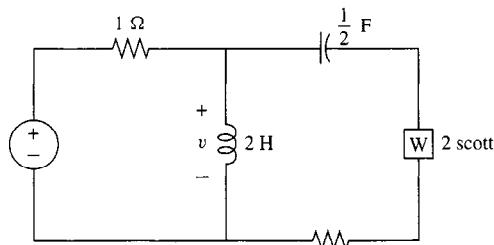
Problemas más complejos

8.48. Obtenga un subcicuito RLC con impedancia en $f = 10$ Hz es $Z = 3 - j2$ y en $f = 50$ Hz es $3 + j3$.

8.49. Suponer que existe un elemento, al que llamamos *zumbador* que satisface las leyes de elemento $v = w \frac{d^2i}{dt^2}$.

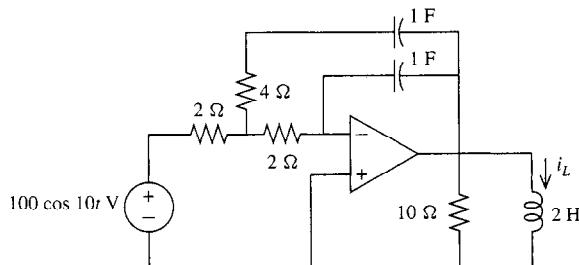
La constante w se conoce como zumbación en el zumbador (unidades: scotts). ¿Cuál es la impedancia de un zumbador de w scott? Derive leyes para la zumbación equivalente de zumbadores en serie y en paralelo.

8.50. La caja es un zumbador de 2 scott (vea el problema 8.49). Obtenga el valor en estado estable ac para $v(t)$.



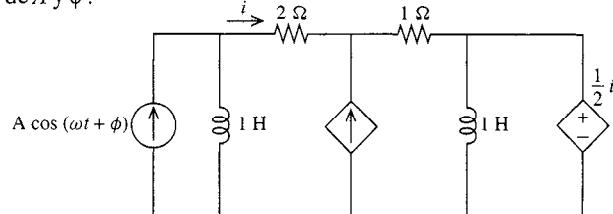
PROBLEMA P8.50

8.51. Obtenga el valor en estado estable ac para $i_L(t)$.

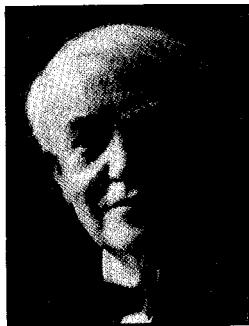


PROBLEMA P8.51

8.52. Obtenga el valor en estado estable ac de $i(t)$ en términos de A y ϕ .



PROBLEMA P8.52



Thomas Alva Edison
1847-1931

La genialidad es 1% inspiración y 99% transpiración.

Thomas A. Edison

Análisis en estado estable de AC

El más grande inventor estadounidense, y quizá el mejor de la historia, fue Thomas Alva Edison, quien modificó la vida de todos nosotros con invenciones como la luz eléctrica y el fonógrafo. Patentó más de 1100 inventos propios, y perfeccionó invenciones de otras personas, como el teléfono, la máquina de escribir, el generador eléctrico y la película cinematográfica. Quizá lo más importante: fue uno de los primeros en organizar la investigación, y en cierto momento llegó a dar empleo a más de 3000 ayudantes.

Edison, nacido en Milan, Ohio, fue el menor de siete hijos. Tuvo apenas tres meses de educación formal, porque su madre lo sacó de la escuela y le enseñó ella misma: Edison acostumbraba hacer demasiadas preguntas como para poderse llevar bien con el profesor. Se le exentó del servicio militar debido a su sordera, y durante la Guerra Civil deambuló de una ciudad a otra como operador de telégrafo. Durante este lapso patentó mejoras para el indicador mecánico de cotizaciones bursátiles, y vendió las patentes por el entonces asombroso precio de 40 mil dólares. En 1876 se mudó a Menlo Park, Nueva Jersey y, desde ahí, su continua producción de inventos lo hizo mundialmente famoso. Su mayor invención fue la luz eléctrica, pero para abastecerla al mundo también diseñó la primera planta de producción de electricidad. Su descubrimiento del efecto Edison, movimiento de electrones en el vacío de los focos que él mismo ideó, marcaron también el inicio de la era de la electrónica.

Contenido del capítulo

- 9.1 Simplificaciones de circuitos
- 9.2 Análisis nodal
- 9.3 Análisis de malla
- 9.4 Fuentes con frecuencias diferentes
- 9.5 Diagramas fasoriales
- 9.6 SPICE y estado estable de AC
- Resumen
- Problemas

En el capítulo 8 vimos que la respuesta en estado estable de los circuitos excitados por fuentes sinusoidales (circuitos ac), puede ser calculada fácilmente al convertir el circuito de dominio de tiempo a su correspondiente circuito fasorial. Los circuitos estudiados eran relativamente simples, y fueron analizados directamente de las leyes de Kirchhoff y del uso de la noción básica de la impedancia.

En el presente capítulo, iremos más allá de estos circuitos relativamente simples. De hecho, veremos que todas las herramientas del análisis de circuito presentados hasta ahora, se aplican igualmente bien a circuitos de fasores y a sus contrapartes de dominio de tiempo. Primero consideraremos el método de simplificación de circuitos: equivalentes de fuente e impedancia en serie y en paralelo, equivalentes Thevenin-Norton, y divisor de voltaje y corriente, que pueden aplicarse directamente a los circuitos de fasores. En las dos secciones subsiguientes, se presentarán los métodos generales de análisis nodal y de malla para que estos puedan realizarse en circuitos fasoriales sin modificar los métodos. En la sección 9.4 se desarrollará el uso de la superposición para estudiar circuitos excitados por fuentes múltiples de frecuencias distintas. Finalmente, se presentarán los diagramas de fasores como efectivos apoyos gráficos para comprender las relaciones de fase en el estado estable ac, y se discutirá el uso de SPICE en el estado estable ac.

9.1

SIMPLIFICACIONES DE CIRCUITOS

En el capítulo 2 se presentaron varios métodos sumamente útiles para simplificar circuitos resistivos. Entre estos se incluyen los equivalentes en serie y en paralelo para resistencias y para fuentes, división de corriente y voltaje, y equivalentes Thevenin-Norton. Cada uno de estos métodos fue derivado del mismo fundamento: la ley de Ohm que describe el comportamiento $I-V$ de elementos individuales, y las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff que gobiernan su interconexión.

En el estado estable ac, podemos reemplazar el circuito original por su contraparte de circuito de fasores, en donde las fuentes sinusoidales quedan representadas por sus fuentes de fasores correspondientes y elementos RLC por sus impedancias Z . En el circuito de

fasores, se obedecen las mismas leyes fundamentales. Las leyes de Kirchhoff se aplican igualmente bien tanto a fasores como a variables de circuito en el dominio del tiempo, y la esencia de la ley de Ohm, en el sentido de que la corriente y el voltaje están linealmente relacionados mediante una simple constante de proporcionalidad, rige igualmente bien para impedancias.

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I} \quad (9.1)$$

donde \mathbf{V} e \mathbf{I} son fasores. Puesto que las leyes sobre las que se fundamenta son igualmente válidas para circuitos de fasores, podríamos anticipar que también serán vigentes para los circuitos de fasores las mismas simplificaciones de circuitos derivadas para circuitos resitivos. De este modo, puede utilizarse toda la potencia de estos métodos para el análisis de circuitos en estado estable ac, en donde la única modificación será la sustitución de la resistencia R por la impedancia Z , y el subsiguiente uso de la aritmética compleja en vez de la real.

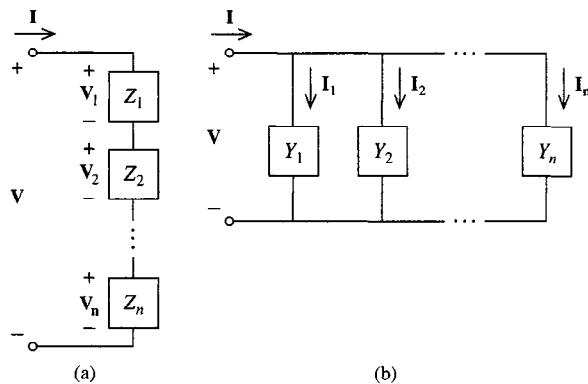


FIGURA 9.1 (a) Divisores de voltajes en un circuito fasorial; (b) divisores de corrientes.

En el capítulo 8 vimos ya un importante caso de este principio: las impedancias en serie eran equivalentes a una sola impedancia, que a su vez es igual a la suma de las impedancias, expresándolas de un modo más simple, las impedancias en serie se suman. Similarmente, las admitancias en paralelo, en correspondencia con las conductancias en paralelo en circuitos puramente resitivos, también se suman. Pueden utilizarse estos equivalentes para derivar la forma fasorial de la división de corrientes y voltajes. Considérese el circuito de fasores que aparece en la figura 9.1(a). Puesto que hay n impedancias en serie, $\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$, donde $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$. Entonces, para cada impedancia, su voltaje es $\mathbf{V}_i = Z_i \mathbf{I}$ o

$$\mathbf{V}_i = \frac{Z_i}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n} \mathbf{V} \quad (9.2)$$

Comparando las caídas de voltaje a través de dos impedancias Z_i y Z_j ,

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_j} = \frac{Z_i}{Z_j} \quad (9.3)$$

El voltaje a través de impedancias en serie divide en proporción directa a sus impedancias. Similarmente, considérese la figura 9.1(b), donde los elementos están marcados por sus admitancias Y_i . Puesto que las admitancias en paralelo se suman, a partir de $\mathbf{I} = Y\mathbf{V}$ con $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ tenemos $I_i = Y_i V$

$$I_i = \frac{Y_i}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} I \quad (9.4)$$

y comparando dos de estas corrientes paralelas,

$$\frac{I_i}{I_j} = \frac{Y_i}{Y_j} \quad (9.5)$$

La corriente que pasa a través de impedancias en paralelo divide en proporción directa a sus admitancias.

Ejemplo 9.1

Buscamos V_1 e I_2 en el circuito fasorial de la figura 9.2. En el diagrama del circuito aparecen las impedancias para cada elemento. Para obtener V_1 , utilizaremos la división de voltajes. La admitancia de los elementos en paralelo es

$$Y = -j\frac{1}{10} + j\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + j\frac{1}{10} \text{ S}$$

De este modo, la impedancia equivalente de estos elementos es

$$Z = \frac{1}{Y} = 3.45 - j1.38 \Omega$$

Entonces, por (9.2),

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{2 - j3 + [3.45 - j1.38]} (3\angle 45^\circ) \\ &= (0.286\angle 38.8^\circ)(3\angle 45^\circ) \\ &= 0.858\angle 83.8^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

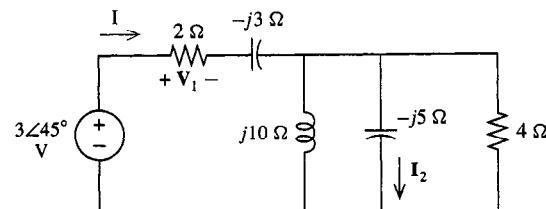


FIGURA 9.2 Circuito para el ejemplo 9.1.

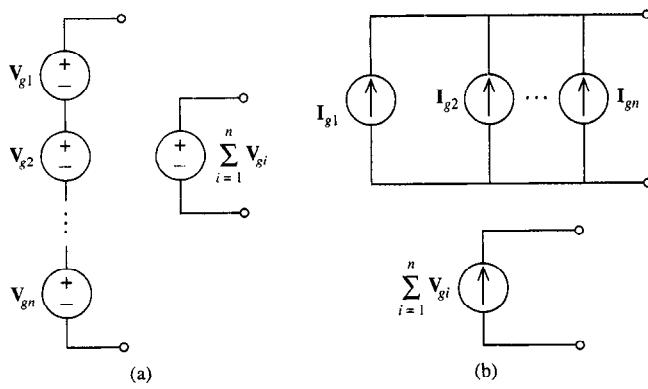


FIGURA 9.3 (a) Fuentes de voltaje en serie y sus equivalentes; (b) fuentes de corrientes en paralelo y equivalentes.

A continuación, utilizamos la división de corrientes para I_2 . La corriente en la combinación paralela es $\mathbf{I} = \mathbf{V}_1/2$ o $\mathbf{I} = 0.429\angle 83.8^\circ$ A. Luego, por (9.4),

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_2 &= \frac{j\frac{1}{5}}{\frac{1}{4} + j\frac{1}{10}} \mathbf{I} \\ &= (0.743\angle 68.2^\circ)(0.429\angle 83.8^\circ) \\ &= 0.319\angle 152^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Pueden obtenerse equivalentes en serie y en paralelo para fuentes, así como para impedancias en los circuitos de fasores. La aplicación de LVK en la figura 9.3(a) demuestra que las fuentes de voltaje en serie son equivalentes a una sola fuente, cuya función de fuente es la suma de cada una de las funciones de fuente o, dicho de otro modo, *las fuentes de voltaje en serie se suman*. Utilizando LCK en la figura 9.3(b), vemos el resultado correspondiente: *las fuentes de corriente en paralelo se suman*.

Los equivalentes de Thevenin y Norton en los circuitos de fasores son exactamente los mismos que se describieron en el capítulo 2 para circuitos resistivos, donde la única diferencia es la sustitución de la resistencia R por la impedancia Z , y el subsiguiente uso de la aritmética de números complejos. A partir del desarrollo de la sección 2.6 con sólo esta modificación, tenemos, a partir de (2.20), que las formas de Thevenin-Norton que aparecen en la figura 9.4, son equivalentes si las siguientes relaciones

$(a) \quad Z_T = Z_N \quad (9.6a)$

$$(b) \quad \mathbf{V}_T = Z_N \mathbf{I}_N \quad (9.6b)$$

$$(a) \quad Z_T = Z_N \quad (9.6a)$$

$$(b) \quad \mathbf{V}_T = Z_N \mathbf{I}_N \quad (9.6b)$$

son vigentes entre los circuitos. Para obtener el equivalente de Thevenin o de Norton para cualquier subcicuito de dos terminales de un circuito de fasores, seguimos los pasos de (2.24), donde nuevamente la única modificación es sustituir R por Z . El circuito de dos terminales A con el voltaje de fasores de circuito abierto \mathbf{V}_{oc} y la corriente de fasores de circuito cerrado \mathbf{I}_{sc} que aparece en la figura 9.5 es equivalente a las formas de Thevenin y

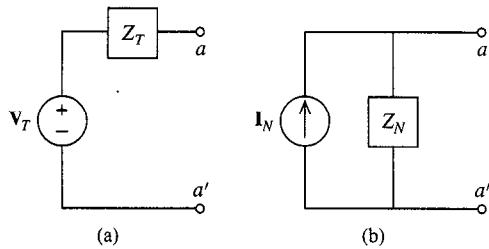


FIGURA 9.4 (a) Forma de Thevenin; (b) forma de Norton.

de Norton que aparecen en la figura 9.4 si

$$(a) \quad V_T = V_{oc}$$

$$(b) \quad I_N = I_{sc}$$

$$(c) \quad Z_T = Z_N = V_{oc} / I_{sc}$$

Z_T y Z_N también pueden obtenerse como la impedancia orientada hacia las terminales $a-a'$, donde todas las fuentes independientes en el circuito fasorial A se eliminan.

Los equivalentes de Thevenin y Norton se utilizan en los circuitos de fasores para reducir complicados circuitos de elementos múltiples a circuitos simples de dos elementos, del mismo modo en que se utilizan para los circuitos resistivos previamente estudiados. Estos circuitos equivalentes tienen un uso aún más general en los circuitos de fasores, puesto que no se aplica la restricción de que los elementos pasivos sean todos del mismo tipo. Bastará con cualquier mezcla de elementos RLC , es decir, de impedancias.

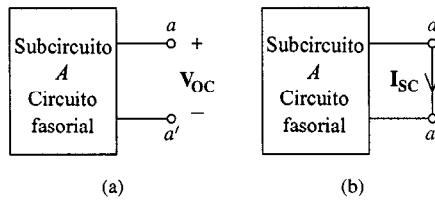


FIGURA 9.5 V_{oc} e I_{sc} para calcular los equivalentes de Thevenin y Norton del circuito A .

Ejemplo 9.2

Deseamos determinar el valor de R en la figura 9.6(a), lo que causará que fluya una corriente sinusoidal de amplitud 1 A a través de esta resistencia. Nuestra estrategia será la de reducir esto al circuito simple de trayectoria cerrada que aparece en la figura 9.6(b) al obtener el equivalente de Thevenin para todo el circuito, exceptuando la resistencia. El voltaje de circuito abierto $V_{oc} = V_{12}$, donde se elimina la R , es, por división de voltaje

$$V_{oc} = \frac{j4}{(j4 - j2)(10\angle 17^\circ)} = 20\angle 17^\circ \text{ V}$$

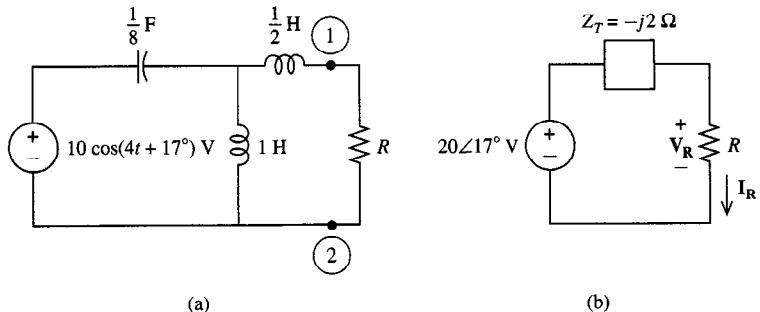


FIGURA 9.6 (a) Circuito para el ejemplo 9.2; (b) luego de un equivalente de Thevenin del circuito a la izquierda de las terminales 1 y 2.

donde $j4\Omega$ es la impedancia inductiva, $-j2\Omega$ es la capacitiva, y la fuente fasorial es $20\angle17^\circ$ V. V_{oc} es la fuente de Thevenin que aparece en la figura 9.6(b). Se determina la corriente de circuito cerrado al juntar las terminales 1 y 2. En este caso, los dos inductores están en paralelo, y son equivalentes a una inductancia de $\frac{1}{3}H$, con una impedancia de

$$Z_L = j\omega L = j\frac{4}{3}\Omega$$

El voltaje común a través de estos inductores es, por división de voltaje,

$$V_L = \frac{j4/3}{(j4/3 - j2)(10\angle17^\circ)} = 20\angle-163^\circ$$

La corriente que pasa a través del inductor $\frac{1}{2}H$, es la corriente de circuito cerrado

$$I_{sc} = \frac{V_L}{j(4)(1/2)} = \frac{(20\angle-163^\circ)}{(2\angle90^\circ)} = 10\angle107^\circ$$

Por consiguiente, Z_T en la figura 9.6(b) es

$$Z_T = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{(20\angle17^\circ)}{(10\angle107^\circ)} = 2\angle-90^\circ$$

Habiendo reducido el problema a otro con un circuito simple, ponemos atención ahora a la figura 9.6(b). La corriente que pasa por la resistencia es

$$I_R = \frac{20\angle17^\circ}{R - j2}$$

La magnitud del fasor I_R está dada por la proporción de magnitudes de su numerador y denominador,

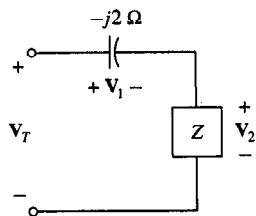
$$|I_R| = \frac{20}{\sqrt{R^2 + 4}}$$

Si $|I_R| = 1$ A, entonces la amplitud de la correspondiente corriente sinusoidal i_R , también será 1 A. De este modo, nuestra condición es que

$$\frac{20}{\sqrt{R^2 + 4}} = 1$$

$$\text{o } R = 6\sqrt{11}\Omega$$

EJERCICIOS



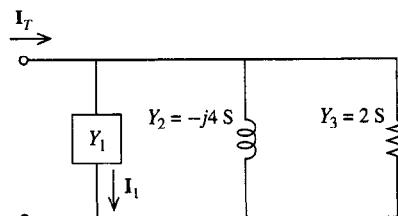
EJERCICIO 9.1.1

- 9.1.1. (a) Obtener v_2 para $Z = 1 + j2 \Omega$ y $v_T = 1\angle 0^\circ V$. (b) Si $v_1 = 3 + j\Omega$, ¿para qué Z será $v_2 = 7 - j3 V$?

Respuesta $2.24\angle 63.4^\circ V; 4.82\angle -132^\circ V$

- 9.1.2. (a) Obténgase I_1 para $Y_1 = 2 - jS$ e $I_T = 1\angle 0^\circ A$. (b) Si $I_3 = 3\angle 18^\circ A$, ¿para qué Y_1 será $I_1 = 4 - jA$?

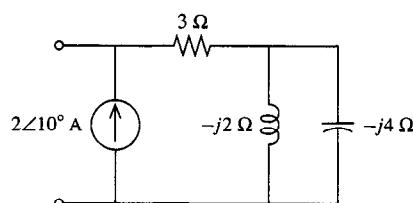
Respuesta $0.35\angle 24.8^\circ A; 2.75\angle -32.0^\circ S$



EJERCICIO 9.1.2

- 9.1.3. Obténgase el equivalente de Norton del circuito que se muestra.

Respuesta $Z_N = 3 + j4 \Omega; I_N = 2\angle 10^\circ A$



EJERCICIO 9.1.3

- 9.1.4. Obténgase el equivalente de Thevenin para el circuito del ejercicio 9.1.3.

Respuesta $Z_T = 3 + j4 \Omega; v_T = 10\angle 63.1^\circ V$

9.2 ANÁLISIS NODAL

Como hemos visto, la relación voltaje-corriente (9.1)

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$$

para elementos pasivos es de forma idéntica a la ley de Ohm, y LVK y LCK se aplican a los circuitos de fasores, exactamente como en el caso de circuitos resistivos. Por consiguiente, la única diferencia entre el análisis de circuitos fasoriales y los circuitos resistivos es que las excitaciones y respuestas son magnitudes complejas en el primer caso, y magnitudes reales en el segundo. De este modo, podemos analizar circuitos de fasores exactamente del mismo

modo en el que analizamos circuitos resistivos. Específicamente, se aplican los métodos de análisis nodal y de malla. En la presente sección ilustraremos el análisis nodal, y en la siguiente discutiremos el análisis de malla.

Ejemplo 9.3

Para ilustrar el método nodal, obtengamos los voltajes en estado estable ac v_1 y v_2 de la figura 9.7. Primero obtendremos el circuito fasorial reemplazando los valores de elementos por sus impedancias para $\omega = 2$ rad/s, y los voltajes de fuentes y nodos por sus fasores. Esto resulta en el circuito de la figura 9.8(a). Puesto que nos interesa obtener V_1 y V_2 , los fasores de voltaje de nodo, podemos reemplazar las dos series de impedancias en paralelo por sus impedancias equivalentes, lo que resulta en el circuito equivalente de la figura 9.8(b), que también es más simple.

De la figura 9.8(b), las ecuaciones nodales son

$$2(V_1 - 5\angle 0^\circ) + \frac{V_1}{j1} + \frac{V_1 - V_2}{-j1} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{-j1} + \frac{V_2}{(1+j2)/5} = 5\angle 0^\circ$$

que en forma simplificada son

$$(2 + j2)V_1 - j1V_2 = 10$$

$$-j1V_1 + (1 - j1)V_2 = 5$$

Resolviendo estas ecuaciones por la regla de Cramer, tenemos

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j1 \\ 5 & 1 - j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j2 & -j1 \\ -j1 & 1 - j1 \end{vmatrix}} = \frac{10 - j5}{5} = 2 - j1 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j2 & 10 \\ -j1 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10 + j20}{5} = 2 + j4 \text{ V}$$

En forma polar, estas cantidades son

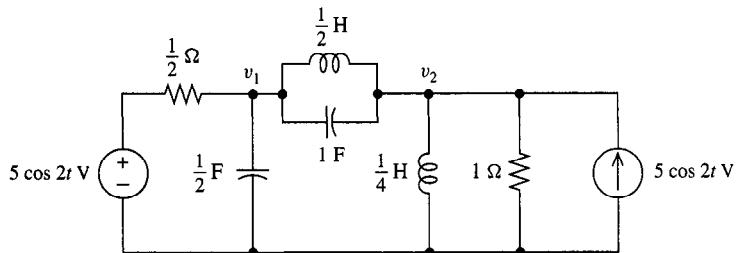
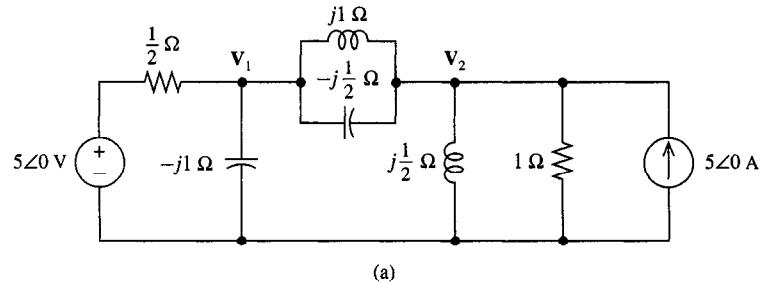
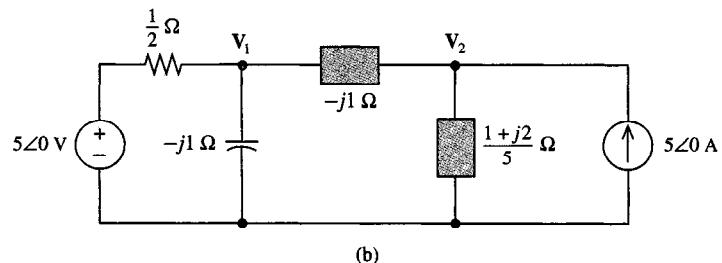


FIGURA 9.7 Circuito a analizarse con el método de fasores.



(a)



(b)

FIGURA 9.8 Dos versiones del circuito de fasores correspondientes a la figura 9.7.

$$\mathbf{V}_1 = \sqrt{5}/-26.6^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_2 = 2\sqrt{5}/63.4^\circ \text{ V}$$

Por consiguiente, las soluciones en dominio del tiempo son

$$v_1 = \sqrt{5} \cos(2t - 26.6^\circ) \text{ V}$$

$$v_2 = 2\sqrt{5} \cos(2t + 63.4^\circ) \text{ V}$$

Este ejemplo ilustra una importante característica del análisis de fasores: al reducir leyes de elementos para elementos de almacenamiento que involucran integrales y derivadas, a la ecuación $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$, que es más simple, reemplazamos el *cálculo* por el *álgebra*. Las subsiguientes ecuaciones nodales o de malla pueden ser siempre formuladas por una sola ecuación de vectores y matrices, y se resuelven por los métodos del álgebra lineal, en lugar de los métodos, más complicados que requieren las ecuaciones diferenciales. Desde luego, para circuitos simples no necesitamos reescribirlas como ecuaciones de vectores y matrices si no lo deseamos, pero este método general estará siempre disponible para todos los problemas de análisis de fasores.

Ejemplo 9.4

Como un ejemplo que involucra una fuente dependiente, consideremos la figura 9.9, en la que se requiere obtener la respuesta forzada i . Tomando el nodo de tierra como se muestra, tenemos los dos voltajes de nodo desconocidos v y $v + 3000i$, como se indica. En la figura 9.10 se muestra el circuito fasorial en su forma más simple: podemos observar que únicamente se necesita una ecuación nodal. Escribiendo

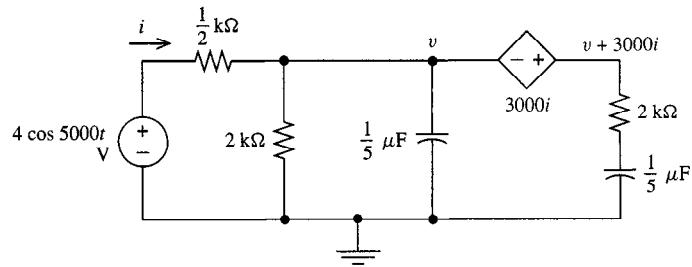


FIGURA 9.9 Circuito que contiene una fuente dependiente.

LCK como el supernodo, que aparece en líneas punteadas, tenemos

$$\frac{\mathbf{V} - 4}{\frac{1}{2}(10^3)} + \frac{\mathbf{V}}{\frac{2}{5}(1-j2)(10^3)} + \frac{\mathbf{V} + 3000\mathbf{I}}{(2-j1)(10^3)} = 0$$

Nótese que la ganancia de la fuente dependiente es de 3000 V/A. Además, partiendo del circuito fasorial tenemos

$$\mathbf{I} = \frac{4 - \mathbf{V}}{\frac{1}{2}(10^3)}$$

Eliminando \mathbf{V} entre estas dos ecuaciones y despejando para \mathbf{I} , obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= 24 \times 10^{-3} / 53.1^\circ \text{ A} \\ &= 24 / 53.1^\circ \text{ mA}\end{aligned}$$

Por consiguiente, en el dominio de tiempo, tenemos

$$i = 24 \cos(5000t + 53.1^\circ) \text{ mA}$$

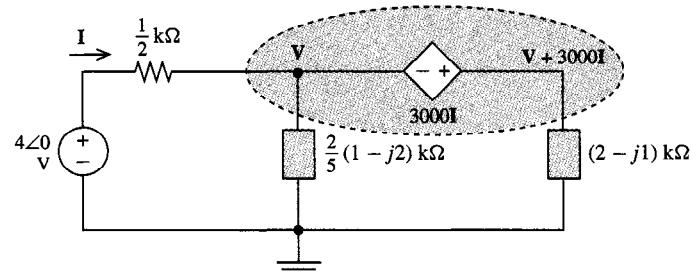


FIGURA 9.10 Circuito de fasor de la figura 9.9.

Ejemplo 9.5

Como ejemplo final para ilustrar el análisis nodal, obtengamos la respuesta forzada v en la figura 9.11 si

$$v_g = V_m \cos \omega t \text{ V}$$

Notamos en primer lugar que el op amp y las dos resistencias de 2-kΩ constituyen un amplificador no inversor con una ganancia de $1 + \frac{2000}{2000} = 2$ (ver sección 3.5).

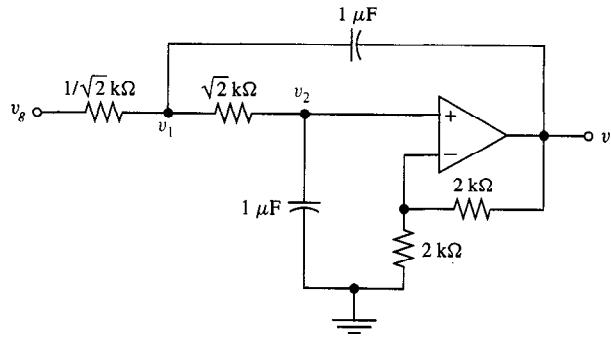


FIGURA 9.11 Circuito que contiene un op amp.

Por consiguiente, $v = 2v_2$, o $v_2 = v/2$, como está indicado por el fasor $\mathbf{V}/2$ en el circuito fasorial de la figura 9.12.

Al escribir las ecuaciones nodales en los nodos marcados \mathbf{V}_1 y $\mathbf{V}/2$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}_1 - V_m/0}{(1/\sqrt{2})(10^3)} + \frac{\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}/2)}{\sqrt{2}(10^3)} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}}{-j10^6/\omega} &= 0 \\ \frac{(\mathbf{V}/2) - \mathbf{V}_1}{\sqrt{2}(10^3)} + \frac{\mathbf{V}/2}{-j10^6/\omega} &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando \mathbf{V}_1 al despejar la última ecuación para \mathbf{V}_1 y sustituyéndola en la ecuación anterior, y resolviendo para \mathbf{V} , obtenemos

$$\mathbf{V} = \frac{2V_m}{[1 - (\omega^2/10^6)] + j(\sqrt{2}\omega/10^3)}$$

En forma polar, esto es

$$\mathbf{V} = \frac{2V_m/\theta}{\sqrt{1 + (\omega/1000)^4}} \quad (9.7)$$

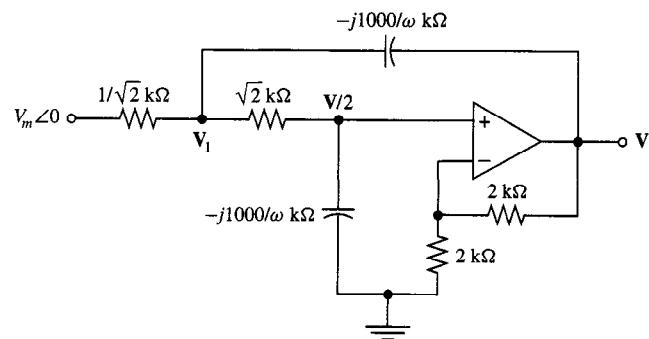


FIGURA 9.12 Circuito fasorial de la figura 9.11.

donde

$$\theta = -\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}\omega/1000}{1 - (\omega/1000)^2} \right] \quad (9.8)$$

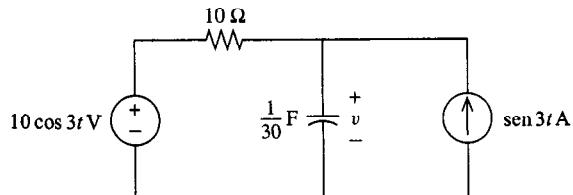
En el dominio de tiempo tenemos

$$v = \frac{2V_m}{\sqrt{1 + (\omega/1000)^4}} \cos(\omega t + \theta) \quad (9.9)$$

En este ejemplo podemos hacer notar que a bajas frecuencias, por ejemplo $0 < \omega < 1000$, la amplitud del voltaje de salida v es relativamente grande, y para frecuencias más altas, su amplitud es relativamente pequeña. De este modo, el circuito de la figura 9.11 *filtre* las frecuencias más altas y permite que “pasen” las frecuencias más bajas. Este circuito se conoce como *filtro* y será considerado con más detalle en el capítulo 14.

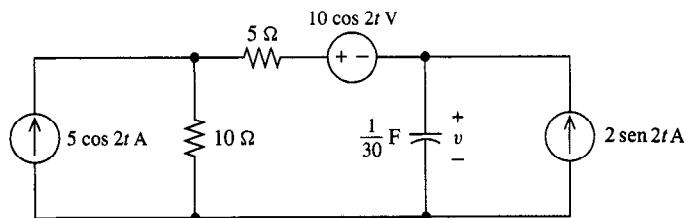
EJERCICIOS

- 9.2.1.** Obténgase la respuesta forzada v utilizando análisis nodal.
Respuesta $10 \sin 3t$ V



EJERCICIO 9.2.1

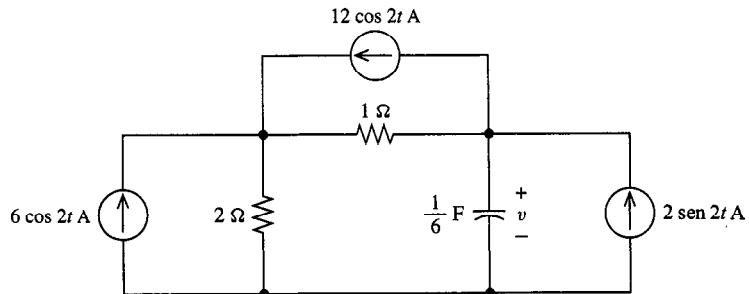
- 9.2.2.** Obténgase el valor en estado estable de v utilizando análisis nodal.
Respuesta $25\sqrt{2} \cos(2t - 81.9^\circ)$ V



EJERCICIO 9.2.2

- 9.2.3.** Obténgase la amplitud de v en el ejemplo 9.5 si $V_m = 10$ V para (a) $\omega = 0$, (b) $\omega = 1000$ rad/s, (c) $\omega = 10,000$ rad/s, y (d) $\omega = 100,000$ rad/s.
Respuesta (a) 20; (b) 14.14; (c) 0.2; (d) 0.002 V

- 9.2.4.** Obténgase el valor en estado estable de v utilizando análisis nodal.
Respuesta $3\sqrt{2} \cos(2t - 135^\circ)$ V



EJERCICIO 9.2.4

9.3 ANÁLISIS DE MALLA

Como se sugirió en la sección precedente, los métodos generales del análisis de circuito se aplican a circuitos de fasores como si estos fuesen circuitos resistivos, con la resistencia R sustituida por la impedancia Z , que es más generalizada. En esta sección ilustraremos la aplicación del análisis de malla a circuitos de fasores. Nuevamente, notamos que la forma generalizada de la ley de Ohm, utilizando la impedancia $V = ZI$, permite reemplazar el cálculo (diferenciación e integración) por operaciones de álgebra más simples (multiplicación y división).

Ejemplo 9.6

Para ilustrar el análisis de malla de un circuito en estado estable ac, obtengamos v_1 en la figura 9.7, la cual fue obtenida mediante análisis nodal en la sección anterior. Utilizaremos el circuito fasorial de la figura 9.8(b), nuevamente dibujada en la figura 9.13, con las figuras de malla I_1 e I_2 , como se indicó anteriormente. Una vez que el circuito se descompone, el voltaje fasor V_1 puede obtenerse como

$$V_1 = 5 - \frac{I_1}{2} \quad (9.10)$$

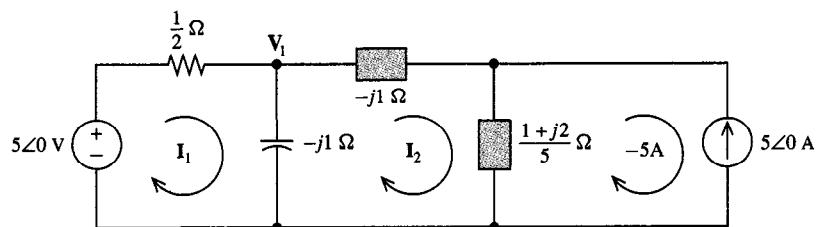


FIGURA 9.13 Circuito de la figura 9.8 redibujado para análisis de malla.

Las dos ecuaciones de malla son

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{I}_1 - j1(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) &= 5 \\ -j1(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j1\mathbf{I}_2 + \left(\frac{1+j2}{5}\right)(\mathbf{I}_2 + 5) &= 0\end{aligned}\quad (9.11)$$

Resolviendo estas ecuaciones para \mathbf{I}_1 , tenemos

$$\mathbf{I}_1 = 6 + j2 \text{ A}$$

que al sustituirla en (9.10), se obtiene

$$\mathbf{V}_1 = 2 - j1 \text{ V}$$

Éste es el mismo resultado que se obtuvo en la sección precedente, y puede ser utilizada para obtener el voltaje v_1 en el dominio del tiempo.

Los mismos procedimientos abreviados para escribir ecuaciones nodales y de malla que se discutieron en las secciones 4.3 y 4.5 para circuitos resistivos, se aplican a circuitos de fasores. Por ejemplo, en la figura 9.13, si $\mathbf{I}_3 = -5$ es la corriente de malla en la malla derecha, en dirección de las manecillas del reloj, por inspección pueden escribirse las dos ecuaciones de malla del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} - j1\right)\mathbf{I}_1 - (-j1)\mathbf{I}_2 &= 5 \\ -(-j1)\mathbf{I}_1 + \left(-j1 - j1 + \frac{1+j2}{5}\right)\mathbf{I}_2 - \left(\frac{1+j2}{5}\right)\mathbf{I}_3 &= 0\end{aligned}$$

Éstas son equivalentes a (9.11), y se forman exactamente como en el caso de los circuitos resistivos. Es decir, en la primera ecuación, el coeficiente de la primera variable es la suma de impedancias alrededor de la primera malla. Los otros coeficientes son los negativos de las impedancias comunes a la primera malla y a aquellas mallas cuyos números corresponden a las corrientes. El miembro derecho es la suma de las fuentes de voltaje en la malla, con polaridades consistentes con la dirección de la corriente de la malla. La sustitución de la “primera” por la “segunda” se aplica a la siguiente ecuación, y así sucesivamente. El desarrollo dual, como se describió en la sección 4.3, es suficiente para las ecuaciones nodales.

Ejemplo 9.7

Este ejemplo ilustra que las conversiones de impedancias en serie y en paralelo, junto con las transformaciones de Thevenin-Norton, pueden ser de gran ayuda para simplificar un circuito antes de escribir las ecuaciones generales de análisis (sea nodal o de malla). Aplicaremos el análisis de malla al circuito de la figura 9.14(a) en donde la respuesta deseada es el voltaje v a través del inductor 2-H. Puesto que este circuito contiene seis mallas y una fuente de corriente, se requeriría de la solución simultánea de cinco ecuaciones con cinco incógnitas si se escribieran directamente las ecuaciones de malla. Por conversiones en serie-paralelo, el circuito puede ser redibujado

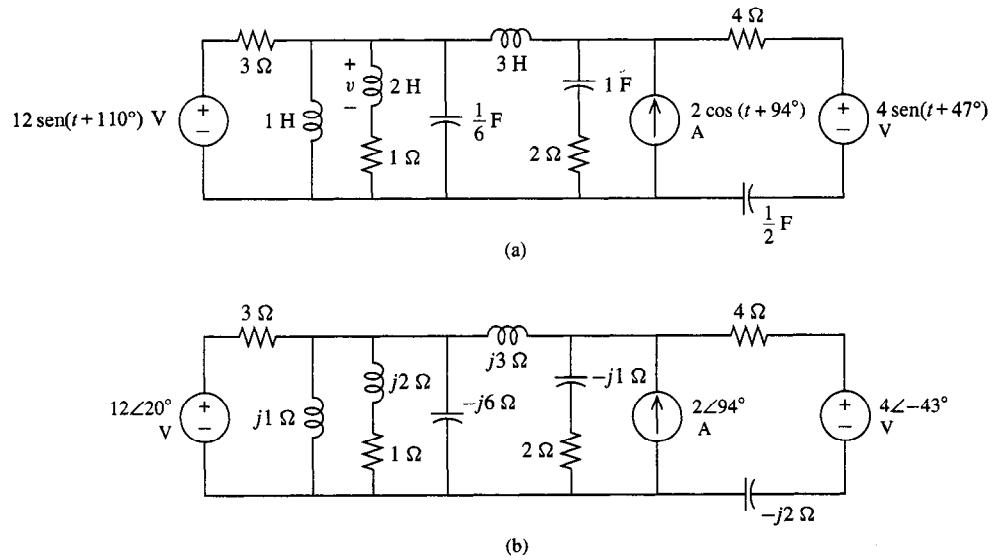


FIGURA 9.14 (a) Circuito para el ejemplo 9.7; (b) circuito fasorial correspondiente.

como en la figura 9.15(a), donde

$$Z_1 = j1||(1 + j2)||(-j6) = 0.128 + j0.79 \Omega$$

$$Z_2 = 2 - j1 \Omega$$

$$Z_3 = 4 - j2 \Omega$$

También convertimos la combinación en serie de Z_3 y la fuente de voltaje $4\angle-43^\circ$ V en la figura 9.14(b) a la forma Norton que aparece en

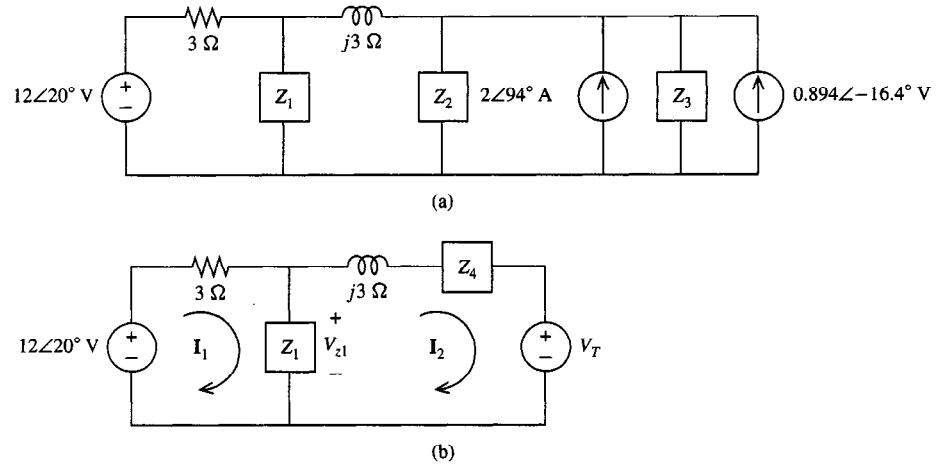


FIGURA 9.15 (a) Circuito fasorial simplificado; (b) nuevamente simplificado.

la figura 9.15(a) donde

$$\mathbf{I}_N = \frac{4\angle -43^\circ}{Z_3} = 0.894\angle -16.4^\circ \text{ A}$$

Como simplificación final, combinamos las impedancias en paralelo Z_2 y Z_3 y las fuentes de corriente en paralelo, y convertimos el resultado a la forma de Thevenin, lo que resulta en el circuito que aparece en la figura 9.15(b).

$$Z_4 = Z_2 || Z_3 = \frac{(2 - j1)(4 - j2)}{6 - j3} = \frac{4}{3} - j\frac{2}{3} \Omega$$

$$\mathbf{V}_T = Z_4(2\angle 94^\circ + 0.894\angle -16.4^\circ) = 2.81\angle 41^\circ \text{ V}$$

Las ecuaciones de malla, en forma de vector-matriz, son

$$\begin{bmatrix} 3.13 + j0.79 & -0.128 - j0.79 \\ -0.128 - j0.79 & 1.45 + j3.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\angle 20^\circ \\ 2.81\angle -139^\circ \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz es

$$\Delta = (3.13 + j0.79)(1.45 + j3.12) - (-0.128 - j0.79)^2 = 11.1\angle 75.8^\circ$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{11.1\angle 75.8^\circ} \begin{bmatrix} 1.45 + j3.12 & 0.128 + j0.79 \\ 0.128 - j0.79 & 3.13 + j0.79 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12\angle 20^\circ \\ 2.81\angle -139^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.58\angle 7.2^\circ \\ 0.657\angle 88.3^\circ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Habiendo descompuesto el circuito al obtener las corrientes de malla, a continuación se obtienen las incógnitas deseadas en términos de las corrientes de malla. El voltaje a través de Z_1 en la figura 9.15(b) es

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{Z1} &= Z_1(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = (0.128 + j0.79)(3.58\angle 7.2^\circ - 0.657\angle 88.3^\circ) \\ &= 2.83\angle 77.4^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

De la figura 9.14 podemos ver que este voltaje pasa a través de una impedancia de $j2 \Omega$ (el voltaje deseado, \mathbf{V}) en serie con otra impedancia de 1Ω . Por división de voltajes

$$\mathbf{V} = \frac{j2}{1 + j2} 2.83\angle 77.4^\circ = 2.53\angle 104^\circ \text{ V}$$

que es el fasor desconocido que deseábamos obtener. El resultado final en el dominio del tiempo es

$$v(t) = 2.53 \cos(t + 104^\circ) \text{ V}$$

Aunque se ha requerido de cierto esfuerzo para llegar a este resultado, debe recordarse que el circuito original tenía un total de 10 elementos pasivos y 3 fuentes independientes distribuidas en 6 mallas. De haber tratado de resolver el circuito fasorial directamente y sin simplifica-

Ejemplo 9.8

ciones o, lo que es peor, sin haber utilizado fasores, se hubiera requerido de muchos más esfuerzos para calcularlo.

Como ejemplo final, consideremos el circuito de la figura 9.16(a), donde la respuesta es el valor en estado estable v_1 , la fuente controlada tiene una transconductancia $g = 2 \text{ S}$. El circuito fasorial aparece en la figura 9.16(b), donde las corrientes de malla son las que se indican.

Aplicando LVK alrededor de la supermalla marcada \mathbf{I} , tenemos

$$-\mathbf{V}_1 - j1(-j1 + \mathbf{I}) + (1 + j2)(\mathbf{I} + 2\mathbf{V}_1) = 0$$

Además, a partir de la figura podemos ver que

$$\mathbf{V}_1 = j1(4 - \mathbf{I})$$

Eliminando \mathbf{I} de estas ecuaciones y resolviendo para \mathbf{V}_1 , tenemos

$$\mathbf{V}_1 = \frac{-4 + j3}{5} = 1/143.1^\circ \text{ V}$$

Por consiguiente, en el dominio del tiempo, el voltaje es

$$v_1 = \cos(2t + 143.1^\circ) \text{ V}$$

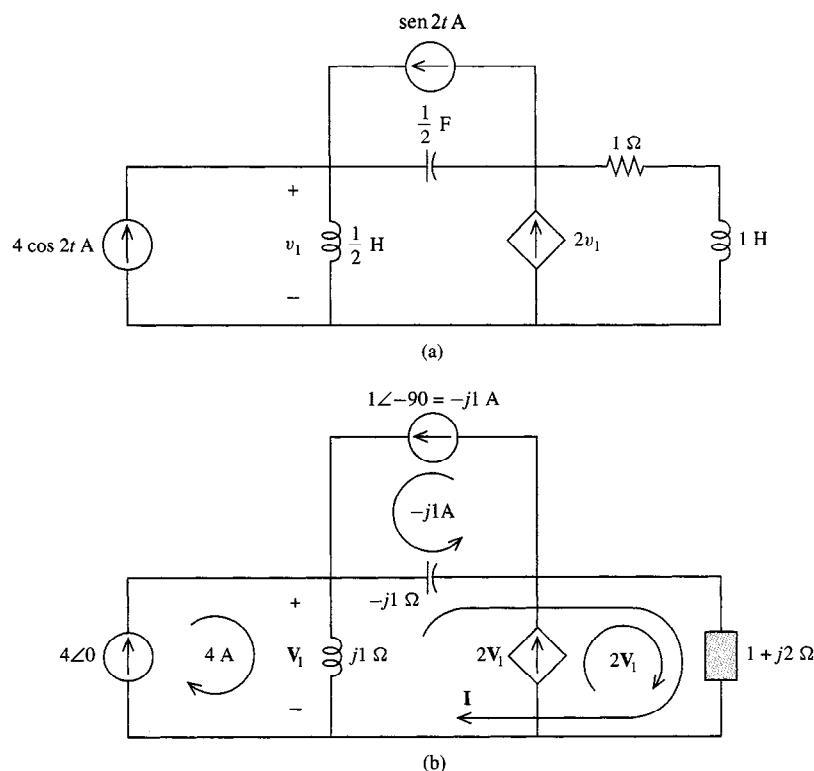


FIGURA 9.16 (a) Circuito en el dominio del tiempo; (b) contraparte fasorial.

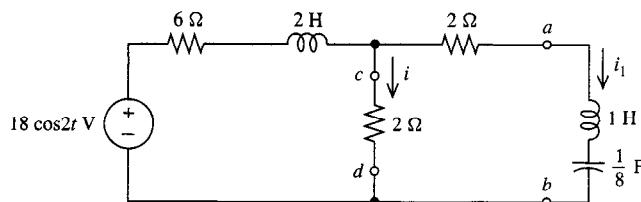
EJERCICIOS

9.3.1. Obténgase la respuesta forzada i en la figura 9.9 utilizando análisis de malla.

9.3.2. Resuélvase el ejercicio 9.2.4 utilizando análisis de malla.

9.3.3. Obténgase la corriente en estado estable y utilizando análisis de malla.

$$\text{Respuesta } \sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ) \text{ A}$$



EJERCICIO 9.3.3

9.4.

FUENTES CON FRECUENCIAS DIFERENTES

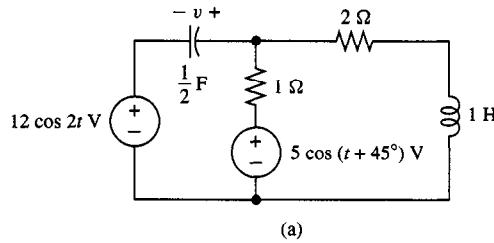
Como recordaremos, un circuito ac es todo aquel cuyas fuentes independientes son todas sinusoidales. Si todas las fuentes en un circuito ac son de la misma frecuencia ω , puede utilizarse el circuito fasorial correspondiente para determinar la respuesta forzada en la forma descrita en las últimas tres secciones. Puede calcularse mediante un sólo análisis unificado nodal o de malla, o mediante superposición (sumando las respuestas componentes a cada fuente individual o grupo de fuentes, donde se eliminan todas las demás fuentes independientes).

La superposición es un principio general que siempre se utilizará para obtener la respuesta de un circuito lineal que contengan más de una fuente. Aun si un circuito ac contiene fuentes con frecuencias diferentes, puede utilizarse la superposición para obtener la respuesta forzada. Para propósitos de superposición, las fuentes se agrupan de forma que cada problema de componentes contenga únicamente fuentes de una sola frecuencia. Entonces, para cada problema de componentes resultante, puede utilizarse un circuito fasorial para determinar la respuesta de fasor, que es luego convertida a una respuesta sinusoidal y sumada a las otras respuestas de componentes, tal y como lo requiere el principio de superposición.

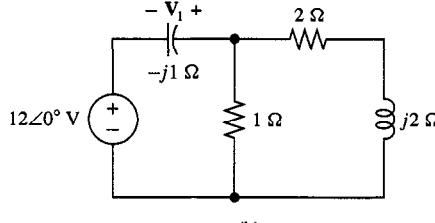
Ejemplo 9.9

Para obtener v en la figura 9.17(a), utilizaremos superposición. En las figuras 9.17(b) y (c) aparecen los circuitos fasoriales componentes. Nótese que las impedancias en los problemas componentes son distintas para todos los elementos, excepto las resistencias, puesto que para los elementos (de almacenaje) la impedancia depende de la frecuencia. Por divisor de voltajes

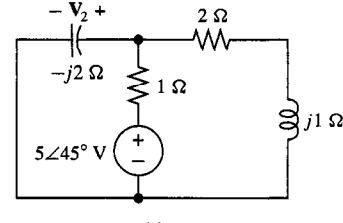
$$V_1 = - \left[\frac{-j1}{-j1 + Z_a} \right] [12 \angle 0] \quad (9.12)$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 9.17 (a) Circuito AC; (b) circuito fasorial para la componente $\omega = 2$; (c) circuito fasorial para la componente $\omega = 1$.

donde Z_a es el equivalente de las tres impedancias a la derecha en la figura 9.17(b):

$$Z_a = \frac{(1)(2+j2)}{3+j2} = 0.769 + j0.154 \Omega$$

Utilizando esto en (9.12), $V_1 = 10.5\angle 138^\circ$ V. De este modo

$$v_1 = 10.5 \cos(2t + 138^\circ) \text{ V}$$

Examinando ahora la figura 9.17(c), nuevamente por división de voltajes

$$\mathbf{V}_2 = \left[\frac{Z_b}{Z_b + 1} \right] [5\angle 45^\circ]$$

donde Z_b es el equivalente en paralelo de las impedancias $-j2$ y $2+j1$, o

$$Z_b = \frac{(-j2)(2+j1)}{2-j1} = 1.6 - j1.2 \Omega$$

que, al sustituirla, se obtiene

$$\mathbf{V}_2 = \left[\frac{1.6 - j1.2}{2.6 - j1.2} \right] [5\angle 45^\circ] = 3.5\angle 32.9^\circ \text{ V}$$

La componente sinusoidal correspondiente es

$$v_2 = 3.5 \cos(t + 32.9^\circ) \text{ V}$$

y, por superposición, la respuesta forzada v es la suma de las componentes:

$$v = v_1 + v_2 = 10.5 \cos(2t + 138^\circ) + 3.5 \cos(t + 32.9^\circ) \text{ V}$$

Nótese en el ejemplo precedente que V_1 y V_2 fueron primero convertidas en sinusoides antes de ser sumadas. *No pueden superponerse fasores correspondientes a distintas frecuencias; únicamente pueden superponerse sus sinusoides correspondientes.* Recuérdese que un fasor dado corresponde a la información de amplitud y fase de una sinusode de una frecuencia específica ω . Si difieren las frecuencias de los dos fasores, no tiene sentido sumarlos entre sí. La magnitud de su suma de fasores no corresponde a ninguna amplitud sinusoidal, así como el ángulo de su suma tampoco corresponde a un ángulo de fase sinusoidal. Cuando las frecuencias difieren, el principio de superposición se aplica a la suma de las componentes en el dominio del tiempo y no a fasores. Sin embargo, dentro de un problema de componentes que corresponda a una sola frecuencia, los fasores también pueden ser superpuestos. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.10

Buscamos la corriente i que pasa a través de la fuente de voltaje en el circuito ac que aparece en la figura 9.18(a). Utilizaremos superposiciones, agrupando las dos fuentes en $\omega = 10 \text{ rad/s}$ y designando i_1 , a esta componente de la respuesta; la componente restante, debida a la fuente en $\omega = 5 \text{ rad/s}$, es i_2 . En la figura 9.18(b) se muestra el circuito fasorial para calcular i_1 , y la figura 9.18(c) ilustra el caso de i_2 . En cada caso, se han eliminado las mismas fuentes, y el valor de ω corresponde a las fuentes activas utilizadas para calcular las impedancias. Mediante las superposiciones, cada problema componente puede ser planteado y resuelto independientemente.

La ecuación de malla derecha en la figura 9.18(b) es

$$\mathbf{I}_1(-j2 + 1 + j4) + j2(\mathbf{I}_1 - 4\angle 0) = 5\angle 30^\circ \text{ A}$$

0

$$\mathbf{I}_1 = \frac{5\angle 30^\circ + j8}{1 + j4} = 2.76\angle -8.4^\circ \text{ A}$$

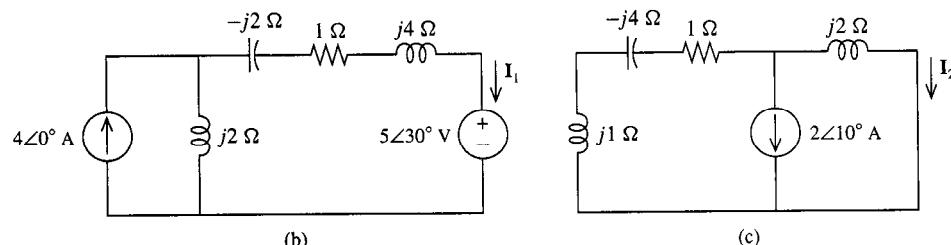
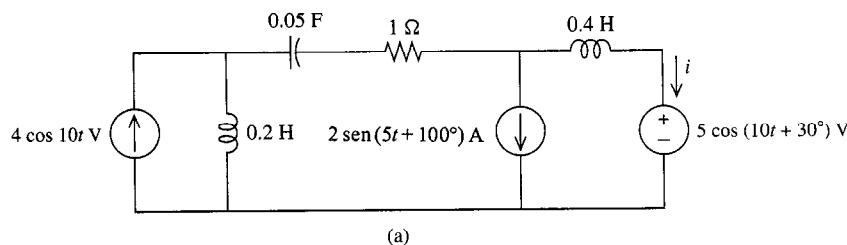


FIGURA 9.18 (a) Circuito ac; (b) circuito fasorial para la componente $\omega = 10$; (c) circuito fasorial para la componente $\omega = 5$.

La componente ac correspondiente es

$$i_1 = 2.76 \cos(10t - 8.4^\circ) \text{ A}$$

Volviéndonos a las demás componentes, aplicando la división de corrientes a la figura 9.18(c) se obtiene

$$\mathbf{I}_2 = \left[\frac{1 - j3}{1 - j1} \right] [-2\angle 10^\circ] = 4.47\angle 163^\circ \text{ A}$$

De este modo, la segunda componente ac es

$$i_2 = 4.47 \cos(5t + 163^\circ) \text{ A}$$

La respuesta forzada general, o respuesta en estado estable ac, es la suma de las componentes:

$$i = i_1 + i_2 = 2.76 \cos(10t - 8.4^\circ) + 4.47 \cos(5t + 163^\circ) \text{ A}$$

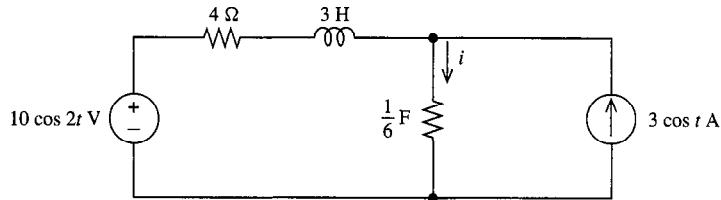
En el ejemplo precedente, calculamos una componente para cada frecuencia de fuente, y sumamos estas componentes. Nótese que, puesto que hay dos fuentes en el circuito fasorial de la figura 9.18(b) que corresponden a la frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/s}$, para resolver este problema de componente, podemos elegir el uso del principio de superposición. Podemos calcular las subcomponentes de \mathbf{I}_1 , debida a cada una de las dos fuentes, eliminando la otra, y luego sumar estos dos fasores para obtener \mathbf{I}_1 . La superposición puede aplicarse libremente dentro de un circuito de un solo fasor, es decir, uno donde hay una sola frecuencia ω .

En la presente sección vimos que la superposición puede utilizarse para descomponer problemas del estado estable ac que involucren fuentes independientes con más de una frecuencia, en problemas de componentes, donde cada una contiene fuentes de la misma frecuencia. Los problemas de componentes pueden ser entonces resueltos con la ayuda de fasores. Hasta ahora, donde se discutió la superposición en otras instancias, también fue posible desentendernos de la superposición, resolviéndolo en una sola manera unificada, con todas las fuentes en su lugar. Esta misma elección está también disponible para circuitos ac con frecuencias múltiples, pero si debemos utilizar fasores, no podemos resolver todo el problema al mismo tiempo. La dificultad es que no puede definirse un circuito fasorial único y unificado que involucre fuentes de frecuencias distintas.

Los fasores están definidos como aquellos números complejos \mathbf{I} y \mathbf{V} utilizados para especificar corrientes y voltajes cuando tienen la forma específica de $i = \mathbf{I}e^{j\omega t}$ y $v = \mathbf{V}e^{j\omega t}$. En circuitos con frecuencias distintas ω_1 y ω_2 , las corrientes y voltajes no tendrán la forma requerida. De hecho, serán la suma de exponentiales complejos en cada una de las frecuencias de las distintas frecuencias. Así, en circuitos ac que contienen fuentes con distintas frecuencias, no podemos definir un fasor general unificado asociado con corrientes o voltajes dados. Si tratáramos de hacerlo convirtiendo el circuito original en un circuito de fasores que contenga fuentes tanto en ω_1 como en ω_2 , el dilema sería aparente al tratar de asignar valores a las impedancias. ¿Cuál es el valor de ω que utilizaríamos con el fin de calcular valores de impedancia para aquellos elementos cuyas impedancias dependen de ω ? Claramente, ω_1 y ω_2 no serían suficientes para esto. Un circuito único de fasores que posee fuentes con frecuencias distintas no tiene significado. *Para fuentes con frecuencias diferentes, la superposición no es sólo una elección; es la única alternativa para determinar la respuesta en estado estable ac.*

EJERCICIOS

- 9.4.1.** Obtenga la corriente en estado estable i .
Respuesta $2 \cos(2t - 36.9^\circ) + 3 \cos(t + 73.8^\circ)$ A



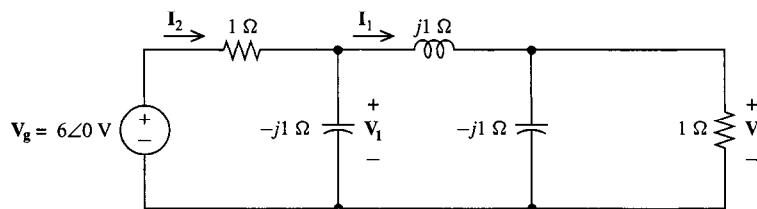
EJERCICIO 9.4.1

- 9.4.2.** Para el circuito de fasores correspondiente al ejercicio 9.3.3, reemplace la parte a la izquierda de las terminales $a-b$ por su equivalente de Thevenin, y obtenga la corriente en estado estable i_1 .

Respuesta $V_{oc} = \frac{9}{5}(2-j1)$ V, $Z_{th} = \frac{1}{5}(18+j1)$ Ω, $i_1 = \cos 2t$ A.

- 9.4.3.** Obtenga V_1 , I_1 , e I_2 . Utilice el método en escalera, suponiendo que $V = 1 \angle 0$.

Respuesta 3 V, $3-j3$ A, 3 A



EJERCICIO 9.4.3

9.5

DIAGRAMAS FASORIALES

Puesto que los fasores son números complejos, pueden representarse por vectores en un plano, donde las operaciones, como la adición de fasores, pueden realizarse geométricamente. Este dibujo se conoce como diagrama de fasores, y puede ser muy útil para analizar circuitos en estado estable ac.

Ejemplo 9.11

Para ilustrarlo, consideremos el circuito fasorial de la figura 9.19, para la que dibujaremos todos los voltajes y corrientes en el diagrama de fasores. Para comenzar, observemos que la corriente \mathbf{I} es común a todos los elementos y la tomaremos como nuestro fasor de *referencia*, denotándolo por

$$\mathbf{I} = |\mathbf{I}| \angle 0^\circ$$

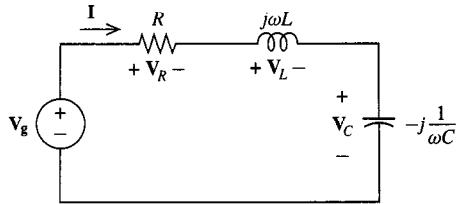


FIGURA 9.19 Circuito de fasor RLC en serie.

El ángulo de \mathbf{I} fue designado arbitrariamente como cero, puesto que queremos que \mathbf{I} sea nuestra referencia. Siempre podemos ajustar este valor supuesto al valor verdadero por el principio de proporcionalidad, que permite la adición de un desplazamiento de fase constante θ a toda corriente y voltaje (multiplicar todo fasor por $1\angle\theta$).

Los fasores de voltaje de circuito son

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} = R|\mathbf{I}|$$

$$\mathbf{V}_L = j\omega L\mathbf{I} = \omega L|\mathbf{I}|/90^\circ$$

$$\mathbf{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I} = \frac{1}{\omega C}|\mathbf{I}|/-90^\circ$$

y

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

Estos aparecen en el diagrama de fasores de la figura 9.20(a), donde se supone que $|\mathbf{V}_L| > |\mathbf{V}_C|$. Los casos $|\mathbf{V}_L| < |\mathbf{V}_C|$ y $|\mathbf{V}_L| = |\mathbf{V}_C|$ aparecen en la figura 9.20(b) y (c), respectivamente. En todos los casos, las longitudes que presentan las unidades de corriente y voltaje no son necesariamente las mismas, de forma que, para mayor claridad, la longitud de \mathbf{I} es mayor que la de \mathbf{V}_R .

Recuérdese que el diagrama de fasores es un retrato en el instante $t=0$ del movimiento circular en el plano complejo. Todos los vectores giran juntos en la dirección contra las manecillas del reloj; por consiguiente, en este movimiento, un fasor que está más hacia la izquierda (recorrido contra las manecillas del reloj) está “más adelante” de un fasor que está “menos” hacia la izquierda (yendo en el mismo sentido).

En el caso (a), la reactancia es inductiva, y la corriente está retardada respecto al voltaje de la fuente por el ángulo θ que puede ser medido. En (b), el circuito tiene una reactancia capacitiva neta, y la corriente está avanzada respecto al voltaje. Finalmente, en (c) la corriente y el voltaje están en fase, puesto que las componentes de las reactancias inductiva y capacitiva se cancelan exactamente una a la otra.

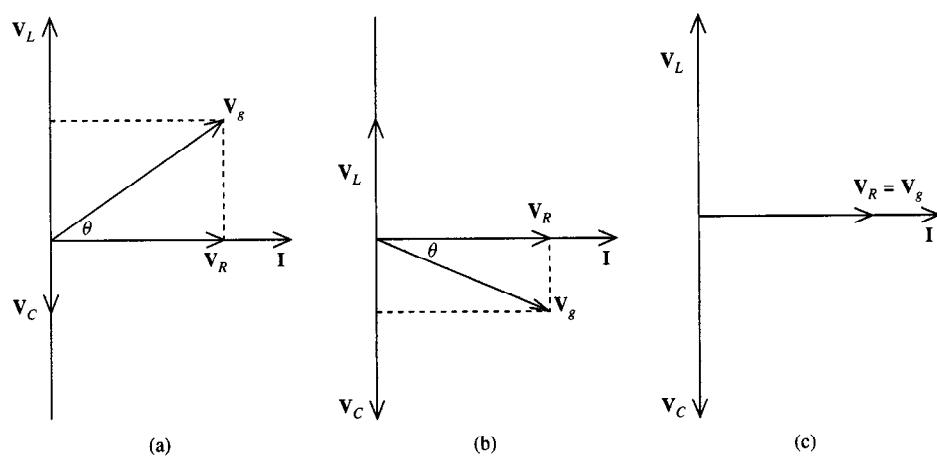


FIGURA 9.20 Diagramas de fasores para la figura 9.19.

Estas conclusiones también se derivan de la ecuación

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{Z} = \frac{\mathbf{V}_g}{R + j[\omega L - (1/\omega C)]} \quad (9.13)$$

El caso (c) está caracterizado por

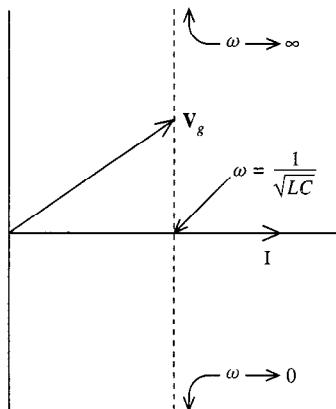


FIGURA 9.21 Lugar geométrico del fasor de voltaje para una respuesta fija de corriente.

Ejemplo 9.12

Deseamos determinar \mathbf{V}_c , en la figura 9.22, y visualizar las relaciones de fase entre todas las corrientes y voltajes. Utilizaremos \mathbf{V}_c como nuestro fasor de referencia; puesto que también se desconoce su magnitud, fijaremos temporalmente $\mathbf{V}_c = 1∠0$ como se muestra en la figura 9.22(b). Puesto que la corriente que pasa a través del capacitor está adelantada 90° respecto a su voltaje, \mathbf{I}_3 debe estar adelantada respecto a \mathbf{V}_c en 90° como se muestra en el diagrama de fasores. Utilizando el valor de referencia para \mathbf{V}_c ,

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_c}{-j2} = \frac{-1}{j2} = \frac{1}{2}∠90^\circ$$

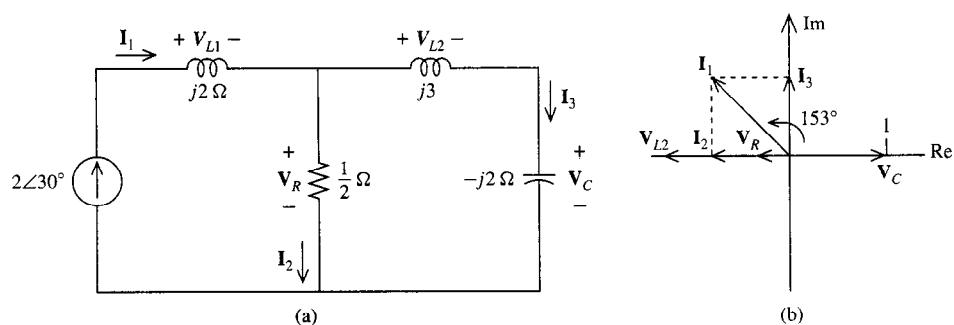


FIGURA 9.22 (a) Circuito fasorial; (b) diagrama de fasores usando \mathbf{V}_c como el fasor de referencia.

\mathbf{V}_{L2} , el voltaje a través de un inductor, está avanzado 90° respecto a su corriente \mathbf{I}_3 , de forma que queda en el eje real negativo en el diagrama de fasores como se muestra

$$\mathbf{V}_{L2} = (j3) \left(\frac{1}{2} \angle 90^\circ \right) = \frac{3}{2} \angle 180^\circ$$

\mathbf{V}_R es, por LVK, la suma vectorial de \mathbf{V}_c y \mathbf{V}_{L2} . Puesto que ambos están en el eje real, debe ocurrir esto con su suma:

$$\mathbf{V}_R = 1 \angle 0 + \frac{3}{2} \angle 180^\circ = \frac{1}{2} \angle 180^\circ$$

La corriente y el voltaje en una resistencia están en fase, de forma que \mathbf{I}_2 tiene el mismo ángulo que \mathbf{V}_R en el diagrama de fasores:

$$\mathbf{I}_2 = 2\mathbf{V}_R = 1 \angle 180^\circ$$

Luego, puesto que \mathbf{I}_1 es la suma vectorial de \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 como se muestra en el diagrama de fasores

$$\mathbf{I}_1 = 1 \angle 180^\circ + \frac{1}{2} \angle 90^\circ = 1.12 \angle 153^\circ$$

Nótese que habríamos obtenido $\mathbf{V}_c = 1 \angle 0^\circ$, junto con los demás fasores que calculamos con base en este fasor de referencia, si la fuente de corriente tuviera un valor de $1.12 \angle 153^\circ$. Por el principio de proporcionalidad, multiplicando la fuente, multiplicará a todos los fasores por el mismo factor. Eligiendo el factor de escala α para que coincida con el valor de fuente $2 \angle 30^\circ$

$$\alpha = \frac{2 \angle 30^\circ}{1.12 \angle 153^\circ} = 1.79 \angle -123^\circ$$

vemos que todos los fasores en el diagrama de fasores deben aumentarse por un factor de 1.79 y girados 123° en el sentido de las manecillas del reloj para completar la solución. En particular,

$$\mathbf{V}_c = \alpha(1 \angle 0^\circ) = 1.79 \angle -123^\circ \text{ V}$$

Nótese que una rotación en la misma cantidad de todos los fasores en el diagrama de vectores, no cambia sus relaciones de fase. \mathbf{I}_2 aún está adelante de \mathbf{I}_3 por 90° , y sigue estando fuera de fase 180° respecto a \mathbf{V}_c , y así sucesivamente. El ángulo arbitrario del fasor de referencia es adecuado para determinar todas las relaciones de fase sin la necesidad de correcciones. Las correcciones se necesitan únicamente para determinar el ángulo de fase de una respuesta, más que un desplazamiento de fase entre dos variables de respuesta.

Ejemplo 9.13

Como último ejemplo para ilustrar el uso de diagramas de fasores, obtengamos el lugar geométrico de \mathbf{I} conforme R varía como se ilustra en la figura 9.23. La corriente está dada por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_m}{R + j\omega L} = \frac{\mathbf{V}_m(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Por consiguiente, si

$$\mathbf{I} = x + jy \quad (9.15)$$

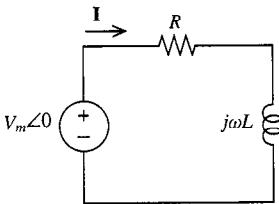


FIGURA 9.23 Circuito fasorial RL .

tenemos

$$x = \operatorname{Re} \mathbf{I} = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (9.16)$$

$$y = \operatorname{Im} \mathbf{I} = \frac{-\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (9.17)$$

La ecuación del lugar geométrico es la ecuación satisfecha por x y y conforme varía R ; de este modo, necesitamos eliminar R entre estas dos últimas ecuaciones.

Si dividimos la primera de estas dos ecuaciones por la segunda, obtenemos

$$\frac{x}{y} = -\frac{R}{\omega L}$$

de donde

$$R = -\frac{\omega L x}{y}$$

Sustituyendo este valor de R en (9.16), obtenemos, después de algunas simplificaciones,

$$x^2 + y^2 = -\frac{V_m y}{\omega L}$$

Este resultado puede ser reescrito como

$$x^2 + \left(y + \frac{V_m}{2\omega L}\right)^2 = \left(\frac{V_m}{2\omega L}\right)^2 \quad (9.18)$$

que es la ecuación de un círculo con centro en $[0, -(V_m/2\omega L)]$ y radio $V_m/2\omega L$.

Al parecer, el círculo (9.18) es el lugar geométrico, conforme R varía, del fasor $\mathbf{I} = x + jy$. Sin embargo, por (9.16), $x \geq 0$; de este modo, el lugar geométrico es realmente un semicírculo que aparece con líneas punteadas en el programa de fasores de la figura 9.24. El voltaje $V_m \angle 0$, tomado como referencia, también parece en la figura, junto con el fasor \mathbf{I} . Si $R = 0$, tenemos, a partir de (9.16) y (9.17), $x = 0$ e $y = -V_m/\omega L$. Si $R \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$. De este modo, conforme R varía de 0 a ∞ , el fasor de corriente se mueve contra las manecillas del reloj sobre este círculo.

Si \mathbf{I} es como se muestra en la figura 9.24, puede resolverse el fasor de corriente en dos componentes, uno con una amplitud $I_m \cos \theta$ en fase con el voltaje, y uno con amplitud $I_m \sin \theta$ que está 90° fuera de fase respecto al voltaje. Esta construcción está indicada por la línea vertical punteada. Como veremos en el capítulo 10, la componente en fase de la corriente es importante para calcular la potencia promedio producida por la fuente. De este modo, el diagrama de fasores nos da un método para ver de un solo vistazo el máximo componente de la corriente en fase. Evidentemente, esto ocurre en el punto a que corresponde a $\theta = 45^\circ$. Este es el caso $x = -y$, o $R = \omega L$.

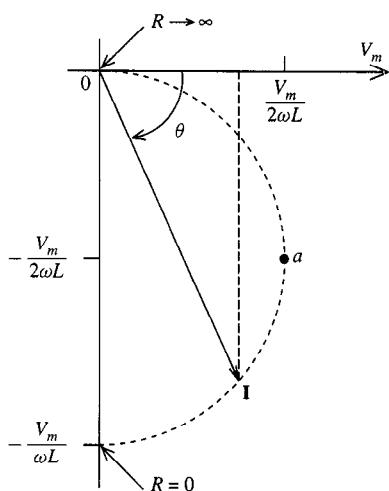


FIGURA 9.24 Lugar geométrico del fasor \mathbf{I} .

9.5.1. Elimíñese ωL en (9.16) y (9.17) y demuéstrese que, conforme varía ωL , el lugar geométrico del fasor $\mathbf{I} = x + jy$ es un semicírculo.

$$\text{Respuesta } \left(x - \frac{V_m}{2R} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{V_m}{2R} \right)^2, \quad y \leq 0$$

9.5.2. Obténgase ωL en el ejercicio 9.5.1 para que $\text{Im } \mathbf{I}$ tenga su mayor valor negativo. También obténgase \mathbf{I} para este caso.

$$\text{Respuesta } R, (V_m/\sqrt{2R})/-45^\circ$$

9.6**SPICE Y ESTADO ESTABLE DE AC**

El uso de fasores reduce sustancialmente la carga de cálculos de un análisis de circuito en estado estable ac, en comparación a formular y resolver la ecuación descriptiva como una ecuación diferencial de orden muy alto. Aun así, para circuitos *RLC* con varios nodos y trayectorias cerradas, se requieren muchos cálculos. La aritmética compleja, utilizada para desarrollar la solución se convierte en tediosa y desgastante, incluso con el apoyo de una calculadora idónea para este propósito.

Afortunadamente, SPICE está equipado con un enunciado de control ac, el cual, si se incluye en el archivo de entrada SPICE, realiza un análisis en estado estable ac. En este modo, el programa de SPICE determina la solución a un circuito fasorial especificado. El formato de este enunciado de control es

.AC	FVAR	NP	FLOW	FHIGH
-----	------	----	------	-------

En el modo de análisis ac llamado por este enunciado, SPICE está listo para realizar análisis múltiples en estado estable ac con conjuntos de frecuencias especificados por el usuario. Tendremos ocasión para hacer uso completo de esta capacidad cuando estudiemos respuestas de frecuencias en los capítulos subsiguientes, pero para los propósitos presentes, nos bastará con determinar el estado estable ac con una sola frecuencia de fuente. Sin embargo, puesto que la declaración de control está configurada para acomodarse a un propósito más general, debemos estar conscientes del formato general. FVAR debe ser sustituido por alguna de las palabras DEC, OCT o LIN. Estas palabras clave describen la forma en que se usará la variación de frecuencias del conjunto de frecuencias para utilizarse en análisis ac repetido: por décimos, octavos, o linealmente. NP es un número que especifica la cantidad de frecuencias por octavos, décimos, o en el caso LIN, el número total de frecuencias en el conjunto. FLOW es la frecuencia mínima, y FHIGH es la frecuencia máxima que se analizará, dada en unidades de hertz (Hz). Por ejemplo,

.AC	DEC	5	10	1000
-----	-----	---	----	------

especifica que se realizará un análisis ac para cada una de las cinco frecuencias espaciadas uniformemente por décima, de 10 Hz a 1 kHz. No se necesitan unidades logarítmicas de la décimo u octavo para el presente propósito de análisis en estado estable ac; serán retomadas en el capítulo 14. La declaración de control

```
.AC LIN 1 30K 30K
```

especifica que se hará un sólo análisis ac a una frecuencia de 30 kHz. Cuando NP se fija en 1 como se hizo anteriormente, hay una sola frecuencia en el conjunto de análisis. La declaración resultante puede parecer una forma más bien tortuosa para especificar un análisis ac en la frecuencia única de 30 kHz, pero éstas son las reglas de SPICE. Quizá en alguna versión futura se perfeccione este formato de declaraciones.

En los enunciados de elementos para todas las fuentes independientes, deben declararse los fasores del análisis ac. El formato es

VXXXX	N1	N2	AC	MAG	ANG
IXXXX	N1	N2	AC	MAG	ANG

V significa la fuente de voltaje independiente, XXXX su nombre, y N1 y N2 los nodos positivos y negativos. La inclusión de la palabra AC indica que esta fuente se utilizará en el análisis ac. MAG es la magnitud y ANG el ángulo del fasor de fuente de voltaje. En SPICE, las unidades para todas las cantidades angulares, tales como ANG, están dadas en grados. La declaración de fuente de corriente independiente es similar a la fuente de voltaje, donde la flecha de referencia de la función de fuente independiente señala desde el nodo N1 y a través de la fuente, hacia el nodo N2.

La salida de un análisis ac de SPICE, es un conjunto de variables de respuesta de fasores. Estos pueden ser impresos como una tabla, utilizando la declaración

```
.PRINT AC CVLIST
```

en donde CVLIST es una lista de variables de circuito. Esta lista tiene un formato exactamente como se describió en el capítulo 4 para el análisis dc, excepto que especificamos la magnitud o fase de una variable, incluyendo M o P después de V (para voltaje) o I (para corriente). Por ejemplo,

```
.PRINT AC VM(2) VP(2) IM(VDUMMY)
```

resulta en la impresión de la magnitud y fase del fasor de voltaje de nodo V_2 , y la magnitud del fasor de corriente que pasa a través de la fuente de voltaje VDUMMY. Si se prefiere que la salida esté en componentes rectangulares, al sustituir R o I por M o P resultará en la impresión de partes reales o imaginarias.

Recuérdese que, en algunas versiones de SPICE, sólo las corrientes pueden ser salida a través de fuentes de voltaje, y es necesario instalar una fuente de voltaje "simulada" de cero volts en serie con cualquier otro elemento cuya corriente se necesite, y que no tenga una fuente de voltaje que esté en serie. Si se desea la representación rectangular en lugar de la polar, incluir R o I después de la V (voltaje) o I (corriente) guía, resultará en que se imprima la parte real o la parte imaginaria, respectivamente.

SPICE resuelve únicamente circuitos fasoriales; la responsabilidad del usuario es convertir fuentes sinusoidales originales a su representación de fasores, y luego convertir la respuesta de fasores de vuelta a sinusoides.

Ejemplo 9.14

Para ilustrar la aplicación de SPICE, considérese el circuito de la figura 9.7. Obténgase el voltaje del nodo 1 en forma polar, y la corriente de la resistencia $1\text{-}\Omega$ en forma rectangular. Un formato SPICE para calcular estos valores es

```
AC STEADY-STATE SOLUTION FOR CIRCUIT OF FIGURE 9.7
*ENUNCIADOS DE DATOS
V1 100 0 AC 5 0
R1 100 1 .5
C1 1 0 .5
C2 1 2 1
L1 1 2 .5
L2 2 0 .25
R2 2 0 1
I1 0 2 AC 5 0
*ENUNCIADO DE CONTROL DE LA SOLUCIÓN PARA ANÁLISIS AC
[f = 2/2(2*p1) Hz]
.AC LIN 1 .3183 .3183
*ENUNCIADO DE CONTROL DE SALIDA PARA V(1) & I(R2)
.PRINT AC VM(1) VP(1) IR(R2) II(R2)
.END
```

La declaración .PRINT tiene formato para versiones de SPICE que acepten referencias de corriente como $I(R2)$. Si su versión de SPICE sólo tiene salida de corrientes a través de fuentes de voltaje $I(VXXXXX)$, debe insertarse una fuente vacía en serie con $R1$. En este caso, la solución impresa es

FREQ	VM(1)	VP(1)	IR(R2)	II(R2)
3.183E-01	2.263E+00	-2.657E+01	2.000E+00	4.000E+00

Los sinusoides correspondientes son $v = 2.26 \cos(2t - 26.6^\circ)$ y, puesto que $I_R = 2 + j4 = 4.47 \angle 63.4^\circ$, $i_R = 4.47 \cos(2t + 63.4^\circ)$.

Ejemplo 9.15

Como segundo ejemplo, consideremos el fasor de corriente I en el circuito de la figura 9.9, que contiene una fuente controlada de transresistencia $r = 3000 \Omega$.

```
SOLUCIÓN DE ESTADO ESTABLE AC PARA LA FIGURA 9.9
*ENUNCIADOS DE DATOS
V 1 0 AC 4 0
R1 1 2 0.5K
R2 2 0 2K
C1 2 0 0.2UF
H 3 2 V -3000
R3 3 4 2K
C2 4 0 0.2UF
```

```

*ENUNCIADO DE CONTROL DE SOLUCION PARA f = 5000/(2*3.1416)
.AC LIN 1 795.77 795.77
.PRINT AC IM(R1) IP(R1)
.END

```

La solución es

FREQ	IM(R1)	IP(R1)
7.958E+02	2.400E-02	5.313E+01

De este modo, la corriente en estado estable ac es $0.024 \cos(5000t + 53.1^\circ)$.

En el capítulo 4 se presentó el uso de subcircuitos en SPICE. La definición de subcicuito, un conjunto de enunciados abarcadas por las líneas de control .SUBCKT y .ENDS, pueden incluirse en el archivo de entrada de SPICE para el circuito que contenga el subcicuito, o pueden guardarse como un archivo separado. Este último es particularmente útil si el subcicuito se utiliza para varios circuitos distintos. La inclusión de la declaración de control

```
.LIB FILENM
```

hará que el contenido del archivo de texto FILENM se una al archivo de entrada principal de SPICE. FILENM sólo debe contener subcircuitos y, si deseamos unir otros archivos a FILENM, utilizaremos las declaraciones de control .LIB. Por ejemplo, un modelo de amp op presentado como subcicuito en el ejemplo 4.21 y que se repite en esta página, es

```

.SUBCKT & OPAMP 1 2 3
*1 es la entrada +, 2 es la entrada -, y 3 la salida
RIN 1 2 1MEG
E1 4 0 1 2 100k
RD 4 3 30
.ENDS

```

Puesto que tendremos ocasión para utilizar con frecuencia este modelo, supongamos que guardamos estas cinco líneas como un archivo separado llamado OPAMP.CKT. El siguiente ejemplo ilustra cómo puede utilizarse este archivo.

Ejemplo 9.16

Obtengamos el fasor de voltaje de salida del circuito con op amps de la figura 9.11 si el voltaje de entrada es $v_g = 10 \cos(1000t + 30^\circ)$ V. Un archivo de circuito para los nodos de la entrada inversora del op amp, la salida del op amp y la fuente de entrada, designados como 3, 4 y 10, respectivamente, con los nodos 1 y 2 como se muestran, es

```

SOLUCION EN ESTADO ESTABLE AC DE LA FIGURA 9.11
*ENUNCIADOS DE DATOS QUE UTILIZAN OPAMP.CKT DEL CAPITULO 4
.LIB OPAMP .CKT
VG 10 0 AC 10 30
R1 10 1 0.707K
R2 1 2 1.414K
C1 1 4 1UF
C2 2 0 1UF
R3 3 0 2K
R4 3 4 2K
XOPAMP 3 2 4 OPAMP
*SOLUCION DE CONTROL DE LA SOLUCION [f = 1000/(2*3.1416) Hz]
.AC LIN 1 159.15 159.15
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.END

```

Este archivo de circuito nos da la solución

FREQ	VM(4)	VP(4)
1.592E+02	1.414E+01	-5.999E+01

Para circuitos ac que contengan fuentes en distintas frecuencias, recuérdese que se requiere de un análisis de fasores separado para el subconjunto de fuentes en cada frecuencia distinta, donde se eliminan todas las demás fuentes. Luego de convertir los fasores de referencia a sinusoides, las componentes resultantes se superponen. En general, cada análisis de fasor requiere hacer correr SPICE por separado y editar antes de volver a hacer correr el archivo de entrada de SPICE. Las conversiones fasor a sinusoide, y las sumas finales, deben ser hechas a mano. Incluso cuando está basado en análisis de fasores, SPICE no puede manejar análisis ac de circuitos con frecuencias distintas de una forma más directa.

Ya en el capítulo 8 se señaló una precaución fundamental en el uso de fasores para calcular el estado estable ac. Los fasores calculan directamente la respuesta forzada en circuitos ac, lo que puede ser igualado con la respuesta en estado estable ac, únicamente si el circuito es estable. Los circuitos estables son aquellos cuyas respuestas naturales decaen a cero respecto al tiempo. Si un circuito no es estable, su respuesta natural no decaerá y, en general, no poseerá un estado estable sin importar cuánto esperemos. Si el circuito no es estable, obtendremos un resultado numérico utilizando análisis de fasores, pero debemos interpretarlo únicamente como respuesta forzada, y no el estado estable ac (que es inexistente para circuitos no estables).

El análisis ac en SPICE, que realiza análisis de fasores, hereda esta misma limitación. El resultado de un análisis ac en SPICE, siempre deberá ser igualado a la respuesta forzada, pero esto es también la respuesta en estado estable ac, únicamente si el circuito es estable (lo cual no nos dice el análisis ac de SPICE). Teniendo la salida del análisis ac de SPICE, queda como responsabilidad del usuario verificar independientemente que el circuito sea estable antes de considerarlo como estado estable ac. En el ejemplo final se ilustra esta condición.

Ejemplo 9.17

Considérese el circuito de una sola trayectoria cerrada de la figura 9.25, con ecuaciones descriptivas para la corriente de malla i del modo siguiente:

$$\frac{di}{dt} + (1 - a)i = v_g$$

La ecuación característica es

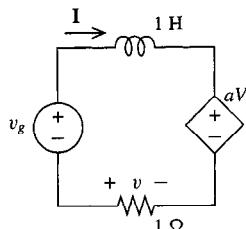


FIGURA 9.25 Circuito para el ejemplo 9.17.

$$s + (1 - a) = 0$$

de donde resulta la solución natural

$$i_n = K e^{-(1-a)t}$$

Si la ganancia del voltaje de fuente controlada $a < 1$, entonces i_n está en una exponencial amortiguada, que tiende a cero, y el sistema es estable. Si $a > 1$, entonces i_n se va a (más o menos) infinito, el circuito es inestable, y por consiguiente no hay estado estable.

Realicemos el análisis ac en el circuito utilizando SPICE con $v_g = \cos t$. Fijando $a = 0.5$, nuestro archivo de entrada a SPICE es

```
Circuito de la figura 9.25
*
V 1 0 AC 1 0
L 1 2 1
H 2 3 V 0.5
R 3 0 1
.AC LIN 1 .159 .159
.PRINT AC IM(V) IP(V)
.END
```

que al correrse nos da la salida

FREQ	IM(V)	IP(V)
1.590E-01	8.951E-01	1.166E+02

La respuesta forzada indicada, $\mathbf{I} = 0.895\angle 117^\circ \text{ A}$ o $i = 0.895 \cos(t + 117^\circ) \text{ A}$, es la respuesta en estado estable ac de este circuito estable. Cambiando al valor $a = 2$ en el archivo de entrada SPICE y volviéndolo a correr, la salida resultante es

FREQ	IM(V)	IP(V)
1.590E-01	7.075E-01	4.497E+01

Puesto que este circuito es inestable, la respuesta forzada $\mathbf{I} = 0.707\angle 45^\circ \text{ A}$ o $0.707 \cos(t + 45^\circ) \text{ A}$ calculada por SPICE, ya no puede ser identificada como respuesta estable ac. No existe estado estable ac en este circuito inestable.

En el capítulo 14 se hará una determinación más sistemática de la estabilidad de una red. Por lo pronto, recuérdese que los circuitos RLC sin fuentes dependientes y sin respues-

tas naturales no amortiguadas (alguna resistencia en cada trayectoria cerrada) son todos estables. También son estables los circuitos amp op con retroalimentación negativa, como los circuitos en unidades del capítulo 3. Para otros circuitos, debemos interpretar los resultados de cualquier análisis de fasores, incluyendo el análisis ac de SPICE, con la precaución adecuada. Si existe un estado estable ac, SPICE lo obtendrá, pero no se nos advertirá si esto no ocurre.

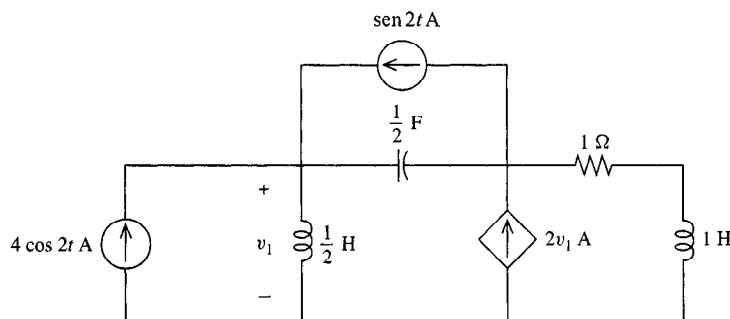
EJERCICIOS

- 9.6.1.** Utilice SPICE para obtener representación de v en el ejercicio 9.2.4 para $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

Respuesta $2.224 / -158.2^\circ \text{ V}$

- 9.6.2.** Utilice SPICE para obtener la corriente de fasor del inductor $1-\text{H}$.

Respuesta $0.331 / 47.8^\circ \text{ A}$



EJERCICIO 9.6.2

RESUMEN

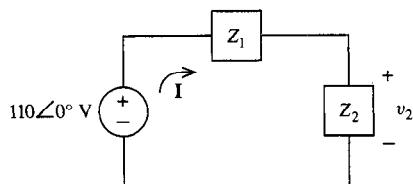
En este capítulo se aplicó sistemáticamente el análisis de fasores a circuitos en estado estable AC. Nuestras herramientas familiares, el análisis nodal, el análisis de malla, la división de corriente y voltaje, los equivalentes en serie y en paralelo y otros, pasan sin modificaciones al dominio de los fasores. Su uso en el dominio de fasores se simplifica en gran medida por el hecho de que todas las corrientes y voltajes son constantes, y todos los elementos que no son puentes satisfacen la misma ecuación simple $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$.

- Las impedancias en serie se suman, las admitancias en paralelo se suman
- Las transformaciones de Thevenin-Norton y la división de voltaje o corriente no sufren modificaciones en el dominio de los fasores.
- En el dominio de los fasores no hay ninguna modificación para análisis nodal o de malla.
- Para los circuitos con fuentes sinusoidales con dos o más frecuencias, debe utilizarse la superposición para definir un circuito de fasores separado para cada frecuencia. Cada uno es resuelto independientemente. La respuesta en estado estable AC general, es la suma de las respuestas en estado estable AC (sinusoidales) para todos estos circuitos de fasores.

- Un diagrama de fasores es la gráfica de uno o más fasores en el plano complejo. La longitud de cada fasor es la amplitud de su sinusode correspondiente, y el ángulo de un fasor es el ángulo de fase de su sinusode correspondiente. Todos los fasores giran juntos en dirección contraria a las manecillas del reloj a un ritmo de ω rad/s.
- Puede utilizarse SPICE para analizar circuitos de fasores. En su enunciado de elementos se registra la frecuencia, magnitud y fase de cada fuente sinusoidal y se registra una declaración de control, .AC, para llamar el análisis de fasores.

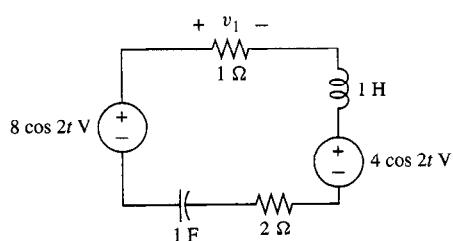
PROBLEMAS

9.1. Obténgase V_2 utilizando el principio de división de voltajes (9.2). Verifíquese calculando $V_2 = Z_2 I$.



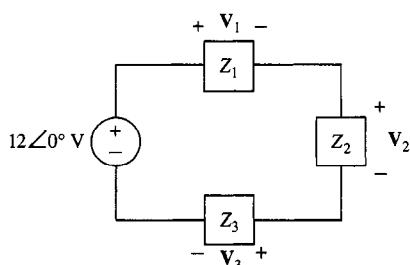
PROBLEMA P9.1

9.2. Obtenga v_1 utilizando la división de voltajes.



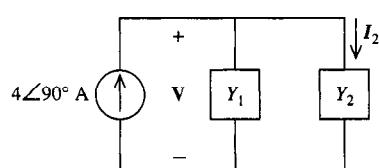
PROBLEMA P9.2

9.3. Especifíquense tres impedancias Z_1, Z_2, Z_3 para que en este circuito $\mathbf{V}_1 = 6\angle 60^\circ$, $\mathbf{V}_2 = 6\angle 0^\circ$ y $\mathbf{V}_3 = 6\angle -60^\circ$ V.



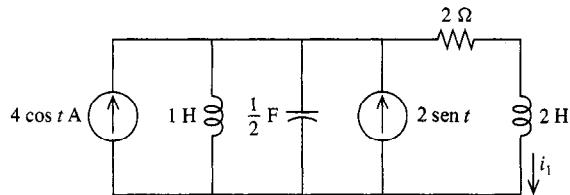
PROBLEMA P9.3

9.4. Obtenga I_2 utilizando el principio de división de corriente (9.4). Compruébese calculando $I_2 = Y_2 V$.



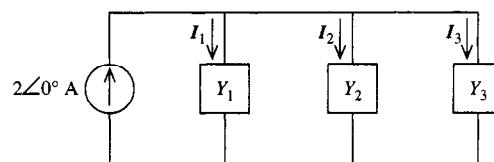
PROBLEMA P9.4

9.5. Obtenga i_1 mediante división de corrientes.



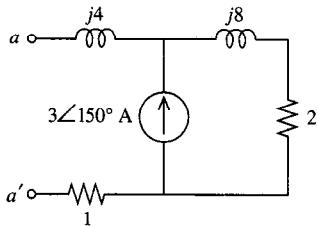
PROBLEMA P9.5

9.6. Especifíquense tres admitancias Y_1, Y_2, Y_3 para que en este circuito $\mathbf{I}_1 = 1\angle 0^\circ$ A, $\mathbf{I}_2 = 1\angle 60^\circ$ A, e $\mathbf{I}_3 = 1\angle -60^\circ$ A.



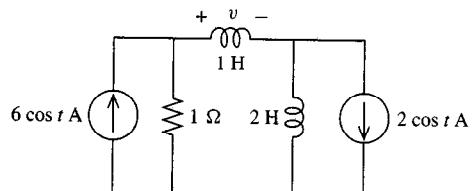
PROBLEMA P9.6

9.7. Obtenga los equivalentes de Thevenin y de Norton para este subcicuito.



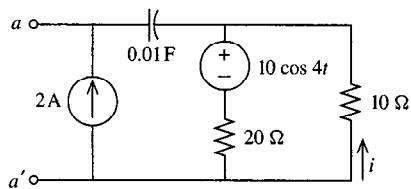
PROBLEMA P9.7

9.11.



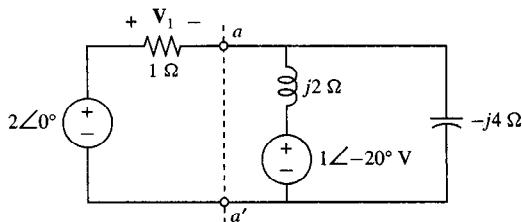
PROBLEMA P9.11

9.8. Obtenga equivalentes de Thevenin y de Norton.



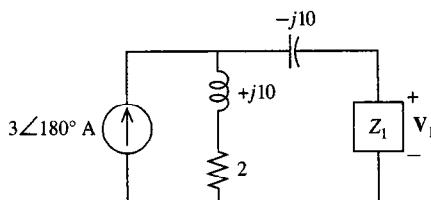
PROBLEMA P9.8

9.9. Obténgase el equivalente de Thevenin a la derecha de la línea punteada; luego utilícese el principio de divisor de voltajes para obtener V_1 .



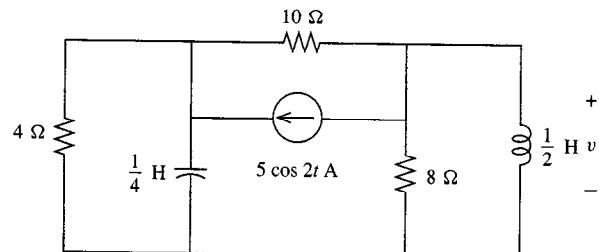
PROBLEMA P9.9

9.10. ¿Para qué Z_1 es $V_1 = 1/90^\circ$ V?



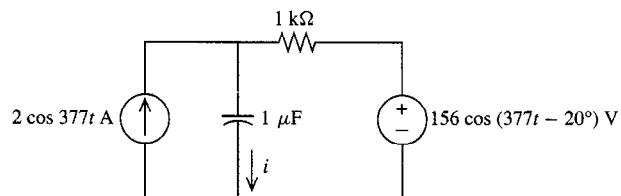
PROBLEMA P9.10

9.12.



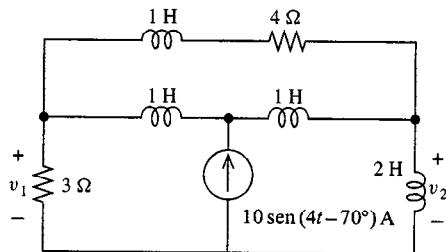
PROBLEMA P9.12

9.13.



PROBLEMA P9.13

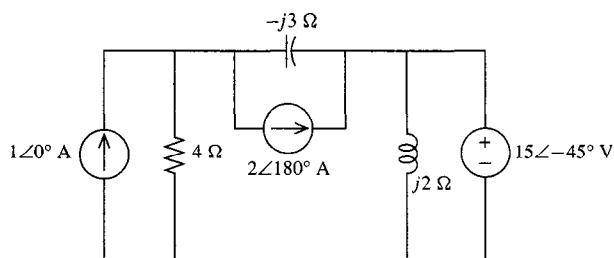
9.14.



PROBLEMA P9.14

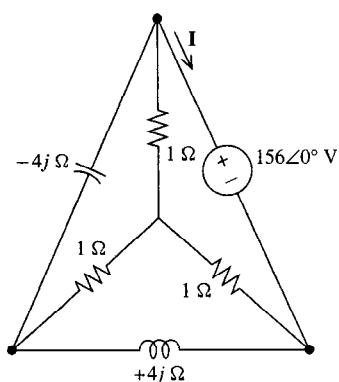
Para los problemas 9.11 a 9.18, resuélvase para las variables indicadas utilizando análisis nodal.

9.15.



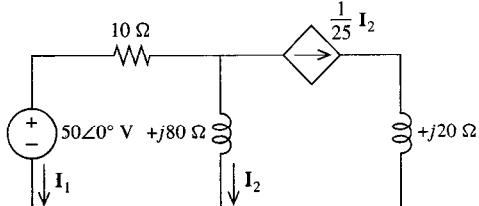
PROBLEMA P9.15

9.16.



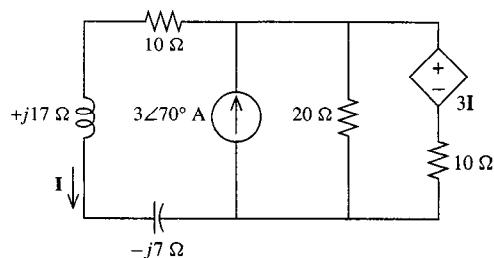
PROBLEMA P9.16

9.17.



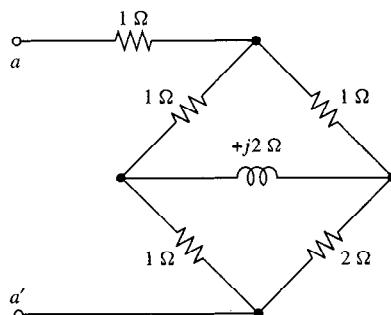
PROBLEMA P9.17

9.18. La fuente controlada tiene transresistencia de $r = 3 \Omega$.



PROBLEMA P9.18

9.19. Obtenga la impedancia con la $a-a'$ utilizando análisis nodal.

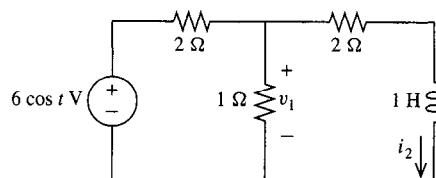


PROBLEMA P9.19

9.20. ¿Qué fuente de voltaje de fasor conectada en $a-a'$ en el problema 9.19 resultará en una corriente de $3/50^\circ \text{ A}$ que pasa hacia la izquierda a través del inductor?

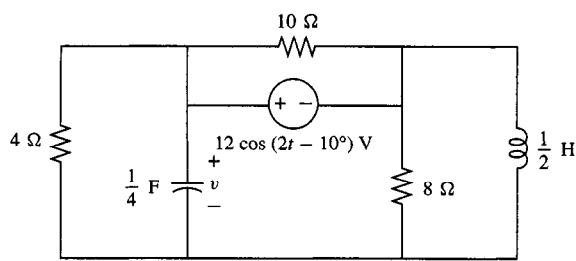
Para los problemas 9.21 y 9.28 resuélvase para las variables indicadas utilizando análisis nodal.

9.21.



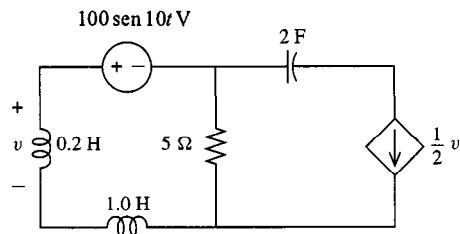
PROBLEMA P9.21

9.22.



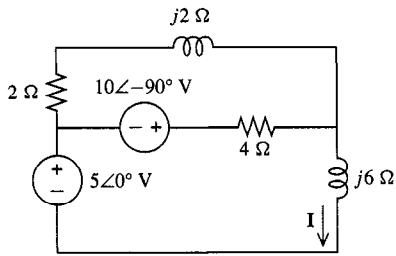
PROBLEMA P9.22

9.26. La fuente controlada tiene una transconductancia $g = (1/2) S$.



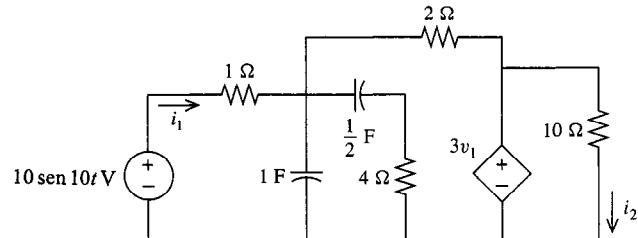
PROBLEMA P9.26

9.23.



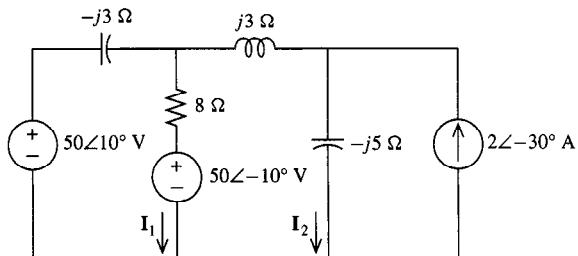
PROBLEMA P9.23

9.27.



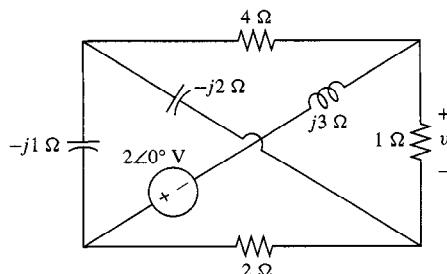
PROBLEMA P9.27

9.24.



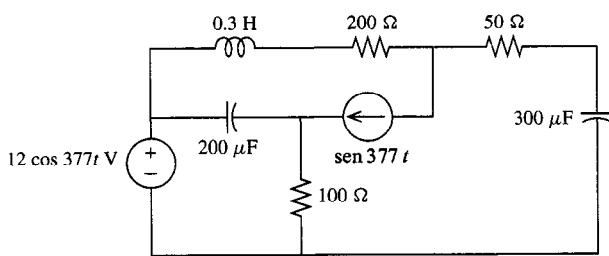
PROBLEMA P9.24

9.28.



PROBLEMA P9.28

9.25.

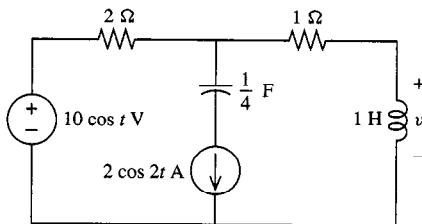


PROBLEMA P9.25

9.29. Resuelva el problema 9.19 utilizando el análisis de malla.

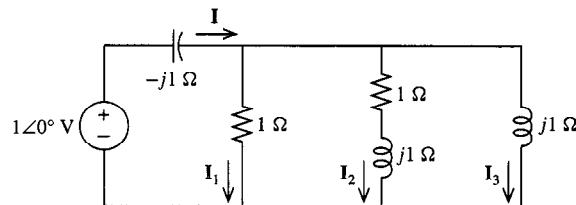
9.30. El análisis de malla está restringido a circuitos planos. Dibuje un circuito que no pueda ser analizado por el método de malla, que contenga el número de nodos mínimo para un circuito no plano.

9.31. Obtenga v .



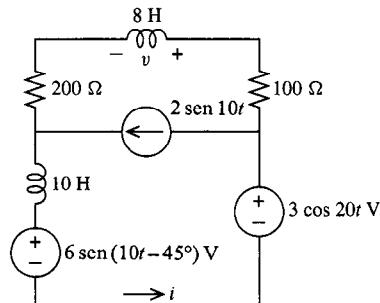
PROBLEMA P9.31

9.35. Dibuje \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 en un diagrama de fasores. Obtenga \mathbf{I} calculando la suma de \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 .



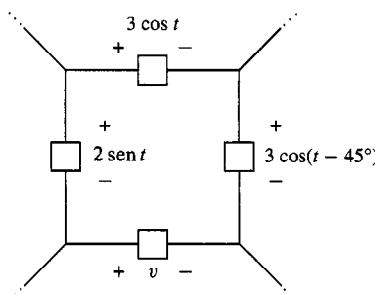
PROBLEMA P9.35

9.32. Obtenga las variables indicadas.



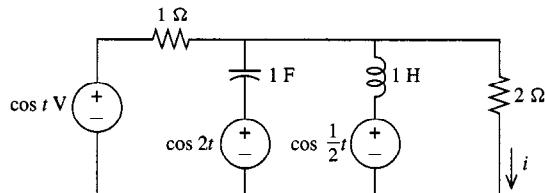
PROBLEMA P9.32

9.36. Dibuje los tres voltajes dados como el diagrama de fasores, y obtenga V , el fasor correspondiente v del diagrama. Obtenga v .



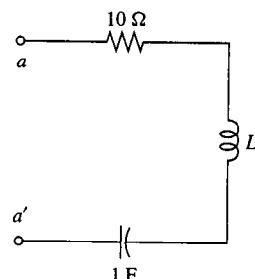
PROBLEMA P9.36

9.33. Obtenga las componentes de i debidas a cada una de las tres fuentes separadas, y el valor general de i .



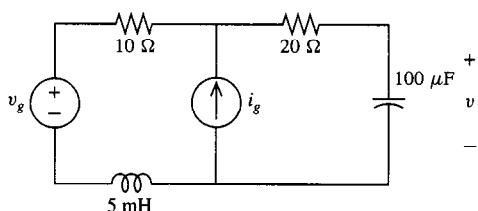
PROBLEMA P9.33

9.37. Dibuje las impedancias de los tres elementos en un diagrama de fasores. ¿Cuánto debe ser L si la impedancia general es $14/28^\circ \Omega$? Suponer $\omega = 10 \text{ rad/s}$.



PROBLEMA P9.37

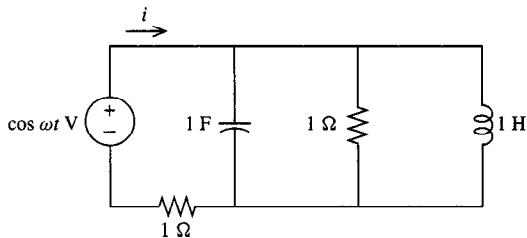
9.34. Las fuentes sinusoidales v_g e i_g operan en $\omega = 1000$ y $\omega = 2000 \text{ rad/A}$, respectivamente. Si $v = 4 \cos 1000t - 2 \sin 2000t$, encuentra v_g e i_g .



PROBLEMA P9.34

9.38. Dibuje el lugar geométrico de la impedancia que aparece en el problema 9.37 en el plano complejo, conforme L varía de 0 a 1 H.

9.39. Obtenga el lugar geométrico de \mathbf{I} , el fasor asociado con i , conforme ω varía de 0 a ∞ . ¿Para qué valores de ω tiene $| \mathbf{I} |$ sus valores máximos? ¿Mínimos?



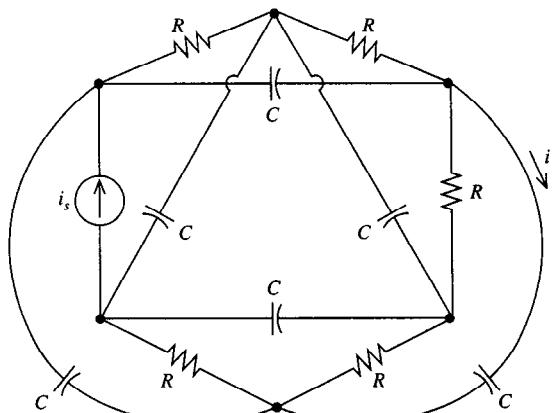
PROBLEMA P9.39

Problemas usando SPICE

9.40. Utilice SPICE para resolver el problema 9.12.

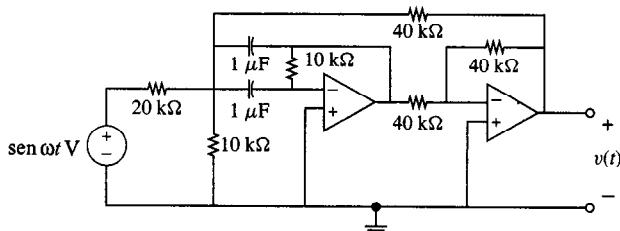
9.41. Utilice SPICE para resolver el problema 9.25.

9.42. Obtenga el fasor de corriente \mathbf{I} en este circuito no plano utilizando SPICE. $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, e $i_s = 4 \cos 377t$.



PROBLEMA P9.42

9.43. Obtenga $v(t)$ para $\omega = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ rad/s}$. Corra SPICE una sola vez, y utilice el voltaje ideal de la fuente de voltaje controlado del modelo amp op de la figura 3.7 con $A = 100,000$.

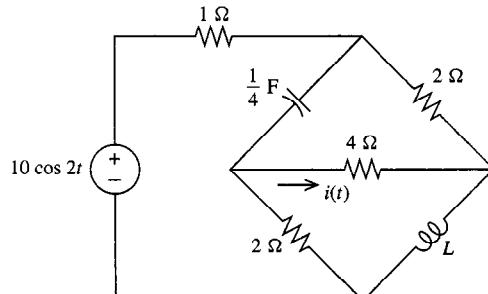


PROBLEMA P9.43

9.44. Resuelva el problema 9.43 como se especificó, pero utilice el modelo op amp mejorado de la figura 3.9 con $A = 100,000$, $R_i = 1 \text{ M}\Omega$, y $R_o = 30 \Omega$. Ingrese el modelo amp op en el archivo de entrada de SPICE como .SUBCKT.

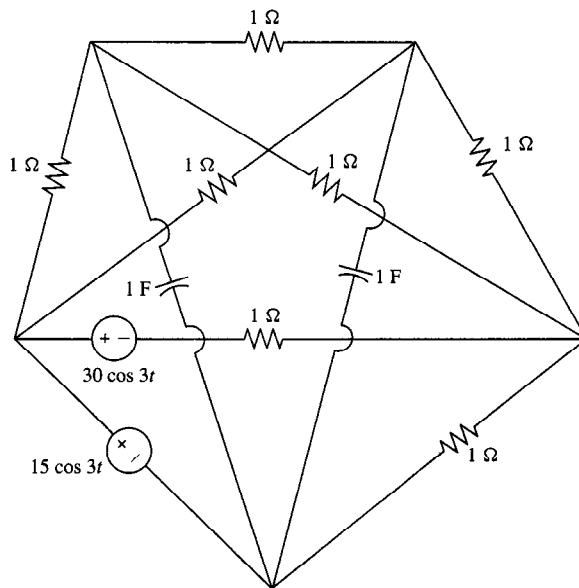
Problemas más complejos

9.45. ¿Para qué L será $i(t) = 0$?



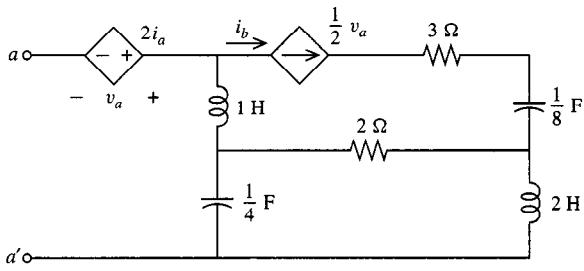
PROBLEMA P9.45

9.46. Obtenga $v(t)$ en estado ac.



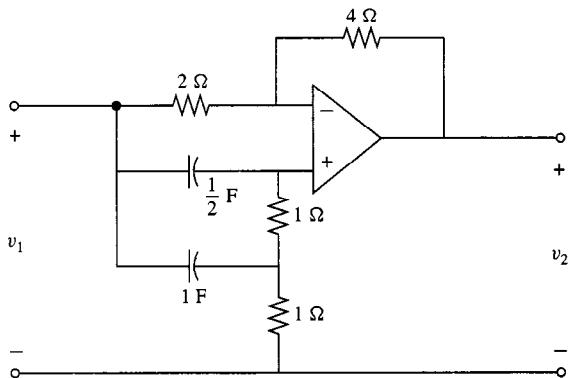
PROBLEMA P9.46

9.47. Obtenga el equivalente de Thevenin para el estado estable ac, especificando $V_{T\bar{Y}}$ y Z_T .



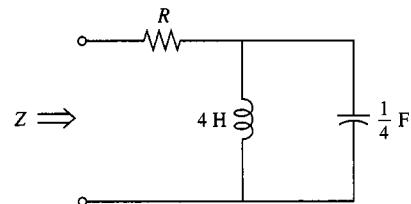
PROBLEMA P9.47

9.48. Obtenga v_2 en estado estable ac si $v_1 = \cos \omega t V$.



PROBLEMA P9.48

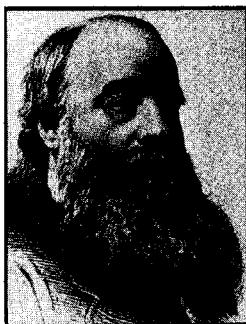
9.49. Dibuje el lugar geométrico de Z en un programa de fasores cuando R varía de 0 a ∞ en $\omega = 2$.



PROBLEMA P9.49

10

Potencia en estado estable de AC



James Prescott Joule
1818-1889

El calentamiento de un conductor depende de su resistencia y del cuadrado de la corriente que pasa a través de él.

James P. Joule

El hombre a quien debemos la conocida expresión i^2R para la potencia disipada en una resistencia, es el físico inglés James Prescott Joule, quien publicó el resultado como ley de Joule en 1841. También participó en el famoso descubrimiento de la conservación de la energía.

Joule nació en Salford, Inglaterra, el segundo de cinco hijos de un cervecer adinerado. Fue autodidacta en electricidad y magnetismo, aprendiéndolos en su casa cuando aún era un muchacho, y obtuvo su educación formal en la cercana Universidad de Manchester. Sus experimentos con calor fueron realizados en su laboratorio casero, y para conservar la precisión de sus mediciones, se vio obligado a desarrollar su propio sistema de unidades. La aportación que lo hizo famoso es haber hecho más que cualquier otra persona para establecer la idea de que el calor es una forma de energía. Durante casi toda su vida Joule fue un científico aficionado aislado, pero al final de su vida su obra fue reconocida mediante doctorados honorarios de las universidades de Dublín y Oxford. La unidad de energía fue llamada *joule* en su honor.

Contenido del capítulo

- **10.1** Potencia promedio
- **10.2** Valores RMS
- **10.3** Potencia compleja
- **10.4** Superposición y potencia
- **10.5** Transferencia máxima de potencia
- **10.6** Conservación de potencia
- **10.7** Potencia reactiva y factor de potencia
- **10.8** SPICE y potencia en estado estable ac
- Resumen
- Problemas



En el presente capítulo consideraremos relaciones de potencia para redes que son excitadas por corrientes y voltajes periódicos. Nos concentraremos principalmente en voltajes y corrientes sinusoidales, puesto que casi toda la potencia eléctrica se genera de esta forma. Como ya sabemos bien, la potencia instantánea es el ritmo al que un elemento absorbe energía, y varía como función del tiempo. La potencia instantánea es una importante magnitud en aplicaciones de ingeniería, porque su valor máximo debe estar limitado para todos los dispositivos físicos. Por esta razón la potencia instantánea máxima o *potencia pico* es una especificación comúnmente utilizada para caracterizar dispositivos eléctricos. Por ejemplo, en un amplificador electrónico, si se excede en la entrada la potencia pico especificada, la señal de salida se distorsiona. Si se excede en mucho este régimen de entrada, el amplificador puede quedar permanentemente dañado.

Una medida más importante de potencia, particularmente para corrientes y voltajes periódicos, es la *potencia promedio*. La potencia promedio es el ritmo promedio al que un elemento absorbe energía, y es independiente del tiempo. Por ejemplo, esta potencia es lo que las compañías de electricidad controlan para determinar las facturas mensuales de electricidad. Las potencias promedio pueden variar de unos cuantos picowatts, en aplicaciones como las comunicaciones por satélite, a megawatts, en aplicaciones como el suministro de electricidad a una gran ciudad.

Nuestra discusión se iniciará con un estudio de la potencia promedio. Luego de presentar la conveniente medición rms (root-mean-square), se definirá la potencia compleja y se discutirán sus usos. La superposición está relacionada con la potencia, y se explorarán las nociones de máxima transferencia de potencia y conservación de potencia. El capítulo finaliza con el factor de potencia, una idea de gran interés práctico para compañías que suministran energía eléctrica, y se hará un comentario sobre el uso de SPICE para cálculos de poder de potencia ac.

10.1

POTENCIA PROMEDIO

En las redes lineales con entradas, que a su vez son funciones periódicas respecto al tiempo, las corrientes y voltajes en estado estable que se producen son periódicas, teniendo períodos idénticos. Considérese una potencia instantánea.

$$p = vi \quad (10.1)$$

donde v e i son periódicas, con un periodo T . Es decir, $v(t+T) = v(t)$, e $i(t+T) = i(t)$. En este caso

$$\begin{aligned} p(t+T) &= v(t+T)i(t+T) \\ &= v(t)i(t) \\ &= p(t) \end{aligned} \quad (10.2)$$

Por consiguiente, la potencia instantánea es también periódica y p se repite cada T segundos.

Sin embargo, el periodo T_p de p (el *tiempo mínimo* en que p se repite) no es necesariamente igual a T , sino que T debe contener un número entero de períodos de T_p . En otras palabras,

$$T = nT_p \quad (10.3)$$

donde n es un entero positivo.

Ejemplo 10.1

Como ejemplo, supongamos que una resistencia R transporta una corriente $i = I_m \cos \omega t$ con un periodo $T = 2\pi/\omega$. Entonces

$$\begin{aligned} p &= Ri^2 \\ &= RI_m^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{RI_m^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) \end{aligned}$$

Evidentemente, $T_p = \pi/\omega$, y por consiguiente $T = 2T_p$. Por tanto, para este caso, $n = 2$ en (10.3). Esto está ilustrado por la gráfica de p e i que aparece en la figura 10.1.

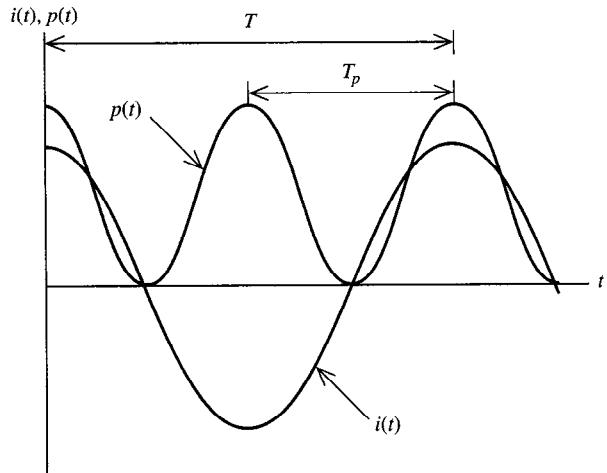


FIGURA 10.1 Potencia instantánea y ondas de corriente (caso sinusoidal).

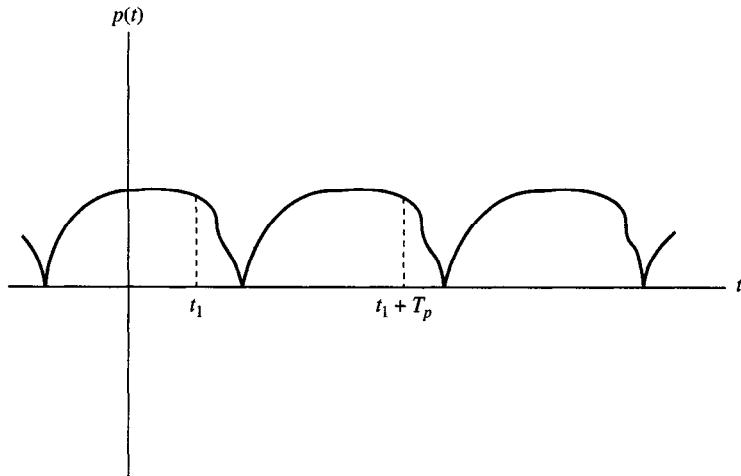


FIGURA 10.2 Potencia instantánea periódica (caso no sinusoidal).

Si ahora tomamos $i = I_m(1 + \cos \omega t)$, entonces i sigue siendo periódica con un periodo T .

$$p = RI_m^2(1 + \cos \omega t)^2$$

En este caso, $T_p = 2\pi/\omega$, y $n = 1$ en (10.3).

Matemáticamente, el valor promedio de una función periódica está definida como la integral del tiempo de la función sobre un periodo completo, dividida entre la longitud del periodo. De este modo, la potencia promedio P para una potencia instantánea periódica p está dada por

$$P = \frac{1}{T_p} \int_{t_1}^{t_1+T_p} p \, dt \quad (10.4)$$

donde t_1 es arbitraria. Si integramos sobre un número entero de períodos, como por ejemplo mT_p (donde m es un entero positivo), entonces el área total es simplemente m veces el valor de la integral en (10.4). De este modo, podemos escribir

$$P = \frac{1}{mT_p} \int_{t_1}^{t_1+mT_p} p \, dt \quad (10.5)$$

Si seleccionamos m de forma que $T = mT_p$ (el periodo de v o de i), entonces,

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p \, dt \quad (10.6)$$

De este modo, podemos obtener la potencia promedio integrando sobre el periodo de p , como en (10.4), o sobre el periodo de v o i .

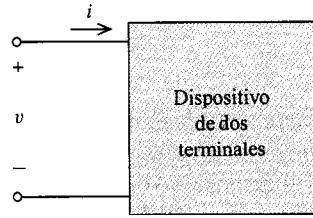


FIGURA 10.3 Dispositivo general de dos terminales.

Considérese el dispositivo generalizado de dos terminales de la figura 10.3, al que suponemos en estado estable ac. Si

$$v = V_m \cos (\omega t + \phi_v) \quad (10.7a)$$

entonces tenemos

$$i = I_m \cos (\omega t + \phi_i) \quad (10.7b)$$

para un I_m y ϕ_i , puesto que en estado estable ac, todas las corrientes y voltajes tienen la misma frecuencia.

La potencia promedio transmitida al dispositivo, tomando $t_1 = 0$ para nuestra conveniencia en (10.6), es

$$P = \frac{\omega V_m I_m}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) dt$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) \quad (10.8)$$

esto puede ser reescrito como

$$P = \frac{\omega V_m I_m}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ \frac{1}{2} \cos (2\omega t + \phi_v + \phi_i) + \frac{1}{2} \cos (\phi_v - \phi_i) \right\} dt \quad (10.9)$$

Puesto que la integral abarca dos períodos del primer término, y el valor promedio de todo sinusoidal (con $\omega \neq 0$) es cero, la integral del primer término es cero. El segundo término es constante y tenemos

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos (\phi_v - \phi_i) \quad (10.10)$$

Así, la potencia promedio absorbida por un dispositivo de dos terminales está determinada por las amplitudes V_m e I_m y el ángulo θ con el que el voltaje v se adelanta a la corriente i .

En términos de los fasores de v e i ,

$$\mathbf{V} = V_m / \phi_v = |\mathbf{V}| / \phi_v$$

$$\mathbf{I} = I_m / \phi_i = |\mathbf{I}| / \phi_i$$

y tenemos, de (10.10),

$$P = \frac{1}{2} |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \cos (\phi_v - \phi_i) \quad (10.11)$$

La potencia absorbida por un subcicuito de dos terminales es la mitad del producto de la magnitud de sus fasores de corriente y voltaje, por el coseno del ángulo entre estos.

Si el dispositivo de dos terminales es una resistencia R , entonces $\phi_v - \phi_i = 0$, y $V_m = RI_m$, de forma que (10.10) se convierte en

$$P_R = \frac{1}{2} R I_m^2$$

Vale la pena hacer notar en este punto que si $i = I_{dc}$, una corriente constante (dc), entonces $\omega = \phi_v = \phi_i = 0$, e $I_m = I_{dc}$ en (10.7b). La potencia instantánea $vi = (RI_{dc})(I_{dc})$ es constante en este caso en especial, de forma que es igual a su promedio, o

$$P_R = RI_{dc}^2$$

Ejemplo 10.2

Determinemos la potencia promedio absorbida por varias partes del circuito en estado estable ac que aparece en la figura 10.4(a), cuyo circuito fasorial está dibujado en la figura 10.4(b). Combinando las impedancias,

$$\mathbf{Z} = 2 + (j2)(1 - j2) = 6 + j2 \Omega$$

de forma que

$$\mathbf{I} = \frac{4\angle 0}{6 + j2} = 0.632\angle -18.4^\circ \text{ A}$$

Por división de corrientes

$$\mathbf{I}_1 = \frac{j2}{1}\mathbf{I} = 1.26\angle 71.6^\circ \text{ A}$$

de forma que $\mathbf{V}_R = 1.26\angle 71.6^\circ \text{ V}$ y

$$\mathbf{V}_C = (-j2)\mathbf{I}_1 = 2.52\angle -18.4^\circ \text{ V}$$

En la figura 10.5 se muestra el diagrama fasorial para estas corrientes y voltajes.

Primero determinaremos la potencia promedio absorbida por la resistencia de 1Ω . La magnitud de su voltaje es $|V_R| = 1.26 \text{ V}$, su corriente

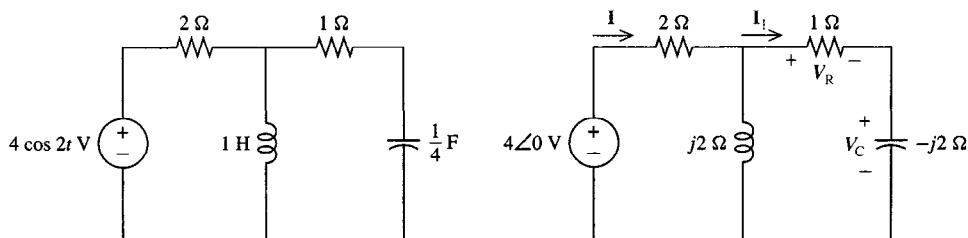


FIGURA 10.4 (a) Circuito para el ejemplo 10.2; (b) circuito fasorial.

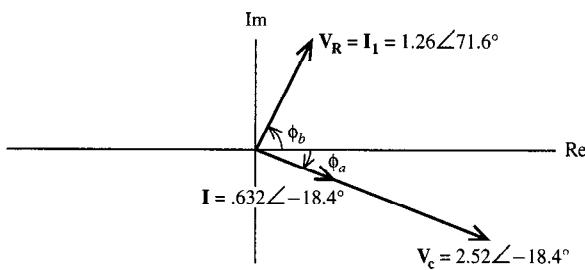


FIGURA 10.5 Diagrama fasorial para voltajes y corrientes seleccionados del circuito de la figura 10.4.

es $|I_1| = 1.26 \text{ A}$, y el ángulo entre estos fasores es 0; esto significa que están en fase. Por consiguiente, por (10.11),

$$P_R = \frac{1}{2} |V_R| |I_1| \cos(\angle V_R - \angle I_1) = \frac{1}{2} (1.26)^2 = 0.80 \text{ W}$$

Para el capacitor tenemos

$$P_C = \frac{1}{2} |V_C| |I_1| \cos \theta_b = 0$$

porque el ángulo entre el voltaje y la corriente es $\theta_b = \angle V_c - \angle I_1 = -90^\circ$. La potencia promedio neta absorbida por todas las impedancias, está determinada por el voltaje $4\angle 0$ a través del subcírculo de impedancia y la corriente I que pasa por éste y es

$$P_Z = \frac{1}{2} (4)(0.632) \cos \theta_a = 1.26 \cos(-18.4^\circ) = 1.20 \text{ W}$$

Finalmente, calculemos la potencia suministrada por la fuente. Nótese en la figura 10.3 que la corriente y voltaje de las terminales utilizadas para calcular la potencia absorbida por el subcírculo utilizando (10.11), debe satisfacer la convención de signos pasivos. De no ser así, entonces (10.11) mide el *negativo* de la potencia absorbida, es decir, la potencia *transmitida por* el subcírculo al resto del circuito. Considerando la fuente de voltaje como un sustituto, el voltaje de la terminal $4\angle 0 \text{ V}$ y la corriente I violan la convención de signo pasivo, puesto que la flecha de referencia de dirección de la corriente señala desde el extremo positivo de la dirección de referencia de voltaje. De este modo, los 1.20 W absorbidos por la impedancia son también la potencia transmitida por la fuente. Ciertamente, la potencia total transmitida a todos los elementos que absorben potencia en un circuito, está balanceada por la potencia suministrada, un resultado de conservación intuitivamente razonable, que será discutido con más detalle en la sección 10.6.

Ejemplo 10.3

Obtengamos el poder suministrado por las dos fuentes en la figura 10.6. Combinando las dos impedancias en paralelo,

$$Z = \frac{(1)(-j1)}{1-j1} = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \Omega$$

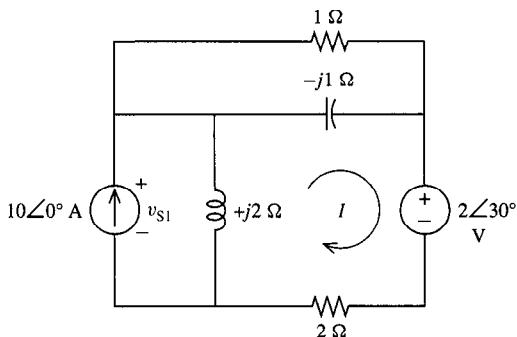


FIGURA 10.6 Circuito para el ejemplo 10.3.

El circuito resultante tiene dos redes y una fuente de corriente. De este modo, no se necesita de una ecuación de malla. Escribiendo la ecuación de malla para \mathbf{I} ,

$$\left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} + 2 + j2 \right) \mathbf{I} - j2(10\angle 0) = 2\angle 30^\circ$$

$$\mathbf{I} = 7.23\angle 54.3^\circ \text{ A}$$

El voltaje \mathbf{V}_{S1} es idéntico al voltaje a través del inductor:

$$\mathbf{V}_{S1} = j2(10\angle 0 - \mathbf{I}) = 16.5\angle 44.6^\circ \text{ V}$$

El voltaje \mathbf{V}_{S1} y la función de fuente de corriente $10\angle 0$ violan en conjunto la convención de signo pasivo en relación con la fuente de corriente. Por consiguiente, la potencia suministrada por esta fuente, en lugar de ser absorbida, está dada por (10.11):

$$P_{s1} = \frac{1}{2} |\mathbf{V}_{S1}| |10\angle 0| \cos 44.6^\circ = \frac{1}{2} (16.5)(10)(0.712) = 58.7 \text{ W}$$

Puesto que \mathbf{I} y la función de fuente de voltaje $2\angle 30^\circ$ satisfacen la convención de signo pasivo, la potencia absorbida por la fuente de voltaje es

$$P_{s2} = \frac{1}{2} |\mathbf{I}| |2\angle 30^\circ| \cos(30^\circ - 54.3^\circ) = \frac{1}{2} (7.23)(2)(0.911) = 6.59 \text{ W}$$

De este modo, la fuente de corriente suministra potencia neta a este circuito, en tanto que la fuente de voltaje absorbe parte de esta potencia. Aparentemente, el resto es absorbido por los demás elementos.

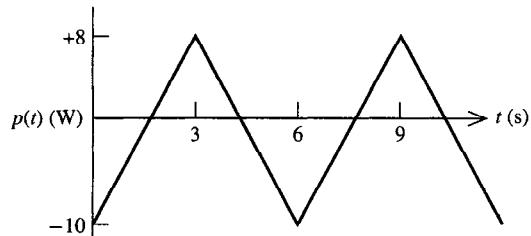
Puesto que los fasores de corriente y voltaje están siempre en fase en el caso de las resistencias, por (10.11) las resistencias siempre absorben potencia neta. Para capacitores e inductores, el ángulo de fase positivo o negativo de 90° de sus impedancias impulsa la corriente y el voltaje 90° fuera de fase, de forma que los elementos de almacenaje no absorben ni suministran potencia promedio en estado estable en un circuito. No es ninguna sorpresa que ninguno de los elementos RLC suministre potencia promedio, puesto que sabemos que son elementos pasivos. Como los capacitores e inductores tampoco absorben potencia neta, son designados como elementos *sin pérdida*. Todo elemento o subcírculo que absorbe potencia promedio es designado *con pérdida*. Claramente, todo subcírculo LC (aquel que contiene únicamente inductores y capacitores) no tiene pérdida, y todo subcírculo RLC en donde hay flujo de corriente hacia por lo menos una resistencia, tiene pérdida.

Como vimos en el ejemplo anterior, no hay una regla uniforme que podamos aplicar a las fuentes en lo que se refiere a la transmisión o absorción de potencia. Las fuentes pueden hacer ambas cosas, dependiendo de su contexto en el circuito. Por ejemplo, la misma batería de automóvil suministrará potencia al subcírculo de arranque del motor, o absorberá potencia del subcírculo del alternador, dependiendo de las posiciones del interruptor en el resto del circuito.

EJERCICIOS

10.1.1. Determinese el periodo T_p de la potencia instantánea $p(t)$ y la potencia promedio P .

Respuesta 6 S, -6 W



EJERCICIO 10.1.1

10.1.2. Para un capacitor de C farads que transmite una corriente $i = I_m \cos \omega t$, verifíquese a partir de (10.6) que la potencia promedio es cero. Repítase esto para un inductor de L henrys.

10.1.3. Obténgase la potencia promedio suministrada a una resistencia de 10Ω que transmite una corriente de:

- (a) $i = 5 |\sin 10t| \text{ mA}$
- (b) $i = 10 \sin 10t \text{ mA}, 0 \leq t < \pi/10 \text{ s}$
 $= 0, \pi/10 \leq t < \pi/5 \text{ s}; T = \pi/5 \text{ s}$
- (c) $i = 5 \text{ mA}, 0 \leq t < 10 \text{ ms}$
 $= -5 \text{ mA}, 10 \leq t < 20 \text{ ms}; T = 20 \text{ ms}$
- (d) $i = 2t, 0 \leq t < 2 \text{ s}; T = 2 \text{ s}$

Respuesta (a) $125 \mu\text{W}$; (b) 0.25 mW ; (c) 0.25 mW ; (d) $\frac{160}{3} \text{ W}$

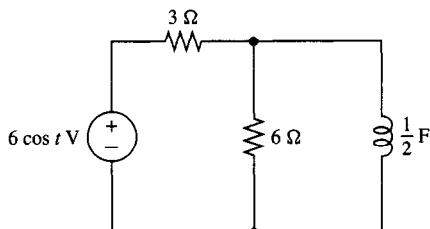
10.1.4. Obtenga la potencia promedio absorbida por el capacitor, las dos resistencias y la fuente.

Respuesta 0; $10/3, 2/3, -4 \text{ W}$

10.1.5. Si $f_1(t)$ es periódica en un periodo T_1 y $f_2(t)$ es periódica en un periodo T_2 , demuéstrese que $f_1(t) + f_2(t)$ es periódica con un periodo T si existen enteros positivos primos m y n tales que

$$T = mT_1 = nT_2$$

Extienda este resultado a la función $(1 + \cos \omega t)^2$, considerada en esta sección, para obtener su periodo, $T = 2\pi/\omega$.



EJERCICIO 10.1.4

10.2

VALORES RMS

En la sección anterior vimos que las corrientes y voltajes periódicos transmiten una potencia promedio a las cargas resitivas. La cantidad de potencia suministrada depende de las características de la forma de onda en particular. Por consiguiente, nos sería sumamente

útil un método para comparar la potencia transmitida por distintas ondas. Uno de estos métodos es el uso de valores *rms* o *efectivos* para corrientes o voltajes periódicos.

El valor *rms* de una corriente (voltaje) periódica, es una constante igual a la corriente (voltaje) dc que sería suministrada por la misma potencia promedio a una resistencia R . De este modo, si I_{rms} es el valor de i podemos escribir

$$P = RI_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2 dt$$

para la que la corriente rms es

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (10.12a)$$

De forma similar, el voltaje rms es

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} \quad (10.12b)$$

El término rms es una abreviatura de *root-mean-square* (en español, “raíz-promedio-cuadrado”). Examinando (10.12a), vemos que ciertamente estamos obteniendo la *raíz cuadrada* del valor promedio, o *medio*, del *cuadrado* de la corriente.

A partir de nuestra definición, el valor rms de una constante (dc) es simplemente la constante misma. El caso dc es el caso especial ($\omega = 0$) de la corriente o voltaje sinusoidal.

Supongamos que ahora consideramos una corriente sinusoidal $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$. Luego, de (10.12a) y (10.8), obtenemos

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{\omega I_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t + \phi) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (10.13a)$$

De este modo, una corriente sinusoidal con una amplitud I_m transmite la misma potencia promedio a una resistencia R , como lo hace una corriente dc igual a $I_m/\sqrt{2}$. También podemos ver que la corriente rms es independiente de la frecuencia ω o de la fase ϕ de la corriente i . De forma similar, en el caso de un voltaje sinusoidal, obtenemos

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (10.13b)$$

Sustituyendo estos valores (10.10), tenemos que para cualquier subcicuito de dos terminales,

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos (\phi_v - \phi_i) \quad (10.14)$$

donde P es la potencia promedio absorbida si se satisface la convención de signo pasivo, y la potencia suministrada por el subcicuito, si no ocurre así.

Con frecuencia se utilizan los valores de RMS en los campos de generación y distribución de energía. Por ejemplo, la potencia ac nominal 115-V, que se utiliza comúnmente para aplicaciones domésticas, es un valor rms. De este modo, la potencia suministrada a casi todos los hogares es proporcionada por un voltaje de 60-Hz, con un valor máximo de $115\sqrt{2} \approx 163$ V. Por otra parte, los valores máximos son utilizados más comúnmente en electrónica y comunicaciones.

Hasta ahora, hemos definido los valores rms de las corrientes y voltajes en el dominio del tiempo. A continuación, sean \mathbf{V} e \mathbf{I} fasores, y definamos sus *fasores rms* asociados como:

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{V} \quad (10.15a)$$

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{I} \quad (10.15b)$$

De este modo, los fasores RMS tienen el mismo ángulo que los fasores comunes, pero sus magnitudes están reducidas (o normalizadas) por el factor $1/\sqrt{2}$. Así, en tanto que la magnitud de un fasor convencional o de amplitud es igual a la amplitud del senoide asociado, la magnitud de un fasor rms es igual al valor rms del senoide asociado [por (10.12a) y (10.13a)]. Puede verse un uso inmediato del fasor rms sustituyendo (10.13) en (10.10), lo que revela que

$$P = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| |\mathbf{I}_{\text{rms}}| \cos (\phi_v - \phi_i) \quad (10.16)$$

La potencia promedio puede calcularse como el producto de magnitudes fasoriales rms por el coseno del ángulo entre los fasores de corriente y voltaje, sin el factor $\frac{1}{2}$ que es tan necesario para los fasores con una amplitud como la descrita en (10.10).

Nótese que al dividir todos los fasores por $\sqrt{2}$, es fácil demostrar que los fasores rms satisfacen las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff y también que

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = Z \mathbf{I}_{\text{rms}} \quad (10.17)$$

bajo cualquier impedancia. De este modo, al designar todas las fuentes independientes por sus fasores y elementos rms mediante sus impedancias acostumbradas, tenemos un *circuito fasorial rms* en donde los fasores de corriente y voltaje rms pueden calcularse exactamente como fasores o de amplitud de corriente y voltaje en circuitos fasoriales de amplitud.

Ejemplo 10.4

Obtengamos la potencia suministrada por el generador ac de 60-Hz a la impedancia de carga en el circuito de la figura 10.7(a). El fasor de fuente rms es $(325/\sqrt{2})/0^\circ = 230/0^\circ$ V rms, y la corriente de fasor rms aparece en la figura 10.7(b). La impedancia de carga equivalente es calculada de la forma acostumbrada:

$$Z_L = \frac{1}{j\omega c} \parallel 30 = \frac{(-j53)(30)}{30 - j53} = 22.7 - j12.9 \Omega$$

En un diagrama fasorial rms, todos los fasores son rms, y la corriente de malla es

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = 230/0^\circ / (24.7 - j11.9) = 8.39/25.7^\circ \text{ A rms}$$

De forma que

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = Z_L \mathbf{I}_{\text{rms}} = (22.7 - j12.9) (8.39/25.7^\circ) = 219/-3.91^\circ \text{ V rms}$$

Luego, por (10.16), la potencia promedio *absorbida* por la impedancia de carga Z_L es

$$P = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| |\mathbf{I}_{\text{rms}}| \cos (\phi_v - \phi_i) = (219) (8.39) \cos (-3.91^\circ - 25.7^\circ)$$

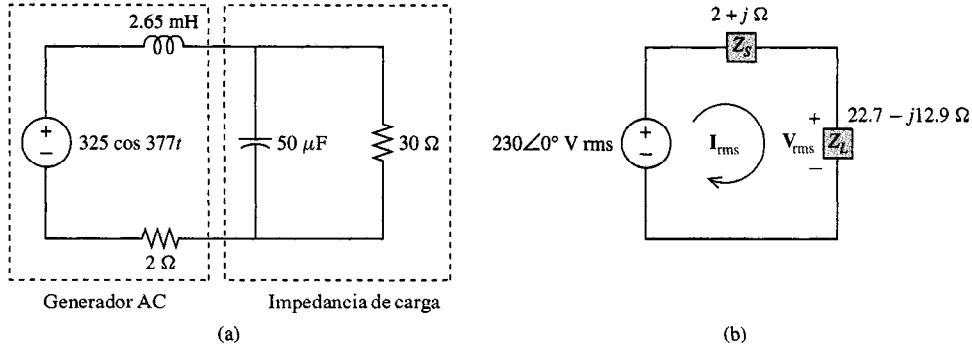


FIGURA 10.7 (a) Circuito para el ejemplo 10.4; (b) circuito fasorial.

o $P = 1598 \text{ W}$. Esta es también la potencia promedio transmitida por el generador ac.

EJERCICIOS

10.2.1. Obténgase el valor rms de una corriente periódica, en la que el periodo está definido por:

- (a) $i = I, \quad 0 \leq t < 2 \text{ s}$
 $= -I, \quad 2 \leq t < 4 \text{ s}$
- (b) $i = 2t \quad 0 \leq t < T$
- (c) $i = I_m \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 \leq t \leq \pi/\omega$
 $= 0 \quad \pi/\omega \leq t \leq 2\pi/\omega \quad (T = 2\pi/\omega).$

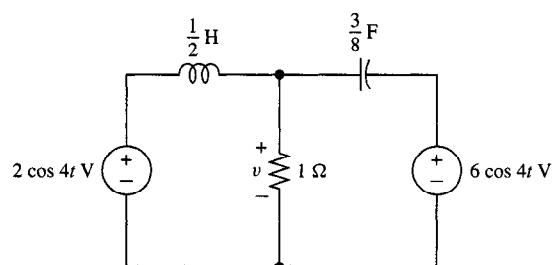
Respuesta (a) I ; (b) $2T/\sqrt{3}$; (c) $I_m/2$

10.2.2. Obténganse los valores rms de (a) $i = 10 \operatorname{sen} \omega t + 20 \cos(\omega t + 30^\circ)$, (b) $i = 8 \operatorname{sen} \omega t + 6 \cos(2\omega t + 10^\circ)$, y (c) $i = I(1 + \cos 377t)$.

Respuesta (a) 12.25 ; (b) 7.07 ; (c) $I\sqrt{\frac{3}{2}}$

10.2.3. Obtenga V_{rms} .

Respuesta 4 V



EJERCICIO 10.2.3

Hemos visto que el uso de fasores implica grandes beneficios para el estudio de circuitos en estado estable ac. Utilizando números complejos para representar corrientes y voltajes reales en el dominio del tiempo, nos hemos evitado el uso frecuente de estas identidades y de la trigonometría necesaria para combinar sinusoidales y, además, reemplazamos las operaciones de cálculo de la diferenciación y de la integración por las operaciones aritméticas de multiplicación y división en el plano complejo, que son mucho más sencillas.

En nuestro intento para extender el análisis en estado estable ac para incluir cálculo de potencia, reaparecen las complicaciones de la trigonometría y el cálculo, por ejemplo en (10.8) y (10.9). Para extender todos los beneficios del análisis de fasores al estudio de potencia en los circuitos en estado estable ac, volveremos a definir una nueva magnitud compleja, a la que designaremos potencia compleja. Similar a la forma concisa en la que los fasores representan sinusoides, la potencia compleja abarcará dos cantidades esenciales relacionadas con la potencia en una sola representación compacta y fácilmente manipulable.

Dado un subcircuito de dos terminales con voltaje rms y fasores de corriente \mathbf{V}_{rms} e \mathbf{I}_{rms} , donde

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| \angle \phi_v$$

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = |\mathbf{I}_{\text{rms}}| \angle \phi_i$$

definimos *potencia compleja* en el subcircuito como

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^* \quad (10.18)$$

donde $\mathbf{I}_{\text{rms}}^*$ es el conjugado complejo del fasor de corriente rms. Explorando esta definición, la magnitud del número complejo \mathbf{S} está dada por

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| |\mathbf{I}_{\text{rms}}^*| = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| |\mathbf{I}_{\text{rms}}| \quad (10.19a)$$

y su ángulo es

$$\angle \mathbf{S} = \angle \mathbf{V}_{\text{rms}} + \angle (\mathbf{I}_{\text{rms}}^*) \quad (10.19b)$$

Puesto que el ángulo del conjugado de cualquier número complejo es el negativo del ángulo del número en sí,

$$\angle \mathbf{S} = \angle \mathbf{V}_{\text{rms}} - \angle \mathbf{I}_{\text{rms}} = \phi_v - \phi_i$$

Volviendo ahora a la forma rectangular de \mathbf{S} , su parte real es $\text{Re}\{\mathbf{S}\} = |\mathbf{S}| \cos \angle \mathbf{S}$, que, por (10.19), es

$$\text{Re}\{\mathbf{S}\} = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| |\mathbf{I}_{\text{rms}}| \cos(\phi_v - \phi_i) \quad (10.20)$$

Comparando esto último con (10.6), tenemos una importante relación con nuestros resultados anteriores. *La parte real de la potencia compleja es la potencia promedio*,

$$\text{Re}\{\mathbf{S}\} = P \quad (10.21)$$

En consecuencia, tenemos otra forma para calcular la potencia promedio: calcular la potencia compleja \mathbf{S} ; luego tomar la parte real para obtener P .

Para evitar errores con signos, se supondrá que los fasores rms de corriente y voltaje utilizados para definir la potencia compleja en un subcircuito satisfacen la convención de

signos pasivos. En este caso, la parte real de S se interpreta como la potencia *absorbida* por el subcircuito. De este modo, si $Re\{S\}$ es positiva, el subcircuito absorbe potencia promedio, y, si es negativo, suministra potencia promedio al resto del circuito. Ocasionalmente, y donde su significado no se preste a confusiones, utilizaremos fasores de voltaje y corriente en (10.18), que en conjunto violan la convención de signos pasivos, y en cuyo caso la parte real deberá interpretarse como la potencia transmitida por el subcircuito al resto del circuito.

Ejemplo 10.5

En el ejemplo 10.3 calculamos la potencia promedio para las dos fuentes en el circuito fasorial convencional (no-rms) que se muestra en la figura 10.6. El circuito fasorial rms correspondiente a este problema aparece en la figura 10.8. Nótese que la única diferencia es que los fasores de fuente fueron divididos por un factor de $\sqrt{2}$. Por proporcionalidad, podemos obtener los fasores deseados en el circuito rms multiplicando los resultados del ejemplo anterior por el mismo factor, de forma que de los resultados del ejemplo anterior obtenemos

$$I_{rms} = \frac{7.23}{\sqrt{2}} \angle 54.3^\circ = 5.11 \angle 54.3^\circ \text{ A rms}$$

$$V_{S1 \text{ rms}} = \frac{16.5}{\sqrt{2}} \angle 44.6^\circ = 11.7 \angle 44.6^\circ \text{ V rms}$$

La potencia compleja en la fuente de voltaje es

$$S_{S2} = (\sqrt{2} \angle 30^\circ)(5.11 \angle 54.3^\circ)^* = 7.23 \angle -24.3^\circ$$

y la potencia compleja en la fuente de corriente es, luego de invertir el signo de la corriente para cumplir la convención de signos pasivos

$$S_{S1} = V_{S1 \text{ rms}}(5\sqrt{2} \angle 180^\circ)^* = (11.7 \angle 44.6^\circ)(7.07 \angle 180^\circ)^*$$

$$= (11.7 \angle 44.6^\circ)(7.07 \angle -180^\circ)$$

$$= 82.7 \angle -135^\circ$$

Nótese que al invertir el signo de un número complejo, se suma o resta 180° a su ángulo en el plano complejo, en tanto que tomar los conjuga-

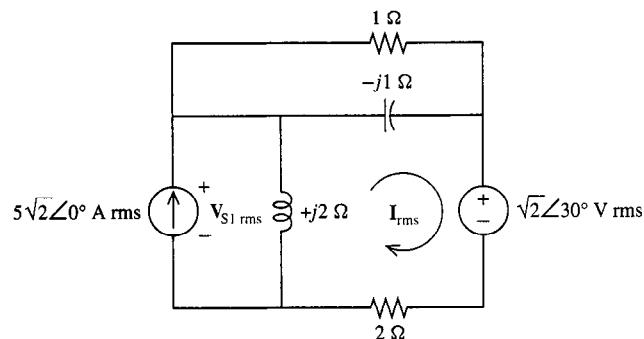


FIGURA 10.8 Circuito fasorial rms.

dos invierte el signo de este ángulo. En el caso presente, realizamos ambas operaciones.

La potencia promedio absorbida por las fuentes es entonces

$$P_{S2} = \operatorname{Re}\{S_{S2}\} = 7.23 \cos(-24.3^\circ) = 6.59 \text{ W}$$

$$P_{S1} = \operatorname{Re}\{S_{S1}\} = 82.7 \cos(-135^\circ) = -58.7 \text{ W}$$

En otras palabras, la fuente de voltaje absorbe 6.59 W de potencia promedio, en tanto que la fuente de corriente suministra 58.7 W al resto del circuito. Esto concuerda con los resultados del ejemplo anterior.

La definición de la potencia compleja permite que se deriven fácilmente expresiones útiles para la potencia absorbida por las impedancias. Dada una impedancia única o subcicuito de dos terminales que contenga únicamente impedancias, utilizando los fasores rms de terminales \mathbf{V}_{rms} e \mathbf{I}_{rms} , que satisfacen la convención de signos pasivos,

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = Z \mathbf{I}_{\text{rms}} \quad (10.22)$$

y la potencia que entra al subcicuito es

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^* = Z \mathbf{I}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^*$$

Recordando que el producto de un número complejo y su conjugado complejo es el número real igual al cuadrado de su magnitud,

$$\mathbf{S} = Z |\mathbf{I}_{\text{rms}}|^2 \quad (10.23)$$

Una implicación de esta útil fórmula es que el ángulo de \mathbf{S} para una impedancia es igual al ángulo de la impedancia en sí. Puesto que $\operatorname{Re}\{\mathbf{S}\} = P$, otra implicación es que, al tomar las partes reales,

$$P = \operatorname{Re}\{Z\} |\mathbf{I}_{\text{rms}}|^2 \quad (10.24a)$$

o, sustituyendo la ley de Ohm generalizada (10.22A),

$$P = \frac{\operatorname{Re}\{Z\}}{|Z|^2} |\mathbf{V}_{\text{rms}}|^2 \quad (10.24b)$$

Nótese que si la impedancia tiene un ángulo de más o menos 90° , $P = 0$. Este es el caso sin pérdida que se discutió anteriormente. Si la parte real de Z es positiva, la impedancia absorbe potencia neta y tiene pérdida. Combinando estos casos, las impedancias con ángulos dentro del rango de menos a más de 90° corresponden a elementos pasivos, en tanto que aquellos cuyos ángulos están fuera de este rango, deben ser elementos activos. Toda interconexión de elementos pasivos es pasiva; de este modo, esperamos que los ángulos de las impedancias construidas de los elementos pasivos sea de magnitud de 90° o menos.

En términos de la admitancia, si el subcicuito satisface

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = \mathbf{Y} \mathbf{V}_{\text{rms}}$$

entonces, por la definición de la potencia compleja,

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^* = \mathbf{Y}^* \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{V}_{\text{rms}}^* = \mathbf{Y}^* |\mathbf{V}_{\text{rms}}|^2 \quad (10.25)$$

y

$$P = \operatorname{Re}\{\mathbf{Y}^*\} |\mathbf{V}_{\text{rms}}|^2 = \operatorname{Re}\{\mathbf{Y}\} |\mathbf{V}_{\text{rms}}|^2 \quad (10.26a)$$

donde lo último es implicado por el hecho de que al tomar complejos conjugados, no cambia la parte real de un número complejo. Nuevamente utilizando la ley de Ohm generalizada, (10.26a) puede expresarse como

$$P = \frac{\operatorname{Re}\{Y\}}{|Y|^2} |I_{\text{rms}}|^2 \quad (10.26b)$$

Ejemplo 10.6

Para determinar la potencia en la carga de la figura 10.9(a), utilizamos el circuito fasorial rms que se mostró, donde

$$Z_1 = \frac{(3)(-j2)}{3 - j2} = 0.923 - j1.38 \Omega$$

y

$$Z_L = 2 + j1 \Omega$$

Por divisor de voltajes:

$$\mathbf{V}_{L \text{ rms}} = Z_L \frac{50/\sqrt{2}}{Z_L + Z_1} = \frac{35.4(2 + j1)}{2.92 - j0.38}$$

$$= 26.9 \angle 34.1^\circ \text{ V rms}$$

entonces, por (10.26a) con

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{2 + j1} = 0.4 - j0.2 \text{ S}$$

tenemos

$$P_L = \operatorname{Re}\{Y\} |\mathbf{V}_{L \text{ rms}}|^2 = 0.4(26.9^2) = 289 \text{ W}$$

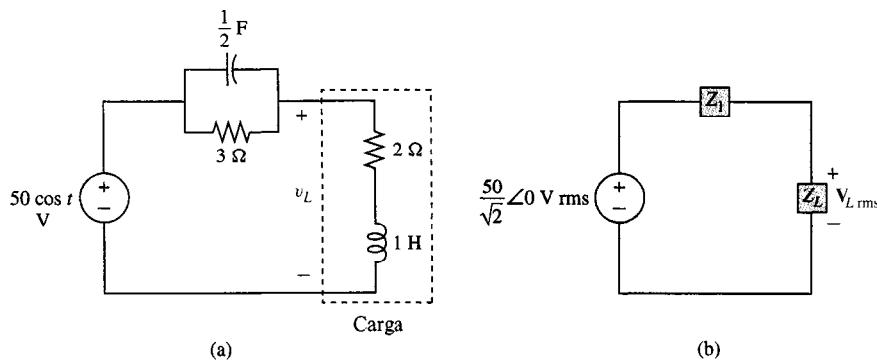


FIGURA 10.9 Circuito para el ejemplo 10.6; (b) circuito fasorial rms.

Ejemplo 10.7

Deseamos obtener un valor para la conductancia G en la figura 10.10, de forma que la fuente suministre 1 W al resto del circuito. Puesto que el poder absorbido por el resto del circuito debe ser igual a este valor, por (10.29b), siendo Y la admitancia total de todos los elementos RLC ,

$$P = \frac{4\operatorname{Re}\{Y\}}{|Y|^2} = 1.0 \quad (10.27)$$

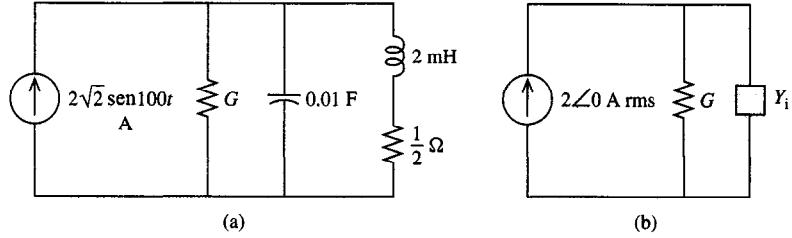


FIGURA 10.10 (a) Circuito para el ejemplo 10.7; (b) circuito fasorial rms.

Combinando las demás admitancias,

$$Y_1 = j1 + \frac{(-j5)(2)}{2 - j5} = 1.72 + j0.31 \text{ S}$$

Puesto que G y Y_1 están en paralelo, la admitancia total es

$$Y = G + Y_1 = (G + 1.72) + j0.31 \text{ S}$$

Sustituyendo esto en (10.27),

$$\frac{4(G + 1.72)}{(G + 1.72)^2 + 0.31^2} = 1$$

De esto se obtiene la ecuación cuadrática para G :

$$G^2 - 0.56G - 3.83 = 0$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son $G = 2.25$ y $G = -3.39$. Puesto que $G > 0$ para conductores pasivos, la solución única es $G = 2.25 \text{ S}$, que representa una resistencia $1/2.25 = 0.444 \Omega$.

Habiendo identificado la parte real de la potencia compleja \mathbf{S} con la potencia promedio P , ahora veremos la parte compleja, que definiremos como la *potencia reactiva* Q . De este modo

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^* = P + jQ \quad (10.28)$$

donde P es la potencia promedio en watts y Q la potencia reactiva,

$$P = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| |\mathbf{I}_{\text{rms}}| \cos(\phi_v - \phi_i) \quad (10.29a)$$

$$Q = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| |\mathbf{I}_{\text{rms}}| \sin(\phi_v - \phi_i) \quad (10.29b)$$

La unidad de potencia reactiva es el *var*, o volt-ampere reactivo.

Para explorar el significado de la potencia reactiva, considérese el diagrama fasorial que aparece en la figura 10.11, en donde se muestran los fasores rms de voltaje y corriente para el subcircuito A. Para nuestra conveniencia, tomamos a \mathbf{I}_{rms} como el fasor de referencia y designamos el ángulo entre estos fasores como $\theta = \phi_v - \phi_i$. Supongamos que resolvemos \mathbf{V}_{rms} en dos componentes ortogonales, uno en fase con la corriente, designado \mathbf{V}_i , y el otro 90° fuera de fase (o en *cuadratura* con la corriente), \mathbf{V}_q . Las magnitudes de estas dos componentes son

$$|\mathbf{V}_i| = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| \cos \theta$$

$$|\mathbf{V}_q| = |\mathbf{V}_{\text{rms}}| \sin \theta$$

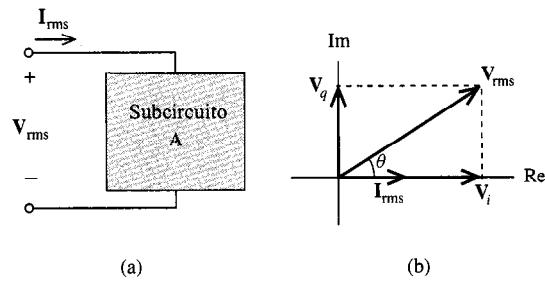


FIGURA 10.11 (a) Subcicuito; (b) diagrama fasorial rms.

Ahora, la potencia compleja absorbida por el subcircuito es

$$S = V_{rms} I_{rms}^* = V_i I_{rms}^* + V_q I_{rms}^*$$

El primer término, o lo que se conoce como componente en fase, es puramente real, puesto que la corriente y voltaje están en fase, es decir, tienen ángulos iguales. El segundo término, o componente de cuadratura, es puramente imaginario. De esta forma, la potencia promedio P está determinada únicamente por la componente en fase, y la potencia reactiva Q está determinada únicamente por el componente en cuadratura. Puesto que nos interesa la potencia reactiva, nos concentraremos en el componente en cuadratura. En términos de las correspondientes funciones de tiempo,

$$i(t) = \sqrt{2}|I_{rms}| \cos \omega t$$

y

$$\begin{aligned} v_q(t) &= \sqrt{2}|V_q| \cos(\omega t \pm 90^\circ) \\ &= \sqrt{2}|V_{rms}| \sin \theta \cos(\omega t \pm 90^\circ) \end{aligned}$$

El ángulo de fase se escribe como $\pm 90^\circ$ puesto que el signo de este término depende del hecho de que V_{rms} esté adelantada de I_{rms} , que es el caso que se muestra en la figura 10.11, o si está retardada. La potencia instantánea en el componente en cuadratura es entonces el producto

$$p_q(t) = v_q(t)i(t) = [2|V_{rms}||I_{rms}| \sin \theta] \cos \omega t \cos(\omega t \pm 90^\circ)$$

que puede simplificarse utilizando la identidad trigonométrica presentada en la sección 10.1, con lo que se obtiene

$$p_q(t) = |V_{rms}||I_{rms}| \sin \theta \cos(2\omega t \pm 90^\circ)$$

A partir de esta expresión, vemos que la potencia instantánea en la componente de cuadratura $p_q(t)$ es un senoide con amplitud igual a $|V_{rms}||I_{rms}||\sin \theta|$. Por (10.29), esto es igual a la magnitud de Q . De este modo, llegamos a una interpretación física para la cantidad Q : *la magnitud de la potencia reactiva Q es la amplitud de la potencia instantánea en la componente $i-v$ en cuadratura*. Puesto que la potencia instantánea en la componente en cuadratura es un senoide concentrado en cero, esto indica que se transfiere periódicamente energía al subcircuito, que luego es devuelta del subcircuito al resto de la red en una cantidad igual. De los capítulos anteriores, sabemos que este comportamiento es característico de los elementos de almacenamiento de energía, que en promedio no suministran ni disipan potencia, sino que lo intercambian con el resto del circuito. *La potencia reactiva Q es, por consiguiente, una medida de la cantidad de intercambio periódico de energía que*

tiene lugar entre un subcicuito dado y el resto del circuito. Por (10.29b), el signo de Q es inductivo para reactancias inductivas, y negativa para reactancias capacitivas.

Ejemplo 10.8

Considérese la conexión en serie de una resistencia $1\text{-}\Omega$, un capacitor $\frac{1}{2}\text{-F}$, un inductor 1-H , y una fuente dependiente de voltaje de $12\sqrt{2} \cos t\text{ V}$. El fasor de rms de fuente es

$$\mathbf{V}_{\text{srms}} = 12\angle 0^\circ$$

y la corriente de malla es

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = \frac{12\angle 0^\circ}{1 - j2 + j1} = 8.5\angle 45^\circ$$

La potencia compleja absorbida por cada impedancia es

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^* = \mathbf{Z} |\mathbf{I}_{\text{rms}}|^2$$

Para la resistencia, es puramente real con

$$\mathbf{S}_R = P_R + jQ_R = (1)(8.5^2) = 72 + j0$$

En tanto que para el capacitor

$$\mathbf{S}_C = P_C + jQ_C = (-j2)(8.5^2) = 0 - j144$$

y para el inductor,

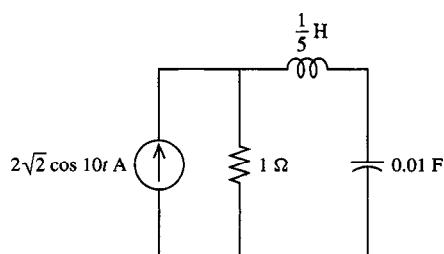
$$\mathbf{S}_L = P_L + jQ_L = (j1)(8.5^2) = 0 + j72$$

Invirtiendo la dirección de referencia de \mathbf{I}_{rms} para que satisfaga la convención de signo pasivo junto con \mathbf{V}_{srms} para calcular la potencia absorbida por la fuente,

$$\mathbf{S}_V = P_V + jQ_V = (12\angle 0^\circ)(8.5\angle -135^\circ)^* = -72 + j72$$

La potencia reactiva de la resistencia es cero, como podríamos anticiparlo, puesto que la corriente y el voltaje están en fase en las resistencias. Los elementos de almacenamiento son reactancias puras, y tenemos un desplazamiento de fase de 90° en sus corrientes y voltajes; por consiguiente, la potencia compleja es puramente reactiva (potencia promedio cero). Nótese que la magnitud de la potencia reactiva Q_C del capacitor es el doble que el inductor Q_L . Puesto que la impedancia es mayor por un factor de 2, el voltaje a través del capacitor es dos veces el que pasa a través del inductor, y puesto que ambos voltajes están en cuadratura con la corriente de malla, en un capacitor la amplitud de la potencia instantánea en la componente en cuadratura es dos veces la del inductor. El capacitor intercambia con el resto del circuito dos veces más energía. Finalmente, nótese que puesto que la potencia reactiva sumada sobre los elementos pasivos no es igual a cero, la fuente debe suministrar vars (así como watts). Es decir, la fuente debe desarrollar un componente fuera de fase y un componente en fase. En la sección 10.7 se discutirá la forma en que debe ajustarse un componente en cuadratura para reducir los requerimientos totales de corriente-voltaje en la fuente.

EJERCICIOS



EJERCICIO 10.3.2

10.3.1. El voltaje a través de una impedancia $Z = 14\angle 37^\circ \Omega$ tiene un fasor rms de $110\angle 30^\circ$ V. Obténgase el fasor rms de corriente en la impedancia y la potencia compleja suministrada a la impedancia.

Respuesta $I_{rms} = 7.86\angle -7^\circ$ A rms; $S = 690.5 + j520.3$

10.3.2. Obténgase la potencia compleja suministrada por cada uno de los elementos en este circuito.

Respuesta $S_{fuente} = -3.93 + j0.489$; $S_R = 3.93 + j0$; $S_L = j0.123$; $S_C = -j0.612$.

10.3.3. Se descubre que una combinación en paralelo de una resistencia $1-\Omega$ y un inductor $L-H$ absorbe igual cantidad de watts y vars cuando $\omega = 10$ rad/s. ¿Cuánto debe ser L ?

Respuesta 100 mH

10.4 SUPERPOSICIÓN Y POTENCIA

En esta sección consideraremos la potencia en redes que contienen dos o más fuentes independientes. Sean i y v , la corriente y voltaje terminales hacia un subcristalo de dos terminales, en un circuito que contiene dos fuentes independientes. El principio de superposición siempre se aplica a corrientes y voltajes en cualquier circuito lineal, de forma que

$$i = i_1 + i_2$$

$$v = v_1 + v_2$$

donde los subíndices se refieren a las respuestas debidas a cada fuente por separado, y eliminando la otra. La potencia instantánea absorbida por la subred es, suponiendo que i y v tienen direcciones de referencia que satisfacen la convención de signo pasivo,

$$p = iv = (i_1 + i_2)(v_1 + v_2)$$

$$\text{o } p = i_1 v_1 + i_2 v_2 + (i_1 v_2 + i_2 v_1) \quad (10.30a)$$

$$p = p_1 + p_2 + (i_1 v_2 + v_1 i_2) \quad (10.30b)$$

donde p_1 y p_2 son potencias instantáneas debidas a cada fuente por separado. Si se aplicara la superposición a la potencia, tendríamos a p como la suma de p_1 y p_2 lo cual, con base en la última ecuación, generalmente no es el caso. *Por lo general, la superposición no rige para la potencia instantánea.* Es decir, la potencia instantánea en una subred no es en general simplemente la suma de las potencias instantáneas debidas a cada excitación por separado. El hecho de que la superposición no se aplique por lo general a la potencia es consecuencia directa de la naturaleza no lineal de la potencia, y de su definición como producto de dos variables de circuito.

A continuación considérese el mismo circuito en estado estable ac. Supongamos que ambas fuentes operan a la misma frecuencia ω . Si I_1 e I_2 son fasores de corriente rms y V_1 y V_2 son los correspondientes fasores de voltaje producidos por estas dos fuentes, aplican-

do superposición a la corriente y voltaje en el circuito fasorial rms,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

De este modo, la potencia compleja en el subcírculo es

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* \quad (10.31)$$

o

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* + \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2^* + (\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_2^* + \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_1^*) \quad (10.32a)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + (\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_2^* + \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_1^*) \quad (10.32b)$$

donde \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 , y las potencias complejas separadas se deben a cada fuente. Puesto que el término en paréntesis (10.32b) no es cero, en general, *la superposición no se aplica para la potencia compleja*. Examinando las partes reales de ambos lados de esta expresión,

$$P = P_1 + P_2 + \operatorname{Re}\{\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_2^* + \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_1^*\}$$

Puesto que el último término en general no es cero, *por lo general la superposición no se aplica para la potencia promedio P*. Es decir, los watts absorbidos no serán la simple suma de las debidas a cada fuente por separado. Similarmente, igualando a las partes imaginarias de (10.32b),

$$Q = Q_1 + Q_2 + \operatorname{Im}\{\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_2^* + \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_1^*\}$$

En general, la superposición no se aplica a la potencia reactiva Q.

La inaplicabilidad de la superposición que se demostró antes, claramente se extiende al caso de más de dos fuentes. De este modo, en los circuitos en estado estable ac que contienen fuentes múltiples con la misma frecuencia, no puede calcularse la potencia superponiendo las potencias debidas a las fuentes por separado. Esto igualmente se aplica a todas las formas de potencia: instantánea, media, reactiva o compleja. La superposición puede utilizarse para obtener corrientes y voltajes, pero para fuentes con la misma frecuencia, estas componentes deben superponerse *antes* de calcular la potencia.

Ejemplo 10.9

Para determinar la potencia neta suministrada por la fuente de voltaje en la figura 10.12(a), notamos que, puesto que ambas fuentes en el circuito están a la misma frecuencia $\omega = 2 \text{ rad/s}$, podemos determinar la respuesta en estado estable ac, utilizando un solo circuito fasorial. El circuito fasorial rms para $\omega = 2 \text{ rad/s}$ aparece en la figura 10.12(b). Sea \mathbf{I}_1 la componente \mathbf{I} debida a la fuente de voltaje, e \mathbf{I}_2 la debida a la fuente de corriente. Entonces

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{3\sqrt{2}\angle 0^\circ}{1+j3} = -0.424 + j1.27 \text{ A rms}$$

y por división de corrientes

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\sqrt{2}\angle 20^\circ}{1+j3} = 0.278 - j0.35 \text{ A rms}$$

y de este modo

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = -0.146 + j0.92 \text{ A rms}$$

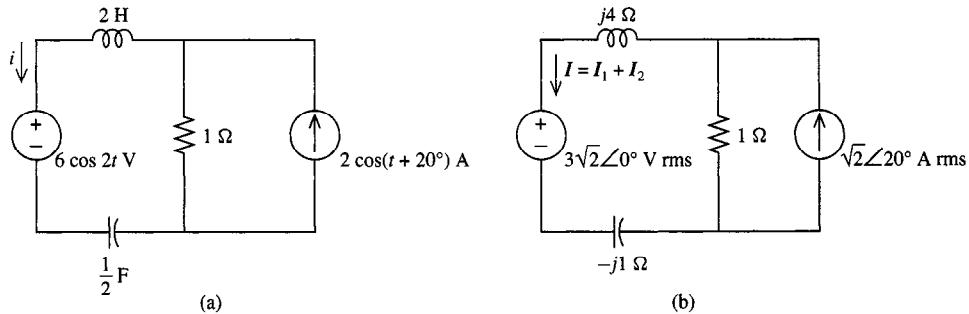


FIGURA 10.12 (a) Diagrama de circuito; (b) diagrama fasorial rms.

y la potencia compleja absorbida por la fuente de voltaje es

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = (3\sqrt{2}\angle 0)(-0.146 - j0.92) = -0.62 - j3.9$$

Concluimos que la fuente de voltaje suministra 620 mW de potencia promedio, y 3.9 vars de potencia reactiva al resto del circuito.

La inaplicabilidad de la superposición en la potencia en estado estable ac debe ser reconsiderada cuando las fuentes son de frecuencias distintas. Considérese un subcicuito con variables de terminales i y v en un circuito que contiene dos fuentes sinusoidales con frecuencias $\omega_1 \neq \omega_2$. Por (10.30b), la potencia instantánea es

$$p = p_1 + p_2 + (i_1 v_2 + v_1 i_2) \quad (10.33)$$

donde p_1 y p_2 son las potencias instantáneas separadas debidas a cada fuente, y se elimina la otra. Puesto que el último término es una función de tiempo no nula, la superposición no se aplica a la potencia instantánea en este caso, de la misma manera en que ocurrió en el caso anterior que consideramos, donde las frecuencias eran iguales, $\omega_1 = \omega_2$.

Sin embargo, cuando las frecuencias son distintas ya no podemos utilizar (10.31) más tiempo, puesto que los fasores de corriente o voltaje como \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 , que deben definirse en circuitos fasoriales distintos (correspondientes a frecuencias distintas ω_i), no pueden superponerse. En este caso, la potencia promedio se calcula a partir de (10.33) como

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T (p_1 + p_2 + i_1 v_2 + i_2 v_1) dt$$

$$P = P_1 + P_2 + \frac{1}{T} \int_0^T (i_1 v_2 + i_2 v_1) dt \quad (10.34)$$

Evaluando el primer término en la integral, sean

$$i_1 = I_{m1} \cos(\omega_1 t + \phi_{i1})$$

$$v_2 = V_{m2} \cos(\omega_2 t + \phi_{v2})$$

que nos interesa en el caso $\omega_1 \neq \omega_2$. Entonces:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (i_1 v_2) dt = \frac{I_{m1} V_{m2}}{T} \int_0^T \cos(\omega_1 t + \phi_{i1}) \cos(\omega_2 t + \phi_{v2}) dt \quad (10.35)$$

Utilizando la identidad (10.8), para $\omega_1 \neq \omega_2$, los dos términos resultantes en el integrando son sinusoides con frecuencia no nula, ambos tienen valores promedio cero y, por tanto, (10.35) es igual a cero. Por un razonamiento idéntico, el segundo término en la integral de (10.34), también es cero, y (10.35) se simplifica a

$$P = P_1 + P_2$$

En otras palabras, *la superposición rige para la potencia promedio P cuando las fuentes son de frecuencia distinta*. De este modo, para calcular la potencia promedio en estado estable ac en un circuito excitado por fuentes en dos o más frecuencias, calculamos la frecuencia promedio para cada frecuencia separadamente, y luego añadimos las potencias promedio. Por un argumento similar, puede demostrarse *que la superposición también rige para la potencia reactiva Q cuando las fuentes son de frecuencias distintas*. Es interesante que cuando los fasores pueden superponerse ($\omega_1 = \omega_2$), no puede hacerse lo mismo con P y Q , y cuando los fasores no pueden superponerse ($\omega_1 \neq \omega_2$), la superposición funciona para P y Q .

Finalmente, puesto que P y Q obedecen el principio de superposición para frecuencias distintas, lo mismo debe ocurrir con S , la potencia compleja. A continuación se exponen dos ejemplos que ilustran el uso de la superposición de potencia en circuitos en estado estable ac excitados por fuentes de frecuencias distintas.

Ejemplos 10.10

Deseamos determinar la potencia promedio absorbida por la resistencia en la figura 10.13(a). Éste es el mismo circuito utilizado en el ejemplo anterior. [Ver figura 10.12(a)], excepto en que la frecuencia de una

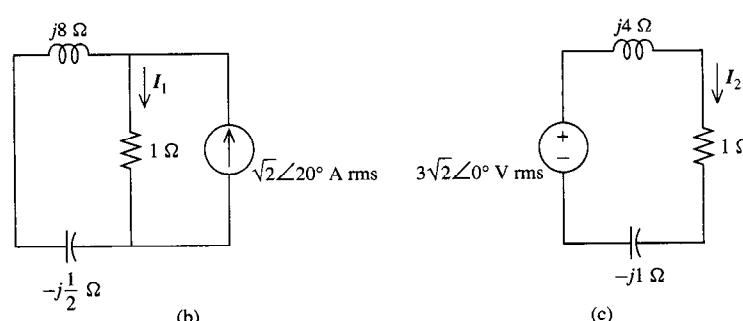
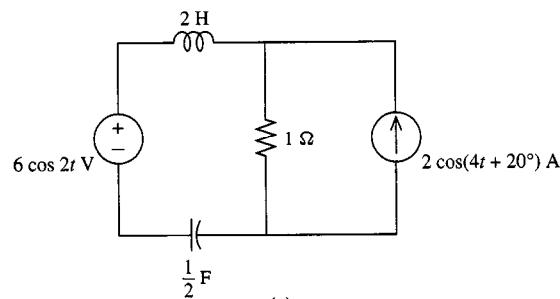


FIGURA 10.13 (a) Diagrama de circuito; (b) diagrama fasorial rms ($\omega = 4$ rad/s); (c) diagrama fasorial rms ($\omega = 2$ rad/s).

de las fuentes fue modificada. Puesto que en el presente caso las frecuencias de las fuentes difieren, debemos calcular sus respuestas individuales de circuitos fasoriales distintos. Luego podemos aplicar superposición a las potencias promedio producidas en cada frecuencia.

Por división de corrientes

$$\mathbf{I}_1 = (\sqrt{2}\angle 20^\circ) \left[\frac{j15/2}{1 + j15/2} \right] = 1.40\angle 27.6^\circ \text{ A rms}$$

y la potencia hacia la resistencia en $\omega = 4$ es

$$\begin{aligned} P_1 &= \operatorname{Re}(\mathbf{Z})|\mathbf{I}_1|^2 = R|\mathbf{I}_1|^2 \\ &= (1)(1.40)^2 = 1.96 \text{ W} \end{aligned}$$

Para $\omega = 2$, la corriente de malla es

$$\mathbf{I}_2 = \frac{3\sqrt{2}\angle 0}{1 + j3} = 1.34\angle -71.6^\circ \text{ A rms}$$

y la potencia hacia la resistencia en $\omega = 2$ es

$$\begin{aligned} P_2 &= R|\mathbf{I}_2|^2 \\ &= (1)(1.34)^2 = 1.80 \text{ W} \end{aligned}$$

De este modo, la potencia promedio absorbida por la resistencia es $1.96 + 1.80 = 3.76 \text{ W}$.

Ejemplo 10.11

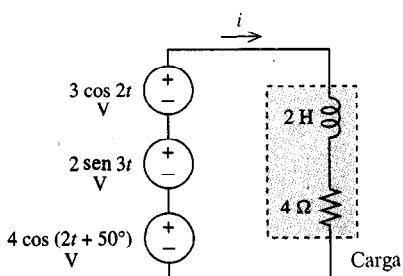


FIGURA 10.14 Circuito para el ejemplo 10.11.

Deseamos obtener las potencias promedio y reactiva absorbidas por la carga en la figura 10.14. Para determinar la potencia en $\omega = 2$, eliminamos la fuente en $\omega = 3$, y puesto que las dos fuentes de voltaje restantes están en serie, la corriente fasorial rms en $\omega = 2$ es

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1.5\sqrt{2}\angle 0 + 2\sqrt{2}\angle 50^\circ}{4 + j4} = 0.795\angle -16.2^\circ \text{ A rms}$$

La potencia compleja absorbida por la carga en $\omega = 2$ es entonces

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{Z}|\mathbf{I}_1|^2 = 0.795^2(4 + j4) = 2.53 + j2.53$$

En $\omega = 3$, el fasor de rms de fuente es $\sqrt{2}\angle 0$ (seleccionando fasores seno para nuestra conveniencia) y una impedancia $\mathbf{Z} = 4 + j3/2$. Entonces

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\sqrt{2}\angle 0}{4 + j6} = 0.196\angle -56.3^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{Z}|\mathbf{I}_2|^2 = 0.196^2(4 + j6) = 0.784 + j0.118$$

Puesto que la potencia compleja se puede superponer con frecuencias distintas,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 3.31 + j3.71$$

de forma que la carga absorbe 3.31 W de potencia promedio, y 3.71 vars de potencia reactiva.

En resumen, para cada frecuencia a la que se excita un circuito en estado estable ac, puede aplicarse la superposición al nivel de corrientes y voltajes, pero no a nivel de potencia. Entonces, puede obtenerse la potencia media, reactiva o compleja superponiendo la potencia calculada a cada una de las frecuencias.

EJERCICIOS

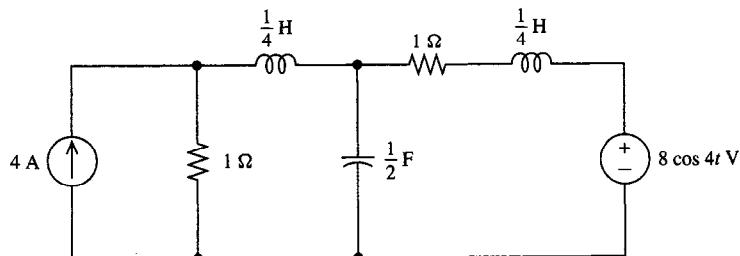
10.4.1. Obténgase la potencia promedio suministrada a la resistencia en la figura 12.5 si $R = 10 \Omega$ y:

- (a) $v_{g1} = 10 \cos 100t$ y $v_{g2} = 20 \cos (100t + 60^\circ)$ V
- (b) $v_{g1} = 100 \cos (t + 60^\circ)$ y $v_{g2} = 50 \sin (2t - 30^\circ)$ V
- (c) $v_{g1} = 50 \cos (t + 30^\circ)$ y $v_{g2} = 100 \sin (t + 30^\circ)$ V
- (d) $v_{g1} = 20 \cos (t + 25^\circ)$ y $v_{g2} = 30 \sin (5t - 35^\circ)$ V

Respuesta (a) 15 W; (b) 625 W; (c) 625 W; (d) 65 W

10.4.2. Obténgase la potencia promedio absorbida por cada resistencia y cada fuente.

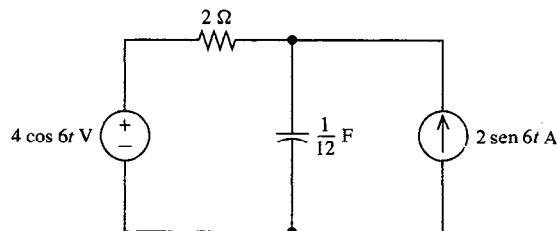
Respuesta 8 W; 24 W; -8 W; -24 W



EJERCICIO 10.4.2

10.4.3. Obtenga la potencia promedio absorbida por la resistencia y por cada fuente.

Respuesta 8 W; -4 W; -4 W



EJERCICIO 10.4.3

10.5 TRANSFERENCIA MÁXIMA DE POTENCIA

Al diseñar un circuito, con frecuencia es deseable que se obtenga la máxima transferencia de potencia posible hacia la carga desde el resto del circuito. Considérese el circuito de la figura 10.15, que consiste en un subcircuito de dos terminales, conectado a una carga de impedancia Z_L . Deseamos especificar Z_L para que la potencia promedio absorbida por esta impedancia sea máxima. Por ejemplo, estos problemas surgen cuando se especifica la impedancia de un sistema de bocinas que extraerá la potencia máxima del amplificador de

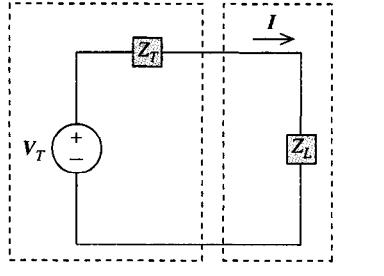


FIGURA 10.15 Impedancia de carga conectada a un subcicuito.

audio al que está conectado. El proceso de especificación de la carga para la potencia máxima desde un subcicuito dado a veces se conoce como coincidencia de impedancias, por razones que pronto serán evidentes.

Para simplificar el análisis, suponemos que el subcicuito de dos terminales está especificado por su equivalente de Thevenin, como se muestra en la figura 10.15. La corriente hacia la carga está dada en términos de fasores rms por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_T}{Z_L + Z_T}$$

y la potencia promedio absorbida por la carga es, utilizando (10.24b),

$$P_L = \operatorname{Re}\{Z_L\}|\mathbf{I}|^2 \quad (10.36a)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}\{Z_L\}|\mathbf{V}_T|^2}{|Z_T + Z_L|^2} \quad (10.36b)$$

Sean $Z_L = R_L + jX_L$ y $Z_T = R_T + jX_T$. En términos de estas variables, (10.36b) puede ser escrita como

$$P_L = \frac{R_L}{(R_L + R_T)^2 + (X_L + X_T)^2} |\mathbf{V}_T|^2$$

Deseamos conocer los valores de R_L y X_L que maximicen P_L para valores fijos de las cantidades restantes. La elección de maximización para X_L es claramente $X_L = -X_T$, puesto que esto hace que el denominador sea lo menor posible. Fijando $X_L = -X_T$,

$$\left. \frac{\partial}{\partial R_L} P_L \right|_{X_L = -X_T} = \frac{\partial}{\partial R_L} \frac{R_L}{(R_L + R_T)^2}$$

la elección de maximización para R_L se obtiene fijando esta derivada parcial a cero. Puede verificarse fácilmente que la derivada parcial anterior es cero para $R_L = R_T$ (y que la segunda derivada parcial es negativa, indicando un máximo). Concluimos que la potencia máxima es transferida a una impedancia de carga Z_L cuando las partes reales de la impedancia de la fuente $R_T = \operatorname{Re}\{Z_T\}$ y la impedancia de carga $R_L = \operatorname{Re}\{Z_L\}$ son iguales, y sus partes imaginarias $X_T = \operatorname{Im}\{Z_T\}$ y $X_L = \operatorname{Im}\{Z_L\}$ son iguales y de signos opuestos. Podemos postular las condiciones concluyendo que *la potencia máxima es transferida a una carga Z_L a partir de una fuente con impedancia equivalente de Thevenin Z_T si la carga y la impedancia equiva-*

lente de Thevenin son conjugados complejos:

$$Z_L = Z_T^* \quad (10.37)$$

De este modo, se transfiere potencia máxima a una carga si la magnitud de su impedancia coincide con la impedancia de la fuente Z_T , y el ángulo de la impedancia de carga coincide con el negativo del ángulo de la impedancia de la fuente. Las impedancias de carga, cuyas magnitudes son grandes, limitarán claramente la corriente I , lo que resulta en menos suministro de potencia, en tanto que aquellas con impedancias reducidas sólo tendrán una pequeña fracción del voltaje V_T que caen sobre la corriente, nuevamente reduciendo el suministro de potencia.

Para determinar el máximo suministro de potencia, utilizando $Z_L = Z_T^*$ en (10.36b),

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{\operatorname{Re}\{Z_T\}|V_T|^2}{|2 \operatorname{Re}\{Z_T\}|^2} \\ &= \frac{|V_T|^2}{4 \operatorname{Re}\{Z_T\}} \end{aligned}$$

o, en términos de $Y_T = 1/Z_T$,

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{\operatorname{Re}\{Y_T\}|V_T|^2}{4} \\ &= \frac{|I_T|^2}{4 \operatorname{Re}\{Y_T\}} \end{aligned}$$

Debe recordarse que se utilizan fasores rms en estas expresiones.

Ejemplo 10.12

Dado el circuito fasorial rms de la figura 10.16(a), primero lo convertiremos todo, exceptuando la impedancia de carga, a su equivalente de Thevenin, como se muestra en la figura 10.16(b). Z_T es el equivalente en serie de las impedancias $3 + j4$, o $3 + j4$. El voltaje de circuito abierto, eliminando Z_L , es

$$V_T = (3)(4\angle 0) = 12\angle 0 \text{ V rms}$$

De este modo, para una máxima transferencia de potencia, seleccionamos $Z_L = Z_T^* = 3 - j4 \Omega$. El máximo suministro de potencia es

$$P_{\max} = \frac{12^2}{(4)(3)} = 12 \text{ W}$$

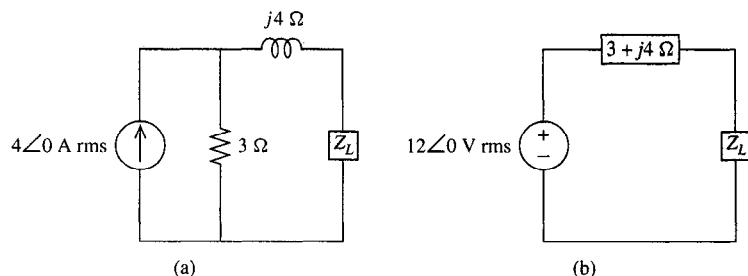
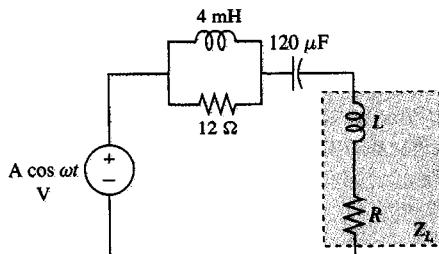


FIGURA 10.16 (a) Circuito para el ejemplo 10.12; (b) equivalente de Thevenin.

EJERCICIOS



EJERCICIO 10.5.1

10.5.1. Obténganse valores para la resistencia de carga R , y una inductancia de carga L , para que la fuente con amplitud $A = 2\sqrt{2}$ V y frecuencia $\omega = 1000$ rad/s suministre potencia máxima a la carga. Obténgase el valor de la potencia suministrada a la carga para estos valores máximos de R y L .

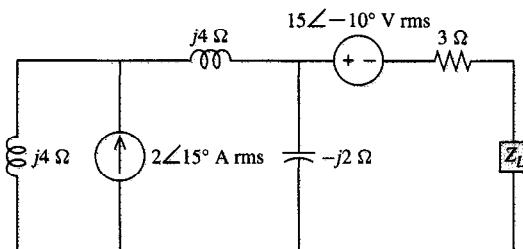
Respuesta $1.2 \Omega; 4.73 \text{ mH}; 833 \text{ mW}$

10.5.2. Repítase el ejercicio 10.5.1 para $A = 4\sqrt{2}$ V y $\omega = 1000$ rad/s. Nótese que los valores óptimos para la impedancia de carga no dependen de la intensidad de la fuente A , pero sí la máxima potencia suministrada.

Respuesta $1.2 \Omega; 4.73 \text{ mH}; 3.33 \text{ W}$

10.5.3. Para el circuito fasorial rms dado, determíñese la impedancia de carga Z_L que absorbería la potencia máxima.

Respuesta $4.0 \angle 41.6^\circ \Omega$



EJERCICIO 10.5.3

10.6 CONSERVACIÓN DE POTENCIA

Las leyes de conservación desempeñan papeles cruciales en todas las ciencias físicas. En teoría de circuitos, no hay principio más fundamental que la conservación de la carga eléctrica, cuya consecuencia inmediata es la ley de corrientes de Kirchhoff. En esta sección veremos cómo se aplican los principios generales de conservación de potencia y energía a los circuitos eléctricos en estado estable ac.

Considérese un circuito arbitrario de $n + 1$ nodos con los nodos numerados $0, 1, \dots, n$. Sea V_j el fasor de voltaje de nodo en el nodo $j = 1, \dots, n$ y sea el nodo 0 el nodo de referencia. El flujo de corriente del nodo j y el nodo k , será designado I_{jk} . Por LCK en el nodo j ,

$$\sum_{k=0}^n I_{jk} = 0$$

donde I_{j0} es el flujo de corriente hacia el nodo de referencia $I_{jj} = 0$. Tomando el conjugado complejo de esta ecuación, LCK, y multiplicándolo por el voltaje de nodo V_j ,

$$\sum_{k=1}^n V_j I_{jk}^* + V_j I_{j0}^* = 0$$

donde el término que contiene la corriente del nodo de referencia aparece por separado. Hay una ecuación de este tipo para cada nodo $j = 1, \dots, n$. Sumando todas las n ecuaciones,

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{V}_j \mathbf{I}_{jk}^* + \mathbf{V}_j \mathbf{I}_{j0}^* \right) = 0$$

La corriente entre cada par de nodos que no son de referencia aparece dos veces en la primera suma doble, como \mathbf{I}_{jk} y su negativo \mathbf{I}_{kj} . Sustituyendo \mathbf{I}_{kj} por $-\mathbf{I}_{jk}$ para $k < j$, estos dos términos pueden combinarse, produciendo la ecuación

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j+1}^n (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_k) \mathbf{I}_{jk}^* + \mathbf{V}_j \mathbf{I}_{j0}^* \right) = 0$$

Cada término en esta ecuación se reconoce como la potencia compleja \mathbf{S}_{jk} absorbida por el subcircuito que conecta un par de nodos particular (j, k) , y cada par de nodos en el circuito aparece exactamente una vez. De este modo, esta ecuación puede simplificarse a

$$\sum_{\text{Pares de nodos } (j, k)} \mathbf{S}_{jk} = 0 \quad (10.38)$$

Finalmente, notamos que, puesto que ya hemos contado todos los nodos del circuito, el subcircuito que conecta los nodos j y k pueden únicamente consistir de elementos en paralelo. Supóngase que hay m nodos de este tipo para $m > 0$. Estos elementos individuales aparecen en la figura 10.17. La potencia compleja en este circuito paralelo es

$$\mathbf{S}_{jk} = (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_k) \mathbf{I}_{jk}^*$$

El cual, por LCK aplicado al nodo superior, es igual a

$$\mathbf{S}_{jk} = \sum_{l=1}^m (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_k) \mathbf{I}_{jkl}^*$$

Los términos dentro de la sumatoria son la potencia compleja absorbida por cada uno de los m elementos por separado. Combinando esto con (10.38), tenemos el principio de *conservación de potencia compleja: la suma de las potencias complejas absorbidas por todos los elementos en un circuito es igual a cero*.

La conservación de la potencia compleja inmediatamente implica la conservación de potencia promedio P y potencia reactiva Q , puesto que estas son las partes real e imaginaria de \mathbf{S} .

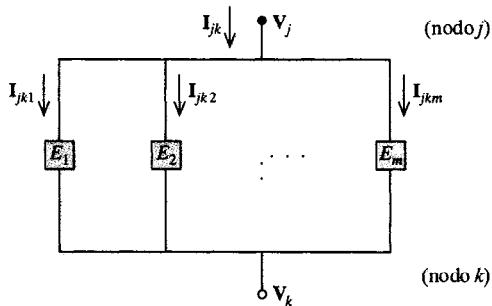


FIGURA 10.17 Elementos que conectan dos nodos.

Al poner los términos positivo y negativo en lados opuestos de la ecuación, puede reformularse este principio de conservación: *la potencia neta absorbida por todos los elementos en un circuito es igual a la potencia neta suministrada por todas las fuentes*. Este principio, que rige igualmente para las potencias complejas, promedio, y reactiva, es intuitivamente satisfactoria, puesto que la potencia absorbida debe venir de alguna parte, y la potencia suministrada es proporcionada a alguna parte. Pero es importante satisfacernos con el hecho de que este resultado intuitivamente razonable se deriva de nuestras definiciones básicas, en vez de simplemente confiar en que probablemente sean verdaderas.

Ejemplo 10.13

Deseamos determinar los “gastos de potencia”, es decir, la potencia absorbida o suministrada por cada elemento, en el circuito fasorial rms que aparece en la figura 10.18. La impedancia equivalente es

$$\mathbf{Z} = j2 + \frac{(2)(-j1)}{2 - j1} = 0.4 + j1.2 \Omega$$

y la corriente \mathbf{I} es

$$\mathbf{I} = \frac{1\angle 0^\circ}{0.4 + j1.2} = 0.791\angle -71.6^\circ \text{ A rms}$$

En la fuente,

$$\mathbf{S}_V = \mathbf{VI}^* = (1\angle 0^\circ)(0.791\angle +71.6^\circ) = 0.25 + j0.75$$

Esta potencia compleja debe ser interpretada como la potencia suministrada por la fuente, puesto que \mathbf{V} e \mathbf{I} violan la convención de signos pasivos. La potencia absorbida por el inductor es

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{Z}_L |\mathbf{I}|^2 = (j2)(0.791)^2 = 0 + j1.25$$

Sabemos que la potencia compleja absorbida por una resistencia es puramente real, y si es absorbida por un capacitor, entonces es puramente imaginaria. Por la conservación de la potencia promedio, los 0.25 W producidos por la fuente deben ser entonces absorbidos por la resistencia, o

$$\mathbf{S}_R = 0.25 + j0$$

La fuente absorbe -0.750 vars (produce +0.75 vars) y el inductor absorbe 1.25 vars adicionales, de forma que por la conservación de la potencia reactiva, el capacitor debe producir 0.50 vars o, en términos de potencia absorbida,

$$\mathbf{S}_C = 0 - j0.50$$

Pueden verificarse los últimos dos resultados del cálculo directo, puesto que por división de corrientes,

$$\mathbf{I}_R = \frac{(0.791\angle -71.6^\circ)(-j1)}{2 - j1} = 0.354\angle -135^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{S}_R = Z_R |\mathbf{I}_R|^2 = (2)(0.354)^2 = 0.25 + j0$$

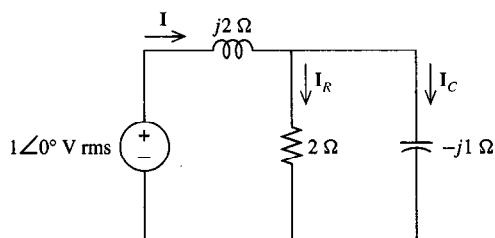


FIGURA 10.18 Circuito para el ejemplo 10.13.

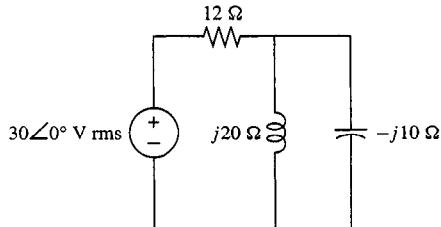
y

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I} - \mathbf{I}_R = 0.707 \angle -45^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{S}_C = Z_C |\mathbf{I}_C|^2 = (-j1)(0.707)^2 = -j0.50$$

Finalmente, notamos que, dado que la energía es una integral de la potencia respecto al tiempo y la potencia se conserva, asimismo se conserva la energía. La energía neta producida por las fuentes en un circuito sobre un periodo dado de tiempo es absorbida por los demás elementos. Cada fuente que produce energía neta puede ser estudiada aún más, para determinar la causa primaria responsable de esta producción de energía. Por ejemplo, en una batería, la causa primaria es una reacción química que convierte la energía potencial electroquímica en energía eléctrica suministrada por la batería al resto del circuito eléctrico. En un hidrogenerador, es el trabajo realizado por la energía potencial gravitacional del torrente de agua sobre un eje giratorio. Nuestro estudio de circuitos eléctricos, limitado a las variables eléctricas de la corriente y voltaje, determinarán la cantidad de energía eléctrica producida por una fuente, pero no dice nada respecto a su origen. Todo lo que podemos decir de nuestro análisis de circuito es que, si un elemento es un productor neto de energía eléctrica, esa energía debió ser derivada de otra fuente primaria no eléctrica.

EJERCICIOS



EJERCICIO 10.6.1 Circuito fasorial RMS.

- 10.6.1. Determíñese la potencia compleja absorbida por la resistencia, inductor y capacitor, y demuestre que su suma es igual a la potencia compleja suministrada por la fuente.

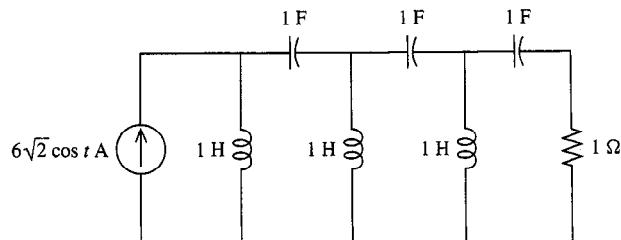
Respuesta Potencia absorbida por cada uno de los elementos: $S_R = 19.9$; $S_L = +j33.1$; $S_C = -j66.2$; $S_V = -19.9 + j33.1$

- 10.6.2. Un circuito consiste en una fuente rms de 110-V, una resistencia y un inductor. Si la resistencia absorbe 25 W y el inductor absorbe 40 var, ¿cuál es la corriente rms producida por la fuente?

Respuesta 429 mA rms

- 10.6.3. Utilice la conservación de potencia para obtener la potencia suministrada a la resistencia, primero obteniendo la parte real de la potencia compleja suministrada por la fuente.

Respuesta 36 W



EJERCICIO 10.6.3

La potencia promedio aportada a una carga en el estado estable ac, repitiendo (10.14), es

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \theta$$

donde $\theta = \phi_v - \phi_i$. De este modo, la potencia es el producto del voltaje rms por la corriente rms y por el coseno del ángulo entre los fasores de voltaje y corriente. En la práctica, la corriente y voltaje rms son fácilmente medibles por su producto, $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$, que se conoce como *potencia aparente*. La potencia aparente es generalmente referida en términos de sus unidades, volt-amperes (VA) o kilovolt-amperes (kVA), con el fin de evitar confusiones con la unidad de potencia promedio, o watt. Es claro que la potencia promedio nunca puede ser mayor que la potencia aparente.

La proporción de la potencia promedio con la potencia aparente, es definida como *factor de potencia*. De este modo, si denotamos el factor de potencia por pf , entonces en el caso sinusoidal

$$pf = \frac{P}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos \theta \quad (10.39)$$

es adimensional. En este caso, el ángulo θ se designa comúnmente como *ángulo pf*. También lo reconocemos como el ángulo de la impedancia Z de la carga.

En el caso de cargas puramente resistivas, el voltaje y la corriente están en fase. De este modo, $\theta = 0$, $pf = 1$, y las potencias promedio y aparentes son iguales. También puede existir un factor de potencia unitario ($pf = 1$) para cargas que contienen conductores y capacitores si las reactancias de estos elementos son tales que se cancelan entre sí. Ajustar la reactancia de carga para aproximar esta condición, es sumamente importante en sistemas de suministro eléctrico, como lo veremos en breve.

En una carga puramente reactiva, $\theta = \pm 90^\circ$, $pf = 0$, y la potencia promedio es cero. En este caso, la carga equivalente es una inductancia ($\theta = 90^\circ$) o una capacitancia ($\theta = -90^\circ$), y la corriente y voltaje difieren de fase en 90° .

Una carga para la que $-90^\circ < \theta < 0$ es equivalente a una combinación RC , en tanto que una que tiene $0 < \theta < 90^\circ$ es una combinación RL equivalente. Puesto que $\cos \theta = \cos (-\theta)$, es evidente que el pf para una carga RC que tiene $\theta = -\theta_1$, donde $0 < \theta_1 < 90^\circ$, es igual al de una carga RL con $\theta = \theta_1$. Con el fin de evitar esta dificultad para identificar estas cargas, el pf se caracteriza como *adelantada* o *atrasada* por la *fase de la corriente respecto a la del voltaje*. Por consiguiente, una carga RC tiene un pf de adelanto, y una carga RL tiene un pf de atraso. Por ejemplo, la conexión en serie de una resistencia $100\text{-}\Omega$ y un inductor 0.1-H en 60 Hz tiene $Z = 100 + j37.7 + 106.9/20.66^\circ \Omega$ y una pf retardada en $\cos 20.66^\circ = 0.936$.

Ejemplo 10.14

En la práctica, el factor de potencia de una carga es sumamente importante. Por ejemplo, en las aplicaciones industriales las cargas requieren miles de watts para operar, y el factor de potencia afecta en gran medida la factura de electricidad consumida. Supongamos que un molino consume 100 kW de una línea rms de 220-V . Con un pf de atraso

en 0.85, podemos ver que la corriente rms que entra al molino es

$$I_{\text{rms}} = \frac{P}{V_{\text{rms}} pf} = \frac{10^5}{(220)(0.85)} = 534.8 \text{ A}$$

lo que significa que la potencia aparente suministrada es

$$V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = (220)(534.8) \text{ VA} = 117.66 \text{ kVA}$$

Ahora supongamos que el pf de algún modo se incrementa con un atraso de 0.95. Entonces

$$I_{\text{rms}} = \frac{10^5}{(220)(0.95)} = 478.5 \text{ A}$$

y la potencia aparente se reduce a

$$V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = 105.3 \text{ kVA}$$

Comparando el caso último con el primero, vemos que I_{rms} se redujo en 56.3 A (10.5%). Por consiguiente, la planta generadora debe generar una mayor corriente en el caso de un pf menor. Puesto que las líneas de transmisión que abastecen la potencia tienen resistencia, el generador debe producir una mayor potencia promedio para suministrar los 100 kW a la carga. Si la resistencia es de 0.1Ω , entonces la potencia generada por la fuente debe ser

$$P_g = 10^5 + 0.1 I_{\text{rms}}^2$$

De este modo, obtenemos

$$\begin{aligned} P_g &= 128.6 \text{ kW}, & pf &= 0.85 \\ &= 122.9 \text{ kW}, & pf &= 0.95 \end{aligned}$$

que requiere que la planta generadora produzca 5.7 kW (4.64%) más potencia para suministrar la carga con un pf menor. Es por esta razón que las compañías generadoras prefieren un pf que exceda, por decir algo, 0.9, e imponen una multa a los grandes usuarios industriales que no cumplen con este requisito.

Ahora consideremos un método para corregir el factor de potencia de una carga que tiene una impedancia Z o admitancia $Y = 1/Z$. Podemos alterar el factor de potencia conectando un elemento en paralelo con la carga dada, como en la figura 10.19. Al colocar el nuevo elemento en paralelo, el voltaje suministrado a la carga, no se dividirá en los elementos, como ocurriría si el nuevo elemento estuviera colocado en serie.

Designemos al nuevo elemento por su admitancia Y_1 . La admitancia total de la combinación en paralelo es la suma de las admitancias

$$Y_T = Y + Y_1$$

Queremos que el nuevo elemento no absorba por sí mismo ninguna potencia promedio, por lo que debe tener reactancia pura, $\text{Re}\{Y_1\} = 0$ que aparece como vector vertical en el diagrama fasorial. Si nuestro objetivo es ajustar el factor de potencia pf a un valor deseado $pf = PF$, entonces, como se muestra en el diagrama $\cos \theta_d = PF$,

$$Y_1 = j(\text{Im } Y - \text{Im } Y_T)$$

donde

$$\text{Im } Y_T = \text{Re } Y \tan \theta_d$$

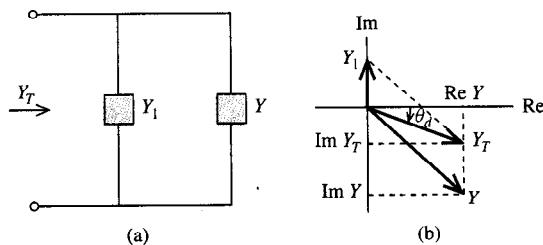


FIGURA 10.19 (a) Circuito para corrección de factor de potencia; (b) diagrama fasorial.

En otras palabras, Y_1 debe reducir la parte imaginaria de Y para que la parte real fija del ángulo de Y_T tenga el factor de potencia deseado PF .

Ejemplo 10.15

Como ejemplo, cambiemos el factor de potencia del circuito del ejemplo anterior (que aparece en la figura 10.18) con un avance de 0.98. En el ejemplo 10.13 se obtuvo la impedancia del circuito que es $Z = 0.4 + j1.2 \Omega$ de forma que su admitancia es

$$Y = \frac{1}{Z} = 0.25 - j0.75 = 0.791 \angle -71.6^\circ \text{ S}$$

Por consiguiente, el circuito dado tiene un factor de potencia de $\cos(71.6^\circ) = 0.32$, que es un factor de potencia de atraso (en este caso, una admitancia con ángulo de -71.6° , que es un ángulo donde la corriente es de adelante respecto al voltaje). La Y_T deseada debe tener un ángulo de $\theta_d = \cos^{-1} 0.98 = +11.5^\circ$ (una Y_T de ángulo de fase -11.5° tendría un atraso de 0.98 en lugar de estar *de adelante* en esa misma magnitud). El único número complejo que tiene una parte real 0.25 y un ángulo $+11.5^\circ$ tiene como parte imaginaria

$$\text{Im } Y_T = (0.25)(\tan 11.5^\circ) = 0.051 \text{ S}$$

De este modo, debemos cambiar la admitancia de $Y = 0.25 - j0.75 \text{ S}$ a $Y_T = 0.25 + j0.051 \text{ S}$. Esto requiere que

$$Y_1 = Y_T - Y = j(0.051 + 0.75) = j0.801 \text{ S}$$

De este modo, para corregir el factor de potencia al valor deseado, necesitamos instalar una admitancia de $j0.801 \text{ S}$ o, equivalentemente, una impedancia de $1/j0.801 = -j1.25 \Omega$, en paralelo con la impedancia dada. Por ejemplo, si la frecuencia de trabajo para el circuito es $\omega = 1 \text{ rad/s}$, entonces podemos lograr la corrección del factor de potencia utilizando un capacitor con impedancia

$$\frac{1}{j(1)C} = -j1.25 \Omega$$

o $C = 0.80 \text{ F}$.

EJERCICIOS

- 10.7.1.** Obtenga la potencia aparente para (a) una carga que requiere 20 A de una línea rms de 115-V y (b) una carga que consista de una resistencia de

100- Ω en paralelo con un capacitor 25- μF conectado a una fuente de 120-V rms y 60-Hz.

Respuesta (a) 2.3 kVA; (b) 197.9 VA

10.7.2. Obtenga el factor de potencia para (a), una carga que consiste en una conexión en serie para una resistencia de 10- Ω , y un inductor de 10-mH que opere a 60 Hz, (b) una carga capacitiva que requiera 25 A rms y 5 kW a 230 V rms, y (c) una carga que sea una conexión en paralelo de una carga de 5-kW con un factor de potencia de 0.9 avanzado y una carga de 10-kW con un factor de potencia retardado en 0.95.

Respuesta (a) 0.936 retardada; (b) 0.87 avanzada; (c) 0.998 retardada

10.7.3. Una carga que consiste de una combinación en serie de una resistencia 100 Ω y un inductor 1 H está conectado a una fuente que suministra potencia a $\omega = 100$ rad/s. ¿Qué capacitor C a través de esta carga corregirá el factor de potencia (a) 0.9 de adelanto; (b) 0.9 de atraso?

Respuesta (a) $C = 74.22 \mu\text{F}$; (b) $C = 25.78 \mu\text{F}$

10.8

SPICE Y POTENCIA EN ESTADO ESTABLE AC

Cuando se pide de SPICE un análisis ac al incluir el enunciado de control .AC, la salida está acompañada de cierta información adicional llamada "solución de pequeño rango de señal". Esto incluye un valor de "potencia total disipada". Por ejemplo, el ejemplo 9.17 utilizado en el archivo de fuente

```
Circuito de la figura 9.25
*
V      1      0      AC      1      0
L      1      2      1
H      2      3      V      0.5
R      3      0      1
.AC    LIN  1    .159    .159
.PRINT  AC    IM(V)   IP(V)
.END
```

Los siguientes datos se hallaron en la impresión de SPICE sobre la impresión que pedimos (la magnitud y ángulo de fase de la corriente que pasa a través de la fuente de voltaje nombrada V).

```
***SOLUCION DE PEQUEÑO RANGO DE SEÑAL TEMPERATURA = 27.0 DEG C ***
NODE VOLTAGE          NODE VOLTAGE          NODE VOLTAGE
( 1) 0.0000            ( 2) 0.0000            ( 3) 0.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME    CURRENT
V      0.000E+00

DISIPACION TOTAL DE POTENCIA 0.00E+00 WATTS
```

La disipación de potencia reportada en esta porción de la impresión *no está* relacionada con la potencia ac disipada por los elementos del circuito. Cada vez que se pide un análisis ac, SPICE automáticamente determina en primer lugar el punto de operación dc del circuito, es decir, los valores dc o constantes de todas las corrientes y voltajes cuando se eliminan todas las fuentes ac. Esta información de punto de operación es de gran valor en caso de que elementos no lineales, tales como transistores y diodos, estén incluidos en el circuito, y se utilizan suministros dc para darles energía. Esto es lo que se reporta como “solución de pequeño rango de señal”. La “dissipación total de potencia” informada se refiere a la potencia dc en estado estable requerida para dar soporte a este punto de operación. En un circuito sin fuentes dc, todos estos valores serán cero. De este modo, la disipación de potencia informada automáticamente por SPICE, no es de ninguna ayuda para determinar las dissipaciones de potencia en estado estable ac en frecuencias no nulas.

Desafortunadamente, SPICE no ofrece ninguna tarjeta específica de control o palabra clave para imprimir la potencia en estado estable ac en cualquier otra frecuencia que $\omega = 0$ (dc), como se describió anteriormente. Para determinar la potencia ac absorbida por un elemento de circuito utilizando SPICE, debemos pedir una salida de los fasores de corriente y voltaje; luego utilizar las fórmulas estudiadas en este capítulo para obtener la potencia compleja, promedio o reactiva (según se requiera), para conocer la corriente y voltaje del elemento.

Ejemplo 10.16

Desearíamos determinar la potencia compleja suministrada por las dos fuentes en el circuito de la figura 10.20. El archivo de entrada SPICE para este circuito fue descrito al inicio de esta sección. La salida de este programa de SPICE es

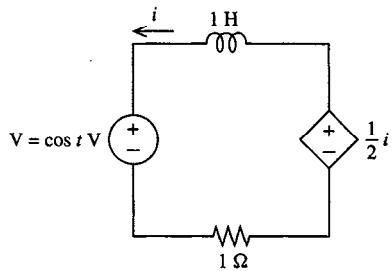


FIGURA 10.20 Circuito para el ejemplo 10.16.

FREQ	IM(V)	IP(V)
1.590E-01	8.951E-01	1.166E+02

El fasor de corriente asociado, con la corriente de malla i en sentido contrario a las manecillas del reloj en la figura 10.20, es, por consiguiente, $\mathbf{I} = 0.895 \angle 116.6^\circ$ A. Puesto que este fasor de corriente satisface la convención de signo pasivo con relación al voltaje $V = 1 \angle 0^\circ$ del fasor de fuente independiente, la potencia compleja absorbida por la fuente independiente está dada por

$$\frac{1}{2} \mathbf{VI}^* = \frac{1}{2} (1 \angle 0) (0.895 \angle -116.6^\circ) = -0.2 - j0.4 \quad (10.40a)$$

y la potencia compleja absorbida por la fuente independiente está dada por

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} \right) (-\mathbf{I})^* = -0.2 + j0 \quad (10.40b)$$

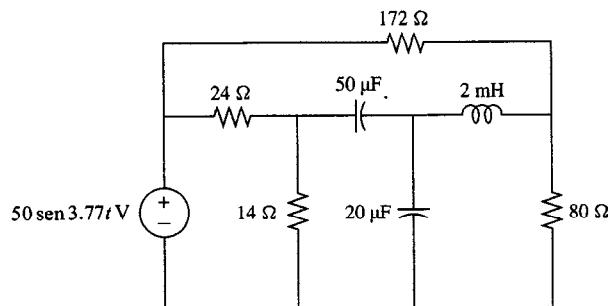
Nótese que utilizamos $-\mathbf{I}$, y no \mathbf{I} , en el último cálculo, puesto que $-\mathbf{I}$ satisface la convención de signo pasivo para la fuente dependiente (junto con su voltaje $\frac{1}{2} \mathbf{I}$). También nótese que los fasores informados por SPICE son fasores de amplitud y no rms, puesto que utilizamos fasores de amplitud para describir la fuente. De este modo, debemos incluir el factor $\frac{1}{2}$ en las fórmulas de potencia (10.40), compatible con el uso con fasores de amplitud y fasores convencionales no rms. Examinando nuestro resultado, vemos que las fuentes dependientes sumi-

nistran cada una 200 mW al resto del circuito. Por la conservación de la potencia promedio, la resistencia debe absorber estos 400 mW. Además, la fuente independiente suministra 0.4 vars al inductor.

Finalmente, nótese que pueden utilizarse valores rms para describir la magnitud de las fuentes en los archivos de entrada SPICE. En este caso, todas las magnitudes fasoriales de corriente y voltaje que se calculen también estarán en rms, y el factor de $\frac{1}{2}$ debe omitirse de los cálculos de potencia compleja como en (10.40a).

EJERCICIOS

- 10.8.1.** Obténgase la potencia suministrada a la resistencia de $80\text{-}\Omega$.
Respuesta 13.0 mW



EJERCICIO 10.8.1

- 10.8.2.** Verifiquense los resultados del ejemplo 10.11 (figura 10.14) utilizando SPICE.

Respuesta 3.02 W, 2.74 vars. Nótese que se necesita correr el programa SPICE dos veces, uno en $\omega = 2 \text{ rad/s}$ y otro en $\omega = 3 \text{ rad/s}$ ($0.318 \text{ y } 0.477 \text{ Hz}$).

RESUMEN

Los cálculos de potencia son importantes no sólo para la generación de energía eléctrica e industrias de distribución, sino también en el diseño de circuitos eficientes de toda clase, y en particular en el diseño de circuitos miniaturizados que deben disipar calor en áreas sumamente reducidas. Al igual que en el caso de corrientes y voltajes en los dos capítulos anteriores, los cálculos de potencia en circuitos en estado estable ac se simplifican en gran medida mediante el uso de fasores.

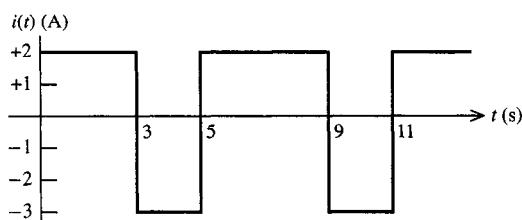
- Para variables terminales $v(t)$ e $i(t)$ que satisfacen la convención de signo pasivo, una potencia instantánea $p(t) = v(t)i(t)$ positiva implica que el circuito entre las terminales *absorbe* potencia en t ; si es negativa, implica que *suministra* potencia al resto del circuito en t .
- La potencia promedio es igual al producto de la amplitud de la corriente por la amplitud del voltaje y por el coseno de la diferencia entre sus ángulos de fase. Si la corriente y el voltaje

satisfacen la convención de signo pasivo, una potencia promedio mayor que cero implica que, en promedio, se disipa potencia; si es menor a cero, que se suministra al resto del circuito.

- El valor rms de un sinusode es igual a su amplitud dividida por $\sqrt{2}$. Un fasor rms es un fasor cuya magnitud es igual al valor rms del sinusode correspondiente.
- La parte real de la potencia compleja $S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^*$ es la potencia compleja promedio (en unidades de watts SI), la parte imaginaria es la potencia reactiva (unidades de vars SI).
- En un circuito que contiene fuentes con frecuencias diferentes, la potencia total de cada componente es la suma del suministro o disipación de la potencia en cada frecuencia.
- Se suministra potencia máxima a la impedancia de la carga si ésta es el conjugado complejo de la impedancia equivalente de Thevenin del resto del circuito.
- Todas las formas de potencia se conservan: instantánea, promedio, reactiva y compleja.
- El factor de potencia es el coseno del ángulo de fase entre el voltaje y la corriente. El factor de potencia unitaria requiere que la mínima corriente rms suministre una cantidad fija de potencia promedio a una carga, a un nivel de voltaje dado.

PROBLEMAS

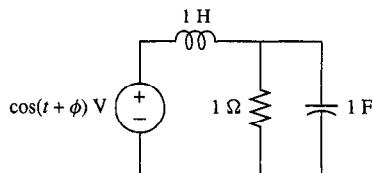
10.1. $i(t)$ fluye a través de una resistencia $1-k\Omega$. Obtenga T , el periodo de $i(t)$, T_p , el periodo de la potencia instantánea y P , la potencia promedio.



PROBLEMA P10.1

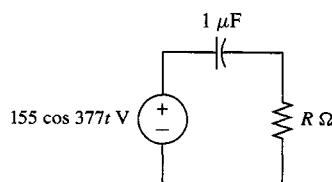
10.2. Sea $v(t) = 2 \cos \pi t$ V para $3n \leq t < 3n + 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y $v(t) = 0$ para todos los demás valores. Si $v(t)$ pasa a través de una resistencia $1-\Omega$, dibuje la potencia instantánea $p(t)$ y obtenga la potencia promedio P .

10.3. Obtenga la potencia promedio suministrada a la resistencia cuando $\phi = 0$. ¿Cuándo depende la potencia promedio del ángulo de fase ϕ ?



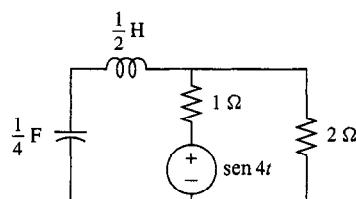
PROBLEMA P10.3

10.4. ¿Para qué valor de R la resistencia absorbe 100 W de potencia promedio?



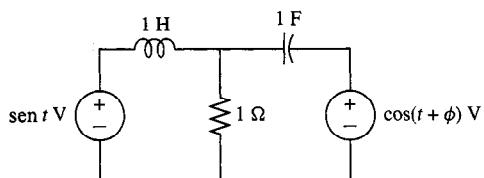
PROBLEMA P10.4

10.5. Obtenga la potencia promedio suministrada a cada elemento RLC y la potencia promedio suministrada por la fuente.



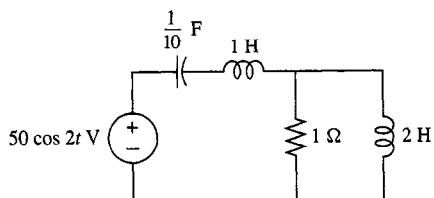
PROBLEMA P10.5

10.6. ¿Para qué valor de ϕ la potencia promedio suministrada por la resistencia $1-\Omega$ será mínima?



PROBLEMA P10.6

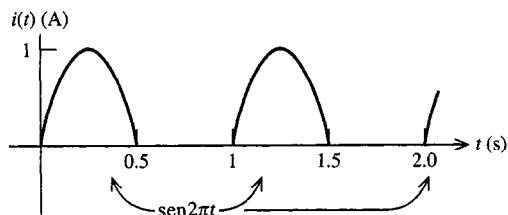
- 10.7.** Dibuje el circuito fasorial rms y obtenga la potencia promedio suministrada por la fuente.



PROBLEMA P10.7

- 10.8.** Determine el valor rms de la onda de potencia que aparece en el ejercicio 10.1.1.

- 10.9.** Determine la corriente rms; $i(t)$ es periódica con un periodo de 1 s, y es igual a $\sin 2\pi t$ para $0 \leq t < 0.5$, y cero para $0.5 \leq t < 1$ s.



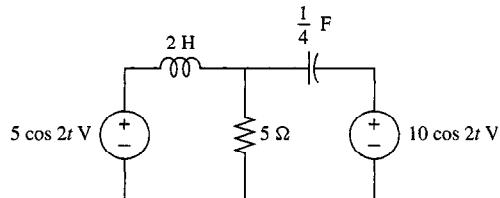
PROBLEMA P10.9

- 10.10.** Use fasores rms para resolver el problema 10.5.

- 10.11.** Demuestre que la potencia promedio absorbida por una impedancia Z , puede expresarse como $P = |I_{rms}|^2 \operatorname{Re} Z$, donde I_{rms} es el fasor de corriente rms.

- 10.12.** Obtenga una expresión para P , la potencia promedio absorbida por una impedancia Z , en términos de $|V_{rms}|^2$, donde V_{rms} es el fasor de voltaje rms a través de la impedancia.

- 10.13.** Dibuje el circuito fasorial rms y obtenga la potencia promedio suministrada a cada elemento.

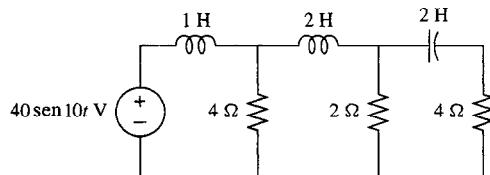


PROBLEMA P10.13

- 10.14.** Una impedancia $Z = 2 - 3j \Omega$ transmite una corriente $i(t) = 3 \sin(10t - 14^\circ)$ A. Obtenga la potencia compleja absorbida por Z .

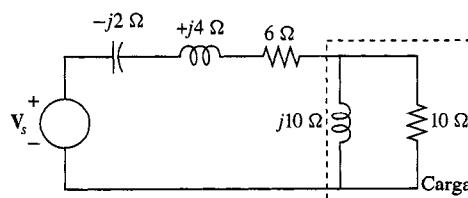
- 10.15.** Una combinación en serie de una resistencia y un capacitor absorbe 100 W y -42 vars a 60 Hz. Si $R = 100 \Omega$, ¿cuánto debe ser C ?

- 10.16.** Determine la potencia compleja suministrada por la fuente. Utilice el método de escalera para obtener la impedancia equivalente.



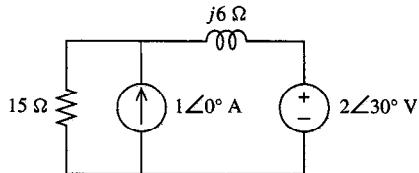
PROBLEMA P10.16

- 10.17.** V_s es el factor de fuente rms. ¿Cuánto debe ser $|V_s|$ para que la potencia promedio absorbida por la carga sea de 25 W?



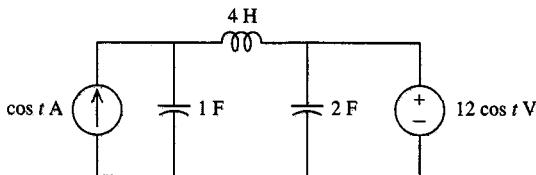
PROBLEMA P10.17

10.18. Obtenga la potencia compleja suministrada por cada una de las dos fuentes en el circuito fasorial rms que se muestra.



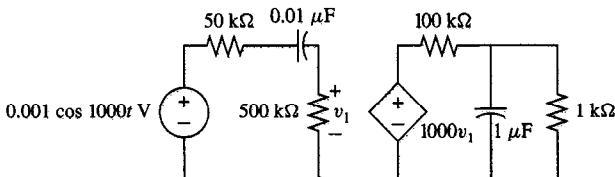
PROBLEMA P10.18

10.19. Obtenga la potencia compleja suministrada por cada fuente.



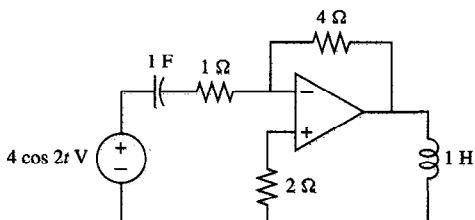
PROBLEMA P10.19

10.20. Determine la potencia reactiva Q absorbida por cada elemento.



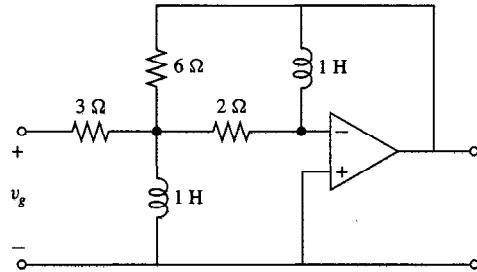
PROBLEMA P10.20

10.21. Obtenga la potencia compleja suministrada a cada resistencia.



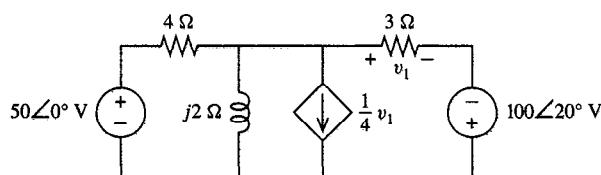
PROBLEMA P10.21

10.22. Obtenga la potencia compleja suministrada a cada inductor y resistencia si $v_g = 0.10 \sin(2t + 30^\circ)$ V.



PROBLEMA P10.22

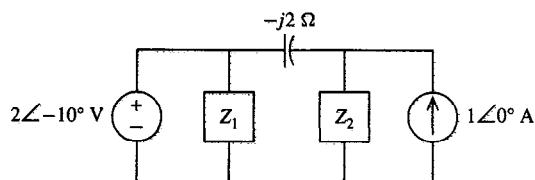
10.23. Para el circuito fasorial rms que se muestra, obtenga la potencia compleja, suministrada por la fuente controlada.



PROBLEMA P10.23

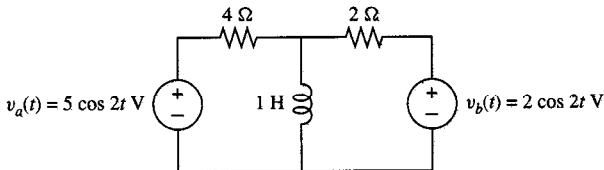
10.24. Resuelva el problema 10.5 obteniendo la potencia compleja para cada elemento y tomando la parte real.

10.25. Si $Z_1 = 4/-20^\circ \Omega$ y $Z_2 = 15^\circ$, ¿cuánto debe ser $|Z_2|$ para que suministre 10 W a Z_2 ? El diagrama es un circuito de fasores rms.



PROBLEMA P10.25

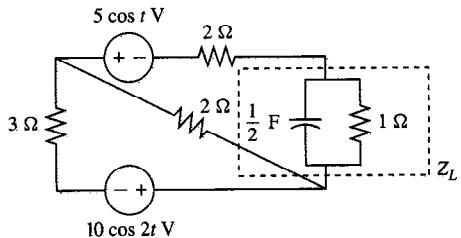
10.26. Obtenga P_a , la potencia promedio absorbida por la resistencia de 4-Ω debida a $v_a(t)$ eliminándose $v_b(t)$ y P_b la potencia absorbida por los mismos elementos debidos a $v_b(t)$ con $v_a(t)$ eliminada. Demuestre que la potencia P absorbida por este elemento en este circuito no es igual a la suma $P_a + P_b$.



PROBLEMA P10.26

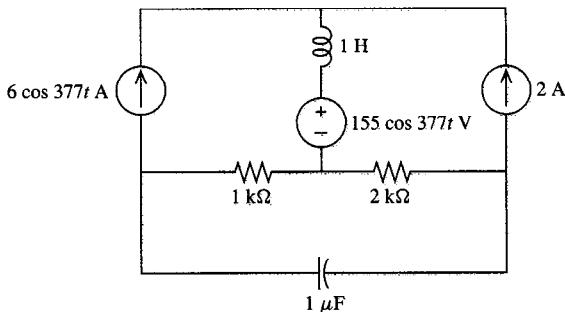
10.27. Determinese la potencia compleja suministrada por la fuente $\sin t$ V en el problema 10.6 si $\phi = 0$.

10.28. Calcule los watts suministrados a la carga Z_L .



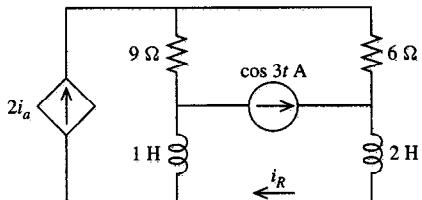
PROBLEMA P10.28

10.29. Determine la potencia promedio P suministrada por cada una de las tres fuentes.



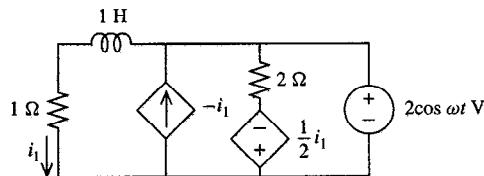
PROBLEMA P10.29

10.30. Obtenga la potencia compleja S absorbida por cada uno de los elementos pasivos.



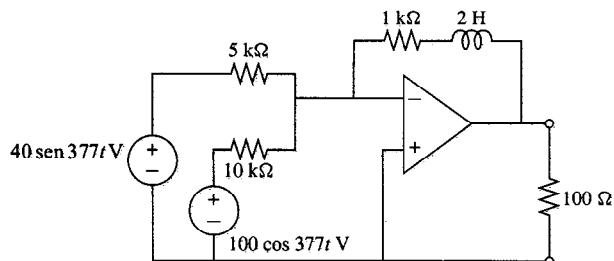
PROBLEMA P10.30

10.31. Obtenga la potencia reactiva inducida por el inductor si (a) $\omega = 1$ rad/s; (b) $\omega = 0$.



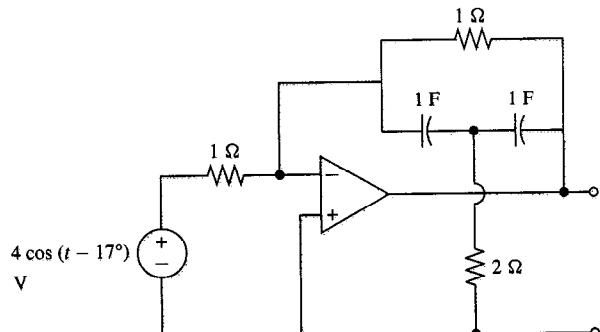
PROBLEMA P10.31

10.32. Obtenga la potencia suministrada a la carga (resistencia de 100-Ω).



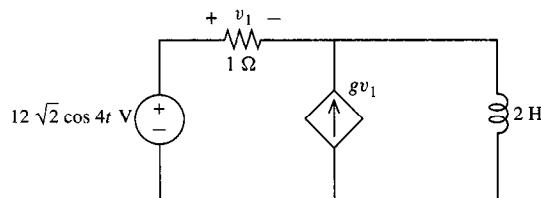
PROBLEMA P10.32

10.33. (a) Determine la potencia compleja suministrada por la fuente independiente; (b) ¿la respuesta a (a) depende del ángulo de fase de la fuente (-17°)? Explique.



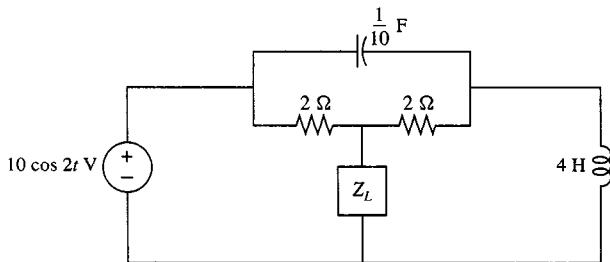
PROBLEMA P10.33

10.34. Obtenga el valor de la transconductancia g para la que se maximiza la potencia promedio real suministrada por la fuente independiente. Repítase para la potencia aparente.



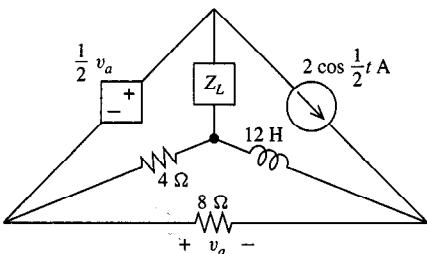
PROBLEMA P10.34

10.35. Obtenga la impedancia de carga Z_L que absorberá la potencia promedio real máxima. Obtenga el valor de la potencia promedio real máxima en la carga.



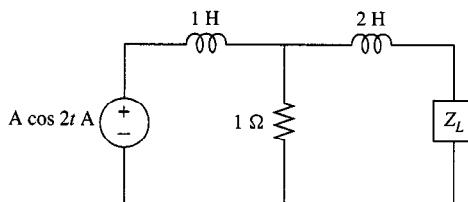
PROBLEMA P10.35

10.36. Para una máxima transferencia de potencia a la carga Z_L , ¿debemos construir Z_L como un circuito RL o circuito RC ?



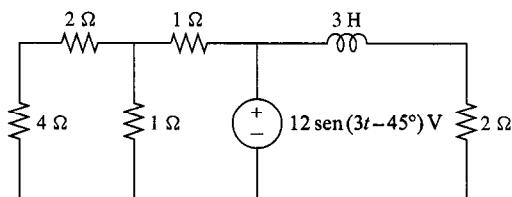
PROBLEMA P10.36

10.37. ¿Cuál debe ser la amplitud A de la carga para suministrar 100 W a la carga puramente resistiva $Z_L = 2 \Omega$? ¿A qué se reduciría si pudiéramos ajustar Z_L para absorber 100 W utilizando el valor mínimo de A ?



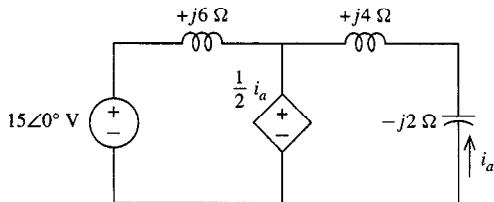
PROBLEMA P10.37

10.38. Obtenga la potencia reactiva absorbida por el inductor. (Sugerencia: obtenga la potencia compleja suministrada por la fuente.)



PROBLEMA P10.38

10.39. Verifique la conservación de la potencia compleja para este circuito fasorial rms.



PROBLEMA P10.39

10.40. Una fuente de voltaje rms ideal de 220-V es puesta a través de una impedancia de carga de $Z = 11 + j11 \Omega$. ¿Cuántos vars suministra la fuente? Si $\omega = 377$ rad/s, ¿qué capacitor C conectado a la carga reducirá los vars suministrados por la fuente a cero?

10.41. Demuestre que para todo $R > 0$, $C > 0$, y $\omega > 0$, el factor de potencia de un circuito RC en serie y de un circuito RC en paralelo está de adelante.

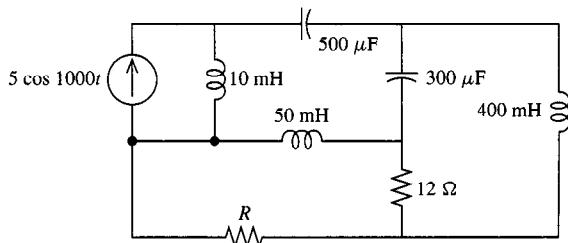
10.42. Demuestre que para todo $R > 0$, $L > 0$, y $\omega > 0$, el factor de potencia de un circuito RL en serie y de un circuito RL paralelo está retardada.

Problemas usando SPICE

10.43. Una impedancia de carga $Z_L = 1 + j0.5$ está conectada a una fuente de corriente ideal rms de 10-mA. ¿Cuál es el factor de potencia de la carga? ¿En cuánto podría reducirse el régimen?

men de voltaje de la fuente de corriente si se pone un capacitor en serie con la carga, creando un factor de potencia general de 0.95 de atraso? Utilice SPICE para determinar la capacitancia que corrija la pf a 0.95 retardada.

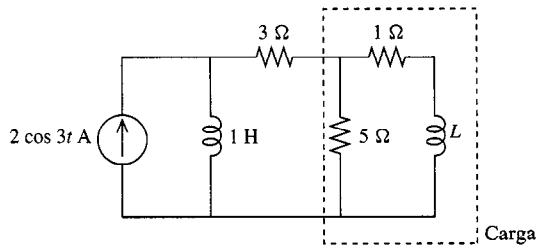
10.44. Use SPICE para ayudar a determinar el valor de R para la que la fuente suministre 1.00 W al resto del circuito.



PROBLEMA P10.44

10.45. Repita el problema 10.22 utilizando SPICE. Utilice el modelo del op amp ideal de amplificador de voltaje de la figura 3.7 con una ganancia de trayectoria abierta $A = 10^6$.

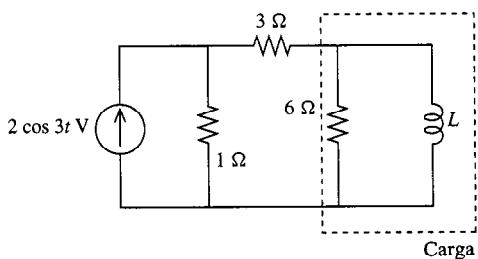
10.46. ¿Para qué valor de L será máxima la potencia promedio real absorbida por una carga? Utilice SPICE.



PROBLEMA P10.46

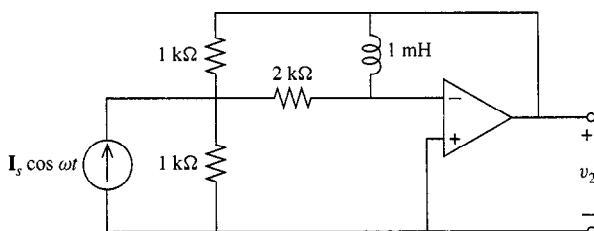
Problemas más complejos

10.47. ¿Para qué valor de L será máxima la potencia promedio real absorbida por la carga?



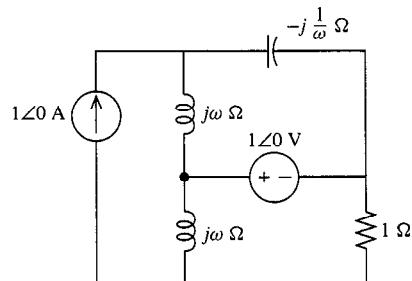
PROBLEMA P10.47

10.48. ¿A qué frecuencia de ω se maximiza el valor rms de v_2 ?



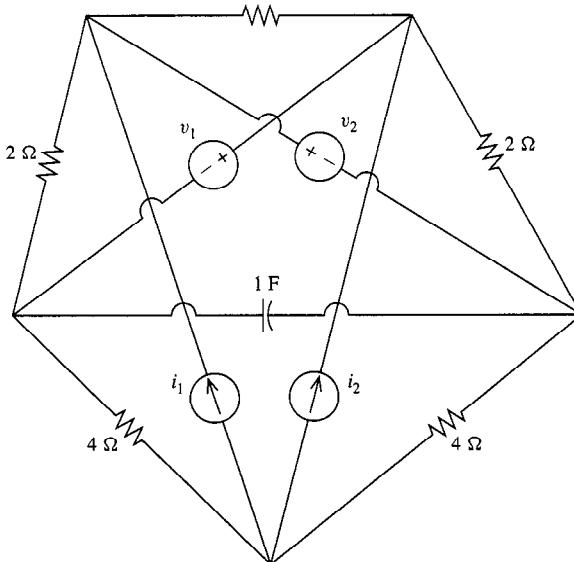
PROBLEMA P10.48

10.49. ¿Para qué rango ω la corriente suministra más potencia promedio real que la fuente de voltaje?



PROBLEMA P10.49

10.50. Obtenga la potencia compleja suministrada por cada fuente. $i_1 = 2 \cos 2t A$, $i_2 = 6 \sin 2t A$, $v_1 = 12 \sin(3t - 45^\circ) V$, $v_2 = 24 \sin(3t - 45^\circ) V$.



PROBLEMA P10.50

Circuitos trifásicos



Nikola Tesla
1856-1943

Tesla fue el más grande de los inventores en la ingeniería eléctrica.

W.H. Eccles

Si Thomas A. Edison tuvo algún rival para el título del más grande inventor del mundo, ciertamente fue el ingeniero croata-estadounidense Nikola Tesla. Cuando el alto y delgado Tesla llegó a Estados Unidos en 1884, el país estaba en plena "batalla de las corrientes", entre Thomas A. Edison que promovía la corriente dc, y George Westinghouse, líder de las fuerzas en favor de ac. Tesla rápidamente sentó la discusión inclinándose hacia la corriente ac con sus maravillosas invenciones, tales como el sistema polifásico de potencia ac, el motor de inducción, la bobina de Tesla y la luz fluorescente.

Tesla nació en Austria-Hungría (hoy Croacia), hijo de un sacerdote de la Iglesia Ortodoxa Griega. Desde niño, Tesla tuvo talento para las matemáticas y una increíble memoria, con la capacidad de recitar de memoria poemas y libros enteros. Pasó dos años en el Instituto Politécnico de Graz, Austria, donde concibió la idea del campo magnético giratorio, que posteriormente fue la base para su motor de inducción. En este punto de la vida de Tesla, su padre falleció y decidió salir de la escuela aceptando un empleo en París, con la compañía Continental Edison. Dos años después llegó a Estados Unidos, donde permaneció hasta su muerte. Durante su notable vida fue autor de 700 patentes, solucionó la disputa corriente ac contra corriente dc y fue el primer responsable para la selección de los 60 ciclos como la frecuencia ac convencional en Estados Unidos y en gran parte del mundo. Tras su fallecimiento, se le honró eligiendo el *tesla* como la unidad de densidad de flujo magnético.

Contenido del capítulo

- 11.1 Sistemas monofásicos de tres hilos
- 11.2 Sistemas trifásicos Y-Y
- 11.3 Transmisión de potencia monofásica contra trifásica
- 11.4 Conexión delta
- 11.5 Transformaciones Y-Delta
- 11.6 SPICE y los circuitos trifásicos
- Resumen
- Problemas



Como ya lo hemos advertido, una utilización sumamente importante del análisis en estado estable ac es su aplicación a sistemas de potencia, la mayoría de los cuales son sistemas de corriente alterna. La razón principal para esto es que económicamente es factible transmitir energía a grandes distancias únicamente si los voltajes involucrados son muy altos, y es más fácil elevar y reducir voltajes en sistemas ac que en los dc. El voltaje alterno puede elevarse para la transmisión y ser reducido para su distribución con transformadores, como lo veremos en el capítulo 15. Los transformadores no tienen partes móviles y son de construcción relativamente simple. Por otra parte, en un sistema dc, las ondas primero deben ser convertidas a ac antes de que los transformadores puedan utilizarse para cambiar los niveles de voltaje, y luego convertirlos nuevamente a dc. Este proceso requiere de costosos interruptores de alto poder, y disipa una parte de la energía que convierte.

Además, por razones de economía y eficiencia, casi toda la energía eléctrica es producida por fuentes *polifásicas* (aquellas que generan voltajes con más de una fase). En un circuito monofásico, la potencia instantánea transmitida a una carga tiene pulsaciones, aun cuando la corriente y el voltaje estén en fase. Por otra parte, el sistema polifásico es de algún modo similar a un motor automotriz de muchos cilindros, en el sentido que la potencia transmitida es mucho más estable. Una ventaja económica es que el peso de los conductores y componentes asociados requeridos en un sistema polifásico es apreciablemente menor que el que se necesita para un sistema monofásico que transmite la misma potencia. Virtualmente toda la potencia producida en el mundo es energía polifásica a 50 o 60 Hz; en Estados Unidos, la frecuencia convencional es de 60 Hz.

Iniciaremos el presente capítulo con sistemas monofásicos y de tres hilos, pero nos concentraremos en circuitos trifásicos, que son con mucho los más comunes entre los sistemas polifásicos. En este último caso, las fuentes son generadores trifásicos que producen un conjunto *balanceado* de voltajes, con el que queremos decir tres voltajes sinusoidales que tienen la misma amplitud y frecuencia, pero con fases desplazadas en 120° . De este modo, la fuente trifásica es equivalente a tres fuentes monofásicas interconectadas, cada una generando un voltaje con una fase distinta. Si las tres corrientes extraídas de las fuentes también constituyen un conjunto balanceado, entonces se dice que el sistema es un sistema trifásico *balanceado*. Se requiere de un sistema balanceado que obtenga todos los beneficios de la potencia polifásica, y este es el caso sobre el que concentraremos nuestra atención.

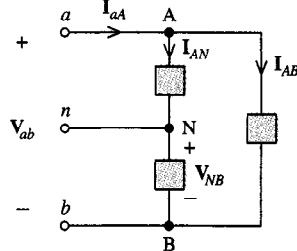


FIGURA 11.1 Notación de doble subíndice.

Antes de proceder al caso trifásico, en esta sección haremos una digresión para establecer nuestra notación y consideraremos como ejemplo un sistema monofásico de uso doméstico común. Los circuitos que hemos estudiado hasta ahora son monofásicos, y son un buen marco de referencia para comprender el significado de la fase múltiple.

En el presente capítulo, nos será sumamente útil la notación de dos subíndices introducida para voltajes en el capítulo 1. En el caso de fasores, la notación es \mathbf{V}_{ab} para el voltaje de un punto a con respecto al punto b . También utilizaremos una notación de doble subíndice para la corriente de, por ejemplo, I_{aA} que fluye en la trayectoria *directa* del nodo a al nodo A . Estas cantidades aparecen ilustradas en la figura 11.1, donde la trayectoria directa (sin nodos intermedios) de A a B se distingue de una trayectoria indirecta de A a B a través de N .

Debido a que resultan expresiones más simples para la potencia promedio, utilizaremos valores rms de voltaje y corriente y fasores rms, durante todo el presente capítulo. Es decir, si

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= |\mathbf{V}| \angle 0^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{I} &= |\mathbf{I}| \angle -\theta \text{ A rms}\end{aligned}\quad (11.1)$$

son fasores rms asociados con un elemento que tiene una impedancia

$$Z = |Z| \angle \theta \Omega \quad (11.2)$$

suministrada al elemento es

$$\begin{aligned}P &= |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{I}| \cos \theta \\ &= |\mathbf{I}|^2 \operatorname{Re} Z W\end{aligned}\quad (11.3)$$

En el dominio del tiempo, el voltaje y corriente son

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{2}|\mathbf{V}| \cos \omega t \text{ V} \\ i &= \sqrt{2}|\mathbf{I}| \cos(\omega t - \theta) \text{ A}\end{aligned}$$

Todos los fasores del presente capítulo serán fasores rms, cuya magnitud corresponde al valor rms de la corriente o voltaje asociados, como se introdujeron en la sección 10.2.

Ejemplo 11.1

El uso de dos subíndices hace más fácil el manejo de fasores, tanto analítica como geométricamente. Por ejemplo, en la figura 11.2(a), el voltaje \mathbf{V}_{ab} es

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb}$$

Esto es evidente sin necesidad de hacer referencia a un circuito, puesto que por LVIK el voltaje entre dos puntos a y b es el mismo sin importar la trayectoria, que en este caso es la trayectoria a, n, b . Además, puesto que $\mathbf{V}_{nb} = -\mathbf{V}_{bn}$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} \\ &= 100 - 100 \angle -120^\circ\end{aligned}$$

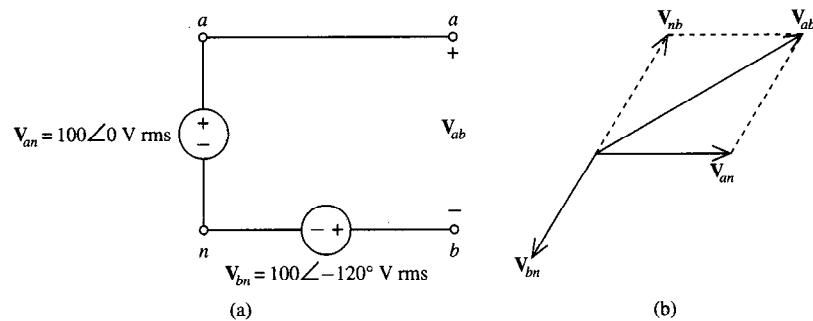


FIGURA 11.2 (a) Circuito fasorial; (b) diagrama fasorial correspondiente.

que, después de simplificarla, es

$$\mathbf{V}_{ab} = 100\sqrt{3}\angle 30^\circ \text{ V rms}$$

En la figura 11.2(b) se muestran gráficamente estos pasos.

Una fuente monofásica de tres hilos, como la que se muestra en la figura 11.3, es aquella que tiene tres terminales de salida, a , b , y una terminal *neutra* n para la cual son iguales los voltajes \mathbf{V}_{ab} de las terminales, es decir:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_1 \quad (11.4)$$

Esta es una disposición común en una residencia estadounidense que tiene tanto 115 V como 230 V rms, puesto que si $|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_1| = 115$ V rms, entonces $|\mathbf{V}_{ab}| = |2\mathbf{V}_1| = 230$ V rms.

Ahora consideremos la fuente de la figura 11.3(a) cargada con dos cargas idénticas, ambas con una impedancia Z_1 , como se muestra en la figura 11.3(b). Las corrientes en las

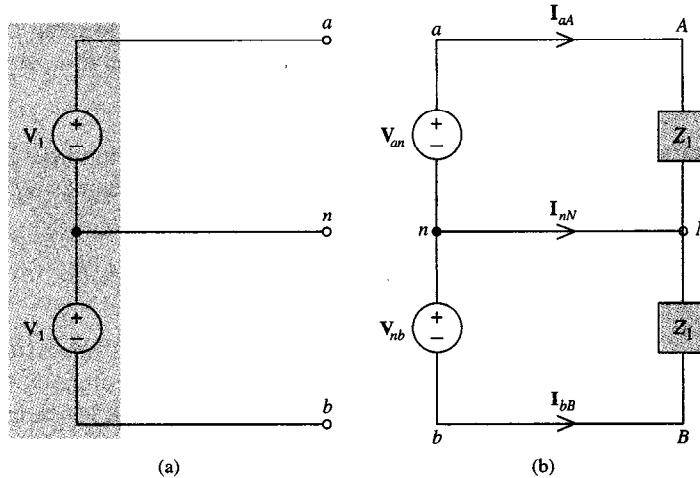


FIGURA 11.3 (a) Circuito monofásico de tres hilos; (b) circuito monofásico de tres hilos con dos cargas idénticas.

líneas aA y bB son

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{Z_1} = \frac{\mathbf{V}_1}{Z_1}$$

y

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{Z_1} = -\frac{\mathbf{V}_1}{Z_1} = -\mathbf{I}_{aA}$$

Por consiguiente, la corriente en el hilo neutro, nN , por LCK es

$$\mathbf{I}_{nN} = -(\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB}) = 0$$

Siempre es el caso que un hilo que no transmite corriente puede eliminarse libremente en cualquier circuito sin afectar ninguna corriente o voltaje, puesto que su eliminación no cambia ninguna LVK, LCK, o ecuación de ley de elementos para ese circuito. De este modo, en la figura 11.3(b), el hilo neutro podría ser eliminado sin cambiar ninguna corriente o voltaje en el sistema. Utilizaremos este procedimiento para simplificar circuitos a lo largo de este capítulo.

Si las líneas aA y bB no son conductores perfectos, pero tienen impedancias iguales Z_2 , entonces \mathbf{I}_{nN} sigue siendo cero porque simplemente añadimos las impedancias de Z_1 y Z_2 y tenemos esencialmente la misma situación que en la figura 11.3(b). Ciertamente, en el caso más general que aparece en la figura 11.4, la corriente neutra \mathbf{I}_{nN} sigue siendo cero. Esto puede verse escribiendo las dos ecuaciones de malla

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3)\mathbf{I}_{aA} + Z_3\mathbf{I}_{bB} - Z_1\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1$$

$$Z_3\mathbf{I}_{aA} + (Z_1 + Z_2 + Z_3)\mathbf{I}_{bB} + Z_1\mathbf{I}_3 = -\mathbf{V}_1$$

y, sumando el resultado, con el que se obtiene

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3)(\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB}) + Z_3(\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB}) = 0$$

o

$$\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} = 0 \quad (11.5)$$

Puesto que por LCK el lado izquierdo de esta última ecuación es igual a $-\mathbf{I}_{nN}$, la corriente neutra es cero. Esta es una consecuencia de la simetría de la figura 11.4.

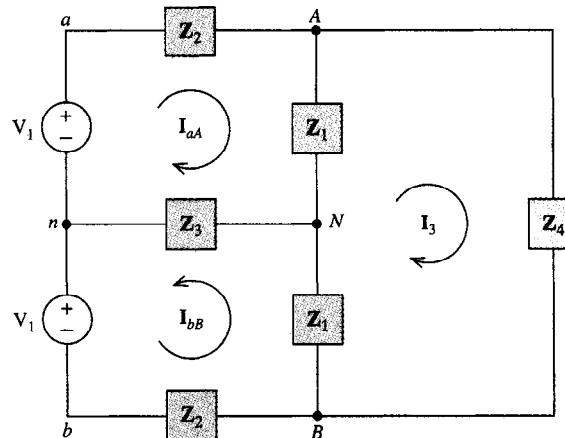


FIGURA 11.4 Sistema simétrico monofásico de tres hilos.

Si la simetría de la figura 11.4 se rompe teniendo cargas distintas en las terminales $A-N$ y $N-B$ o impedancias de línea distintas en las líneas aA y bB , entonces se tendrá una corriente neutra.

Ejemplo 11.2

Por ejemplo, consideremos el circuito de la figura 11.5. Nótese que la carga a través de las terminales AN y NB son distintas, y se rompe la simetría de la figura 11.4.

Las ecuaciones de malla, en forma vector-matriz, son

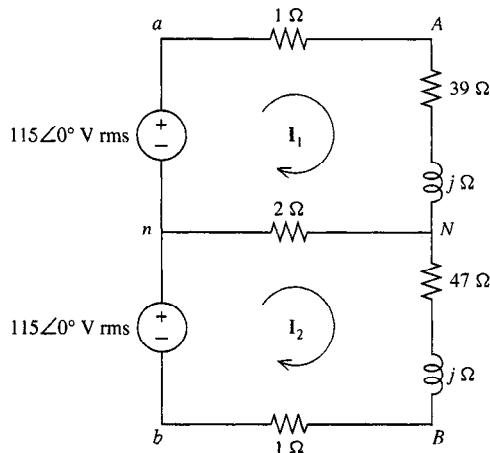


FIGURA 11.5 Sistema monofásico no simétrico de tres hilos.

$$\begin{bmatrix} 42 + j & -2 \\ -2 & 50 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115/0 \\ 115/0 \end{bmatrix}$$

El determinante es

$$\Delta = (42 + j)(50 + j) - 4 = 2097/2.51^\circ$$

y resolviendo por inversión de matrices,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{115/0}{\Delta} \begin{bmatrix} 50 + j & +2 \\ +2 & 42 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.85/-1.41^\circ \\ 2.41/-1.21^\circ \end{bmatrix}$$

de forma que la corriente neutra $\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 0.44/177^\circ$ A rms y no es cero.

EJERCICIOS

11.1.1. Derívese (11.5) por superposición aplicada a la figura 11.4.

11.1.2. Obtenga la potencia completa S_{AN} y S_{NB} suministrada a las cargas $Z_{AN} = 39 + j\Omega$, $Z_{NB} = 47 + j\Omega$, respectivamente, de la figura 11.5.

Respuesta $317 + j8.12$; $273 + j5.81$

11.1.3. Obténgase la potencia promedio real P_{aa} , P_{bb} , y P_{nn} que se pierden en las líneas de la figura 11.5.

Respuesta 8.12 W; 5.81 W; 0.39 W

11.1.4. Obtenga la potencia promedio real P_{an} y P_{nb} suministrada por las dos fuentes en la figura 11.5. Compruebe los resultados en los ejercicios 11.1.2 y 11.1.3 para la conservación de potencia.

Respuesta 328 W; 277 W

11.2 SISTEMAS TRIFÁSICOS Y-Y

Consideremos la fuente trifásica de la figura 11.6(a), que tiene terminales en línea a , b y c y una terminal *neutra* n . En este caso, se dice que la fuente está *Y-conectada*. Una representación equivalente es la de la figura 11.6(b), que es algo más fácil de dibujar.

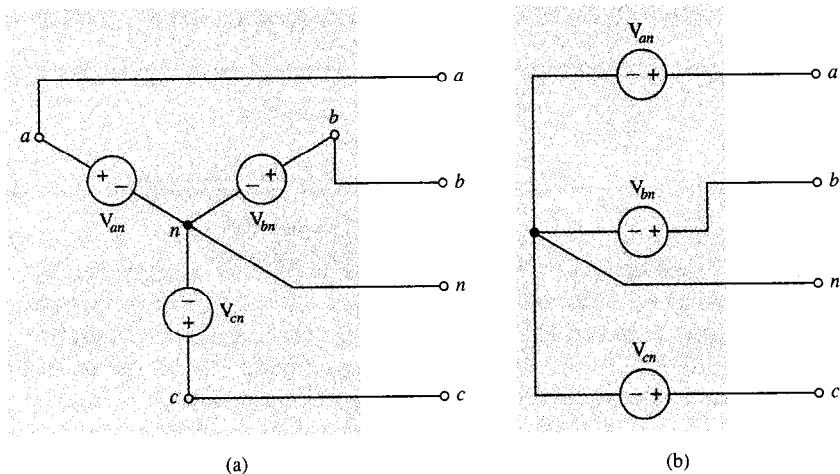


FIGURA 11.6 Dos representaciones de una fuente Y-conectada.

Los voltajes V_{an} , V_{bn} y V_{cn} entre las terminales de la línea y la terminal neutra se conocen como *voltajes de fase*, y la mayoría de los casos que consideramos están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= V_p/0^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p/-120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p/120^\circ \end{aligned} \quad (11.6)$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= V_p/0^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p/120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p/-120^\circ \end{aligned} \quad (11.7)$$

En ambos casos, cada voltaje de fase tiene la misma magnitud rms V_p y las fases están desplazadas en 120° , con \mathbf{V}_{an} arbitrariamente seleccionado como fasor de referencia. Este conjunto de voltaje se conoce como conjunto *balanceado* y está caracterizado por

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0 \quad (11.8)$$

como puede verse (11.6) o (11.7).

La secuencia de voltajes en (11.6) se designa *secuencia positiva* o *secuencia abc*, en tanto que la de (11.7) se conoce como *secuencia negativa* o *acb*. En la figura 11.7 se muestran diagramas fasoriales de las dos secuencias, y podemos ver por inspección que (11.8) es vigente. Es evidente que la única diferencia entre la secuencia positiva y la negativa es la

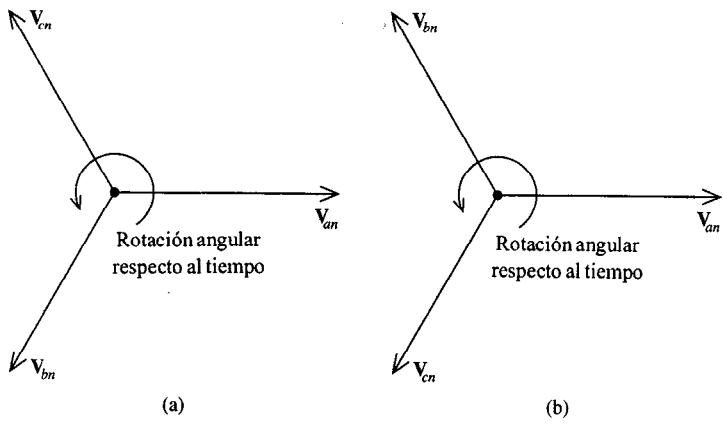


FIGURA 11.7 Secuencias de fase (a) positivas y (b) negativas.

elección arbitraria de las marcas de las terminales *a*, *b* y *c*. De este modo, y sin perder generalidad, consideraremos únicamente la secuencia positiva.

Mediante la figura 11.7(a), los voltajes en la secuencia *abc*, pueden estar cada uno relacionado a \mathbf{V}_{an} . Las relaciones, que posteriormente nos serán muy útiles, son

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{bn} &= \mathbf{V}_{an}/-120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= \mathbf{V}_{an}/120^\circ\end{aligned}\quad (11.9)$$

Los voltajes de *línea a línea*, o simplemente voltajes *de línea*, en la figura 11.6 son \mathbf{V}_{ab} , \mathbf{V}_{bc} y \mathbf{V}_{ca} , que pueden obtenerse de los voltajes de fase. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} \\ &= V_p/0^\circ + V_p/+60^\circ \\ &= (V_p) + (V_p) \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} V_p \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} V_p/30^\circ\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3} V_p/-90^\circ$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3} V_p/-210^\circ$$

Si denotamos por V_L la magnitud de los voltajes de línea, entonces tenemos

$$V_L = \sqrt{3} V_p \quad (11.10a)$$

y por consiguiente

$$\mathbf{V}_{ab} = V_L/30^\circ, \quad \mathbf{V}_{bc} = V_L/-90^\circ, \quad \mathbf{V}_{ca} = V_L/-210^\circ \quad (11.10b)$$

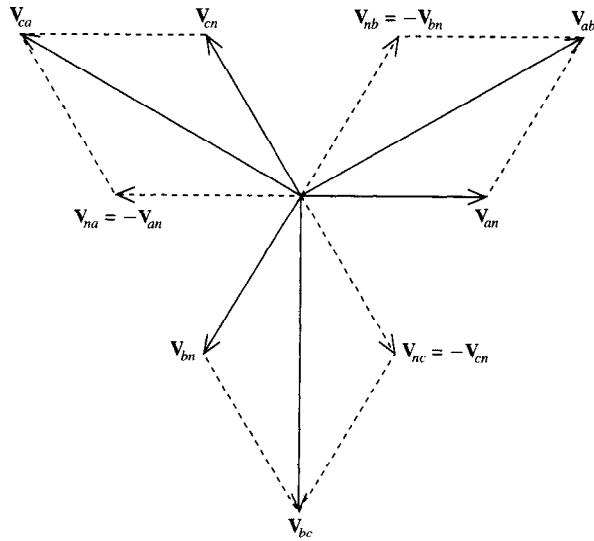


FIGURA 11.8 Diagrama fasorial que muestra voltajes de fase y de línea.

Examinando la figura 11.8, los voltajes de línea son también un conjunto balanceado, cuyas magnitudes exceden los voltajes por un factor de $\sqrt{3}$, y que están 30° fuera de fase respecto a ellos (el voltaje de línea \mathbf{V}_{ab} está adelantado al voltaje de fase \mathbf{V}_{an} en 30° , \mathbf{V}_{ca} se adelanta a \mathbf{V}_{cn} en 30° , y \mathbf{V}_{bc} se adelanta a \mathbf{V}_{bn} en 30°). Estos resultados pueden obtenerse gráficamente de los diagramas fasoriales que aparecen en la figura 11.8.

Ahora consideraremos el sistema de la figura 11.9, que es un sistema de cuatro hilos, trifásico y Y-Y-*balanceado*, si los voltajes de las fuentes están dados por (11.6). El término Y-Y se aplica puesto que tanto la fuente como la carga están conectadas en Y. Se dice que el sistema está balanceado, puesto que los voltajes de las fuentes constituyen un conjunto balanceado y la carga está balanceada (en este caso, cada *impedancia de fase* es igual al valor común Z_p). El cuarto hilo es una línea neutra $n-N$, que puesto que no transmite

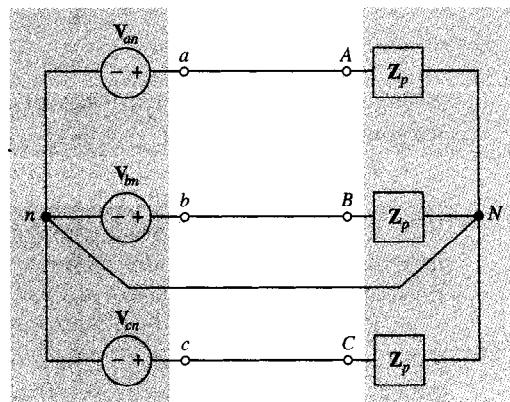


FIGURA 11.9 Sistema Y-Y balanceado.

corriente en este circuito simétrico, puede omitirse para formar un sistema trifásico de tres hilos.

Aplicando LVK alrededor de las trayectorias cerradas que contienen el hilo neutro, las corrientes de línea de la figura 11.9 son evidentemente

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{aA} &= \frac{\mathbf{V}_{an}}{Z_p} \\ \mathbf{I}_{bB} &= \frac{\mathbf{V}_{bn}}{Z_p} = \frac{\mathbf{V}_{an}/-120^\circ}{Z_p} = \mathbf{I}_{aA}/-120^\circ \\ \mathbf{I}_{cC} &= \frac{\mathbf{V}_{cn}}{Z_p} = \frac{\mathbf{V}_{an}/120^\circ}{Z_p} = \mathbf{I}_{aA}/120^\circ\end{aligned}\quad (11.11)$$

Los últimos dos resultados son la consecuencia de (11.9), y demuestran que las corrientes de línea también forman un conjunto balanceado. Por consiguiente, su suma es

$$-\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = 0$$

lo que confirma que el hilo neutro no transmite corriente en un sistema Y-Y balanceado de cuatro hilos.

En el caso de las cargas conectadas en Y, las corrientes en las líneas *aA*, *bB* y *cC* son también corrientes de fase (las corrientes transmitidas por las impedancias de fase). Si las magnitudes de la fase y las corrientes de línea son I_p e I_L , respectivamente, entonces $I_L = I_p$, y (11.11) se convierte en

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{aA} &= I_L/-\theta = I_p/-\theta \\ \mathbf{I}_{bB} &= I_L/-\theta - 120^\circ = I_p/-\theta - 120^\circ \\ \mathbf{I}_{cC} &= I_L/-\theta + 120^\circ = I_p/-\theta + 120^\circ\end{aligned}\quad (11.12)$$

donde θ es el ángulo de Z_p .

La potencia promedio P_p suministrada a cada fase de la figura 11.9 es

$$\begin{aligned}P_p &= V_p I_p \cos \theta \\ &= I_p^2 \operatorname{Re} Z_p\end{aligned}\quad (11.13)$$

y la potencia total suministrada a la carga es

$$P = 3P_p$$

El ángulo θ de la impedancia de fase es el ángulo del factor de potencia de la carga trifásica, así como de la fase única.

Ahora, en lugar de suponer que son conductores perfectos, se utilizará una impedancia Z_L de línea para modelar cada una de las líneas *aA*, *bB* y *cC* y que la impedancia de la línea neutra Z_N , no necesariamente igual a Z_L , se inserta en la línea *nN* en serie con las impedancias de fase. Los dos conjuntos de impedancias pueden combinarse para formar líneas conductoras perfectas *aA*, *bB* y *cC*, con una impedancia de carga $Z_p + Z_L$ en cada fase.

Para determinar el efecto de Z_N , consideremos todo el conjunto de leyes LCK, LVK y de elemento para este circuito. Las corrientes y voltajes que resuelven estas ecuaciones para el caso $Z_N = 0$ incluyen $I_{nN} = 0$, puesto que en este caso el circuito está balanceado. Pero estas mismas corrientes y voltajes deben resolver las ecuaciones de circuito para cualquier $Z_N \neq 0$. Esto es implicado por el hecho de que, al sustituir las soluciones

para el caso $Z_N = 0$ en las ecuaciones que contienen una Z_N arbitraria, no cambia ningún término en las ecuaciones, puesto que todo término que contiene Z_N es multiplicado por cero (I_{nN} o V_{nN}). Mediante este argumento, vemos que *en cualquier circuito que contenga una impedancia Z que no extraiga corriente, Z puede ser cambiada arbitrariamente sin afectar ninguna corriente o voltaje*. En particular, podemos reemplazar Z por un circuito cerrado ($Z = 0$) o un circuito abierto ($Z = \infty$).

Ejemplo 11.3

Como ejemplo, obtengamos las corrientes de línea en la figura 11.10. Podemos combinar la impedancia de línea $1\text{-}\Omega$ y la impedancia de fase $(3+j3)\text{-}\Omega$ para obtener

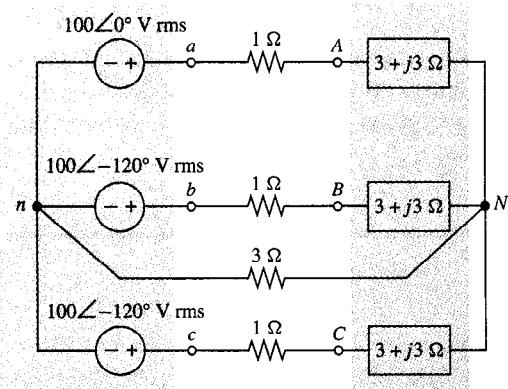


FIGURA 11.10 Sistema balanceado con impedancias de línea.

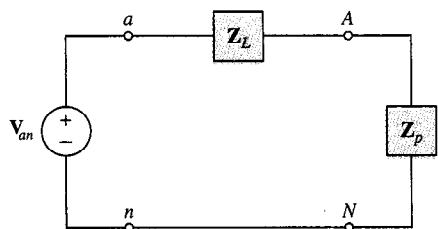


FIGURA 11.11 Fase única para un análisis por fase.

$$Z_p = 4 + j3 = 5/\underline{36.9^\circ} \Omega$$

en la carga de fase efectiva. Puesto que en la discusión anterior no hay corriente neutra, obtenemos

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{100/\underline{0^\circ}}{5/\underline{36.9^\circ}} = 20/\underline{-36.9^\circ} \text{ A rms}$$

Las corrientes forman un conjunto balanceado y de secuencia positiva, por lo que también tenemos

$$\mathbf{I}_{bB} = 20/\underline{-156.9^\circ} \text{ A rms}, \quad \mathbf{I}_{cC} = 20/\underline{-276.9^\circ} \text{ A rms}$$

Este ejemplo fue resuelto sobre una base “por fases”. Puesto que la impedancia en la línea neutra es inmaterial en un sistema balanceado Y-Y, podemos imaginar la línea neutra como un circuito cerrado. Podemos hacer esto si contiene una impedancia, o incluso si el hilo neutro no está presente (un sistema de tres hilos). Entonces nos basta con examinar una sola fase, por ejemplo, la fase A, que consiste de la fuente \mathbf{V}_{an} en serie con Z_L y Z_p , como se muestra en la figura 11.11. (La línea nN es reemplazada por un circuito cerrado.) La corriente de línea \mathbf{I}_{aA} , el voltaje de fase $\mathbf{I}_{aA} Z_p$, y la caída de voltaje en la línea $\mathbf{I}_{aA} Z_L$, pueden también obtenerse a partir de este análisis de fase única. Los demás voltajes y corrientes del sistema pueden obtenerse de forma similar, o de los resultados anteriores, puesto que el sistema está balanceado.

Como otro ejemplo, supongamos que tenemos una fuente balanceada conectada en Y, con un voltaje de línea $V_L = 200$ V rms a una carga balanceada conectada en Y con $P = 900$ W y con un factor de potencia de 0.9 de atraso. Obtengamos la corriente de línea I_L y la impedancia de fase Z_p . Puesto que la potencia suministrada a la carga es de 900 W, la potencia suministrada a cada fase es $P_p = \frac{900}{3} = 300$ W, y de

$$P_p = V_p I_p \cos \theta$$

obtenemos

$$300 = \left(\frac{200}{\sqrt{3}} \right) I_p (0.9)$$

Por consiguiente, puesto que para una carga conectada en Y la corriente de fase es también la corriente de línea, tenemos

$$I_L = I_p = \frac{3\sqrt{3}}{2(0.9)} = 2.89 \text{ A rms}$$

La magnitud de Z_p está dada por

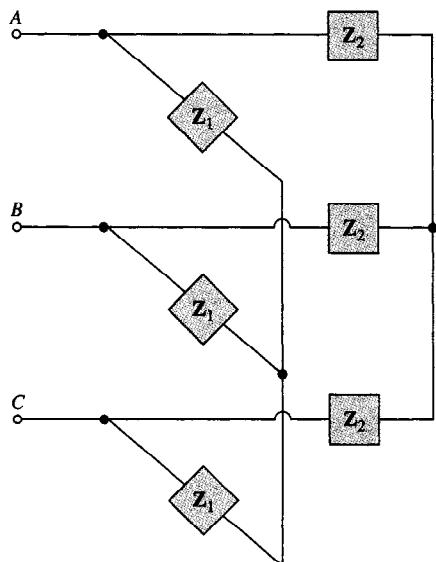
$$|Z_p| = \frac{V_p}{I_p} = \frac{200/\sqrt{3}}{3\sqrt{3}/(2)(0.9)} = 40 \Omega$$

y puesto que $\theta = \cos^{-1}0.9 = 25.84^\circ$ es el ángulo de Z_p , obtenemos

$$Z_p = 40/25.84^\circ \Omega$$

Si la carga no está balanceada, pero hay un hilo neutro que es un conductor perfecto, aún podemos utilizar el método por fases de solución para cada fase. Sin embargo, si no es éste el caso, este método abreviado no puede aplicarse.

EJERCICIOS



EJERCICIO 11.2.3

- 11.2.1.** $V_{ab} = 100/0^\circ$ V rms es un voltaje de línea de una fuente trifásica balanceada conectada en Y. (a) Si la secuencia de fase es *abc*, obténganse los voltajes de fase. (b) Repítase para la secuencia de fase *acb*.

Respuesta (a) $57.7/-30^\circ, 57.7/-150^\circ, 57.7/+90^\circ$ V rms; (b) $57.7/-30^\circ, 57.7/+90^\circ, 57.7/-150^\circ$ V rms

- 11.2.2.** En la figura 11.9, los voltajes de fuente se determinan por el ejercicio 11.2.1(a), y la carga en cada fase es una combinación en serie de una resistencia de 30Ω , un capacitor de $500\mu\text{F}$, y un inductor de 0.25-H . La frecuencia es de $\omega = 200$ rad/s. Obtenga la corriente de línea y la potencia suministrada a la carga.

Respuesta $1.15/-83.1^\circ, 1.15/-203.1^\circ, 1.15/36.9^\circ$ A rms,

120 W

- 11.2.3.** Demuestre que si un sistema balanceado trifásico de tres hilos tiene dos cargas trifásicas balanceadas conectadas en paralelo, como se muestra, entonces la carga es equivalente a la de la figura 11.9 con

$$Z_p = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- 11.2.4.** Si en el ejercicio 11.2.3, $Z_1 = 4+j3\Omega$, $Z_2 = 4-j3\Omega$, y el voltaje de línea es $V_L = 200\sqrt{3}$ V rms, obtenga la corriente I_L en cada línea.

Respuesta 64 A rms

11.3

TRANSMISIÓN DE POTENCIA MONOFÁSICA CONTRA TRIFÁSICA

Es interesante comparar los méritos relativos del circuito monofásico de tres hilos de la sección 11.1, y el circuito trifásico de la sección 11.2 para transmitir potencia a una carga. La figura 11.12 muestra los dos circuitos que se considerarán.

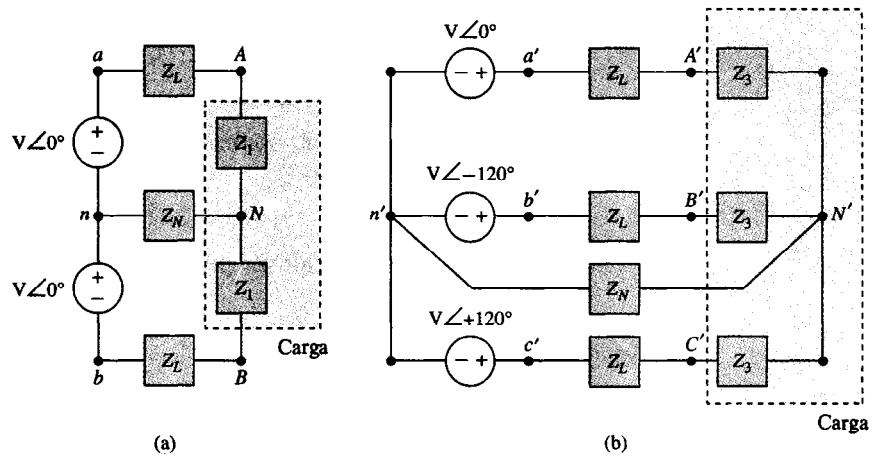


FIGURA 11.12 Circuitos (a) monofásico y (b) trifásico que suministran potencia a una carga.

Examinando esta figura, una observación inmediata es que el circuito trifásico tiene más elementos: más hilos, más fuentes de fase y más impedancias de fase. La simplicidad favorece el circuito monofásico. Pero veremos más allá de la cantidad de elementos, comparando las virtudes relativas de los sistemas monofásicos y trifásicos.

Consideraremos las pérdidas de línea incurridas por cada sistema en tanto produce la misma cantidad de potencia al mismo nivel de voltaje y factor de potencia. En el caso monofásico, $I_{nN} = 0$, y reemplazando Z_N por un circuito cerrado en la figura 11.12(a),

$$\mathbf{I}_{aN} = \frac{V\angle 0}{Z_1 + Z_L}$$

$$P_{aN} = |\mathbf{V}_{aN}| |\mathbf{I}_{aN}| \cos \theta = \frac{V^2 \cos \theta}{|Z_1 + Z_L|}$$

donde $\cos \theta$ es el factor de potencia de la impedancia línea/carga en serie. La potencia total suministrada es

$$P_{aN} + P_{bN} = 2P_{aN} = \frac{2V^2 \cos \theta}{|Z_1 + Z_L|} \quad (11.14)$$

En el caso trifásico de la figura 11.12(b) nuevamente la corriente neutra $I_{n'N'} = 0$ y el cálculo por fases es como el anterior. La potencia total suministrada por la fuente trifásica es

$$P_{a'N'} + P_{b'N'} + P_{c'N'} = 3P_{a'N'} = \frac{3V^2 \cos \theta}{|Z_3 + Z_L|} \quad (11.15)$$

Las potencias transmitidas por las fuentes monofásica y trifásica, son iguales si (11.14) y (11.15) son iguales, o

$$\frac{|Z_3 + Z_L|}{|Z_1 + Z_L|} = \frac{3}{2} \quad (11.16)$$

Para un suministro igual de potencia, las impedancias de fase en serie en el circuito trifásico, $Z_3 + Z_L$, es $\frac{1}{2}$ veces mayor que la impedancia de la fase única. Puesto que los voltajes de

fase son los mismos, la corriente rms en las líneas de fase única deben ser mayores en la misma proporción:

$$\frac{|\mathbf{I}_{aN}|}{|\mathbf{I}_{a'N'}|} = \frac{V/|Z_1 + Z_L|}{V/|Z_3 + Z_L|} = \frac{3}{2} \quad (11.17)$$

Las pérdidas de línea son $|\mathbf{I}_{aN}|^2 \operatorname{Re} Z_L$ para cada línea no neutra, o en el caso de fase única, las pérdidas totales de línea son

$$P_L = 2|\mathbf{I}_{aN}|^2 \operatorname{Re} Z_L \quad (11.18)$$

en tanto que en el circuito trifásico tenemos

$$P_{L'} = 3|\mathbf{I}_{aN'}|^2 \operatorname{Re} Z_L$$

Sustituyendo (11.17), esto es

$$P_{L'} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 |\mathbf{I}_{aN}|^2 \operatorname{Re} Z = \frac{4}{3} |\mathbf{I}_{aN}|^2 \operatorname{Re} Z \quad (11.19)$$

Comparando (11.18) y (11.19), concluimos que $P_L = \frac{2}{3} P_{L'}$; en otras palabras, con otros factores iguales (potencia producida, nivel de voltaje, factor de potencia), *el circuito monofásico transmite potencia a costo de la mitad de los watts disipados en las líneas. El suministro de potencia trifásico es más eficiente.*

Ejemplo 11.5

En la figura 11.12, sean $V = 4 \text{ kV rms}$, $Z_L = 2 \Omega$ y sea la impedancia de carga monofásica $30 + j 8 \Omega$. Determine la impedancia de fase Z_3 para una potencia igual desde las fuentes monofásica y trifásica, con factores de potencia iguales y la potencia transmitida a las líneas y cargas. En el circuito monofásico, la corriente de línea rms I_{aN} es

$$\mathbf{I}_{aN} = \frac{4000/0}{32 + j8} = 121/-14.0^\circ \quad (11.20)$$

La potencia transmitida a la carga es $2|\mathbf{I}_{aN}|^2 \operatorname{Re} Z_1 = 2(121)^2(30) = 878 \text{ kW}$ y la disipada por las líneas $2|\mathbf{I}_{aN}|^2 \operatorname{Re} Z_L = 2(121)^2(2) = 58.6 \text{ kW}$. En el caso trifásico, la potencia disipada por las líneas con el mismo factor de potencia está multiplicado por un factor de $\frac{2}{3}$, es decir, $(\frac{2}{3})(58.6) = 39.0 \text{ kW}$. Puesto que las potencias suministradas por las fuentes son iguales, la potencia hacia la carga trifásica debe incrementarse por el ahorro en pérdidas de línea, o la potencia de carga trifásica de $878 + \frac{1}{3}(58.6) = 897 \text{ kW}$. La impedancia Z_3 requerida debe, por (11.16) satisfacer

$$\frac{|Z_3 + 2|}{|32 + j8|} = \frac{3}{2}$$

$$|Z_3 + 2| = 49.5$$

Para factores de potencia iguales, el ángulo de la impedancia $Z_3 + 2$ debe concordar con $Z_1 + 2 = 32 + j8$, que es $\theta = 14.0^\circ$ por (11.20).

$$\text{y } Z_3 + 2 = |Z_3 + 2|/\theta = 49.5/14.0^\circ$$

$$Z_3 = 49.5/14.0^\circ - 2 = 46.0 + j12.0 \Omega$$

Al examinar las ondas de la potencia instantánea asociada con estos circuitos, se revela otra diferencia relevante para muchas aplicaciones prácticas. De la figura 11.12(a) en el caso monofásico

$$\mathbf{I}_{aN} = \mathbf{I}_{nB} = \frac{V_0}{Z_1 + Z_L} \quad (11.21a)$$

y

$$i_{aN}(t) = i_{nB}(t) = \frac{\sqrt{2}V}{|Z_1 + Z_L|} \cos(\omega t - \theta) \quad (11.21b)$$

donde θ es como lo fue anteriormente, el ángulo de la impedancia en serie $Z_L + Z_1$, y se requiere el factor de $\sqrt{2}$ puesto que V es la magnitud del fasor rms. La potencia instantánea, suministrada a cada una de las dos partes de la carga es $p(t) = i_{aN}^2 \operatorname{Re} Z_1$ y se muestra en la figura 11.13(a). Nótese que la potencia instantánea suministrada a las dos impedancias de carga están en fase, y la potencia total suministrada a la carga varía entre su máximo y cero

$$\begin{aligned} p_{1T}(t) &= 2 \left[\frac{\sqrt{2} V}{|Z_1 + Z_L|} \right]^2 \cos^2(\omega t - \theta) \cdot \operatorname{Re} Z_1 \\ &= \frac{2V^2 \operatorname{Re} Z_1}{|Z_1 + Z_L|^2} [1 + \cos 2(\omega t - \theta)] \end{aligned}$$

periódicamente.

De la figura 11.12(b), en el caso trifásico,

$$\mathbf{I}_{a'N'} = \frac{V_0}{Z_3 + Z_L}$$

y

$$i_{aN}(t) = \frac{\sqrt{2} V}{|Z_3 + Z_L|} \cos(\omega t - \theta)$$

Las tres corrientes de línea forman un conjunto balanceado, como se muestra en el diagrama fasorial en la figura 11.14. Estas corrientes, y por consiguiente las potencias instantáneas a las impedancias trifásicas, están fuera de fase en 120° como se muestra en la figura

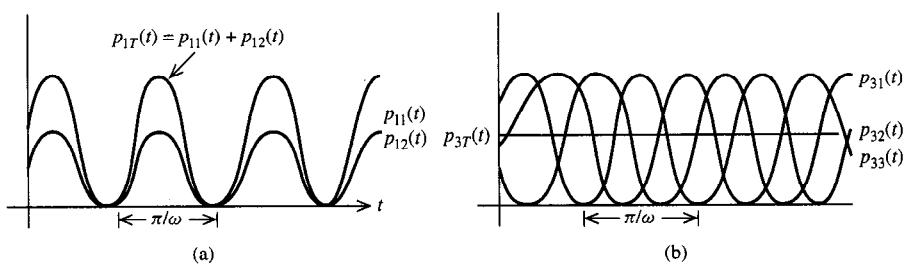


FIGURA 11.13 Suministro de potencia instantánea a cargas monofásicas y trifásicas de tres hilos. (a) $p_{11}(t)$ y $p_{12}(t)$ son potencias a las impedancias de carga monofásica y $p_{1T}(t)$ es la carga total. (b) $p_{31}(t)$, $p_{32}(t)$ y $p_{33}(t)$ son potencias a las impedancias trifásicas y $p_{3T}(t)$ es la potencia total.

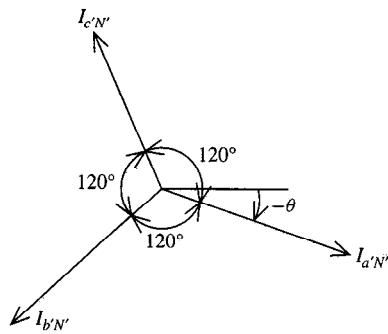


FIGURA 11.14 Corrientes de línea asociadas con el circuito de tres fases de la figura 11.12(b). θ es el ángulo de la impedancia de fase.

11.13(b). La potencia instantánea total es la suma sobre las tres fases individuales

$$\begin{aligned}
 p_{3T}(t) &= \left[\frac{\sqrt{2} V}{|Z_3 + Z_L|} \right]^2 \times \\
 &\quad \operatorname{Re} Z_3 [\cos^2(\omega t + \theta) + \cos^2(\omega t + \theta + 120^\circ) + \cos^2(\omega t + \theta - 120^\circ)] \\
 &= \frac{2V^2 \operatorname{Re} Z_3}{|Z_3 + Z_L|^2} \times \\
 &\quad \left[\frac{3}{2} + \cos 2(\omega t + \theta) + \cos 2(\omega t + \theta + 120^\circ) + \cos 2(\omega t + \theta - 120^\circ) \right]
 \end{aligned} \tag{11.22}$$

Los últimos tres términos en (11.22) son evidentemente funciones de tiempo que representan un conjunto balanceado de fasores. Puesto que un conjunto balanceado de fasores suma cero, lo mismo debe ocurrir con estos tres términos. El término restante es constante, y por consiguiente $p_{3T}(t)$, la potencia trifásica instantánea total suministrada a la carga es constante, como se muestra en la figura 11.13(b).

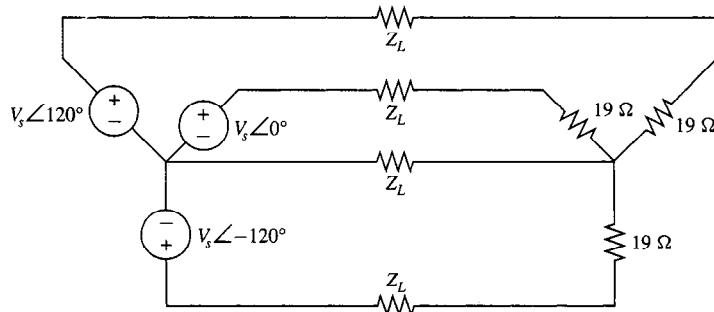
Concluimos que la potencia monofásica se suministra inestablemente, variando periódicamente entre cero y su máximo, en tanto que la potencia trifásica es constante respecto al tiempo. Supongamos que suministramos energía a un motor eléctrico. Puesto que el par producido varía respecto a la energía que se le suministra, un motor monofásico vibra puesto que el suministro de energía fluctúa periódicamente, en tanto que un motor trifásico “jala” con la misma intensidad a cada instante, sin vibraciones inducidas. Consideremos ahora, el suministro de energía a las luces fluorescentes, cuya brillantez varía con la transmisión instantánea de energía. Un par de focos fluorescentes monofásicos de tres hilos parpadearían periódicamente, en tanto que tres focos trifásicos montados en conjunto, iluminan sin parpadear.

De este modo, no sólo la transmisión de potencia trifásica tiene una ventaja de eficiencia sobre la fase única, sino también una ventaja de transmisión estable de potencia. No es de sorprenderse que la transmisión trifásica se favorece en todo el mundo para la transmisión de energía. La potencia monofásica es el método elegido únicamente cuando hay pequeñas cantidades de potencia, y donde son suficientes los motores de poca potencia. Este es el caso para la mayoría del cableado residencial, para los que son decisivos la simplicidad y el bajo peso de elementos de los circuitos monofásicos. A veces se utiliza dc para transmitir energía sobre grandes distancias, pero el ac multifásico es dominante en casi todos los sistemas de transmisión de potencia.

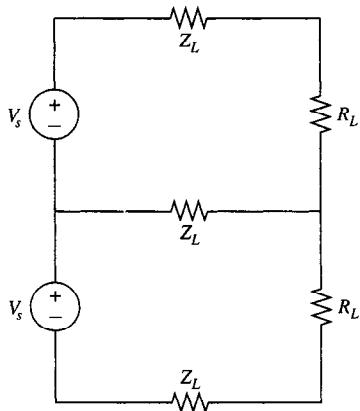
EJERCICIOS

11.3.1. Se conectan una fuente trifásica y una carga que distan entre sí 100 km mediante líneas con impedancias $0.01 \Omega/\text{km}$, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la *eficiencia* del sistema, definida como la potencia transmitida a la carga dividida entre la potencia total producida por la fuente? ¿A qué distancia se tiene un 90% de la eficiencia?

Respuesta 0.95; 211 km



EJERCICIO 11.3.1



EJERCICIO 11.3.2

11.3.2. La figura muestra un sistema monofásico con el mismo voltaje de fuente $|V_s|$ que en el ejercicio 11.3.1. En una separación de 100 km, ¿para qué R_L se suministraría la misma potencia a la carga que la suministrada por el sistema trifásico del ejercicio 11.3.1 a su carga trifásica? ¿Cuál es la eficiencia de este sistema (ver ejercicio 11.3.1)?

Respuesta 11.95Ω o 0.0837Ω ; 0.923 para $R_L = 11.95 \Omega$; 0.0772 para $R_L = 0.0837 \Omega$

11.3.3. Considérese un motor que recibe potencia de una fuente monofásica de 50-Hz. ¿Cuál es el periodo del movimiento vibratorio que experimentará el motor? Repítase para una fuente balanceada trifásica y una fuente trifásica no balanceada, ambas a 50 Hz.

Respuesta 10 ms; sin movimiento vibratorio; 10 ms

11.4 CONEXIÓN DELTA

Otro método para conectar una carga trifásica a una línea, es la conexión *delta* o conexión Δ . Una carga balanceada Δ -conectada (con fase de impedancia Z_P igual) aparece en la figura 11.15(a), de un modo que semeja una Δ , y en una forma equivalente en la figura 11.15(b). Si la fuente está conectada en Y- o Δ , entonces el sistema es una Y- Δ o un Δ - Δ .

Una ventaja de una carga Δ -conectada sobre una carga Y-conectada, es que las cargas pueden añadirse o eliminarse con más facilidad sobre una fase única de una Δ , puesto que las cargas están conectadas directamente a través de las líneas. Esto puede no ser posible en la conexión Y, puesto que el neutro puede no estar accesible. Además, en una potencia dada suministrada a la carga, las corrientes de fase en una Δ , son menores que en una Y. Por otra

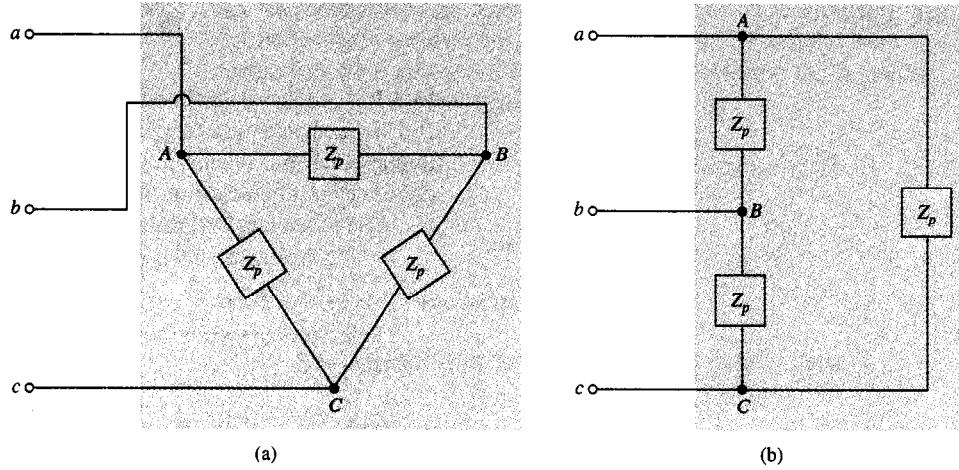


FIGURA 11.15 Dos diagramas de una carga conectada en Δ .

parte, los voltajes de fase Δ son más altos que los de la conexión Y. Pocas veces se conectan las fuentes en Δ , puesto que si los voltajes no están perfectamente balanceados, habrá un voltaje neto de fuente, y por consiguiente, una corriente circulante alrededor de Δ . Esto causa efectos de calentamiento indeseables en la maquinaria generadora. Además, los voltajes de fase son menores en el generador conectado en Y, y por consiguiente se requiere de menos aislante. Obviamente, los sistemas con cargas Δ -conectadas, son sistemas de tres hilos, puesto que no hay una conexión neutra.

De la figura 11.16, podemos ver que en el caso de una carga Δ -conectada, las líneas de voltaje son las mismas que los voltajes de fase. Por consiguiente, si los voltajes de línea están dados por (11.10b), como se hizo antes, entonces los voltajes de fase son

$$\mathbf{V}_{AB} = V_L/30^\circ, \quad \mathbf{V}_{BC} = V_L/-90^\circ, \quad \mathbf{V}_{CA} = V_L/150^\circ \quad (11.23)$$

donde

$$V_L = V_p \quad (11.24)$$

Si $Z_p = |Z_p|/\theta$, entonces las corrientes de fase son

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{AB} &= \frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z_p} = I_p/30^\circ - \theta \\ \mathbf{I}_{BC} &= \frac{\mathbf{V}_{BC}}{Z_p} = I_p/-90^\circ - \theta \\ \mathbf{I}_{CA} &= \frac{\mathbf{V}_{CA}}{Z_p} = I_p/150^\circ - \theta \end{aligned} \quad (11.25)$$

donde la magnitud de la corriente de fase rms es

$$I_p = \frac{V_L}{|Z_p|} \quad (11.26)$$

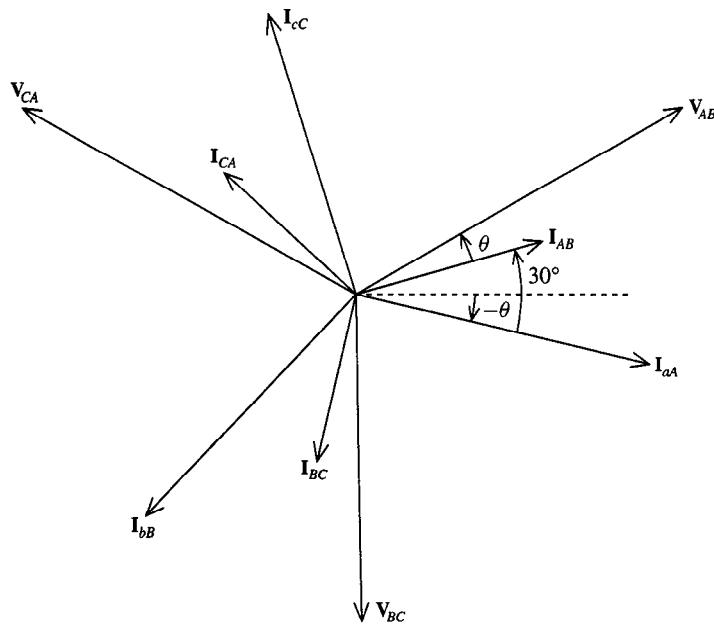


FIGURA 11.16 Diagrama fasorial para una carga delta-conectada.

La corriente en la línea aA es

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}$$

que al simplificarla es

$$\mathbf{I}_{aA} = \sqrt{3} I_p / -\theta$$

Las otras corrientes de línea, obtenidas de forma similar, son

$$\mathbf{I}_{bB} = \sqrt{3} I_p / -120^\circ - \theta$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \sqrt{3} I_p / -240^\circ - \theta$$

Evidentemente, la relación entre las magnitudes de corriente de fase y de línea en el caso Δ es

$$I_L = \sqrt{3} I_p \quad (11.27)$$

y las corrientes de línea son

$$\mathbf{I}_{aA} = I_L / -\theta, \quad \mathbf{I}_{bB} = I_L / -120^\circ - \theta, \quad \mathbf{I}_{cC} = I_L / -240^\circ - \theta \quad (11.28)$$

De este modo, tal y como se esperaba, las corrientes y voltajes son conjuntos balanceados. Las relaciones entre las corrientes de línea y de fase para la carga Δ -conectada aparecen resumidas en el diagrama fasorial de la figura 11.16.

Ejemplo 11.6

Como ejemplo de un circuito trifásico con una carga delta-conectada, obtengamos la corriente de línea I_L en la figura 11.15 si el voltaje de línea es de 250 V rms y la carga extrae 1.5 kW a un factor de potencia atrasado de 0.8 kW. Para una fase, $P_p = \frac{1500}{3} = 500$ W, y de este modo

$$500 = 250I_p(0.8)$$

o

$$I_p = 2.5 \text{ A rms}$$

De este modo, tenemos

$$I_L = \sqrt{3} I_p = 4.33 \text{ A rms}$$

Finalmente, en esta sección, derivaremos una fórmula para la potencia suministrada a una carga trifásica balanceada con un ángulo de factor de potencia θ . Esté la carga Y o Δ conectada, tenemos

$$P = 3P_p = 3V_p I_p \cos \theta$$

En el caso Y-conectado, $V_p = V_L/\sqrt{3}$ e $I_p = I_L$, y en el caso Δ -conectado, $V_p = V_L$ e $I_p = I_L/\sqrt{3}$. En ambos casos, por lo tanto,

$$P = 3 \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta$$

o

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (11.29)$$

Como una comprobación del ejemplo anterior, de (11.29) se obtiene

$$1500 = \sqrt{3}(250)I_L(0.8)$$

o, como en el caso anterior

$$I_L = 4.33 \text{ A rms}$$

EJERCICIOS

11.4.1. Resuelva el ejercicio 11.2.2 si la fuente y la carga quedan sin modificar, excepto en que la carga está Δ -conectada. [Sugerencia: nótese que en (11.23), (11.25) y (11.28) deben restarse 30° de todos los ángulos.]

Respuesta $2\sqrt{3}/-83.1^\circ; 2\sqrt{3}/156.9^\circ; 2\sqrt{3}/36.9^\circ$ A rms, 360 W

11.4.2. Una carga balanceada Δ -conectada tiene $Z_p = 4+j3 \Omega$, y el voltaje de línea es $V_L = 200$ V rms en las terminales de carga. Obtenga la potencia total suministrada a la carga.

Respuesta 19.2 kW

11.4.3. Una carga balanceada delta-conectada tiene un voltaje de línea de $V_L = 100$ V rms en las terminales de carga y absorbe una potencia total de 4.8 kW. Si el factor de potencia de la carga está adelantada 0.8, obtenga la impedancia de la fase.

Respuesta $4-j3 \Omega$

En muchas aplicaciones para sistemas de potencia, es importante tener la posibilidad de convertir de una carga Y conectada a una carga equivalente Δ-conectada y viceversa. Por ejemplo, supongamos que tenemos una carga Y conectada en paralelo con una carga Δ-conectada, como se muestra en la figura 11.17, y deseamos reemplazar la combinación por una carga trifásica equivalente. Si ambas cargas estuvieran Δ-conectadas, esto sería relativamente fácil, puesto que las correspondientes impedancias de fase estarían en paralelo. Además, como vimos en el ejercicio 11.2.3, si ambas cargas están Y-conectadas y balanceadas, las impedancias de fase también pueden combinarse como impedancias paralelas.

Para obtener fórmulas de conversión Y a Δ o Δ a Y, consideraremos las conexiones Y y Δ de la figura 11.18. Para efectuar una transformación Y-Δ, necesitamos expresiones para Y_{ab} , Y_{bc} y Y_{ca} de la Δ en términos de Y_a , Y_b y Y_c de la Y para que la conexión Δ sea equivalente a la conexión Y en las terminales A, B, y C. Es decir, si la Y es reemplazada por la Δ, aparecerán los mismos voltajes de nodo V_A , V_B y V_C si se hace que fluyan las corrientes I_1 e I_2 . Inversamente, una transformación Δ-Y es la expresión de los parámetros Y en términos de los parámetros Δ.

Comencemos escribiendo las ecuaciones nodales para ambos circuitos. Si se toma el nodo C como referencia, en el caso de la red Y, tenemos

$$\begin{aligned} Y_a V_A - Y_a V_D &= I_1 \\ Y_b V_B - Y_b V_D &= I_2 \\ -Y_a V_A - Y_b V_B + (Y_a + Y_b + Y_c)V_D &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para V_D en la tercera ecuación y sustituyendo su valor en las primeras dos ecuaciones, obtenemos, después de simplificar,

$$\begin{aligned} \frac{Y_a Y_b + Y_a Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} V_A - \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} V_B &= I_1 \\ -\frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} V_A + \frac{Y_a Y_b + Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} V_B &= I_2 \end{aligned} \quad (11.30)$$

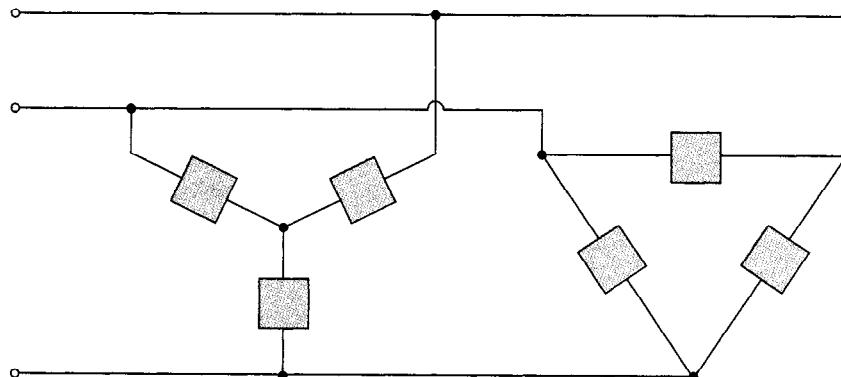


FIGURA 11.17 Cargas Y-conectada y Δ-conectada en paralelo.

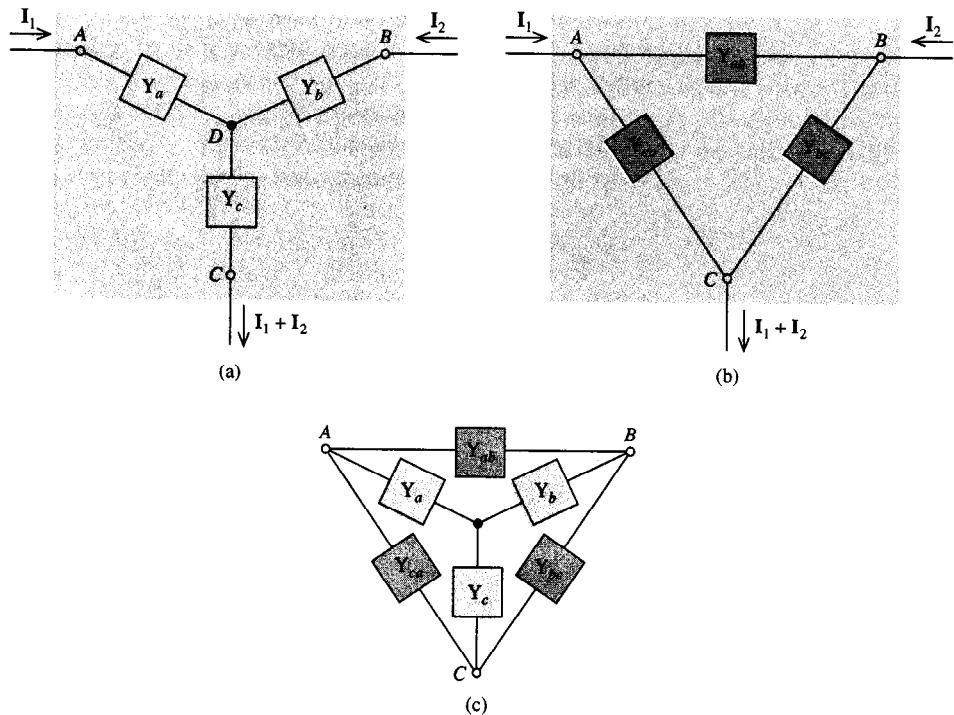


FIGURA 11.18 (a) Conexión en Y , (b) conexión en Δ y (c) las dos conexiones superpuestas.

Las ecuaciones nodales para el circuito Δ son

$$(Y_{ab} + Y_{ca})V_A - Y_{ab}V_B = I_1$$

$$-Y_{ab}V_A + (Y_{ab} + Y_{bc})V_B = I_2$$

Igualando coeficientes de términos similares en estas ecuaciones y (11.30), tenemos la transformación $Y-\Delta$:

$$\begin{aligned} Y_{ab} &= \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} \\ Y_{bc} &= \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \\ Y_{ca} &= \frac{Y_c Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c} \end{aligned} \quad (11.31)$$

Si imaginamos los circuitos Y y Δ superpuestos sobre un diagrama único como en la figura 11.18(c), entonces Y_a y Y_b , son adyacentes a Y_{ab} , Y_b y Y_c adyacentes a Y_{bc} , y así sucesivamente. De este modo, podemos postular (11.31) en palabras, del modo siguiente: *La admitancia de un ramal de la Δ es igual al producto de las admitancias de los ramales adyacentes de la Y dividida por la suma de las admitancias de la Y .*

Para obtener la transformación Δ - Y , podemos resolver (11.31) para las admitancias Y , una labor difícil, o podemos escribir dos conjuntos de ecuaciones de trayectoria cerrada para los circuitos Y y Δ . En este último caso, tendremos el dual del procedimiento que nos llevó a (11.31). En ambos casos, como se pide al lector demostrar en el problema 11.38, la transformación Δ - Y es

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \\ Z_b &= \frac{Z_{bc}Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \\ Z_c &= \frac{Z_{ca}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \end{aligned} \quad (11.32)$$

donde las Z son los recíprocos de las Y en la figura 11.18. La regla es la siguiente: *La impedancia de un ramal de la Y es igual al producto de las impedancias de los ramales adyacentes de la Δ divididos por la suma de las impedancias de la Δ .* (Por *adyacente*, queremos decir que “a cada lado y terminación del mismo nodo que”. Por ejemplo, en el dibujo superpuesto de la Y y Δ , en la figura 11.18(c), Z_a está entre Z_{ab} y Z_{ca} , y los tres tienen una terminal común A . De este modo, Z_{ab} y Z_{ca} son ramales *adyacentes* de Z_a .)

Las fórmulas de conversión Y - Δ (11.31) y (11.32) no requieren cargas balanceadas o siquiera circuitos trifásicos. Con frecuencia son de considerable utilidad para simplificar circuitos generales que contengan impedancias que no están en series o en paralelo, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.7

Buscamos el fasor de corriente I de la fuente. Nótese en la figura 11.19 que utilizando métodos fundamentales (análisis nodal o de trayectoria cerrada) deberían resolverse tres ecuaciones simultáneas.

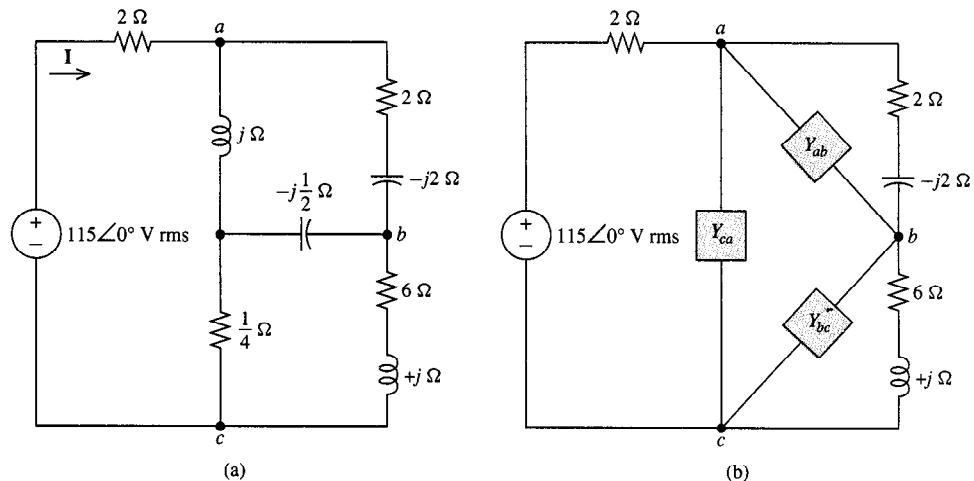


FIGURA 11.19 Utilización de una conversión de impedancia Y - Δ para simplificar un circuito.

Comparándolo con la figura 11.18, tenemos $Y_a = -j1$, $Y_b = j2$ y $Y_c = 4 S$. Entonces $Y_a + Y_b + Y_c = 4 + j$ y

$$Y_{ab} = \frac{(-j1)(j2)}{4+j} = \frac{2}{4+j}$$

$$Y_{bc} = \frac{j8}{4+j}$$

$$Y_{ca} = \frac{-4j}{4+j}$$

Por la figura 11.19(b), vemos que después de esta transformación Y- Δ , Y_{ab} está en paralelo con la admitancia $1/(2-j2)$, lo que produce en una admitancia equivalente en paralelo de

$$\frac{2}{4+j} + \frac{1}{2-j2} = \frac{8-3j}{10-6j}$$

Similarmente, la admitancia equivalente a Y_{bc} en paralelo con la admittance $1/(6+j)$ es

$$\frac{j8}{4+j} + \frac{1}{6+j} = \frac{-4+49j}{23+10j}$$

Esto resulta en el circuito equivalente con las impedancias que aparecen en la figura 12.20. Utilizando combinaciones en serie en paralelo,

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{10-6j}{8-3j} + \frac{23+10j}{-4+49j} \\ &= 1.51 - j0.73 \\ Z &= 2 + \frac{\left(\frac{-4-j}{4j}\right) Z_1}{\left(\frac{-4-j}{4j}\right) + Z_1} \\ &= 2 + \frac{(-.25+j1)(1.51-j0.73)}{1.26+j0.27} \\ &= 2.54 + j1.23 \end{aligned}$$

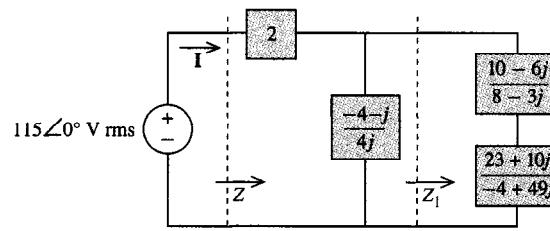


FIGURA 11.20 Equivalente de la figura 11.19(b), donde se muestran las impedancias.

Entonces

$$I = \frac{115/0}{Z} = \frac{115/0}{2.54 + j1.23} = 40.7/-25.8^\circ \text{ A rms}$$

El uso de la conversión Y-Δ de este circuito monofásico no balanceado nos permite evitar el escribir y resolver tres ecuaciones complejas con tres incógnitas.

Si la carga está balanceada, las reglas de conversión Y-Δ se simplifican en gran medida. Fijando $Y_a = Y_b = Y_c = Y_y$ en (11.31); donde Y_y es la admitancia común de fase de la carga balanceada Y-conectada, podemos ver de (11.31) que $Y_{ab} = Y_{bc} = Y_{ca} = Y_\Delta$, la admitancia común de la carga Δ-conectada, o

$$Y_\Delta = \frac{(Y_y)^2}{3Y_Y} = \frac{1}{3}Y_Y \quad (11.32)$$

o, invirtiendo

$$Z_\Delta = 3Z_Y \quad (11.33)$$

La impedancia de fase balanceada Δ-conectada es tres veces la impedancia equivalente de fase balanceada conectada en Y.

Ejemplo 11.8

Obtenga la magnitud de los voltajes de línea balanceada V_{AB} , V_{BC} y V_{CA} . Ver figura 11.21. Este circuito está Y-Δ conectado. Lo convertiremos a un circuito Y-Y conectado para que puedan realizarse simples cálculos por fase. La carga tiene impedancias Y equivalentes por (11.33):

$$Z_Y = \frac{1}{3}Z_\Delta = \frac{1}{3}(6 + j3) = 2 + j$$

Convirtiéndolo a esta carga Y-conectada, el voltaje a través de la impedancia de carga a de fase equivalente es, por divisor de voltajes,

$$V_{AN} = \frac{2 + j}{3 + j}(12/0) = 8.49/8.13^\circ$$

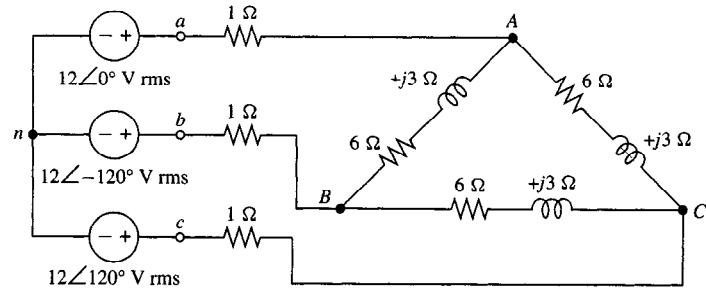


FIGURA 11.21 Circuito para el ejemplo 11.8.

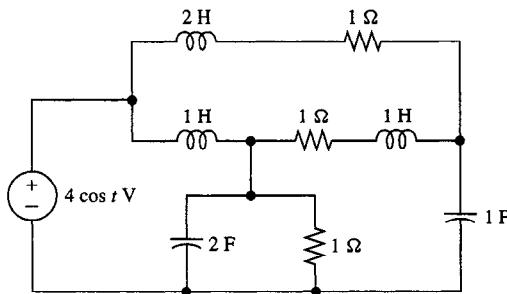
Los voltajes de línea son, por (11.10a), $\sqrt{3}$ veces más grandes, de forma que

$$|V_{AB}| = \sqrt{3} |V_{AN}| = \sqrt{3} (8.49) = 14.7 \text{ V rms}$$

que es la magnitud común de los voltajes balanceados de línea V_{AB} , V_{BC} y V_{CA} .

Como se demostró en este ejemplo, generalmente es de mucha ayuda convertir sistemas Y- Δ conectados a Y-Y conectados, para que puedan calcularse las corrientes, voltajes y potencia sobre la base por fase discutida en la sección 11.2.

EJERCICIOS



EJERCICIO 11.5.1

11.5.1. Obtenga la impedancia de entrada vista por la fuente utilizando una transformación Y- Δ o Δ -Y para simplificar el circuito. De este resultado, obtenga la potencia promedio suministrada por la fuente.

Respuesta $(1+j2)/5 \Omega; 8 \text{ W}$

11.5.2. Una fuente trifásica balanceada con $V_L = 100\text{V}$ rms suministra potencia a una carga balanceada Y-conectada con impedancia de fase $Z_1 = 8 + j6 \Omega$ en paralelo con una carga Δ -conectada balanceada de fase $Z_2 = 12 + j9 \Omega$. Obtenga la potencia suministrada por la fuente.

Respuesta 2.4 kW

11.5.3. Demuestre que la transformación Y- Δ de (11.31) es equivalente a

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c}$$

$$Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a}$$

$$Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b}$$

o, formulado en palabras: La impedancia de un ramal de la Δ es igual a la suma de los productos de las impedancias de la Y, tomados dos a la vez, divididos por la impedancia del ramal opuesto de la Y.

11.5.4. Si las líneas en el ejercicio 11.4.2 tienen cada uno una resistencia de 0.1Ω , obtenga la potencia perdida en las líneas.

Respuesta 1.44 kW

11.6 SPICE Y LOS CIRCUITOS TRIFÁSICOS

El análisis de redes trifásicas presentadas anteriormente se restringió a sistemas balanceados cuya soluciones pueden expresarse en términos de una sola fase. Puede utilizarse fácilmente SPICE para sistemas tanto balanceados como no balanceados cuando se aplica a toda la red. SPICE no hace distinción entre circuitos monofásicos y trifásicos.

Ejemplo 11.9

Como primer ejemplo, consideremos la obtención de los voltajes de línea y corrientes de fase en la carga para el sistema balanceado Y-Y de la figura 11.22. La línea de transmisión para interconectar el generador y la carga tiene pérdidas que están representadas por resistencias de 2-W. Un archivo de circuito para esta red es

```

3-PHASE Y-Y SYSTEM WITH TRANSMISSION LINE LOSSES
*VOLTAJES DE LOS ENUNCIADOS DE DATOS EXPRESADOS EN RMS
VAN 1 0 AC 120 0
VBN 2 0 AC 120 -120
VCN 3 0 AC 120 120
RLOSSA 1 4 2
RLOSSB 2 5 2
RLOSSC 3 6 2
RLOSSN 10 0 2
RA 4 7 10
LA 7 10 0.1
RB 5 8 10
RC 6 9 10
LC 9 10 0.1
.AC LIN 1 60 60
.PRINTAC VM(4,5) VP(4,5) IM(VAN) IP(VAN)
.PRINTAC VM(5,6) VP(5,6) IM(VBN) IP(VBN)
.PRINTAC VM(6,4) VP(6,4) IM(VCN) IP(VCN)
.PRINTAC IM(RLOSSN) IP(RLOSSN)
.END

```

La lista de salida resultante $VM(4,5) = VM(5,6) = VM(6,4) = 204.9$ V rms, y $VP(4,5) = 32.8^\circ$, $VP(5,6) = -87.2^\circ$, $VP(6,4) = 152.8^\circ$, es una secuencia positiva y balanceada como se esperaba. Además, $IM(VAN) = IM(VBN) = IM(VCN) = 3.033$ A rms; $IP(VAN) =$

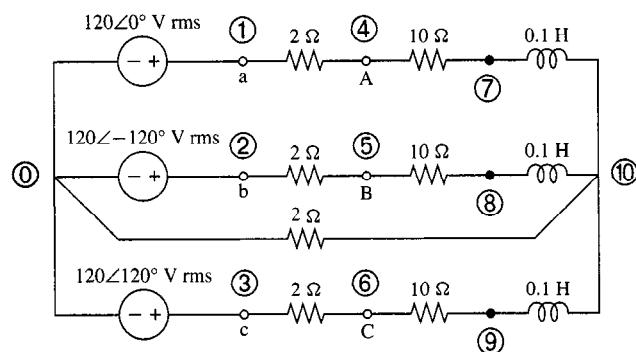


FIGURA 11.22 Sistema balanceado Y-Y para análisis de SPICE.

107.7° , $\text{IP(VBN)} = -12.3^\circ$, $\text{IP(VCN)} = -132.3^\circ$ forma un conjunto balanceado de corrientes de fase. La corriente de la magnitud neutra se calcula como $\text{IM(RLOSSN)} = 2.08 \times 10^{-15} \text{ A rms}$, lo que es muy cercano al valor exacto de cero.

Ejemplo 11.10

En este ejemplo investigaremos los efectos de desbalancear el circuito del ejemplo anterior. SPICE no revisa las condiciones balanceadas, ni realiza cálculos por fase; de este modo, trata con la misma facilidad los circuitos no balanceados que los balanceados.

Las condiciones no balanceadas pueden surgir de una fuente o carga no balanceada. Si la fuente no está balanceada reduciendo la magnitud de la fuente de fase a en 10% a 108 V rms, al reemplazar la línea de elemento VAN en el circuito en el archivo de circuito anterior por

VAN 1 0 AC 10 0

los voltajes y corrientes resultantes tampoco están balanceados. La salida muestra voltajes de línea $V_{AB} = 194.7 / 34.5^\circ$, $V_{BC} = 204.9 / -87.2^\circ$ y $V_{CA} = 194.7 / 151.1^\circ$ [$V_{AB} = V(4,5)$ y así sucesivamente; ver figura 11.22]. Nótese que un desbalance de las magnitudes de fuente de fase provoca una fase no balanceada así como la magnitud de las salidas. Las corrientes de línea también están desbalanceadas tanto en magnitud como en fase $I_{Aa} = 2.74 / 107.4^\circ$, $I_{Bb} = 3.04 / -12.1^\circ$, $I_{Cc} = 3.02 / -132.3^\circ$. La corriente neutra ya no es cero, con un resultado de $I_{Nn} = 0.29 / 115.5^\circ$. Esto implica que si el hilo neutro fuera eliminado, cambiarían las condiciones. Esto es distinto del caso balanceado en donde $I_{Nn} = 0$, y este hilo puede ser eliminado sin alterar las salidas. Eliminar el hilo neutro requiere sólo de eliminar (o de “sacar por comentario” añadiendo un asterisco en la primera columna) la línea de elemento RLOSSN. Eliminando el hilo neutro, y volviendo a hacer correr SPICE, la corrientes cambian a $I_{Aa} = 2.83 / 107.7^\circ$, $I_{Bb} = 2.99 / -10.7^\circ$ e $I_{Cc} = 2.99 / -134^\circ$. Nótese que el grado de desbalanceo causado por este modesto desbalanceo de fuente (10%), es en sí relativamente reducido. Suponer condiciones balanceadas en el circuito no producirá grandes errores en presencia de desbalanceos menores de fuente, línea o carga.

EJERCICIOS

11.6.1. Obtenga el voltaje de línea y corriente de fase para la carga de la fase A del sistema de la figura 11.22 si se cierra el circuito de la fase C (conocido como falla de fase).

Respuesta $204.9 / 32.8^\circ$ V; $4.07 / 90.54^\circ$ A

11.6.2. Repítase el ejercicio 11.6.1 si la línea neutra de 2Ω entre los nodos 0 y 10 es eliminada.

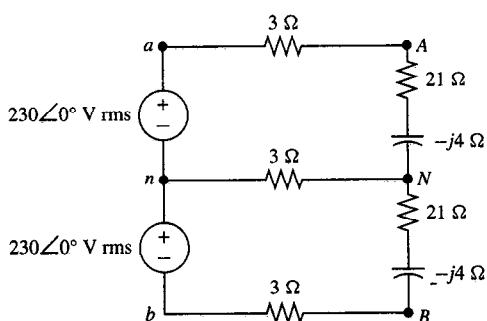
Respuesta $204.9 / 32.8^\circ$ V; $5.33 / 82.41^\circ$ A

La potencia trifásica es, con mucho, la forma más común de distribución de energía. Sus ventajas, en comparación al suministro de potencia monofásico, incluyen un suministro de potencia más estable y balanceado. Estos beneficios se maximizan si el circuito está balanceado, es decir, las variables de circuito correspondientes en las tres fases individuales son iguales en magnitud y están 120° fuera de fase. El presente capítulo presenta una introducción a los circuitos trifásicos balanceados.

- Una fuente Y conectada está balanceada si sus voltajes de fase son iguales en magnitud y están 120° fuera de fase.
- Los voltajes de línea en una fuente trifásica balanceada Y-conectada es $\sqrt{3}$ veces más grande que sus voltajes de fase.
- Se dice que las cargas Y o Δ conectadas están balanceadas, cuando sus tres impedancias componentes son idénticas.
- En un circuito Y-Y balanceado, el hilo neutro puede eliminarse o insertarse sin afectar las corrientes o voltajes del circuito.
- En un circuito Y-Y balanceado de cuatro hilos, pueden hacerse los cálculos sobre una base por fase, es decir, sin interacción entre las variables de circuitos de fases distintas.
- El equivalente de una carga Y-conectada balanceada con impedancias de Z_p es una carga Δ conectada con impedancias $Z_1 = 3Z_p$.
- Puede analizarse mejor un sistema Y- Δ realizando primero la transformación de carga Δ -Y, y luego utilizando cálculos por fase.
- SPICE no tiene rutinas especiales para circuitos trifásicos. No reconoce circuitos balanceados ni realiza cálculos por fase.

PROBLEMAS

11.1. Obtenga las corrientes I_{aA} , I_{bB} y I_{nN} en este sistema simétrico monofásico de tres hilos. Dibuje un diagrama fasorial.

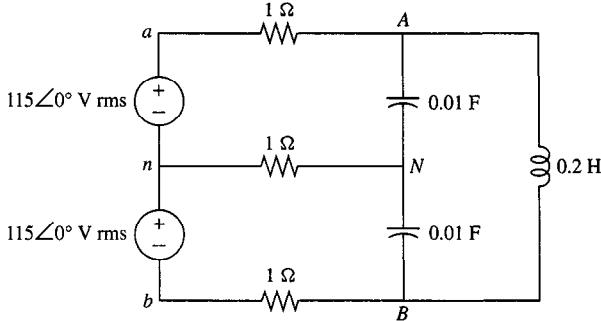


PROBLEMA P11.1

11.2. Obtenga la potencia promedio real suministrada por cada una de las dos fuentes de voltajes en el circuito del problema 11.1.

11.3. Suponga que en el circuito del problema 11.1 uno de los tres hilos de 3Ω que conecta las fuentes y las cargas es reemplazado por un hilo de 6Ω . ¿Cuál debemos reemplazar si nuestro objetivo es suministrar tanta potencia como sea posible a las cargas? Determine la potencia a las cargas bajo todos los tres posibles lugares para el alambre de 6Ω .

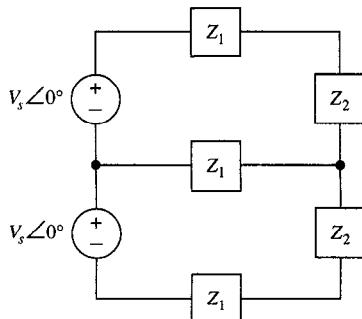
11.4. Determine las corrientes I_{aA} , I_{bB} e I_{cC} , y dibuje un diagrama fasorial. La frecuencia de la fuente es 60 Hz.



PROBLEMA P11.4

11.5. Determine el equivalente de Thevenin del circuito del problema 11.4 en las terminales AB cuando se elimina el inductor. ¿Qué valor de inductancia conectada entre A y B hace que la potencia compleja suministrada por las fuentes sea puramente real?

11.6. Para el circuito monofásico simétrico del suministro de potencia que aparece, derive una expresión para la fracción de pérdida l , definida como la proporción de la potencia promedio real disipada entre las impedancias de línea Z_l , al total de la potencia promedio real producida por estas fuentes, en términos de Z_1 y Z_2 .

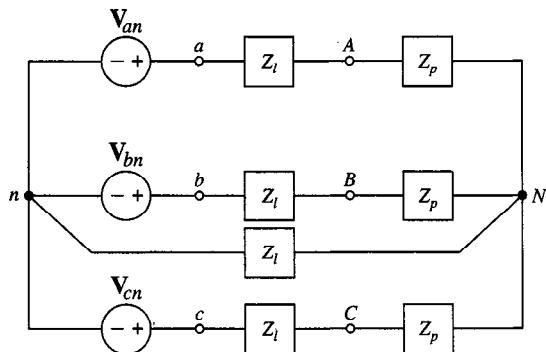


PROBLEMA P11.6

11.7. Para el sistema balanceado Y-Y que se muestra, con $V_{an}=115\angle0^\circ$ V rms, $Z_l=0\Omega$, $Z_p=2+j3\Omega$ y secuencia de fase positiva, calcule los voltajes de línea V_{ab} , V_{bc} , V_{ca} y las corrientes de línea I_{aA} , I_{bB} , I_{cC} , y dibújelos en un diagrama fasorial.

11.8. Repita el problema 11.7 para una secuencia de fase negativa.

11.9. Para el circuito de secuencia de fase positiva del pro-



PROBLEMA P11.7

blema 11.7, con $V_{an}=230\angle0^\circ$ V rms, $Z_l=1+j1\Omega$, y $Z_p=3-j10\Omega$, calcule los tres voltajes de línea V_{ab} , V_{bc} , V_{ca} en el extremo de las fuentes de las líneas y los voltajes de líneas V_{AB} , V_{BC} , V_{CA} en el extremo de carga, y dibújelo en un sólo diagrama fasorial.

11.10. Si en el circuito trifásico balanceado que se describe en el problema 11.7, tenemos fuentes de fase de magnitud 4400 V rms, $Z_l=0.01\Omega/km$, y $Z_p=20+j4$, obtenga una ecuación que relacione la longitud de la línea en kilómetros a la corriente de línea NRS, y dibújelo como gráfica.

11.11. Repita el problema 11.10 con una longitud de línea en kilómetros contra la potencia promedio real total contra la carga trifásica.

11.12. Un sistema balanceado Y-Y con fuentes de fase de 60-Hz y 1200 V rms, y sin pérdida de línea, suministra 3.00 kW a una carga que consiste de una combinación en serie de una resistencia de 10Ω y un inductor L -henry. Obtenga L .

11.13. Un sistema de fase positiva de tres hilos, conectado en Y-Y y de 50-Hz, como el que se muestra en la figura 11.9, tiene un voltaje de línea de $V_{ab}=115\angle13^\circ$ V rms y una corriente de línea $I_{cC}=2\angle-121^\circ$. Dibuje el conjunto de voltajes de línea en corrientes de línea en un diagrama fasorial y obtenga Z_p .

11.14. ¿Cuál es la magnitud del voltaje de fase de la fuente necesario para suministrar 100 W a 60 Hz a un pequeño motor trifásico cuya Z_p equivalente a una combinación en serie de una resistencia de 12Ω y un inductor 10-mH ?

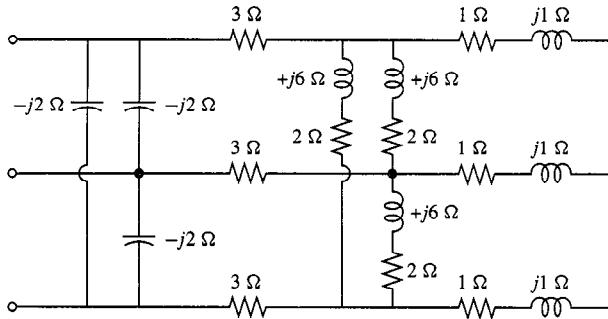
11.15. Un sistema trifásico balanceado conectado en Y-Y con voltaje de fase de 115 V rms suministra potencia a un factor de potencia de 0.85 retardado. Obtenga la potencia compleja suministrada al circuito trifásico si la corriente de la línea es 2.3 A rms.

11.16. Un sistema trifásico Y-Y no posee impedancia de línea; $Z_p=2+j$ para cada fase. Inicialmente, la fuente está balanceada con voltajes de fase 230-V. Si uno de los voltajes trifásicos cae a una magnitud de 20 V rms en tanto que el resto (incluyendo los ángulos de voltaje de fase) siguen siendo los mismos, compare la potencia suministrada a la carga en los tres casos

ministrada a la carga en los tres casos antes de la caída de voltaje, después de suponer un sistema de cuatro hilos, y luego de suponer un sistema de tres hilos.

11.17. Una fuente balanceada conectada en Y se conecta a una carga no balanceada con $Z_{AN} = 10 + j5 \Omega$, $Z_{BN} = 10 \Omega$ y $Z_{CN} = 10 - j5 \Omega$. Obtenga los desplazamientos de fase entre las tres corrientes de línea I_{aA} , I_{bB} e I_{cC} , suponiendo una secuencia de fase positiva. Dibuje el diagrama fasorial.

11.18. Use los resultados del ejercicio 11.2.3 para obtener un equivalente a la carga trifásica que aparece en un circuito balanceado Y-Y.



PROBLEMA P11.18

11.19. Un acondicionador de aire está conectado como una carga balanceada trifásica y conectada en Y con $Z_p = 10 + j4 \Omega$ a 60 Hz. Si esto se conecta a una fuente balanceada conectada en Y de 230-V rms, ¿cuánta potencia se suministra al acondicionador de aire? Si se pusiera en paralelo con la carga una impedancia capacitiva balanceada conectada en Y, como en el ejercicio 11.2.3, ¿para qué capacitancia el factor de potencia se corregiría a la unidad? ¿Cuántos watts más consumiría el acondicionador de aire?

11.20. Para el sistema balanceado que aparece en la figura del problema 11.7 con $Z_l = 2 \Omega$, $Z_p = 4 - j4$ a 60 Hz, ¿cuál es el conjunto de tres impedancias iguales conectadas a través de las terminales de carga A, B y C, que maximizarán la potencia real a la carga? ¿Cuál es el conjunto de tres impedancias iguales a través de las terminales de fuente a, b y c que maximizarán la potencia promedio real suministrada por la fuente?

11.21. En la figura 11.12, sean $V = 115 \text{ V rms}$, $Z_L = Z_N = 0$ y $Z_3 = 20/+15^\circ$. ¿Para qué $Z_1 = |Z_1|/+15^\circ$ serán iguales las corrientes de línea en los circuitos monofásico y trifásico? Calcule la potencia compleja suministrada a la carga para la corriente monofásica con esta Z_1 y la potencia compleja suministrada a la carga trifásica.

11.22. Considérese la figura 11.12 con V , Z_L , Z_N y Z_3 con el problema 11.21. ¿Para qué $Z_1 = |Z_1|/15^\circ$ será igual la potencia promedio real suministrada a la carga monofásica y carga trifásica?

sica? Calcule las magnitudes de corriente de línea en ambos circuitos, si este Z_1 es utilizado en el caso monofásico.

11.23. Considérese la figura 11.12 con $V = 4.4 \text{ kV rms}$, donde cada fuente opera a un factor de potencia de 1.0, y cada circuito suministra 660 kW a su carga. Dibuje diagramas fasoriales para las corrientes de línea I_{aA} , I_{bB} ; $I_{a'A'}$, $I_{b'B'}$; $I_{c'C'}$, y la potencia instantánea total absorbida por las cargas monofásica y trifásica como función del tiempo.

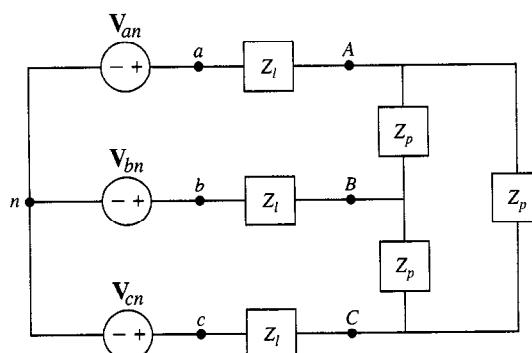
11.24. ¿Por qué la frecuencia de la vibración mecánica de un motor monofásico es el doble de su suministro eléctrico?

11.25. Demuestre cómo un sistema balanceado, conectado en Y-Y y de seis fases puede analizarse como dos sistemas trifásicos separados. Utilice este método para determinar las seis corrientes de carga y voltajes de fase de carga cuando una fuente balanceada de seis fases y conectada en Y de 4.4 kV rms (fase de referencia 0, secuencia de fase positiva) impulsa una carga balanceada de seis fases conectada en Y con impedancia de fase $4 + j3 \Omega$. Dibuje dos diagramas fasoriales separados, uno para las corrientes y otro para los voltajes.

11.26. Para la carga conectada en Δ que aparece en la figura 11.15, obtenga las corrientes de línea y potencia promedio real a la carga si $Z_p = 3 - j1$ y los voltajes de línea son $V_{ab} = 25/0^\circ$, $V_{bc} = 25/-120^\circ$, $V_{ca} = 25/+120^\circ$.

11.27. Una fuente balanceada conectada en Y con voltaje de línea 115 V rms suministra potencia a una carga balanceada conectada en Δ con cargas de fase Z_p , cada una compuesta por una combinación en paralelo de una resistencia de 75Ω , un inductor de 2.5-mH, y un capacitor de $10-\mu\text{F}$. Obtenga la potencia compleja suministrada a la carga y el factor de potencia a 60 Hz y a 400 Hz.

11.28. Para el circuito Y- Δ de secuencia de fase positiva que aparece en la figura, suponga $V_{an} = 1200/0^\circ$ V rms, $Z_l = 0.5\Omega$ y $Z_p = 8 + j2 \Omega$. Obtenga las corrientes de línea I_{aA} , I_{bB} e I_{cC} , y la potencia compleja suministrada a la carga. No utilice transformaciones Y- Δ .



PROBLEMA P11.28

11.29. Para el circuito del problema 11.28, suponga $V_{an} = 1200\angle 0^\circ$, $Z_1 = 0 \Omega$, y que la fuente trifásica suministra +2 kvars de potencia reactiva a la carga. Obtenga Z_p y la potencia promedio real, expresada en watts, si el factor de potencia es de 0.92 retardado.

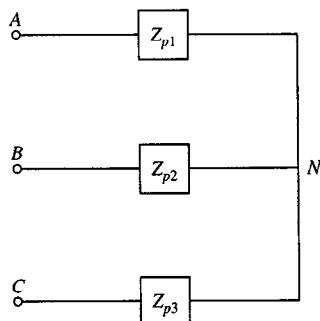
11.30. Explique por qué en el problema 11.29 no habría respuesta si el factor de potencias se especificara como 0.92 de adelante en lugar de atraso.

11.31. Considere el problema 11.28 con una fuente balanceada de secuencia de fase positiva y conectada en Y ($v_{an} = 115\angle 0^\circ$) y una carga no balanceada. Suponer $Z_l = 2 + j$ y $Z_p = 2 + j4$, pero que la carga de fase entre los nodos A y B es $Z_p = 2$. Obtenga las corrientes de línea y dibuje un diagrama fasorial. (Sugerencia: considere utilizar las transformaciones de Thevenin-Norton en cada combinación en serie de fuentes de fase e impedancia de línea.)

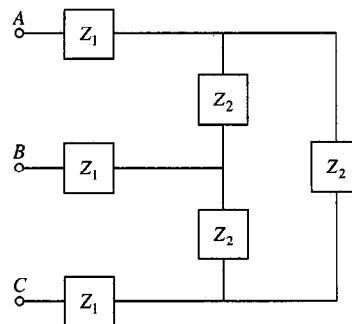
11.32. Una carga balanceada conectada en Δ tiene $\text{Re}(Z_p) = 14 \Omega$. Si una fuente balanceada conectada en Y suministra 1 kW a un factor de potencia de 0.5 adelantado, obténgase Z_p y la potencia reactiva suministrada a la carga.

11.33. Dibuje un diagrama de circuito RLC a la carga conectada en Y que a 60 Hz sea equivalente a la carga conectada en Δ , donde cada carga de fase consista de una resistencia 300Ω en serie con un inductor 2-mH . Repítase con 600 Hz.

11.34. Obtenga la carga Δ equivalente si (a) la carga está balanceada $Z_p = 2 + j$; (b) $Z_{p1} = Z_{p2} = 2 + j$, $Z_{p3} = 2 - j$.



PROBLEMA P11.34



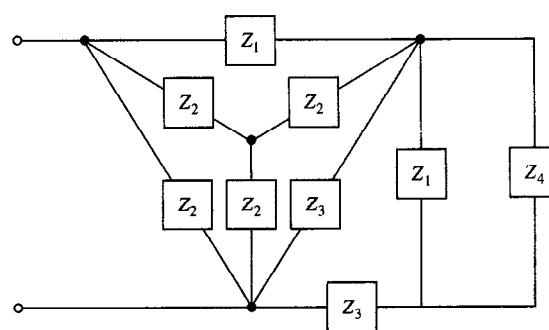
PROBLEMA P11.35

11.36. Una fuente trifásica balanceada y conectada en Y está conectada al subcircuito del problema 11.35 a través de líneas con impedancia de línea $Z_l = 1 + j30 \Omega$. Obtenga la potencia compleja suministrada por la fuente y las corrientes de línea.

11.37. Repita el problema 11.28 utilizando transformaciones de carga Y- Δ .

11.38. Derive la ecuación 11.32.

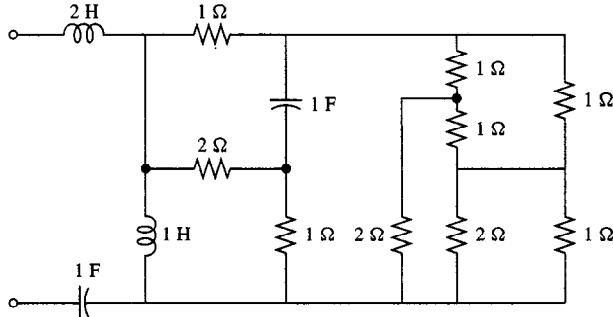
11.39. Obtenga la impedancia Z orientada hacia esta subred de dos terminales. Utilice una transformación Y- Δ . $Z_1 = 12 + j6$, $Z_2 = +j12$, $Z_3 = 4 + j4$ y $Z_4 = 16$ (todos en ohms).



PROBLEMA P11.39

11.35. Obtenga las cargas equivalentes conectadas en Δ y en Y si $Z_1 = -j30 \Omega$ y $Z_2 = 60 + j15 \Omega$.

11.40. Obtenga Z orientada hacia esta subred de dos terminales en $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Use transformaciones $\Delta - Y$.



PROBLEMA P11.40

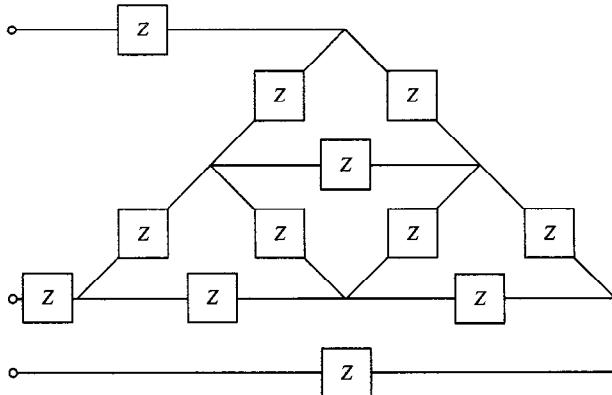
Problemas usando SPICE

11.41. Resuelva el problema 11.28 mediante el uso de la transformación de carga Δ -Y.

11.42. Resuelva el problema 11.4 mediante el uso de la transformación de carga Δ -Y.

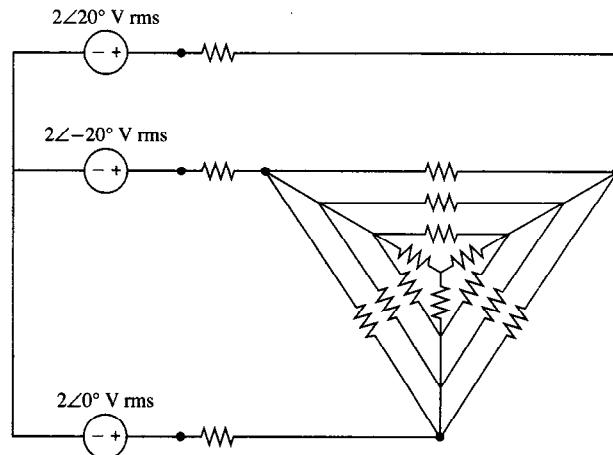
11.43. Una fuente balanceada trifásica y conectada en Y con corrientes de línea 2 A rms suministra 300 W a una carga balanceada conectada en Δ con ángulo de impedancia de fase $\angle Z_p = +20^\circ$. Obtenga Z_p y el voltaje de línea.

11.44. Cada $Z = 1 \Omega$. Obtenga la carga equivalente trifásica conectada en Δ . Compruebe utilizando SPICE.



PROBLEMA P11.44

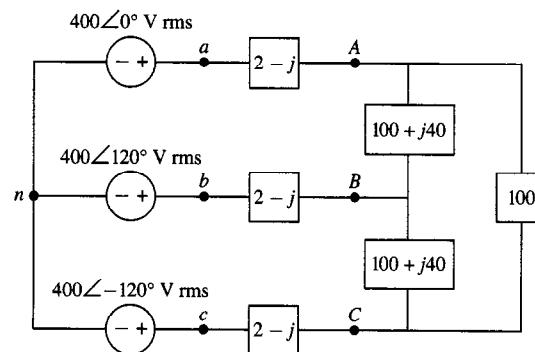
11.45. Obtenga la potencia total suministrada a la carga trifásica por la fuente no balanceada. Todas las resistencias son 10Ω . Compruebe utilizando SPICE.



PROBLEMA P11.45

11.46. Resuelva el problema 11.4 utilizando SPICE.

11.47. El circuito que se muestra opera a 60 Hz. Obtenga las corrientes de carga de fase I_{AB} , I_{BC} e I_{CA} utilizando SPICE.



PROBLEMA P11.47

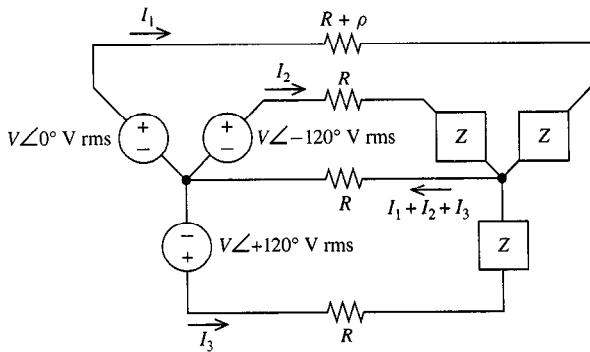
11.48. Para el circuito del problema 11.47, suponga que las líneas están protegidas por interruptores que se disparan cuando una línea de corriente I_{AA} , I_{BB} o I_{CC} llega a 100 A. Si la impedancia de fase de $100-\Omega$ entre A y C fuera sustituida por una resistencia de $R-\Omega$, ¿para qué valor aproximado de R se dispararía el interruptor de circuito? Resuelva utilizando SPICE. Adivine un valor tentativo para R , redúzcalo si el límite no se excede, y aumentelo si se excede. Obtenga R con dos cifras significativas.

Problemas más complejos

11.49. ¿Qué ventajas y desventajas tienen los sistemas de suministro de potencia de seis fases en comparación a los trifásicos?

11.50. ¿Cuál es el equivalente de la resultante de la transformación trifásica $Z_{\Delta} = 3Z_y$ en el caso de seis fases? Dibuje los dos equivalentes y derive su relación.

11.51. Escriba tres ecuaciones de trayectoria cerrada para este circuito utilizando corriente de línea \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 y \mathbf{I}_3 . Incluya la línea neutra en cada trayectoria cerrada. Reescriba para el caso



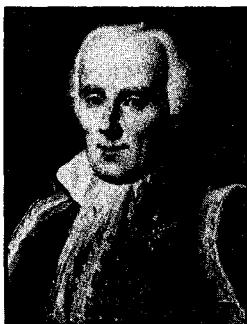
PROBLEMA P11.51

$\rho = 0$, llamando a las variables de corriente balanceadas resultantes \mathbf{I}_{1b} , \mathbf{I}_{2b} e \mathbf{I}_{3b} . Ahora, expresando las corrientes no balanceadas \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 en términos de componentes balanceadas y no balanceadas, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1b} + \mathbf{i}_1$, $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2b} + \mathbf{i}_2$, $\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_{3b} + \mathbf{i}_3$, reste el segundo conjunto (balanceado) de ecuaciones del primero. Las ecuaciones resultantes pueden resolverse fácilmente para las componentes no balanceadas. Obtenga \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , y \mathbf{I}_3 para $V = 115$ V rms, $R = 1 \Omega$, $Z = 1 + j\Omega$ y $\rho = -\frac{1}{2} \Omega$.

11.52. Una carga trifásica consiste de una combinación en paralelo de una carga resistiva balanceada Δ conectada en Y con impedancias de fase $R \Omega$, y una carga inductiva balanceada conectada en Δ con impedancias de fase de 2 H . Si la carga tiene $pf = 0.8$ retardada en 60 Hz , obtenga R .

11.53. Una fuente trifásica balanceada suministra potencia a una carga balanceada trifásica conectada en Δ con impedancias de fase puramente resistivas $R_p = 100 \Omega$. Si una de las tres cargas de fase se reduce a $R'_p < 100 \Omega$, obtenga el valor para R'_p de forma que el desbalance de corriente de línea, definido como la proporción entre las corrientes de línea rms mínima y máxima, sea 0.50 hasta dos cifras significativas. Repita para 0.10 para dos cifras significativas. Utilice SPICE.

La transformada de Laplace



Pierre Simon Laplace

1749-1827

No necesité a Dios en mi hipótesis [a Napoleón, quien tuvo que preguntárselo].

Pierre Simon Laplace

Se acredita a Pierre Simon, Marqués de Laplace, el famoso astrónomo y matemático francés, la transformada que lleva su nombre, y nos permite generalizar aún más el método generalizado de fasores para analizar circuitos con entradas no sinusoidales. Sin embargo, Laplace fue mejor conocido por su *Mecánica Celeste*, su obra maestra, que resumió todos los descubrimientos astronómicos desde la época de Newton.

Laplace nació en Beaumont-en-Auge, Normandía, Francia. Poco se sabe de su infancia, excepto que su padre fue un granjero, que al pretencioso Laplace, luego de hacerse famoso, no le gustaba hablar de su humilde origen. Se cuenta que vecinos adinerados reconocieron su talento y ayudaron a financiar su educación, primero en Caen y posteriormente en la escuela militarizada en Beaumont. Mediante los esfuerzos del famoso físico D'Alembert, quien quedó muy impresionado por su capacidad y audacia, Laplace se hizo profesor de matemáticas en París a la edad de 20 años. Fue un oportunista quien cambió su lealtad política en cuanto ello se requería, de forma que su carrera transcurrió con éxito durante tres regímenes de la Francia revolucionaria –la república, el imperio de Napoleón y la restauración Borbona–. Napoleón lo nombró conde, y Luis XVIII lo hizo marqués. Sin embargo, su capacidad matemática fue genuina, inspirando al gran matemático Simon Poisson a considerarlo el Isaac Newton de Francia.

Contenido del capítulo

- **12.1** *El dominio-s*
 - **12.2** *Funciones singulares*
 - **12.3** *Pares y propiedades de la transformada*
 - **12.4** *Expansión por fracciones parciales*
 - **12.5** *Solución de ecuaciones integrodiferenciales*
- *Resumen*
- *Problemas*



En los cuatro capítulos anteriores, nuestro objetivo fue determinar el comportamiento de circuitos en estado estable ac. Comenzamos con ecuaciones básicas del análisis de circuito que contenían derivadas e integrales respecto al tiempo, o ecuaciones integrodiferenciales. Aunque la resolución directa de estos conjuntos de ecuaciones *integrodiferenciales* resultó ser algo tedioso, descubrimos una estrategia indirecta que resultó sumamente provechosa. Al transformar primero las ecuaciones integrodiferenciales en el dominio fasorial, conseguimos reemplazar las ecuaciones de derivación e integración del cálculo, con las operaciones de multiplicación y división del álgebra ordinaria, que son mucho más simples. Luego de resolver las ecuaciones de circuito en esta forma fasorial *algebraica*, que es más conveniente, los resultados fueron entonces transformados al formato original sinusoidal en el dominio del tiempo, sin gran dificultad. La estrategia de la transformación de ecuaciones de circuito a la forma fasorial se demostró efectiva para reducir cálculos, y también significó un regalo conceptual. Permitió la extensión de la idea de la resistencia R a la impedancia $Z(j\omega)$, que forma la base para el tratamiento unificado de todos los elementos RLC en un estado estable ac.

En el presente capítulo, nuestro objetivo es presentar una herramienta que nos permitirá generalizar esta buena estrategia más allá de los estrechos confines del estado estable ac. Esta herramienta es la *Transformada de Laplace*. Es claro que esta herramienta es necesaria. Los mismos conjuntos de ecuaciones integrodiferenciales simultáneas que resultaron ser inconvenientes para los problemas en estado estable ac, también gobiernan el comportamiento de circuitos que contienen fuentes de circuitos no sinusoidales, y circuitos en donde se deben determinar transientes. No podemos transformar estos problemas de circuitos mediante fasores, que se aplican al caso de estado estable ac. La transformada de Laplace nos proporciona lo necesario para convertir ecuaciones integrodiferenciales a algebraicas, y generalizar la importante noción de impedancia a todos los circuitos lineales, en todos los casos, y no sólo limitándonos al estado estable ac.

Primero definiremos la transformada de Laplace y el dominio-s de donde toma sus valores. A continuación se presentan las funciones singulares, un conjunto de funciones útiles para describir el comportamiento transitorio. En las secciones subsiguientes, se calcularán las transformadas de Laplace de funciones de tiempo comunes, y se explorarán las propiedades de la transformada de Laplace. A continuación se considerará el regreso desde el dominio-s al dominio del tiempo (transformada inversa) mediante fracciones parciales, y el capítulo concluye con la solución de ecuaciones integrodiferenciales simultáneas mediante este método.

La transformada de Laplace $L[f(t)] = F(s)$ se define como la regla que asocia una función de tiempo $f(t)$ con una función $F(s)$, de variable compleja s , que está dada por

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (12.1)$$

$F(s)$ se designa *transformada de Laplace*, y $f(t)$, es la *transformada de Laplace inversa* de $F(s)$. En conjunto, $f(t)$ y $F(s)$ se conoce como pareja de la *transformada de Laplace*. El plano complejo sobre el que varía s , y $F(s)$ toma sus valores, se conoce como *dominio (s)*.

Hagamos algunos comentarios respecto a la definición (12.1). Nótese en primer lugar, que el límite inferior se especifica como $0-$. Ya en el capítulo 5 se introdujeron las cantidades $0-$ y $0+$, como aquellos instantes y justo después de $t = 0$. El dominio de integración en (12.1) se inicia justo a la izquierda de $t = 0$ y continua hasta $t = \infty$. Para las funciones ordinarias $f(t)$, el límite inferior $0-$ puede ser reemplazado libremente por 0 (incluso $0+$) sin que por ello cambie el valor de la integral, puesto que no puede haber un área nula bajo cualquier integrando finito en el intervalo infinitesimal $t = 0-$ a $t = 0+$. Sin embargo, existe una clase de funciones decididamente poco ordinarias, llamadas *funciones singulares*, que se introducirán en la siguiente sección. En una función singular, el área se puede “apilar” justo bajo el instante de tiempo $t = 0$, y elegimos incluir esta área en la definición de la transformada de Laplace fijando el límite inferior a $0-$.

Puesto que los valores de $f(t)$ para $t < 0-$ no entran en (12.1), la transformada de Laplace de una función de tiempo $f(t)$ no depende de los valores de $f(t)$ antes de $0-$. En circuitos con transientes, hay una buena justificación para hacer que las transformadas dependan únicamente de los valores de corrientes y voltajes después de un tiempo específico. En circuitos transientes hay cierto valor inicial, que generalmente llamamos $t = 0$, antes del cual, las historias detalladas de tiempo de las corrientes y voltajes no son de interés. Por ejemplo, un circuito puede no tener fuentes que actúan hasta $t = 0$, momento en el cual se activa una fuente de voltaje y se inicia una respuesta transitoria. Antes de $t = 0$, no ocurre nada de interés. Nuestra elección de límite inferior hace que (12.1) favorezca mucho el estudio de estos circuitos, haciendo a la transformada de Laplace adecuadamente indiferente al comportamiento antes del tiempo inicial de interés. El comportamiento anterior será resumido efectivamente al especificar condiciones iniciales en el instante $0-$. La ecuación (12.1) es a veces designada como la transformada de Laplace de “un solo lado” para distinguirla de la transformada de Laplace “de dos lados” definida como un límite inferior igual a $-\infty$. En el presente texto no necesitaremos de la transformada de Laplace de dos lados, y haremos que la transformada de Laplace sea sinónima con la transformada de Laplace de un solo lado, como se definió en (12.1).

Por la *existencia* de la transformada de Laplace $F(s)$ de una $f(t)$ dada, queremos decir que existe la integral definida (12.1) cuando menos para algunos valores de su argumento s . Es decir, existe una región en el dominio s , llamada *región de convergencia*, para la que está bien definida la integral en (12.1). Una función $f(t)$ cuya transformada de Laplace $F(s)$ existe, se dice que es *Laplace transformable*. Las condiciones suficientes para la *transformabilidad de Laplace* de $f(t)$ son:

1. $f(t)$ es una función continua a tramos; es decir, $f(t)$ es continua excepto sobre un conjunto de discontinuidades finitas aisladas [puntos t_i , donde $f(t_i+)$ y $f(t_i-)$ son dos números finitos distintos].

2. $f(t)$ es de orden exponencial; es decir, existe una función exponencial real $Me^{\sigma t}$ que, para una t suficientemente grande, es *mayor* en magnitud que $f(t)$:

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad (12.2)$$

Afortunadamente, casi todas las funciones de interés práctico satisfacen estas condiciones, y por consiguiente son Laplace-transformables¹. Aquellas pocas funciones que no lo son, contienen discontinuidades infinitas, tales como $f(t) = 1/t^2$ y por consiguiente no son continuas a tramos, ni crecen demasiado rápido para ser de orden exponencial, como $f(t) = t^t$. Aunque son de interés matemático, es poco factible que nos encontremos con funciones tan exóticas en circuitos prácticos, y por consiguiente ya no consideraremos más las funciones que no son Laplace transformables.

Como un primer cálculo de la transformada de Laplace, consideremos la función real de tiempo $f(t) = e^{-at} u(t)$ como aparece en la figura 12.1(a). $u(t)$ es la función de escalón unitario introducida en la sección 6.6. Recordemos que la multiplicación por la función de escalón unitario tiene el efecto de forzar el producto a cero para $t < 0$. Utilizando (12.1), $\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s)$ es

$$\mathbf{F}(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \quad (12.3a)$$

Evaluando esta integral,

$$\mathbf{F}(s) = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{s+a} [e^{-(s+a)0-} - e^{-(s+a)\infty}] \quad (12.3b)$$

Puesto que $e^{-(s+a)t}$ es una función continua, su valor en $0-$ es el mismo que su valor en 0 , que es la unidad. Para evaluarla en $t = \infty$, escribiremos s en la forma rectangular $s = \sigma + j\omega$.

$$e^{-(s+a)t} = e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t}$$

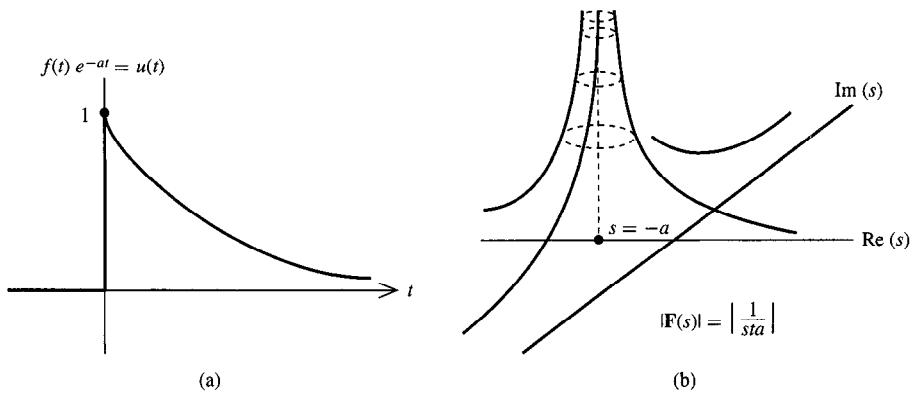


FIGURA 12.1 $f(t)$ y la magnitud de su transformada de Laplace $\mathbf{F}(s)$.

La magnitud de este número complejo es $e^{-(\sigma+a)t}$, para $\sigma + a > 0$, este valor se va a cero cuando t tiende a infinito. De este modo, el último término en (12.3b) es cero para $\sigma = \text{Re } s > -a$

¹ Incluso algunas funciones que no satisfacen estas condiciones de suficiencia relativamente débiles siguen siendo Laplace transformables. $f(t)$ puede ser *casi* continua a tramos; es decir, puede haber instantes aislados en donde $f(t)$ tienen discontinuidades infinitas, mientras que $f(t)$ es absolutamente integrable en estos intervalos. De manera similar, existen unas cuantas funciones que no son de orden exponencial y que aun así son Laplace transformables.

y hemos determinado la transformada de Laplace de $f(t) = e^{-at} u(t)$, y que es

$$F(s) = \frac{1}{s + a} \quad (12.4)$$

En la figura 12.1(b) se muestra un dibujo de la magnitud de $F(s)$ sobre el dominio s . La región de convergencia para $F(s)$ es la porción del dominio- s $\operatorname{Re}[s] > -a$. Nótese que la función $f(t) = e^{-at}$ tiene la misma $F(s)$, que para la función $e^{-at} u(t)$ calculada anteriormente, puesto que estas dos funciones son distintas únicamente en el tiempo negativo. El comportamiento en el tiempo negativo nunca se toma en cuenta para la transformada de Laplace en un solo lado.

Con $a = 0$, este resultado (12.4) revela una pareja de transformadas particularmente útil: la transformada de Laplace de la función de escalón unitario $f(t) = u(t)$ es $F(s) = 1/s$, o

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (12.5)$$

Para nuestra conveniencia al graficar la figura 12.1, hemos supuesto que a es un número real, haciendo de $f(t) = e^{-at} u(t)$ una función de tiempo real. De forma más general, si a es compleja, los pasos que llevan a la transformada (12.4) quedan sin modificarse (excepto que la región de convergencia cambia de $\operatorname{Re} s > -a$ a $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a$). De este modo, la pareja de transformada identificada anteriormente, es igualmente válida para el caso de a compleja y para el caso de a real.

Los puntos en el dominio- s en los que $F(s)$ no es infinito, tales como el punto $s = -a$ en la figura 12.1(b), o $s = 0$ en la transformada del escalón unitario anterior, se conoce como *polos* de $F(s)$. El nombre se deriva del aspecto de $F(s)$, como si un polo diera soporte a la función $s = -a$ en la figura 12.1(b). También son importantes los *ceros* de $F(s)$, aquellos puntos en el dominio s , en los que $F(s) = 0$. $F(s) = 1/(s + a)$ tiene un polo (en $s = -a$) y ningún cero. El siguiente ejemplo tiene tanto polos como ceros.

Ejemplo 12.1

Buscamos la transformada de Laplace de $f(t) = (e^{-t} + e^{-2t}) u(t)$. Por (12.1),

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} (e^{-t} + e^{-2t}) e^{-st} dt \quad (12.6a)$$

$$= \int_{0-}^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt + \int_{0-}^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt \quad (12.6b)$$

La primera integral es (12.4) con $a = 1$, y la segunda (12.4) con $a = 2$. De este modo

$$F(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \quad (12.7)$$

que es la transformada de Laplace deseada. $F(s)$ tiene polos en $s = -1$ y $s = -2$, y un solo cero en $s = -\frac{3}{2}$. Como veremos posteriormente en este capítulo, conocer los polos de $F(s)$ es útil para obtener la transformada inversa $f(t)$.

El presente ejemplo sugiere una propiedad general de las transformadas de Laplace que nos serán de mucha ayuda para calcularlas. Sea $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$. Entonces, por la integral de la definición (12.1),

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s) &= \int_{0-}^{\infty} [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= c_1 \int_{0-}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_{0-}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt\end{aligned}$$

Reconociendo las dos integrales como $\mathbf{F}_1(s)$ y $\mathbf{F}_2(s)$ tenemos la *propiedad de linealidad*.

LINEALIDAD

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathbf{F}_1(s) + c_2 \mathbf{F}_2(s) \quad (12.8)$$

Es decir, la *transformada de la Laplace en combinación lineal de funciones de tiempo, es igual a la combinación lineal de sus transformados de Laplace individuales*. Esta propiedad se deriva directamente de la linealidad de cualquier integral, tales como (12.1). La propiedad de linealidad nos permite utilizar transformadas de Laplace conocidas para crear nuevas.

Ejemplo 12.2

Obtengamos las transformadas de Laplace de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$. Puesto que las transformadas de Laplace de $e^{+j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$ son $1/(s - j\omega)$ y $1/(s + j\omega)$, respectivamente, entonces, por linealidad

$$\begin{aligned}L(\sin \omega t) &= L\left[\frac{1}{2j}(e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) \\ \text{o } L[\sin \omega t] &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned} \quad (12.9a)$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}L(\cos \omega t) &= L\left[\frac{1}{2}(e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) \\ \text{o } L[\cos \omega t] &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned} \quad (12.9b)$$

Esta misma técnica identificará las transformadas de Laplace de $\cosh at$ y $\operatorname{senh} at$, las funciones de coseno y seno hiperbólicos definidos para a real,

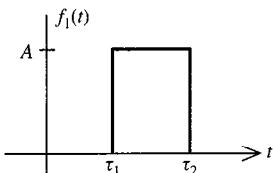
$$\begin{aligned}\cosh at &= \frac{1}{2}(e^{+at} + e^{-at}) \\ \operatorname{senh} at &= \frac{1}{2}(e^{+at} - e^{-at})\end{aligned}$$

Entonces, por linealidad,

$$\begin{aligned}L[\cosh at] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - a} + \frac{1}{s + a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2} \\ L[\operatorname{senh} at] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

En las secciones subsiguientes de este capítulo, presentaremos otras propiedades que serán útiles para obtener transformadas de Laplace y sus transformadas inversas, y para resolver ecuaciones de circuito. Estas propiedades, comenzando con la propiedad de linealidad antes descrita, aparecen resumidas en la tabla 12.1. La tabla 12.2 reúne todas las parejas de transformadas más importantes que derivaremos a lo largo de este capítulo. Estas tablas están en la sección 12.3, y al reverso de la portada y contraportada, pueden hallarse versiones expandidas de estas tablas.

EJERCICIOS



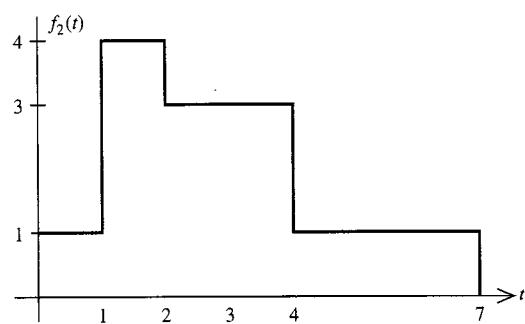
EJERCICIO 12.1.1

- 12.1.1.** Utilícese la integral de la definición (12.1) para determinar $L[f_1(t)]$ para la $f_1(t)$ que se muestra

Respuesta $A/s(e^{-st_1} - e^{-st_2})$

- 12.1.2.** Utilice los resultados del ejercicio 12.1.1 y la linealidad para obtener para la $L[f_2(t)]$ para el $f_2(t)$ que se muestra

Respuesta $1/s(1 + 3e^{-s} - e^{-2s} - 2e^{-4s} - e^{-7s})$



EJERCICIO 12.1.2

- 12.1.3** ¿La función $f(t) = t^2 e^{+t}$ es Laplace transformable? De ser así, obtenga M y σ adecuados en (12.2)

Respuesta Sí; por ejemplo, $M = 1$ y cualquier $\sigma > +1$. $M e^{\sigma t} > |f(t)|$ para todo

$$\frac{t}{\ln t} > \frac{2}{\sigma - 1}$$

12.2

FUNCIONES SINGULARES

La integración y diferenciación repetidas de la función de escalón unitario, produce una familia de funciones llamadas *funciones singulares*. En esta sección presentaremos esta familia, desarrollaremos reglas generales para obtener la transformada de Laplace de las derivadas e integrales, y luego utilizaremos estas reglas para obtener las transformadas de Laplace para las funciones singulares. En la aplicación de transformadas de Laplace para el análisis de circuitos, las funciones singulares surgen de forma natural, y jugarán un papel central ciertamente, esta familia de funciones es prominente en el estudio de toda clase de sistemas físicos que tienen como modelo ecuaciones integrodiferenciales.

La única función singular con la que nos hemos topado hasta ahora es el escalón unitario $u(t)$. A continuación consideraremos funciones singulares producidas por la integración repetida de $u(t)$. La primera integral del escalón unitario se conoce como la función de *rampa unitaria* $r(t)$. Puesto que $u(t) = 0$ para $t < 0$, su integral $r(t) = 0$ para $t < 0$. Para $t \geq 0$:

$$r(t) = \int_{0-}^t u(\tau) d\tau = \int_{0-}^t 1 d\tau = t, \quad t \geq 0 \quad (12.10)$$

Examinando la figura 12.2(b), $r(t)$ es cero hasta que $t = 0$, y luego “sube en rampa” y a una pendiente constante unitaria. Integrando nuevamente, tenemos la función de *parábola unitaria* de $p(t)$. Puesto que $r(t)$ es cero para $t < 0$, su integral $p(t)$ también será cero para $t < 0$ y para $t \geq 0$:

$$p(t) = \int_{0-}^t r(\tau) d\tau = \int_{0-}^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0 \quad (12.11)$$

En la figura 12.2(c) aparece la parábola unitaria.

Nótese en la figura 12.2 que el escalón, rampa y parábola unitarias, son cero para $t < 0$. Las funciones producidas por integraciones subsiguientes comparten esta propiedad, así como las producidas por diferenciación, sin importar cuántas veces se repitan. *Las funciones singulares son todas cero para $t < 0$.* Por consiguiente $r(t) = tu(t)$ y $p(t) = \frac{1}{2}t^2u(t)$. Nótese también que cada una es infinitamente suave, es decir, posee derivadas de todos los órdenes, excepto en el punto $t = 0$. Éste es el punto singular de estas funciones, de donde se deriva su nombre de familia.

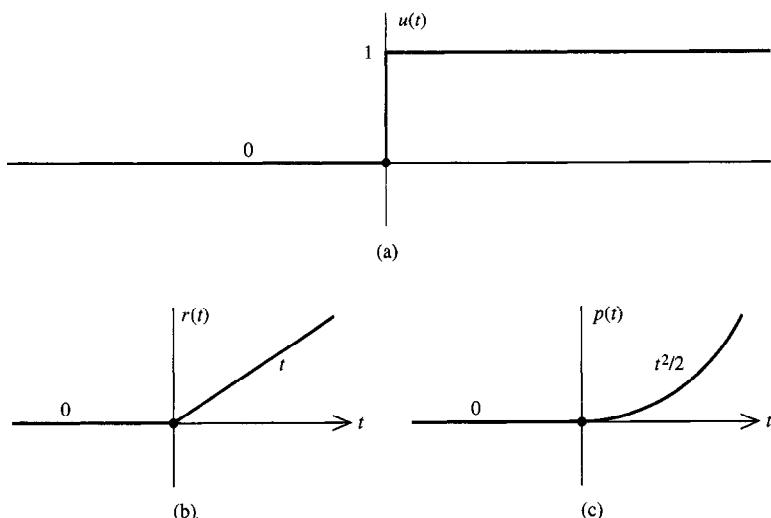


FIGURA 12.2 Escalón, rampa y parábola unitarios.

Continuando, al seguir integrando la parábola unitaria se obtiene la función cúbica unitaria, igual a $\frac{t^3}{6} u(t)$, luego la cuártica unitaria, $\frac{t^4}{24} u(t)$, y así sucesivamente. Cada una es una potencia mayor de t en el tiempo positivo.

Una aplicación práctica de esta rama de la familia de las funciones singulares, es para representar *funciones polinomiales a tramos*, cuyas funciones son polinomios fijos sobre subintervalos. Este uso se muestra en el siguiente ejemplo, en los ejercicios al final de esta sección.

Ejemplo 12.3

Considérese la función $f(t)$ de la figura 12.3, dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, & -\infty < t < 1 \\ &= t^2 - 2t + 1, & 1 \leq t < 3 \\ &= -2t + 10 & 3 \leq t < 6 \\ &= 2, & 6 \leq t < \infty \end{aligned} \quad (12.12)$$

Deseamos expresar $f(t)$ como combinación lineal de escalones, rampas y paráolas. Empezando desde la izquierda, nótese que, en el intervalo subintervalo $1 \leq t \leq 3$,

$$f(t) = 2p(t-1) = 2 \left[\frac{1}{2}(t-1)^2 \right], \quad 1 \leq t \leq 3$$

En el subintervalo que se inicia en $t = 3$, el término t^2 debe ser cancelado, requiriendo que sumemos el término $-2p(t-3)$. Pero

$$2p(t-1) - 2p(t-3) = (t-1)^2 - (t-3)^2 = 4t - 8, \quad t \geq 3$$

Para producir la pendiente deseada -2 requerimos sumar $-6r(t-3)$. Luego, y hasta el final de este subintervalo, $t = 6$,

$$f(t) = 2p(t-1) - 2p(t-3) - 6r(t-3), \quad t \leq 6$$

Finalmente, sumando $+2r(t-6)$ se corrige la pendiente a 0 en el subintervalo final, y el término constante se corrige de $+10 + 2(-6) = -2$

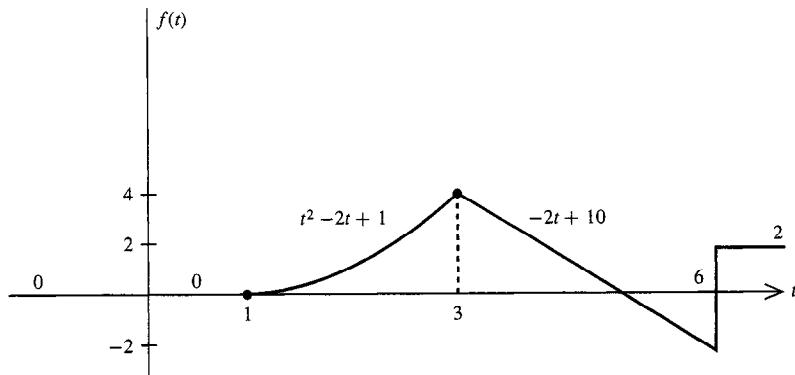


FIGURA 12.3 $f(t)$ para el ejemplo 12.3.

$a + 2$ sumando $+4u(t - 6)$. Esta es la descripción deseada, válida para toda t , de $f(t)$ como la suma pesada:

$$f(t) = 2p(t - 1) - 2p(t - 3) - 6r(t - 3) + 2r(t - 6) + 4u(t - 6)$$

A continuación consideraremos las funciones singulares restantes, aquellas formadas por diferenciación repetida del escalón unitario. La primera derivada de la función del escalón unitario se conoce como *función del impulso unitario* $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) \quad (12.13)$$

Considérese la gráfica del escalón unitario que aparece en la figura 12.2(a). Puesto que $u(t)$ es constante para toda t negativa, su derivada también debe ser igual a cero ahí, y lo mismo es verdad para toda t positiva. De forma que seguramente la función de impulso unitario $\delta(t)$ debe ser igual a cero para toda t , excepto quizás en $t = 0$. ¿Cuál es el comportamiento en el punto singular? El escalón unitario $u(t)$ tiene un salto en $t = 0$ y recordamos que una función no es formalmente diferenciable en un punto de discontinuidad. De este modo, el impulso unitario, siendo su derivada, no puede ser comprendida como una función ordinaria, puesto que su valor en $t = 0$ no está bien definido en el sentido matemático usual.

Examinemos la función en $t = 0$ más detenidamente. Considérese la función en escalón unitario $v(t)$ que aparece en la figura 12.4(a).

$$v(t) = \frac{1}{2\Delta}[r(t - \Delta) - r(t + \Delta)] \quad (12.14a)$$

donde $r(t)$ es la rampa unitaria. Sea $d(t) = (d/dt)v(t)$ su derivada. Puesto que $u(t) = (d/dt)r(t)$, de (12.14a) se implica que

$$d(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{2\Delta}[u(t - \Delta) - u(t + \Delta)] \quad (12.14b)$$

Conforme Δ se hace más y más pequeño, $v(t)$ tiende al escalón unitario y su derivada $d(t)$ tiende al impulso unitario $\delta(t)$. El pulso unitario $d(t)$ es un pulso con altura $\frac{1}{2\Delta}$ y base 2Δ (y

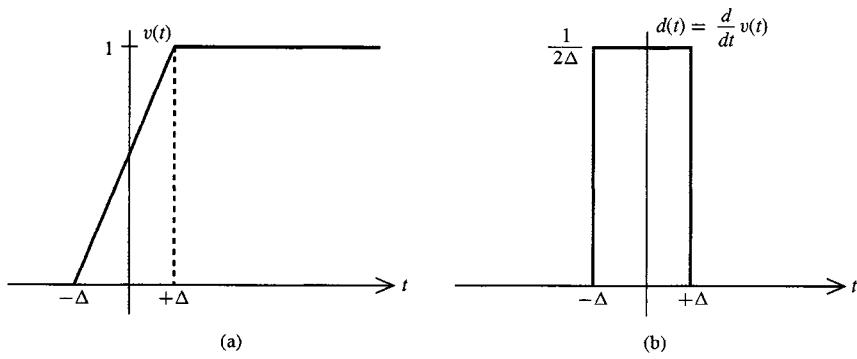


FIGURA 12.4 Funciones que tienden al escalón unitario y al impulso unitario.

por consiguiente un área que siempre es igual a 1) centrada en $t = 0$. Estas funciones aparecen dibujadas en la figura 12.4. Adviértanse dos características de $\delta(t)$ que emergen al hacer notar que $\delta(t)$ es el límite de $d(t)$ conforme Δ tiende a cero:

$$\delta(t) = 0, \quad \text{para toda } t \neq 0 \quad (12.15a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (12.15b)$$

Examinando la figura 12.4(b) conforme $\Delta \rightarrow 0$, el impulso unitario $\delta(t)$ es un área unitaria, infinitamente alta e infinitamente estrecha. El símbolo gráfico que utilizaremos para esta función, es la flecha que apunta hacia arriba, que aparece en la figura 12.5. El número escrito a un lado no es su altura, que es infinita, sino su área que es finita. De la figura 12.5 nos queda claro por qué el impulso unitario $\delta(t)$ no es una función ordinaria bien definida en $t = 0$. Su valor es ahí infinito, y el infinito no es un número real.

En tanto que $\delta(t)$ no es una función ordinaria, aún puede ser útil definida como una *función general*. Las funciones generalizadas son cuidadosas extensiones de la clase de funciones ordinarias que, si se utilizan en el contexto adecuado, permiten obtener resultados precisos y rigurosos.

Los objetos generalizados en matemáticas no nos son nuevos. Estamos familiarizados con la idea de que el (∞) no es un número real ordinario (un punto en la línea real). No hay ningún número real al que x tienda cuando decimos “ x tiende a infinito”. Sin embargo, podemos trabajar con el infinito de forma efectiva y rigurosa, tratándola como una extensión al conjunto de los números reales, un número real *generalizado*. Podemos hacer aritmética con él; por ejemplo, la ecuación $1/\infty = 0$ es correcta y obvia. Sin embargo, debemos tener mucho cuidado al utilizar el número generalizado ∞ , por ejemplo, aunque la ecuación $x/x = 1$ es válida para todos los números reales $x \neq 0$, no es válida para el número generalizado ∞ . Aun cuando ∞ no es cero, ∞/∞ en general no es igual a 1.

$\delta(t)$ es a las funciones ordinarias lo que ∞ es a los números ordinarios, una extensión que, si se utiliza en las ecuaciones adecuadas, dará resultados precisos. ¿Cuáles son las ecuaciones correctas para $\delta(t)$? Para responder a esta cuestión de forma completa y rigurosa, requeriríamos de una extensa digresión, a un área del análisis matemático conocido como teoría de las funciones generalizadas. Ciertamente, el estado del impulso unitario fue el tema del acalorado debate entre grandes pensadores durante un considerable periodo. Dos de los analistas más famosos de los últimos cien años, Oliver Heaviside (1850-1925), un ingeniero inglés autodidacta, y Paul Dirac (1902–), un físico inglés laureado con el Premio Nóbel, jugaron papeles vitales para desarrollar la teoría y reconciliar las controversias. La introducción al capítulo 13 es una breve biografía de Heaviside.

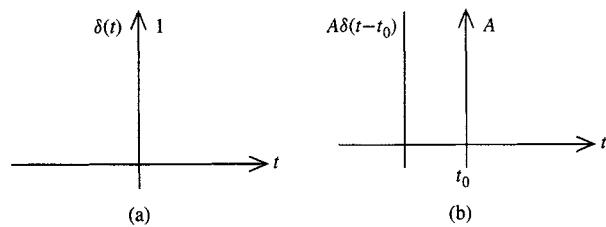


FIGURA 12.5 (a) Función de impulso unitario $\delta(t)$; (b) impulso desplazado de área A , $A\delta(t - t_0)$.

Aquí nos limitamos a identificar algunas condiciones específicas bajo las que puede utilizarse el impulso unitario con exactitud y rigor. La función generalizada $\delta(t)$ puede integrarse, como en (12.15b), y evaluarse en todo instante, excepto en este tiempo singular, como en (12.15a). Es correcto identificar el impulso unitario como la derivada del escalón unitario (12.13), partiendo de que puesto que $\delta(t)$, es una función generalizada, queremos decir la *derivada generalizada* del escalón unitario (su derivada ordinaria no existe). Con frecuencia, para ser más breves, omitiremos la palabra *generalizada*, refiriéndonos a $\delta(t)$ simplemente como la derivada del escalón unitario.

Una consecuencia inmediata del hecho de que el impulso unitario de la derivada del escalón unitario, es que el *escalón unitario es la integral del impulso unitario*:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (12.16)$$

Para todo límite superior $t < 0$, no existe área bajo el impulso dentro de los límites de la integral, y cuando t pasa por cero, el área unitaria “apilada” en $t = 0$ se suma, de forma que el valor de la integral salta a 1. La función que es cero para $t < 0$ y 1 para $t > 0$ es, desde luego, el escalón unitario.

Una consecuencia del hecho de que $\delta(t) = 0$ para todo t excepto $t = 0$, es que tenemos un producto $f(t)\delta(t)$ donde $f(t)$ es una función ordinaria continua en $t = 0$, y entonces

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

Esto proviene de comparar los dos lados para t distinta de 0 (son ambas 0) y para $t = 0$, (los dos lados son idénticos). Si el impulso se desplaza respecto del tiempo de forma que su punto singular es $t = t_0$, entonces, por una razonamiento idéntico al anterior, la función continua $f(t)$ puede ser reemplazada nuevamente por su valor en el punto singular del impulso, t_0 :

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (12.17)$$

Esta regla, la *regla de producto de impulso* será muy útil para simplificar expresiones que contengan $\delta(t)$.

Ejemplo 12.4

Evalúese la derivada generalizada $(d/dt)[\cos tu(t)]$ y demuéstrese que obedece el teorema fundamental del cálculo, es decir,

$$\int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} [\cos(\tau)u(\tau)] d\tau = \cos(t)u(t) \quad (12.18)$$

Primero notamos que $\cos(t)u(t)$ no es diferenciable en el sentido ordinario, puesto que tiene una discontinuidad de salto en $t = 0$. Un enfoque es expresar esta función como la suma de una función continua, cuya derivada es una derivada ordinaria, y un escalón unitario cuya derivada generalizada es conocida como el impulso unitario $\delta(t)$.

$$\cos(t)u(t) = f(t) + u(t)$$

donde $f(t)$ es la función continua:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, & t < 0 \\ &= \cos(t) - 1, & t \geq 0 \end{aligned}$$

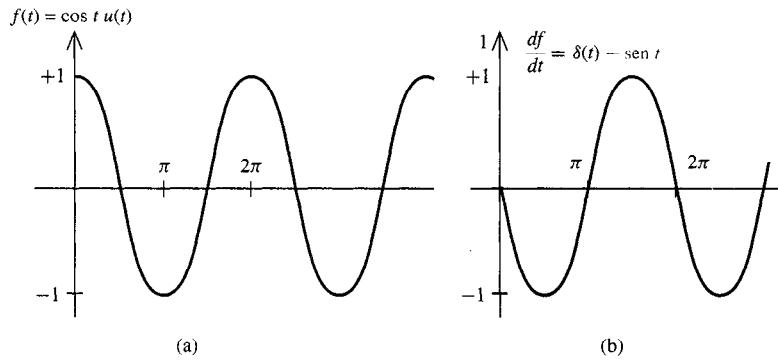


FIGURA 12.6 Funciones para el ejemplo 12.4.

$f(t)$ no tiene saltos, y es por consiguiente diferenciable en el sentido ordinario, con una derivada igual a cero en el tiempo negativo, y $-\operatorname{sen}(t)$ en el tiempo positivo. De este modo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \cos(t)u(t) &= \frac{d}{dt} f(t) + \frac{d}{dt} u(t) \\ &= -\operatorname{sen}(t)u(t) = \delta(t)\end{aligned}\quad (12.19)$$

Como se muestra en la figura 12.6, la derivada tiene un impulso unitario situado donde la función que se diferencia tiene una discontinuidad de salto.

Finalmente, integrando esta derivada que calculamos,

$$\int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} [\cos(\tau)u(\tau)] d\tau = - \int_{-\infty}^t \operatorname{sen}(\tau)u(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

La primera integral se evalúa a 0 en el tiempo negativo, y en $\cos(t) - 1$ en el tiempo positivo. La segunda es la integral de $\delta(t)$, la cual es $u(t)$.

$$\int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} [\cos(\tau)u(\tau)] d\tau = [\cos(t) - 1]u(t) + u(t) = \cos(t)u(t)$$

y se verifica (2.18). Esto completa el ejemplo.

Podríamos acelerar los cálculos anteriores, utilizando la regla de Leibniz. La *regla de Leibniz (la regla para diferenciar producto)* puede aplicarse libremente a productos que involucran funciones singulares y funciones ordinarias.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \cos(t)u(t) &= \left[\frac{d}{dt} \cos(t) \right] u(t) + \cos(t) \left[\frac{d}{dt} u(t) \right] \\ &= -\operatorname{sen}(t)u(t) + \cos(t)\delta(t)\end{aligned}$$

El segundo término puede simplificarse $\cos(0)\delta(t) = \delta(t)$ mediante producto de impulso (12.17), llegando a (2.19) de forma algo más eficiente.

Una propiedad final que necesitaremos es la *propiedad de integración* del impulso unitario. Considérese la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt$$

donde se supone que $f(t)$ es continua en $t = t_0$. Aplicando la regla de producto de impulso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t - t_0) dt$$

Sacando la constante $f(t_0)$ fuera de la integral, y notando que la integral es el área total bajo este impulso unitario (desplazado) que es uno, llegamos a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (12.20)$$

La propiedad de integral del escalón unitario (12.20) demuestra que *el efecto del impulso en la integral, es seleccionar el valor del resto del integrando en su punto singular con el valor de la integral. Este resultado es vigente para todas las funciones ordinarias $f(t)$ continuas en t_0 .*

Ejemplo 12.5

Evalúe la siguiente integral (log significa el logaritmo en base 10):

$$\int_{-9}^{+\infty} 5(\log t)\delta(t - 10) dt$$

El límite inferior de la integral puede extenderse a $-\infty$ puesto que la función de impulso es 0 en el intervalo añadido. Entonces, aplicando la propiedad de integración del uso unitario (2.20) con el punto singular $t_0 = 10$,

$$\int_{-9}^{+\infty} 5 \log(t)\delta(t - 10) dt = 5 \log(10) = 5$$

Hasta ahora, hemos discutido las funciones singulares producidas al integrar el escalón unitario en cualquier número de veces, y diferenciándola únicamente una vez. Nos queda describir aquellas producidas por diferenciación repetida. Estas se conocen colectivamente como *funciones singulares de orden superior* y, aunque son interesantes desde un punto de vista matemático, son menos necesarias en aplicaciones de circuito. Por consiguiente, nos conformaremos con mencionar sólo aquellos pocos casos relevantes al presente propósito.

Las siguiente función se conoce como *función derivada del impulso unitario* $\delta'(t)$:

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$$

$\delta(t)$ es una función generalizada, la derivada generalizada de $u(t)$, de forma que las derivadas de todo orden de $\delta(t)$ también deben ser funciones generalizadas. Puesto que $\delta(t) = 0$ en todas partes excepto en su punto singular, la función de derivada del impulso unitario $\delta'(t)$, debe heredar esta propiedad. $\delta'(t)$ tiene una propiedad de selección,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t - t_0) dt = -f'(t_0) \quad (12.21)$$

que puede verificarse mediante integración por partes y utilizando la propiedad de la integración del impulso unitario (2.20). *Del mismo modo en que el impulso unitario selecciona el valor de una función en su punto singular, su derivada selecciona la derivada en ese punto (multiplicada por -1).*

Las funciones singulares de orden mayor restantes $\delta^{(2)}(t)$, $\delta^{(3)}(t)$, ..., son cada una derivada de la anterior. Cada una tiene la propiedad de selección de la integración del impulso unitario, seleccionando los valores de las derivadas de orden mayor en el punto singular (ver Problema 12.47).

Habiendo presentado la familia de funciones singulares, ahora nos concentraremos en el cálculo de su transformada de Laplace. Para hacer esto, primero desarrollaremos reglas para escribir la transformada de Laplace de la derivada, y de la integral de cualquier función cuya transformada de Laplace es conocida.

DIFERENCIACIÓN

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0-) \quad (12.22)$$

La transformada de Laplace de una derivada de una función es s veces la transformada de Laplace de la función menos su valor inicial. Integrando por partes,

$$\int_{0-}^{\infty} \frac{d}{dt}f(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0-}^{\infty} + s \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

INTEGRACIÓN

El último término es claramente $sF(s)$, y la evaluación de la primera en infinito resulta en 0 para toda s dentro de la región de convergencia de la transformada. De ahí se implica la ecuación (12.22)

$$L\left[\int_{0-}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (12.23)$$

La transformada de Laplace de la integral de una función es la transformada de Laplace de la función dividida por s . También esto puede verificarse integrando la integral de la definición por partes como en el caso anterior. (Se pide del lector que lo haga en el problema 12.19.)

Armados con estas reglas, podemos calcular fácilmente la transformada de Laplace para todas las funciones singulares. Comenzamos con $1/s$, la transformada de $u(t)$ derivada de la sección anterior. Puesto que la rampa unitaria es la integral del escalón unitario, por la regla de integración la transformada de $r(t)$ es $R(s) = 1/s^2$. De manera similar, la transformada de la parábola unitaria es $P(s) = 1/s^3$, y así sucesivamente, para aquellas funciones singulares producidas por integraciones subsiguientes. Para obtener la transformada de $\delta(t)$, aplíquese la regla de diferenciación con $f(t) = u(t)$:

$$L[\delta(t)] = s\frac{1}{s} - 0 = 1 \quad (12.24)$$

La transformada del impulso unitario es simplemente la constante 1. La derivada del impulso unitario $\delta'(t)$, siendo la derivada de $\delta(t)$, tiene una transformada de $s(1) - 0 = s$. De igual modo, $\delta^{(2)}(t)$ tiene como transformada a s^2 , $\delta^{(3)}(t)$, tiene como transformada s^3 , y así sucesivamente. *Las transformadas de las funciones singulares son todas potencias de s .*

Ejemplo 12.6

Determinemos la transformada de Laplace de $\frac{d}{dt}(\cosh tu(t))$ y $\frac{d^2}{dt^2}(\operatorname{senh} tu(t))$, donde cosh y senh son las funciones seno y coseno hiperbólicos discutidos en el ejemplo 12.2. Notando las transformadas dadas ahí, y por regla de diferenciación,

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d}{dt}\cosh tu(t)\right] &= sL[\cosh tu(t)] - \cosh(0-)u(0-) \\ &= \frac{s^2}{s^2 - 1^2} \end{aligned}$$

puesto que $u(0-) = 0$. Similarmente,

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d}{dt}\operatorname{senh} tu(t)\right] &= sL[\operatorname{senh} tu(t)] - \operatorname{senh}(0-)u(0-) \\ &= \frac{s}{s^2 - 1^2} \end{aligned}$$

y, diferenciando nuevamente,

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{senh} tu(t)\right] &= sL\left[\frac{d}{dt}\operatorname{senh} tu(t)\right] - \frac{d}{dt}\operatorname{senh}(t)\Big|_{t=0-} u(0-) \\ &= \frac{s^2}{s^2 - 1^2} \end{aligned}$$

Podemos verificar estos cálculos primero diferenciando,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\cosh atu(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})u(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}[(e^t - e^{-t})u(t) + (e^t + e^{-t})\delta(t)] \\ &= \operatorname{senh} tu(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

y luego transformando

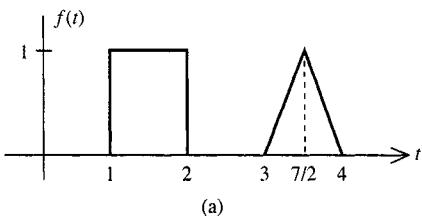
$$L[\operatorname{senh} tu(t) + \delta(t)] = \frac{1}{s^2 - 1} + 1 = \frac{s^2}{s^2 - 1}$$

en que, desde luego, da el mismo resultado. Nótese que las transformadas de $(d/dt)\cosh tu(t)$ y $d^2/dt^2\operatorname{senh} tu(t)$ son las mismas, de forma que las transformadas inversas deben ser idénticas. Ciertamente, estas dos funciones de tiempo son idénticas, como puede verificarse por cálculo directo.

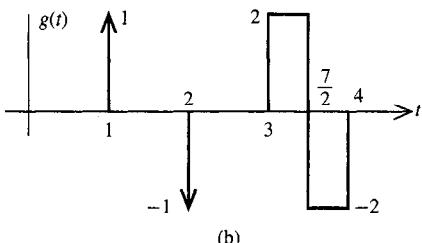
EJERCICIOS

12.2.1. Obténgase la transformada de Laplace de $\delta(t - t_0)$ utilizando el teorema de integración del impulso unitario. Nótese que el límite inferior en la integral del teorema de integración del impulso unitario es $-\infty$. Obtenga la transformada de Laplace de $u(t - t_0)$ de la integral de la definición (12.1). Considérese $t_0 < 0$ y $t_0 \geq 0$ como casos separados.

Respuesta $L[\delta(t - t_0)] =$ para $t_0 < 0$, e^{-st_0} para $t_0 \geq 0$. $L[u(t - t_0)] = 1/s$ para $t_0 < 0$, e^{-st_0}/s para $t_0 \geq 0$.



(a)



(b)

EJERCICIO 12.2.2.

12.2.2. Dibuje $g(t) = df/dt$ para la $f(t)$ que aparece. Exprese $f(t)$ y $g(t)$ como combinaciones lineales de funciones singulares desplazadas. Utilice el ejercicio 12.2.1 para obtener $G(s)$

$$\begin{aligned} \text{Respuesta } f(t) &= u(t-1) - u(t-2) + 2u(t-3) - 4u(t-\frac{7}{2}) + 2u(t-4); \\ g(t) &= \delta(t-1) - \delta(t-2) + 2u(t-3) - 4u(t-\frac{7}{2}) + 2u(t-4); \\ G(s) &= e^{-s} - e^{-2s} + 2e^{-3s}/s - 4e^{-7/2s}/s + 2e^{-4s}/s \end{aligned}$$

12.2.3. Exprese $e(t)$, la integral de $f(t)$ en el ejercicio 12.2.2.,

$$e(t) = \int_{0-}^t f(\tau) d\tau$$

Como combinación lineal de funciones singulares desplazadas. Obtenga $E(s)$.

$$\begin{aligned} \text{Respuesta } e(t) &= r(t-1) - r(t-2) + 2p(t-3) - 4p(t-\frac{7}{2}) + 2p(t-4) \\ E(s) &= e^{-s}/s^2 - e^{-2s}/s^2 + 4e^{-3s}/s^3 - 8e^{-7/2s}/s^3 + 4e^{-4s}/s^3 \end{aligned}$$

12.2.4. Calcule $d^3/dt^3(\sin^3 tu(t))$. ¿Para qué valores $n > 0$ existe la derivada enésima de $\sin^3 tu(t)$ como función ordinaria? ¿Para qué valores existe como funciones generalizadas?

$$\text{Respuesta } 6 \cos^3 tu(t) - 21 \sin^2 t \cos tu(t), n = 1, 2, 3; n > 3$$

12.3**PARES Y PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA**

Hemos visto lo útil que son las propiedades de linealidad y de diferenciación e integración para calcular la transformada de Laplace. En esta sección desarrollaremos otras propiedades que facilitan el cálculo de nuevas transformadas a partir de transformadas

EL DESPLAZAMIENTO DEL TIEMPO

$$L[f(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-st_0}\mathbf{F}(s), \quad t_0 > 0 \quad (12.25)$$

conocidas, y aplicarlas a funciones que nos son de interés en el estudio de los circuitos.

La transformada de Laplace de una función de tiempo que es cero para $t < 0$, luego desplazada a la derecha (retardada), se multiplica por una exponencial compleja. Para verificarlo, evaluamos la transformada de $f(t - t_0)u(t - t_0)$:

$$\int_{0-}^{\infty} f(t - t_0)u(t - t_0)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0)e^{-st} dt$$

Sea $\tau = t - t_0$ y cambiemos variables en esta integral.

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0}\mathbf{F}(s)$$

$f(t)$ y su versión desplazada respecto al tiempo $f(t - t_0)u(t - t_0)$ aparecen en la figura 12.7.

DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA

$$L[e^{-s_0 t} f(t)] = \mathbf{F}(s + s_0) \quad (12.26)$$

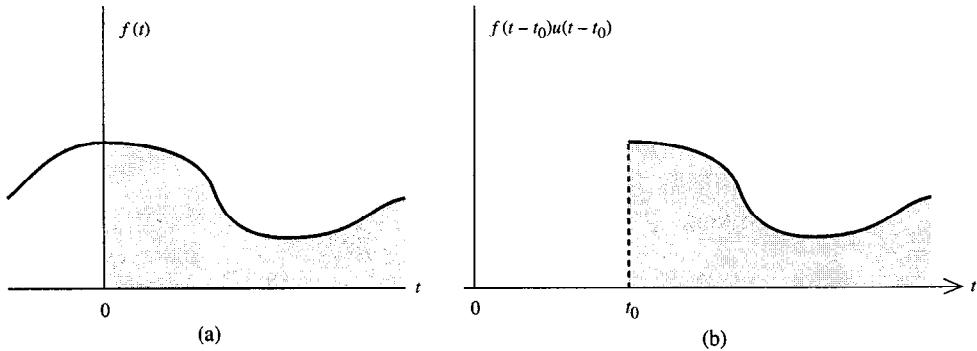


FIGURA 12.7 (a) Función $f(t)$; (b) $f(t)$ anulada para $t > 0$ y retardada por t_0 .

El desplazamiento de frecuencia en el dominio s corresponde a la multiplicación en el dominio del tiempo por una exponencial compleja. Para verificar (12.26), evalúese la transformada de $e^{-s_0 t} f(t)$.

Ejemplo 12.7

La transformada del pulso en escalera $g(t)$ dibujado en la figura 12.8(a) puede obtenerse utilizando la propiedad de desplazamiento respecto al tiempo. Escríbase $g(t)$ como

$$g(t) = 2u(t - 1) + 2u(t - 3) - 2u(t - 5) - 2u(t - 7)$$

Luego, desplazando respecto al tiempo el escalón unitario $f(t) = u(t)$ mediante retardos de $t_0 = 1, 3, 5$ y 7 ,

$$G(s) = \frac{2}{s}(e^{-s} + e^{-3s} - e^{-5s} - e^{-7s})$$

Para evaluar la transformada del producto $\cos \omega t f(t)$, donde $f(t)$ es cualquier función Laplace transformable, nótese que

$$\cos \omega t f(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} f(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} f(t)$$

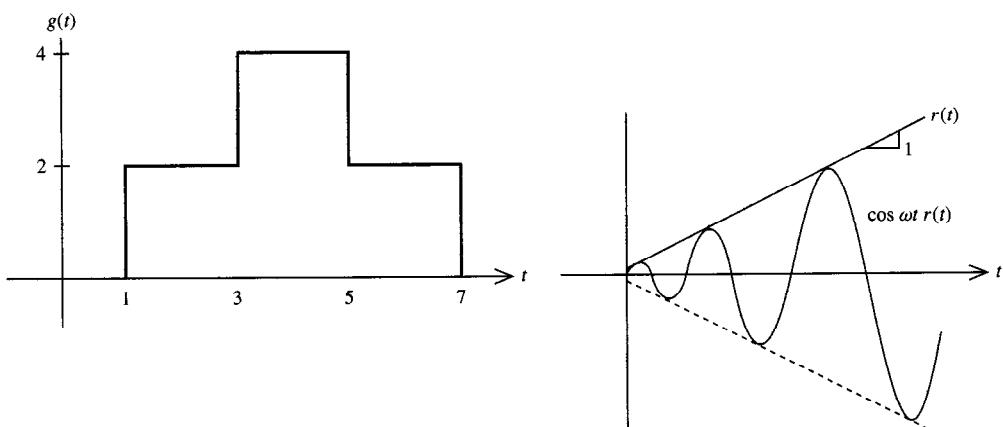


FIGURA 12.8 Funciones de tiempo para el ejemplo 12.7.

Utilizando la propiedad de desplazamiento de frecuencia con $s_0 = \pm j\omega$,

$$\mathbf{L}[\cos \omega t f(t)] = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(s - j\omega) + \mathbf{F}(s + j\omega)] \quad (12.27)$$

Por ejemplo, la transformada de $f(t)$, la rampa unitaria $f(t) = r(t) = tu(t)$, es $\mathbf{F}(s) = 1/s^2$ como se muestra en la sección anterior, y utilizando la ecuación (12.27),

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[t \cos \omega t u(t)] &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s - j\omega)^2} + \frac{1}{(s + j\omega)^2} \right] \\ &= \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \end{aligned} \quad (12.28)$$

que es la transformada de Laplace deseada para la figura 12.8(b). Aunque estaban destinados a utilizar el uso de las propiedades de desplazamiento del tiempo y la frecuencia, ambos resultados también requirieron el uso de la propiedad de linealidad.

MULTIPLICACIÓN DE FRECUENCIA EN TIEMPO

$$\mathbf{L}[f(ct)] = \frac{1}{c} \mathbf{F}\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0 \quad (12.29)$$

Comprimir (expandir) la escala de tiempo expande (comprime), la escala de frecuencia por un factor igual. Para verificarlo, calculemos el lado izquierdo de (12.29) con $t = ct$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[f(ct)] &= \int_{0-}^{\infty} f(ct) e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau/c} \frac{d\tau}{c} \end{aligned}$$

Sacando $1/c$ de la integral, se obtiene el resultado. Nótese que los valores de $c > 1$ corresponden a la compresión del tiempo $c < 1$ a la expansión de tiempo. Por ejemplo, la gráfica de la función $g(t) = f(3t)$ está comprimida por un factor de 3 en relación a $f(t)$. La constante positiva real c en (12.29), es a veces conocida como el *factor de compresión de tiempo*.

Ejemplo 12.8

Considérese el pulso cuadrado $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ que aparece en la figura. Si lo comprimimos por un factor de $c > 1$, y al mismo tiempo lo multiplicamos por la amplitud por el mismo factor c , obtenemos $g(t) = cf(ct)$. $g(t)$ para $c = 2$ como aparece en la figura 12.9. La transformada de $f(t)$, utilizando la propiedad de desplazamiento de (12.25), es

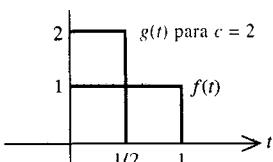


FIGURA 12.9 $f(t)$ y una $f(t)$ comprimida para el ejemplo 12.8.

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

Entonces, con $g(t) = cf(ct)$, por la multiplicación de frecuencia-tiempo,

$$\mathbf{G}(s) = c \left[\frac{1}{c} \left(\frac{1}{(s/c)} - \frac{e^{-s/c}}{(s/c)} \right) \right] = \frac{c}{s} (1 - e^{-s/c})$$

De este modo, para un factor de compresión de tiempo $c = 2$, $\mathbf{G}(s) = (2/s)(1 - e^{-s/2})$. Es interesante hacer notar que, conforme c crece, $g(t)$ tiende a la función de impulso unitario $\delta(t)$ (su área siempre es 1 para cualquier c , y $g(t)$ tiende a cero para t no nula). Para evaluar su transformada $\mathbf{G}(s)$ conforme c crece mucho, podemos aplicar la ya conocida expansión en series de Taylor de la función exponencial.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

con $x = -s/c$ para obtener

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(s) &= \frac{c}{s} \left(1 - \left[1 - \frac{s}{c} + \frac{s^2}{2!c^2} - \frac{s^3}{3!c^3} + \dots \right] \right) \\ &= 1 - \frac{s}{2!c} + \frac{s^2}{3!c^2} - \dots\end{aligned}$$

Conforme c se hace muy grande, $\mathbf{G}(s)$ converge a 1. Esto es consistente con la transformada de la función a la que tiende $g(t)$, puesto que sabemos que $\mathbf{L}[\delta(t)] = 1$.

T-MULTIPLICACIÓN

$$\mathbf{L}[tf(t)] = \frac{-d}{ds} \mathbf{F}(s) \quad (12.30)$$

la *t-multiplicación* corresponde a la diferenciación negativa en el dominio s . Esta propiedad es implicada al calcular la derivada negativa a ambos lados de (12.1) respecto a s :

$$\begin{aligned}-\frac{d}{ds} \mathbf{F}(s) &= -\frac{d}{ds} \left[\int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right] \\ &= \int_{0-}^{\infty} tf(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Ejemplo 12.9

Obtengamos las transformadas de Laplace de $t^n e^{-at}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ En la sección 12.1 determinamos que $f(t) = e^{-at}$ y $\mathbf{F}(s) = 1/(s + a)$ eran una pareja de transformadas. Entonces, por la propiedad de *t-multiplicación*,

$$\mathbf{L}[te^{-at}] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s + a} = \frac{1}{(s + a)^2}$$

t-multiplicando nuevamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}[t^2 e^{-at}] &= \mathbf{L}[t(te^{-at})] \\ &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{(s + a)^2} = \frac{2s}{(s + a)^3}\end{aligned}$$

y, por última vez,

$$L[t^3 e^{-at}] = -\frac{d}{ds} \frac{2}{(s+a)^3} = \frac{(3)(2)}{(s+a)^4}$$

El patrón, que puede verificarse formalmente utilizando inducción finita, es

$$L[t^m e^{-at}] = \frac{m!}{(s+a)^{m+1}} \quad (12.31)$$

Las propiedades de la transformada discutidas hasta este punto, se reúnen y resumen en la tabla 12.1. Unas cuantas entradas en la tabla, tales como la diferenciación enésima y la t -multiplicación enésima, no se derivaron explícitamente, pero están estrechamente relacionadas con otras propiedades que se derivaron. Sus derivaciones fueron asignadas con ejercicios y en los problemas al final del capítulo.

También se formó una tabla con una conexión de los pares de transformadas específicas más útiles que hemos determinado hasta ahora, y es la tabla 12.2. Nuevamente, dejamos la derivación de algunas de estas entradas a los ejercicios y problemas.

En el reverso de la contraportada y la página anterior, pueden hallarse versiones ligeramente expandidas de estas tablas. Las entradas añadidas ahí, que no aparecen en la tabla 12.1 o la tabla 12.2, corresponden a resultados que se introducirán en capítulos posteriores.

Nótese que unas cuantas entradas en la tabla 12.2 aparecen en dos lugares, como funciones singulares y funciones ordinarias. Esto es verdad para el escalón unitario y la función ordinaria $f(t) = 1$, ambas tienen la transformada $1/s$. Esto se debe a que cualquier función que difiere únicamente en tiempo negativo, tendrá la misma transformada de Laplace. Por la misma razón, *todas las $f(t)$ en la tabla 12.2 pueden modificarse por $u(t)$ sin cambiar su transformada $F(s)$* .

Tabla 12.1 Propiedades de la transformada de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1. Linealidad	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
2. Diferenciación	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0-)$
3. Diferenciación enésima	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0-) - s^{n-2} f'(0-) - \dots - s f^{(n-2)}(0-) - f^{(n-1)}(0-)$
4. Integración	$\int_{0-}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
5. Desplazamiento de tiempo	$f(t - t_0)u(t - t_0), t_0 > 0$	$e^{-st_0} F(s)$
6. Desplazamiento de la frecuencia	$e^{-s_0 t} f(t)$	$F(s + s_0)$
7. Multiplicación de tiempo-frecuencia	$f(ct), c > 0$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
8. t -multiplicación	$tf(t)$	$\frac{-d}{ds} F(s)$
9. t -multiplicación enésima	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

Tabla 12.2. Par de transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$
<i>Funciones Singulares</i>		
1. Impulso unitario	$\delta(t)$	1
2. Escalón unitario	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3. Rampa unitaria	$r(t) = tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4. Parábola unitaria	$p(t) = \frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{s^3}$
5. Integral enésima del impulso	$\delta^{(-n)}(t)$	$\frac{1}{s^n}$
6. Derivada del impulso unitario	$\delta'(t)$	s
7. Derivada enésima del impulso	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
<i>Funciones Ordinarias</i>		
8. Constante		$\frac{1}{s}$
9. t	t	$\frac{1}{s^2}$
10. Potencia de t	$t^{n-1}/(n-1)!$	$\frac{1}{s^n}$
11. Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
12. Exponencial de multiplicada	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
13. Exponencial con t -multiplicación repetida	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
14. Seno	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
15. Coseno	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
16. Sinusoide	$\sqrt{c^2 + d^2} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{d}{c}\right)$	$\frac{cs + d\omega}{s^2 t + \omega^2}$
17. Seno amortiguado	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{[s+a]^2 + \omega^2}$
18. Coseno amortiguado	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{[s+a]^2 + \omega^2}$
19. Sinusoide amortiguado	$\sqrt{c^2 + a^2} e^{-at} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{d}{c}\right)$	$\frac{c(s+a) + d\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
20. Seno t multiplicado	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
21. Coseno t -multiplicado	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Estas tablas pueden utilizarse en conjunto para producir muchos más pares de transformada. Dada una función $f(t)$ para la que debe obtenerse su transformada $\mathbf{F}(s)$, pueden revisarse los pares de transformadas de Laplace para obtener una tabla de entrada similares, por decir algo $g(t)$. Pueden utilizarse las propiedades para transformar $g(t)$ a $f(t)$, y luego se buscan al consultar la tabla de propiedades de la transformada de Laplace. Una vez que

se ha descubierto una secuencia de transformaciones de las que se obtiene $f(t)$ a partir de $g(t)$, la tabla de propiedades especifica los cambios correspondientes a $G(s)$ con los que se obtiene $F(s)$. Puede utilizarse la misma estrategia dada una transformada $F(s)$ para la que se busca su transformada inversa $f(t)$. Concluimos esta sección con el uso de estas tablas.

Ejemplo 12.10

Obtégase $F(s)$ para la función de tiempo $f(t) = (t - 3)^2 e^{-2t} u(t - 3)$. La entrada que más se le parece en la tabla 12.2 parece ser la exponencial t-multiplicada repetida. Con $n = 3$ y $a = 2$,

$$L\left[\frac{1}{2}t^2e^{-2t}\right] = \frac{1}{(s+2)^3}$$

Consultando la tabla 12.1, un desplazamiento del tiempo en $t_0 = 3$, da la multiplicación de la transformada por $e^{-st_0} = e^{-3s}$, o

$$L\left[\frac{1}{2}(t-3)^2e^{-2(t-3)}u(t-3)\right] = \frac{e^{-3s}}{(s+2)^3}$$

Comparando nuestra actual función de tiempo $f(t)$, necesitamos únicamente multiplicarla por 2 y cambiar el factor $e^{-2(t-3)}$ a e^{-2t} , que se hace fácilmente multiplicándolo por e^{-6} . Luego, por la propiedad de linealidad con $c_1 = 2e^{-6}$ y $c_2 = 0$,

$$L[(t-3)^2e^{-2t}u(t-3)] = \frac{2e^{-3(s+2)}}{(s+2)^3}$$

Ejemplo 12.11

Obtégase la transformada inversa $f(t)$ para $F(s) = (s^2 + 3)/(s^2 + 4)$. Notando que las entradas más similares en la tabla 12.2 son el seno y el coseno, reescribese $F(s)$ como la suma

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 4} + \frac{3}{s^2 + 4}$$

El segundo término es reconocible con la transformada de $3/2$ seno $2t$. El primer término es semejante a la entrada del coseno, pero debe s-multiplicarse. Recordando la propiedad de diferenciación, $g(t) = (d/dt) \cos 2t$ tendrá la transformada

$$G(s) = s \frac{s}{s^2 + 4} - \cos 0 = \frac{s^2}{s^2 + 4} - 1$$

Sumando ambos términos,

$$L^{-1}\left[-1 + \frac{s^2}{s^2 + 4} + \frac{3}{s^2 + 4}\right] = \frac{d}{dt} \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t$$

Pero sabemos que sumando 1 a la transformada, corresponde a sumar $\delta(t)$ a la función de tiempo, o

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[1 - 1 + \frac{s^2}{s^2 + 4} + \frac{3}{s^2 + 4}\right] &= \delta(t) + \frac{d}{dt} \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t \\ \text{o} \\ L^{-1}\left[\frac{s^2 + 3}{s^2 + 4}\right] &= \delta(t) - \frac{1}{2} \sin 2t \end{aligned}$$

Este resultado también puede ganarse por una larga división de $F(s)$, como en el problema 12.28.

EJERCICIOS

- 12.3.1.** Use las entradas 14 y 15 de la tabla 12.2 para el seno y coseno puros, junto con la linealidad, para escribir fórmulas para $L[\sin(\omega t + \theta)]$, $L[\cos(\omega t + \theta)]$.

Respuesta $(s \sin \theta + \omega \cos \theta)/(s^2 + \omega^2)$, $(s \cos \theta - \omega \sin \theta)/(s^2 + \omega^2)$.

- 12.3.2.** Úsese el desplazamiento respecto al tiempo para calcular $L[\frac{1}{2}(t-1)^2 e^{-(t-1)} u(t-1)]$.

Respuesta $e^{-s}/(s+1)^2$.

- 12.3.3.** Use la propiedad de t-multiplicación para obtener $F(s)$ para $f(t) = te^{-2t} \cos 4t$.

Respuesta $([s+2]^2 - 16)/([s+2]^2 + 16)^2$.

12.4

EXPANSIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Hemos visto la forma en que puede utilizarse una tabla de pares básicos de transformada junto con una tabla de propiedades de transformada de Laplace para generar pares de transformadas adicionales. Dado $f(t)$, utilizar esta estrategia para obtener su transformada $F(s)$, o dado $F(s)$, para obtener la transformada inversa $f(t)$.

En el caso de que $F(s)$ sea una *función racional*, o división de polinomios en s , existe un conveniente procedimiento para obtener la transformada inversa basada en expansión de *fracciones parciales*. Luego de desarrollar el método en esta sección, la siguiente sección explora la principal aplicación de este procedimiento. Las funciones racionales surgen cada vez que se utilizan transformada de Laplace para resolver esas ecuaciones, que son las ecuaciones básicas del análisis de circuitos.

Una función racional $F(s)$,

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (12.32)$$

se designa *propia* si el orden de su polinomio denominador es mayor que el del numerador, $n > m$. Una $F(s)$ impropia debe ser primero preparada para una expansión en fracciones parciales, realizando la operación de división larga, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12.12

Realice división larga sobre la función racional impropia $F(s) = (3s^3 + 2s + 1)/(s^2 + s + 2)$.

$$\begin{array}{r} 3s - 3 \\ s^2 + s + 2 \overline{) 3s^3 + 2s + 1} \\ -(3s^3 + 3s^2 + 6s) \\ \hline -3s^2 - 4s + 1 \\ -(-3s^2 - 3s - 6) \\ \hline -s + 7 \end{array}$$

El resultado de la división es $3s - 3$ con residuo $-s + 7$. De este modo

$$F(s) = 3s - 3 + \frac{(-s + 7)}{s^2 + s + 2}$$

La división larga convierte una función racional impropia en la suma de un polinomio (que en este ejemplo es $3s - 3$), y una función racional propia. Es fácil obtener la

transformada inversa de Laplace de la parte polinomial, puesto que todas las potencias de s tienen funciones singulares como sus transformadas inversas (entrada 7 en la tabla 12.2). Por ejemplo, el polinomio $\mathbf{F}_1(s) = 3s - 3$ tiene una transformada inversa $f_1(t) = 3\delta'(t) - 3\delta(t)$. De este modo, el problema se reduce a obtener la transformada inversa de la otra parte, la función racional propia, para la que no hay una entrada obvia en la tabla. Durante el resto de esta sección, supondremos que $\mathbf{F}(s)$ es una función racional propia.

La idea básica de la expansión en fracciones parciales es escribir $\mathbf{F}(s)$ como suma de funciones racionales simples, o “fracciones parciales”, donde cada una puede transformarse inversamente de modo sencillo. Como ilustración, invertamos la transformada

$$\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{(s+1)(s+4)}$$

Obteniendo una expansión en fracciones parciales en operación opuesta a obtener un denominador común. Es decir, lo que queremos es obtener fracciones simples que se sumen para obtener $\mathbf{F}(s)$. Puesto que la transformada es propia, las fracciones parciales serán copias, y por consiguiente, deben ser de la forma

$$\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4}$$

Las constantes A y B se determinan para hacer la identidad en s . Los modos más simples para determinar A y B es notando que

$$(s+1)\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{s+4} = A + \frac{B(s+1)}{s+4}$$

y

$$(s+4)\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{s+1} = \frac{A(s+4)}{s+1} + B$$

Puesto que estas deben ser identidades para toda s , obtengamos la primera en $s = -1$, que elimina B , y la segunda en $s = -4$, que elimina A . Los resultados son

$$A = (s+1)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{2(9)}{3} = 6$$

$$B = (s+4)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=-4} = \frac{2(6)}{-3} = -4$$

Por consiguiente, tenemos

$$\mathbf{F}(s) = \frac{6}{s+1} - \frac{4}{s+4}$$

y, por la tabla 12.2,

$$f(t) = 6e^{-t} - 4e^{-4t}$$

Los polos $p = -1$ y $p = -4$, en este caso son polos *simples* de un polo de *orden* 1, y en general, para cada polo simple la expansión de fracciones parciales contiene un término $A/(s-p)$. Como en el caso de un factor denominador $(s-p)^n$, donde $n = 2, 3, 4, \dots$, el polo $s = p$ es un polo *múltiple*, o polo de orden n . Por consiguiente, los factores que comprenden $(s-p)^n$ no son distintos, y debe modificarse la expansión de fracciones parciales. Posteriormente consideraremos los polos múltiples.

POLO REAL SIMPLE

Para cada polo real simple p en $\mathbf{F}(s)$, habrá un término $A/(s - p)$ en su expansión de fracciones parciales, donde $A = (s - p)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=p}$ y un término Ae^{pt} en su transformada inversa.

Los polos complejos ocurren en pares conjugados, y sus coeficientes correspondientes en expansión son conjugados complejos. Por ejemplo, si $\mathbf{F}(s)$ tiene polos simples $s = \alpha \pm j\beta$ y una expansión

$$\mathbf{F}(s) = \frac{A}{s - \alpha - j\beta} + \frac{B}{s - \alpha + j\beta}$$

entonces

$$A = (s - \alpha - j\beta)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=\alpha+j\beta}$$

y

$$B = (s - \alpha + j\beta)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=\alpha-j\beta}$$

A partir de esto, podemos ver que $B = A^*$, porque $\mathbf{F}(s)$ es una división de polinomios en s con coeficientes reales. La transformada en inversa es

$$f(t) = Ae^{(\alpha+j\beta)t} + A^*e^{(\alpha-j\beta)t}$$

que es la suma de un número complejo y su conjugado. Por consiguiente,

$$f(t) = 2 \operatorname{Re}[Ae^{(\alpha+j\beta)t}]$$

Si $A = |A| e^{j\theta}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \operatorname{Re}[|A|e^{\alpha t} e^{j(\beta t + \theta)}] \\ &= 2|A|e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \end{aligned}$$

PAREJA SIMPLE DE POLOS CONJUGADOS COMPLEJOS

Para cada par simple (no repetido) de polos conjugados complejos $p = \alpha + j\beta$, $p^* = \alpha - j\beta$ en $\mathbf{F}(s)$, habrá un par de términos en su $A/(s - p) + A^*/(s - p^*)$ en su expansión de fracciones parciales, donde $A = (s - p)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=p}$. Habrá un término único $2|A|e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle A)$ en su transformada inversa debida a su par de polos.

Ejemplo 12.13

Como ejemplo, la transformada

$$\mathbf{F}(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

tiene la expansión en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{s}{(s+1)(s+1-j1)(s+1+j1)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1-j1} + \frac{B^*}{s+1+j1} \end{aligned}$$

donde

$$A = \frac{s}{s^2+2s+2} \Big|_{s=-1} = -1$$

y

$$B = \frac{s}{(s+1)(s+1+j1)} \Big|_{s=-1+j1} = \frac{1-j1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-45^\circ}$$

De este modo tenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{-t} + 2\operatorname{Re}[Be^{(-1+j1)t}] \\ &= -e^{-t} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}/1t - 45^\circ\right] \\ &= -e^{-t} + \sqrt{2}e^{-t} \cos(t - 45^\circ) \end{aligned}$$

Una forma alternativa es

$$\begin{aligned} f(t) &= -e^{-t} + \sqrt{2}e^{-t}(\cos t \cos 45^\circ + \sin t \sin 45^\circ) \\ &= -e^{-t} + e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

Asociada con un polo repetido p de orden r , habrán r términos en la expansión de fracciones parciales:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}_1(s)(s-p)^r} = \frac{A_r}{(s-p)^r} + \frac{A_{r-1}}{(s-p)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_1}{s-p} + \mathbf{F}_1(s) \quad (12.33)$$

Multiplicando ambos lados de (12.33) por $(s-p)^r$ y evaluando en $s=p$, cada término a la derecha es cero, excepto el primero, que es A_r . Para obtener las restantes A_{r-1}, A_{r-2} , y siguientes, puede utilizarse cualquiera de los dos procedimientos. El término que se obtuvo que involucra A_r , puede restarse a ambos lados, dejando una nueva ecuación similar al original, excepto que el polo en $s=p$ ahora se repite únicamente $r-1$ veces. Entonces puede obtenerse A_{r-1} como se describió anteriormente, multiplicándolo por $(s-p)^{r-1}$ y evaluándolo en $s=p$. El proceso desciende a través de todas las A_k hasta que se obtiene A_1 . Designamos a esto como *resta repetida*.

El segundo procedimiento para obtener A_{r-1}, A_{r-2} , involucra la *diferenciación repetida*. Si ambos lados de (12.33) se multiplican por $(s-p)^r$, y se diferencia el resultado respecto a s , obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(s-p)^r \mathbf{F}(s) &= \frac{d}{ds}(A_r + (s-p)A_{r-1} + (s-p)^2 A_{r-2} + \cdots) \\ &= (A_{r-1} + 2(s-p)A_{r-2} + \cdots) \end{aligned}$$

Evaluando en $s=p$, cada uno de los términos, excepto el primero, es cero, y de esta forma obtenemos A_{r-1} . De forma similar, se obtiene A_{r-2} diferenciándolo dos veces, y así sucesivamente para cada coeficiente-A.

POLOS REPETIDOS

Para cada polo p en $\mathbf{F}(s)$ de orden r , habrán r términos en su expansión de fracciones parciales de la forma $A_k/(s-p)^k$, $k = 1, \dots, r$. Pueden obtenerse los numeradores de $A_k = dr^{r-k}/ds^{r-k}(s-p)^r \mathbf{F}(s) \Big|_{s=p}$. Habrá r términos correspondientes en su transformada inversa, cada una de la forma $A_k t^{k-1} e^{pt}$, $k = 1, \dots, r$.

Nótese que, para brevedad, hemos mencionado únicamente el método de diferenciación en el último postulado resumido. En el siguiente ejemplo se ilustrarán ambos métodos.

Ejemplo 12.14

Deseamos obtener la transformada inversa de $\mathbf{F}(s) = 3/(s+1)^2(s+2)$. Hay un polo simple en -2 y un polo repetido de orden 2 en -1 . Por consiguiente, la expansión en fracciones parciales es de la forma

$$\mathbf{F}(s) = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \quad (12.34)$$

Ambos métodos para calcular los términos asociados con polos repetidos se inicia evaluando A como

$$A = (s+1)^2 \mathbf{F}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 3 \quad (12.35)$$

El método de resta repetida continúa restando $3/(s+1)^2$ a ambos lados de (12.34), lo que nos deja

$$\frac{3}{(s+1)^2(s+2)} - \frac{3}{(s+1)^2} = \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Sumando términos a la izquierda

$$\frac{-3}{(s+1)(s+2)} = \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{s+2} \quad (12.36)$$

Pero (12.36), es sólo la expansión en fracciones parciales de $\mathbf{F}_1(s) = -3/(s+1)(s+2)$, de modo que

$$B = (s+1)\mathbf{F}_1(s) \Big|_{s=-1} = \frac{-3}{s+2} \Big|_{s=-1} = -3 \quad (12.37)$$

$$C = (s+2)\mathbf{F}_1(s) \Big|_{s=-2} = \frac{-3}{s+1} \Big|_{s=-2} = +3 \quad (12.38)$$

El método de diferenciación repetida obtiene B , calculando la derivada,

$$\frac{d}{ds} (s+1)^2 \mathbf{F}(s) = \frac{d}{ds} \frac{3}{s+2} = \frac{-3}{(s+2)^2}$$

y evaluando en el polo repetido.

$$B = \frac{-3}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -3 \quad (12.39)$$

El coeficiente restante C , se determina mediante la simple fórmula de polos;

$$C = (s+2)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=-2} = \frac{3}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = +3 \quad (12.40)$$

Comparando (12.37) - (12.38) con (12.39) - (12.40), ambos métodos concuerdan en que la expansión de fracciones parciales es

$$\mathbf{F}(s) = \frac{3}{(s+1)^2} - \frac{3}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

y por consiguiente

$$f(t) = 3te^{-t} - 3e^{-t} + 3e^{-2t} = 3[(t-1)e^{-t} + e^{-2t}]$$

Ejemplo 12.15

Ahora obtendremos la transformada inversa de $\mathbf{F}(s) = 1/(s + 1)$ ($s^2 + 2s + 2$)². Las raíces de la ecuación cuadrática son $-1 \pm j$ de forma que hay polos conjugados complejos repetidos. Sea $p = -1 + j$. Entonces

$$\mathbf{F}(s) = \frac{A}{(s - p)^2} + \frac{B}{s - p} + \frac{A^*}{(s - p^*)^2} + \frac{B^*}{s - p^*} + \frac{C}{s + 1} \quad (12.41)$$

Primero calculemos A:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(s + 1)(s - p^*)^2} \Big|_{s=p} = \frac{1}{(p + 1)(p - p^*)^2} \\ &= \frac{1}{(+j)(2j)^2} = j\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Continuando por el método de diferenciación repetida

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{(s + 1)(s - p^*)^2} = \frac{-[(s - p^*)^2 + 2(s + 1)(s - p^*)]}{(s + 1)^2(s - p^*)^4}$$

Evaluando en $s = p$,

$$B = \frac{-[(p - p^*)^2 + 2(p + 1)(p - p^*)]}{(p + 1)^2(p - p^*)^4}$$

Utilizando el hecho de que $p - p^* = j2$ $\text{Im } p = 2j$ y $p + 1 = j$,

$$B = \frac{-[-4 + 2(j)(2j)]}{(-1)(16)} = \frac{1}{2}$$

También necesitamos C:

$$C = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \Big|_{s=-1} = 1$$

Ahora tenemos la expansión completa en fracciones parciales (12.41). Nos resta obtener la transformada inversa. De la tabla 12.2,

$$f(t) = Ate^{pt} + Be^{pt} + A^*te^{p^*t} + B^*e^{p^*t} + Ce^{-t}$$

Reconocemos que los términos que involucran a A y A^* son términos conjugados, al igual que aquellos que involucran B y B^* , de forma que

$$f(t) = 2 \operatorname{Re}\{Ate^{pt} + Be^{pt}\} + Ce^{-t}$$

Para simplificar la sustitución final, convirtiendo a forma polar, tenemos $A = \frac{1}{4} \angle 90^\circ$, $B = \frac{1}{2} \angle 0^\circ$. Entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \operatorname{Re}\{t(\frac{1}{4} \angle 90^\circ)(e^{-t}e^{+jt} + (\frac{1}{2} \angle 0^\circ)(e^{-t}e^{+jt}))\} + e^{-t} \\ &= 1/2t e^{-t} \operatorname{Re}\{e^{+jt+90^\circ}\} + e^{-t} \operatorname{Re}\{e^{+jt}\} + e^{-t} \\ &= te^{-t} \cos(t + 90^\circ) + e^{-t} \cos(t) + e^{-t} \end{aligned}$$

El primer término en esta solución puede volverse a simplificar a $-te^{-t} \sin t$.

Como se ilustró en este ejemplo, los polos repetidos pueden tratarse del mismo modo, sean reales o complejos. Si son complejos, vendrán en pares conjugados, y esto facilitará nuestros cálculos, puesto que la mitad de los coeficientes definen a la otra mitad. Los tér-

minos en la transformada debida a estos polos también vendrán siempre en pares conjugados complejos, como en el ejemplo, y pueden combinarse convenientemente, en una sola forma sinusoidal de fase desplazada.

EJERCICIOS

- 12.4.1.** Obtener el EFP para $\mathbf{F}(s) = (s^3 - 1)/[s(s + 2)]$.

$$\text{Respuesta } s - 2 + \frac{1/2}{s} + \frac{7/2}{s + 2}$$

- 12.4.2.** Obtenga la transformada inversa de $\mathbf{F}(s) = 5(s + 2)/[(s - 3)(s^2 + 2s + 10)]$.

$$\text{Respuesta } e^{3t} + 1.05e^{-t} \cos(3t - 161.6^\circ)$$

- 12.4.3.** Obtenga la transformada inversa de $\mathbf{F}(s) = (2s^2 + s + 2)/(s^5 + 2s^3 + s)$.

$$\text{Respuesta } 2 - 2 \cos t + \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$$

12.5

SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRODIFERENCIALES

Este capítulo ha presentado las herramientas básicas para trabajar en el dominio-s: definiciones, propiedades y pares de transformadas y fracciones parciales. Armados de este modo, cerramos este capítulo discutiendo una aplicación sumamente importante de estas ideas.

Las transformadas de Laplace pueden utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales, tales como las ecuaciones del análisis básico de circuitos eléctricos. La ecuación o ecuaciones son primero Laplace transformadas, y luego resueltas por medios algebraicos directos. La transformada inversa de la solución queda identificada como la expansión en fracciones parciales.

Ejemplo 12.16

Como primer ejemplo, buscamos la solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = e^{-2t} \quad (12.42)$$

para $t > 0$, dadas las condiciones iniciales $x(0-) = 1$, $x'(0-) = 2$. Primero, nótese que (12.42) es una igualdad entre las funciones de tiempo, y por consiguiente sus transformadas deben ser iguales. Ambos lados de una ecuación de dominio de tiempo pueden Laplace transformarse, o una ecuación de dominio-s puede transformarse inversamente, reteniendo la igualdad. Transformando (12.42) al dominio-s, y notando que la propiedad de linealidad permite transformar una suma pesada como una suma pesada de transformadas,

$$L\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + 4L\left[\frac{dx}{dt}\right] + 3L[x] = L[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$$

Utilizando la propiedad de diferenciación enésima en la tabla 12.1,

$$[s^2\mathbf{X}(s) - s(1) - 2] + 4[s\mathbf{X}(s) - 1] + 3\mathbf{X}(s) = \frac{1}{s+2}$$

Resolviendo para la transformada desconocida $\mathbf{X}(s)$,

$$\mathbf{X}(s) = \frac{s^2 + 8s + 13}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

La expansión en fracciones parciales es, utilizando el método de la sección anterior,

$$\mathbf{X}(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

que tiene una transformada inversa $x(t)$ que resuelve la ecuación diferencial original

$$x(t) = 3e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t}$$

Este valor para $x(t)$ no es necesariamente válido para el tiempo negativo, puesto que la ecuación diferencial que resolvimos solamente requería ser válida para $t \geq 0$. Podemos verificar esta solución por sustitución directa en (12.42).

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(3e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t}) + 4\frac{d}{dt}(3e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t}) \\ + 3(3e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t}) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} - 9e^{-3t}) \\ + 4(-3e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{-3t}) + 3(3e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t}) = e^{-2t} \end{aligned}$$

como lo requiere (12.42). Revisando las condiciones iniciales, notamos que $x(t)$ y su derivada son continuas en $t = 0$, de forma que $x(0-) = x(0) = 1$ y $x'(0-) = x'(0) = 2$ como se requirió.

En el ejemplo anterior, las condiciones iniciales se especificaron en el instante $t = 0-$, y se requirió que se satisficiera la ecuación diferencial para $t > 0$. Esta es una forma útil para especificar las condiciones iniciales para un problema de circuito, puesto que podemos calcular los valores iniciales en $t = 0-$ utilizando cálculos en estado estable basados en el circuito $t < 0$ (el circuito que aparece antes de que actúen los escalones unitarios e interruptores en $t = 0$), como se describió en los capítulos 5 y 6. Este procedimiento se muestra en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 12.17

Considérese el circuito de una sola malla de la figura 12.10. Su ecuación de malla para $t > 0$ es

$$\frac{di}{dt} + 2i + \left[5 \int_{0-}^t i(\tau) d\tau + 1 \right] = 1 + u(t) \quad (12.43)$$

Justo antes de que actúe el escalón unitario, el circuito $t < 0$ está en estado estable dc con $i(0-) = 0$ A y $v_c(0-) = 1$ V. El voltaje de fuente neto para $t > 0$ es la suma de las fuentes $1 + u(t)$. Transformando (12.43),

$$[s\mathbf{I}(s) - 0] + 2\mathbf{I}(s) + \frac{5\mathbf{I}(s)}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$$

o

$$\mathbf{I}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

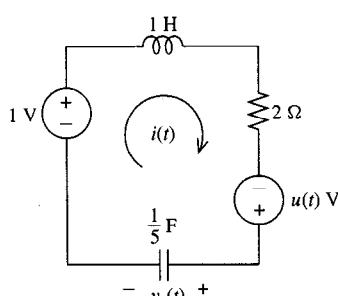


FIGURA 12.10 Circuito para el ejemplo 12.17.

Esta transformada tiene polos conjugados complejos en $-1 \pm j2$ en el dominio- s . Entonces

$$\mathbf{I}(s) = \frac{A}{s + 1 - j2} + \frac{A^*}{s + 1 + j2}$$

donde

$$A = \left. \frac{1}{s + 1 + j2} \right|_{s=p=-1+j2} = -\frac{j}{4}$$

Luego $i(t) = M e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$, donde $p = \alpha + j\beta = -1 + j2$, $M = 2 |A|$, $\theta = \angle A$, y

$$i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \cos(2t - 90^\circ) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

Ejemplo 12.18

Como ejemplo final, obtendremos los voltajes de nodo v_1 y v_2 en el circuito que aparece en la figura 12.11. Las ecuaciones de análisis nodal son

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_1 - 3) + \frac{d}{dt}v_1 + 2\frac{d}{dt}(v_1 - v_2) &= 0 \\ 2\frac{d}{dt}(v_2 - v_1) + \frac{1}{3}v_2 &= r(t) \end{aligned}$$

Puesto que ninguna fuente se enciende sino hasta $t = 0$, los valores de todas las corrientes y voltajes en $t = 0-$ son cero. Transformando las ecuaciones con estas condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\mathbf{V}_1(s) - \frac{3}{s} \right] + s\mathbf{V}_1(s) + 2s[\mathbf{V}_1(s) - \mathbf{V}_2(s)] &= 0 \\ 2s[\mathbf{V}_2(s) - \mathbf{V}_1(s)] + \frac{1}{3}\mathbf{V}_2(s) &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Este es un par de ecuaciones algebraicas simultáneas con las incógnitas $\mathbf{V}_1(s)$ y $\mathbf{V}_2(s)$, que pueden resolverse por diversos métodos. Eligiendo la inversión de matrices, reescribimos las ecuaciones de nodo como

$$\begin{bmatrix} 3s + \frac{1}{2} & -2s \\ -2s & 2s + \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2s} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

Realizando la inversión de matrices, el determinante es $2s^2 + 2s + \frac{1}{6}$ y

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2s^2 + 2s + \frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 2s + \frac{1}{3} & 2s \\ 2s & 3s + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2s} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{3}{2}s + \frac{5}{4}}{s(s^2 + s + \frac{1}{12})} \\ \frac{\frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{4}}{s^2(s^2 + s + \frac{1}{12})} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

FIGURA 12.11 Circuito para el ejemplo 12.18.

La expansión de fracciones parciales para $\mathbf{V}_1(s)$, con polos reales en $0, -1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{6}}$, es

$$\mathbf{V}_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{6}}} + \frac{C}{s + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{6}}}$$

donde

$$A = \frac{5}{4} \div \frac{1}{12} = 15$$

y, recurriendo a una precisión finita en nuestra calculadora,

$$B = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)(-0.0918) + \frac{5}{4}}{(-0.0918)(0.816)} = -14.848$$

$$C = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)(-0.908) + \frac{5}{4}}{(-0.908)(-0.816)} = -0.152$$

o

$$v_1(t) = 15 - 14.848e^{-0.0918t} - 0.152e^{-0.908t}$$

La expansión en fracciones parciales para $V_2(s)$ es

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{6}}} + \frac{C}{s + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{6}}}$$

donde

$$A_2 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{12} = 3$$

Restando,

$$\frac{\frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{4}}{s^2(s^2 + s + \frac{1}{12})} - \frac{3}{s^2} = \frac{-\frac{3}{2}s - \frac{3}{2}}{s(s^2 + s + \frac{1}{12})}$$

Los valores restantes A_1 , B y C pueden obtenerse ahora utilizando la simple fórmula de polos reales en la función racional escrita en el lado derecho de la ecuación anterior, y se calcula la transformada inversa que es

$$v_2(t) = 3t - 18 + 18.19e^{-0.0918t} - 0.190e^{-0.908t}$$

El enfoque del dominio- s para la solución de las diferenciales o integrodiferenciales, tiene claras ventajas sobre las técnicas clásicas de ecuaciones diferenciales que se usaron en el dominio del tiempo. Primeramente, las derivadas e integrales de funciones de tiempo desconocidas, se transforma a potencia de s multiplicadas por transformadas desconocidas, convirtiendo efectivamente un problema de *cálculo* a uno de *álgebra*. Las condiciones iniciales en $t = 0$ se toman en cuenta naturalmente por el método y no deben “encajarse” después de que se obtiene una forma general de la solución. El precio que se paga por estas ventajas, es que las ecuaciones deben primero transformarse, y luego, al final deben regresarse sus soluciones al dominio- s al dominio del tiempo (transformación inversa). Pocas veces el precio es demasiado elevado, puesto que la versión en el dominio s de las ecuaciones originales siempre puede ser escrita por inspección, y pueden calcularse las fracciones parciales, por lo menos para funciones racionales de orden menor. Las funciones racionales de orden mayor implican

ecuaciones integrodiferenciales de orden mayor o complicadas funciones de fuente, las cuales podrían aumentar grandemente la complejidad de las soluciones en dominio del tiempo. El enfoque del dominio-s para resolver estas ecuaciones es casi siempre más eficiente en comparación al enfoque convencional en el dominio del tiempo.

EJERCICIOS

12.5.1. Obtenga $x(t)$, $t > 0$: $d^2x/dt^2 + 3(dx/dt) + 2x = 2$, $x(0-) = 0$, $dx/dt|_{0-} = 0$.

Respuesta $1 - 2e^{-2t} + e^{-t}$.

12.5.2. Obtenga $x(t)$, $t > 0$: $d^2x/dt^2 = 2t + 1$, $x(0-) = 0$, $dx/dt|_{0-} = 1$.

Respuesta $\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t$

12.5.3. Resuelva el siguiente par de ecuaciones diferenciales para $t > 0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x - 5y = 0, x(0-) = 0, \frac{dx}{dt}|_{0-} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3x + y = 0, y(0-) = 0, \frac{dy}{dt}|_{0-} = 64$$

Respuesta $x(t) = 10e^{2t} - 10e^{-2t} - 20 \operatorname{sen} 2t$

$y(t) = 6e^{2t} - 6e^{-2t} + 20 \operatorname{sen} 2t$

RESUMEN

Las transformada de Laplace es una forma de convertir funciones de tiempo en funciones de variable compleja s . Las operaciones de cálculo de diferenciación e integración en el dominio del tiempo pasan a ser simples operaciones algebraicas de multiplicación y división en el dominio s . De este modo, un uso clave de la transformada de Laplace es convertir conjuntos de ecuaciones integrodiferenciales, tales como ecuaciones de circuito, al dominio s , resolverlos utilizando álgebra simple, y convertir la solución de vuelta a su formato deseado en el dominio del tiempo. La conversión, o transformada inversa, se logra mediante una manipulación directa llamada expansión en fracciones parciales.

- La transformada de Laplace de $f(t)$ se define por la transformada integral

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- La transformada de Laplace de una suma, es la suma de las transformadas de Laplace; igualmente, multiplicar una función de tiempo multiplica a su transformada. La transformada de Laplace es una operación lineal.
- El escalón unitario $u(t)$ y sus integrales y derivadas se conocen como funciones singulares. Sus transformadas de Laplace son s^n , donde el entero n es 1 para el escalón unitario, 2 para la rampa unitaria, 3 para la parábola unitaria y 0 para el impulso unitario.
- El impulso unitario $\delta(t)$ es la derivada generalizada del escalón unitario. $\delta(t) = 0$ para toda $t \neq 0$, y tiene una área total de la unidad.
- La transformada de Laplace de una derivada df/dt es s veces la transformada de Laplace de la función $f(t)$ menos su valor inicial $f(0-)$.

- Con frecuencia pueden obtenerse transformadas desconocidas aplicando las propiedades de transformada de Laplace de la tabla 12.1 a las transformadas conocidas que aparecen en la tabla 12.2.
- La expansión de fracciones parciales (EFP) es el proceso de reescribir función racional como suma de términos simples, donde cada uno tiene una transformada inversa conocida.
- El término EFP debido a un polo simple p es $A/(s - p)$.
- Los términos EFP debidos a un polo p que se repite r veces son de la forma $A_k/(s - p)^k$ para $k = 1, \dots, r$.
- Las ecuaciones integrodiferenciales pueden resolverse convirtiendo las ecuaciones al dominio s , término a término, resolviendo las transformadas desconocidas, y utilizando la expansión en fracciones parciales para recuperar las transformadas inversas.

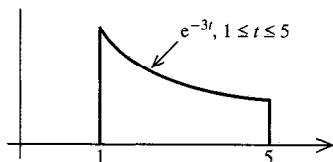
PROBLEMAS

12.1. Determíñese $\mathbf{F}(s)$ para las siguientes $f(t)$:

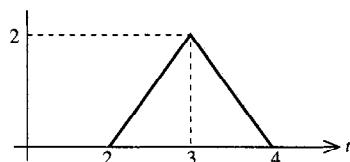
(a)



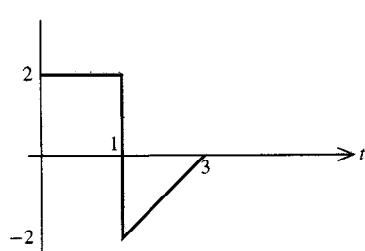
(b)



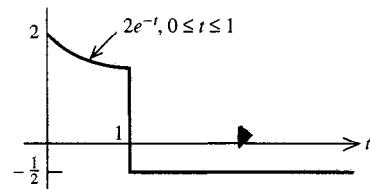
(c)



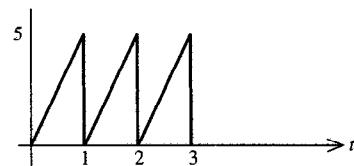
(d)



(e)

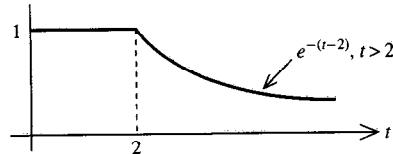


(f)

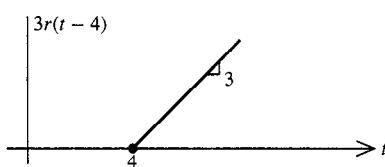


12.2. Determíñese $\mathbf{F}(s)$ y la región de convergencia para las siguientes $f(t)$:

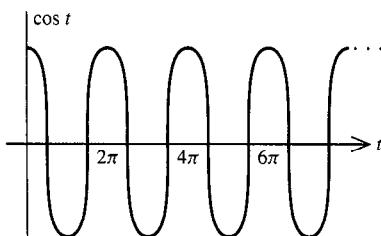
(a)



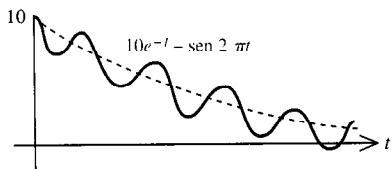
(b)



(c)



(d)



12.3. Determíñese $\mathbf{F}(s)$ para las siguientes $f(t)$:

- $5e^{-9t} - 2e^{-t} + e^{+t}$
- $(5e^{-9t} - 2e^{-t} + e^{+t})u(t)$
- $(5e^{-9t} - 2e^{-t} + e^{+t})u(t+1)$
- $(t-1)e^{-2t}$
- $u(t) - 2u(t-1)$
- $e^{j2t} - e^{-j2t}$

12.4. El límite inferior en la integral que define la transformada de Laplace (12.1) a veces se toma como $0+$. ¿Cómo cambiarían las $\mathbf{F}(s)$ calculadas en el problema 12.1(a)–(f) si adoptáramos esa definición?

12.5. ¿Es e^{+t^2} Laplace transformable? Explique.

12.6. Demuestre que no hay M y σ tales que, para todo $t > 0$, $|t^t| \leq M e^{\sigma t}$. Esto demuestra que $f(t) = t^t$ no es de orden exponencial.

12.7. Explique por qué $f(t) = 1/(t+1)$ es Laplace transformable, pero $1/(t-1)$ no lo es.

12.8. Especifique una función periódica $f(t)$ que no es Laplace transformable. Explique por qué no lo es.

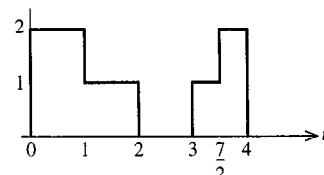
12.9. ¿Qué función converge más rápido a cero: $t^{10}e^{-10t}$ o e^{-9t} ? Obtenga una t^* de forma que ha seleccionado siempre sea menor que la otra para $t > t^*$. Esto define una convergencia más rápida.

12.10. Considerando la integral de la definición, ¿cuál es el valor de $\mathbf{F}(s)$ si $f(t) = 0$ en todas partes excepto $f(t_0) = 1$, $t_0 \geq 0$? ¿Qué implica esto acerca de la diferencia $f_1(t) - f_2(t)$ de dos funciones de tiempo con la misma transformada de Laplace de $\mathbf{F}_1(s) = \mathbf{F}_2(s)$?

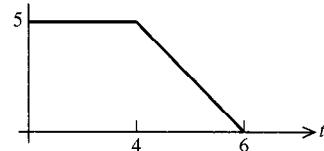
12.11. Utilice la integral de la definición (12.1) para obtener la transformada de Laplace de $5e^{-2t} \cos(3t + 12^\circ)$. *Sugerencia:* utilice la identidad de Euler y la linealidad.

12.12. Exprese las siguientes $f(t)$ como combinaciones lineales de escalones unitarios $u(t)$, rampas $r(t)$, y parábolas $p(t)$ desplazadas respecto al tiempo.

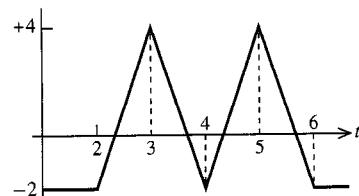
(a)



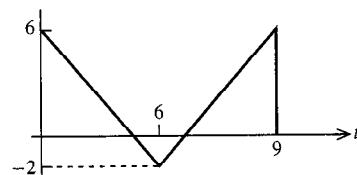
(b)



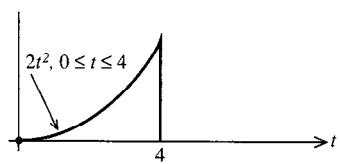
(c)



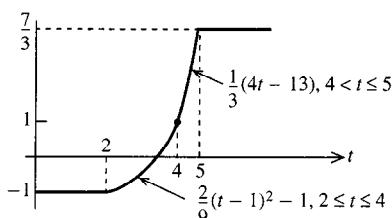
(d)



(e)



(f)



12.13. Dibuje las siguientes funciones, marcando sus valores en $t = 1$ y $t = 4$,

- $2[u(t) - u(t - 15)]$
- $6r(t) - u(t - 2)$
- $4[u(t - \frac{1}{2}) - u(t - \frac{3}{2})] + p(t)$
- $2p(t) - 2p(t - 2) - 2r(t - 2)$
- $r(t) - 2r(t - 1) + r(t - 2)$
- $r(t) - r(t - 1) - r(t - 2) + r(t - 3)$

12.14. Evalúe lo siguiente, y determine si son derivadas ordinarias o derivadas generalizadas

- $\frac{d}{dt} \left[\cos 2\pi t u \left(t - \frac{9}{4} \right) \right]$
- $\frac{d}{dt} [\sin^2 t u(t)]$
- $\frac{d}{dt} \left[\frac{\sin t}{t} u(t) \right]$
- $\frac{d}{dt} [u(t) - te^{-t} u(t)]$
- $\frac{d^2}{dt^2} \cos 2t u(t)$
- $\frac{d^2}{dt^2} [p(t) - 2p(t - 1) + u(t)]$

12.15. Evalúe las derivadas primera y segunda.

- $f(t)$ del Problema 12.1(a)
- $f(t)$ del Problema 12.1(b)
- $f(t)$ del Problema 12.1(c)
- $f(t)$ del Problema 12.1(d)
- $f(t)$ del Problema 12.1(e)
- $f(t)$ del Problema 12.1(f)

12.16. Evalúe las primeras tres derivadas df/dt , d^2f/dt^2 , y d^3f/dt^3

- $f(t)$ del Problema 12.12(a)
- $f(t)$ del Problema 12.12(b)
- $f(t)$ del Problema 12.12(c)
- $f(t)$ del Problema 12.12(d)
- $f(t)$ del Problema 12.12(e)
- $f(t)$ del Problema 12.12(f)

12.17. Determine las transformadas de las siguientes funciones de tiempo.

- $f(t)$ del Problema 12.12(a)
- df/dt para $f(t)$ del Problema 12.12(a)
- $f(t)$ del Problema 12.12(b)
- df/dt para $f(t)$ del Problema 12.12(b)
- $f(t)$ del Problema 12.12(c)
- df/dt para $f(t)$ del Problema 12.12(c)
- $f(t)$ del Problema 12.12(d)
- df/dt para $f(t)$ del Problema 12.12(d)
- $f(t)$ del Problema 12.12(e)
- df/dt para $f(t)$ del Problema 12.12(e)
- $f(t)$ del Problema 12.12(f)
- df/dt para $f(t)$ del Problema 12.12(f)

12.18. Demuestre el teorema de la integración de la derivada del impulso unitario (integre el teorema de integración del impulso unitario por partes).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = -f'(t_0)$$

12.19. Evalúe $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(3)}(t - 1) f(t - 2) dt$ si $f(t) = t^2 e^{-2t} u(t)$.

12.20. Obtenga la transformada de Laplace

- $e^{-t} \cos(3t - 15^\circ) u(t)$
- $e^{-t} \sin(3t - 15^\circ) u(t)$
- $e^{-t} \cosh(3t - 15^\circ) u(t)$
- $e^{-t} \sinh(3t - 15^\circ) u(t)$
- $e^{(-3+j6)t}$
- $e^{(-3+j6)t} u(t)$
- $10\delta(t - 4)$
- $10\delta(t + 4)$

12.21. Obtenga la transformada de Laplace

- $(2 - t)$
- $(2 - t)e^{-3t}$
- $(2 - t)e^{+3t}$
- $te^{-3t} \cos(2t + 30^\circ)$
- $t^4 e^{+3t} u(t)$
- $\delta^{(2)}(t - 1) + \delta(t) + 5u(t)$
- $1 - u(t)$
- $2 - u(t)$

12.22. Obtenga la transformada de Laplace

- $e^{-3t} u(t) + e^{-4t} u(t - 4)$

- (b) $t^2 e^{-2t} \cos t$
 (c) $t^2 e^{-4t} \sin 7t$
 (d) $t^2 e^{+6t} \cos(5t - 118^\circ)$
 (e) $t^2 e^{(6-j2)t}$
 (f) $t^3 e^{-t} u(t)$
 (g) $t^4 e^{-t}$
 (h) $t^4 e^{-2t} \cos 3t$

12.23. Obtenga la transformada de Laplace

- (a) $\frac{d}{dt}[e^{-t} u(t)]$
 (b) $\frac{d}{dt}(e^{-t})$
 (c) $\frac{d}{dt}[e^{-t} \cos 2tu(t)]$
 (d) $\frac{d}{dt}[e^{-t} \cos 2t]$
 (e) $\frac{d}{dt}[e^{-t} \sin 2tu(t)]$
 (f) $\frac{d}{dt}[e^{-t} \sin 2t]$

12.24. Comenzando a partir de $L[e^{-t} u(t)] = 1/(s + 1)$, verifíquese la relación $L[e^{-at} u(t)] = 1/(s + a)$ por

- (a) La propiedad de multiplicación tiempo-frecuencia
 (b) Propiedad de desplazamiento de frecuencia.

12.25. Partiendo de $L[e^{-t} u(t)] = 1/(s + 1)$, verifique la relación $L(t^n e^{-t}) = (n - 1)!/(s + 1)^n$ utilizando la t -multiplicación.

12.26. Obtenga la transformada de Laplace

- (a) -2
 (b) $\frac{s^2 + 1}{s}$
 (c) $s^2 + 3s + 2$
 (d) $3s^3 - 2s^2 + 1$
 (e) $\frac{s^2 + 3s + 2}{s^2}$
 (f) $\frac{s^3 + 3s + 2}{s}$
 (g) $\frac{s^3 + 3s + 2}{s^4}$
 (h) $6s^{10}$

12.27. Obtenga las transformadas inversas de Laplace

- (a) $\frac{s + 2}{s + 1}$
 (b) $\frac{s^2 + 2s}{s + 1}$

- (c) $\left[\frac{s^2 + 2s}{s + 1} \right]^2$
 (d) $\left[\frac{s^2 + 2s}{s + 1} \right]^3$
 (e) $\frac{s^5}{s^2 - 1}$
 (f) $\frac{s^2}{s(s - 1)}$

12.28. Obtenga la transformada inversa de Laplace de $F(s) = s^2 + 3/s^2 + 4$, como en el ejemplo 12.11, pero primero utilicando la división larga.

12.29. Obtenga las transformadas inversas (estas funciones tienen polos reales distintos).

- (a) $\frac{-7}{s + 2}$
 (b) $\frac{2}{s^2 + 3s + 2}$
 (c) $\frac{7s - 2}{s^2 - s - 2}$
 (d) $\frac{6}{(s + 8)(s + 2)}$
 (e) $\frac{5s + 1}{s^3 - s}$
 (f) $\frac{6s^4}{s^3 - s^2}$

12.30. Obtenga fórmulas generales para la transformada inversa de los siguientes. Suponga en cada caso que $b \neq a$.

- (a) $\frac{1}{(s + a)(s + b)}$
 (b) $\frac{s}{(s + a)(s + b)}$
 (c) $\frac{cs + d}{(s + a)(s + b)}$
 (d) $\frac{1}{(s + a)^2(s + b)}$
 (e) $\frac{s}{(s + a)^2(s + b)}$
 (f) $\frac{s^2}{(s + a)^2(s + b)}$

12.31. Obtenga las fórmulas generales para las transformadas inversas de las siguientes. Suponga en cada caso que $\text{Im}(q) \neq 0$ y que a es real.

- (a) $\frac{1}{(s + q)(s + q^*)(s + a)}$

(b) $\frac{s}{(s+q)(s+q^*)(s+a)}$

(c) $\frac{s^2}{(s+q)(s+q^*)(s+a)}$

(d) $\frac{cs^2 + ds + e}{(s+q)(s+q^*)(s+a)}$

12.32. Obtenga las transformadas inversas de Laplace (estas funciones tienen polos conjugados complejos distintos).

(a) $\frac{-7}{s^2 + 1}$

(b) $\frac{5}{2s^2 + 5}$

(c) $\frac{3s + 2}{(s+2)^2 + 9}$

(d) $\frac{4s^2 + 2}{s^2 + 4s + 13}$

(e) $\frac{6s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$

(f) $\frac{2s + 9}{(s^2 + 4s + 20)(s^2 + 2s + 2)}$

12.33. Obtenga las transformadas inversas de Laplace (estas funciones tienen polos repetidos reales)

(a) $\frac{1}{(s+1)^2}$

(b) $\frac{1}{s^2}$

(c) $\frac{6s}{(2s+3)^2}$

(d) $\frac{s-4}{s^2 + 6s + 9}$

(e) $\frac{5-4s}{(s+2)^3}$

(f) $\frac{7s^2}{s^2 + 3s^2 + 3s + 1}$

12.34. Obtenga las transformadas inversas de Laplace (estas funciones tienen polos repetidos complejos).

(a) $\frac{1}{[(s+1)^2 + 1]^2}$

(b) $\frac{3s}{[s^2 + 2s + 5]^2}$

(c) $\frac{-7s + 3}{s^4 + 2s^2 + 1}$

(d) $\frac{5s^2}{s^4 + 4s^2 + 4}$

(e) $\frac{6s}{[(s+1)^2 + 1]^3}$

(f) $\frac{3s^2 - 2s + 1}{[(s+1)^2 + 1]^3}$

12.35. Obtenga las transformadas inversas de Laplace.

(a) $\frac{s-2}{s+2}$

(b) $\frac{1}{s^3 + s}$

(c) $\frac{3s}{s^2 + s - 12}$

(d) $\frac{2s-3}{2s^2 - 2s - 24}$

(e) $\frac{6s+7}{(s-1)(s^2 + 2s + 1)}$

(f) $\frac{-4}{s[(s+1)^2 + 16]}$

(g) $\frac{3s^2 + 6}{s^2[(s+1)^2 + 16]}$

(h) $\frac{1}{s^2[(s+1)^2 + 16]^2}$

12.36. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales para $x(\delta)$, $t > 0$, por métodos de dominio-s. Compruebe por métodos de dominio de tiempo.

(a) $\frac{dx}{dt} + 3x = 0, x(0-) = 1$

(b) $\frac{dx}{dt} + 3x = 4e^{-t}, x(0-) = 1$

(c) $\frac{dx}{dt} + 3x = 4e^{-t}, x(0-) = 1$

(d) $\frac{dx}{dt} - 7x = 2e^{-2t} + 6, x(0-) = 3$

(e) $\frac{dx}{dt} + 16x = te^{+6t}, x(0-) = 0$

12.37. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales para $x(t)$, $t > 0$, por métodos de dominio-s. Compruébese por métodos de dominio del tiempo.

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, x(0-) = 1, \dot{x}(0-) = 0$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}, x(0-) = 1, \dot{x}(0-) = 1$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} = 1, x(0-) = 0, \dot{x}(0-) = 1$

- (d) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0, x(0-) = -3, \dot{x}(0-) = +7$
- (e) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 6 \operatorname{sen} 2t, x(0-) = 1, \dot{x}(0-) = 0$
- (f) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = \delta(t), x(0-) = \dot{x}(0-) = 0$
- (g) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = te^{-2t} + 2\delta(t),$
 $x(0-) = 1, \dot{x}(0-) = 0$

12.38. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales para $x(t)$ y $y(t)$, $t > 0$ y por métodos de dominio-s. Verifíquese por métodos de dominio del tiempo.

- (a) $\frac{dx}{dt} + x + 2y = 0, x(0-) = 0$
 $\frac{dy}{dt} + 2x = 0, y(0-) = 0$
- (b) $\frac{dx}{dt} + 2x - y = t, x(0-) = 1$
 $\frac{dy}{dt} + 2y - x = 1, y(0-) = 0$
- (c) $\frac{dx}{dt} + 2x - 6y = e^{-t}, x(0-) = 2$
 $\frac{dy}{dt} - 3x + x = 6e^{-t}, y(0-) = 1$
- (d) $\frac{d^2x}{dt^2} - y = 0, x(0-) = 1$
 $\frac{dy}{dt} + 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 3y = 0, y(0-) = 0$

12.39. Resuelva para $x(t)$, $y(t)$, y $z(t)$, $t > 0$, por métodos de dominio-s.

$$2\frac{dx}{dt} + y - \frac{dz}{dt} = 5, x(0-) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + y + \frac{dx}{dt} = e^{-6t}, y(0-) = 0$$

$$\frac{dz}{dt} + 2z + 2\frac{dy}{dt} = 0, z(0-) = 1$$

12.40. Resuelva para $x(t)$, $t > 0$, por métodos de dominio-s. Verifique la solución por sustitución.

- (a) $\frac{dx}{dt} + \int_{0-}^t x(\tau) d\tau = 0, x(0-) = 1$
- (b) $\frac{dx}{dt} + \int_{0-}^t x(\tau) d\tau = 1, x(0-) = 0$
- (c) $\frac{dx}{dt} + 3x + 2\int_{0-}^t x(\tau) d\tau = e^{-t} + 1, x(0-) = 0$

(d) $\frac{dx}{dt} + 2x + \int_{0-}^t x(\tau) d\tau = e^{-t} + 5, x(0-) = 1$

12.41. Demuestre que la ecuación integrodiferencial, para $t > 0$,

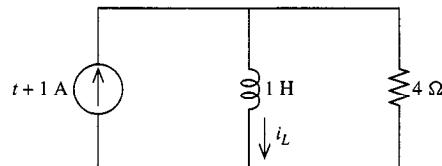
$$\frac{dx}{dt} + ax + b \int_{0-}^t x(\tau) d\tau = y(t) \quad x(0-) = x_0$$

es equivalente a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = z(t), \quad x(0-) = x_0, \quad \dot{x}(0-) = \dot{x}_0$$

donde $z(t) = dy/dt$ y $x_0 = y(0)$.

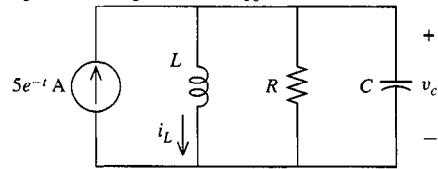
12.42. Escriba y resuelva la ecuación nodal para este circuito, suponiendo $i_L(0-) = 0$.



PROBLEMA P12.42

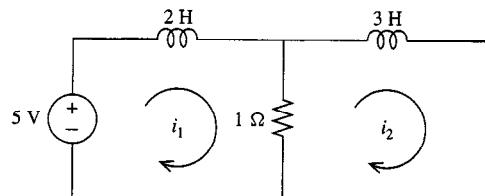
12.43. Escriba y resuelva la ecuación nodal para este circuito, suponiendo $u(0-) = 1$ A y $v_c(0-) = 6$ V.

- (a) $R = 50 \Omega$, $L = 10 \text{ H}$, $C = 0.01 \text{ F}$
(b) $R = 0 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = \frac{1}{4} \text{ F}$
(c) $R = \frac{5}{3} \Omega$, $L = \frac{2}{5} \text{ H}$, $C = \frac{1}{10} \text{ F}$



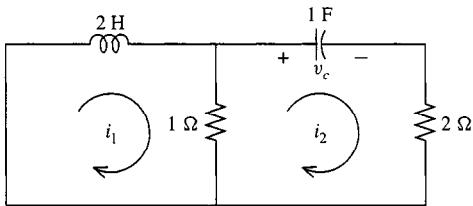
PROBLEMA P12.43

12.44. Escriba y resuelva las ecuaciones simultáneas de malla para este circuito, suponiendo que todas las condiciones iniciales = 0 en $t = 0-$.



PROBLEMA P12.44

12.45. Escriba y resuelva las ecuaciones de malla simultáneas para este circuito, suponiendo $i_1(0-) = 0$, $v_L(0-) = 1$ V.



PROBLEMA P12.45

Problemas más complejos

12.46. Demuestre que la t -multiplicación tiene sólo un efecto débil sobre los ritmos de crecimiento de las funciones. Específicamente, demuestre que para cualquier entero $n > 0$ y σ , real, para toda t suficientemente grande, $t^n e^{\sigma t} > e^{\sigma_1 t}$ pero $e^{\sigma_1 t} > t^n e^{\sigma t}$ para toda $\sigma_1 > \sigma$.

12.47. (a) Demuestre el teorema de integración del impulso unitario de orden mayor (integre el teorema de integración del impulso unitario por partes n veces).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) f(t) dt = (-1)^{n-1} f^{(n)}(t_0)$$

(b) Verifique la propiedad de integración (12.23) por integración por partes.

12.48. Obtenga la transformada de Laplace de la función periódica $f(t) = t$, $-1 \leq t < +1$, que tiene un periodo $T = 2$. Sugerencia: escríbala como una suma de funciones desplazadas, cada una un periodo, use series de Taylor.

12.49. Obtenga la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \cos 2s/(s^2 - 1)$.

12.50. Resuelva para $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $t > 0$, por métodos de dominio- s . Suponga que todas las condiciones iniciales son cero, excepto para $x_1(0-) = 1$.

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{dx_3}{dt} = 1$$

$$2 \frac{dx_1}{dt} + x_1 + x_2 - x_3 = t$$

$$\frac{dx_1}{dt} + x_2 + \frac{dx_3}{dt} = 0$$



13

Análisis de circuitos en el dominio-s



Oliver Heaviside
1850–1925

Se ha dicho que la electromagnética es demasiado complicada. Esto posiblemente vino de una mente simple.

Oliver Heaviside

Oliver Heaviside pertenece a la tradición de los grandes pensadores científicos cuya visión y determinación finalmente se sobrepuso a una falta casi total de educación formal. Aunque nunca cursó más allá del nivel de escuela primaria, Heaviside fue un autodidacta lo suficientemente bueno en matemáticas, física e ingeniería eléctrica, para hacer muchas contribuciones fundamentales, tanto en la teoría como en el dominio experimental. Su falta de credenciales educativas hicieron que las instituciones intelectuales de su época aceptaran lentamente algunas de sus ideas más controvertidas, pero al final Heaviside dejó una huella duradera en matemáticas, física atmosférica, telegrafía y muchas otras áreas.

Nacido en 1850 en Londres, Inglaterra, Heaviside fue el sobrino de Charles Wheatstone, uno de los primeros telegrafistas e inventor del puente Wheatstone. Luego de retirarse a la edad de 24 años de su empleo como telegrafista debido a su sordera, Heaviside quedó fascinado por las teorías electromagnéticas de Maxwell, y descubrió novedosas formulaciones vectoriales de las ecuaciones de Maxwell. Volviendo su atención a los circuitos eléctricos, utilizó series divergentes y audaces generalizaciones de funciones matemáticas convencionales, creando métodos “operativos” de cálculo. Su falta de rigor detallado para apoyar estos métodos operativos, sin duda combinado con su falta de estudios avanzados, hicieron que algunas figuras influyentes en la élite científica, descartaran inicialmente su obra. Pero su notable capacidad de predecir los resultados de experimentos eléctricos los ganó. Heaviside generalizó la resistencia a la impedancia, y demostró la importancia de la reactancia inductiva, en la transmisión por cables de señales telegráficas. Predijo la existencia de la ionosfera, y demostró sus propiedades como reflector de ondas electromagnéticas. Es suficientemente apropiado el hecho de que Oliver Heaviside haya sido el primer ganador de la Medalla Faraday, una prestigiosa honra llamada así en honor de otro gran científico autodidacta.

Contenido del capítulo

- **13.1** Elementos y leyes de Kirchhoff
 - **13.2** El circuito en el dominio-s
 - **13.3** Funciones de transferencia
 - **13.4** Polos y estabilidad
 - **13.5** Teoremas de valor inicial y final
 - **13.6** Respuesta al impulso y convolución
- Resumen
- Problemas



En el capítulo anterior se utilizaron las transformadas de Laplace para convertir ecuaciones integrodiferenciales en el dominio del tiempo a ecuaciones algebraicas en el dominio-s, de solución más sencilla. Puesto que las ecuaciones básicas del análisis de circuito son del tipo integrodiferencial, esto define una clara ruta a fin de mejorar nuestro método para estudiar circuitos eléctricos. Ciertamente, esta ruta es casi idéntica a la que ya seguimos cuando utilizamos fasores y circuitos fasoriales que contienen impedancias en el estado estable ac. Como descubriremos, el dominio-s permite generalizar este enfoque altamente efectivo a condiciones que no son de estado estable ac, donde no pueden aplicarse fasores. El análisis de circuito en el dominio-s, es decir, luego de aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones y variables de circuito, es el tema del presente capítulo.

Lo iniciamos demostrando que todas las leyes esenciales de circuitos pueden pasar del dominio del tiempo al dominio-s: las leyes de Kirchhoff, leyes de elementos, equivalentes en serie y en paralelo, equivalentes de Thevenin-Norton, y así sucesivamente. Las formas de estas ecuaciones en el dominio-s resultan ser muy similares a las del análisis fasorial, donde la variable de Laplace s reemplaza la variable fasorial $j\omega$. Por consiguiente, no es sorprendente que los mismos métodos generales que fueron efectivos en el contexto de los fasores, se aplican al dominio-s con la misma eficiencia, en especial los análisis nodal y de malla, que utilizan impedancia para caracterizar elementos *RLC*.

Luego se presentará el diagrama de circuito en el dominio-s. Se utiliza del mismo modo en que se usa el diagrama de circuitos fasoriales, como auxiliar para escribir las ecuaciones del análisis. Una diferencia con el diagrama de circuito fasorial, es la introducción de generadores de condiciones iniciales, cuya inclusión enfatiza nuestra capacidad para determinar un comportamiento transitorio en el dominio-s. Se define la función de transferencia, una herramienta básica para el análisis de entrada y salida, y a continuación se examina la información que contiene. Se desarrollan dos útiles leyes del dominio-s, los teoremas de valor inicial y final. El capítulo concluye con una discusión de la respuesta de impulso unitario, su estrecha relación con la función de transferencia, y la operación en el dominio del tiempo, llamada convolución, que nos permite determinar la respuesta de un circuito a cualquier entrada a partir de su respuesta conocida a una entrada de impulso unitario.

En esta sección, examinaremos las formas que cobran las leyes de circuito más conocidas al transformarse al dominio- s . Considerese la malla de la figura 13.1(a) y el nodo de la figura 13.1(b). Aplicando las leyes de Kirchhoff,

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) = 0 \quad (13.1a)$$

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0 \quad (13.1b)$$

Transformando estas ecuaciones,

$$\mathbf{V}_1(s) + \mathbf{V}_2(s) + \mathbf{V}_3(s) + \mathbf{V}_4(s) = 0 \quad (13.2a)$$

$$\mathbf{I}_1(s) + \mathbf{I}_2(s) + \mathbf{I}_3(s) + \mathbf{I}_4(s) = 0 \quad (13.2b)$$

Las caídas de voltaje alrededor de una trayectoria cerrada suman cero, y las corrientes que entran a un nodo suman cero, y esto vuelve a ocurrir luego de aplicarse la transformada de Laplace. *Las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff se aplican sin modificación en el dominio-s.*

A continuación, considérense las leyes de elemento *RLC*. Transformando ambos miembros de la ley de Ohm,

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad (13.3a)$$

$$\text{con lo que se obtiene} \quad \mathbf{V}_R(s) = R \mathbf{I}_R(s) \quad (13.3b)$$

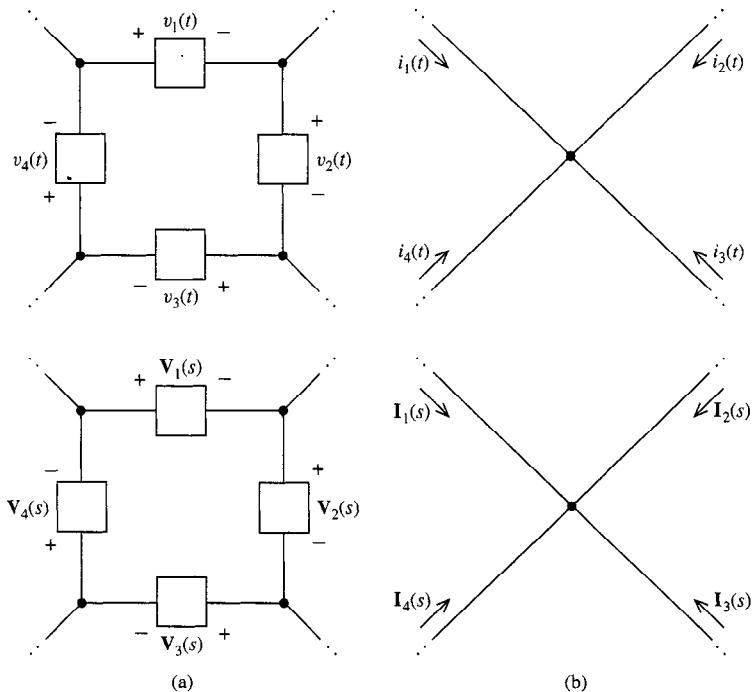


FIGURA 13.1 (a) Trayectoria cerrada para LVK; (b) un nodo para LCK.

La ley de elemento para un inductor es

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (13.4a)$$

Utilizando la regla de la derivación, esta ecuación se convierte en el dominio-s en

$$\mathbf{V}_L(s) = sLI_L(s) - L i_L(0-) \quad (13.4b)$$

La ley de elementos para un capacitor puede ser escrita como

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t) \quad (13.5a)$$

Transformando,

$$\mathbf{I}_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0-) \quad (13.5b)$$

Despejando esta última ecuación para $\mathbf{V}_C(s)$,

$$\mathbf{V}_C(s) = \frac{1}{sC} \mathbf{I}_C(s) + \frac{1}{s} v_C(0-) \quad (13.5c)$$

Al escribir estas leyes de elementos se partió de la suposición de que las variables de corriente y voltaje satisfacen la convención de signo pasivo.

Las ecuaciones (13.3b), (13.4b), y (13.5c) demuestran que el voltaje $\mathbf{V}(s)$ a través de los elementos RLC es la suma de un término proporcional a su corriente y a un término que depende de su condición inicial (este término es cero en el caso de una resistencia)

El factor de proporcionalidad entre voltaje y la corriente en el primer término es la *impedancia $Z(s)$* . Definimos la impedancia de $Z(s)$ de un elemento RLC como *la proporción de $\mathbf{V}(s)$ contra $\mathbf{I}(s)$ cuando todas las condiciones iniciales son cero*.

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s), \text{ todas las CI} = 0 \quad (13.6)$$

Aplicando esto a la ecuación citada anteriormente, las impedancias son

$$\mathbf{Z}_R(s) = R \quad (13.7a)$$

$$\mathbf{Z}_L(s) = sL \quad (13.7b)$$

$$\mathbf{Z}_C(s) = \frac{1}{sC} \quad (13.7c)$$

como se muestra en la figura 13.2

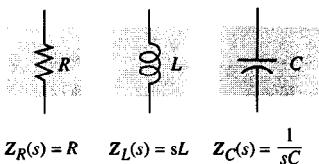


FIGURA 13.2 Impedancia $\mathbf{Z}(s)$.

Ejemplo 13.1

Deseamos obtener $v_c(t)$ para $t > 0$. Por LVK en el dominio- s , sumando las caídas de voltaje alrededor de la trayectoria cerrada,

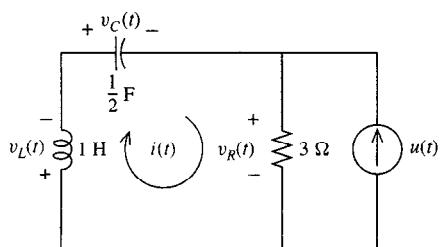


FIGURA 13.3 Circuito para el ejemplo 13.1.

$$\mathbf{V}_C(s) + \mathbf{V}_R(s) + \mathbf{V}_L(s) = 0 \quad (13.8)$$

Puesto que no hay fuentes en el circuito $t < 0$, todas las condiciones iniciales en $0-$ son cero. Cada uno de estos voltajes es por consiguiente el producto de la impedancia $\mathbf{Z}(s)$ y la corriente $\mathbf{I}(s)$. La impedancia del capacitor es $\mathbf{Z}_C(s) = 1/sC = 2/s$, para el inductor es $\mathbf{Z}_L(s) = sL = s$, y para la resistencia, $\mathbf{Z}_R(s) = R = 3$. Entonces

$$\frac{2}{s}\mathbf{I}(s) + 3\left[\mathbf{I}(s) + \frac{1}{s}\right] + s\mathbf{I}(s) = 0 \quad (13.9)$$

$$\mathbf{I}(s) = \frac{-\frac{3}{s}}{s + 3 + (2/s)} = \frac{-3}{s^2 + 3s + 2}$$

Puede recuperarse $\mathbf{V}_C(s)$ por multiplicación de $\mathbf{I}(s)$ por la impedancia del capacitor.

$$\mathbf{V}_C(s) = \mathbf{Z}_C(s)\mathbf{I}(s) = -\frac{-6}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

Esto completa la solución en el dominio- s para el voltaje capacitivo $\mathbf{V}_C(s)$. Para recuperar la solución en el dominio del tiempo $v_c(t)$, necesitamos de la transformada inversa. Por fracciones parciales, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_C(s) &= \frac{-6}{s(s+1)(s+2)} = \frac{-3}{s} + \frac{6}{s+1} - \frac{3}{s+2} \\ \text{así} \quad v_c(t) &= 6e^{-t} - 3e^{-2t} - 3 \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (13.10)$$

El inverso de la impedancia $\mathbf{Z}(s)$ se designa *admitancia* $\mathbf{Y}(s)$, donde

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s) \quad (\text{todas IC's} = 0) \quad (13.11)$$

La *admitancia* $\mathbf{Y}(s)$ es la proporción de la corriente $\mathbf{I}(s)$ contra el voltaje $\mathbf{V}(s)$ cuando todas las condiciones iniciales son cero. A la luz de las impedancias correspondientes en (13.7), las admitancias de una resistencia R , y un inductor L , y capacitor C son

$$\mathbf{Y}_R(s) = \frac{1}{R} = G \quad (13.12a)$$

$$\mathbf{Y}_L(s) = \frac{1}{sL} \quad (13.12b)$$

$$\mathbf{Y}_C(s) = sC \quad (13.12c)$$

Las leyes de Kirchhoff y leyes de elementos son la base para todos los demás teoremas de circuito que nos serán útiles, tales como las reglas para combinaciones en serie-paralelo, división de corriente y voltaje, y equivalentes de Thevenin-Norton. Puesto que las leyes de

Kirchhoff son idénticas en el dominio del tiempo y en el dominio- s , y la ley de elementos $\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s)$ es de la misma forma que la ley de Ohm en el dominio del tiempo, esperamos que estas reglas se apliquen sin modificaciones al dominio- s . Esto ciertamente es el caso,

Ejemplo 13.2

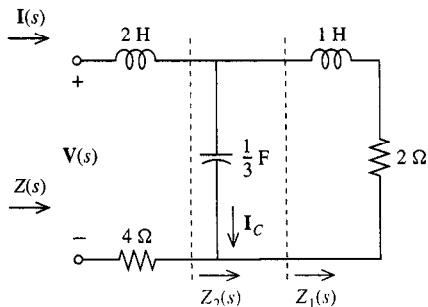


FIGURA 13.4 Circuito para el ejemplo 13.2

Obtenga la impedancia equivalente $\mathbf{Z}(s)$ de la subred que aparece en la figura 13.4. Puesto que el inductor 1-H y la resistencia 2- Ω están en serie, sus impedancias $sL = s$ y $R = 2$ suman:

$$\mathbf{Z}_1(s) = s + 2$$

La impedancia $\mathbf{Z}_1(s)$ está en paralelo con un capacitor $1/3$ -F cuya impedancia es $\mathbf{Z}_C(s) = 1/sC = 3/s$. El equivalente es el inverso de la suma de los inversos, o

$$\mathbf{Z}_2(s) = \frac{1}{[1/(s+2)] + (s/3)} = \frac{3(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$$

También podría obtenerse $\mathbf{Z}_2(s)$ sumando las admitancias en paralelo $\mathbf{Y}_1(s) = 1/\mathbf{Z}_1(s) = 1/(s+2)$ y $\mathbf{Y}_C(s) = s/3$ y luego invirtiendo la admittance equivalente $\mathbf{Y}_2(s)$. O, puesto que tenemos exactamente dos impedancias $\mathbf{Z}_1(s)$ y $\mathbf{Z}_C(s)$ en paralelo, la impedancia equivalente $\mathbf{Z}_2(s)$ pudo ser calculada como el producto de estas impedancias divididas por su suma.

Combinando $\mathbf{Z}_2(s)$ con las impedancias con las que está en serie,

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{Z}_2(s) + 2s + 4 \quad (13.13a)$$

$$= \frac{3(s+2) + (2s+4)(s^2 + 2s + 3)}{s^2 + 2s + 3} \\ = \frac{2s^3 + 8s^2 + 17s + 18}{s^2 + 2s + 3} \quad (13.13b)$$

Nótese que *todas las formas equivalentes para combinar elementos en serie-paralelo, son válidas para las impedancias $\mathbf{Z}(s)$: el modo de abreviación de producto por suma para dos impedancias en serie, admitancias sumadas para admitancias en paralelo, y así sucesivamente*,

Ejemplo 13.3

Obtenga $\mathbf{I}_C(s)$ en el circuito del ejemplo anterior para un voltaje de entrada $\mathbf{V}(s) = 1/s^2$, suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero. Utilizando el resultado previo (13.13b),

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{2s^3 + 8s^2 + 17s + 18} \frac{1}{s^2}$$

Por la regla de división de corrientes, la corriente se divide en proporción a la admittance. La admittance en capacitores es $sC = s/3$, y para la otra parte del divisor de corriente que divide $\mathbf{I}(s)$ es $1/(sL + R) = 1/(s+2)$, o

$$\mathbf{I}_C(s) = \frac{s/3}{(s/3) + [1/(s+2)]} \mathbf{I}(s) = \frac{s+2}{s(2s^3 + 8s^2 + 17s + 18)}$$

En resumen, las leyes Kirchhoff quedan intactas en el análisis de dominio- s y la noción de impedancia, definida meramente para circuitos fasoriales, se aplica al dominio- s como $\mathbf{Z}(s)$. Las impedancias pueden combinarse en serie y en paralelo por las reglas que

ya conocemos. Otros teoremas familiares de trabajo para el análisis de circuito, tales como la división de corriente y voltaje y las transformaciones de Thevenin y Norton, también se aplican sin modificar al dominio- s . Si las condiciones iniciales son todas cero, se aplican sin que su forma se modifique. Si las condiciones iniciales no son idénticamente cero, debe sumarse un término de condiciones iniciales a la correspondiente ley de elemento $V(s) = Z(s)I(s)$. En la siguiente sección, veremos cómo incluir condiciones iniciales no nulas sin dificultad.

EJERCICIOS

13.1.1. Obtenga $I(s)$ en la figura 13.3 mediante división de corrientes en el dominio- s . Supónganse condiciones iniciales cero.

Respuesta

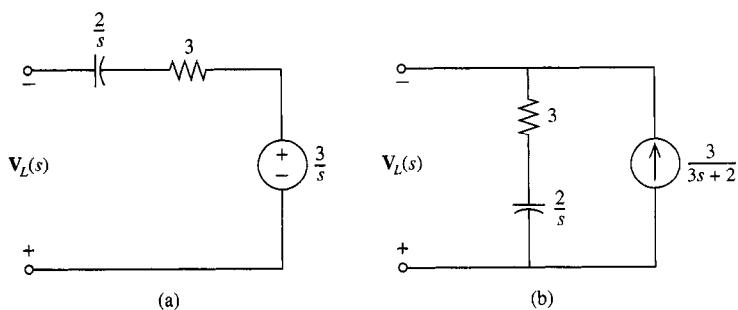
$$I(s) = \frac{s/(s^2 + 2)}{[s/(s^2 + 2)] + \frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{s} \right) = -\frac{-3}{s^2 + 3s + 2}$$

13.1.2. ¿Cuál es la admitancia equivalente $\mathbf{Y}(s)$ de una resistencia $10-\Omega$, un capacitor $1-F$ y un inductor $5-H$, todos en serie? Exprésese como función racional.

Respuesta $s/(5s^2 + 10s + 1)$

13.1.3. Obtenga los equivalentes de Thevenin y Norton en el dominio- s en las terminales del inductor de la figura 13.3. Suponer condiciones iniciales cero.

Respuesta



EJERCICIO 13.1.3

13.2

EL CIRCUITO EN EL DOMINIO- s

Puesto que las leyes de Kirchhoff siguen siendo válidas en el dominio- s , podemos escribir directamente ecuaciones de circuito en el dominio- s mediante inspección del diagrama de circuito. Las caídas de voltaje alrededor de trayectorias cerradas en el dominio- s siguen sumando cero, al igual que las corrientes en dominio- s en cada nodo o región cerrada. Necesitamos únicamente renombrar el diagrama de circuito original en el dominio del tiempo para reflejar las modificaciones necesarias: s sustituye a t en las corrientes y voltajes incógnitas, y las funciones de fuente independiente son reemplazadas por sus parejas de transformada en el dominio- s .

Se requiere de otro cambio adicional antes de que el diagrama de circuito en el dominio- s quede completo. Volvamos a las leyes de elemento RLC en el dominio- s (13.3)

a (13.5). Repitiendo las formas v de estas leyes de elemento,

$$\mathbf{V}_R(s) = R\mathbf{I}_R(s) \quad (13.14a)$$

$$\mathbf{V}_L(s) = sL\mathbf{I}_L(s) - L\mathbf{I}_L(0-) \quad (13.14b)$$

$$\mathbf{V}_C(s) = \frac{1}{s}C \mathbf{I}_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0-) \quad (13.14c)$$

La primera de estas ecuaciones, que corresponde una resistencia, es de la forma $\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s)$, donde $\mathbf{Z}(s) = R$ es la impedancia de una resistencia de R -ohm. Las otras dos son de una forma que sugiere que los elementos de almacenaje en el circuito original en el dominio del tiempo son cada uno equivalente a dos elementos en serie en el dominio- s : una impedancia pura y un *generador de condiciones iniciales*. Los diagramas de circuito para estos equivalentes aparecen en la figura 13.5. Cada impedancia marcada, sea R o sL o $1/sC$, se considera como un dispositivo de dos terminales que satisface una relación de impedancia pura $\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s)$. La condición inicial se incluye separadamente como si estuviera presente un segundo elemento, el generador de condiciones iniciales.

Éste es el único otro cambio entre el dominio del tiempo y el dominio- s . *El circuito en dominio- s es simplemente el circuito original en dominio del tiempo con incógnitas en el dominio- s y funciones de fuente reemplazando sus contrapartes en el dominio del tiempo y combinaciones de impedancias y generadores de condiciones iniciales que sustituyen a los elementos RLC.* A partir de una inspección de este diagrama de circuito, se obtienen las ecuaciones del análisis de circuito en el dominio- s .

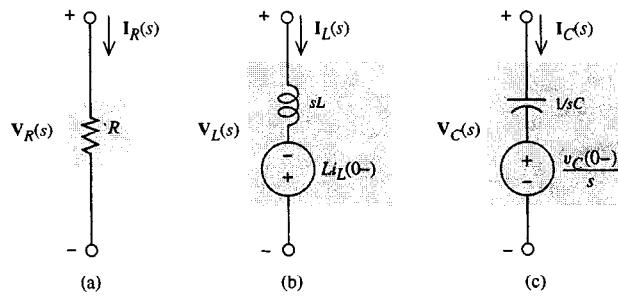


FIGURA 13.5 Equivalentes en el dominio- s de elementos RLC.

Ejemplo 13.4

Buscamos el voltaje a través del capacitor en la figura 13.6(a) para $t > 0$. Notando que la fuente salta de 12 a 24 V en $t = 0$, los valores en estado estable dc en $0-$ se calculan como $i_L(0-) = 2A$ y $v_c(0-) = 12$ V. En la figura 13.6(b) aparece el circuito en el dominio- s . Nótese que aquí se marcan las impedancias, junto con los generadores de condiciones iniciales $L\mathbf{i}_L(0-) = 60$ y $v_c(0-)/s = 12/s$ para los elementos de almacenaje. La ecuación nodal en el nodo superior derecho en la figura 13.6(b), es por consiguiente

$$\frac{\mathbf{V}(s) - (12/s)}{5/s} + \frac{\mathbf{V}(s)}{6} + \frac{\mathbf{V}(s) - [60 + (24/s)]}{30s} = 0$$

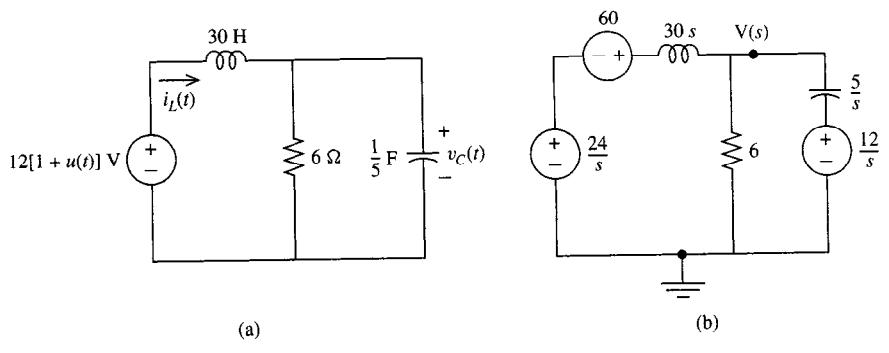


FIGURA 13.6 (a) Circuito original; (b) circuito en el dominio-s.

$$V(s) = \frac{12s^2 + 10s + 4}{s(s^2 + \frac{5}{6}s + \frac{1}{6})}$$

Puesto que $V_c(s) = V(s)$, esto completa la solución en el dominio-s. Para recuperar el valor en el dominio del tiempo, se calcula la transformada inversa mediante el método conocido.

$$V(s) = \frac{24}{s} + \frac{24}{s + \frac{1}{2}} - \frac{36}{s + \frac{1}{3}}$$

$$\text{y, para } t > 0, \quad v_c(t) = 12(2 + 2e^{-t/2} - 3e^{-t/3}) \quad (13.15)$$

Ejemplo 13.5

Obtengamos las corrientes de malla $I_1(s)$, $I_2(s)$ en el dominio-s. En la figura 13.7(a) se muestra el circuito original, y en la figura 13.7(b) se muestra el correspondiente circuito en el dominio-s.

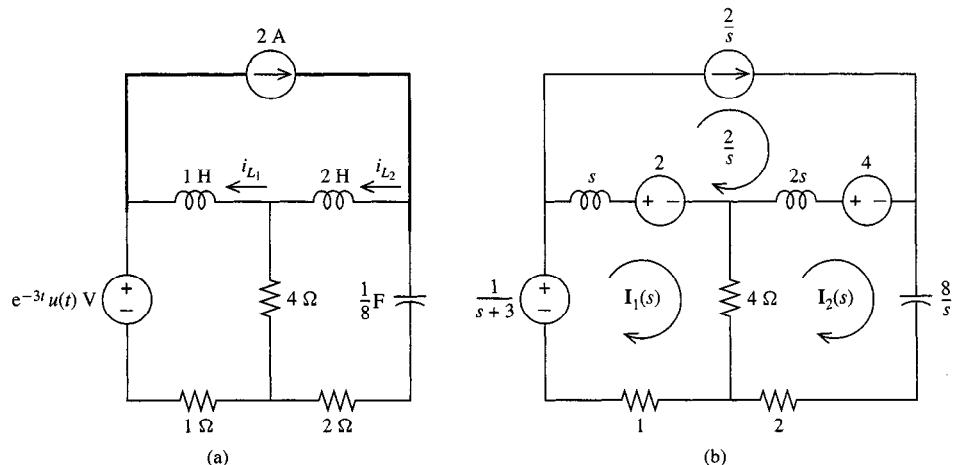


FIGURA 13.7 (a) Circuito original; (b) circuito en el dominio-s.

Para determinar el circuito equivalente para cada inductor, se necesita de su corriente inicial en $0-$. Para $t < 0$, la fuente de voltaje en la figura 13.7(a) es cero, y los inductores actúan como circuitos cerrados, de forma que $i_{L1}(0-) = i_{L2}(0-) = 2$ A. De este modo, el generador de condiciones iniciales para L_1 es $L_1 i_{L1}(0-) = (1)(2) = 2$ y para L_2 es $L_2 i_{L2}(0-) = (2)(2) = 4$. Como se muestra en la figura 13.5, estos generadores de condiciones iniciales están en serie con sus respectivas impedancias inductivas $Z_1(s) = sL_1 = s$ y $Z_2(s) = sL_2 = 2s$. El voltaje capacitivo en $0-$, luego de volver a examinar la figura 13.7(a), es 0 V. Para este elemento, no se necesita de generador de condiciones iniciales. Notando que la corriente de malla en la malla superior es $2/s$, las ecuaciones de malla son

$$\begin{bmatrix} s+5 & -4 \\ -4 & 2s+6+\frac{8}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por inversión de matrices,

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} 2s+6+\frac{8}{s} & 4 \\ 4 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\Delta(s)$ es el determinante

$$\Delta(s) = (s+5) \left(2s+6+\frac{8}{s} \right) - (-4)(-4)$$

Realizando el álgebra necesaria, el vector de corriente de malla es

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+3)(s^3+8s^2+11s+20)} \begin{bmatrix} s^2+3s+4 \\ 2s \end{bmatrix} \quad (13.16)$$

lo que completa el cálculo necesario. Nótese que cada corriente de malla tiene los mismos cuatro polos pero ceros distintos, de forma que contendrán las mismas cuatro funciones de tiempo, pero con coeficientes de fracciones parciales distintos. Un polo se debe a la fuente independiente. Los otros tres se deben a los tres elementos de almacenamiento en el circuito.

Las transformaciones de Thevenin-Norton en el dominio- s funcionan exactamente como se describieron en el dominio del tiempo en el capítulo 2, donde $Z(s)$ reemplaza la resistencia R . Por ejemplo, considérense las redes que se muestran en la figura 13.5. Puesto que cada una es una combinación en serie de fuentes de impedancia y voltaje, las llamaremos las *formas de Thevenin* de los equivalentes en el dominio- s (en el caso resistivo, se define como cero el equivalente de Thevenin de la fuente de voltaje). Si realizamos en estos circuitos las transformaciones de Thevenin-Norton, las formas equivalentes de Norton tienen fuentes de corriente iguales a la proporción del voltaje equivalente de Thevenin, dividido por la impedancia, y están en paralelo con estas mismas impedancias. Las *formas de Norton* resultantes de los circuitos equivalentes en el dominio- s aparecen en la figura 13.8. Al igual que con todos los demás equivalentes, puede utilizarse libremente la que se deseé. Nótese que cada forma de Thevenin de un circuito equivalente en el dominio- s con un generador de condiciones iniciales no nulo, suma un nodo al circuito, en tanto que cada forma de Norton suma una malla. Con frecuencia se prefiere la forma de Thevenin cuando hay otras impedancias en serie, y la forma de Norton cuando hay otras impedancias en paralelo.

Finalmente, siempre es útil combinar impedancias en serie antes de escribir las ecuaciones de análisis nodal en el dominio- s , y las impedancias en paralelo si se planea realizar un análisis de malla.

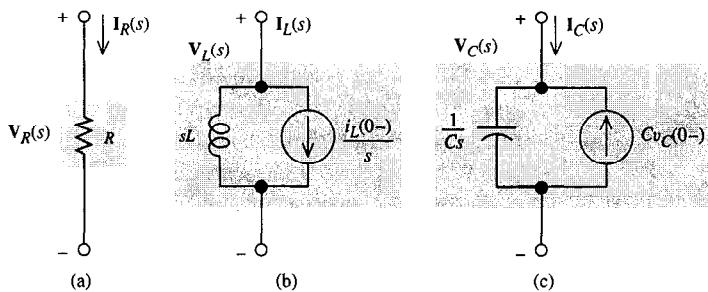
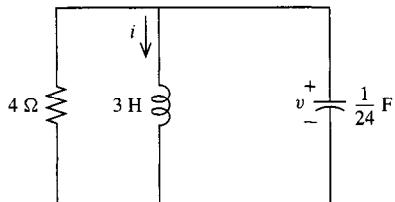


FIGURA 13.8 Equivalentes en el dominio-s de elementos *RLC*: formas alternativas.

El número de ecuaciones e incógnitas se reduce, y no hay obstáculos ante nuestra capacidad para recuperar todas las corrientes y voltajes una vez que se descompone el circuito.

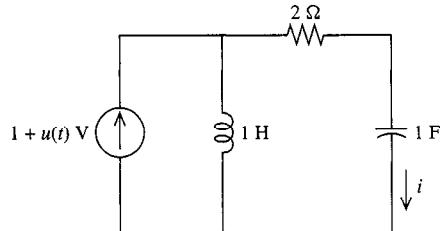
EJERCICIOS



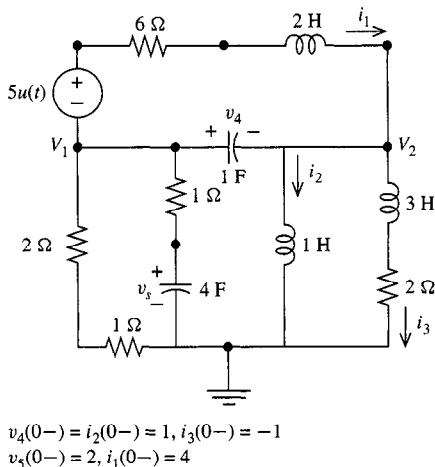
EJERCICIO 13.2.1

- 13.2.1. Obtenga $v(t)$, $t > 0$ para $i(0-) = 1$ A y $v(0-) = 4$ V.
Respuesta $20e^{-4t} - 16e^{-2t}$.

- 13.2.2. Escriba las ecuaciones de malla para $\mathbf{I}(s)$ y resuelva para $i(t)$, $t > 0$.
Respuesta $i(t) = (1-t)e^{-t}$



EJERCICIO 13.2.2



EJERCICIO 13.2.3

- 13.2.3. Utilizando equivalentes en serie-paralelo en el dominio-s para las impedancias y fuentes, reduzca el circuito dado a uno solo que contenga dos voltajes de nodo $\mathbf{V}_1(s)$ y $\mathbf{V}_2(s)$, desconocidos, y escriba las ecuaciones de nodo en forma de vector matriz.

Respuesta

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2s+6} + s + \frac{4s}{4s+1} + \frac{1}{3} & -\left(s + \frac{1}{2s+6}\right) \\ -\left(s + \frac{1}{2s+6}\right) & \frac{1}{2s+6} + s + \frac{1}{s} + \frac{1}{3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \left(8 + \frac{5}{s}\right)\left(\frac{1}{2s+6}\right) + \left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{4s}{4s+1}\right) \\ -1 + \left(8 + \frac{5}{s}\right)\left(\frac{1}{2s+6}\right) - \frac{1}{s} + \frac{3}{3s+2} \end{bmatrix}$$

13.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Con frecuencia, nuestro objetivo para analizar un circuito es determinar la totalidad de su comportamiento: los valores de todas sus corrientes y voltajes en respuesta a todas sus fuentes y energía almacenada inicial. La mayor parte de nuestro trabajo se ha orientado hacia este objetivo totalmente generalizado. Los dos enfoques sistemáticos de análisis de circuitos enfatizados en el presente texto, el análisis de malla y nodal, resuelven cada uno un conjunto de variables importantes (las corrientes de malla y voltajes de nodo, respectivamente), a partir de las cuales pueden derivarse fácilmente las variables de circuitos restantes. Aun cuando en un problema dado, sólo un subconjunto de las variables de circuito es de nuestro interés, nuestra estrategia ha sido primero “descomponer el circuito”. Una vez que el circuito se ha descompuesto, o, en otras palabras, una vez que se han obtenido las variables más importantes, es fácil calcular cualquier otra variable de circuito de interés.

Sin embargo, a veces nuestro interés para estudiar un circuito dado está definido mucho más estrechamente que el de obtener todas las respuestas a todas las fuentes. Puede darse la situación en que deseamos comprender la relación entre una fuente particular u otra variable de circuito a la que llamaremos *entrada* y otra variable de circuito, la corriente de *salida* o voltaje que produce esa entrada. El objetivo del *análisis de entrada y salida* es comprender su relación, en otras palabras, ser capaces de predecir la salida para cada valor posible de la entrada. Si sólo nos interesa una sola pareja de entrada y salida, es poco probable que los métodos orientados para determinar todas las corrientes y todos los voltajes en respuesta a todas las fuentes y condiciones iniciales, sean muy eficaces cuando se aplica a este propósito más estrechamente definido.

El análisis en el dominio-s ya demostró su valor para acelerar los cálculos del comportamiento completo de un circuito. Resulta ser que el enfoque en dominio-s es sumamente adecuado para el análisis de entrada-salida, como lo consideraremos a continuación. Para un circuito de entrada $V_i(s)$ y salida $V_o(s)$, *defínase la función de transferencia $H(s)$ como la proporción en dominio-s de la salida a la entrada, cuando todas las condiciones iniciales son cero:*

$$H(s) = V_o(s)/V_i(s), \quad \text{todas las CI} = 0 \quad (13.17)$$

Aquí $V_i(s)$ y $V_o(s)$ pueden ser ambas corrientes, ambos voltajes, o uno de cada categoría. Requerimos que todas las condiciones iniciales se fijen en cero con el fin de aislar la entrada seleccionada como la causa de la salida que calculamos.

Reescribiendo (13.17), vemos el significado de esta definición:

$$V_o(s) = H(s)V_i(s), \quad \text{todas las CI} = 0 \quad (13.18)$$

El valor de la salida en la salida del dominio-s de cualquier entrada es el producto de la función de transferencia y la entrada en el dominio-s. De este modo, una vez que se conoce $H(s)$ podemos predecir la salida $V_o(s)$ para cualquier entrada $V_i(s)$ por simple multiplicación de dos cantidades conocidas en el dominio-s. Si se necesita la salida en el dominio del tiempo $v_o(t)$, se necesitará del paso adicional de la transformada inversa.

Para determinar $H(s)$, se fijan todas las condiciones iniciales en cero y se dibuja el circuito en el dominio-s. Una consecuencia de requerir que la condición inicial sea cero, es

que en este circuito nunca habrán generadores de condiciones iniciales. Luego se calcula el valor de la salida seleccionada. A partir de la división por la entrada, como en (13.17), se obtiene la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$.

Ejemplo 13.6

Como primer ejemplo, calcularemos la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ para la entrada $v_s(t)$ y la salida $v_1(t)$. En la figura 13.9 se muestran los circuitos en el dominio del tiempo y el dominio-s. Nótese la ausencia de generadores de condiciones iniciales en el circuito en el dominio-s, como consecuencia de fijar todas las condiciones iniciales en cero.

Procedemos a calcular la salida especificada $V_1(s)$. La impedancia equivalente de los tres elementos a la derecha es

$$Z_1(s) = \frac{(s)(2s + 4)}{s + (2s + 4)} = \frac{2s^2 + 4}{3s + 4}$$

Luego, por división de voltajes

$$\begin{aligned} V_1(s) &= \frac{4/s}{(4/s) + Z_1(s)} V_s(s) \\ &= \frac{6s + 8}{s^3 + 2s^2 + 6s + 8} V_s(s) \end{aligned} \quad (13.19)$$

Luego de resolver la salida en términos de la entrada, se obtiene $\mathbf{H}(s)$ al dividir ambos miembros por la salida $V_s(s)$.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{V_1(s)}{V_s(s)} = \frac{6s + 8}{s^3 + 2s^2 + 6s + 8} \quad (13.20)$$

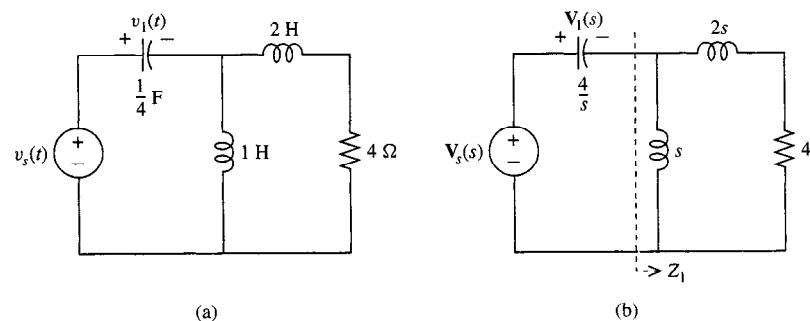


FIGURA 13.9 (a) Circuito para el ejemplo 13.6; (b) circuito correspondiente en el dominio-s.

Una consecuencia de la relación lineal entre la entrada y la salida vista en (13.18), es que si la entrada $V_i(s) = 0$, entonces la salida también debe ser cero. Puesto que éste podría no ser el caso si hubiera otras fuentes independientes que contribuyeran a la salida $V_o(s)$, deben eliminarse antes de calcular su función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ en relación a la entrada especificada. *La función de transferencia mide la salida debida a una entrada especificada, donde todas las demás fuentes y condiciones iniciales se fijan en cero.*

Ejemplo 13.7

Obtenga la función de transferencia $H_1(s) = V_2(s)/I_{s_1}(s)$ para el circuito en la figura 13.10. Las ecuaciones nodales donde se elimina $V_{s_2}(s)$ son, en forma vector matriz,

$$\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & 2s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{s_1}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, utilizando la regla de Kramer para recuperar $V_2(s)$

$$V_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+2 & -I_{s_1}(s) \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & 2s+3 \end{vmatrix}} = -\frac{-2}{2s^2 + 7s + 2} I_{s_1}(s)$$

Nótese que la linealidad de la última ecuación en $I_{s_1}(s)$ verifica que si la entrada $I_{s_1}(s)$ fuera cero, entonces la salida sería también cero. Calculamos el componente de la salida debida a la fuente especificada. Dividiendo la salida por la entrada $I_{s_1}(s)$, tenemos la función de transferencia deseada:

$$H_1(s) = \frac{V_2(s)}{I_{s_1}(s)} = \frac{-2}{2s^2 + 7s + 2} \quad (13.21)$$

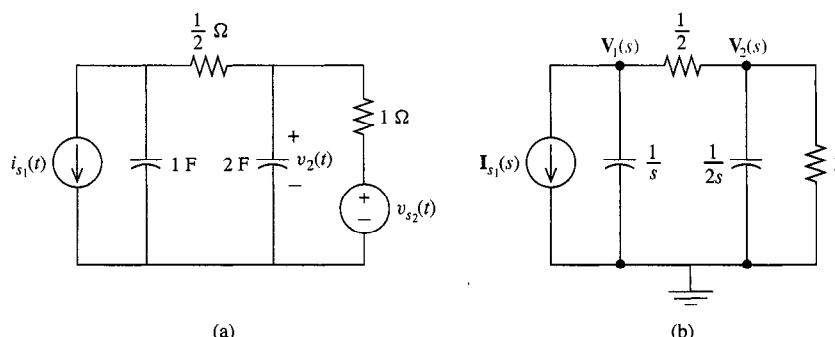


FIGURA 13.10 (a) Circuito para el ejemplo 13.7; (b) circuito en el dominio-s con $V_{s_2}(s)$ eliminada.

Para determinar una función de transferencia en un circuito que contiene más de una fuente independiente, deben eliminarse las demás fuentes antes de calcularse la salida. Sean $V_{11}(s), V_{12}(s), \dots, V_{in}(s)$ las n fuentes independientes separadas en un circuito, y sea $V_o(s)$ la variable de salida designada. Por consiguiente, eliminando todas las fuentes $j \neq k$,

$$V_{ok}(s) = H_k(s)V_{ik}(s), \quad (\text{todas las CI} = 0, \text{todas las demás fuentes } V_{ij}(s) = 0) \quad (13.22)$$

donde $H_k(s)$ es la función de transferencia entre la salida $V_o(s)$ y la entrada $V_{ik}(s)$, y $V_{ok}(s)$ es el valor de la salida producida bajo estas condiciones.

Ahora supongamos que calculamos la salida total $V_o(s)$ debida a todas las fuentes $V_{11}(s), V_{12}(s), \dots, V_{in}(s)$, manteniendo las condiciones iniciales en cero. Mediante superposición, la componente debida a la fuente $V_{ik}(s)$ sería $V_{ok}(s)$, y se calcularía el valor de la salida precisamente bajo las mismas condiciones de (13.22). De este modo, la salida total sería la superposición

$$V_o(s) = V_{o1}(s) + V_{o2}(s) + \dots + V_{on}(s) \quad (13.23a)$$

$$o \quad \mathbf{V}_o(s) = \mathbf{H}_1(s)\mathbf{V}_1(s) + \mathbf{H}_2(s)\mathbf{V}_2(s) + \cdots + \mathbf{H}_n(s)\mathbf{V}_n(s) \quad (13.23b)$$

En un circuito con entradas múltiples, la salida forzada en dominio-s debido a las fuentes, es la superposición de las funciones de transferencias separadas para cada entrada, multiplicado por el valor de las correspondientes entradas en dominio-s.

Ejemplo 13.8

Continuando el ejemplo anterior, deseamos determinar la función de transferencia $\mathbf{H}_2(s) = \mathbf{V}_2(s)/\mathbf{V}_{s_2}(s)$ debida a la entrada $\mathbf{V}_{s_2}(s)$, y la salida total $\mathbf{V}_2(s)$ debida a todas las entradas. Para calcular $\mathbf{H}_2(s)$ de la figura 13.11, eliminamos la otra fuente $\mathbf{I}_{s_1}(s)$ y determinamos la componente de salida debida únicamente a la entrada $\mathbf{V}_{s_2}(s)$.

Mediante la regla en serie-paralelo, se obtiene que la impedancia de los tres elementos de la izquierda es

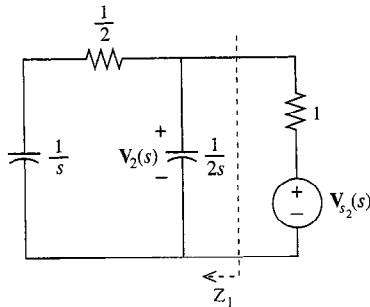


FIGURA 13.11 Circuito en el dominio-s para calcular $H_2(s)$ en el ejemplo 13.8.

Utilizando $Z_1(s)$ y la resistencia 1- Ω como los ramales de un divisor de voltaje,

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{Z_1(s)}{1 + Z_1(s)} \mathbf{V}_{s_2}(s)$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(s) &= \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_{s_2}(s)} = \frac{(s+2)/(2s^2+6s)}{1 + [(s+2)/(2s^2+6s)]} \\ &= \frac{s+2}{2s^2+7s+2} \end{aligned} \quad (13.24)$$

De este modo, la salida es la superposición de las salidas, debidas a las dos entradas separadas.

$$\mathbf{V}_2(s) = \mathbf{H}_1(s)\mathbf{I}_{s_1}(s) + \mathbf{H}_2(s)\mathbf{V}_{s_2}(s) \quad (13.25a)$$

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{-2}{2s^2+7s+2} \mathbf{I}_{s_1}(s) + \frac{s+2}{2s^2+7s+2} \mathbf{V}_{s_2}(s) \quad (13.25b)$$

De esta ecuación de entrada-salida (13.25b), ahora podemos deducir directamente la salida para cualquier condición de entrada, sin necesidad de calcular en el proceso ninguna variable de circuito innecesaria. Por ejemplo, si las entradas se fijan como $i_{s_1}(t) = u(t)$ y $v_{s_2}(t) = e^{-t}u(t)$, entonces

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{-2}{2s^2+7s+2} \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{s+2}{2s^2+7s+2} \left(\frac{1}{s+1} \right)$$

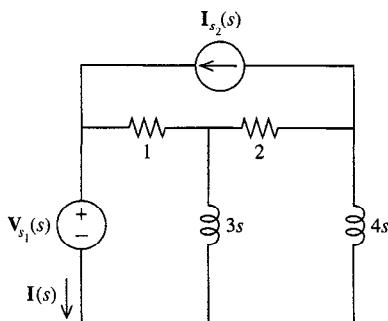
y podría calcularse $v_2(t)$ mediante fracciones parciales. (Estos cálculos suponen condiciones iniciales cero.)

Una vez que se conoce $\mathbf{H}(s)$, es fácil variar la entrada y determinar el efecto que surte sobre la salida. La función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ resultará ser central en el análisis de entrada-salida, es decir, el análisis que se enfoca en las relaciones de causa y efecto entre entradas y salidas distintas. Por ejemplo, aprovecharemos al máximo esta capacidad para

estudiar la respuesta de frecuencia en el capítulo 14, la dependencia de la salida sobre la frecuencia de la entrada.

En tanto que son útiles, las funciones de transferencia no nos dicen toda la historia. Las funciones de transferencia no pueden decirnos nada acerca del rango completo del comportamiento potencial de un circuito, puesto que están definidas con condiciones iniciales en cero. Para condiciones iniciales no nulas, la *respuesta natural*, es decir, la salida cuando se eliminan todas las fuentes independientes, debe ser superpuesta con la salida debida a las entradas, o la respuesta forzada calculada utilizando $H(s)$ si se desea la salida total. La *respuesta natural* puede calcularse a partir del circuito en el dominio-s teniendo presentes generadores de condiciones iniciales, y eliminándose todas las demás fuentes independientes.

EJERCICIOS



EJERCICIO 13.3.2

- 13.3.1.** Denótese $i_s(t)$ a la fuente en la figura 13.3, y obtenga $H(s)$ para la entrada $I_s(s)$ y la salida $V_L(s)$.

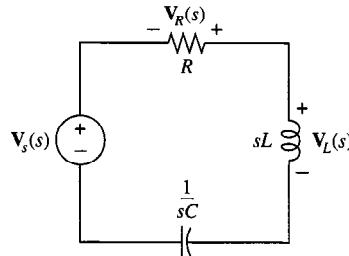
Respuesta $s^2/s^2 + 3s + 2$

- 13.3.2.** Obtenga las funciones de transferencia entre la salida $I(s)$ y las entradas $V_{s1}(s)$, $I_{s2}(s)$.

Respuesta $-(7s + 2)/(12s^2 + 13s + 2)$, $(13s + 2)/(12s^2 + 13s + 2)$

- 13.3.3.** Obtenga $H(s)$ con la entrada $V_R(s)$ y la salida $V_L(s)$. [Sugerencia: Obténganse ambas en términos de $V_s(s)$.]

Respuesta $- \frac{Ls}{R}$



EJERCICIO 13.3.3

13.4 POLOS Y ESTABILIDAD

Vimos en el capítulo 12 que los polos de una transformada $F(s)$ determinan, hasta una constante de multiplicación, los términos en la expansión de fracciones parciales, y por consiguiente, las funciones de tiempo que forman su transformada inversa $f(t)$. Un polo simple en $s = p$ hace que surja un término Ke^{pt} en $f(t)$, en tanto que polos repetidos en $s = p$ crean formas de t -multiplicadas de la misma función exponencial de tiempo.

La dependencia del término Ke^{pt} de $f(t)$ por el lugar del polo p en su transformada $F(s)$ se ilustra en la figura 13.12. Sea $p = \sigma + j\omega$, sea $e^{pt} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$. De forma que $\omega = 0$, tenemos un polo puramente real situado en el eje horizontal en la figura.

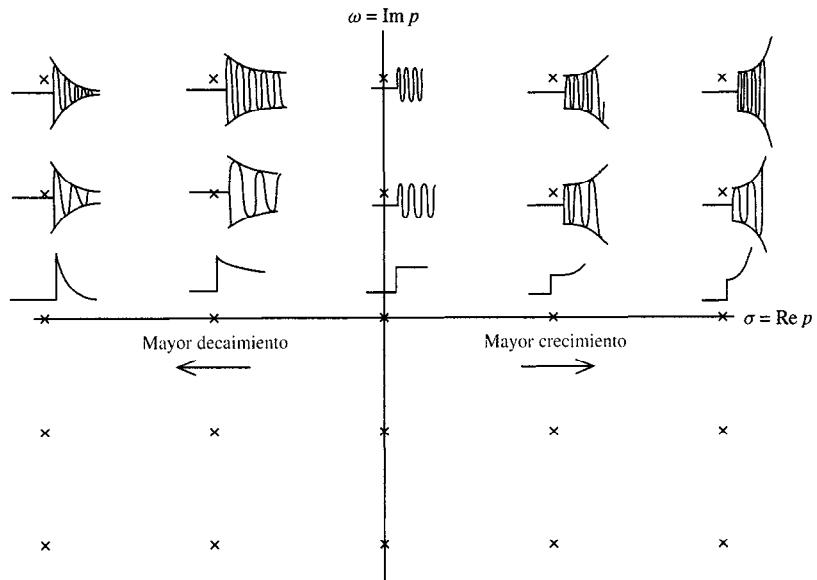


FIGURA 13.12 Dependencia del término e^{pt} de $f(t)$ en el lugar del polo $p = \sigma + j\omega$ en el plano complejo.

El término correspondiente $e^{\sigma t}$ decrece a cero para $\sigma < 0$, es constante para $\sigma = 0$, y crece sin límite para $\sigma > 0$. Para $\omega \neq 0$, el polo es complejo, y la correspondiente exponencial $e^{pt} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ es compleja. En este caso, la figura 13.12 muestra el término e^{pt} , combinado con el término e^{p^*t} , que se debe a la presencia de su polo conjugado complejo $p^* = \sigma - j\omega$. Puesto que

$$e^{pt} + e^{p^*t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} + e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = 2e^{\sigma t} \cos \omega t \quad (13.26)$$

podemos ver que *el ritmo de crecimiento o decaimiento en cada término de $f(t)$ está gobernado por la parte real del polo*. Si $\operatorname{Re} p = \sigma < 0$ el término correspondiente en $f(t)$ decrece a cero. Esta conclusión también es vigente para los polos repetidos, puesto que las formas t-multiplicadas de $e^{\sigma t}$, eventualmente decaen a cero respecto al tiempo, en tanto que $e^{\sigma t}$ también lo hace. Nótese en la figura 13.12 que únicamente se dibuja la mitad superior de las respuestas en el plano complejo, puesto que cada respuesta dibujada en lugar de polo complejo p combina términos debidos a un par conjugado complejo de los p, p^* . Las respuestas que no se dibujaron en la mitad inferior de la figura 13.12, son idénticas a las que se mostraron en los lugares conjugados complejos en la mitad superior del plano complejo.

Estamos particularmente interesados en el lugar de los polos de las corrientes y voltajes en la respuesta natural. Para cualquier circuito lineal, podemos eliminar las fuentes independientes y escribir un conjunto complejo de ecuaciones de análisis de red, sea este análisis de malla o nodal, en el dominio-s. Para ser más específicos, supongamos que se eligió el análisis de malla. Las ecuaciones serán de la forma

$$\mathbf{M}(s)\mathbf{I}(s) = \mathbf{V}_{IC}(s) \quad (13.27)$$

donde $\mathbf{I}(s)$ es el vector de corrientes de malla desconocidas, $\mathbf{V}_{IC}(s)$ es el vector de los términos de fuente del generador de condiciones iniciales, y $\mathbf{M}(s)$ es la matriz cuadrada de conexión. Los valores de s para los que el determinante de $M(s)$ es igual a cero, se conocen como polos del circuito.

Ejemplo 13.9

Considérese el circuito que aparece en la figura 13.3(a) transformado al dominio- s en 13.13(b). Las ecuaciones de malla con $\mathbf{V}_o(s) = 0$ son

$$\begin{bmatrix} 2s + 4 & -4 \\ -4 & 4 + \frac{8}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i_1(0-) \\ -v_c(0-) \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante $\Delta(s)$ es

$$\Delta(s) = (2s + 4) \left(4 + \frac{8}{s} \right) - 16 = \frac{8(s^2 + 2s + 4)}{s} \quad (13.28)$$

Los polos del circuito son los ceros de $\Delta(s)$ que son las raíces cuadráticas $p_1, p_2 = -1 \pm j\sqrt{3}$. Resolviendo (13.28),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} 4 + \frac{8}{s} & 4 \\ 4 & 2s + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i_1(0-) \\ -v_c(0-) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \begin{bmatrix} i_1(0-)s + 2i_1(0-) - \frac{1}{2}v_c(0-) \\ (i_1(0-) - \frac{1}{4}v_c(0-))s - \frac{1}{2}v_c(0-) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.29)$$

A partir de (13.29), podemos ver que las corrientes que pasan a través de cada elemento en un circuito tiene como polos a los polos del circuito p_1, p_2 determinados anteriormente. Lo mismo para cada voltaje en el circuito, como puede verificarse fácilmente sustituyendo las corrientes de malla anteriores en las leyes de elemento para cada elemento en el circuito.

Realizando análisis nodal en este mismo circuito, el único voltaje de nodo desconocido es $\mathbf{V}(s)$, y sumando corrientes en este nodo,

$$\begin{aligned} \frac{s}{8} \left(\mathbf{V}(s) - \frac{v_c(0-)}{s} \right) + \frac{1}{4} \mathbf{V}(s) + \frac{1}{2}s[\mathbf{V}(s) - 2i_1(0-)] &= 0 \\ \mathbf{V}(s) &= \frac{s v_c(0-) + 8i_1(0-)}{s^2 + 2s + 4} \end{aligned}$$

El análisis de malla y nodal, llegan al mismo conjunto de polos para el circuito, tal y como debería ser.

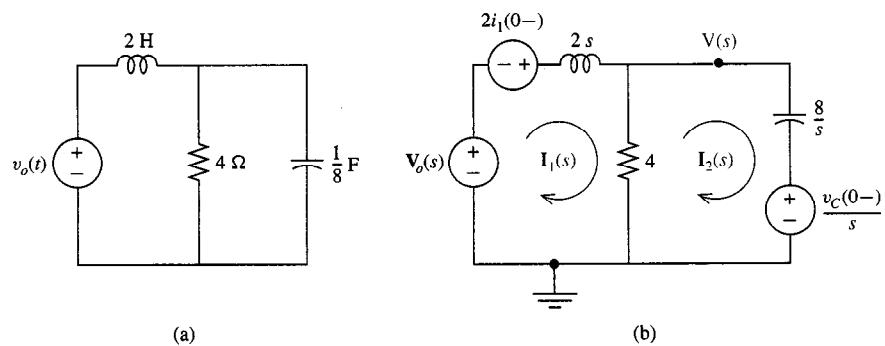


FIGURA 13.13 (a) Circuito para el ejemplo 13.9; (b) en el dominio- s .

Los polos de un sistema dictan la suerte que correrá su respuesta natural. Como se muestra en la figura 13.12, cada polo cuya parte real es negativa, resultará en términos de respuesta natural que decaen a cero. Aquellos con partes reales cero, no crecerán ni decaerán, en tanto que los polos con partes reales positivas, generan términos que crecen ilimitadamente.

Definimos que un circuito es *estable* si *todas las respuestas naturales en el circuito decaen a cero respecto al tiempo*. Puesto que únicamente los polos del circuito con partes reales negativas producen respuestas naturales que decaen a cero, la *estabilidad de un circuito es equivalente a $\operatorname{Re} p < 0$ para cualquier polo de circuito p* . *Formulado de otro modo, la estabilidad requiere que todos los polos del circuito permanezcan en la mitad izquierda del plano complejo*, como se muestra en la figura 13.12. El circuito del ejemplo anterior es estable, puesto que los polos conjugados complejos del sistema tienen como parte real -1 . El siguiente ejemplo ilustra un circuito que, para distintos rangos de un parámetro de circuito, puede ser estable o inestable.

Ejemplo 13.10

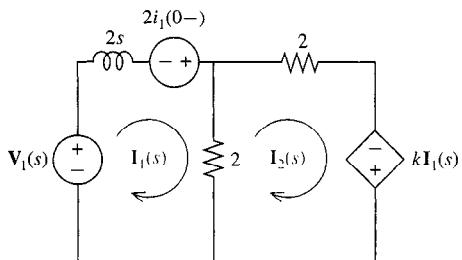


FIGURA 13.14 Circuito para el ejemplo 13.10.

Considérese el circuito en el dominio-s de la figura 13.14, que contiene una fuente de voltaje controlada por corriente de ganancia de k ohms y un solo inductor que produce el generador de condiciones iniciales que se muestra. Determinese si este circuito es estable.

Las ecuaciones de malla son

$$\begin{bmatrix} 2s + 2 & -2 \\ -2 - k & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) + 2i_1(0-) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.30a)$$

El determinante es

$$\Delta(s) = (2s + 2)(3) - 2(2 + k) = 6s + 2(1 - k) \quad (13.30b)$$

De forma que hay un solo polo de circuito situado en $p = \frac{1}{3}(k - 1)$. Para $k < 1$, este polo tiene una parte real negativa. Concluimos que para $k < 1$ este circuito es estable; para $k \geq 1$, no es estable.

La estabilidad tiene varias implicaciones respecto al comportamiento de un circuito. A continuación señalaremos dos que son de importancia inmediata: la relación entre estabilidad y estado estable, y entre estabilidad y análisis de función de transferencia.

Anteriormente definimos el estado estable como la condición, en donde todas las transientes decaen a cero, y la respuesta general del circuito es igual a su respuesta forzada. Pero, ¿qué sucede si los comportamientos transitorios en un circuito nunca tienden a cero? El circuito nunca llegará al estado estable, y el análisis en estado estable, incluyendo el análisis fasorial del estado estable ac, no determinará los valores a largo plazo de las corrientes y voltajes. *El análisis en estado estable es únicamente aplicable a circuitos estables*. Los valores a largo plazo de corrientes y voltajes en circuitos inestables dependen fuertemente de sus condiciones iniciales. No existe un estado estable para circuitos de esta naturaleza.

Ejemplo 13.11

Determinese el valor del estado estable ac de $i_1(t)$ en el circuito que aparece en la figura 13.14 para la fuente $v_1(t) = 40 \cos 2t$ V. Aplicando la regla de Kramer para resolver (13.30a),

$$\mathbf{I}_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1(s) + 2i_1(0-) & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2s + 2 & -2 \\ -2 - k & 3 \end{vmatrix}} = \frac{i_1(0-)}{s + \frac{1}{3}(1 - k)} + \frac{\frac{1}{2}\mathbf{V}_1(s)}{s + \frac{1}{3}(1 - k)} \quad (13.31)$$

El polo único del circuito está en $p = \frac{1}{3}(k - 1)$. Si $k \geq 1$, el polo no está en el semiplano izquierdo y el circuito es inestable. Por ejemplo, con $k = 4$, la respuesta natural [el primer término en (13.31)] es $i_1(0-)e^{jt}$, que ciertamente no decae a cero conforme t crece. Para $k \geq 1$, el circuito nunca se “asienta” a un valor de estado estable; el estado estable no existe en este circuito para $k \geq 1$. Para $k < 1$, la respuesta natural tiende a cero, sin importar la condición inicial, y tendremos un estado estable. Utilizando la fuente $\mathbf{V}_4(s) = 40s/(s_2 + 4)$, la expansión en fracciones parciales para la respuesta forzada [segundo término en (13.31)] es

$$\frac{20s}{[s + \frac{1}{3}(1-k)](s^2 + 4)} = \frac{A}{s + \frac{1}{3}(1-k)} + \frac{B}{s - j2} + \frac{B^*}{s + j2}$$

Para $k < 1$, el primer término a la derecha decaerá a cero con el tiempo, y puesto que sólo necesitamos el estado estable, no necesitamos calcular A .

$$B = \frac{20(j2)}{[j2 + \frac{1}{3}(1-k)](j4)} = \frac{10}{\frac{1}{3}(1-k) + j2}$$

y el valor en estado estable requerido para toda $k < 1$ es

$$i_1(t) = 2|B| \cos(2t + \theta)$$

donde

$$|B| = \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{9}(1-k)^2 + 4}}, \quad \theta = -\arctan \frac{6}{1-k}$$

La inaplicabilidad del análisis en estado estable para circuitos que no son estables, sugiere que debemos investigar la estabilidad antes de iniciar un cálculo en estado estable. Esto puede hacerse determinando si todos los polos del circuito tienen partes reales negativas como se describió anteriormente. En la práctica, los circuitos que no tienen fuentes controladas, son casi siempre estables. Las corrientes y voltajes debidos a condiciones iniciales pueden acumularse indefinidamente sólo si existe un elemento que suministre potencia al resto del circuito, que no puede ser un elemento *RLC* (del cual sabemos que nunca suministra potencia promedio). Puesto que se eliminan las fuentes independientes para determinar la respuesta natural, el único candidato restante es una fuente controlada. Los únicos circuitos que no tienen fuentes controladas, que pueden no ser estables, son aquellos que contienen trayectorias cerradas *LC* aisladas sin resistencia, que corresponden a polos de circuitos exactamente en el eje $j\omega$ ($\text{Re } p = 0$).

Finalmente, considérese las implicaciones de la estabilidad en el uso de funciones de transferencia. La función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ permite calcular una salida $\mathbf{V}_o(s)$ para una entrada dada $\mathbf{V}_i(s)$ mediante la relación

$$\mathbf{V}_o(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s), \quad \text{todas las CI} = 0$$

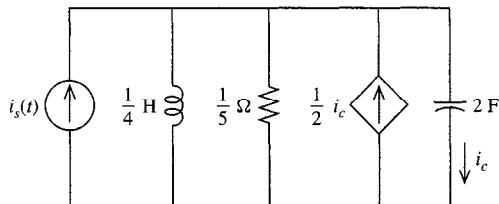
Sin embargo, supongamos que las condiciones iniciales en el circuito no son exactamente igual a cero¹. ¿En qué medida es aún aplicable esta relación? Si el circuito es estable, la respuesta natural decaerá a cero. La respuesta forzada determinada mediante la ecuación

¹ Lo cual siempre será el caso para circuitos físicos, aunque únicamente debido a inevitables voltajes y corrientes de ruido térmico.

anterior tenderá a la respuesta real y total a una precisión arbitraria conforme $t \rightarrow \infty$. Por otra parte, si el circuito es inestable, la respuesta total diferirá de la respuesta forzada determinada por el análisis de función de transferencia por un término (la respuesta natural) que bien podría tender a infinito.

La conclusión es que la propiedad de estabilidad tiene una importante presencia en la utilidad de los análisis de estado estable y de funciones de transferencia. En análisis del estado estable, es inaplicable, y el análisis de funciones de transferencia, limitado a determinar la parte forzada de la respuesta, puede darnos resultados sumamente distintos de la respuesta total. La estabilidad puede determinarse convenientemente en el dominio- s examinando las partes reales de los polos de circuito, que deben ser todos negativos para que el circuito sea estable. Los polos del circuito son ceros del determinante de la matriz nodal o de análisis de malla.

EJERCICIOS



EJERCICIO 13.4.2

- 13.4.1.** Demuestre que un circuito LC simple de dos elementos en paralelo no es estable.

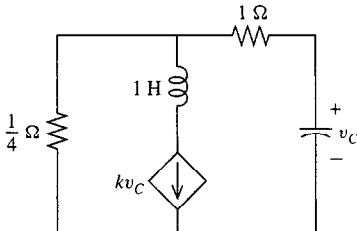
Respuesta Los polos del circuito en $\pm j\sqrt{1/LC}$ no tienen partes reales negativas.

- 13.4.2.** Determine los polos del circuito. ¿Es este sistema estable?

Respuesta $-1, -4$; si

- 13.4.3.** ¿Cuál es el valor máximo de k , para el cual este circuito no es estable?

Respuesta -4



EJERCICIO 13.4.3

13.5 TEOREMAS DE VALOR INICIAL Y FINAL

A continuación desarrollaremos dos útiles teoremas que nos permiten deducir el valor inicial de una función de tiempo, $f(0+)$, y su valor final, $f(\infty)$, a partir de su transformada $\mathbf{F}(s)$. Considérese toda $f(t)$ que no contiene impulsos o singularidades de orden mayor en $t = 0$. Escribamos $f(t)$ en la forma $f(t) = g(t) + du(t)$, donde $g(t)$ es continua en $t = 0$, y $d = f(0+) - f(0-)$ es el tamaño de la discontinuidad de salto en $f(t)$ con el valor $t = 0$. Diferenciando,

$$\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} + d\delta(t)$$

Aplicando la regla de derivación a esta ecuación

$$s\mathbf{F}(s) - f(0-) = \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \frac{dg}{dt} e^{-st} dt + \int_{0-}^{\infty} d\delta(t) e^{-st} dt \quad (13.32)$$

Utilizando el teorema de integración del impulso unitario, la última integral en el lado derecho es simplemente d , sin importar el valor de s . Conforme $s \rightarrow \infty$, la integral que se suma con ésta debe tender a cero, puesto que el integrando se hace arbitrariamente pequeño con cada t . De este modo, pasando al límite conforme $s \rightarrow \infty$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s) - f(0-) = d = f(0+) - f(0-)$$

y cancelando términos comunes a ambos lados, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA DEL VALOR INICIAL

Para cualquier $f(t)$ sin impulsos o singularidades de orden más alto cuando $t = 0$.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s) = f(0+)$$

La condición de la no existencia de singularidades de impulso o de orden mayor se satisface por cualquier función racional propia $\mathbf{F}(s)$.

A continuación consideremos (13.32) conforme $s \rightarrow 0$. La última integral sigue siendo d , y la integral que se le suma es

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0-}^{\infty} \frac{dg}{dt} e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \frac{dg}{dt} dt = g(\infty) - g(0-)$$

La última igualdad requiere que $g(\infty)$ exista para la función dada. Entonces, si $g(\infty)$ existe,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) - f(0-) = g(\infty) - g(0-) + d \quad (13.33)$$

Puesto que $f(t) = g(t) + du(t)$, entonces $g(\infty) = f(\infty) - du(\infty) = f(\infty) - d$. Sustituyéndolo en (13.33) y notando que $f(0-) = g(0-)$, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA DE VALOR FINAL

Para toda $f(t)$ tal que existe el límite $f(\infty)$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) = f(\infty)$$

Ejemplo 13.12

$I(s) = (7s^3 + 2)/(s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 2)$. Obtenga el valor inicial $i(0+)$ y el valor final $i(\infty)$. Conforme $s \rightarrow \infty$ los términos de mayor potencia predominan tanto en el numerador como en el denominador, en tanto que los términos constantes predominan conforme $s \rightarrow 0$. Por consiguiente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = i(0+) = 7, \quad \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = i(\infty) = 0$$

El principal beneficio de estos dos teoremas, es que no necesitamos calcular una transformada inversa para descubrir sus valores inicial y final. En el caso anterior, por ejemplo, esto requeriría de factorizar una ecuación cuártica, para descubrir los polos, y luego calcular los numeradores de la expansión en fracciones parciales. Podemos pasar por alto estas dificultades si únicamente se necesitan los valores inicial y final de la transformada inversa.

EJERCICIOS

13.5.1. Calcule $L^{-1} [(-40s + 20)/(s^3 + 6s^2 + 5s)]$ verifíquelo aplicando los teoremas de valor inicial y final.

Respuesta $4 - 15e^{-t} + 11e^{-5t}$; $IVT: f(0+) = 0$; $FVT: f(\infty) = 4$

13.5.2. Si $i_s(t) = u(t)$ y las condiciones iniciales $0-$ son cero en el circuito del ejercicio 13.4.2, obtenga $i_c(0+)$ e $i_c(\infty)$.

Respuesta 2 A, 0 A

13.5.3. Un circuito tiene dos fuentes independientes y, para la variable de salida $v_o(t)$, funciones de transferencia

$$H_1(s) = \frac{5s - 3}{s^2 + 2s}, \quad H_2(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 1}$$

relativas a estas fuentes. Obtenga $v_o(0+)$ y $v_o(\infty)$ si $\delta(t)$ se aplica en cada entrada y todas las condiciones iniciales en $0-$ son cero.

Respuesta $+6, -3/2$

13.6 RESPUESTA AL IMPULSO Y CONVOLUCIÓN

La función de transferencia $H(s)$ permite que podamos calcular una salida $V_o(s)$ para una entrada dada $V_i(s)$ mediante la relación

$$V_o(s) = H(s)V_i(s), \quad \text{todas las CI} = 0 \quad (13.34)$$

Si seleccionamos la entrada $v_i(t)$ como la función de impulso unitario,

$$v_i(t) = \delta(t) \quad (13.35)$$

entonces, puesto que la transformada de $\delta(t)$ es la constante 1, la respuesta bajo estas condiciones será simplemente

$$V_o(s) = H(s)(1) = H(s) \quad (13.36a)$$

o en el dominio del tiempo

$$v_o(t) = L^{-1}[H(s)] = h(t) \quad (13.36b)$$

La función de tiempo $h(t)$, siendo la salida causada por la entrada de impulso unitario cuando todas las condiciones iniciales son igual a cero, se designa, y muy razonablemente, *respuesta de impulso unitario* o a veces únicamente *respuesta de impulso*. Por (13.36b), podemos ver que la *respuesta de impulso unitario* $h(t)$ y la *función de transferencia* $H(s)$ son una pareja de transformada de Laplace. Puesto que todos los circuitos prácticos son *causales*, es decir, que no pueden dar respuesta a una entrada hasta que la entrada en sí se inicie, requeriremos que la respuesta de impulso sea cero en tiempo negativo; $h(t) = 0$ para $t < 0$.

Ejemplo 13.13

Obtenga la función de transferencia $H(s)$ y la respuesta de impulso unitario $h(t)$ para la entrada $v_{s_1}(t)$ y la salida $v_L(t)$ para el circuito de la figura 13.15.

Se muestra el circuito en dominio-s, preparado para calcular $H(s)$ eliminando la otra fuente independiente y fijando los gene-

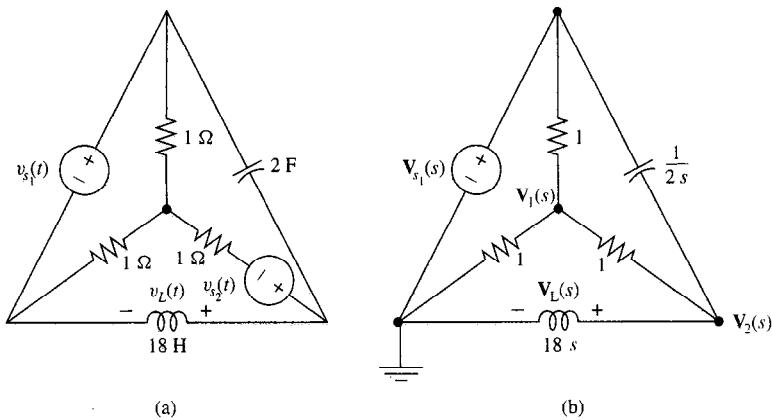


FIGURA 13.15 (a) Circuito para el ejemplo 13.13; (b) Circuito en el dominio-s con las demás fuentes eliminadas.

radores de condiciones iniciales a cero. Las ecuaciones para el análisis nodal en este circuito son

$$\mathbf{V}_1(s) + [\mathbf{V}_1(s) - \mathbf{V}_{s1}(s)] + [\mathbf{V}_1(s) - \mathbf{V}_2(s)] = 0 \quad (13.37a)$$

$$\frac{1}{18s} \mathbf{V}_2(s) + [\mathbf{V}_2(s) - \mathbf{V}_1(s)] + 2s[\mathbf{V}_2(s) - \mathbf{V}_{s1}(s)] = 0 \quad (13.37b)$$

Multiplicando (13.37b) por 3 y sumándolo a (13.37a), se elimina $\mathbf{V}_1(s)$:

$$(\frac{1}{6s} + 3 + 6s - 1)\mathbf{V}_2(s) = (6s + 1)\mathbf{V}_{s1}(s)$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_{s1}(s)} = \frac{s}{s + \frac{1}{6}}$$

Para determinar la respuesta impulsivo $h(t)$ necesitamos la transformada inversa de la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$. Después de dividir

$$\mathbf{H}(s) = 1 - \frac{\frac{1}{6}}{s + \frac{1}{6}} \quad (13.38)$$

$$y \quad h(t) = \delta(t) - \frac{1}{6}e^{-t/6}u(t)$$

Nótese que multiplicamos por $u(t)$ puesto que queremos $h(t) = 0$ para $t < 0$.

Ejemplo 13.14

Cuando se aplica la entrada $v_i(t) = 3\delta(t - 5)$ a un circuito con condiciones iniciales cero, y se eliminan las demás fuentes independientes, la salida se mide como

$$v_o(t) = e^{-4t} \cos[7(t - 9)]u(t - 9)$$

Determine la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ y la respuesta de impulso $h(t)$. Transformando la entrada $v_i(t)$

$$\mathbf{V}_i(s) = 3e^{-5s}$$

Usando la entrada de la tabla 12.2 para el coseno amortiguado y desplazando respecto al tiempo en 9,

$$L\{e^{-4(t-9)} \cos[7(t-9)]u(t-9)\} = \frac{(s+4)e^{-9s}}{[s+4]^2 + 49}$$

y, puesto que $v_o(t) = e^{-36} [e^{-4(t-9)} \cos[7(t-9)]u(t-9)]$,

$$V_o(s) = \frac{(s+4)e^{-9(s+4)}}{[s+4]^2 + 49}$$

La función de transferencia $H(s)$ es la proporción de la salida contra la entrada bajo estas condiciones:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{3}(s+4)e^{-4s}e^{-36}}{[s+4]^2 + 49}$$

Para obtener $h(t)$, comenzemos nuevamente de la entrada de la tabla para el coseno amortiguado, desplazado respecto al tiempo por 4:

$$L\{e^{-4(t-4)} \cos[7(t-4)]u(t-4)\} = \frac{(s+4)e^{-4s}}{[s+4]^2 + 49}$$

Comparando esto con $H(s)$, debemos multiplicar la amplitud por el factor $e^{-36}/3$:

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{-4(t+5)} \cos[7(t-4)]u(t-4) \quad (13.39)$$

Podemos ver que en este circuito la respuesta $h(t)$ al impulso unitario $\delta(t)$ no se inicia sino hasta el instante $t = 4$, aun cuando $\delta(t)$ se “inicia” en $t = 0$.

Puesto que la respuesta de impulso $h(t)$ y la función de transferencia $H(s)$ son pareja transformada, mientras más conozcamos a una más conoceremos a la otra. Como vimos en el ejemplo anterior, puede utilizarse una entrada distinta al impulso, obtener la función de transferencia, y a partir de ahí la respuesta de impulso. En el caso de circuitos físicos, generalmente es más conveniente tener una entrada de escalón unitario que un impulso unitario. Por consiguiente, a partir de la respuesta en escalón unitario $s(t)$ resultante, pueden calcularse tanto $H(s)$ como $h(t)$. Definimos a la respuesta de escalón unitario $s(t)$ como la salida cuando se aplica una entrada de escalón unitario $u(t)$, suponiendo condiciones iniciales cero y que se eliminaron todas las demás fuentes independientes.

La respuesta de escalón unitario $s(t)$ y su transformada $S(s)$ están íntimamente relacionadas con la respuesta de impulso unitario $h(t)$ y su transformada $H(s)$. Con una entrada de escalón unitario $V_i(s) = 1/s$ en (13.34), la salida $V_o(s) = S(s)$, y tenemos a partir de esa ecuación

$$S(s) = \frac{H(s)}{s} \quad (13.40)$$

Utilizando la regla de integración en (13.40),

$$s(t) = \int_{0-}^t h(\tau) d\tau \quad (13.41a)$$

Puesto que $h(t) = 0$ para $t < 0$, el límite inferior puede extenderse a $-\infty$. A partir de ahí, es claro que $s(t) = 0$ para $t < 0$ del mismo modo en que lo hace $h(t)$. La respuesta del escalón no puede iniciarse antes de que se inicie la entrada de escalón. Finalmente, diferenciando ambos miembros,

$$h(t) = \frac{d}{dt}s(t) \quad (13.41b)$$

La respuesta de impulso es la derivada de la respuesta en escalón (la respuesta de escalón es la integral de la respuesta de impulso). Pudimos anticipar este resultado notando que el escalón unitario es la integral del impulso unitario y, por linealidad, la respuesta de un circuito lineal a la integral de una entrada, es la integral de su respuesta a la entrada original.

Ejemplo 13.15

Determine la respuesta de escalón unitario para el circuito del ejemplo 13.13. Utilizando (13.40) y el resultado de ese ejemplo

$$\mathbf{S}(s) = \frac{\mathbf{H}(s)}{s} = \frac{1}{s + \frac{1}{6}}$$

La respuesta de escalón tiene un polo adicional en el origen, que cancela el cero en $\mathbf{H}(s)$ en ese lugar. Entonces, la respuesta en escalón es

$$s(t) = e^{-t/6}u(t)$$

Nótese que multiplicamos por el escalón unitario, puesto que se requiere que $s(t)$ sea cero para $t < 0$.

La ecuación de análisis de funciones de transferencias (13.34) relaciona de forma concisa la entrada, salida y función de transferencia en el dominio- s . ¿Cuál es el equivalente en dominio del tiempo de esta expresión? Comencemos definiendo una operación entre dos funciones de tiempo $f(t)$ y $g(t)$ que produce una tercera función de tiempo $d(t)$, mediante la integral

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (13.42)$$

Designamos a $d(t)$, como la *convolución* de $f(t)$ y $g(t)$. Aquí nos restringiremos a las convoluciones entre funciones $f(t)$ y $g(t)$, que son ambas 0 para $t < 0$. Transformando,

$$\mathbf{D}(s) = \int_{0-}^{\infty} \left[\int_{0-}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

donde el límite inferior de la integral de dentro fue reemplazada por $0-$, puesto que $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Invirtiendo el orden de integración,

$$\mathbf{D}(s) = \int_{0-}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{0-}^{\infty} g(t - \tau) e^{-st} dt \right] d\tau$$

La integral de dentro es la transformada de $g(t - \tau)$, que, mediante la propiedad de desplazamiento respecto al tiempo, resulta en

$$\mathbf{D}(s) = \int_{0-}^{\infty} f(\tau) [e^{-s\tau} G(s)] d\tau$$

Sacando a $\mathbf{G}(s)$ fuera de la integral, lo que queda es $\mathbf{F}(s)$, y tenemos la siguiente propiedad:

CONVOLUCIÓN

$$\mathbf{L} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] = \mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s) \quad (13.43)$$

La transformada de Laplace de la convolución de dos funciones de tiempo es el producto de sus transformadas de Laplace. Entonces, comparando (13.34) con lo anterior,

$$\mathbf{L} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)v_i(t - \tau) d\tau \right] = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s) = \mathbf{V}_o(s), \text{ todas las CI} = 0 \quad (13.44)$$

O, tomando las transformadas inversas de ambos lados,

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)v_i(t - \tau) d\tau, \text{ todas las CI} = 0 \quad (13.45)$$

La salida es igual a la convolución de la respuesta de impulso y la entrada, suponiendo condiciones iniciales cero. Esta es la forma deseada en el dominio del tiempo de la ecuación de funciones de transferencia, que especifica que la multiplicación de la respuesta de impulso $\mathbf{H}(s)$ y la entrada $\mathbf{V}_i(s)$ es en realidad la convolución de $h(t)$ y $v_i(t)$, para calcular la salida forzada en el dominio del tiempo.

Una observación útil es que, puesto que el orden de las funciones $\mathbf{F}(s)$ y $\mathbf{G}(s)$ en el lado derecho de (13.43) pueden invertirse sin cambiar su valor, entonces puede hacer lo mismo con el orden de $f(t)$ y $g(t)$ a la izquierda. En otras palabras, al calcular la integral de convolución (13.45), *cualquier función en el integrando puede ser escrito con el argumento τ y la otra con el argumento $t - \tau$.*

Ejemplo 13.16

Determine $v_2(t)$, $t > 0$, si $v_s(t)$ es el pulso “inclinado”, que se muestra en la figura 13.16 y $v_2(0-) = 0$. Por división de voltajes, se obtiene la función de transferencia que es:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_s(s)} = \frac{\frac{[3(15/s)]}{[3+(15/s)]}}{\frac{[3(15/s)]}{[3+(15/s)]} + 5} = \frac{3}{s + 8}$$

De forma que la respuesta de impulso es

$$h(t) = 3e^{-8t}u(t)$$

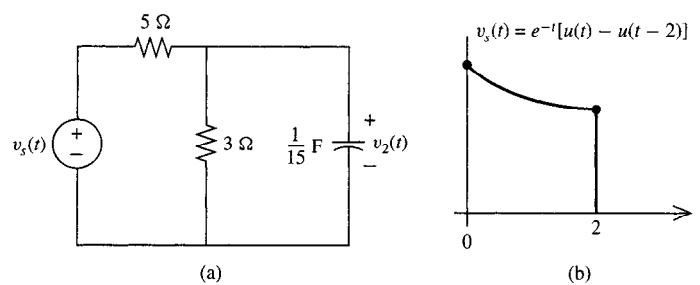


FIGURA 13.16 (a) Circuito para el ejemplo 13.16; (b) entrada $v_s(t)$.

Convolucionando $h(t)$ y $v_s(t)$, la salida deseada es

$$v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) v_s(\tau) d\tau$$

La entrada $v_s(\tau)$ es no nula únicamente para $0 \leq \tau \leq 2$, de forma que los límites de esta integral pueden ajustarse según esto. Dentro de esos límites, $v_s(\tau) = e^{-\tau}$, así

$$v_2(t) = \int_0^2 3e^{-8(t-\tau)} u(t - \tau) e^{-\tau} d\tau$$

El escalón unitario en el integrando tiene efectos distintos que dependen del valor de t . Si $t < 0$, entonces $u(t - \tau) = 0$ dentro de los límites especificados de integración y $v_2(t) = 0$ para toda $t < 0$. Si $t > 2$, entonces $u(t - \tau) = 1$ dentro de los límites especificados de la integración, y

$$v_2(t) = \int_0^2 3e^{-8(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = \frac{3}{7}(e^{-2} - e^{-16})e^{-8(t-2)}, \quad t > 2$$

Para valores de t entre los límites de la integral, $0 \leq \tau \leq 2$, el escalón unitario reduce el intervalo sobre que el integrando no es nulo a $0 \leq \tau \leq t$, puesto que $u(t - \tau) = 0$ para $\tau > t$.

$$v_2(t) = \int_0^t 3e^{-8(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = \frac{3}{7}(e^{-t} - e^{-8t}), \quad 0 \leq t \leq 2$$

En la figura 13.17 se muestra un dibujo de esta función

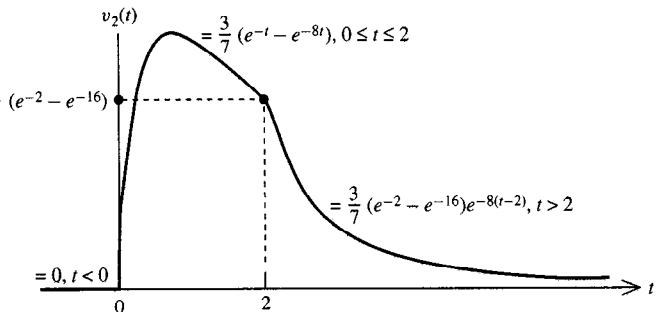


FIGURA 13.17 Salida $v_2(t)$ para el ejemplo 13.16.

Para cada instante fijo t , la convolución (13.45) es igual a la integral sobre todas las τ del producto de las dos funciones de τ que componen su integrando. Puesto que el valor de toda integral real es el área bajo su integrando, podemos interpretar una integral de convolución como *el área que está bajo la curva del producto de sus integrandos como una función del parámetro t*. Con frecuencia, es útil visualizar el proceso de evaluar esta área fijando t y dibujando (contra τ) una gráfica de cada una de las dos funciones en el integrando, $v_i(t - \tau)$ y $h(\tau)$. Únicamente en las regiones τ donde sus valores no nulos se traslanan, el producto será no nulo, y por consiguiente, la contribución a la convolución, o área bajo la curva del producto. Esto a veces se conoce como “método gráfico” para evaluar una convolución, y se ilustra en el ejemplo final de esta sección.

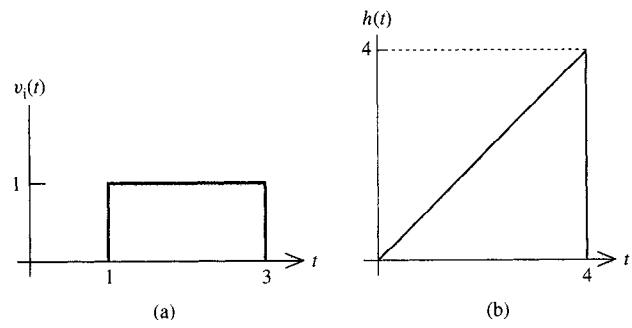


FIGURA 13.18 (a) $v_i(t)$; (b) $h(t)$.

Ejemplo 13.17

Calculemos la convolución (13.45) de las funciones $v_i(t)$ y $h(t)$ como se muestra en la figura 13.18. Graficaremos $v_i(t - \tau)$ en dos pasos. Primero invertiremos respecto al tiempo a $v_i(t)$ al girar su eje vertical como se muestra en la figura 13.19(a), renombrando a la variable independiente τ para obtener la gráfica de $v_i(-\tau)$. Luego desplácese esta función por t unidades del eje τ , deslizando la t unidades a la derecha, produciendo $v_i(t - \tau)$ como en la figura 13.19(b). En esa misma figura se incluye a $h(\tau)$ idéntica a $h(t)$ con t sustituida por τ .

Conforme t se incrementa, el pulso cuadrado $v_i(t - \tau)$ se mueve de izquierda a derecha sobre el eje τ . Podemos identificar varias regiones distintas dependiendo del tipo de traslape entre $v_i(t - \tau)$ y $h(\tau)$. La primera región corresponde a lugares del pulso cuadrado, es decir valores de t para los que el pulso está enteramente a la izquierda del rango no nulo de valores de $h(\tau)$. No hay traslapamiento para ninguna τ , de forma que el producto de estas dos funciones, y por consiguiente el área bajo la curva del producto es cero. La convolución $v_0(t) = 0$ para toda t en esta región, está marcada por el borde a la derecha del pulso cuadrado que está a la izquierda del origen en la figura 13.19(b), o

$$v_0(t) = 0, \quad t - 1 < 0 \quad (t < 1)$$

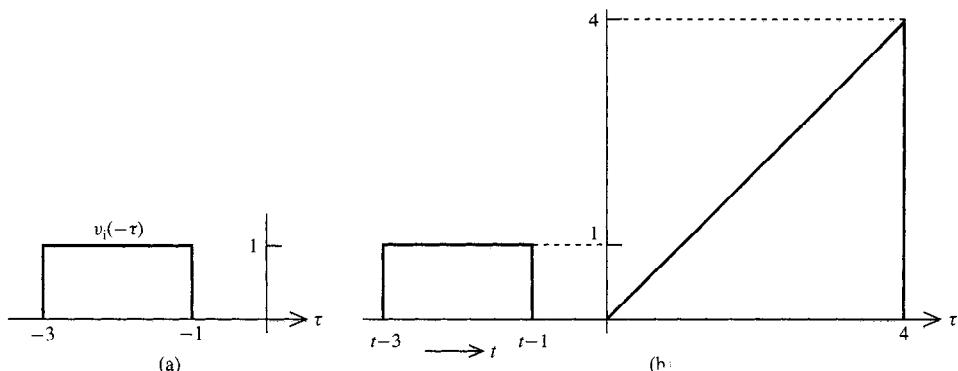


FIGURA 13.19 (a) $v_i(-\tau)$; (b) $v_i(t - \tau)$ y $h(\tau)$ contra τ .

En la siguiente región $t - 1 > 0$ de forma que hay traslapamiento, pero $t - 3 < 0$ de forma que el traslapamiento es parcial. En este caso, la curva del producto aparece en la figura 13.20(b), y su área triangular está dada por

$$v_o(t) = \frac{1}{2}(t - 1)^2, \quad 1 < t < 3$$

En la siguiente región, el traslapamiento está completo, con $t - 1 < 4$ pero $t - 3 > 0$. Ahí, el producto de las dos funciones es un trapezoide como en la figura 13.20(b), y el área bajo su curva de producto es

$$\text{Área} = ([t - 1] - [t - 3])(t - 3) + \frac{1}{2}([t - 1] - [t - 3])^2$$

$$\text{o} \quad v_o(t) = 2(t - 2), \quad 3 < t < 5$$

Conforme el extremo derecho del pulso cuadrado se mueve más allá del triángulo $h(\tau)$, nuevamente el traslapamiento es parcial, y el producto es el trapezoide

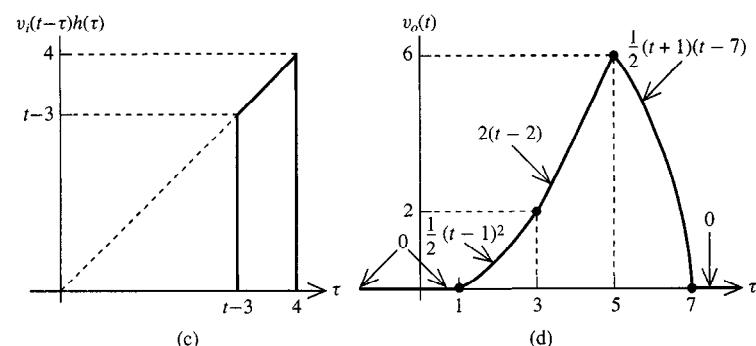
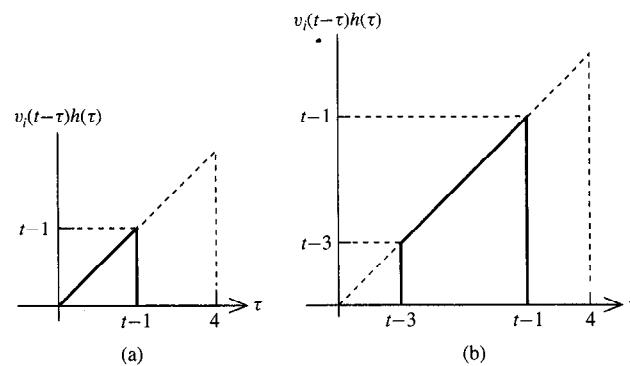


FIGURA 13.20 (a) Integrando para la región $1 < t < 3$; (b) integrando para la región $3 < t < 5$; (c) integrando para la región $5 < t < 7$; (d) convolución $v_o(t)$ para todas las regiones.

de la figura 13.20(c), de forma que para $t - 1 > 4$ pero $t - 3 < 4$,

$$\text{Área} = (4 - [t - 3])(t - 3) + \frac{1}{2}(4 - [t - 3])^2$$

$$\text{o} \quad v_o(t) = -\frac{1}{2}(t + 1)(t - 7), \quad 5 < t < 7$$

Finalmente, para $t - 3 > 4$, no queda ningún traslapamiento de forma que

$$v_o(t) = 0, \quad t > 7$$

La gráfica del resultado $v_o(t)$ aparece en la figura 13.20(d)

EJERCICIOS

13.6.1. Un circuito tiene una respuesta de impulso $h(t) = 2[u(t - 1) - u(t - 2)]$. Obtenga la respuesta de la condición inicial $v_o(t)$ a la entrada $v_i(t) = (t - 1)u(t)$ por convolución.

Respuesta 0 para $t < 1$; $2t - 5$ para $1 \leq t \leq 2$; $t^2 - 4t + 3$ para $t > 2$.

13.6.2. Suponga que dos copias del circuito del ejercicio 13.6.1 están conectadas en cascada, de forma que la salida de una se convierte en la entrada de la otra. Obtenga la respuesta de impulso de los circuitos en cascada.

Respuesta $4[r(t - 2) - 2r(t - 3) + r(t - 4)]$ donde $r(t)$ es la rampa unitaria

13.6.3. Verifique el resultado del ejemplo 13.16 obteniendo $\mathbf{V}_2(s)$ de la función de transferencia $\mathbf{H}(s) = 3/(s + 8)$. ¿Cuál es la fuente $\mathbf{V}_s(s)$ requerida?

Respuesta

$$\mathbf{V}_s(s) = \frac{1 - e^{-2(s+1)}}{s + 1}$$

RESUMEN

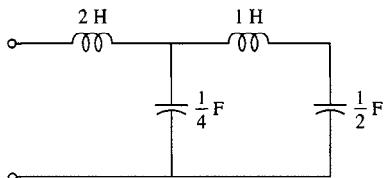
En el capítulo 8 vimos que el uso de fasores simplifica en gran medida el análisis de circuitos eléctricos donde sean aplicables, pero están restringidos a obtener la respuesta forzada en circuitos sinusoidales. Aquí podemos ver que con el dominio- s obtenemos los mismos beneficios, pero es aplicable a toda clase de problemas de circuitos, forzados o no forzados, sean transitorios o en estado estable.

- LVK, LCK y la Ley de Ohm pasan intactas del dominio del tiempo al dominio- s .
- La impedancia $\mathbf{Z}(s)$ de un elemento o subcircuito RLC es la proporción de sus voltajes y corrientes en el dominio- s cuando todas las condiciones iniciales son cero.
- La impedancia de los elementos RLC son R , sL y $1/sC$, respectivamente.
- El circuito en el dominio- s es el diagrama del circuito original con los elementos RLC marcados por impedancia y fuentes independientes marcadas por sus transformadas.

- El circuito del dominio-s puede analizarse como si fuera un circuito resistivo dc, con la impedancia tratada como resistencia, y las funciones de fuente en el dominio-s tratadas como constantes.
- Las funciones de transferencia especifican la proporción de dos variables de circuito en el dominio-s, cuando todas las condiciones iniciales son cero.
- Los circuitos estables tienen todos sus polos en el semiplano izquierdo.
- Pueden obtenerse las funciones de transferencia resolviendo el circuito en el dominio-s para la variable de salida en términos de la variable de entrada, y luego dividiendo.
- Los teoremas de valor inicial y final nos permiten determinar los valores inicial ($t = 0+$) y final ($t = \infty$) de una función de tiempo a partir de su transformada, sin necesidad de calcular la transformada inversa.
- La respuesta forzada de cualquier subcicuito es la convolución de la respuesta de impulso y la entrada. La respuesta de impulso es la transformada inversa de la función de transferencia.

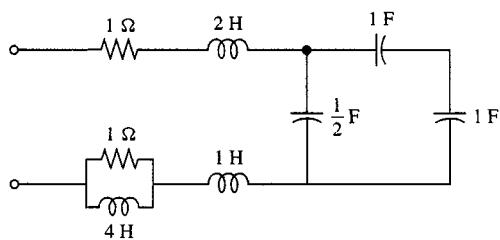
PROBLEMAS

13.1. Obtenga la impedancia equivalente $Z(s)$



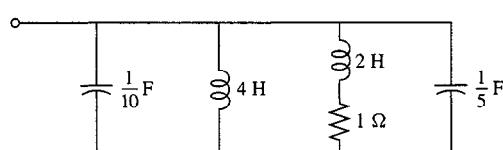
PROBLEMA P13.1

13.2. Obtenga la impedancia equivalente $Z(s)$



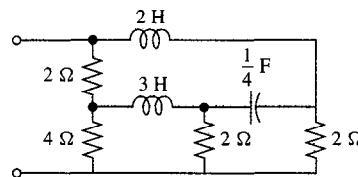
PROBLEMA P13.2

13.3. Obtenga la admitancia equivalente $Y(s)$



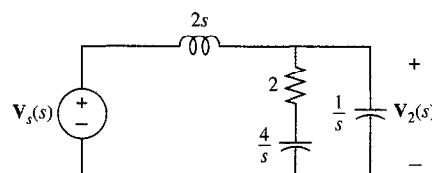
PROBLEMA P13.3

13.4. Obtenga la admitancia equivalente $Y(s)$



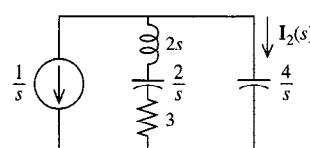
PROBLEMA P13.4

13.5. Obtenga $V_2(s)$ mediante división de voltaje. Suponga que todas las CI = 0.



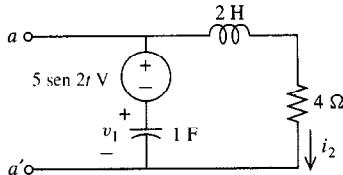
PROBLEMA P13.5

13.6. Obtenga $I_2(s)$ mediante división de corrientes. Suponga que todas las CI = 0.



PROBLEMA P13.6

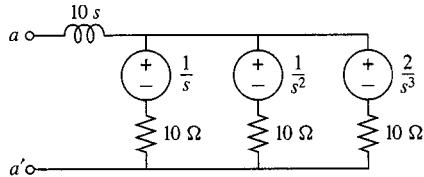
- 13.7.** Obtenga todos los equivalentes de Thevenin y Norton en el dominio- s , suponiendo $v_1(0-) = i_2(0-) = 0$.



PROBLEMA P13.7

- 13.8.** Repita el problema 13.7 para el caso $v_1(0-) = 2$ V e $i_2(0-) = -1$ A.

- 13.9.** Obtenga todos los equivalentes de Thevenin y Norton en el dominio- s suponiendo $CI = 0$.



PROBLEMA P13.9

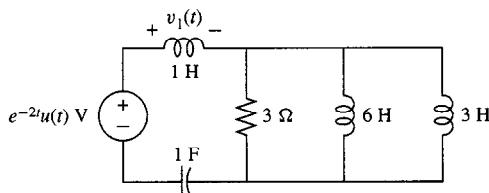
- 13.10.** Obtenga una subred RLC de dos terminales para la que $Z(s) = (s^2 + 7s + 3)/s$

- 13.11.** Obtenga una subred RLC de dos terminales para la que $Z(s) = (s^2 + s + 2)/(s^2 + 2)$.

- 13.12.** Obtenga una subred RLC de dos terminales para la que $Y(s) = 2 + (2/s) + (s/2) + [2/(s + 2)]$.

- 13.13.** Una cierta subred de dos terminales tiene un voltaje de circuito abierto $V_{oc}(s) = 3/(2s + 3)$ y una corriente en circuito cerrado $I_{sc}(s) = 1/(2s + 2)$. Dibuje la corriente en el dominio del tiempo, especificando todos los valores de elemento y fuente. ¿Hay más de una corriente de este tipo? Explique.

- 13.14.** Obtenga $v_1(t)$ suponiendo que todas las $CI = 0$ en $t = 0-$.

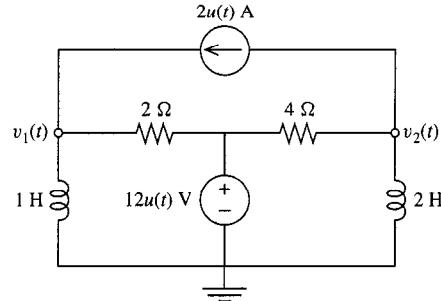


PROBLEMA P13.14

- 13.15.** Determine un lugar de los polos de $Z(s)$ y $Y(s)$ para todas las combinaciones de dos elementos en serie-paralelo de

los elementos RLC . Si R , L y C son todos positivos, demuestre que son todos polos reales negativos excepto los casos puramente L .

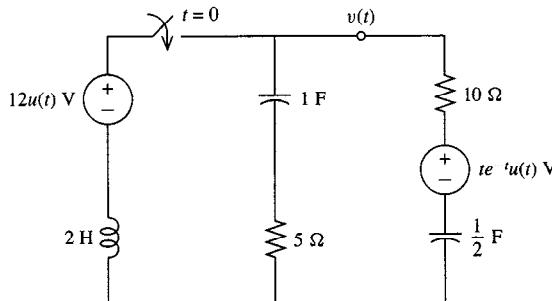
- 13.16.** Dibuje los circuitos en el dominio- s . Encuentre los voltajes de nodo $V_1(s)$, $V_2(s)$.



PROBLEMA P13.16

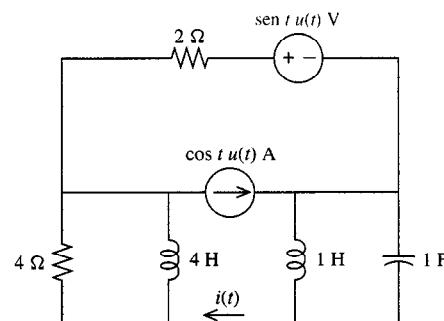
- 13.17.** Repita el problema 13.16 para el caso que la función de fuente de voltaje es sustituida por 12 V.

- 13.18.** Dibuje el circuito en el dominio- s . Combinando elementos en serie, escriba y resuelva una sola ecuación de nodo para $V(s)$.



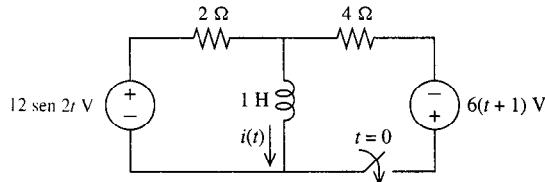
PROBLEMA P13.18

- 13.19.** Dibuje el circuito en el dominio- s . Combinando elementos paralelos, escriba y resuelva una sola ecuación de malla para $I(s)$.



PROBLEMA P13.19

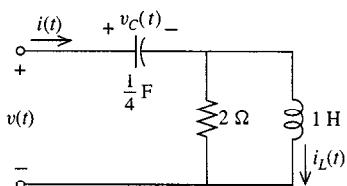
13.20. Obtenga $i(t)$, $t > 0$.



PROBLEMA P13.20

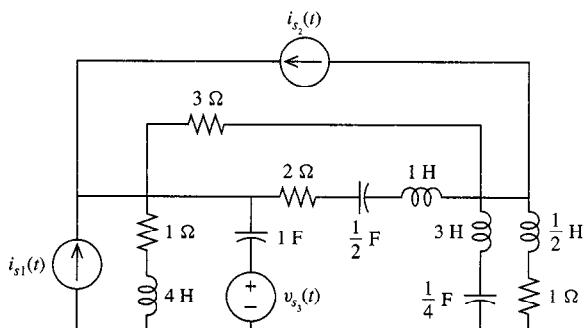
13.21. Repita el problema 13.20 si el interruptor se abre, en lugar de cerrarse en $t = 0$.

13.22. Si un escalón unitario de corriente $i(t) = u(t)$ es inyectado en el circuito, el voltaje para $t > 0$ resulta ser $v(t) = 4t + 3 - 6e^{-2t}$, ¿cuáles son las condiciones iniciales $v_c(0-)$, $i_L(0-)$?



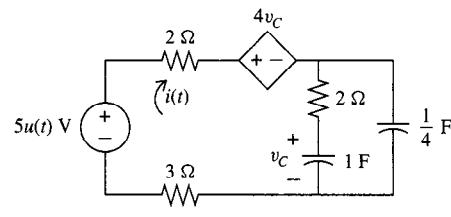
PROBLEMA P13.22

13.23. Utilizando equivalentes en serie y en paralelo del dominio- s , reduzca este circuito a uno con dos corrientes de malla desconocidas. Escriba las ecuaciones de malla en forma de vector-matriz. Especifique las direcciones de referencia para frecuencias de malla y condiciones iniciales.



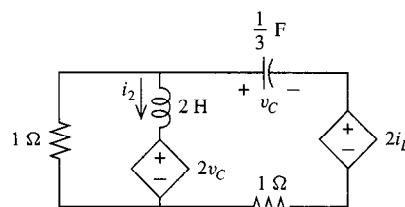
PROBLEMA P13.23

13.24. Obtenga $i(t)$, $t > 0$.



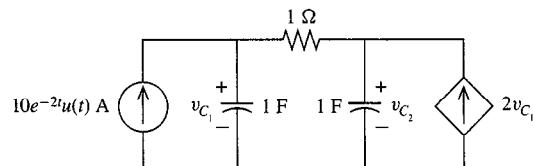
PROBLEMA P13.24

13.25. Obtenga $v_c(t)$, $t > 0$, si $v_c(0-) = 1$ e $i_L(0-) = 0$ A.



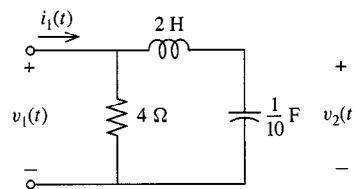
PROBLEMA P13.25

13.26. Obtenga $v_{c_1}(t)$ y $v_{c_2}(t)$ para $t > 0$.



PROBLEMA P13.26

13.27. Obtenga la función de transferencia $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_1(s)/\mathbf{I}(s)$.



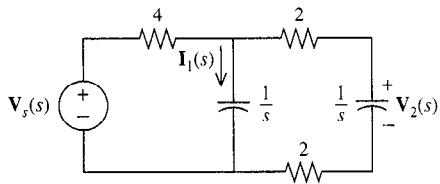
PROBLEMA P13.27

13.28. Repita el problema 13.27 para la función de transferencia $\mathbf{V}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)$.

13.29. Repita el problema 13.27 para la función de transferencia $\mathbf{V}_2(s)/\mathbf{I}_1(s)$.

13.30. Obtenga $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_2(s)/\mathbf{V}_s(s)$ para el circuito de problema 13.5.

13.31. Obtenga $\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}_1(s)/\mathbf{V}_s(s)$.

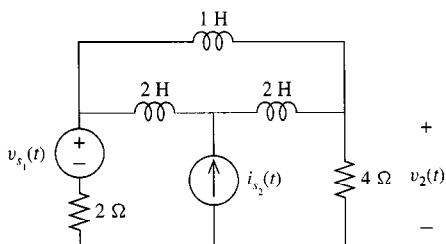


PROBLEMA P13.31

13.32. Obtenga $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_2(s)/\mathbf{V}_s(s)$; y obtenga la respuesta de uso unitario $h(t)$.

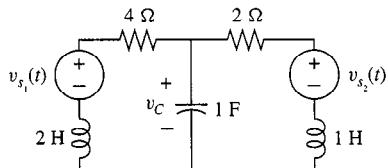
13.33. Obtenga $i_1(t)$ en el problema 13.31 si $v_s(t) = 15u(t)$ V.

13.34. Obtenga las funciones de transferencia entre la salida $v_2(t)$ y las entradas $v_{s_1}(t)$ [$\mathbf{H}_1(s)$], $i_{s_2}(t)$ [$\mathbf{H}_2(s)$].



PROBLEMA P13.34

13.35. Obtenga las funciones de transferencia $H_1(s)$ y $H_2(s)$ entre la salida $V_c(t)$ y las entradas $V_{s_1}(t)$ y $V_{s_2}(t)$. Utilícelas para obtener la respuesta en condición inicial cero $V_c(t)$ cuando $v_{s_1}(t) = 10$ V y $v_{s_2}(t) = e^{-3t}$ V.



PROBLEMA P13.35

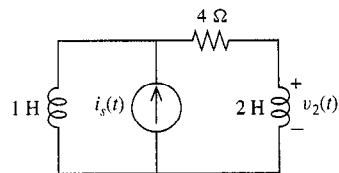
13.36. Dibuje un circuito que contenga dos fuentes de corriente independientes $i_{s_1}(t)$, $i_{s_2}(t)$ que satisfagan la ecuación

$$\mathbf{V}(s) = \frac{2}{s+3} \mathbf{I}_{s_1}(s) + \left[\frac{1}{s} + \frac{s}{2} \right] \mathbf{I}_{s_2}(s)$$

cuando todas las CI = 0. Marque $v(t)$ en su circuito.

13.37. Repita el problema 13.35 si $v_{s_1}(t) = te^{-t}$ V, $v_{s_2}(t) = 0$, las corrientes conductivas iniciales son ambas cero, y $v_c(0-) = +12$ V.

13.38. Obtenga la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ entre la entrada $i_s(t)$ y la salida $v_2(t)$.

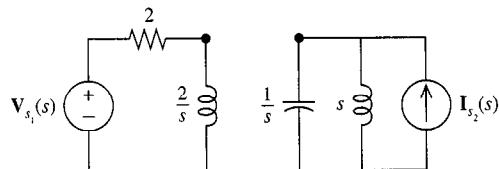


PROBLEMA P13.38

13.39. En cierto circuito, el cero en la salida de condición inicial $v_0(t)$ para $t > 0$ resulta ser $1 + 3te^{-2t} - e^{-2t}$ cuando la entrada es $v_i(t) = 5u(t)$. ¿Qué es $\mathbf{H}(s)$? ¿Cuál es la respuesta forzada $v_0(t)$, $t > 0$, para $v_i(t) = e^{-5t} u(t)$?

13.40. En el circuito descrito en el problema 13.39, hay un solo elemento de almacenaje, un capacitor. ¿Cuando $v_c(0-) = 1$ V y la entrada $v_i(t) = 0$, la salida se obtiene como $(t-1)e^{-2t}$ V. Utilizando también los datos dados en el problema 13.39, obtenga $v_o(t)$, $t > 0$, si $v_i(t) = 5 \operatorname{sen} t$ y $v_c(0-) = 4$ V.

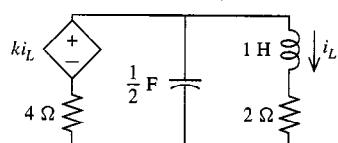
13.41. Obtenga todos los polos del circuito. ¿Este sistema es estable?



PROBLEMA P13.41

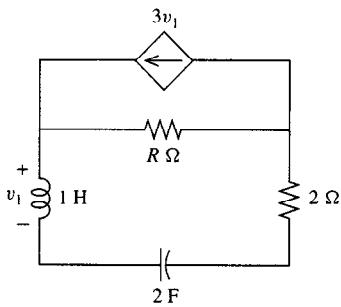
13.42. Un circuito de una sola trayectoria cerrada que contiene un capacitor y un inductor no es estable. Sin embargo, sabemos que para cualquier condición inicial, un circuito físico hecho conectando un capacitor y un inductor tendrán corrientes y voltajes que eventualmente decaerán a cero. Demuestre que modelando los L y C físicos sumando una resistencia en serie o en paralelo con cada uno, la conexión de los dos elementos físicos se hace estable.

13.43. Obtenga el rango de valores de k para el que este circuito es estable.



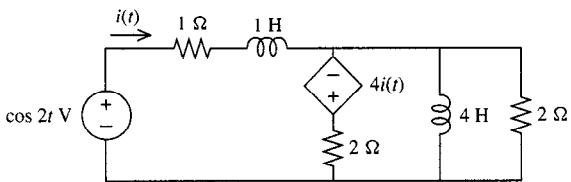
PROBLEMA P13.43

- 13.44.** Obtenga un valor para R para el que este circuito es estable, y otro para el que sea inestable. Suponga $R \geq 0$.



PROBLEMA P13.44

- 13.45.** Obtenga los polos del circuito. ¿Es estable este circuito?



PROBLEMA P13.45

- 13.46.** Obtenga los polos del circuito del problema 13.26 y determine si el circuito es estable.

- 13.47.** Obtenga la respuesta en estado estable ac del circuito del problema 13.43. Especifique el rango de valores de k para el que existe el estado estable ac.

- 13.48.** Obtenga la respuesta en estado estable ac $i_1(t)$, $v_2(t)$, del circuito del problema 13.31 si $V_s(s) = 1/(s^2 + 1)$.

- 13.49.** Si un circuito es estable, su respuesta de impulso debe de caer a cero conforme $t \rightarrow \infty$. Demuestre por qué esto es verdadero.

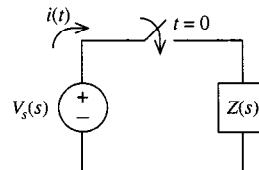
- 13.50.** Si un circuito no es estable, su respuesta de impulso aún puede decaer a cero conforme $t \rightarrow \infty$. Dé un ejemplo de tal circuito.

- 13.51.** $F(s) = (3s + 1)/(s^2 + 7s + 6)$. Utilice los teoremas de valor final e inicial para obtener $f(0+)$ y $f(\infty)$, y verifique obteniendo $f(t)$ mediante fracciones parciales.

- 13.52.** $F(s) = -s^2/(s + 1)^3$. Utilice los teoremas de valor inicial y final para obtener $f(0+)$ y $f(\infty)$, y verifíquelo obteniendo $f(t)$ mediante fracciones parciales.

- 13.53.** Obtenga $v(0+)$ en el problema 13.18 mediante el teorema de valor inicial.

- 13.54.** Suponga que $Z(s)$ es una función racional. ¿Bajo qué condiciones de $Z(s)$ la corriente $i(t)$, será continua en $t = 0$?

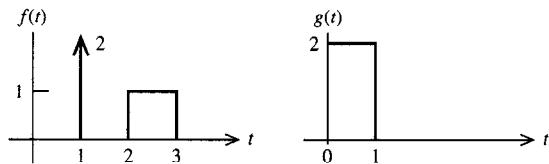


PROBLEMA P13.54

- 13.55.** Un circuito con respuesta de impulso $h(t) = (3 + e^{-t})u(t)$ tiene una respuesta forzada $v_0(t) = te^{-t}u(t)$ a una cierta entrada $v_i(t)$. Obtenga $v_i(t)$.

- 13.56.** Obtenga la convolución de $f(t) = -2u(t)$ con $g(t) = e^{-t}u(t - 1)$.

- 13.57.** Obtenga la convolución de las funciones de tiempo $f(t)$ y $g(t)$ que se muestran.

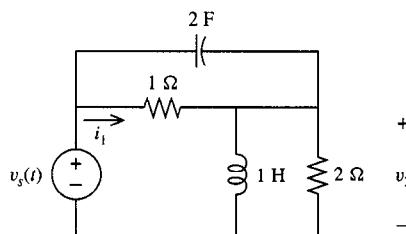


PROBLEMA P13.57

- 13.58.** Demuestra la convolución de $df(t)/dt$ y $g(t)$ son igual a la derivada de la convolución de $f(t)$ y $g(t)$.

- 13.59.** Determine la respuesta de escalón unitario $s(t) = v_c(t)$ a la entrada $v(t) = u(t)$ en el circuito del problema 13.22. Use la convolución para calcular $s(t)$.

- 13.60.** Obtenga la función de transferencia $H(s)$ con $v_2(t)$ como salida y $i_1(t)$ como entrada (Sugerencia: obtenga ambos en términos de $V_s(s)$; luego divida). Determine la respuesta de impulso $h(t)$ y la respuesta forzada a la entrada $i_1(t) = 2(1 - e^{-t})$.



PROBLEMA P13.60

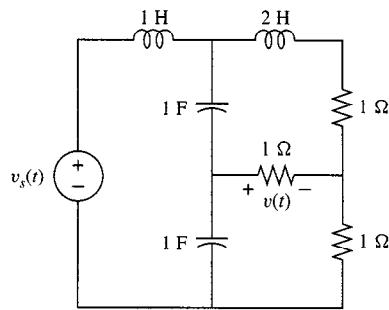
Problemas más complejos

13.61. Obtenga una subred de dos terminales con impedancia $Z(s) = (s^3 + 3s^2 + 2s + 7)/(s^2 + 3s + 2)$. *Sugerencia:* utilice fracciones parciales.

13.62. Reemplace la fuente de corriente independiente en el circuito del problema 13.16 por una fuente de corriente controlada por voltaje (en la misma dirección de referencia) de valor $kv_1(t)$ A. ¿Para qué valores del parámetro real k es estable este circuito?

13.63. Determine los polos del circuito del problema 13.19 utilizando análisis nodal. Confírmelo utilizando análisis de malla.

13.64. Obtenga la respuesta de impulso $h(t)$ con entrada $v_s(t)$, salida $v(t)$.



PROBLEMA P13.64

13.65. Dibuje un circuito cuya respuesta de impulso es $h(t) = \delta'(t) + e^{-t} u(t)$, especificando qué voltaje de corriente es la salida, y utilizando una fuente de voltaje independiente como entrada. Repítase utilizando una fuente de corriente independiente como entrada.

Respuesta de frecuencia



Heinrich Rudolf Hertz
1857–1894

Eso no fue un logro cualquiera. (Acerca de su verificación de las teorías de Maxwell.)

Heinrich Hertz

El desarrollo del radio, la televisión y el radar, fue iniciado por el físico alemán Heinrich Rudolf Hertz al descubrir las ondas electromagnéticas entre 1886 y 1888. Su obra confirmó la teoría de 1864 del gran físico inglés James Clerk Maxwell de la existencia de tales ondas.

Hertz nació en Hamburgo, primogénito de cinco hijos de una familia prominente y próspera. Luego de graduarse de la preparatoria, pasó un año con una empresa de ingeniería en Frankfurt, un año en el servicio militar voluntario en Berlín, y luego un año en la Universidad de Munich. Finalmente ingresó a la Universidad de Berlín como estudiante del gran físico Hermann von Helmholtz. Posteriormente, Hertz recibió su doctorado y fue profesor en Karlsruhe al iniciar su búsqueda de las ondas electromagnéticas. Fue ahí donde conoció a Elizabeth Doll, la hija de uno de sus colegas profesores, y después de un cortejo de tres meses se casaron. Apenas unos cuantos años después de su famoso descubrimiento, Hertz murió en el día de Año Nuevo de 1894 de un tumor óseo, a la edad de 37 años. Sus investigaciones abrieron paso a la moderna era de la comunicación, y en su honor se nombró Hertz a la unidad de la frecuencia (ciclos por segundo).

Contenido del capítulo

- **14.1** Función de respuesta de frecuencia
- **14.2** Escala del decibel
- **14.3** Gráficas de ganancia de Bode (amplitud)
- **14.4** Resonancia
- **14.5** Respuesta de frecuencia de op amps
- **14.6** Filtros
- **14.7** Diseño de filtros activos
- **14.8** Escalamiento
- **14.9** SPICE y respuesta de frecuencia
- **14.10** SPICE y diseño de filtros activos
- Resumen
- Problemas



Puesto que las corrientes y voltajes sinusoidales se producen fácilmente, una forma conveniente de probar un circuito lineal es inyectar un sinusoide como entrada y observar la respuesta en estado estable sinusoidal. Cambiar la fase o amplitud del sinusoide no significará una nueva prueba al circuito, dado que la respuesta predeciblemente se multiplicará con la amplitud y desplazamiento de fase junto con la entrada. Sin embargo, en cada frecuencia posible de la entrada, la respuesta del circuito, tanto en la amplitud como la fase, en general será distinta. Estas variaciones de respuesta con la frecuencia forman la *respuesta de frecuencia* del circuito.

Quizá estamos familiarizados con algunos aspectos de la respuesta de frecuencia, de la forma en que se anuncia el equipo de audio. Una bocina cuya “amplitud de banda de 3-dB” es, digamos, entre 50 Hz y 20 kHz mejor que una bocina con amplitud de banda de 200 Hz a 5 kHz, puesto que reproducirá mejor las frecuencias graves y agudas. En este capítulo presentaremos el concepto de respuesta de frecuencia, utilizándola primero para análisis, y luego como el principal descriptor de lo que “hace” un circuito lineal, la función para la que se diseñó, y la calidad con que realiza esa función. La respuesta de frecuencia es el nexo crítico entre el análisis y el diseño de circuitos lineales.

Primero introduciremos la función de respuesta de frecuencia $H(j\omega)$, y demostraremos su estrecha relación con la función de transferencia $H(s)$ del capítulo 13. Se define la escala en decibeles, una forma conveniente de medir números no negativos, y es utilizada para producir gráficas de ganancia de Bode, que describen los cambios en la proporción de amplificación de la entrada-salida (ganancia) respecto a la frecuencia. Utilizando estas herramientas, a continuación se investiga la respuesta de frecuencia de los circuitos resonantes y de los op amps, y se estudia la muy importante clase de circuitos selectivos de frecuencia llamados filtros. El presente capítulo concluye con un procedimiento de diseño para filtros activos (aquellos que contienen op amps) basados en su respuesta de frecuencia deseada, y el uso de SPICE como un auxiliar para obtener una solución de diseño.

La función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ nos permite calcular la salida en el dominio-s para cualquier entrada mediante la ecuación básica de entrada-salida (13.8), que se repite aquí.

$$\mathbf{V}_o(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s), \quad (\text{todas las CI} = 0) \quad (14.1)$$

Aplicaremos esta relación simple pero muy general al análisis fasorial, que fue presentado por primera vez en el capítulo 8 en el contexto del estado estable ac. Supongamos que las fuentes independientes en el dominio del tiempo en un circuito son, cada una, exponenciales complejas $\mathbf{V}_i e^{j\omega t}$ en la misma frecuencia ω , como se requiere para el análisis fasorial. \mathbf{V}_i es el fasor asociado con la fuente $\mathbf{V}_i e^{j\omega t}$. Puesto que

$$L(\mathbf{V}_i e^{j\omega t}) = \frac{\mathbf{V}_i}{s - j\omega}$$

entonces

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i}{s - j\omega} \quad (14.2)$$

Puesto que los circuitos que consideraremos contienen únicamente elementos y fuentes *RLC* fijos, $\mathbf{H}(s)$ será una función racional

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \frac{\mathbf{N}(s)}{(s - p_1)^{r_1} \dots (s - p_n)^{r_n}} \quad (14.3)$$

donde las p_i son polos del circuito, como se discutió en la sección 13.4. Entonces

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{\mathbf{N}(s)\mathbf{V}_i}{(s - p_1)^{r_1} \dots (s - p_n)^{r_n} (s - j\omega)} \quad (14.4)$$

Suponiendo que no hay polos en el eje $j\omega$, $\operatorname{Re} p_i \neq 0$ para toda $i = 1, \dots, n$, y por expansión en fracciones parciales

$$\mathbf{V}_o(s) = \left[\frac{A}{(s - p_1)^{r_1}} + \frac{B}{(s - p_1)^{r_1-1}} + \dots + \frac{Q}{s - p_n} \right] + \frac{\mathbf{R}}{s - j\omega} \quad (14.5)$$

donde

$$\mathbf{R} = (s - j\omega)\mathbf{V}_o(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (14.6)$$

que, por (14.4), resulta en

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{V}_i \quad (14.7)$$

Examinando la ecuación (14.5), $v_o(t)$, en general, contendrá el término $\mathbf{R}e^{j\omega t}$ junto con términos debidos a los polos del circuito que aparecen entre paréntesis. Recuérdese que el análisis fasorial es aplicable únicamente en circuitos en donde todas sus corrientes y voltajes son de la forma $\mathbf{R}e^{j\omega t}$. Este es el caso en (14.4) si el circuito es estable, y si únicamente consideramos la respuesta en estado estable $v_o(t)$. La estabilidad, señalada por las partes reales negativas de todos los polos p_i del circuito, garantizan que la transformada inversa de cada término en (14.4) decae a cero cuando t tiende a infinito. Esto deja, en el estado estable, únicamente el término final, que por (14.5) y (14.7) es respuesta la forzada

$$v_o(t) = \mathbf{L}^{-1} \frac{\mathbf{H}(j\omega)\mathbf{V}_i}{s - j\omega} = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{V}_i e^{j\omega t} \quad (14.8)$$

Por definición, el fasor \mathbf{V}_o asociado con esta salida $v_o(t)$ es la cantidad que multiplica $e^{j\omega t}$, o, por (14.8),

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{V}_i \quad (14.9)$$

$\mathbf{H}(j\omega)$, la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ donde se sustituye s por $j\omega$, multiplica el fasor de entrada para dar el fasor de salida. Definimos $\mathbf{H}(j\omega)$ como la *función de respuesta de frecuencia*. Entonces (14.9) a la que nos referiremos como la *ecuación de respuesta de frecuencia*, asegura que para *circuitos estables*, el fasor de salida es el producto del fasor de entrada y la función de respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$. Dado $\mathbf{H}(s)$, o equivalentemente $\mathbf{H}(j\omega)$, podemos determinar la salida en estado estable sinusoidal de cualquier circuito lineal estable en cualquier frecuencia. Nuestra restricción en (14.5) de que no haya polos en el eje $j\omega$ no limita este resultado, puesto que estos sistemas no son estables y por consiguiente no tienen estado estable.

Ejemplo 14.1

Considérese un circuito con función de transferencia

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 1}$$

Obtenga la salida en estado estable $v_o(t)$ si la salida $v_i(t) = 12 \cos(2t - 30^\circ)$. El fasor de entrada es $\mathbf{V}_i = 12\angle -30^\circ$, y por la ecuación de respuesta de frecuencia (14.9),

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{H}(j2)\mathbf{V}_i = \frac{2(j2)}{(j2)^2 + 4(j2) + 1} (12\angle -30^\circ)$$

Evaluando en una calculadora,

$$\mathbf{V}_o = 5.62\angle -50.6^\circ$$

Por consiguiente

$$v_o(t) = 5.62 \cos(2t - 50.6^\circ) \quad (14.10)$$

Ejemplo 14.2

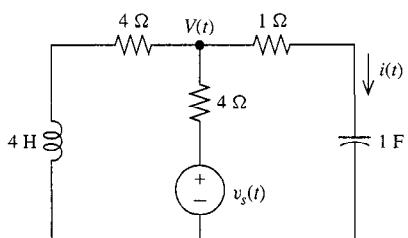


FIGURA 14.1 Circuito para el ejemplo 14.2.

Obtenga la respuesta forzada $i(t)$ si $v_s(t) = 6 \cos t$ V. Determinaremos $\mathbf{H}(s)$ y sustituiremos s por $j\omega$, $\omega = 1$ rad/s, para evaluar la función de respuesta de frecuencia para este circuito que opera a esta frecuencia. La ecuación nodal en el dominio-s en el nodo marcado $V(t)$ en la figura 14.1 es

$$\frac{1}{4s+4}\mathbf{V}(s) + \frac{s}{s+1}\mathbf{V}(s) + \frac{1}{4}[\mathbf{V}(s) - \mathbf{V}_s(s)] = 0$$

y resolviendo

$$\mathbf{V}(s) = \frac{s+1}{5s+2}\mathbf{V}_s(s) \quad (14.11)$$

La salida requerida $I(s)$ está relacionada a $V(s)$ mediante la admittance en serie

$$\mathbf{I}(s) = \frac{s}{s+1}\mathbf{V}(s) = \frac{s}{5s+2}\mathbf{V}_s(s)$$

Por consiguiente, la función de transferencia $\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}(s)/\mathbf{V}_s(s)$ es

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s}{5s+2}$$

La frecuencia de la fuente es $\omega = 1$ rad/s, el fasor de la fuente es $\mathbf{V}_s = 6\angle 0$ V, y, por la ecuación de respuesta de frecuencia, el fasor de salida \mathbf{I} es igual al fasor de entrada multiplicado por la función de respuesta de frecuencia evaluada en $\omega = 1$, o

$$\mathbf{I} = \mathbf{H}(j1)\mathbf{V}_s = \frac{j1}{5(j1) + 2} 6\angle 0 \text{ A}$$

Utilizando nuevamente una calculadora,

$$\mathbf{I} = (0.186\angle 21.8^\circ)(6\angle 0) = 1.12\angle 21.8^\circ \text{ A}$$

donde

$$i(t) = 1.12 \cos(t + 21.8^\circ) \text{ A}$$

que es la corriente en estado estable requerida.

Tomando magnitudes en ambos miembros de la ecuación de respuesta de frecuencia (14.9)

$$|\mathbf{V}_o| = |\mathbf{H}(j\omega)| |\mathbf{V}_i| \quad (14.12)$$

Puesto que la magnitud de un fasor es la amplitud del sinusoides correspondiente, (14.12) sugiere que la *proporción por la que la amplitud del sinusoides de salida excede el sinusoides de entrada, está dado por la magnitud de la función de respuesta de frecuencia*. Por consiguiente $|\mathbf{H}(j\omega)|$ se conoce, lo que es muy razonable, como la ganancia del circuito. De manera similar, tomando ángulos en ambos miembros de (14.9)

$$\angle \mathbf{V}_o = \angle \mathbf{H}(j\omega) + \angle \mathbf{V}_i \quad (14.13)$$

Puesto que el ángulo de un fasor es idéntico al ángulo del sinusoides correspondiente, la *cantidad por la que el ángulo de fase de la salida excede el ángulo de fase en la entrada está dado por el ángulo de la función de respuesta de frecuencia*. Esta diferencia de fase entre la entrada y la salida $\angle \mathbf{H}(j\omega)$ se conoce como *desplazamiento de fase*. Tomando en conjunto los desplazamientos de ganancia y de fase, ambas funciones de frecuencia ω , nos dicen la forma en que la amplitud y el ángulo de fase de cualquier sinusoides de entrada que se modifica al pasar a través del circuito de la entrada a la salida. De este modo, *dada la ganancia y desplazamiento de fase, o de manera equivalente dada la función de respuesta de frecuencia $H(j\omega)$, obtenemos una descripción completa de la forma en que el circuito responde a entradas de cualquier frecuencia*. Por ello, $\mathbf{H}(j\omega)$ se conoce como función de respuesta de frecuencia.

Ejemplo 14.3

Grafique la ganancia y desplazamiento de fase de circuito en la figura 14.2. La salida es $v(t)$. Por división de voltajes,

$$\mathbf{V}(s) = \frac{1/(sC)}{R + [1/(sC)]} \mathbf{V}_s(s) = \frac{1/(RC)}{s + [1/(RC)]} \mathbf{V}_s(s)$$

La función de transferencia es

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{V}_s(s)} = \frac{1/(RC)}{s + 1/(RC)}$$

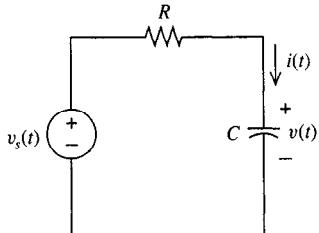


FIGURA 14.2 Circuito para el ejemplo 14.3.

El circuito tiene un polo único en $s = -1/(RC)$, de forma que es estable. Podemos sustituir s por $j\omega$ y determinar el comportamiento en estado estable de este circuito mediante su función de respuesta $\mathbf{H}(j\omega)$. La ganancia como función de frecuencia está dada por

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{|1/(RC)|}{|j\omega + [1/(RC)]|} = \frac{1/(RC)}{\sqrt{\omega^2 + [1/(RC)]^2}} \quad (14.14)$$

que se muestra en la figura 14.3(a). Nótese que la ganancia en dc es la unidad y declina al aumentar la frecuencia. La impedancia del capacitor es infinito en dc, de forma que el divisor de voltaje favorecerá completamente al capacitor en $\omega = 0$. Su impedancia declina a cero al aumentar la frecuencia, de forma que la proporción del divisor de voltaje se desplaza de manera estable hacia la resistencia y se aleja de C conforme aumenta la frecuencia. Estos hechos son consistentes con la ganancia que se muestra en la figura 14.3(a). El desplazamiento de fase, que aparece en la figura 14.3(b), está dado por

$$\angle \mathbf{H}(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC) \quad (14.15)$$

La salida está retardada de la entrada por un desplazamiento creciente de fase conforme aumenta la frecuencia. Nótese que, puesto que en dc la entrada y la salida son iguales (el capacitor es un circuito abierto), es congruente que el desplazamiento de fase en dc sea cero.

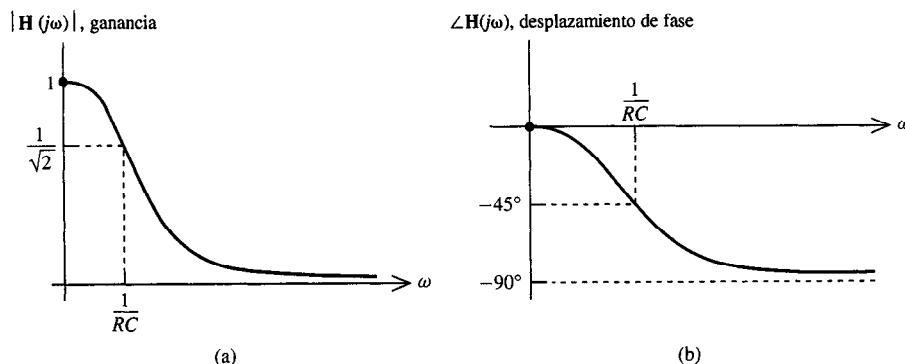


FIGURA 14.3 (a) Ganancia contra ω ; (b) desplazamiento de fase contra ω .

La ecuación de respuesta de frecuencia (14.9) es una relación fundamental que relaciona los sinusoides de entrada y los resultantes sinusoides de salida en estado estable. Se aplica a circuitos estables, aquellos que tienen garantizado un estado estable. Los circuitos inestables nunca se “asientan” a condiciones en estado estable, y por consiguiente su ganancia en estado estable o desplazamiento de fase no tienen sentido. Aun en el caso inestable (14.9) tiene interpretaciones útiles. Puesto que (14.6) es una respuesta forzada del sistema sin importar los valores de A, B, \dots, Q podemos fijar todos estos numeradores a cero, dejando únicamente el término deducido en (14.9). De este modo, la ecuación de respuesta de frecuencia es válida para la respuesta *forzada* en cualquier sistema, sea estable o no, y la respuesta en *estado estable* de los sistemas estables. Puesto que la respuesta forzada puede ser una parte despreciable de la respuesta total para sistemas inestables, lo que buscaremos será el caso de circuitos estables y en estado estable.

EJERCICIOS

14.1.1. Para $H(s) = (s + 1)/(s^2 + s + 3)$, ¿Cuál es la ganancia y desplazamiento de fase en $\omega = 2 \text{ rad/s}$? ¿en $f = 1 \text{ Hz}$?

Respuesta 1.00, -53.1° , 0.172, -89.3°

14.1.2. Para $H(s) = -2/(s + 4)$, obtenga todas las frecuencias $\omega > 0$ a las que la amplitud de la salida es $\frac{1}{2}$ cuando la amplitud de la entrada es 2. Repítase para el desplazamiento de fase $+114^\circ$.

Respuesta Una ω para cada uno: 6.93 rad/s, 8.98 rad/s.

14.1.3. En el circuito de la figura 14.2, si se define que la salida es el voltaje que pasa a través de la resistencia, obtenga la ganancia.

$$\text{Respuesta} \quad \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + [1/RC]^2}}$$

14.2 ESCALA DEL DECIBEL

El uso de una escala lineal para medir ganancias tiene sus limitaciones. Una de ellas es el reducido rango dinámico que deja disponible para graficar. No podemos distinguir simultáneamente el comportamiento detallado de la curva de ganancia cuando es muy alta y muy baja. En la figura 14.3(a), por ejemplo, no podemos elegir una escala lineal que nos permita determinar la frecuencia en donde la ganancia es, por ejemplo, 10% mayor que su valor en $\omega = 1/RC$ y otra ω cuya ganancia es 10% mayor que el valor mucho más pequeño en $100/RC$. En la línea base se pierde el detalle si multiplicamos para buscar detalles en otra parte.

Un problema relacionado con una escala lineal directa es que con mucha frecuencia nos interesan cambios *fraccionales* de magnitudes tales como ganancia, y no el cambio en sí. Por ejemplo, los experimentos con escuchas humanos demuestran que percibimos un sonido como significativamente más intenso que otro no cuando difiere sus intensidades por un valor fijo, sino cuando las proporciones de sus intensidades difieren por un valor fijo. Desearíamos una escala que mida, por ejemplo, cambios de 50% de ganancia entre dos frecuencias como desplazamientos iguales, sin importar su nivel absoluto.

La gráfica de proporciones iguales en desplazamientos iguales es una escala logarítmica. Si utilizamos una escala log, por ejemplo $Y = \log X$, para medir dos números X_1 y X_2 cuya proporción es $X_2/X_1 = R$, entonces su diferencia en esta escala es fija:

$$Y_2 - Y_1 = \log X_2 - \log X_1 = \log \frac{X_2}{X_1} = \log R$$

sin importar su valor real. De forma que números como $X_1 = 10^{10}$ y $X_2 = 10^{11}$ estarán desplazados en esta escala del mismo modo en que números como $X_1 = 10^{-4}$ y $X_2 = 10^{-3}$, y podemos distinguir simultáneamente estas fluctuaciones en una misma gráfica.

La escala más común utilizada para medir ganancia es una escala logarítmica conocida como *escala en decibeles*, que se define para los números reales positivos R por

$$R (\text{dB}) = 20 \log_{10} R \quad (14.16)$$

La ecuación (14.16) debe leerse como *el número R medido en decibeles es igual a 20 veces el logaritmo base 10 de R*. Históricamente, primero se tuvo el *bel*, definido originalmente por Alexander Graham Bell (1847-1922), el inventor del teléfono, como una medida de la proporción de dos potencias P_1 y P_2 .

$$\text{proporción de potencia (bels)} = \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (14.17)$$

De este modo, una resistencia que disipa 4 W de potencia opera a un nivel de potencia de 3 bels más que otra resistencia que disipa únicamente 4 mW. Posteriormente Bell decidió que esta escala era demasiado burda y la multiplicó por un factor de 10 para crear la escala de decibeles para medir potencias:

$$\text{proporción de potencia (dB)} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (14.18)$$

Con el fin de utilizar esta escala para medir la ganancia, nótese que la proporción de amplitudes de salida A_2 y A_1 producida por la misma entrada en dos frecuencias cuyas ganancias son $|\mathbf{H}(j\omega_2)|$ y $|\mathbf{H}(j\omega_1)|$ es

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{|\mathbf{H}(j\omega_2)|}{|\mathbf{H}(j\omega_1)|} \quad (14.19)$$

y de este modo la proporción de sus potencias P_2 y P_1 debe ser el cuadrado de las ganancias,

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{|\mathbf{H}(j\omega_2)|^2}{|\mathbf{H}(j\omega_1)|^2} \quad (14.20)$$

Luego, aplicando (14.20) a (14.18), obtenemos

$$\text{ganancia (dB)} = 10 \log 10 \frac{|\mathbf{H}(j\omega_2)|^2}{|\mathbf{H}(j\omega_1)|^2} \quad (14.21)$$

$$\text{ganancia (dB)} = 20 \log 10 \frac{|\mathbf{H}(j\omega_2)|}{|\mathbf{H}(j\omega_1)|} \quad (14.22)$$

que concuerda con nuestra definición (14.16) de la escala en decibeles.

Ejemplo 14.4

Grafiquemos la ganancia $|\mathbf{H}(j\omega)|$ del circuito del ejemplo anterior en decibeles. Por (14.14),

$$|\mathbf{H}(j\omega)| \text{ (dB)} = 20 \log_{10} \frac{1}{RC} - 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \quad (14.23a)$$

$$= 20 \log_{10} \frac{1}{RC} - 10 \log_{10} \left[\omega^2 + \left(\frac{1}{RC} \right)^2 \right] \quad (14.23b)$$

La gráfica aparece en la figura 14.4. Nótese que hay una diferencia de 3-dB entre las ganancias en $\omega = 0$ y $\omega = RC$, y también 3-dB entre $\omega = 100/(RC)$ y $\omega = 100\sqrt{2}/(RC)$. Estas últimas ganancias son tan pequeñas que son muy difíciles de distinguir en una escala lineal [ver la figura 14.3(a)].

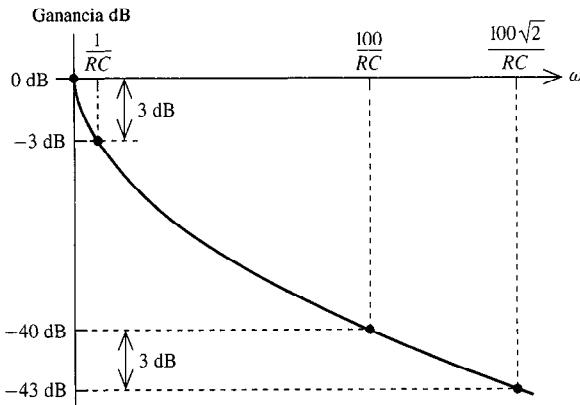


FIGURA 14.4 Ganancia en decibeles para el ejemplo 14.4.

Existen unos cuantos números R de los que vale la pena recordar sus equivalentes en decibeles. Claramente, el número 1 medido en decibeles 0 dB. La proporción 10/1, o número $R = 10$, medido en decibeles, es

$$10 \text{ (dB)} = 20 \log_{10} 10 = +20 \text{ dB} \quad (14.24)$$

Nótese que cuando dB está en paréntesis después de un número R , debe leerse como “el número R , al convertirse a decibeles, es” en tanto que un dB junto a un número sin paréntesis indica que el valor ya está medido en unidades de decibeles, tales como +20 dB en (14.23). La implicación de (14.24) que la multiplicación por 10 siempre suma 20 dB. *Esto es implicado por el hecho de que los productos de dos números, al convertirse a decibeles, son iguales a la suma de sus equivalentes en decibeles.*

$$RS \text{ (dB)} = 20 \log_{10} (RS) = 20 \log_{10} R + 20 \log_{10} S$$

$$RS \text{ (dB)} = R \text{ (dB)} + S \text{ (dB)} \quad (14.25)$$

Si $R = 10$, entonces $R(\text{dB}) = +20 \text{ dB}$, y por (14.24) sumamos 20 dB si multiplicamos a S por un factor de 10. Sustituyendo S por $1/S$ en (14.24),

$$\frac{R}{S} \text{ (dB)} = 20 \log_{10} R - 20 \log_{10} S = R \text{ (dB)} - S \text{ (dB)} \quad (14.26)$$

La proporción de dos números, al convertirse a decibeles, es igual a la diferencia de sus equivalentes en decibeles. De este modo, puesto multiplicar por 10 suma 20 dB, la división entre 10 resta 20 dB.

Además, el número 2 convertido a decibeles es casi exactamente igual a 6 dB:

$$2 \text{ (dB)} = 20 \log_{10} 2 = 6.02 \text{ dB} \approx 6 \text{ dB} \quad (14.27)$$

De este modo, la multiplicación por 2 suma 6 dB y la división entre 2 resta 6 dB. Finalmente, puesto que elevar $\frac{1}{2}$ a la potencia multiplica el logaritmo por $\frac{1}{2}$, la multiplicación por $\sqrt{2}$ suma 3 dB, y la división entre $\sqrt{2}$ resta 3 dB.

Ejemplo 14.5

El número 84.4, medido en decibeles, es $20 \log_{10} 84.4 = 38.5 \text{ dB}$ (hasta tres cifras significativas). Entonces

$$844 \text{ (dB)} = 38.5 \text{ dB} + 20 \text{ dB} = 58.5 \text{ dB}$$

$$844,000 \text{ (dB)} = 38.5 \text{ dB} + 4(20 \text{ dB}) = 118.5 \text{ dB}$$

$$\text{También, } 8.44 \text{ (dB)} = 38.5 \text{ dB} - 20 \text{ dB} = 18.5 \text{ dB}$$

$$8.44 \times 10^{-10} \text{ (dB)} = 38.5 \text{ dB} - 11(20 \text{ dB}) = -181.5 \text{ dB}$$

$$\text{También, } 16.88 \text{ (dB)} = 38.5 \text{ dB} - 20 \text{ dB} + 6 \text{ dB} = 24.5 \text{ dB}$$

$$4.22 \text{ (dB)} = 38.5 \text{ dB} - 20 \text{ dB} - 6 \text{ dB} = 12.5 \text{ dB}$$

y así sucesivamente

EJERCICIOS

14.2.1. Sin usar calculadora, determine 0.001(dB), 0.004(dB), y $500\sqrt{2}$ (dB). Luego verifíquelo con una calculadora.

Respuesta $-60 \text{ dB}, -48 \text{ dB}, +57 \text{ dB}$

14.2.2. Si una sección de amplificador tiene una ganancia de +18 dB, ¿cuánto debe conectarse uno al otro (en cascada) para elevar una entrada de amplitud 1-mV a una amplitud de 250-V?

Respuesta 6

14.2.3. Si los fasores de entrada y salida en cierta frecuencia ω son $320\angle 30^\circ$ y $210\angle -41^\circ$, respectivamente, ¿cuál es la ganancia en decibeles en esta frecuencia?

Respuesta -3.66 dB

14.3

GRÁFICAS DE GANANCIA DE BODE (AMPLITUD)

La función de respuesta de frecuencia $H(j\omega)$ revela el comportamiento en estado estable de un circuito en cualquier frecuencia, y por superposición, la respuesta debida a una suma de entradas a frecuencias distintas. Es muy útil poder visualizar la dependencia de $H(j\omega)$ de la frecuencia. Por ejemplo, en el dominio de frecuencia, ¿dónde la ganancia se intensifica y dónde se debilita? Una suma de dos sinusoides en una entrada puede hacer que entren al circuito dos componentes de amplitud igual, pero en la salida el sinusoide cuya ganancia es alta predominará sobre otro cuya frecuencia corresponda a una baja ganancia. Uno es detenido efectivamente, en tanto que el otro pasa. Este tipo de comportamiento puede ser notado con mirar una sola vez la curva de ganancia.

Una gráfica exacta de ganancia contra frecuencia, aunque la ganancia se mida a escala lineal o en decibeles, es algo tediosa de dibujar, como puede verse de (14.14) y (14.23). Entre sus muchas y muy importantes contribuciones a la teoría de circuitos y teoría de control, el ingeniero alemán Hendrick Bode (1905-1982), al trabajar en los labo-

ratorios Bell en Estados Unidos en los años treinta, inventó un método simple pero preciso para graficar ganancia y desplazamientos de fase. Llevan su nombre, *Gráficas de Ganancia de Bode y Gráfica de Fase de Bode*.

Dada la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$, considérese su forma factorizada en donde el numerador y denominador de $\mathbf{H}(s)$ se factorizan separadamente

$$\mathbf{H}(s) = \frac{K(s - z_1)^{q_1} \cdots (s - z_m)^{q_m}}{(s - p_1)^{r_1} \cdots (s - p_n)^{r_n}} \quad (14.28)$$

donde p_i son los polos de multiplicidad r_i y z_i los ceros, con multiplicidad q_i . En general, alguno de los polos y ceros serán reales, en tanto que otros serán complejos. Siempre se da el caso de que si p_i es un polo complejo de orden r_i , entonces su conjugado complejo p_i^* también será un polo de orden r_i ; es decir, $p_j = p_i^*$ para una $j = 1, 2, \dots, n$ y $r_j = r_i$. Esto también es verdadero para ceros complejos (la aparición de polos o ceros complejos únicamente en pares conjugados, fue mencionado por primera vez en la sección 12.4 en la discusión de expansiones en fracciones parciales). Recombinando los factores de pares conjugados en (14.28), sea $-c$ el valor de un polo complejo o cero:

$$(s - p)(s - p^*) = s^2 + as + b \quad (14.29a)$$

Cada par de polos o ceros conjugados complejos corresponden a un factor cuadrático en $\mathbf{H}(s)$. Los coeficientes son unitarios (para s^2), y marcamos al coeficiente- s a y la constante b . Para cada factor cuadrático, definimos dos parámetros

$$\omega_n = \sqrt{b} \quad (14.29b)$$

$$\zeta = \frac{a}{2\omega_n} \quad (14.29c)$$

$$o \quad s^2 + as + b = s^2 + [2\zeta\omega_n]s + \omega_n^2 \quad (14.30)$$

ω_n se conoce como la *frecuencia natural* del factor de parejas de raíces complejas (14.29a) y ζ es su *factor de amortiguación*. La forma resultante para $\mathbf{H}(s)$, luego de recombinar los factores de parejas de raíces complejas en los factores cuadráticos (14.29a), se conocerá como *forma convencional*. Iniciamos el proceso de gráficas de Bode expresando a $\mathbf{H}(s)$ en forma estándar.

Ejemplo 14.6

Exprésese la función de transferencia $H(s) = (2s + 6)/(s^3 + 2s^2 + 2s)$ en forma estándar. Factorizando primero, obtenemos un cero y tres polos distintos, cada uno de orden 1.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2(s + 3)}{s(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$

Recombinando los términos conjugados,

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2(s+3)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Podemos identificar una constante $K = 2$, un cero único en $s = -3$, un polo en $s = 0$, y un factor cuadrático con frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{2}$ y factor amortiguador $\zeta = \sqrt{2}/2$.

En la forma estándar, la función de transferencia es la proporción de los productos,

$$\mathbf{H}(s) = \frac{K\mathbf{N}_1(s) \cdots \mathbf{N}_\mu(s)}{\mathbf{D}_1(s) \cdots \mathbf{D}_\eta(s)} \quad (14.31)$$

donde, luego de recombinar los factores complejos, cada $N_i(s)$ y $D_i(s)$ es de la forma $(s + a)^r$ con a real, un factor de *raíz real*, o $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)r$, un *factor de parejas de raíces complejas*. Sustituyendo s por $j\omega$ y tomando sus magnitudes, la ganancia es

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{|K| |\mathbf{N}_1(j\omega)| \cdots |\mathbf{N}_\mu(j\omega)|}{|\mathbf{D}_1(j\omega)| \cdots |\mathbf{D}_\eta(j\omega)|} \quad (14.32)$$

Por (14.25), el valor en decibeles de un producto es el producto de los valores en decibeles, de forma que

$$|\mathbf{H}(j\omega)| (\text{dB}) = |K| (\text{dB}) + \sum_{i=1}^{\mu} \{|\mathbf{N}_i(j\omega)| (\text{dB})\} - \sum_{i=1}^{\eta} \{|\mathbf{D}_i(j\omega)| (\text{dB})\} \quad (14.33)$$

La estrategia para graficar la ganancia $|\mathbf{H}(j\omega)|$ en decibeles, será la de graficar cada término a la derecha de (14.34) separadamente, y luego sumar gráficamente estas gráficas componentes. El resultado será la ganancia deseada en decibeles. Sólo hay dos clases de términos, términos de raíces reales y términos de parejas de raíces complejas, para saber cómo graficar. Específicamente, existe un tercer término, la constante $|K|(\text{dB})$, pero la gráfica de este término claramente será una recta plana al nivel $20 \log_{10} |K|$.

Concentrándonos primero en el caso de raíces reales, supongamos por un momento que este término está en el numerador. Por consiguiente

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_i(j\omega)| (\text{dB}) &= 20 \log_{10} |\mathbf{N}_i(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} |j\omega + a|^r \end{aligned} \quad (14.34)$$

donde r es la multiplicidad del cero real $-a$. Esto puede simplificarse ligeramente a

$$|\mathbf{N}_i(j\omega)| (\text{dB}) = 20r \log_{10} |j\omega + a| \quad (14.35)$$

Para $\omega \ll a$, $|j\omega + a|$ puede, con un error pequeño y decreciente conforme $\omega/a \rightarrow 0$, sea reemplazado por $|a|$. La ganancia de este término es entonces

$$|\mathbf{N}_i(j\omega)| (\text{dB}) \cong 20r \log_{10} |a|, \quad \omega \ll a \quad (14.36)$$

De este modo, para $\omega \ll a$, la gráfica será una recta plana al nivel $20r \log_{10} |a|$. Para $\omega \gg a$, $|j\omega + a|$ puede, con un error pequeño decreciente conforme $\omega/a \rightarrow \infty$, ser susti-

tuida por $|j\omega|$, que es ω misma. De este modo

$$|N_i(j\omega)| \text{ (dB)} \cong 20r \log_{10} |j\omega| = 20r \log_{10} \omega, \quad \omega \gg a \quad (14.37)$$

Examinando esta última, la gráfica para $\omega \gg a$ cobrará una forma particularmente simple si elegimos graficar la ganancia no contra ω , sino contra $\log_{10}\omega$. En este caso, (14.37) indica que tenemos una ecuación de la forma $y = mx$ donde y es la ganancia en decibeles y x el logaritmo base 10 de ω , es decir, una relación lineal simple entre estas variables. La gráfica para $\omega \gg a$ será una recta con ganancia m de $20r$ dB por unidad de cambio en el logaritmo base 10 de ω . Un cambio de una unidad en $\log_{10}\omega$ corresponde a un cambio de un factor de 10 en ω , de forma que nos referiremos a esta pendiente como *20r dB por década*.

Los dos segmentos de línea recta para $\omega \ll a$ y $\omega \gg a$ se interceptan en $\omega = |a|$, como puede verse comparando (14.36) y (14.37). Por esta razón, $\omega = |a|$ se conoce como *frecuencia de corte*. Una gráfica de la aproximación lineal por tramos a la curva de ganancia que determinamos, un par de rectas que se intersectan en la frecuencia de corte, se conoce como gráfica de *ganancia de Bode no corregida*, y aparece en la figura 14.5 junto con la gráfica de *ganancia de Bode corregida*, o exacta, calculada evaluando (14.35). Nótese que el error máximo ocurre en la frecuencia de corte y es de 3 dB. Al alejarse de la frecuencia de corte, las gráficas corregida y no corregida se unen suavemente.

La gráfica del mismo factor, $(s + a)^r$, al pasar al denominador de $H(s)$, simplemente oscila alrededor del eje horizontal. Esto es obvio, puesto que el valor en decibeles de $1/X$ es el negativo del valor en decibeles de X . De este modo, el valor inicial es $-[|a| \text{ (dB)}]$, el negativo del valor en decibeles de $|a|$, y la pendiente tras el corte es de $-20r$ dB/dec.

Nótese que hay un caso especial del factor de raíz real cuando el polo o cero es $a = 0$. En este caso, la forma dada en (14.37) no es aproximada para $\omega \gg a$, sino que es exacta para toda ω . Esta gráfica pasa por el valor 0 dB en $\omega = 1$. La gráfica para este factor aparece en la figura 14.6. La técnica para utilizar estas gráficas componentes para generar las gráficas de ganancia de Bode, tanto corregidas como no corregidas, se ilustran en el siguiente ejemplo.

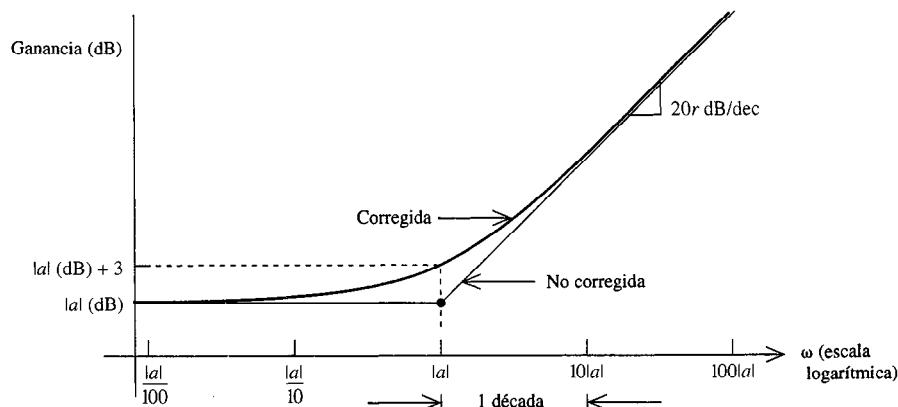


FIGURA 14.5 Gráfica de ganancia de Bode para el factor numerador con raíces reales $(s + a)^r$.

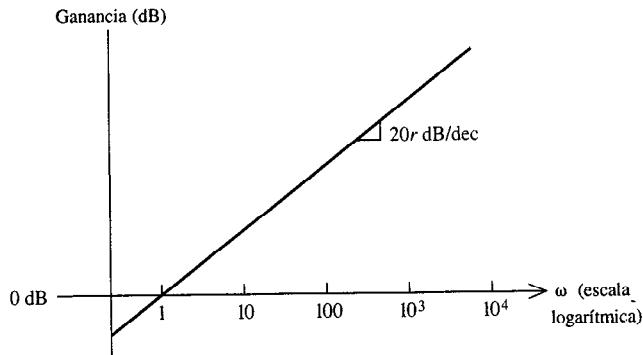


FIGURA 14.6 Gráfica de ganancia de Bode para el factor numerador s^r .

Ejemplo 14.7

Determinemos las gráficas de ganancia de Bode, corregida y no corregida, para $H(s) = (-5s + 10)/(s^2 + 20s)$. En forma estándar,

$$H(s) = \frac{(-5)(s + 2)}{s(s + 20)} \quad (14.38)$$

Hay un cero en $s = -2$, con polos en $s = -20$ y $s = 0$. El factor real ($s + 2$) tiene una frecuencia de corte en $\omega = 2$ y pendiente 20 dB/dec tras el corte ($r = 1$). El valor de nivel inicial de este factor es $|2|$ (dB) $= 20 \log_{10} |2| = 6$ dB. El factor denominador real ($s + 20$) tiene su frecuencia de corte en $\omega = 20$, pendiente -20 dB/dec tras el corte, y valor de nivel inicial $-20 \log_{10} 20 = -26$ dB. El factor de s en el denominador tiene una pendiente de -20 dB/dec en todas partes, y pasa por 0 dB en $\omega = 1$. Finalmente, el factor constante $K = -5$ en (14.38) tiene una gráfica constante al nivel $|K|$ (dB) $= |-5|$ (dB) $= 5$ (dB) $= 14$ dB. Las gráficas componentes para cada uno de estos factores aparece en la figura 14.7. Nótese que no se necesitan correcciones para las gráficas del factor s^r o del componente de factor constante.

A continuación sumamos gráficamente las gráficas de los componentes no corregidos. Primero consideraremos las pendientes en cada región. Recuérdese que la pendiente de una suma de funciones es igual a la suma de las pendientes. Trabajando de izquierda a derecha los segmentos iniciales tienen todos pendientes cero excepto el factor $1/s$, que tiene la pendiente de -20 dB/dec. Entonces, la pendiente de la suma será -20 dB/dec. Esto cambiará, es decir, la gráfica se cortará, en la frecuencia de corte que está más a la izquierda (la mínima) $\omega = 2$. Sumando pendientes en $\omega = 2+$ resulta en 0 dB/dec, puesto que la pendiente neta fue de -20 dB/dec en $\omega = 2-$, una pendiente aumentó (o se “cortó”) +20 dB/dec en 2, y las demás no tuvieron cambio alguno. Hay un corte hacia abajo de +20 dB/dec en la segunda frecuencia de corte $\omega = 20$ y no hay mas cortes en la pendiente. Esto resulta en la curva negra en la figura 14.8.

Ya estamos listos para determinar los valores en decibeles. Puesto que todas las pendientes son conocidas, sólo necesitamos saber el valor en decibeles en un solo punto para determinar todos los demás

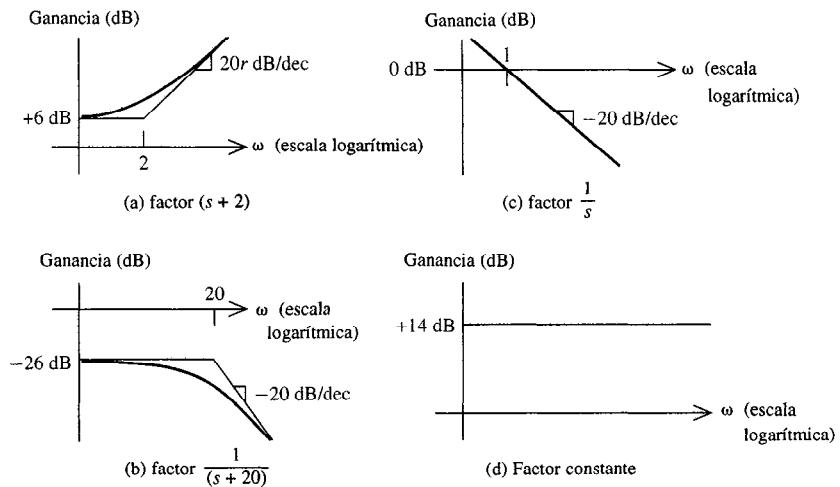


FIGURA 14.7 Gráfica de componente para el ejemplo 14.7.

valores en decibeles. Examinando las gráficas componentes, todos los valores son conocidos en $\omega = 1$. Sumando, la ganancia en decibeles en $\omega = 1$ es $+6 - 26 + 0 + 14 = -6$ dB. La ganancia en la frecuencia de corte $\omega = 2$ es por consiguiente el valor en $\omega = 1$ reducido por -20 dB/dec multiplicado por el número de décadas entre las frecuencias 1 y 2. Puesto que las décadas miden los factores de 10 que separan a dos frecuencias,

$$D = \log_{10} \omega_2 / \omega_1 \quad (14.39)$$

donde D es el número de décadas entre ω_2 y ω_1 . De este modo, en el ejemplo, tenemos

$$D = \log_{10} \frac{2}{1} = 0.3 \text{ dec}$$

que separa a las frecuencias $\omega_2 = 2$ y $\omega_1 = 1$, y la ganancia en dB en el punto $\omega = 2$ es

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}(j2)| \text{ (dB)} &= |\mathbf{H}(j1)| \text{ (dB)} + (-20 \text{ dB/dec})(0.3 \text{ dec}) \\ &= -6 - 20(0.3) \\ &= -12 \text{ dB} \end{aligned}$$

De este modo, tenemos la gráfica final de Bode no corregida. La gráfica corregida es la suma de las gráficas de componentes corregidas, que diferirán por 3 dB dentro del punto de flexión en cada frecuencia de corte. En la figura 14.8 se muestran las gráficas de ganancia de Bode, corregidas y no corregidas. Esto completa el ejemplo.

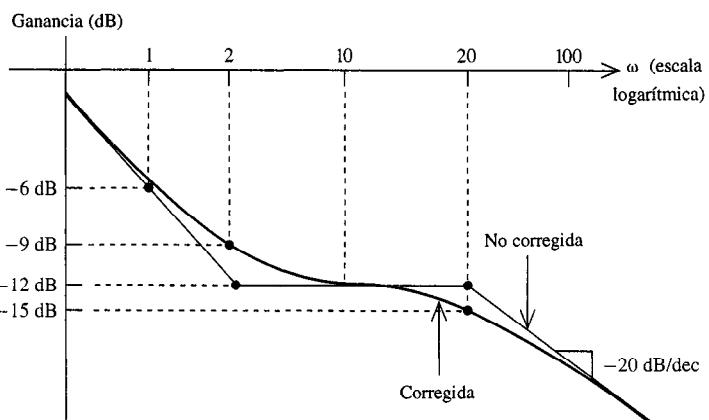


FIGURA 14.8 Gráficas de ganancia de Bode (corregida y no corregida) para el ejemplo 14.7.

Habiendo visto cómo se grafican los términos constantes y de raíces reales, ahora nos concentraremos en el término de parejas de raíces complejas $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^r$. Tomando el mismo método que seguimos para comprender el término de raíz real, sustituimos s por $j\omega$ y tomamos sus magnitudes. Para el caso en que el término está en el numerador, la ganancia en decibeles es

$$|N_i(j\omega)| \text{ (dB)} = 20r \log_{10} [|\omega_n^2 - \omega^2| + j[2\zeta\omega_n\omega]] \quad (14.40)$$

Los valores aproximados para $\omega \ll \omega_n$ y $\omega \gg \omega_n$ son

$$\begin{aligned} |N_i(j\omega)| \text{ (dB)} &\cong 20r \log_{10} \omega_n^2, & \omega \ll \omega_n \\ |N_i(j\omega)| \text{ (dB)} &\cong 20r \log_{10} \omega^2, & \omega \gg \omega_n \end{aligned}$$

Comparando estos dos, los segmentos de rectas que comprenden la gráfica no corregida se intersectan en $\omega = \omega_n$, de forma que la frecuencia de corte para el término de parejas de raíces complejas es su frecuencia natural ω_n . La pendiente antes del corte es 0, y más allá del corte es $40r$ dB/dec. La gráfica no corregida de Bode aparece en la figura 14.9.

En tanto que la gráfica de Bode no corregida para este término es independiente de su factor de amortiguación ζ , la corrección que debe aplicarse depende fuertemente de su factor de amortiguación. Las curvas de ganancia, para diversos valores de ζ , que varían de su valor absoluto mínimo (para raíces complejas) de 1 hacia arriba, aparecen en la figura 14.9. La corrección máxima ocurre cerca, aunque sin precisión, en la frecuencia de corte ω_n . Para determinar la corrección en la frecuencia de corte ω_n , evaluamos la expresión de ganancia exacta de (14.41) en $\omega = \omega_n$:

$$\begin{aligned} |N_i(j\omega_n)| \text{ (dB)} &= 20r \log_{10} |j2\zeta\omega_n^2| = 20r \log_{10} 2|\zeta|\omega_n^2 \\ \text{o} \quad |N_i(j\omega_n)| \text{ (dB)} &= 20r \log_{10} 2|\zeta| + 20r \log_{10} \omega_n^2 \end{aligned} \quad (14.41)$$

Puesto que el segundo término en (14.42) es el valor no corregido en ω_n , la corrección debe ser el primer término, o $20r \log_{10} 2|\zeta|$. La dirección de referencia para esta corrección es hacia arriba, o dentro del punto de flexión de la gráfica no corregida. Si $|\zeta| < 1/2$, esta corrección será negativa, y la gráfica será corregida hacia abajo. Notando que la corrección $20r \log_{10} 2|\zeta|$ es r veces el número $2|\zeta|$ medido en decibeles, una regla general para corregir el término de parejas complejas que funciona tanto para el numerador como el denominador es la siguiente: *La corrección a cualquier gráfica de parejas de raíces com-*

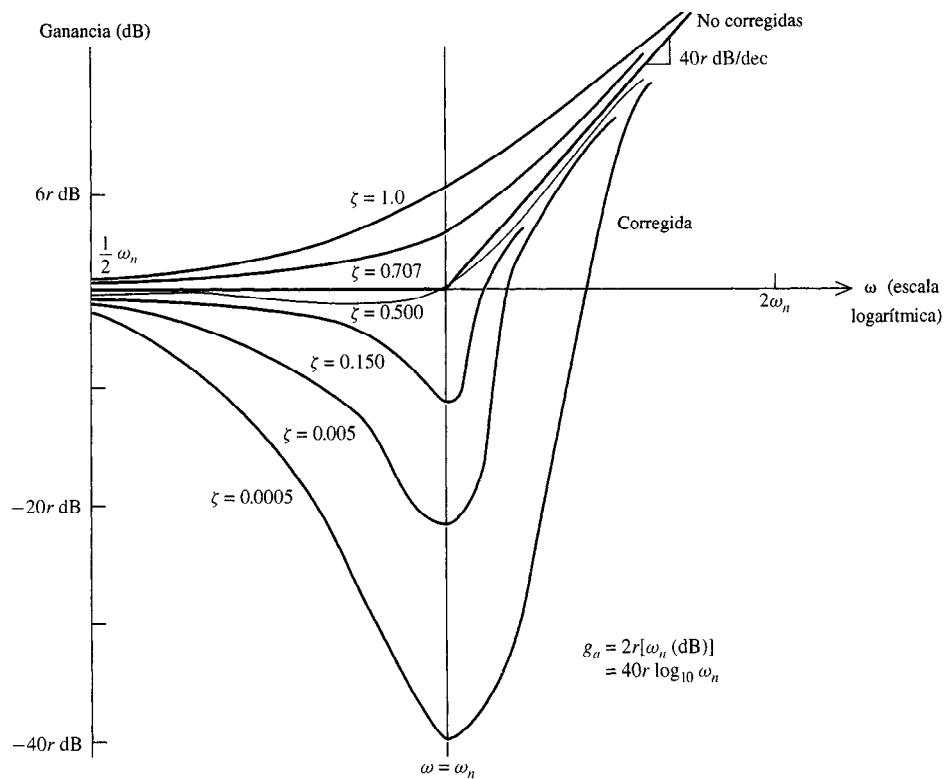


FIGURA 14.9 Gráfica de ganancia de Bode para el factor numerador de parejas de raíces complejas $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^r$.

plejas en $\omega = \omega_n$ es r veces el equivalente en decibeles de $2/\zeta$, con dirección de referencia dentro del punto de flexión de la gráfica no corregida. Examinando la figura 14.9, la corrección en $\omega = \omega_n$ es muy cercana a la corrección máxima deseada para sistemas poco o muy amortiguados, aquellos con factores de amortiguación $\zeta < 0.3$ o $\zeta > 0.6$. Para sistemas moderadamente amortiguados, $0.3 \leq \zeta \leq 0.6$, la corrección calculada, en tanto que siendo exacta en $\omega = \omega_n$, no es una buena medida de la corrección máxima, que ocurre lejos de $\omega = \omega_n$. Afortunadamente, la corrección máxima no es grande para sistemas moderadamente amortiguados.

Ejemplo 14.8

Determinense las gráficas de ganancias de Bode no corregidas y corregidas para

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + \frac{3}{2}s + 900)^3}$$

Revisando el radical del término cuadrático del denominador, obtenemos que es negativo, las raíces son complejas, y que éste es un término de raíces complejas. Su frecuencia natural y factor de amortiguación son, por (14.30), obtenidos de

$$\omega_n^2 = 900$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{3}{2}$$

o $\omega_n = 30$, $\zeta = 3/[(2)(2)(30)] = 1/40$. La frecuencia de corte es $\omega_n = 30$, y la pendiente es $-40r = -120$ dB/dec tras el corte (éste es un factor

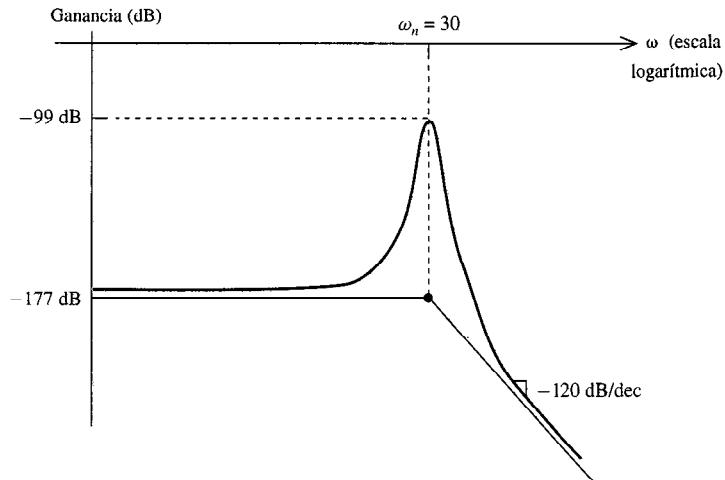


FIGURA 14.10 Gráficas de ganancia Bode para el ejemplo 14.8.

del denominador). El valor inicial es, por (14.40), $-20r \log_{10} \omega_n^2$ ($= -2r$ veces el equivalente en decibeles de ω_n) con el signo menos debido al lugar del denominador. Este valor inicial es

$$-20r \log_{10} \omega_n^2 = (2)(-60) \log_{10} 30 = -177 \text{ dB}$$

Esto completa la gráfica no corregida, que aparece en la figura 14.10. La corrección es $r = 3$ veces el equivalente en decibeles de $2|\zeta| = 1/20$, que es $3[1/20 \text{ (dB)}] = 3[-26 \text{ dB}] = -78 \text{ dB}$. La dirección de referencia para esta corrección está dentro del punto de flexión (que en este caso está hacia abajo), y puesto que la corrección es negativa, va fuera del punto de flexión (hacia arriba). En la figura 14.10 también se muestra la gráfica corregida.

En la misma función de transferencia puede aparecer todo número de raíces reales y términos de parejas de raíces complejas, como se muestra en el último ejemplo de esta sección. Sus gráficas de componentes simplemente se suman, como cualquier otro par de términos en $\mathbf{H}(s)$.

Ejemplo 14.9

Obtengamos las gráficas de ganancia de Bode para un circuito con función de transferencia

$$\mathbf{H}(s) = \frac{200(s^2 + 2s + 16)}{(s + 50)(s + 2500)}$$

En el numerador hay un factor constante y un factor de raíces complejas con $\omega_n^2 = 16$ y $2\zeta\omega_n = 2$, o $\omega_n = 4$, $\zeta = \frac{1}{4}$. En el denominador podemos ver factores de raíces reales con frecuencias de corte de 50 y 2 500. Las gráficas componentes aparecen en la figura 14.11. Comenzando desde la izquierda, la gráfica de Bode no corregida tendrá una pendiente que es la suma de las pendientes de los componentes; $0 + 0 + 0 + 0 = 0 \text{ dB/dec}$. La gráfica se corta hacia arriba $+40 \text{ dB/dec}$ en $\omega = 4$, la frecuencia de corte (frecuencia natural) del factor de parejas de raíces complejas en el numerador, hacia abajo -20 dB/dec en $\omega = 50$, y nuevamente en $\omega = 2500$. El valor en dB en

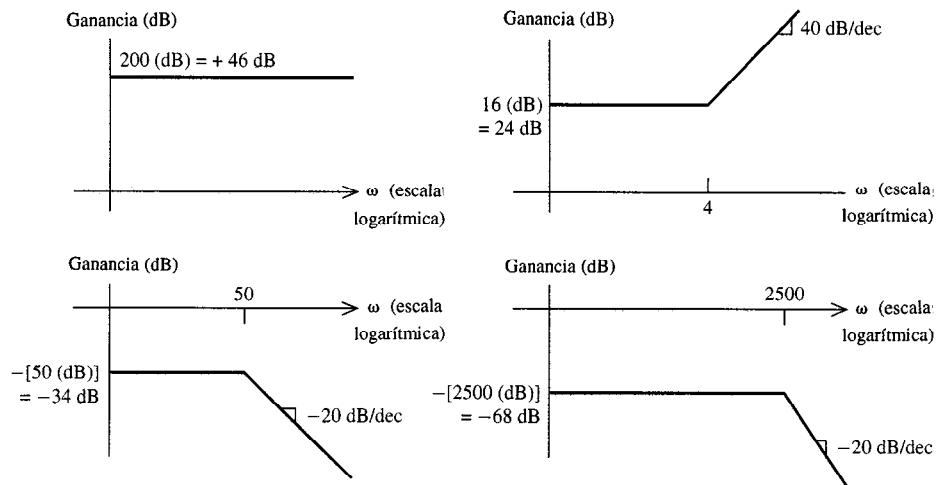


FIGURA 14.11 Gráficas componentes para el ejemplo 14.9.

$\omega = 4$ en la gráfica no corregida es la suma de los valores iniciales

$$46 + 24 - 34 - 68 = -32 \text{ dB}$$

Puesto que hay $\log_{10} 50/4 = 1.1$ décadas entre $\omega = 4$ y $\omega = 50$, la ganancia no corregida en $\omega = 50$ es $-32 \text{ dB} + (40 \text{ dB/dec}) (1.1 \text{ dec}) = +12 \text{ dB}$, y en $\omega = 2500$ similarmente es $+12 \text{ dB} + (20 \text{ dB/dec}) (1.7 \text{ dec}) = 46 \text{ dB}$. La corrección debida al término de raíces complejas en $\omega = 4$ es $2|\zeta|(\text{dB}) = \frac{1}{2}(\text{dB}) = -6 \text{ dB}$ o 6 dB fuera del punto de flexión (hacia abajo). Aquellas que están en las otras dos frecuencias de corte están 3 dB dentro del punto de flexión (hacia abajo). En la figura 14.12 se muestran las gráficas de ganancia de Bode corregida y no corregida.

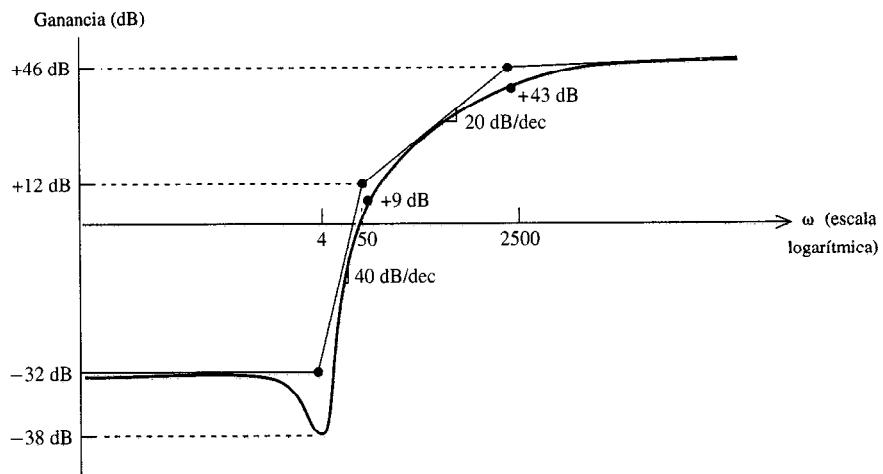


FIGURA 14.12 Gráficas de ganancia de Bode para el ejemplo 14.9.

Con esto terminamos nuestra presentación del método de Bode para graficar ganancias. Hay un método relativo para graficar el desplazamiento de fase mediante aproximación lineal por tramos, suma gráfica y corrección, que produce *la gráfica de fase de Bode*. Hay varias razones por las que la técnica de Bode para graficar fases no se utiliza con tanta frecuencia como la gráfica de ganancia de Bode que se describió anteriormente. El método de Bode para graficar fases es más tedioso, puesto que hay dos, y no solo una, frecuencias de corte para cada término de raíz real. Las correcciones se extienden sobre una banda de frecuencias mucho mas amplias que en la gráfica de ganancia, y son más difíciles para calcular correctamente al dibujarlas. Además, para muchas aplicaciones, la variación de la ganancia del circuito respecto a la frecuencia es más importante para comprender su función, que las variaciones de fase. Por estas razones, aunque tiene algunos usos, no discutiremos el método de Bode para graficar fases.

En resumen, en tanto que este proceso requiere de algún esfuerzo, la gráfica de ganancias de Bode permite hacer gráficas relativamente rápidas y precisas de la ganancia contra la frecuencia en un circuito, y la ganancia es con frecuencia la característica más importante de un circuito. Podemos entender en mucho lo que “hace” un circuito, la función que realiza, identificando las bandas de frecuencia de la alta y baja ganancias. Si se tiene a mano una computadora con SPICE, un análisis ac nos permite obtener gráficas de ganancia más precisas con menos trabajo. Pero entender la forma en que trabaja el procedimiento de Bode, nos instruye acerca del modo en que la curva de ganancia de circuito se modificará si sumamos o eliminamos polos o cero, o si desplazamos sus lugares. Al confrontarnos con un problema de diseño, esto puede ser utilizado para guiar nuestra selección de una función de transferencia, y finalmente un diseño de circuito. Tanto SPICE, como cualquier otra herramienta de simulación computarizada, puede sustituir la propia comprensión del diseñador del circuito respecto a cómo puede manipularse la respuesta de frecuencia de los circuitos. Este es el verdadero beneficio de estudiar el método de gráficas de ganancia de Bode.

EJERCICIOS

14.3.1. Para cada factor componente en $\mathbf{H}(s) = 4000 (s^2 - 1)/[(s + 20)^2 (s^2 + 3s + 36)]$, especifique la pendiente inicial, la pendiente final, el valor inicial y el valor de la frecuencia de corte. También especifique ω_n y ζ para los factores de parejas de polos complejos.

Respuesta

$$4000: 0 \text{ dB/dec}, 0 \text{ dB/dec}, +72 \text{ dB, sin frecuencia de corte}$$

$$(s - 1): 0 \text{ dB/dec}, +20 \text{ dB/dec}, 0 \text{ dB, } 1 \text{ rad/s}$$

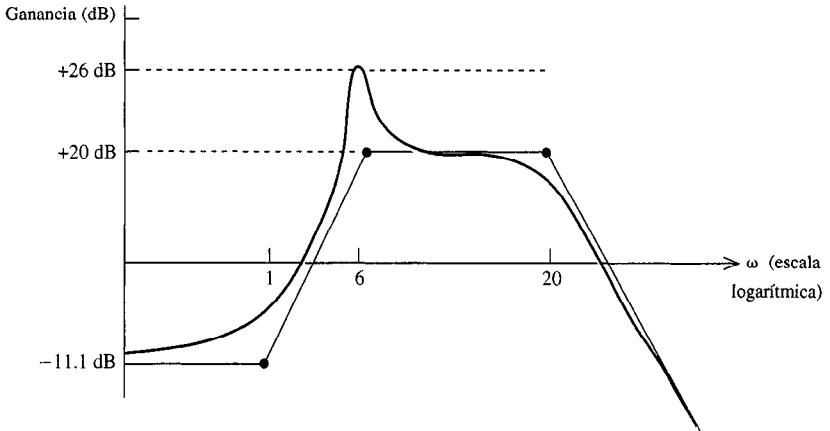
$$(s + 1): 0 \text{ dB/dec}, +20 \text{ dB/dec}, 0 \text{ dB, } 1 \text{ rad/s}$$

$$1/(s + 20)^2: 0 \text{ dB/dec}, -40 \text{ dB/dec}, -52 \text{ dB, } 20 \text{ rad/s}$$

$$1/(s^2 + 3s + 36): 0 \text{ dB/dec}, -40 \text{ dB/dec}, -31.1 \text{ dB, } 6 \text{ rad/s,}$$

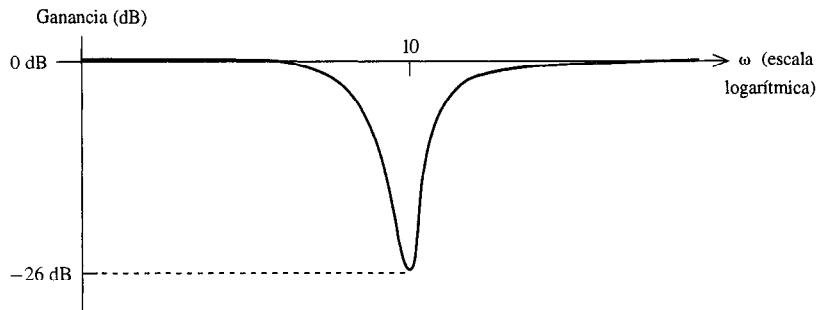
$$\omega_n = 6, \quad \zeta = 1/4$$

14.3.2. Dibuje las gráficas de ganancia de Bode corregidas y no corregidas para el $\mathbf{H}(s)$ del ejercicio 14.3.1, marcando todas las pendientes y ambas coordenadas en cada punto de corte.



EJERCICIO 14.3.2

14.3.3. Dibuje las gráficas de ganancia de Bode para $H(s) = (s^2 + s + 100)/(s^2 + 20s + 100)$.



EJERCICIO 14.3.3

14.4 RESONANCIA

La función de respuesta de frecuencia $H(j\omega)$ revela el comportamiento dependiente de la frecuencia de un circuito, y las gráficas de ganancia de Bode ofrecen una forma conveniente para tener acceso a esta información. A continuación examinaremos circuitos específicos para ver qué clase de comportamiento dependiente de la frecuencia podemos tener, y por qué podríamos querer tenerlo.

De considerable interés son aquellos circuitos que tratan un rango estrecho de frecuencias de forma muy distinta al de las demás frecuencias. Estos se conocen como *circuitos resonantes*. La ganancia de un circuito altamente resonante logra un claro máximo o mínimo en su *frecuencia de resonancia*, en tanto que sus variaciones fuera de una pequeña banda de frecuencias alrededor de la frecuencia de resonancia son mucho menores.

La resonancia es una propiedad extremadamente útil para muchas aplicaciones de circuitos. Por ejemplo, supongamos que deseamos construir un circuito para recibir una entrada sinusoidal a una frecuencia ω_0 . La entrada total a nuestro circuito en general con-

tendrá muchas otras componentes de frecuencias errantes debidas al ruido y a otras señales de interferencia que se transmiten al mismo tiempo. Si la ganancia de nuestro receptor es muy alta en ω_0 y muy baja en los demás lugares, detendremos efectivamente los componentes indeseables, que pasarán a través del circuito de la entrada a la salida con una amplitud mucho más reducida (baja ganancia en esas frecuencias), en tanto que hará pasar con mucha intensidad la componente deseada (alta ganancia en su frecuencia ω_0). O considérese, el láser un dispositivo que amplifica intensamente aquellas ondas de luz que pasan a través y que son de frecuencia específica ω_0 , en tanto que atenúa fuertemente las demás, produciendo de este modo una salida de luz muy pura con casi toda su energía en una sola frecuencia. Estos son ejemplos de circuitos resonantes.

La resonancia no es únicamente una propiedad de los circuitos eléctricos. Se encuentra de forma natural en muchas formas físicas. Cuando se toca un diapasón cerca de una guitarra, una de las cuerdas de la guitarra continuará “sonando” mucho después de que se afina a la frecuencia del diapasón. Cada una de las cuerdas del instrumento es un sistema resonante con distintas frecuencias de resonancia, y sólo aquella que coincide con la frecuencia de entrada responderá con intensidad. Del mismo modo, un cristal de cuarzo “resonará” a su frecuencia de resonancia cuando se estimula eléctricamente, y la resultante salida pura se utiliza para sincronizar circuitos de computadora y relojes digitales. Algunos automóviles, al acelerar, resonarán de forma intensa “y molesta” cuando la velocidad del motor pasa a través de la frecuencia de resonancia del chasis del coche. A otras velocidades, las vibraciones del motor son igual de intensas, pero no producen fuertes vibraciones en la cabina de los pasajeros debido a la baja ganancia que está fuera de resonancia.

Un circuito capaz de presentar resonancia es el *circuito RLC en serie*. Considérese una entrada a este circuito con un voltaje $v(t)$, y que su salida sea la corriente $i(t)$ en la figura 14.13(a). Definamos su función de transferencia como $H(s) = I(s)/V(s)$, que es idéntica a su admitancia $Y(s)$.

$$H(s) = Y(s) = \frac{1}{sL + R + (1/sC)} \quad (14.42)$$

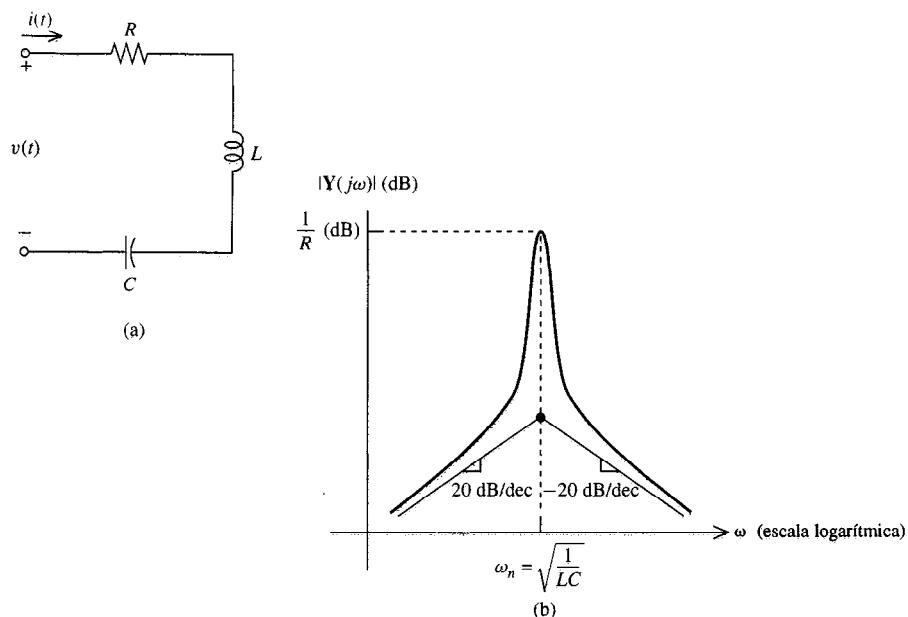


FIGURA 14.13 (a) Circuito RLC en serie; (b) Gráfica de ganancia de Bode.

En forma estándar, podemos reescribir $\mathbf{H}(s)$ como

$$\mathbf{H}(s) = \frac{(1/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)} \quad (14.43)$$

La gráfica de ganancia de Bode consiste de un término constante debido al factor $1/L$, un cero real en el origen, y un término cuadrático que contiene raíces complejas o reales. Las raíces serán complejas si el radical del término cuadrático es negativo:

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$$

que puede ser reescrito como

$$\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} < 1 \quad (14.44)$$

Supondremos que se satisface esta desigualdad, de forma que las raíces son complejas. Entonces por (14.30),

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde el denominador es una función cuadrática subamortiguada. Por (14.29), se obtienen la frecuencia natural ω_n y los factores de amortiguación a partir de los coeficientes en el factor cuadrático mediante $\omega_n^2 = 1/LC$, $2\zeta\omega_n = R/L$ y estos son

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{1/LC} \\ \zeta &= \frac{R}{2} \sqrt{C/L} \end{aligned} \quad (14.45)$$

La gráfica de Bode resultante aparece en la figura 14.13(b). Hay un pico de resonancia en ω_n , y la ganancia corregida en ω_n es $1/R$. Al alejarnos de ω_n , la ganancia desaparece en 20 dB/dec.

Nótese a partir de (14.44) y (14.45) que el requisito de polos complejos es que el factor de amortiguación $\zeta < 1$. Definamos la *frecuencia de resonancia* ω_r como la frecuencia en la que la ganancia $|H(j\omega)|$ pasa a través de su máximo o mínimo (en este caso el máximo). Para el circuito RLC en serie, la impedancia

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

consiste de una parte real fija y una parte imaginaria que varía respecto a la frecuencia. En la frecuencia en la que $\omega L - 1/(\omega C) = 0$ la parte imaginaria desaparece y la impedancia está en su magnitud mínima. Esta es la frecuencia $\omega = \omega_r = \sqrt{1/LC}$. Si la impedancia es un mínimo, la admitancia es un máximo, y por consiguiente

$$\omega_r = \sqrt{1/LC} \quad (14.46)$$

Esta es la frecuencia de resonancia del circuito *RLC* en serie, y coincide con la frecuencia natural ω_n .

La amplitud del pico de resonancia es una útil medida de la selectividad de frecuencia del circuito resonante. Defínase la amplitud de banda B de un circuito resonante como la diferencia

$$B = \omega_u - \omega_l \quad (14.47)$$

donde ω_u y ω_l son las frecuencias en las que la ganancia es 3 dB por debajo de su valor en ω_r (o 3 dB por encima de su valor ω_r , y la resonancia es un mínimo de la ganancia). $\omega_u > \omega_r$ se conoce como la *frecuencia de semi-potencia superior* y $\omega_l < \omega_r$ la *frecuencia de semi-potencia inferior*. Nótese que si la amplitud de un sinusode se reduce en 3 dB, o por un factor de $1/\sqrt{2}$, la potencia en ese sinusode se reduce por el cuadrado de la proporción de amplitud o $\frac{1}{2}$. Esto explica la terminología para ω_u y ω_l . Para nuestro caso, podemos obtener sus valores resolviendo la ecuación

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{R} \quad (14.48)$$

para ω , puesto que $|Y(j\omega)|$ es la ganancia y su valor máximo es $1/R$. Dejando el álgebra a los ejercicios al final de esta sección, luego de restar las dos soluciones a (14.48), la amplitud de banda para el *RLC* en serie es simplemente

$$B = \frac{R}{L} \quad (14.49)$$

En tanto que la amplitud de banda B mide la amplitud de la banda de frecuencia dentro de la cual el circuito se comporta de forma casi resonante, es decir, con ganancias dentro de un margen de 3 dB de la ganancia de resonancia, B no siempre es una buena medida de la protuberancia del pico resonante. Consideremos dos circuitos resonantes con la misma amplitud de banda, por ejemplo 1 rad/s, con frecuencias resonantes de 1 rad/s y 10^3 rad/s. Las curvas de ganancias para estos dos circuitos aparecen en la figura 14.14. ¿Cuál de las dos resonancias es más selectiva de frecuencia? Si una entrada a cada circuito en sus respectivas frecuencias de resonancia se desplaza, por ejemplo, 1% de su ω_r , su ganancia será esencialmente indistinguible de la ganancia máxima en el primer caso, figura 14.14.(a), pero caerá mucho más del pico de resonancia del segundo circuito, en la figura 14.14.(b). Claramente, el segundo circuito es más selectivo de frecuencias en el sentido fraccional. Lo que importa en el sentido de una desviación de frecuencia fraccional es la amplitud de banda normalizada por la frecuencia de resonancia en sí.

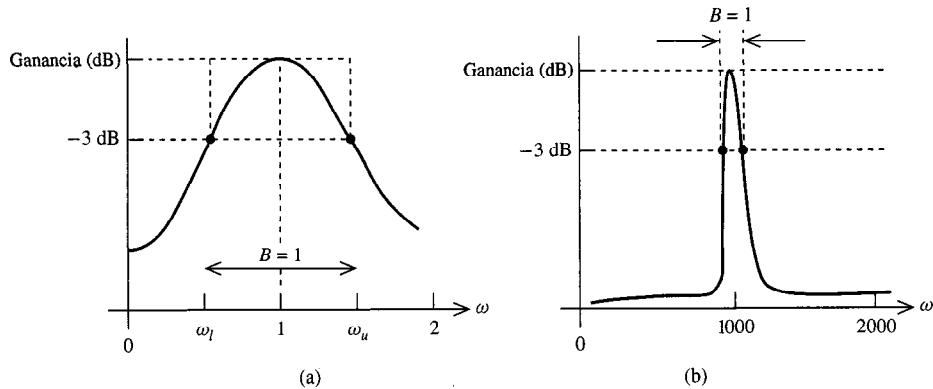


FIGURA 14.14 Dos curvas de ganancia con la misma amplitud de banda B pero con factor de calidad Q distinto.

Definamos el *factor de calidad* Q como la proporción de frecuencia de resonancia contra la amplitud de banda,

$$Q = \omega_r / B \quad (14.50)$$

Mientras mayor sea el factor de calidad Q , el circuito será más selectivo de frecuencia en el sentido fraccional. Para *RLC* en serie, sustituyendo (14.49) y (14.50), tenemos

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14.51)$$

Los circuitos con factores de alta calidad son muy selectivos de frecuencias, y como vemos de (14.52), esto implica bajos valores de resistencia R . Puesto que los inductores prácticos incluyen significativas resistencias en serie incluidas en sus propios modelos de dispositivos, es difícil y costoso diseñar pasivamente circuitos resonantes con Q , es decir, únicamente con elementos *RLC*.

Ejemplo 14.10

Deseamos diseñar un circuito resonante *RLC* en serie con frecuencia de resonancia en Hertz igual a 1 kHz y factor de calidad $Q = 100$. Puesto que hay dos limitaciones en tres parámetros *RLC*, podemos tomar un valor de prueba para ellos arbitrariamente. Supongamos que fijamos un valor conveniente para el capacitor, $C = 1 \mu\text{F}$. Entonces, por (14.46),

$$2\pi(10^3) = \sqrt{\frac{1}{L(10^{-6})}}$$

o elevando ambos miembros al cuadrado y resolviendo para L ,

$$L = \frac{1}{(2\pi)^2} = 25.3 \text{ mH}$$

Despejando (14.51) para R

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10^{-2} \sqrt{\frac{25.3 \times 10^{-3}}{10^{-6}}} = 1.59 \Omega \quad (14.52)$$

Si la longitud de cable utilizado para embobinar el inductor dado contiene más de 1.59Ω de resistencia equivalente, entonces, aun en la ausencia de cualquier resistencia externa, no podríamos satisfacer estas especificaciones. Nótese que por (14.51) podríamos incrementar la resistencia en serie permisible en el factor de calidad Q fijo, y la frecuencia resonante ω , incrementando L y disminuyendo C para que su producto siguiera siendo el mismo. Sin embargo, la inductancia incrementada necesaria, requiere más vueltas de cable en nuestro inductor, que inevitablemente tendrá como consecuencia una mayor resistencia en serie.

Para circuitos de Q -alta, nos será más conveniente utilizar circuitos activos, aquellos que contienen op amps. Posteriormente, en éste mismo capítulo, se explorarán estos principios.

Hasta ahora hemos considerado únicamente circuitos resonantes de *RLC* en serie. Pueden utilizarse muchas otras configuraciones de circuitos para producir un comportamiento resonante. En el caso del *circuito RLC en paralelo* (Figura 14.15), tomando $i(t)$ como la entrada y $v(t)$ como la salida, la función de transparencia que caracteriza a la

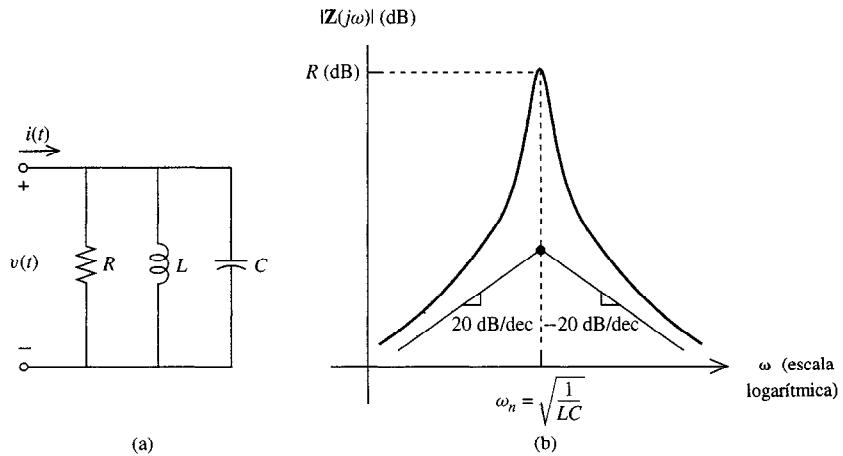


FIGURA 14.15 (a) Circuito RLC en paralelo; (b) Gráfica de Bode de ganancia.

ganancia es

$$H(s) = Z(s) = \frac{1}{sC + (1/R) + (1/sL)} \quad (14.53)$$

Podríamos estudiar este circuito resonante repitiendo los pasos que seguimos en el caso RLC en serie, pero existe un método más sencillo. Comparando (14.53) con (14.42), las funciones de transferencia son idénticas luego de sustituir C por L , L por C , y $1/R$ por R . Puesto que todos nuestros resultados son calculados a partir de la función de transferencia, podemos simplemente repetir los resultados que notamos para el caso RLC en serie al hacer estas sustituciones. En la tabla 14.1 se resumen los resultados.

Una observación final que se refiere a los circuitos RLC en serie y en paralelo es que en la resonancia, el desplazamiento de fase de sus funciones de su respuesta de frecuencia $H(j\omega)|_{\omega=\omega_r}$ es cero. En ambos casos, $|Z(j\omega_r)|$ y $|Y(j\omega_r)|$ en resonancia son cada uno puramente reales, y el voltaje y la corriente están en fase. Las partes imaginarias de las impedancias y de las admitancias se cancelan completamente en la frecuencia de resonancia, lo que explica que en ese lugar hay un mínimo o un máximo.

Muchos otros circuitos, tanto pasivos como activos, presentan resonancia. En cada caso, su comportamiento resonante puede determinarse a partir de una gráfica de ganancia de Bode, y puede obtenerse la frecuencia de resonancia determinando el lugar de una ganancia máxima (o mínima).

Tabla 14.1 Propiedades de los circuitos RLC en serie y paralelo.

Propiedad	RLC en serie	RLC en paralelo
ω_r (frecuencia de resonancia)	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
B (amplitud de banda)	$\frac{R}{L}$	$\frac{1}{RC}$
Q (factor de calidad)	$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$R \sqrt{\frac{C}{L}}$

A diferencia de los casos *RLC* en serie y en paralelo, con frecuencia es difícil determinar exactamente la frecuencia de resonancia en el caso general. Para sistemas ligeramente amortiguados, aquellos que presentan una resonancia significativa, la frecuencia de resonancia cae muy cerca del punto de corrección máxima en la gráfica de Bode, lo cual, a su vez, está muy cerca de la frecuencia natural ω_n del término de parejas de raíces complejas de la gráfica de Bode. La frecuencia natural ω_n de este término puede utilizarse como una conveniente aproximación a la frecuencia resonante ω_r en el caso ligeramente amortiguado.

Ejemplo 14.11

Considérese el circuito resonante que se muestra en la figura 14.16. No es *RLC* en serie o en paralelo, de modo que no se aplican las fórmulas en la tabla 14.1. Con la entrada y salida especificadas, tenemos $H(s) = Z(s)$ y

$$Z(s) = \frac{(10/s)(10s + 1)}{(10/s) + 10s + 1} = \frac{10(s + \frac{1}{10})}{s^2 + (\frac{1}{10})s + 1}$$

Existe un factor constante 10, un cero real en $s = -1/10$, y un factor de parejas de raíces complejas con $\omega_n = 1$, $2\zeta\omega_n = 1/10$; es decir, $\zeta = 1/20$. Las gráficas de ganancia de Bode corregidas y no corregidas aparecen en la figura 14.16(b). La gráfica corregida muestra que el circuito resonante cerca de $\omega_n = 1$ rad/s. Esto no es exactamente el lugar ω_r de ganancia máxima, pero sí está cerca. Otra estimación de la frecuencia de resonancia es aquella frecuencia que es cero en la fase de $Z(j\omega)$. De hecho, algunos autores definen esto como la frecuencia de resonancia para los circuitos resonantes generales. En el caso presente, esto da lugar a la ecuación

$$\tan^{-1}(10\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10(1 - \omega^2)}\right)$$

Tomando las tangentes a ambos lados,

$$10\omega = \frac{\omega}{10(1 - \omega^2)}$$

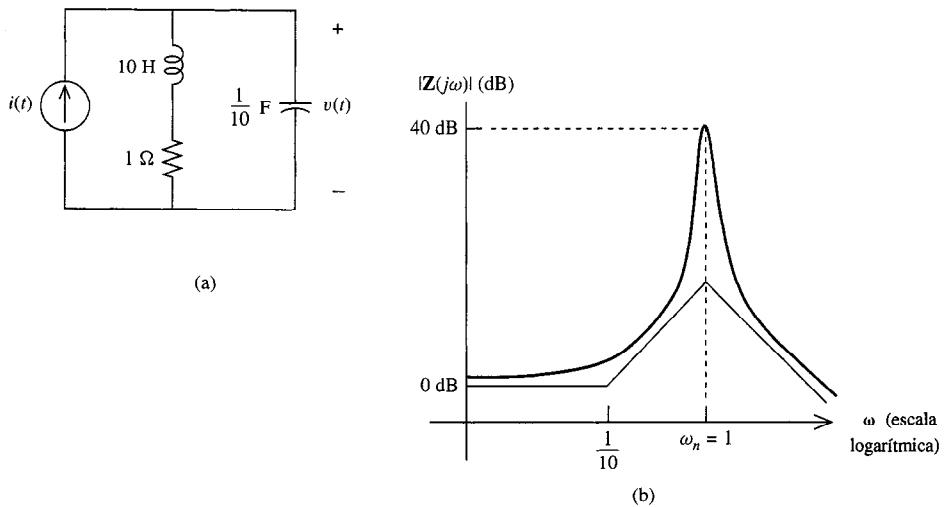


FIGURA 14.16 (a) Circuito para el ejemplo 14.11; (b) Gráfica de ganancia de Bode.

y resolviendo, $\omega = (\sqrt{99})/10$. Estas dos aproximaciones a ω_r están muy cercanas entre sí. Ninguna de ellas es la frecuencia exacta ω_r , en ganancia máxima, que (el ambicioso) puede obtener como la solución exacta de la ecuación

$$\frac{d}{d\omega} |Z(j\omega)| = 0 \quad (14.54)$$

EJERCICIOS

14.4.1. Demuestre que las soluciones a (14.48) satisfacen

$$\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 = \left(\frac{\omega R}{L} \right)^2$$

14.4.2. Demuestre que la ecuación en el ejercicio 14.4.1. tiene cuatro soluciones reales, dos de las cuales son positivas y las otras dos negativas, y que la diferencia de las soluciones positivas es la amplitud de banda dada en $B = R/L$ dada en (4.50).

14.4.3. Diseñe un circuito resonante RLC en serie o en paralelo cuya admitancia pasa por el mínimo en $\omega_r = 100$ rad/s y que tiene un factor de calidad Q de 50. Utilice un capacitor de $100 \mu\text{F}$.

Respuesta Paralelo, $R = 5 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ H}$; en serie $R = 2\Omega$, $L = 1 \text{ H}$.

14.5

RESPUESTA DE FRECUENCIA DE OP AMPS

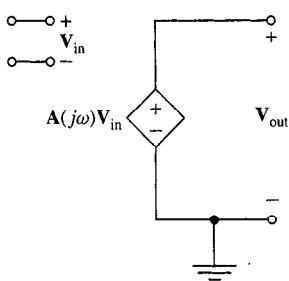


FIGURA 14.17 Circuito fasorial para el modelo op amp con ganancia en trayectoria abierta dependiente de la frecuencia $A(j\omega)$.

En el capítulo 3 se describió al op amp como un dispositivo activo que contiene muchos transistores y otros elementos que, bajo las circunstancias adecuadas, se comporta simplemente como una fuente de voltaje controlada por voltaje con alta ganancia. Los modelos utilizados hasta ahora para estudiar el comportamiento de los op amps en varios circuitos, y de este modo determinar las “circunstancias adecuadas” para su comportamiento, como se describieron, han consistido enteramente de elementos independientes de la frecuencia: resistencias y fuentes controladas con ganancia constante.

Ahora estamos preparados para considerar otra dimensión del comportamiento de los op amps prácticos, su dependencia de la frecuencia. Volviendo al modelo de amplificador de voltaje ideal de la figura 3.7, repetida como la figura 14.17, modificaremos la ganancia A de amp op de trayectoria abierta. Fijada como una constante en el modelo original del capítulo 3, la modificaremos para reflejar el verdadero comportamiento de la ganancia de trayectoria abierta con la frecuencia

$$A(j\omega) = \frac{A_0\omega_0}{j\omega + \omega_0} \quad (14.55)$$

Afortunadamente, las características dominantes dependientes de la frecuencia de muchos op amps prácticos, tales como la popular familia 741, son abarcadas por esta mo-

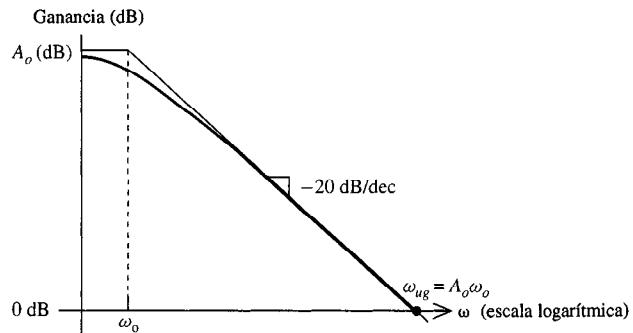


FIGURA 14.18 Gráfica de Bode de $|A(j\omega)|$ para un op amp típico.

dificación simple. El valor de esta ganancia en dc es A_0 la ganancia dc de trayectoria abierta del op amp, típicamente del orden de 10^5 a 10^6 . El polo único en $s = -\omega_0$ hace que la gráfica de Bode $|A(j\omega)|$ que aparece en la figura 14.18 se corte en $\omega = \omega_0$ típicamente de 5 a 50 rad/s y a partir de ahí decaiga en -20 dB/dec. La frecuencia en que la ganancia se reduce a la unidad (0 dB) se conoce como *amplitud de banda de ganancia unitaria*, ω_{ug} . Por (14.55), $\omega_{ug} = A_0 \omega_0$ para una excelente aproximación. El producto $A_0 \omega_0$ de la ganancia dc y la amplitud de banda de -3 -dB se conoce como *producto de amplitud de banda ganancia*, un importante parámetro del amp op que volveremos a ver en breve.

Considerando la figura 14.18, cuando se utiliza en trayectoria abierta, el op amp es capaz de suministrar una ganancia sumamente alta, pero solamente sobre una amplitud de banda muy estrecha de aproximadamente dc en $\omega_0 = 1$ Hz. Para que el amp op funcione en circuitos tales como los amplificadores de inversión y no inversores, que generalmente se requiere que trabajen sobre una gran parte de todo el rango de audio de dc a 40 kHz, su amplitud de banda debe ser muy extensa. Con poca frecuencia trabajamos con señales cuyas frecuencias caigan convenientemente por debajo 1 Hz.

En el capítulo 3 demostramos que el uso de la retroalimentación negativa, reduce grandemente los efectos de los cambios de la ganancia A de trayectoria abierta en la proporción de transferencia de voltaje entrada-salida para el circuito. Aquí introduciremos un nuevo mecanismo de variación en la ganancia de trayectoria abierta, la declinación de ganancia respecto a la frecuencia. Posiblemente, la retroalimentación negativa protegerá al circuito de esta nueva causa de variación en A , así como lo protegerá contra las variaciones aleatorias de tramo a tramo en A consideradas en el capítulo 3. Afortunadamente, y como lo demostraremos, esto es ciertamente el caso.

Considérese un circuito típico de componentes, el amplificador inversor que aparece en la figura 14.19. Por nuestro análisis anterior, su ganancia de circuito conectada v_1 y salida v_2 es $-R_F / R_A$.

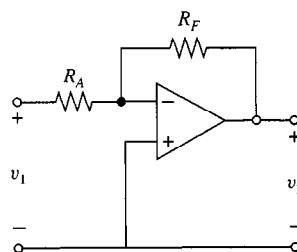


FIGURA 14.19 Amplificador inversor.

Este resultado supone que la ganancia A en trayectoria abierta es fija, grande e independiente respecto a la frecuencia, lo que no es el caso con la función de ganancia $\mathbf{A}(j\omega)$ que ahora consideramos. Repitiendo el análisis de este circuito en el capítulo 3, tenemos el resultado (3.12), pero con $\mathbf{A}(j\omega)$ y los fasores en lugar de A en las cantidades de dominio del tiempo. Por esa ecuación, la ecuación entrada-salida para este circuito es

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{V}_1 \quad (14.56)$$

donde

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{-R_F}{R_A + \frac{1}{A(j\omega)}(R_A + R_F)}$$

Factorizando $-R_F/R_A$ y substituyendo $\mathbf{A}(j\omega)$,

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{-R_F}{R_A} \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega + \omega_0}{A_0\omega_0}\right) \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right)}$$

Separando las partes real e imaginaria en el denominador

$$= \frac{-R_F}{R_A} \frac{1}{j\omega \left[\frac{1+(R_F/R_A)}{A_0\omega_0}\right] + \left[1 + \frac{1+(R_F/R_A)}{A_0}\right]}$$

Si acordamos, como lo hicimos antes, limitar nuestras ganancias de circuito deseadas $R_F/R_A \ll A_0$, lo cual no es una suposición muy restrictiva, puesto que A_0 es muy grande, entonces el término real en el denominador queda bien aproximado en 1, y obtenemos

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{-R_F}{R_A} \frac{1}{j\omega \left[\frac{1+(R_F/R_A)}{A_0\omega_0}\right] + 1}$$

La gráfica de Bode para esta función de ganancia de un solo polo aparece en la figura 14.20. Nos muestra la relación entre la ganancia $|-R_F/R_A| = R_F/R_A$ y la amplitud de banda ω_c para el amplificador inversor. Para cualquier ganancia deseada R_F/R_A , el circuito tendrá una amplitud de banda ω_c mucho mayor que la amplitud de banda ω_0 de trayectoria abierta. Ciertamente, la reducción de ganancia debida a la retroalimentación negativa, o proporción de A_0 contra R_F/R_A , casi se devolvió completamente en la expansión de la amplitud de banda, la proporción $\omega_c/\omega_0 = A_0\omega_0/[1(R_F/R_A)]$. Por ejemplo, considérese un op amp con

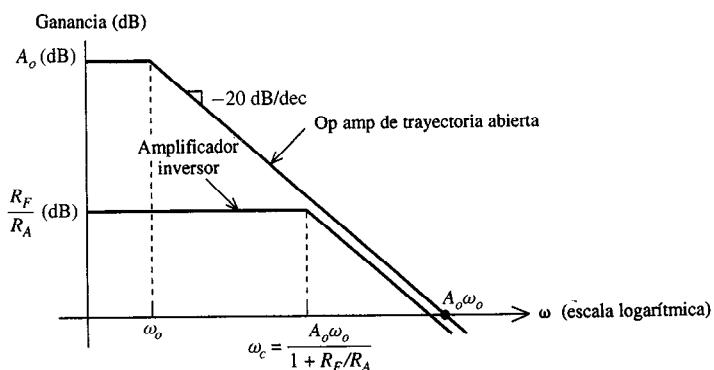


FIGURA 14.20 Gráfica de Bode para un amplificador inversor.

$A_0 = 10^5$ y $\omega_0 = 10$ rad/s utilizado en un amplificador inversor con ganancia $R_F/R_A = 4$. Sostenemos una reducción de ganancia de 10^5 a 4, o un factor de 25,000, al pasar de la ganancia de amp op de trayectoria abierta a la ganancia de circuito. Sin embargo, la amplitud de banda aumentó de 10 rad/s a $\omega_c = (10^5)(10)/(1+4) = 200,000$, un factor de 20,000. De este modo, hemos vuelto a la amplitud de banda casi todo lo que cedimos. Esta negociación favorece en gran medida nuestro propósito, puesto que necesitamos una amplitud de banda más amplia y sólo queremos la ganancia indicada de $R_F/R_A = 4$. La nueva amplitud de banda, 200,00 rad/s, es casi 40 kHz, lo suficientemente grande para acomodar a la mayoría de los circuitos de audio.

Finalmente, nótese que el producto amplitud de banda-ganancia del amplificador inversor es

$$GBW = \frac{R_F}{R_A} \omega_c = A_0 \omega_0 \frac{R_F/R_A}{1 + (R_F/R_A)}$$

Conforme la ganancia R_F/R_A varía sobre valores moderados, digamos de 1 a 10, el producto amplitud de banda-ganancia, no se aparta demasiado del producto amplitud de banda-ganancia de trayectoria abierta $GBW = A_0 \omega_0$. Esto sugiere que los cambios de ganancia se compensan de forma aproximadamente igual por los cambios en amplitud de banda de una forma limitada únicamente por el GBW del op amp. Si se necesita una mayor combinación de ganancia y amplitud de banda, la ganancia debe dividirse entre dos etapas o si se utiliza un amp op distinto, probablemente más costoso, con un mayor producto de amplitud de banda-ganancia.

En esta sección vimos que el op amp es sumamente dependiente de la frecuencia, con una amplitud de banda demasiado reducida para ser de trayectoria abierta de uso práctico. Sin embargo, al configurarse en un circuito de retroalimentación negativa, tales como los circuitos de componentes presentados anteriormente (amplificadores inversores y no inversores de entrada única o múltiple y seguidores de voltaje), la amplitud de banda se incrementará aproximadamente en proporción a la pérdida de ganancia. De este modo, si nos restringimos a ganancias modestas de circuito para etapas únicas de op amp, podemos asegurar la amplitud de banda que necesitamos para construir circuitos prácticos a pesar de la amplitud de banda sumamente reducida que el op amp nos presenta con la trayectoria abierta. Dentro de su amplitud de banda, los op amps nuevamente parecen ser independientes de la frecuencia, tal y como lo hemos supuesto hasta ahora.

EJERCICIOS

14.5.1. Se utiliza un op amp con producto de amplitud de banda-ganancia de 1-MHz como amplificador inversor. Contenga la amplitud de banda para este circuito en hertz si la ganancia R_F/R_A se fija en 1, 10, 100, 1000, y 10^4 .

Respuesta 500 kHz; 90.9 kHz; 9.9 kHz; 999 Hz; 100 Hz

14.5.2. Supóngase que se ponen dos copias del circuito del ejercicio 14.5.1. en cascada, creando un circuito con ganancia $(R_F/R_A)^2$. ¿Cuál es la amplitud de banda de este nuevo circuito para ganancias $(R_F/R_A)^2 = 100, 10^4$? Nótese de la figura 14.5 que una ganancia corregida de 1.5 dB ocurre en $\omega = 0.642 \omega_c$.

Respuesta 58.4 kHz; 6.36 kHz.

14.5.3. Comenzando a partir de (3.19b) y utilizando la aproximación $A_0 \gg [1 + (R_F/R_A)]$, demuestre la amplitud de banda ω_c del amplificador no inversor es la misma que para el amplificador inversor que aparece en la figura 14.20. ¿Cuál es su producto amplitud de banda-ganancia?

Respuesta $A_0 \omega_0$

En su uso ordinario, un filtro es un dispositivo diseñado para obstruir algunas cosas, mientras que deja pasar otras. El filtro de aire de un coche detiene las partículas metálicas abrasivas y otros contaminantes para que no circulen por el motor, en tanto permite que el aceite pase sin obstáculos. En el lenguaje de los circuitos, *un filtro es un dispositivo que impide el paso de señales cuyas frecuencias caen dentro de una banda conocida como banda de detención, dentro que permiten que otras en otra banda, la banda de paso, pasen de la entrada a la salida relativamente sin modificaciones.*

Los filtros son los módulos más comunes que hay en los diseños de circuitos generales. Casi todo circuito electrónico práctico de cualquier complejidad contiene 1 o más filtros. Esto incluye radios, teléfonos, televisores y otros receptores y transmisores, sistemas de control para maquinaria industrial, circuitos de computadora, fuentes de potencia, etc. Un uso común de los filtros es suprimir el ruido. Si sabemos que las señales en nuestro circuito están limitadas a bandas específicas, podemos poner las demás bandas en la banda de detención del filtro, y evitar que el ruido degrade el funcionamiento de nuestro circuito. Otro uso común, es aumentar un rango de frecuencias importante. Si estamos sintonizados a una cierta estación de radio, la banda de frecuencias que contiene la señal de la estación pueden convertirse en la banda de paso de un filtro de pasa-altas, de forma que la señal deseada se hace muy prominente en la salida del filtro.

El grado en que una señal de frecuencia particular ω pasa de la entrada a la salida, se mide por la función de respuesta de frecuencia de $H(j\omega)$. Un *filtro ideal*, es aquél para el que $H(j\omega) = 0$ en la banda de detención y $1\angle 0^\circ$ en la banda de salida. Los *filtros ideales obstruyen señales de la banda de detención completamente, en tanto que pasan señales a la banda de paso sin ninguna modificación*. $H(j\omega) = 1\angle 0^\circ$ en la banda de paso significa que la amplitud de la entrada, y que no hay desplazamiento de fase entre ellas.

Los filtros reciben su nombre según su banda de paso. Si consiste de todas las $\omega \leq \omega_c$ para algunas ω_c , tenemos un *filtro de pasa-bajas con frecuencia de corte ω_c* . Si en vez de eso, la banda de paso es el conjunto de frecuencias dadas por encima de una frecuencia de corte ω_c , $\omega \geq \omega_c$, tenemos un filtro pasa-altas. En el caso de un filtro ideal, el valor de la frecuencia de corte ω_c es obvio; es la frecuencia a la que la ganancia salta entre 0 y 1. Para filtros no ideales, necesitamos definir la frecuencia de corte ω_c de forma razonable. Generalmente la definiremos con la frecuencia de semipotencia; en otras palabras, la frecuencia de corte ω_c es la frecuencia a la que la ganancia está 3 dB por debajo de su valor máximo.

Ejemplo 14.12

El circuito divisor de voltaje *RC* simple de la figura 14.21, puede configurarse como un filtro pasa-alta o baja. Definiendo el fasor V_c como salida,

$$H_{LP}(j\omega) = \frac{V_c}{V_{in}} = \frac{1/(j\omega C)}{R + [1/(j\omega C)]} = \frac{1}{j\omega RC + 1} \quad (14.57)$$

La ganancia de este circuito es

$$|H_{LP}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + 1}} \quad (14.58)$$

y aparece graficado en la figura 14.22(a). Puesto que la región de ganancia alta consiste de todas las frecuencias menores a un cierto valor, este es un filtro pasa bajas. Por (14.58), la ganancia máxima ocurre en dc y es igual a la unidad. Tres decibeles bajo que es -3 dB, de forma que la ganancia ω_c debe ser $1/\sqrt{2}$. Además, por (14.58),

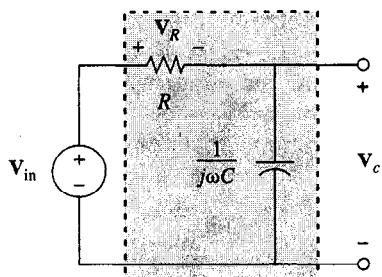


FIGURA 14.21 Circuito de filtro *RC* pasa-bajas o pasa-altas.

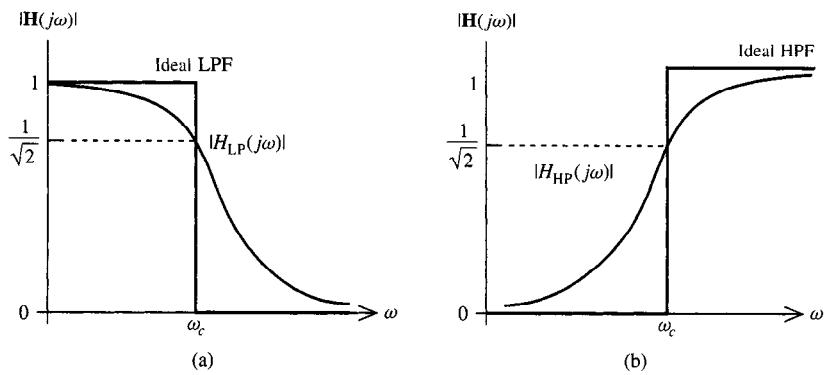


FIGURA 14.22 Curvas de ganancia de filtro pasa-altas y pasa-bajos.

esto ocurre en

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Si en lugar de eso tomamos \mathbf{V}_R como la salida

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{HP}(j\omega) &= \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_{in}} \\ &= \frac{R}{R + [1/(j\omega C)]} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \\ |\mathbf{H}_{HP}(j\omega)| &= \frac{RC\omega}{\sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + 1}} \end{aligned} \quad (14.59)$$

Este es un filtro pasa altas con ganancia máxima conforme $\omega \rightarrow \infty$ igual a la unidad. El punto -3-dB es nuevamente $\omega_c = 1/(RC)$. Para ilustrar el grado de no idealidad en estos filtros RC , impónganse que movemos una década en la banda de paso; por ejemplo, en el caso de pasa-bajos, tenemos $\omega = \omega_c/10 = 1/(10 RC)$. Situada cómodamente dentro de la banda de paso, la respuesta de frecuencia $H_{LP}(j\omega_c/10)$ es

$$\mathbf{H}_{LP} \frac{j}{10RC} = 0.995 \angle -5.7^\circ$$

El filtro ideal tendría una ganancia de unidad y desplazamiento de fase de 0 puesto que están dentro de la banda de paso. Estamos dentro del $\frac{1}{2}\%$ de la ganancia unitaria y dentro de 6° del desplazamiento de fase cero. Este funcionamiento es suficiente para muchos propósitos, aunque no para todos.

Existen otros filtros diseñados para pasar no todas las frecuencias menores o mayores que un límite, sino que pasar una banda intermedia. Un filtro de paso de banda tiene una banda de paso $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$ donde ω_u y ω_l son las frecuencias de media potencia superior e inferior. Un filtro pasa banda tiene una banda de paso dividida, todas las $\omega \leq \omega_l$ y todas $\omega \geq \omega_u$, como se muestra en la figura 14.23.

Puede reproducirse una característica de ganancia de filtro pasa-banda multiplicando las curvas de ganancia de los filtros pasa-altas y pasa-bajos cuyas bandas de paso se fijan para traslaparse. Supongamos que tenemos un circuito para el cual

$$\mathbf{H}_{BP}(j\omega) = \mathbf{H}_{LP}(j\omega)\mathbf{H}_{HP}(j\omega) \quad (14.60)$$

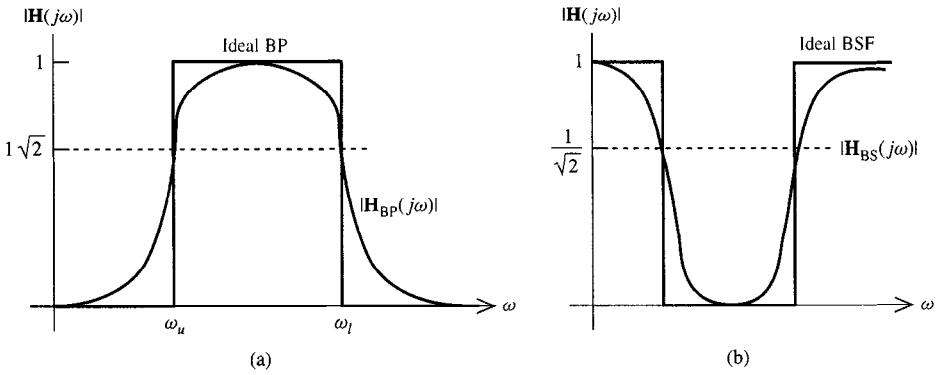


FIGURA 14.23 Curvas de ganancia de filtro pasa-bandas y para detener bandas.

con la frecuencia de corte del filtro pasa-altas ω_{cHP} fijado a un límite menor que el de pasa bajas, $\omega_{cHP} < \omega_{cLP}$. Si estos dos filtros son ideales, entonces tendrán la respuesta de frecuencia de la banda de paso ideal, $H(j\omega) = 1$ para todas las ω entre $\omega_l = \omega_{cHP}$ y $\omega_u = \omega_{cLP}$, y $H(j\omega) = 0$ en todos los demás lugares. Para filtros pasa-altas y pasa-bajas no ideales, la ganancia de la banda de paso de filtro (14.60) será cercana a la unidad donde su banda de paso es $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$ y tendrá una ganancia menor a $1/\sqrt{2}$ fuera de la banda de paso.

¿Cómo producimos un circuito que satisface (14.60)? Durante el resto de este capítulo necesitaremos con frecuencia un circuito cuya función de transferencia sea el producto de funciones de transferencia de otros circuitos conocidos. Así identificaremos las circunstancias bajo las cuales podemos producir un circuito

Supongamos que dos circuitos con funciones de transferencia de voltaje $H_1(s) = V_2(s)/V_1(s)$ y $H_2(s) = V_4(s)/V_3(s)$ se conectan en cascada, donde la salida de uno conectado a la entrada del otro, mediante un interruptor como el que se muestra en la figura 14.24. La función de transferencia $H_1(s)$ se define para $I_2(s) = 0$; de forma que mientras que el interruptor esté abierto, $V_2(s) = H_2(s)V_1(s)$.

Supongamos por un momento que $V_2(s)$ es exactamente el mismo si el circuito en la figura 14.24 está abierto o cerrado. En este caso, con el interruptor cerrado,

$$V_3(s) = V_2(s) = H_1(s)V_1(s) \quad (14.61)$$

y puesto que $V_3(s)$ es la entrada a un circuito con función de transferencia $H_2(s)$,

$$V_4(s) = H_2(s)V_3(s) = H_1(s)H_2(s)V_1(s) \quad (14.62)$$

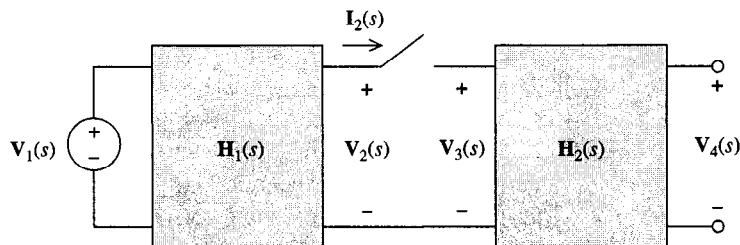


FIGURA 14.24 Circuitos en cascada.

Definiendo la función de transferencia de voltaje general de la interconexión en cascada que aparece en la figura 14.24 como $\mathbf{H}(s)$, por (14.62) tenemos, bajo estas circunstancias,

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_1(s)\mathbf{H}_2(s) \quad (14.63)$$

La condición de que el voltaje de salida $V_2(s)$ cambie significativamente cuando los circuitos están conectados, se conoce como carga y se presentó por primera vez en el capítulo 3. Podemos ver de (14.63) que *en ausencia de carga, la función de transferencia general de una interconexión en cascada, es el producto de las funciones de transferencia individuales*. Si no ocurre la carga, la $V_2(s)$ modificada no es igual a su valor no cargado $\mathbf{H}_1(s)V_1(s)$, (14.61) será verdadera, y la regla de productos para circuitos en cascada (14.63) ya no es vigente.

Reemplazando todo lo que está a la izquierda del interruptor por su equivalente de Thevenin, y haciendo lo mismo a la derecha, suponiendo que no hay fuentes internas en $\mathbf{H}_2(s)$, tenemos la figura 14.25. La impedancia $Z_1(s)$, la impedancia de Thevenin del circuito izquierdo que va de vuelta hacia sus terminales de salida, se conoce como *impedancia de salida*, y $Z_2(s)$ es la *impedancia de entrada* del circuito derecho. Con el circuito abierto, $V_2(s) = V_T(s)$. Al estar cerrado

$$V_2(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V_T(s) \quad (14.64)$$

$V_2(s)$ no cambiará significativamente cuando los circuitos se conectan entre sí si la proporción de impedancia en (14.64) es cercana a la unidad. *La carga no ocurrirá cuando dos circuitos están conectados en cascada si la impedancia de la entrada del circuito de carga es mucho mayor que la impedancia de salida del circuito de fuente*. En este caso, podemos utilizar la regla de productos (14.63); de otro modo, no podemos hacerlo.

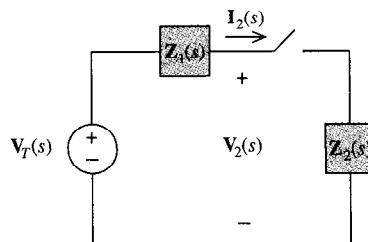


FIGURA 14.25 Equivalente Thevenin de circuitos en cascada.

Ejemplo 14.13

Supongamos que conectamos en cascada un filtro pasa-bajas RC con $\omega_{cLP} = 10$ y un pasa-altas RC con $\omega_{cHP} = 1$ rad/s como se muestra en la figura 14.26. Si suponemos que no hay carga, tendremos un filtro pasa-bandas con frecuencias de potencia medias muy cercanas a $\omega_l = 1$ y $\omega_u = 10$ rad/s. Sin embargo, la función de transferencia general real puede calcularse de las ecuaciones de malla de dominio-s:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{10}{s} & -\frac{10}{s} \\ -\frac{10}{s} & 1 + \frac{11}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

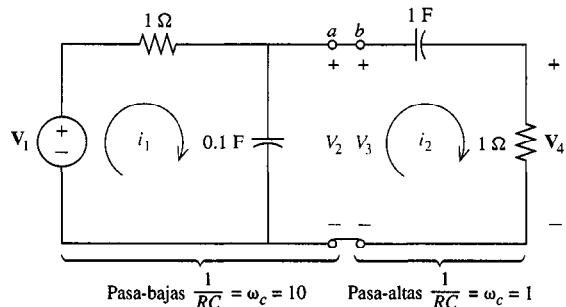


FIGURA 14.26 Cascada de filtros pasivos pasa-bajas y pasa-altas.

Por la regla de Kramer

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2(s) &= \frac{(10/s)\mathbf{V}_1(s)}{1 + (21/s) + (10/s^2)} \\ &= \frac{10s\mathbf{V}_1(s)}{s^2 + 21s + 10} \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{I}_2(s) = \mathbf{V}_4(s)$, la función de transferencia general verdadera es

$$\mathbf{H}(s) = \frac{10s}{s^2 + 21s + 10} \quad (14.65)$$

Si suponemos que no hay carga, la función de transferencia real sería el producto de las funciones de transferencia pasa-altas y pasa-bajas:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{LP}(s)\mathbf{H}_{HP}(s) &= \left[\frac{1}{0.1s + 1} \right] \left[\frac{s}{s + 1} \right] \\ &= \frac{10s}{s^2 + 11s + 10} \end{aligned} \quad (14.66)$$

Claramente, (14.65) y (14.66) son sumamente distintos. Por ejemplo, cuando $s = j\omega = j$, la verdadera ganancia de (14.65) es $|\mathbf{H}(j)| = 0.438$, en tanto que la regla de producto en (14.66) predice una ganancia de $|\mathbf{H}_{LP}(j)| |\mathbf{H}_{HP}(j)| = 0.704$. *El efecto de la carga es reducir la respuesta general.*

Si insertamos un seguidor de voltaje, presentado en el capítulo 3, en este circuito, para que funcione como amplificador amortiguador entre a y b para eliminar la carga, en este caso tendremos que la impedancia de entrada del circuito a la derecha de a es esencialmente infinita (el principio de circuito abierto virtual para el análisis amp op), de forma que ya no puede ocurrir una carga. La función de transferencia general para la figura 14.27 será el producto de las funciones de transferencia de los circuitos en cascada dados por (14.66).

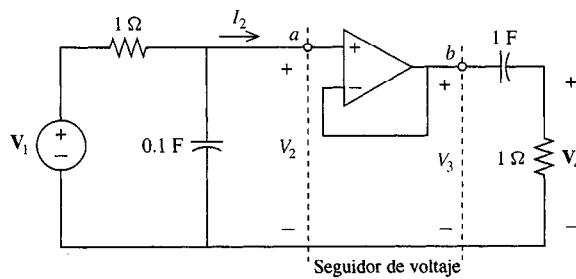


FIGURA 14.27 Inserción de un seguidor de voltaje para eliminar sobrecarga.

De este modo, si ponemos suficiente cuidado para evitar la carga, quizá separando etapas con un amplificador de amortiguación con una impedancia de entrada sumamente alta como un seguidor de voltaje, podemos seguir en circuitos en cascada cuyas funciones de transferencia son productos de las funciones de transferencia individuales en cascada. El circuito de la figura 14.27 tiene la característica y ganancia de banda de paso deseada que se muestra en la figura 14.23.

Finalmente, un filtro pasa-bandas característico puede ser producido restando una respuesta de frecuencia de banda de paso de la unidad:

$$H_{BS}(j\omega) = 1 - H_{BP}(j\omega)$$

De forma que siempre que la ganancia de la banda de paso se acerca a 1, el del pasa-bandas estará cerca de cero, y viceversa, como se muestra en la figura 14.23(b).

¿Con qué elementos físicos se diseñan los filtros? Un filtro construido enteramente de elementos pasivos (*RLC*) es un *filtro pasivo*. Si se usan op amps u otros circuitos con dispositivos electrónicos que requieren de suministros de potencia, obtenemos un *filtro activo*. Aunque tiene obvias desventajas de cantidad de componentes y consumo de potencia, los filtros activos son con mucha frecuencia la elección para aplicaciones de diseños de filtros prácticos. También existen serias limitaciones para usos de filtros pasivos, como las describiremos a continuación.

Los filtros pasivos que corresponden a funciones de transferencia que contienen factores de parejas de raíces complejas requieren inductores y capacitores, y los inductores tienden a ser elementos indeseables en el diseño moderno de circuitos miniaturizado. Ocupan mucho espacio, son costosos y tienen suficiente resistencia en serie para hacerlos generalmente útiles únicamente en aplicaciones de *Q* relativamente baja. Además, los inductores no pueden incluirse en circuitos integrados muy delgados, que utilicen efectivamente la tecnología actual. Los filtros pasivos son *dissipativos*; en otras palabras, no pueden tener ganancias mayores que la unidad en cualquier frecuencia. Además, como vimos en el ejemplo anterior, el conectar filtros pasivos en cascada produce carga, que hace más difícil el proceso del diseño, puesto que las funciones de transferencias generales no pueden predecirse con precisión a partir del productor de las funciones de transferencia de cada uno de los filtros. Los filtros activos no requieren de inductores, pueden tener cualquier ganancia que se desee, y pueden diseñarse fácilmente para ser altamente resistentes a la sobrecarga, como ya hemos visto.

Ejemplo 14.14

Diséñese un filtro pasa-bajas de tercer orden, con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 5)(s + 20)}$$

Podemos conectar en cascada tres filtros pasa-bajas con funciones de transferencia $1/(s + 1)$, $1/(s + 5)$, y $1/(s + 20)$ y obtener la función de transferencia general antes descrito, poniendo cuidado en utilizar un seguidor de voltaje para amortiguar las secciones del filtro.

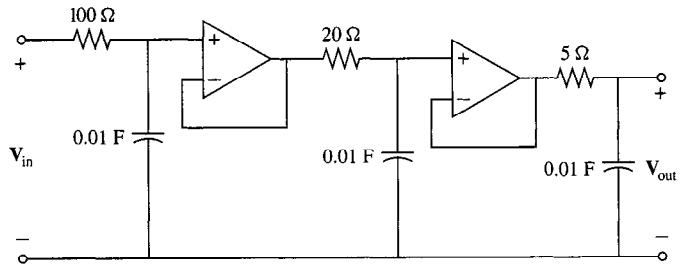


FIGURA 14.28 Circuito para el ejemplo 14.14.

Utilizando (14.59), podemos seleccionar R o C arbitrariamente de una sección dada y luego seleccionar el otro para que el polo requerido esté situado en $s = -1/(RC)$. Eligiendo capacitores que sean cada uno de 0.01 F, tenemos el diseño que se muestra en la figura 14.28. En tanto que esta función de transferencia también puede realizarse utilizando elementos pasivos RC , es un método menos directo de diseño, puesto que las etapas sucesivas sobrecargarán una a la otra.

En resumen, los filtros son dispositivos que suprimen selectivamente ciertos rangos de frecuencias, en tanto que promueven otros. Son utilizados con frecuencia para suprimir ruido aleatorio, aumentar bandas donde residen las señales importantes, y eliminar señales específicas de interferencia tales como "zumbido" de 60-Hz. Los filtros pueden conectarse en cascada para lograr una función de transferencia de producto si no hay sobrecarga, y la sobrecarga puede evitarse por el uso de amplificadores amortiguadores como lo son los seguidores de voltaje. Ya se han analizado los filtros RC simples con y sin amortiguación. Los cuatro filtros básicos, el pasa-bajas, pasa-altas, pasa-bandas y para detener bandas descritos anteriormente, pueden aumentarse en muchos más: filtros que pasan todas las frecuencias que operan para manipular fase en lugar de ganancia, filtros de peinado con bandas de paso múltiples y espaciadas a intervalos regulares, y así sucesivamente. Pero todo filtro, sin importar su complejidad, puede construirse a partir del conocimiento de su función de transferencia utilizando un método simple de conectar en cascada componentes activos elementales, como veremos en la siguiente sección.

EJERCICIOS

- 14.6.1.** ¿Qué clase de filtro es este circuito pasivo RL con $H(s) = V_L(s)/V_{in}(s)$? ¿Cuál es la frecuencia de su potencia media ω_c ? Repítase para $H(s) = V_R(s)/V_{in}(s)$.

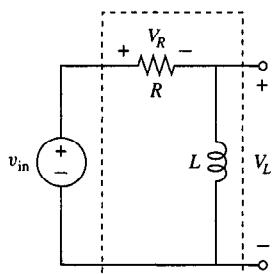
Respuesta Pasa-altas, R/L ; pasa-bajas, R/L

- 14.6.2.** ¿Qué clase de filtro es $H(s) = s^2/(s^2 + 2\sqrt{2}\omega_n s + \omega_n^2)$? ¿Cuál es su frecuencia de media potencia?

Respuesta Pasa-altas, ω_n

- 14.6.3.** La sobrecarga es con frecuencia dependiente. Si se conectan en cascada dos filtros idénticos pasa-bajas RC (ver figura 14.21 con $R = C = 1$), ¿a qué frecuencia no habrá una sobrecarga? ¿Cuál es la proporción de la verdadera ganancia en $\omega = 1$ rad/s contra el producto de las dos ganancia individuales de filtro? En $\omega = 100$ rad/s?

Respuesta dc; $\frac{2}{3}$; 0.9998



EJERCICIO 14.6.1

La función de transferencia de un circuito lineal $\mathbf{H}(s)$, o de manera equivalente la función de respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$, nos dice lo que el circuito “hace”. Describe la forma en que el circuito procesará cualquier componente de frecuencia o combinación de componentes de frecuencia presentes en su entrada. Para una $\mathbf{H}(s)$ dada, podemos dibujar una gráfica de ganancia de Bode para ver si la función de transferencia resulta en el comportamiento de circuito deseado para el filtro que estamos trabajando. El tamaño y lugar de las bandas de paso y de interrupción de banda, así como las ganancias en estas bandas y las pendientes entre ellas, están determinadas por $\mathbf{H}(s)$. Todas estas pueden modificarse ajustando paso a paso los polos, ceros y el factor constante en $\mathbf{H}(s)$.

Una vez que hemos seleccionado una función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ que satisface las necesidades de nuestro diseño, nos enfrentamos con el *problema de la realización: obtener un circuito cuya función de transferencia sea $\mathbf{H}(s)$* . En la presente sección desarrollaremos un procedimiento general de diseño para resolver el problema de realización utilizando únicamente resistencias, capacitores y op amps, es decir, un procedimiento que resulta en una solución de filtro activo sin inductores. Como hicimos notar en la sección anterior, los inductores tienen desventajas como elementos de circuito en los modernos diseños electrónicos miniaturizados, y la habilidad de multiplicar las funciones de transferencia en cascada hace que el diseño de filtros activos sea más simple que el diseño pasivo para todos los filtros, exceptuando los de orden menor.

Necesitaremos los circuitos de componentes presentados en el capítulo 3. Sus diagramas de circuito y ecuaciones de transferencia de voltaje aparecen en la tabla 14.2. Los dos sumadores que se muestran pueden tener más de dos entradas, en cuyo caso la ecuación de transferencia de voltaje tiene los correspondientes términos adicionales.

Las ecuaciones de transferencia de voltaje en la tabla 14.2 pueden interpretarse en términos de funciones de tiempo $v_i(t)$, como en el capítulo 3, o en término de fasores \mathbf{V}_i o voltajes $\mathbf{V}_i(s)$ en el dominio-s, si esto es conveniente. En estos últimos casos, al revisar rápidamente sus derivaciones en el capítulo 3, *confirma que las mismas ecuaciones se aplican si las resistencias en estos componentes son reemplazados por impedancias*. Los circuitos resultantes son más filtros que amplificadores, y filtros sumadores más que sumadores.

Ejemplo 14.15

Analicemos el circuito de la figura 14.29. Es un filtro inversor con impedancias $Z_F(s) = R_F$ y $Z_A(s) = RA + 1/(sC)$. La ecuación de trans-

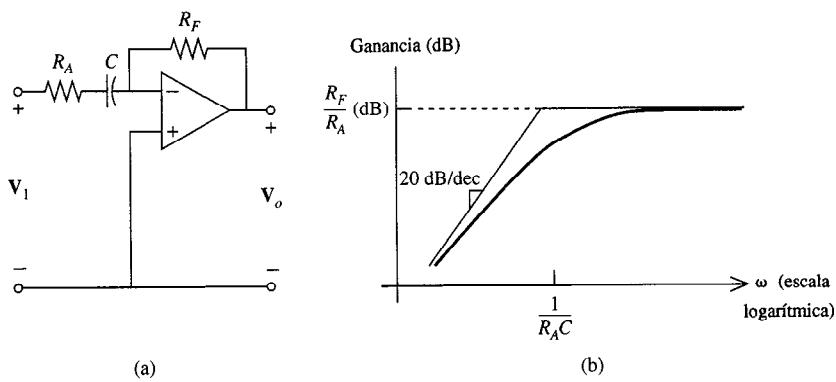
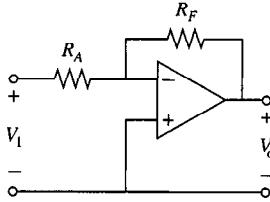
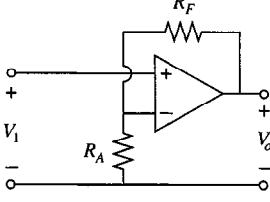
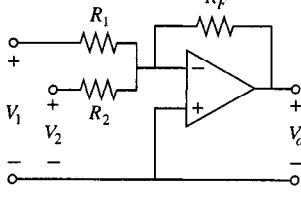
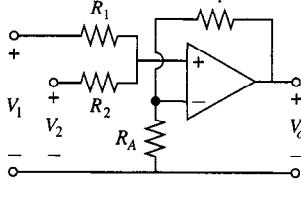


FIGURA 14.29 (a) Filtro inversor $H(s) = -Z_F(s)/Z_A(s)$; (b) Gráfica de ganancia de Bode.

Tabla 14.2 Circuitos Componentes

Componente	Diagrama de circuito	Ecuación de transferencia de voltaje
Amplificador inversor		$V_o = \frac{R_F}{R_A} V_1$
Amplificador no inversor		$V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right) V_1$
Sumador inversor		$V_o = -\frac{R_F}{R_1} V_1 + \frac{R_F}{R_2} V_2$
Sumador no inversor		$V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right) \left(\frac{R_T}{R_1} V_1 + \frac{R_T}{R_2} V_2\right)$ donde $R_T = R_1 \parallel R_2$

ferencia de voltaje para este circuito es la de un amplificador inversor con impedancias que sustituyen a la resistencia:

$$\mathbf{V}_0(s) = \frac{-\mathbf{Z}_F(s)}{\mathbf{Z}_A(s)} \mathbf{V}_1(s) \quad (14.67)$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-R_F}{R_A + [1/(sC)]} = \frac{-(R_F/R_A)s}{s + [1/(R_AC)]}$$

Hay un polo en $s = -1/(R_AC)$ y un cero en $s = 0$. La gráfica de ganancia de Bode para este circuito aparece en la figura 14.29(b). Nótese que es un filtro pasa-altas cuya ganancia de banda de paso puede fijarse por la proporción R_F/R_A y cuya frecuencia máxima es $\omega_c = 1/(R_AC)$. No podemos obtener ganancias mayores que la unidad con diseños de filtro pasivo.

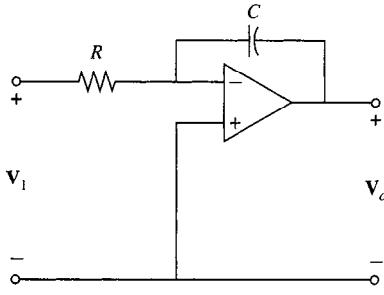


FIGURA 14.30 Integrador inversor.

Un filtro inversor que será de particular interés para nosotros es el *integrador inversor* que aparece en la figura 14.30. Su función de transferencia está dada por

$$\mathbf{H}(s) = -\frac{\mathbf{Z}_F(s)}{\mathbf{Z}_A(s)} = \frac{-1/(RC)}{s} \quad (14.68)$$

La propiedad de integración de las transformadas de Laplace que aparecen en la tabla 12.2 nos demuestran que

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{-1}{(RCs)} \mathbf{V}_1(s) \quad (14.69)$$

lo que implica que en el dominio del tiempo

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int v_1(t) dt \quad (14.70)$$

La salida es una integral invertida y multiplicada de la entrada.

Ahora estamos listos para desarrollar un procedimiento para realizar cualquier función de transferencia racional $\mathbf{H}(s)$ cuyo polinomio denominador es por lo menos del mismo orden que su numerador. Esto incluye todas las funciones racionales propias (el orden del numerador es menor al del denominador) y aquellos de orden igual. Factorizando $\mathbf{H}(s)$ en un producto de funciones de transferencia:

$$\mathbf{H}(s) = K \mathbf{H}_1(s) \mathbf{H}_2(s) \dots \mathbf{H}_q(s) \quad (14.71)$$

donde cada $\mathbf{H}_i(s)$ es de la forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} \quad (14.72)$$

correspondiente al polo real $s = -a_0$ en $\mathbf{H}(s)$, o de la forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (14.73)$$

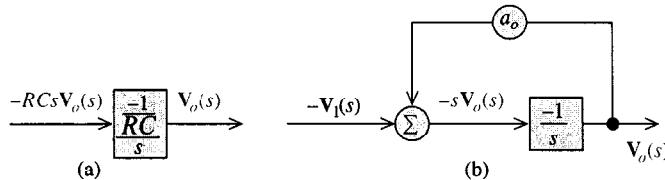


FIGURA 14.31 a) Bloques de integrador inversor; b) $H(s) = 1 / (s + a_0)$.

correspondiente a pares de polos conjugados complejos en $H(s)$. La ecuación (14.72) se conoce como función de transferencia *bilineal*, puesto que tanto el numerador con el denominador son polinomios lineales y (14.73) se conoce como función de transferencia *bicuadrática* (*bicuad*). Nuestra estrategia será realizar separadamente cada factor bilineal y bicuadrático, y luego conectar en cascada los circuitos resultantes, satisfaciendo de este modo (14.71) en ausencia de carga, lo que garantizaremos por uso de op amps con alta impedancia de entrada. El factor de ganancia constante K en (14.71) se situará como nos sea conveniente entre los circuitos bilineales y bicuadráticos.

La columna vertebral de nuestra realización es el integrador inversor de la figura 14.30, que aparece en forma de diagrama de bloque en la figura 14.31(a). Si marcamos su salida como $V_o(s)$, entonces por (14.68) su entrada debe ser $-RCV_o(s)$. Fijando $RC = 1$ para nuestra conveniencia, supongamos que multiplicamos $V_o(s)$ por a_o , los sumamos con $-V_1(s)$, y conectamos la salida del bloque sumador a la entrada del bloque integrador inversor como se muestra en la figura 14.31(b). Entonces forzamos a la salida del sumador a que sea igual a $-sV_o(s)$, o, por el diagrama,

$$a_o V_o(s) - V_1(s) = -sV_o(s) \quad (14.74)$$

Despejando para $V_o(s)$,

$$V_o(s) = \frac{1}{s + a_o} V_1(s) \quad (14.75)$$

Puesto que nuestro objetivo es la $H(s)$ en (14.72), esto nos da una función de transferencia con el denominador correcto. Ahora multipliquemos y sumemos las señales y salida del bloque integrador inversor que aparece en la figura 14.32, marcándola salida $V_2(s)$. Por la figura obtenemos

$$V_2(s) = [(-b_1)(-sV_o(s))] + b_o V_o(s) = (b_1 s + b_o) V_o(s) \quad (14.76)$$

que por (14.75) es

$$V_2(s) = \frac{b_1 s + b_o}{s + a_o} V_1(s) \quad (14.77)$$

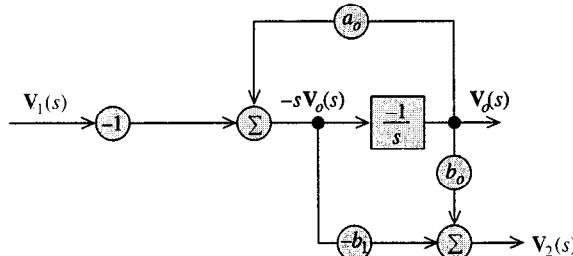


FIGURA 14.32 Diagrama de bloque bilineal $H(s) = (b_1 s + b_0) / (s + a_0)$.

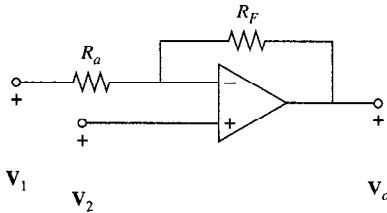


FIGURA 14.33 Circuito básico para sumar signos distintos.

Esta es la función de transferencia bilineal (14.72) que buscamos. Examinando la figura 14.32, producir circuito requiere de un integrador inversor y dos dispositivos que multipliquen y sumen. Si los signos en los dos coeficientes multiplicadores las entradas a los sumadores son los mismo, podemos utilizar el sumador inversor (si son ambos negativos) o el sumador no inversor (si son positivos) que se muestra en la tabla 14.2 para construir los bloques multiplicadores y sumadores que se muestran en el diagrama de bloque.

Si las entradas son de signos distintos, debemos utilizar un circuito que combine los amplificadores inversores y no inversores que se muestran en la figura 14.33. Mediante superposición, haremos un corto de V_2 a tierra y determinaremos la respuesta a V_1 . Con V_2 en corto, el circuito no es más que un amplificador inversor, de forma que

$$V_{o1} = \frac{-R_F}{R_a} V_1 \quad (14.78)$$

donde V_{o1} es el componente de V_o debido a la entrada 1. Devolviendo V_2 y luego haciendo corto de V_1 , tenemos un amplificador no inversor

$$V_{o2} = \frac{1 + R_F}{R_a} V_2 \quad (14.79)$$

de forma que, por superposición, la ecuación de transferencia de voltaje es la suma

$$V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_a}\right) V_1 - \frac{R_F}{R_a} V_2 \quad (14.80)$$

Por consiguiente, el circuito simple de la figura 14.33 suma y multiplica con términos de signos distintos. Pero no toda combinación de coeficientes es posible. Por ejemplo, podemos obtener $V_o = 3V_1 - 2V_2$ fijando $R_F/R_a = 2$, pero no podemos obtener $V_o = 4V_1 - 2V_2$ utilizando este circuito, sin importar qué proporción R_F/R_A usemos.

Supongamos que añadimos un divisor de voltaje en la entrada positiva que se muestra en la figura 14.34(a). El voltaje en la entrada no inversora seguirá quedando multiplicada por $1 + (R_F/R_a)$ como en (14.79), pero el voltaje en la entrada no inversora es ahora $[R_2/(R_1 + R_2)]V_2$. La nueva ecuación de transferencia de voltaje es, por consiguiente

$$V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_a}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 - \frac{R_F}{R_a} V_2 \quad (14.81)$$

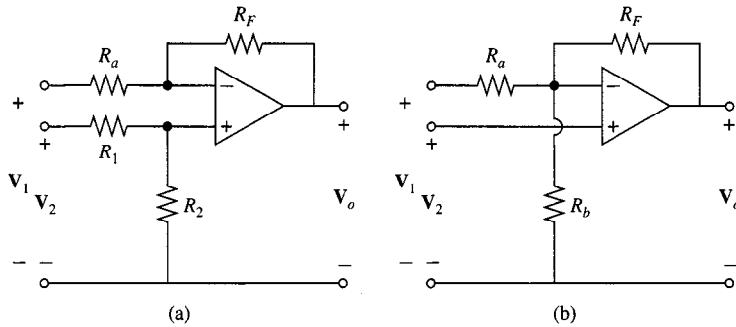


FIGURA 14.34 (a) Divisor de voltaje para coeficientes positivos pequeños; (b) Resistencia adicional para grandes coeficientes positivos.

Puesto que el divisor de voltaje reduce el primer término, podemos utilizar este circuito para obtener cualquier coeficiente negativo $-R_F/R_a$ y cualquier coeficiente positivo es menor que $1 + (R_F/R_a)$, el coeficiente positivo que obtuvimos de (14.80).

Finalmente, para ver la forma de obtener un coeficiente positivo que excede a $1 + (R_F/R_a)$, consideremos la figura 14.34(b). Se añadió una resistencia adicional al circuito básico de la figura 14.33 entre la entrada inversora y tierra. Utilizando superposición para determinar la función de transferencia de voltaje, la componente debida a V_1 queda sin modificar de (14.78), pero cuando se corta V_1 , el amplificador no inversor resultante tiene R_a en (14.79), sustituido por el equivalente en paralelo de R_a y R_b al que llamaremos R_A .

$$R_A = R_a \parallel R_b \quad (14.82)$$

$$\text{y} \quad V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_A}\right) V_1 - \frac{R_F}{R_a} V_2 \quad (14.83)$$

Puesto que R_A puede ser tan pequeña como deseemos según la selección de R_b , con el circuito de la figura 14.33(b) podemos obtener cualquier coeficiente negativo $-R_F/R_a$ junto con cualquier coeficiente positivo mayor que $1 + (R_F/R_a)$.

Resumir las consideraciones de diseño para un sumador que involucre coeficientes de entrada de ambos signos, fijemos $-R_F/R_a$ al coeficiente negativo deseado. Luego, si el coeficiente positivo es menor que $1 + (R_F/R_a)$ utilícese el divisor de voltaje de la figura 14.34(a); si es mayor, utilícese la resistencia adicional de la figura 14.34(b). Si el coeficiente positivo requerido es exactamente $1 + (R_F/R_a)$, no se necesita de ninguna modificación en el circuito básico de la figura 14.33.

Ejemplo 14.16

Obtengamos realizaciones de $V_3 = V_1 - V_2$, y $V_4 = 4V_1 - 2V_2$. Para el primer caso tenemos $-R_F/R_a = -1$, de forma que $1 + (R_F/R_a) = 2$. El coeficiente positivo que necesitamos es menor por un factor de 2, de forma que debemos dividir el voltaje con $R_1 = R_2$. En la figura 14.35(a) aparece un circuito con estos valores.

Para el segundo caso, $-R_F/R_a = -2$ de forma que $1 + (R_F/R_a) = 3$. Necesitamos un coeficiente de 4, de modo que requerimos una resistencia adicional de la terminal inversora a tierra. Puesto que necesitamos $1 + (R_F/R_A) = 4$.

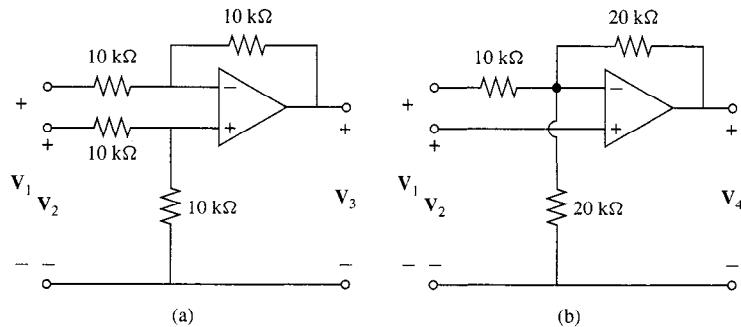


FIGURA 14.35 (a) $V_3 = V_1 - V_2$; (b) $V_4 = 4V_1 - 2V_2$.

Entonces,

$$\frac{R_F/R_a}{R_F/R_A} = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3}$$

De forma que $R_A = \frac{2}{3} R_a$. En términos de conductancia, $G_A = \frac{3}{2} G_a = G_a + G_b$, puesto que R_a y R_b están en paralelo. De forma que $G_b = \frac{1}{2} G_a$ y $R_b = 2R_a$, completando el diseño que aparece en la figura 14.35(b).

El diagrama en bloque para el circuito bilineal, figura 14.32, contiene únicamente integradores inversores y sumadores multiplicadores. Utilizando el método anterior para realizar estos módulos, puede realizarse en cualquier $\mathbf{H}(s)$ bilineal con resistencias, capacitores y op amps.

Ejemplo 14.17

Obtenga un circuito con $\mathbf{H}(s) = (b_1s + b_o)/(s + a_o) = (s - 2)/(s + 1)$. Examinando el diagrama de bloques de la figura 14.32, necesitamos un sumador de entrada con coeficiente +1 y -1, y un sumador de salida con coeficientes -1 y -2. El primero fue tratado en el ejemplo anterior, y el segundo puede realizarse mediante un sumador inversor de dos entradas con $R_F/R_a = 1$ y $R_F/R_b = 2$. También necesitamos el integrador inversor con $1/(RC) = 1$ que aparece en el diagrama de bloques. El diagrama de circuito que realiza esta función de transferencia bilineal aparece en la figura 14.36.

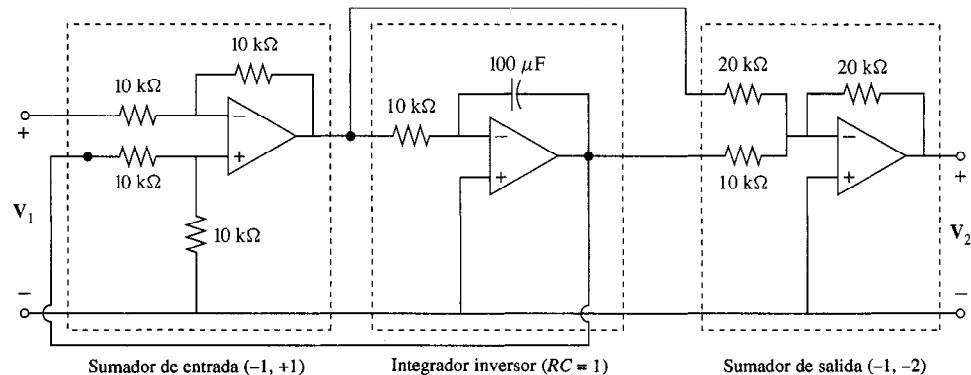


FIGURA 14.36 Realización bilineal para el ejemplo 14.17.

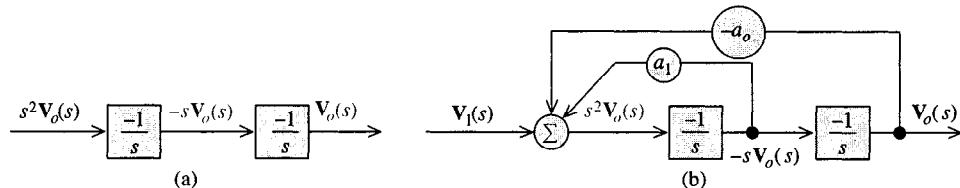


FIGURA 14.37 (a) Integrador doble; (b) $H(s) = 1/(s^2 + a_1s + a_o)$.

El otro tipo de función de transferencia en la cascada (14.71) es la forma biquadrática dada en (14.73). Al igual que en el circuito bilineal, primero consideraremos una función de transferencia relacionada.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_o} \quad (14.84)$$

Puesto que este es un sistema de segundo orden, necesitaremos dos integradores, como se muestra en la figura 14.37(a). Multiplicando (14.84) tenemos

$$s^2V_o(s) = -a_1sV_o(s) - a_oV_o(s) + V_1(s) \quad (14.85)$$

Por la figura 14.37(a), esta ecuación es verdadera si la entrada al integrador de la izquierda es la suma de los tres términos a la derecha, lo que resulta en el diagrama de bloques como aparece en la figura 14.37(b). Al multiplicar y sumar la salida de los bloques integradores y el bloque de sumador de entrada, llegamos a la realización biquadrática deseada. Por la figura 14.38 y (14.84).

$$V_2(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_o)V_o(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_o}{s^2 + a_1s + a_o}V_1(s)$$

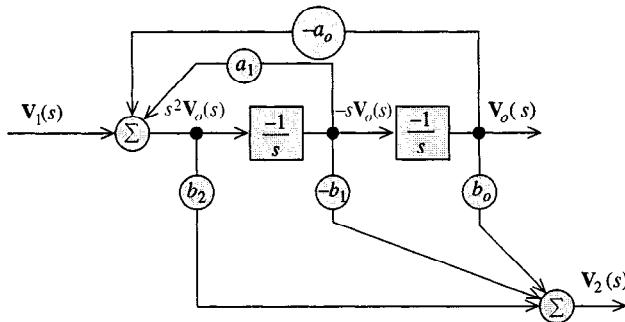


FIGURA 14.38 Diagrama de bloque biquadrático: $H(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_o)/(s^2 + a_1s + a_o)$.

Ejemplo 14.18

Buscamos una realización biquadrática de la función de transferencia de un circuito *RLC* en serie dado en (14.43) para los valores $R = 4 \Omega$, $L = 4 \text{ H}$, y $C = 1/8 \text{ F}$; es decir

$$H(s) = \frac{\frac{1}{4}s}{s^2 + s + 2} \quad (14.86)$$

Por la figura 14.38, necesitaremos dos integradores inversores y un sumador de entrada con coeficientes $a_o = 2$, $-a_1 = -1$, y una tercera entrada con coeficiente 1 para $V_1(s)$. Puesto que sólo tenemos una b_i no nula, el sumador de salida acostumbrado queda reemplazado por un amplificador inversor de salida, con ganancia $-b_1 = -\frac{1}{4}$.

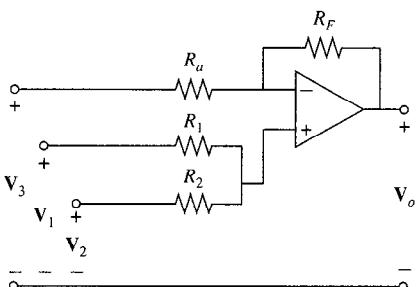


FIGURA 14.39 Sumador con dos entradas positivas.

Para satisfacer el requerimiento de ganancia de entrada inversa de -1 , el sumador de entrada debe tener $-R_F/R_a = -1$, pero debemos considerar dos entradas positivas, como se muestra en la figura 14.39. Utilizando superposición, se obtiene la ganancia g_1 en V_1 conectando a las otras entradas a tierra, que, por la figura, es $[1 + (R_F/R_a)][R_2/(R_1 + R_2)] = 2 R_2/(R_1 + R_2)$. Similarmente, la ganancia sobre V_2 es $g_2 = 2R_1/(R_1 + R_2)$. La proporción de estas ganancias es $g_1/g_2 = R_2/R_1$ y, por los coeficientes dados 1 y 2 para estas entradas, podemos fijarlo a $g_1/g_2 = \frac{1}{2}$. Pero si $R_2 = \frac{1}{2} R_1$, entonces $g_1 = 2(\frac{1}{2} R_1)/(R_1 + \frac{1}{2} R_1)$ o $g_1 = 2/3$, que es demasiado bajo. Para aumentar la ganancia necesitamos una resistencia adicional R_b . Tendremos $g_1 = 1$ como se desea si $1 + (R_F/R_A) = 3$ en lugar de su valor real 2. Esto implica que $R_A = \frac{1}{2} R_F$, donde $R_A = R_a \| R_b$. Puesto que $R_a = R_F$, esto fija $R_b = R_F$. La ganancia del amplificador inversor de salida es $-R_F/R_A = -\frac{1}{4}$, y $RC = 1$ para los integradores. En la figura 14.40, se muestran las elecciones finales, donde seleccionamos $R_F = 50 \text{ k}\Omega$ para el sumador y el amplificar y $R = 50 \text{ k}\Omega$ para los integradores. Estas elecciones finales son de algún modo arbitrarias, y su selección será examinada en breve, al discutir la multiplicación.

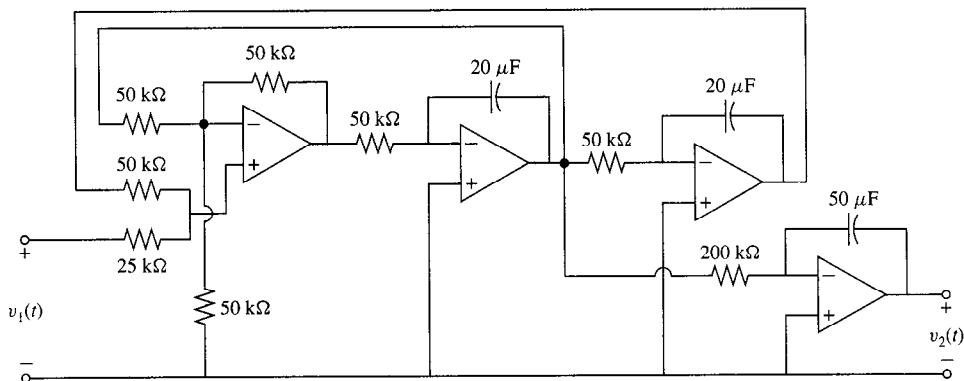


FIGURA 14.40 Realización biquadrática para el ejemplo 14.18.

La técnica desarrollada en esta sección puede utilizarse para realizar cualquier $\mathbf{H}(s)$ cuyo polinomio denominador es del mismo grado mayor que el numerador. Factorícese $\mathbf{H}(s)$ en funciones de transferencia bilineales y biquadráticas, realíicense cada una como se hizo anteriormente, y conéctese en cascada.

Ejemplo 14.19

Usaremos los resultados de los dos últimos ejemplos para realizar la función de transferencia

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s(s-2)^2}{(s^2+s+2)(s+1)^2}$$

Esta función de transferencia se factoriza en las siguientes formas bilineales y cuadráticas.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s}{s^2+s+2} \frac{s-2}{s+1} \frac{s-2}{s+1}$$

La solución es una cascada de tres circuitos (Figura 14.41). Dos son idénticos, los circuitos de la figura 14.36, con función de transferencia $(s-2)/(s+1)$.

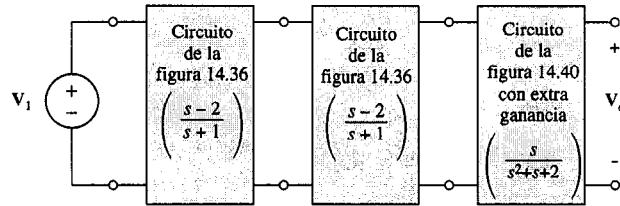


FIGURA 14.41 Realización en cascada para el ejemplo 14.19.

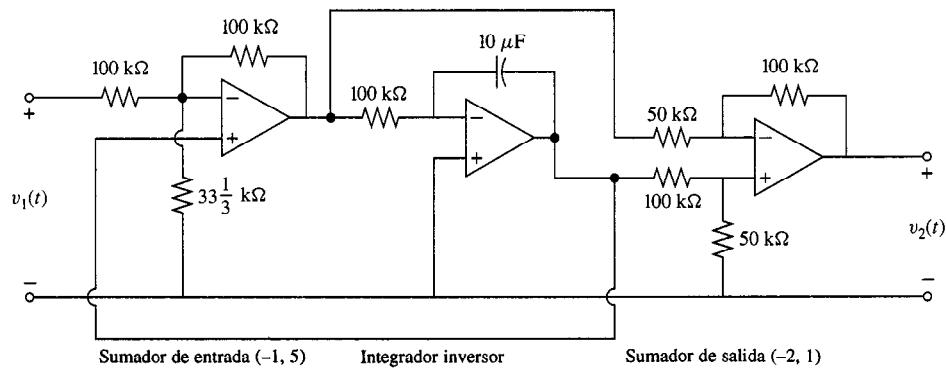
El tercero es el circuito de la figura 14.40, con función de transferencia $\frac{1}{4}s/(s^2 + s + 2)$, pero con un factor constante agregado de 4. Este factor constante adicional puede insertarse multiplicando la entrada por 4, o multiplicando la salida por 4. Esto último puede hacerse fácilmente reemplazando la resistencia de $200\text{-k}\Omega$ en el amplificador de salida por uno de $50\text{ k}\Omega$, cambiando su ganancia de $-\frac{1}{4}$ a -1 . Estos tres circuitos pueden conectarse en cascada en cualquier orden.

En el ejemplo anterior asociamos el factor constante de 4 en las funciones de transferencia con el circuito biquadrático, pero lo pudimos distribuir entre todos los circuitos en cascada, en cualquier conjunto conveniente de factores constantes multiplicados por 4.

En la presente sección presentamos una técnica general para realizar, es decir, obtener un diagrama de circuito que produce cualquier función de transferencia deseada $H(s)$ cuyo polinomio denominador es por lo menos del mismo orden que el numerador. Este procedimiento produce una cascada de circuitos bilineales de primer orden (denominadores de primer orden) y circuitos biquadráticos de segundo orden. Cada uno contiene únicamente sumadores multiplicadores e integradores inversores, construyendo circuitos de bloque que usan únicamente resistencias, capacitores, y op amps. Puede diseñarse independientemente cada circuito en la cascada, y de forma similar, pueden diseñarse independientemente los bloques integradores y sumadores dentro de un circuito dado.

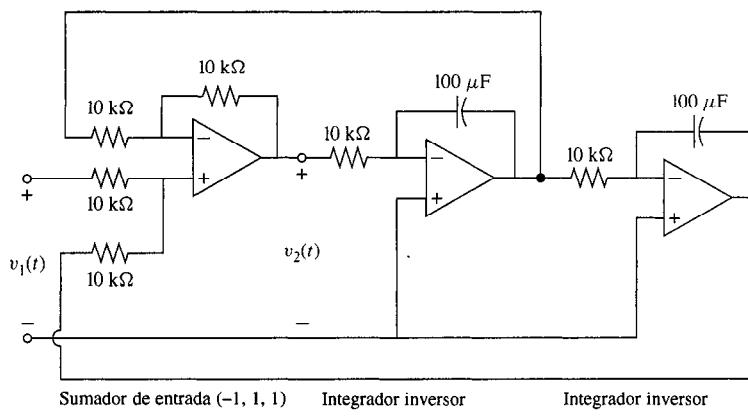
EJERCICIOS

14.7.1. Diseñe un circuito con función de transferencia bilineal $H(s) = (2s + 1)/(s + 5)$. La mayor resistencia es de $100\text{ k}\Omega$.



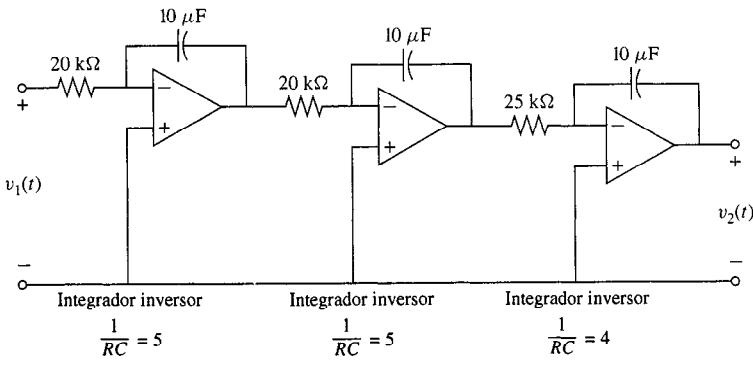
EJERCICIO 14.7.1

14.7.2. Diseñe un circuito con función de transferencia biquadrática $H(s) = s^2/(s^2 + s + 1)$. Fije la resistencia menor en $10\text{ k}\Omega$.



EJERCICIO 14.7.2

14.7.3. Diseñe un circuito con la función de transferencia de tercer orden $H(s) = -100/s^3$.



EJERCICIO 14.7.3

14.8 ESCALAMIENTO

Se han utilizado valores numéricos como $R = 1\Omega$, $C = 2\text{ F}$ y $\omega = 1\text{ rad/s}$ en casi todos los ejemplos, ejercicios y problemas. Aunque son convenientes para propósitos pedagógicos y facilitan la labor de cálculos manuales, el uso de estos valores pueden preocupar al lector, puesto que no son parámetros de circuitos prácticos para aplicaciones realistas.

Afortunadamente, podemos tener lo mejor de ambos mundos. Podemos enmarcar un problema en un contexto numérico simple, resolverlo, y luego convertir la solución a un rango más práctico de operaciones de circuito. El proceso de conversión se conoce como *multiplicación*. En esta sección discutiremos dos tipos de multiplicación, la multiplicación de impedancia y la multiplicación de frecuencia.

Para un circuito dado, la multiplicación de impedancia por α es la especificación de un nuevo conjunto de parámetros de circuitos para el circuito, tales que el voltaje queda intacto, pero todas las corrientes que están multiplicadas por la constante $1/\alpha$. Para ver la forma en que puede multiplicarse la impedancia de un circuito, considérense sus ecuaciones de malla en la forma vector-matriz:

$$\mathbf{ZI} = \mathbf{V}_s \quad (14.87)$$

\mathbf{I} es el vector de corrientes de malla, \mathbf{V}_s es el vector de fuente independiente, y \mathbf{Z} una matriz de conexión cuadrada. Si podemos obtener nuevo circuito cuya matriz de conexión se multiplica a $\alpha\mathbf{Z}$ pero cuyo vector de fuente \mathbf{V}_s queda sin modificar, entonces de (14.87) se implica que

$$(\alpha\mathbf{Z}) \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{V}_s \quad (14.88)$$

cada una de las corrientes quedará multiplicada por $1/\alpha$. Habiendo estudiado análisis de malla, sabemos que el elemento en la diagonal (i, i) de \mathbf{Z} contiene la suma de todas las impedancias alrededor de la malla i -ésima, y los elementos fuera de la diagonal, la suma negativa de impedancias en la frontera entre las mallas i -ésima y j -ésima. Si no hay fuentes controladas en el circuito, entonces \mathbf{Z} consiste enteramente de estas impedancias, y quedará multiplicada como en (14.88) si cada impedancia es multiplicada por α . Es decir, debemos reemplazar cada RLC en el circuito original por

$$R_s = \alpha R, \quad L_s = \alpha L, \quad C_s = \frac{C}{\alpha} \quad (14.89)$$

donde el subíndice s indica los valores después de la multiplicación. *Para multiplicar la impedancia por α , multiplíquese cada valor de R y L por α , y divídase cada valor C por α .* La diferencia surge por la impedancia en las resistencias e inductores es proporcional a su parámetro de elemento R o L , en tanto que el de un capacitor es inversamente proporcional a C . Para hacer que \mathbf{V}_s siga siendo la misma, como se requiere por (14.88), las fuentes de voltaje independientes quedan sin modificar, en tanto que las fuentes de corriente independientes debe multiplicarse por $1/\alpha$.

Ejemplo 14.20

Para multiplicar la impedancia del circuito de la figura 14.42(a) por 1 000, R y L son multiplicadas por 1 000 y C dividida entre 1 000. La fuente de voltaje queda sin modificar, y la fuente de corriente es dividida entre 1 000. Todos los voltajes del nuevo circuito quedan sin modificar de sus valores en el circuito anterior; todas las corrientes son reducidas por un factor de 1 000.

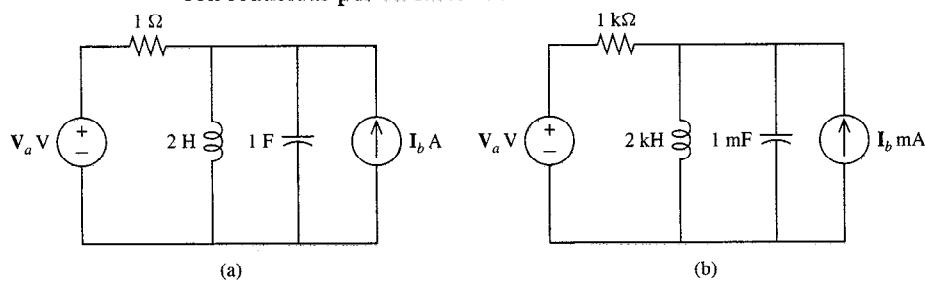


FIGURA 14.42 (a) Circuito original, (b) impedancia multiplicada por 1 000.

Las ganancias de las fuentes de corriente controladas por corriente, y fuentes de voltaje controladas por voltaje en el circuito no cambiarán al multiplicar la impedancia, puesto que la proporción de variable controlada a variable de control es la misma después de multiplicar, como sucedió antes. Pero las fuentes de corriente controladas por voltaje tendrán su ganancia (transresistencia r), multiplicada por α , al igual que los otros elementos cuyas unidades están en ohms, y las fuentes de voltaje controladas por corriente, con ganancia (transconductancia g), medidas en siemens, deben tener estas ganancias multiplicadas por $1/\alpha$. Por ejemplo, si un circuito con una fuente de voltaje controlada por corriente con función de fuente $v(t) = 4i_c(t)$ debe tener una impedancia multiplicada por 20, la nueva fuente controlada tendrá una función de fuente $v(t) = 80i_c(t)$. Entonces, con las corrientes en el nuevo circuito reducidas por el factor de 20, el aumento en la transresistencia de la fuente controlada por un factor de 20 será suficiente para compensar, y su voltaje quedará intacto, tal y como se necesita.

Un uso común de las escalas de impedancia surge en el diseño de circuitos con op amps. Aunque puede ser conveniente utilizar valores cercanos a la unidad para R y C en el proceso de diseño, esto inevitablemente resultará en un circuito cuyos niveles de impedancia son demasiado bajos para el uso de los op amps de baja potencia más populares, tales como el $\mu A741$. Estos dispositivos operan mejor a niveles de corriente de miliamperes, cuando sus niveles de voltaje son una fracción apreciable del voltaje de suministro de poder, típicamente de ± 15 V. Podemos utilizar valores convenientes como $R = 1 \Omega$ durante el proceso de diseño, pero si no deseamos "freír" el op amp al utilizar demasiada corriente, lo mejor que podemos hacer es multiplicar la impedancia a valores del orden de kilohoms antes de encender el interruptor. Esta multiplicación también reduce los capacitores a valores más prácticos que 1 F o similares. Nótese que puesto que los circuitos multiplicados tienen los mismos voltajes antes de multiplicarse, *no hay una modificación en la función de transferencia de voltaje $H(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$ cuando se multiplica la impedancia de un circuito*.

Ejemplo 14.21

Considérese el circuito de la figura 14.28. Para evitar un exceso de disipación de poder de los op amps, que pueda resultar en fallas del circuito debido a que el amp op se queme, multiplicamos la impedancia por 2 000. El circuito resultante, con valores prácticos, aparece en la figura 14.43

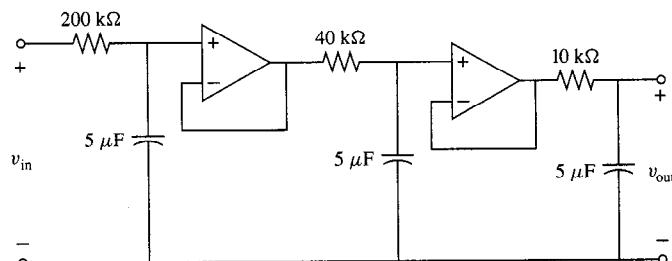


FIGURA 14.43 Impedancia del circuito de la figura 14.28 multiplicada a niveles prácticos de corriente para op amps de baja-potencia.

Dado un circuito, la *escala de frecuencia por β* es la especificación de un nuevo conjunto de parámetros de circuito, de tal forma que el circuito multiplicado responde a una frecuencia $\beta\omega$ exactamente como el original lo hace en ω . Hay sólo un modo en que ω entra en el cálculo de cualquier respuesta, mediante las impedancias $j\omega L$ y $1/(j\omega C)$. Si disponemos de tal forma que las nuevas impedancias inductivas y capacitivas en $\beta\omega$ son las mismas que las antiguas en ω , todas las respuestas deben ser las mismas, tal como se

requirió. Ahora el producto $j\omega L$ queda intacto después de sustituir ω por $\beta\omega$ si también sustituimos L por L/β . Lo mismo es verdad para $1/j\omega C$ si sustituimos C por C/β . Para multiplicar la impedancia por β , *divídase cada L y C por β , dejando el resto de los elementos sin modificación.*

$$R_s = R, \quad L_s = \frac{L}{\beta}, \quad C_s = \frac{C}{\beta} \quad (14.90)$$

Ejemplo 14.22

Anteriormente multiplicamos la impedancia del circuito resonante de la figura 14.42(a), con el resultado que aparece en la figura 14.42(b). Multipliquemos la frecuencia de resonancia de este circuito por un factor de 10^4 . Esto puede lograrse fácilmente sustituyendo el inductor de 2-H, por un inductor de 0.2-mH, y el capacitor 1-F por un capacitor de $100-\mu\text{F}$. Nótese que la frecuencia resonante en los circuitos de las figuras 14.42(a) y (b) son las mismas, puesto que $\omega_r = \sqrt{1/LC}$ y el producto LC es el mismo en estos circuitos. La multiplicación de impedancia no resulta en cambios en la multiplicación de frecuencia.

La multiplicación de frecuencia se usa mucho en el diseño de filtros. Por ejemplo, los manuales que especifican circuitos de filtros pasa-bajos, necesitan únicamente hacer una lista de los valores del pasa-bajos, cuya frecuencia de corte está fijada en $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$. El usuario puede entonces multiplicar la frecuencia del circuito a cualquier frecuencia de corte deseada.

EJERCICIOS

14.8.1. Supóngase que se multiplica por 100 la impedancia de un circuito. Considérense cuatro funciones de transferencia: $\mathbf{H}_1(s) = \mathbf{V}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)$, $\mathbf{H}_2(s) = \mathbf{V}_2(s)/\mathbf{I}_1(s)$, $\mathbf{H}_3(s) = \mathbf{I}_2(s)/\mathbf{I}_1(s)$, y $\mathbf{H}_4(s) = \mathbf{I}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)$. ¿Cuál de ellas cambiará? ¿En qué factor cambiará?

Respuesta $\mathbf{H}_2(s)$ quedará multiplicada por 100, $\mathbf{H}_4(s)$ por 1/100. Las demás quedan sin modificación.

14.8.2. Si un circuito pasivo *RLC* en paralelo tiene su frecuencia multiplicada por 50 y luego su impedancia se multiplica por 50, ¿Cuáles son los nuevos valores *RLC*?

Respuesta 50 R , L , $C/2500$

14.8.3. Un manual hace una lista de los filtros Butterworth del cuarto orden con $\omega_c = 1$ como

$$H(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{1}{s^4 + 2.61s^3 + 3.41s^2 + 2.61s + 1}$$

Si se multiplica la frecuencia del circuito por $\frac{1}{2}$, y luego la impedancia se multiplica por 100, obtenga $\mathbf{H}(s)$.

Respuesta La multiplicación de impedancia no tiene efecto sobre una función de transferencia de voltaje:

$$\frac{0.0625}{s^4 + 1.31s^3 + 0.853s^2 + 0.326s + 0.0625}$$

Puede utilizarse SPICE para determinar la respuesta de frecuencia, tanto ganancia como desplazamiento de fase como funciones de frecuencia, utilizando la declaración de control .AC. Se especifica la ganancia $|H(j\omega)|$ añadiendo el sufijo M (magnitud) al nombre de una corriente o voltaje que deba ser salida, y el desplazamiento de fase $\angle H(j\omega)$ por el sufijo P. Por ejemplo, la declaración de control de salida

```
.PLOT AC VM(4) VP(4)
```

resultará en la gráfica tanto de la magnitud y fase del voltaje en el nodo 4, en el rango de frecuencia especificado en la declaración de control .AC. Si la amplitud de la fuente ac que se barre es 1, la magnitud del voltaje de salida de VM(4) es directamente igual a la ganancia. Si se desean coordenadas de Bode (ganancia en decibeles contra frecuencia logarítmica) para la curva de ganancia, se utiliza el sufijo DB en lugar de M. La palabra DEC (década) se usa entonces en la declaración de control .AC, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14.23

Verificaremos nuestro cálculo anterior de la gráfica de ganancia de Bode, figura 14.16(b), para el circuito resonante de la figura 14.16(a). El archivo de entrada SPICE es

```
EJEMPLO 14-23
*
I 0 I AC 1 0
L 1 2 10
R 2 0 1
C 1 0 0.1
.AC DEC 25 .01 1
.PLOT AC VDB(1)
.END
```

Hemos especificado unidades de decibeles para la salida que, junto con el eje de frecuencia logarítmica especificada por la palabra clave DEC y la entrada 1-A, hace que la salida sea idéntica a la ganancia del circuito. La salida aparece en la figura 14.44(a). Nótese que el pico de resonancia aparece en $f = 0.1585$ Hz o 0.996 rad/s, lo que concuerda en mucho con nuestro cálculo en el ejemplo 14.11, y el valor en el pico aparece como 40.01 dB, lo que se compara favorablemente con los 40 dB que calculamos. La frecuencia pico en $\omega = 0.1$ rad/s ($f = 0.0159$ Hz) tiene una ganancia de + 3 dB en la figura 14.16(b); esto concuerda bien con la ganancia de 3.08 dB en $f = 0.1585$ en la salida SPICE. En el ejemplo se menciona que en lugar del pico de resonancia, podría ser aproximado únicamente utilizando nuestro método de gráficas de Bode. Podemos utilizar SPICE para examinar los detalles de una curva de ganancia en cualquier región cambiando los parámetros de muestreo en la declaración de control .AC. Examinado la ganancia cerca del

**** 04/29/94 11:25:50.***** Evaluación PSpice (Enero 1991)*****

Ejemplo 14-23.

**** Análisis AC

Temperatura = 27,000 DEG C

FREQ VDB(1)

(*)-----	0.0000E+00	2.0000E+01	4.0000E+01	6.0000E+01	8.0000E+01
1.000E-02	1.479E+00	*	.	.	.
1.096E-02	1.728E+00	*	.	.	.
1.202E-02	2.010E+00	*	.	.	.
1.318E-02	2.320E+00	*	.	.	.
1.445E-02	2.684E+00	*	.	.	.
1.585E-02	3.078E+00	*	.	.	.
1.738E-02	3.513E+00	*	.	.	.
1.905E-02	3.987E+00	*	.	.	.
2.089E-02	4.501E+00	*	.	.	.
2.291E-02	5.055E+00	*	.	.	.
2.512E-02	5.647E+00	*	.	.	.
2.754E-02	6.278E+00	*	.	.	.
3.020E-02	6.945E+00	*	.	.	.
3.311E-02	7.649E+00	*	.	.	.
3.631E-02	8.389E+00	*	.	.	.
3.981E-02	9.166E+00	*	.	.	.
4.365E-02	9.981E+00	*	.	.	.
4.786E-02	1.084E+01	*	.	.	.
5.248E-02	1.174E+01	*	.	.	.
5.754E-02	1.269E+01	*	.	.	.
6.310E-02	1.371E+01	*	.	.	.
6.918E-02	1.479E+01	*	.	.	.
7.586E-02	1.597E+01	*	.	.	.
8.318E-02	1.727E+01	*	.	.	.
9.120E-02	1.872E+01	*	.	.	.
1.000E-01	2.039E+01	*	.	.	.
1.096E-01	2.237E+01	*	.	.	.
1.202E-01	2.485E+01	*	*	.	.
1.318E-01	2.820E+01	*	*	.	.
1.445E-01	3.331E+01	*	*	.	.
1.585E-01	4.001E+01	*	*	*	.
1.738E-01	3.391E+01	*	*	*	.
1.905E-01	2.854E+01	*	*	*	.
2.089E-01	2.506E+01	*	*	*	.
2.291E-01	2.250E+01	*	*	*	.
2.512E-01	2.046E+01	*	*	*	.
2.754E-01	1.875E+01	*	*	*	.
3.020E-01	1.725E+01	*	*	*	.
3.311E-01	1.591E+01	*	*	*	.
3.631E-01	1.469E+01	*	*	*	.
3.981E-01	1.355E+01	*	*	*	.
4.365E-01	1.247E+01	*	*	*	.
4.786E-01	1.145E+01	*	*	*	.
5.248E-01	1.047E+01	*	*	*	.
5.754E-01	9.527E+00	*	*	*	.
6.310E-01	8.607E+00	*	*	*	.
6.918E-01	7.708E+00	*	*	*	.
7.586E-01	6.827E+00	*	*	*	.
8.318E-01	5.960E+00	*	*	*	.
9.120E-01	5.105E+00	*	*	*	.
1.000E+00	4.259E+00	*	*	*	.

JOB CONCLUDED
TOTAL JOB TIME

.22

FIGURA 14.44a Salidas de SPICE para el ejemplo 14.23.

**** 04/29/94 11:30:15. ***** Evaluación PSpice (Enero 1991)*****

Ejemplo 14.23

**** Análisis AC

Temperatura = 27,000 DEG

FREQ VDB(1)

(*)-----	3.9000E+01	3.9500E+01	4.0000E+01	4.0500E+01	4.1000E+01
1.570E-01	3.973E+01	*
1.571E-01	3.977E+01	*
1.572E-01	3.980E+01	*
1.574E-01	3.983E+01	*
1.575E-01	3.986E+01	*
1.576E-01	3.988E+01	*
1.577E-01	3.991E+01	*
1.579E-01	3.993E+01	*
1.580E-01	3.995E+01	*
1.581E-01	3.997E+01	*
1.582E-01	3.998E+01	*
1.583E-01	4.000E+01	*
1.585E-01	4.001E+01	*
1.586E-01	4.002E+01	*
1.587E-01	4.003E+01	*
1.588E-01	4.004E+01	*
1.590E-01	4.004E+01	*
1.591E-01	4.004E+01	*
1.592E-01	4.004E+01	*
1.593E-01	4.004E+01	*
1.594E-01	4.004E+01	*
1.596E-01	4.003E+01	*
1.597E-01	4.002E+01	*
1.598E-01	4.001E+01	*
1.599E-01	4.000E+01	*
1.601E-01	3.999E+01	*
1.602E-01	3.997E+01	*
1.603E-01	3.995E+01	*
1.604E-01	3.993E+01	*
1.606E-01	3.991E+01	*
1.607E-01	3.989E+01	*
1.608E-01	3.986E+01	*
1.609E-01	3.984E+01	*
1.610E-01	3.981E+01	*
1.612E-01	3.978E+01	*
1.613E-01	3.975E+01	*
1.614E-01	3.971E+01	*
1.615E-01	3.968E+01	*
1.617E-01	3.964E+01	*
1.618E-01	3.960E+01	*
1.619E-01	3.956E+01	*
1.620E-01	3.952E+01	*
1.621E-01	3.948E+01	*
1.623E-01	3.944E+01	*
1.624E-01	3.939E+01	*
1.625E-01	3.934E+01	*
1.626E-01	3.930E+01	*
1.628E-01	3.925E+01	*
1.629E-01	3.920E+01	*
1.630E-01	3.915E+01	*

JOB CONCLUDED

TOTAL JOB TIME

.23

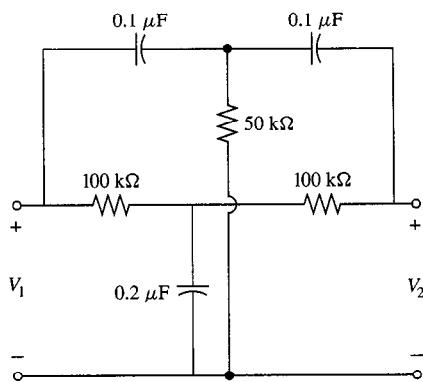
FIGURA 14.44b Salidas de SPICE para el ejemplo 14.23.

pico, utilizando la declaración de

.AC LIN 25 .157 .163

control obtenemos la salida que aparece en la figura 14.44(b). La ganancia pico, con cuatro cifras significativas, es 40.04 dB, y el pico ocurre en algún lugar entre 0.1588 y 0.1594 Hz, o 0.998 rad/s y 1.002 rad/s.

EJERCICIOS



EJERCICIO 14.9.3

14.9.1. Use SPICE para crear gráficas de la ganancia y curva de desplazamiento de fase para el circuito de la figura 14.26 para $0 < \omega < 10$, usando frecuencia lineal y escalas de salida con una muestra cada 0.1 rad/s.

14.9.2. Use el modelo de amplificador de voltaje ideal de la figura 3.7 y SPICE para graficar la ganancia en decibeles contra la frecuencia logarítmica para el circuito del ejercicio 14.7.2.

14.9.3. El filtro pasa-bandas que aparece se conoce como filtro doble T. Determine la frecuencia en hertz al final de la muesca hasta cuatro cifras significativas.

Respuesta 15.92 Hz.

14.10 SPICE Y DISEÑO DE FILTROS ACTIVOS

Utilizando el procedimiento de realización de filtros activos desarrollado en la sección 14.7, podemos graficar un diagrama de circuito que corresponda a la fusión de transferencia deseada $H(s)$ o, lo que es equivalente, una función de respuesta de frecuencia deseada $H(j\omega)$. Ahora nos detendremos para preguntarnos a qué grado puede esperarse que el circuito resultante presente el comportamiento que le atribuimos.

Hasta ahora se han empleado varios niveles de aproximación para llegar hasta este punto. Las ecuaciones de transferencia de voltaje que derivamos para los componentes op amps rigen exactamente sólo en el límite conforme la ganancia del amp op $A(j\omega)$ tiende a infinito en cada ω que nos interesa. Los op amps reales tienen ganancia finita y una amplitud de banda finita aun en configuraciones de retroalimentación. Si hay op amps múltiples en el circuito, ¿cuál es el efecto acumulativo de estas discrepancias individualmente reducidas? Otra suposición es que no haya sobrecarga. De hecho, cualquier cascada de dos circuitos hará que el circuito de la derecha sobrecargue al izquierdo a un grado no nulo. ¿Cuál es el efecto acumulativo de estas pequeñas variaciones? Ciertamente, bien puede haber aproximaciones en la elección de la $H(s)$ misma. Podemos conformarnos con una función de transferencia $H(s)$ basada en gráficas de Bode, que son en sí aproximaciones. Aunque tenemos confianza en que cada una de estas aproximaciones es individualmente válida, ¿se comportará el circuito como lo anticipamos? Finalmente, no existe resistencia o capacitor físico que sea exactamente igual a la resistencia o capacitancia que se pide.

A la luz de estas aproximaciones e idealizaciones, es prudente adoptar un punto de vista cauteloso e incluso escéptico antes de considerar el pasar de un *diseño esquemático*, el proceso cuyo punto final es un esquema o diagrama de circuito, al *diseño físico*, la construcción real de una modalidad física del diagrama del circuito. Afortunadamente, SPICE nos presenta un útil entorno de simulación para probar los circuitos sin estas suposiciones e idealizaciones simplificadoras.

Un modelo de circuito con op amps que representa la dependencia de frecuencia de polo único, discutida en la sección 14.6 aparece en la figura 14.45. Un divisor de voltaje RC con frecuencia de tipo $1/(R_b C_b)$ proporciona el decaimiento de alta frecuencia, y la resistencia de salida R_o mantiene una impedancia de salida mínima para este modelo amp op, aun a frecuencias muy altas. Los valores típicos son $A_o = 10^5$, $R_b = 1 \Omega$, $C_b = 0.1 \text{ F}$ y $R_o = 30 \Omega$. Con estos valores, la frecuencia pico (ω_o en la figura 14.18), en la respuesta del op amp de trayectoria abierta es 10 rad/s, y la impedancia de salida cambia menos de 1Ω a través de cualquier banda de frecuencia, siendo 31Ω en dc y 30Ω en infinito. Utilizando este modelo, podemos descubrir cualquier discrepancia debida a la ganancia infinita y aproximaciones de amplitud de banda, y el verdadero grado en que la sobrecarga afecta un diseño dado

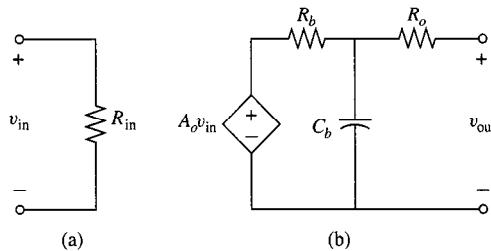


FIGURA 14.45 Modelo del op amp dependiente de la frecuencia.

Ejemplo 14.24

Se propuso el seguidor de voltaje como amplificador amortiguador para eliminar la sobrecarga. Veamos ahora si la idealización de que esta configuración elimina completamente la sobrecarga, produce un resultado preciso en el circuito de la figura 14.46, donde dos secciones pasivas RC pasa-bajas y pasa-altas, son utilizadas para crear un filtro pasa-bandas. La sección izquierda es un pasa-altas con frecuencia de media potencia $f_{c1} = 1/(2\pi R_1 C_1) = 1 \text{ Hz}$, y la sección derecha es un pasa-bajas con $f_{c2} = 1/(2\pi R_2 C_2) = 100 \text{ Hz}$.

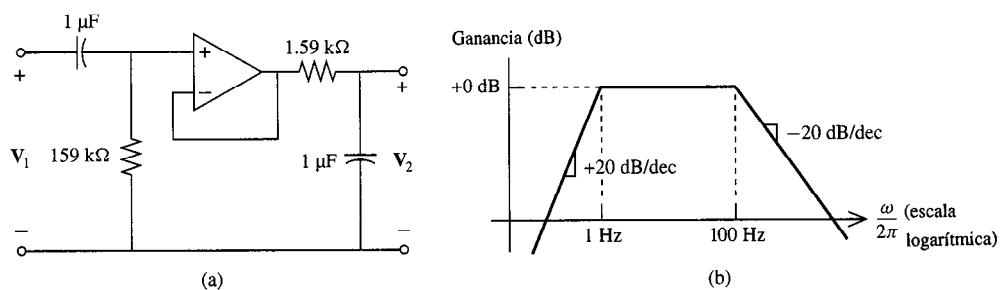


FIGURA 14.46 (a) Filtro pasa-bandas amortiguado; (b) gráfica de Bode calculada.

La gráfica de ganancia de Bode calculada con la suposición de que no hay sobrecarga, de forma que pueden multiplicarse las funciones de transferencia, aparece en la figura 14.46(b). El archivo de entrada SPICE

```
EJEMPLO 14-24
*
V1 1 0 AC 1
C1 1 2 1U
R1 2 0 159K
RIN 2 3 1MEG
E 4 0 2 3 100K
RB 4 5 1
CB 5 0 0.1
R0 5 3 30
R2 3 6 1.59K
C2 6 0 1U
.AC DEC 10 .1 1K
.PLOT AC VDB(6)
.END
```

para este circuito, utilizando el modelo del op amp dependiente de la frecuencia, se produjo la salida que se muestra en la figura 14.47(a). Los resultados corresponden, en mucho, con los resultados calculados sin sobrecarga en la figura 14.46(b) la ganancia de banda media (en 10 Hz) está dentro de un margen de 0.08 dB del valor predicho de 0 dB, ganancias de frecuencia pico dentro de 0.015 dB a partir de -3 dB, y ganancias una década bajo los picos de un margen de 0.004 dB de -20 dB. Eliminando el seguidor de voltaje para ver los efectos de la sobrecarga, tenemos la salida de SPICE en la figura 14.48(b). La sobrecarga es claramente visible en esta característica. Mientras mantenemos un filtro pasa-bandas, hay una reducción de 6 dB en la ganancia de banda de paso, y las frecuencias de media potencia se han extendido a $f_l = 0.5012$ Hz y $f_u = 199.5$ Hz. Los efectos típicos de la sobrecarga, es aplatar la ganancia y ampliar la banda de paso.

Ejemplo 14.25

Supongamos que multiplicamos la frecuencia del circuito de la figura 14.46(a) por 10^4 , lo que resulta en $C_1 = C_2 = 0.1$ nF. Cambiando estos dos valores de elementos en la lista de SPICE del ejemplo anterior, obtenemos la figura 14.48. Suponiendo una multiplicación ideal de frecuencias, las frecuencias pico en la gráfica de Bode han migrado a $f_l = 10$ kHz y $f_u = 1$ MHz, sin que haya otros cambios en la gráfica de Bode sin multiplicarse [figura 14.46(a)]. Examinando la salida, las frecuencias más bajas se comportan como lo esperaba: una década bajo f_l tenemos -20.005 dB, y en f_l tenemos -3.078 dB. Las frecuencias más altas no tienen un comportamiento tan bueno. La ganancia en f_u debe ser de aproximadamente -3 dB, pero en $f_u = 1$ MHz vemos que la ganancia real es -19.15 dB. Puesto que el decaimiento debería ser -20 dB/dec, pero examinando la última década que graficamos, vemos que es casi exactamente -40 dB/dec.

La causa de estas discrepancias es la limitación de amplitud de banda del circuito debida a la ganancia dependiente de la frecuencia

```

*****
FREQ      VDB (6)

(*)----- -3.0000E+01 -2.0000E+01 -1.0000E+01 0.0000E+00 1.0000E+01
1.000E-01 -2.005E+01 . * . .
1.259E-01 -1.808E+01 . * . .
1.585E-01 -1.612E+01 . * . .
1.995E-01 -1.418E+01 . * . .
2.512E-01 -1.227E+01 . * . .
3.162E-01 -1.042E+01 . * . .
3.981E-01 -8.646E+00 . * . .
5.012E-01 -6.980E+00 . * . .
6.310E-01 -5.462E+00 . * . .
7.943E-01 -4.130E+00 . * . .
1.000E+00 -3.015E+00 . * . .
1.259E+00 -2.128E+00 . * . .
1.585E+00 -1.459E+00 . * . .
1.995E+00 -9.767E-01 . * . .
2.512E+00 -6.429E-01 . * . .
3.162E+00 -4.191E-01 . * . .
3.981E+00 -2.732E-01 . * . .
5.012E+00 -1.808E-01 . * . .
6.310E+00 -1.253E-01 . * . .
7.943E+00 -9.578E-02 . * . .
1.000E+01 -8.652E-02 . * . .
1.259E+01 -9.562E-02 . * . .
1.585E+01 -1.249E-01 . * . .
1.995E+01 -1.802E-01 . * . .
2.512E+01 -2.722E-01 . * . .
3.162E+01 -4.176E-01 . * . .
3.981E+01 -6.406E-01 . * . .
5.012E+01 -9.733E-01 . * . .
6.310E+01 -1.454E+00 . * . .
7.943E+01 -2.122E+00 . * . .
1.000E+02 -3.007E+00 . * . .
1.259E+02 -4.120E+00 . * . .
1.585E+02 -5.450E+00 . * . .
1.995E+02 -6.967E+00 . * . .
2.512E+02 -8.632E+00 . * . .
3.162E+02 -1.041E+01 . * . .
3.981E+02 -1.226E+01 . * . .
5.012E+02 -1.416E+01 . * . .
6.310E+02 -1.610E+01 . * . .
7.943E+02 -1.806E+01 . * . .
1.000E+03 -2.004E+01 . * . .

```

FIGURA 14.47a Salida del circuito.

del amp op $\mathbf{A}(j\omega)$. El polo de la sección pasa-bajas RC y el polo de $\mathbf{A}(j\omega)$ se combinan para producir el decaimiento -40 dB/dec a frecuencias más altas. Puede multiplicarse la frecuencia de circuitos con op amps con gran precisión, pero únicamente dentro de los límites impuestos por el producto amplitud de banda-ganancia del amp op.

Puede utilizarse SPICE de otras formas que para verificar la validez de las aproximaciones hechas durante el diseño esquemático. El conjunto de salidas derivado al cambiar un solo parámetro revela la sensibilidad del diseño a ese parámetro. La alta sensibilidad es, en general, indeseable, puesto que los valores de los parámetros pueden fluctuar con la temperatura, el envejecimiento y otros factores.

El SPICE es conveniente para un diseño de “prueba y error”, una forma efectiva para afinar un diseño preliminar. Supongamos que tenemos un diseño que al revisar la salida de SPICE, es aproximadamente lo que deseábamos, pero necesita mejoras detalladas. Supongamos que se desea un poco más de ganancia en cierta banda, y que hay una resistencia en el diseño que, al aumentar, incrementa esa ganancia. Puede no ser fácil calcular los efectos

```

*****
*          PREQ      VDB(6)
(*)
----- -3.0000E+01 -2.0000E+01 -1.0000E+01 0.0000E+00 1.0000E+01
----- . . . . .
1.000E-01 -2.005E+01 . * . . .
1.259E-01 -1.808E+01 . * . . .
1.585E-01 -1.612E+01 . * . . .
1.995E-01 -1.418E+01 . * . . .
2.512E-01 -1.227E+01 . * . . .
3.162E-01 -1.042E+01 . * . . .
3.981E-01 -8.646E+00 . * . . .
5.012E-01 -6.980E+00 . * . . .
6.310E-01 -5.462E+00 . * . . .
7.943E-01 -4.130E+00 . * . . .
1.000E+00 -3.015E+00 . * . . .
1.259E+00 -2.128E+00 . * . . .
1.585E+00 -1.459E+00 . * . . .
1.995E+00 -9.767E-01 . * . . .
2.512E+00 -6.429E-01 . * . . .
3.162E+00 -4.191E-01 . * . . .
3.981E+00 -2.732E-01 . * . . .
5.012E+00 -1.808E-01 . * . . .
6.310E+00 -1.253E-01 . * . . .
7.943E+00 -9.578E-02 . * . . .
1.000E+01 -8.652E-02 . * . . .
1.259E+01 -9.562E-02 . * . . .
1.585E+01 -1.249E-01 . * . . .
1.995E+01 -1.802E-01 . * . . .
2.512E+01 -2.722E-01 . * . . .
3.162E+01 -4.176E-01 . * . . .
3.981E+01 -6.406E-01 . * . . .
5.012E+01 -9.733E-01 . * . . .
6.310E+01 -1.454E+00 . * . . .
7.943E+01 -2.122E+00 . * . . .
1.000E+02 -3.007E+00 . * . . .
1.259E+02 -4.120E+00 . * . . .
1.585E+02 -5.450E+00 . * . . .
1.995E+02 -6.967E+00 . * . . .
2.512E+02 -8.632E+00 . * . . .
3.162E+02 -1.041E+01 . * . . .
3.981E+02 -1.226E+01 . * . . .
5.012E+02 -1.416E+01 . * . . .
6.310E+02 -1.610E+01 . * . . .
7.943E+02 -1.806E+01 . * . . .
----- . . . . .

```

FIGURA 14.47b Luego de eliminar el op amp.

exactos de esta única variación de parámetros sobre la ganancia en esa banda, o en el comportamiento general del circuito.

En vez de regresar al lápiz, el papel y la calculadora, puede ser más rápido hacer una suposición prudente del valor necesario y volver a correr SPICE. Si la ganancia cambió demasiado, repítase con un cambio ligeramente menor en la resistencia; si es muy pequeño, cámbielo aún más. Luego repítalo hasta quedar satisfecho.

El procedimiento de prueba y error, a la luz de una clara comprensión de la relación entre el parámetro y el comportamiento del circuito, puede ser muy efectivo. De hecho, aun cuando el contexto pueda ser el diseño esquemático, como buscamos aquí, o el diseño físico, el proceso de prueba y error es parte inevitable del diseño en el mundo real. La intuición que guía este proceso es tan importante para el ingeniero diseñador experimentado, como la intuición tras un solo de jazz y se basa en el mismo fundamento: la experiencia y conocimiento profundo de los fundamentos. En cierto sentido, SPICE puede servir como nuestro “instrumento” para ayudar a desarrollar estas habilidades de improvisación. Los conceptos de análisis de circuitos son las escalas y estudios que debemos conocer para hacer música.

```

*****
FREQ      VDB(6)

(*)----- -1.5000E+02 -1.0000E+02 -5.0000E+01 0.0000E+00 5.0000E+01
1.000E+03 -2.005E+01 . . . * .
1.585E+03 -1.612E+01 . . . * .
2.512E+03 -1.228E+01 . . . * .
3.981E+03 -8.662E+00 . . . * .
6.310E+03 -5.495E+00 . . . * .
1.000E+04 -3.078E+00 . . . * .
1.585E+04 -1.567E+00 . . . * .
2.512E+04 -8.265E-01 . . . * .
3.981E+04 -6.166E-01 . . . * .
6.310E+04 -8.333E-01 . . . * .
1.000E+05 -1.590E+00 . . . * .
1.585E+05 -3.153E+00 . . . * .
2.512E+05 -5.718E+00 . . . * .
3.981E+05 -9.261E+00 . . . * .
6.310E+05 -1.372E+01 . . . * .
1.000E+06 -1.915E+01 . . . * .
1.585E+06 -2.557E+01 . . . * .
2.512E+06 -3.275E+01 . . . * .
3.981E+06 -4.038E+01 . . . * .
6.310E+06 -4.822E+01 . . . * .
1.000E+07 -5.616E+01 . . . * .
1.585E+07 -6.413E+01 . . . * .
2.512E+07 -7.212E+01 . . . * .
3.981E+07 -8.012E+01 . . . * .
6.310E+07 -8.812E+01 . . . * .
1.000E+08 -9.612E+01 . . . * .

```

FIGURA 14.48 Salida de circuito de frecuencia multiplicada.

EJERCICIOS

Para cada uno de estos ejercicios, utilice el modelo del op amp de la figura (14.45) con $A_o = 10^5$, $R_{in} = 1 \text{ M}\Omega$, $R_b = 1 \Omega$, $C_b = 0.1 \text{ F}$, y $R_o = 30 \Omega$.

- 14.10.1.** Dibuje la gráfica de ganancia de Bode para $H(s) = (s - 2)/(s + 1)$ y compárela con la ganancia de la realización de esta función de transferencia dada en la figura 14.36 utilizando SPICE
- 14.10.2.** Repita para la función de transferencia y realización del ejemplo 14.19.
- 14.10.3.** Utilice la prueba y error en el circuito del ejercicio 14.7.2 para afinar la ganancia en $\omega = 1 \text{ rad/s}$ a $+1.50 \text{ dB}$. Cambie únicamente la resistencia de retroalimentación

RESUMEN

La respuesta de frecuencia de un circuito es la combinación de ganancia y desplazamiento de fase experimentado por un senoide de entrada como función de su frecuencia. Los criterios de diseño de circuitos prácticos como filtros de amplificadores, generalmente están expresados en términos de una respuesta de frecuencia deseada. En este capítulo, se desarrollan los procedimientos generales de diseño que producen respuestas en casi cualquier frecuencia que se desee.

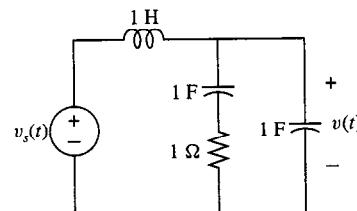
- La función de respuesta de frecuencia $H(j\omega)$ puede obtenerse a partir de la función de transferencia $H(s)$ sustituyendo s por $j\omega$. Existe únicamente para circuitos estables.
- $|H(j\omega)|$ es la ganancia en la frecuencia ω , $\angle H(j\omega)$ es el desplazamiento de fase.
- El equivalente en decibeles para un número real positivo es 20 veces el logaritmo base 10 del mismo número. Sumar 20 dB multiplica un número por 10, restar 20 dB lo multiplica por 0.1. El equivalente en decibeles de un producto es la suma de los equivalentes en decibeles de cada factor, y de una proporción es la diferencia de los equivalentes en decibeles.
- La gráfica de Bode no corregida tiene una aproximación lineal por tramos a la gráfica de ganancia dB contra la frecuencia logarítmica.
- La gráfica de Bode no corregida es la suma de gráficas de factores individuales.
- Hay una corrección de 3 dB dentro del punto de flexión de cada factor simple.
- Los filtros son circuitos con bandas de paso, en donde la ganancia está cercana a su valor máximo, y las bandas de detención, en donde la ganancia es muy inferior. Los filtros se utilizan para crear respuestas selectivas a entradas en distintas bandas de frecuencia.
- La ganancia de todos los elementos, incluyendo op amps, eventualmente declinan con la frecuencia. La frecuencia a la que declina la ganancia de un amp op a la unidad, se conoce como amplitud de banda de ganancia unitaria.
- En ausencia de sobrecarga, la función de transferencia de una cascada es el producto de las funciones de transferencia.
- Las funciones de transferencia pueden descomponerse en un producto de factores de primero y segundo orden, diseñando por separado cada factor, y luego conectando en cascada.

PROBLEMAS

14.1. Obtenga el factor de salida V_0 si el fasor de entrada es

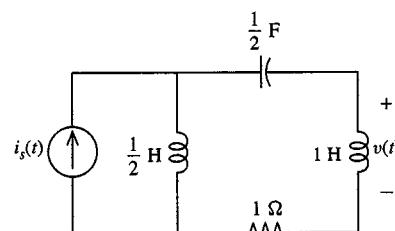
$$V_i = 3 \angle 30^\circ \text{ y } H(s) =$$

- $\frac{1}{s + 1}$
- $\frac{5s}{s + 5}$
- $\frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 1}$
- $\frac{10(s - 1)}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$
- $\frac{-1}{s^2 + s + 10}$
- $\frac{s}{(s + 1)^4}$



PROBLEMA P14.2

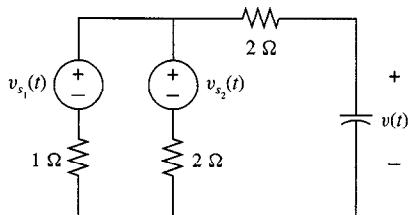
14.3. Obtenga $H(j\omega)$ para la entrada y salida que se indica.



PROBLEMA P14.3

14.2. Obtenga $H(j\omega)$ para la entrada y salida que se indican.

14.4. Obtenga el fasor de salida para la salida indicada a cada frecuencia de fuente; luego obtenga la salida en estado estable sinusoidal. $v_{s_1}(t) = 4 \cos 10t$ V, $v_{s_2}(t) = 6 \cos(2t + 18^\circ)$ V.



PROBLEMA P14.4

14.5. Obtenga las funciones de ganancia $g(\omega)$ y desplazamiento de fase $\phi(\omega)$. Haga gráficas aproximadas utilizando escalas lineales.

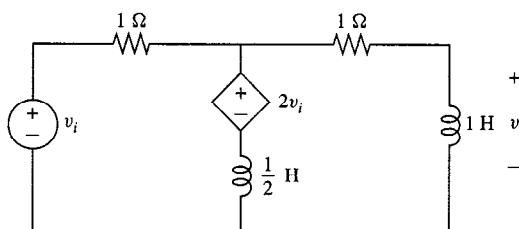
- (a) $\frac{1}{s+1}$
- (b) $\frac{s}{s+1}$
- (c) $\frac{-s}{s+1}$
- (d) $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$
- (e) $\frac{s+1}{s+2}$
- (f) $\frac{s^2 + \frac{1}{10}s + 1}{s^2 + 2s + 1}$

14.6. Obtenga las funciones de ganancia $g(\omega)$ y el desplazamiento de fase $\phi(\omega)$ para el circuito del problema 14.2. Dibuje ambas utilizando escalas lineales.

14.7. Repita el problema 14.6 para el circuito del problema 14.3.

14.8. Repita el problema 14.6 para el circuito del problema 14.4.

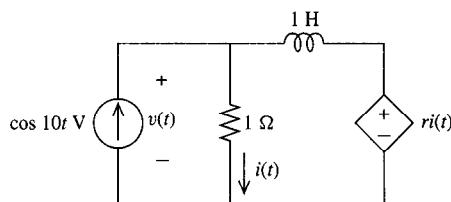
14.9. Obtenga la función de ganancia $g(\omega)$ para este circuito. Dibuje utilizando escalas lineales.



PROBLEMA P14.9

14.10. $\frac{d^2v_0(t)}{dt^2} - v_0(t) = v_i(t)$. Obtenga $H(s) \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$, $H(j\omega)$, y la salida forzada $v_0(t)$ cuando $v_i(t) = 4 \cos 2t$ V. ¿Esta salida también está en estado estable?

14.11. Obtenga la respuesta forzada $v(t)$. ¿Para qué rango de la ganancia r de la fuente controlada corresponde esto a la respuesta en estado estable? Explique



PROBLEMA P14.11

14.12. $1.778 = 5$ dB. Convierta los siguientes a decibeles sin usar calculadora.

- (a) 17.78
- (b) 17.78×10^3
- (c) 0.001778
- (d) 3.557
- (e) $\sqrt{3.557}$
- (f) $\sqrt[4]{3.557}$
- (g) 8.89×10^{17}
- (h) 8.89×10^{-15}

14.13. Convierta los siguientes decibeles sin utilizar calculadora

- (a) $2^{3/2}$
- (b) $2^{3/4}$
- (c) $(5)(2)(\sqrt{1000})$
- (d) $500^{1/3}$
- (e) $(0.4)^9$
- (f) 4×10^{30}
- (g) $\frac{s}{4}$
- (h) $(4/5)^9$

14.14. $1.778 = 5$ dB. Convierta los siguientes de decibeles a números naturales sin usar calculadora

- (a) 15 dB
- (b) 18 dB
- (c) 24 dB
- (d) -15 dB
- (e) -5 dB
- (f) -105 dB

14.15. Convierta los siguientes de decibeles a números naturales sin usar calculadora.

- (a) -26 dB
- (b) +26 dB
- (c) +17 dB
- (d) -33 dB

- (e) -39 dB
(f) -390 dB

14.16. Utilizando una calculadora, convierta los siguientes números a decibeles.

- (a) 11.74
(b) 0.00986
(c) 4.1×10^{-12}
(d) $4.1 \times 10^{+12}$
(e) 2.132
(f) $\sqrt{17}$

14.17. Utilizando una calculadora, convierta los siguientes valores de decibeles a números naturales

- (a) 41.7 dB
(b) -11.9 dB
(c) +17 dB
(d) +170 dB
(e) -33.3 dB
(f) 0.001 dB

14.18. Ponga $H(s)$ en forma estándar. Identifique cada factor como raíz real o factor de parejas de raíces complejas. Para los factores de raíces reales, especifique la frecuencia de corte; para los factores de parejas de raíces complejas, especifique la frecuencia natural y factor de amortiguación ω_n, ζ . $H(s) = :$

(a) $\frac{s}{(s+1)(s+2)}$

(b) $\frac{-10s^2}{(s^2+s+4)^2}$

(c) $\frac{1}{s} - \frac{s}{s-1}$

(d) $\frac{3}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}$

(e) $\frac{4s+2}{s^2+2s+1} + \frac{2}{s+1}$

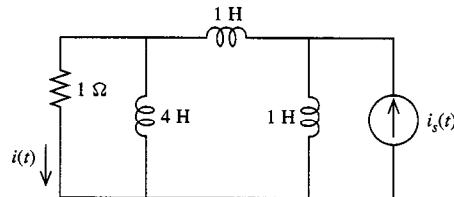
(f) $\frac{6s^3}{(s+1)^4(s+2)^4}$

14.19. Repite problema 14.18 para $\mathbf{H}(s) = \mathbf{Y}(s)/\mathbf{X}(s)$, donde

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y(t) = 2\frac{dx}{dt} - x(t)$$

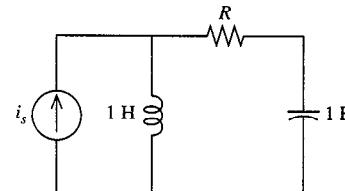
14.20. Repita el problema 14.18 para el circuito del problema 14.2.

14.21. Obtenga $\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}(s)/\mathbf{I}_s(s)$ y expréselo en forma estándar. Especifique todas las frecuencias de corte.



PROBLEMA P14.21

14.22. ¿Para qué valor de R el factor de amortiguación $\zeta = 0.90$? ¿Cuál es el rango de las frecuencias naturales en este circuito conforme R varía entre $0 \leq R < \infty$?



PROBLEMA P14.22

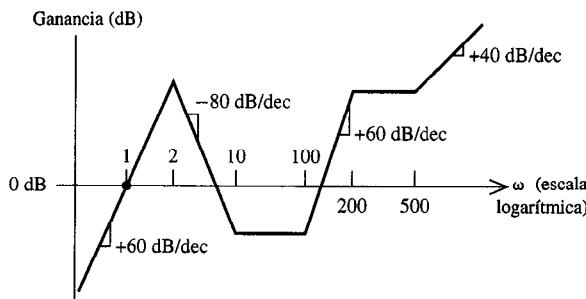
14.23. Considere el factor de raíz real $(s-p)$ de multiplicidad 1. Determine en una calculadora, hasta tres cifras significativas, cuántas décadas de la frecuencia de corte $|p|$ es la diferencia entre la gráfica Bode exacta (corregida) y la no corregida igual a $\frac{3}{2}$ dB, 1 dB, $\frac{1}{2}$ dB, y 0.1 dB. Luego exprese estas frecuencias en términos de p .

14.24. Repita el problema 14.23 para $(s-p)^r$.

14.25. Repita el problema 14.23 para el factor de parejas de raíces complejas $(s^2 + \omega_n s + \omega_n^2)$ donde la frecuencia de corte es ω_n .

14.26. Repita el problema 14.23 para $(s^2 + \frac{1}{50}\omega_n s + \omega_n^2)^r$, (a) para $r = 1$; (b) para cualquier entero $r > 0$.

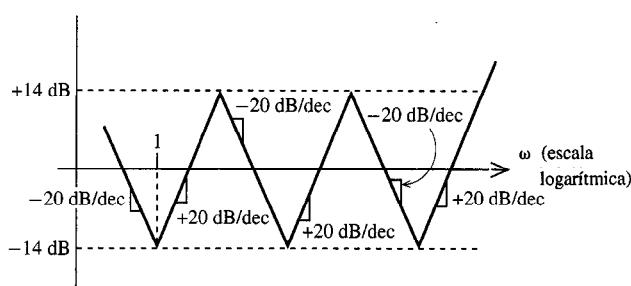
14.27. Marque las ganancias en decibeles en cada frecuencia de corte.



PROBLEMA P14.27

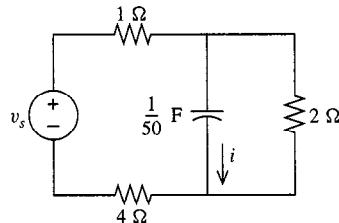
14.28. Especifique una $\mathbf{H}(s)$ cuya gráfica de Bode de ganancia no corregida aparece en el problema 14.27. ¿Es ésta respuesta única?

- 14.29.** Marque las frecuencias de corte. Especifique una $H(s)$ sin factores de parejas de raíces complejas en esta gráfica de ganancia de Bode no corregida.



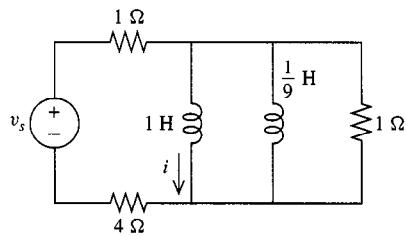
PROBLEMA P14.29

- 14.30.** Dibuje las gráficas de ganancia de Bode, corregida y no corregida. Marque cada pendiente y marque todo punto de corte por su ω y valor en decibeles. Se indica la variable de salida.



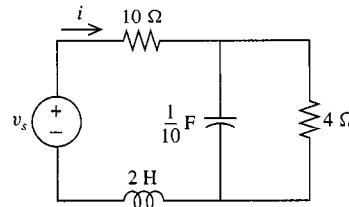
PROBLEMA P14.30

- 14.31.** Repita el problema 14.30 para este circuito.



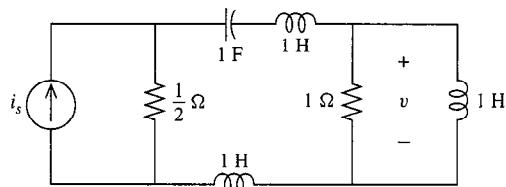
PROBLEMA P14.31

- 14.32.** Repita el problema 14.30 para este circuito.



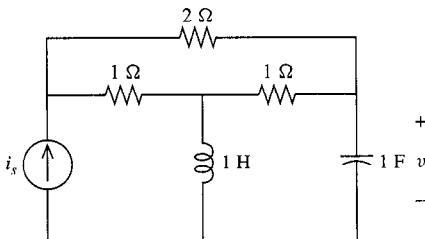
PROBLEMA P14.32

- 14.33.** Repita el problema 14.30 para este circuito.



PROBLEMA P14.33

- 14.34.** Repita el problema 14.30 para este circuito.



PROBLEMA P14.34

- 14.35.** Dibuje las gráficas de Bode de ganancia, corregida y no corregida. Marque cada pendiente y todos los puntos de corte. $H(s) = :$

- (a) $\frac{10}{s + 10}$
- (b) 4
- (c) $\frac{-10}{s + 10}$
- (d) $\frac{3}{s}$
- (e) $\frac{s + 1}{s + 2}$
- (f) $\frac{s - 1}{s + 1}$

14.36. Repita el problema 14.35 para estas funciones de transferencia de segundo orden. $H(s) = :$

- (a) s^2
- (b) $\frac{1}{(s+1)(s+20)}$
- (c) $\frac{100}{(s+1)(s+100)}$
- (d) $s^2 + s + 100$
- (e) $\frac{-100}{s^2 + s + 100}$
- (f) $\frac{5}{s+1} - \frac{3s}{s+1000}$

14.37. Repita el problema 14.35 para estas funciones de transferencia de orden mayor. $H(s) = :$

- (a) $\frac{500}{s^4}$
- (b) $\frac{(s-1)^2}{(s+1)^3}$
- (c) $\frac{s^2 + s + 10^4}{s^2 + 200 + 10^4}$
- (d) $\frac{s^2(s+10)^2}{(s+1)^4(s^2+2s+90)}$
- (e) $\frac{-10^6}{(s+10)^6}$
- (f) $\frac{8^6}{s(s^2+4s+8)^6}$

14.38. Dibuje tres diagramas fasoriales que muestren Z_R , Z_L , y Z_C en $\omega = \frac{1}{10}\omega_r$, ω_r y $10\omega_r$ para un circuito RLC en serie.

14.39. Dibuje tres diagramas fasoriales que muestren Y_R , Y_L , y Y_C en $\omega = \frac{1}{2}\omega_r$, ω_r y $2\omega_r$ para un circuito RLC en paralelo.

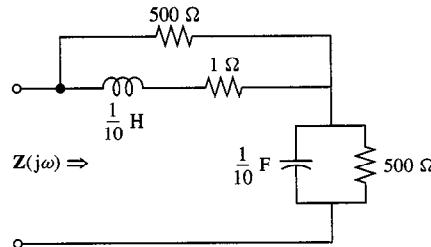
14.40. Diseñe un circuito RLC en serie con $\omega_r = 50$ rad/s y $B = 4$ rad/s. Repita para un RLC en paralelo.

14.41. Diseñe un circuito RLC en serie de forma que $\omega_r = 50 \times 10^3$ rad/s y $Q = 40$. Repita para un RLC en paralelo.

14.42. Las frecuencias inferior y superior de cuarta potencia para el circuito RLC en paralelo satisfacen $|Z(j\omega)|^2 = \frac{1}{4}R^2$, donde Z es la impedancia del circuito. Resuelva esta ecuación para las frecuencias en cuarta potencia inferior y superior ω_a , ω_b .

14.43. Calcule la frecuencia resonante para este circuito de dos formas: primero, con una frecuencia natural ω_n de la gráfi-

ca de Bode; segundo, como la frecuencia ω_0 en que la frecuencia $Z(j\omega)$ es igual a cero.



PROBLEMA P14.43

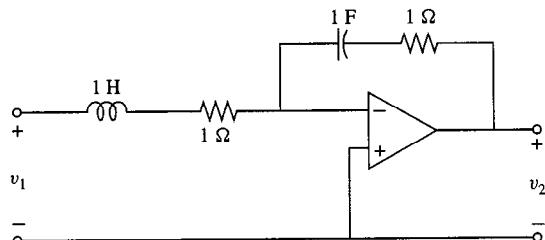
14.44. Se utiliza un op amp con producto amplitud de banda ganancia $GBW = 10^6$ rad/s como un amplificador inversor con $R_F/R_A = -1$. ¿A qué frecuencia de radianes ω la ganancia real es de -3 dB? -20 dB? -120 dB?

14.45. Comenzando a partir de (3.19b), derive la respuesta de frecuencia de un solo polo de un amplificador no inversor con $A(j\omega) = A_o \omega_o / (j\omega + \omega_o)$. Utilice la aproximación $\frac{1}{A_o} \ll R_A/R_A + R_f$. ¿Cuál es la frecuencia de corte ω_c ?

14.46. ¿Cuál es la mayor ganancia R_F/R_A que podemos obtener con un amplificador inversor y tener una amplitud de banda de 30,000 rad/s? Suponga que el amp op tiene parámetros $A_o = 10^5$, $\omega_o = 10$ rad/s.

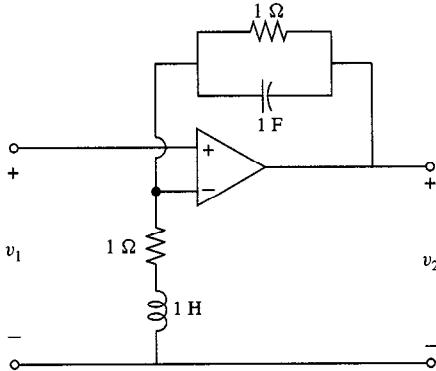
14.47. Suponer que se conecta en cascada cuatro etapas idénticas de amplificador inversor con ganancia $R_F/R_A = 10$. Suponiendo que no hay sobrecarga ¿Cuál es la amplitud de banda de este circuito general? ¿Cuál es el producto amplitud de banda-ganancia? Compárese con el producto amplitud de banda-ganancia de una sola etapa con $R_F/R_A = 10$. Suponer que el producto de amplitud de banda-ganancia es de 10^6 rad/s.

14.48. Dibuje las gráficas de ganancia de Bode corregidas y no corregidas. Marque todas las pendientes y puntos de corte (dB y ω). Suponga un modelo de amp op ideal de amplificador de voltaje con ganancia muy alta.



PROBLEMA P14.48

14.49. Repita el problema 14.48 para este circuito.



PROBLEMA P14.49

14.50. Repita el problema 14.48 cuando se conectan en cascada los circuitos de los problemas 14.48 y 14.49. Suponer que no hay sobrecarga.

14.51. Diseñe un filtro activo con función de transferencia de voltaje $H(s) = V_2(s)/V_1(s) = -1000/(s + 1000)$.

- (a) Utilizando un divisor de voltaje RC amortiguado.
- (b) Utilizando un filtro inversor $-Z_F/Z_A$
- (c) Utilizando el enfoque de diagrama de bloque de la sección 14.7.

14.52. Repita el problema 14.51 para $H(s) = s/(s + 1000)$.

14.53. Diseñe filtro activo con $H(s) = V_2(s)/V_s(s) = (S + 2000)/(s + 1000)$.

- (a) Utilizando una película no inversora $(1 + Z_F/Z_A)$.
- (b) Utilizando el enfoque de diagrama de bloque de la sección 14.7.

14.54. Diseñe filtros activos con las siguientes funciones de transferencia de voltaje. Mantenga todos las resistencias en el rango de 5 a 500 k Ω . Dibuje el diagrama de circuito marcado.

- (a) $\frac{s}{s + 1}$
- (b) $\frac{10s}{s + 10}$
- (c) $\frac{-3s + 1}{s + 50}$
- (d) $\frac{20,000}{s + 10,000}$
- (e) $10/s$
- (f) $\frac{s + 1}{s}$

14.55. Repita el problema 14.54 para los siguientes sistemas de registro de orden.

- (a) $\frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$
- (b) $\frac{10}{s^2 + 24s + 20}$

- (c) $\frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{10}s + 50}$
- (d) $\frac{-s + 1}{2s^2 + s + 4}$
- (e) $\frac{90(s - 10)}{s^2 + 2s + 900}$
- (f) $\frac{6}{s^2}$

Problemas usando SPICE

14.56. Repita el problema 14.54 para los siguientes sistemas de orden mayor. Dibuje la gráfica de ganancia de Bode utilizando el tercio de la sección 14.3, y verifique utilizando SPICE y el modelo de amp op de la figura 14.45.

- (a) $\frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$
- (b) $\frac{(s + 1)(s + 3)}{(s + 2)(s + 4)(s + 6)}$
- (c) $\frac{-2s}{s(s^2 + s + 16)}$
- (d) $\frac{10^4}{(s + 10)^4}$

14.57. Utilice el modelo amp op de la figura 14.46 con $A_o = 10^5$, $R_o = 1 \Omega$, $C_o = 0.1 \text{ F}$, $R_o = 30 \Omega$, $R_{in} = 1 \text{ M}\Omega$ y SPICE para determinar las curvas de ganancia de Bode. Dibuje los resultados a partir de una década bajo la menor frecuencia de corte hasta una década sobre la década mayor. Compárela con gráficas de Bode no corregidas dibujadas a mano. Estas son las mismas $H(s)$ dadas en el problema 14.54.

- (a) $\frac{s}{s + 1}$
- (b) $\frac{10s}{s + 10}$
- (c) $\frac{-3s + 1}{s + 50}$
- (d) $\frac{20,000}{s + 10,000}$
- (e) $\frac{10}{s}$
- (f) $\frac{s + 1}{s}$

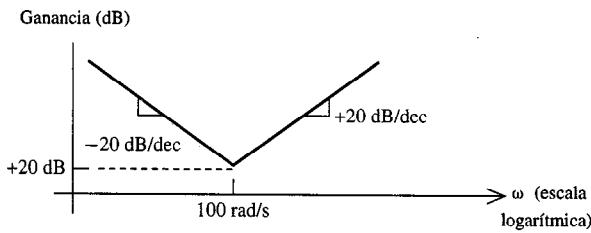
14.58. Repita el problema 14.57 para las siguientes $H(s)$ del problema 14.55

- (a) $\frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$
- (b) $\frac{10}{s^2 + 24s + 20}$

- (c) $\frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{10}s + 50}$
 (d) $\frac{-s + 1}{2s^2 + s + 4}$
 (e) $\frac{90(s - 10)}{s^2 + 2s + 900}$
 (f) $\frac{6}{s^2}$

14.59. Diseñe un circuito con $H(s) = s(s + 1)/(s + 2)^2$. La ganancia en $\omega = 1$ rad/s será de 0.283. Utilice prueba y error en el capacitor de la izquierda para elevar la ganancia en $\omega = 1$ a +2.50 dB. Muestre el diagrama de circuito original y especifique el nuevo valor de la capacitancia como α en la relación $C_{\text{new}} = \alpha C_{\text{old}}$. Vea el problema 15.57 para parámetros de op amps.

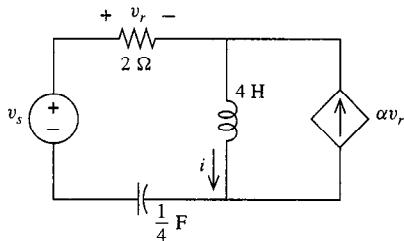
14.60. Diseñe un circuito con la gráfica de Bode de ganancia no corregida. Luego añada otro circuito en cascada que nivele la ganancia de alta frecuencia a +40 dB introduciendo un corte de -20 dB/dec en $\omega = 1000$ rad/s. Utilice SPICE para verificarlo, utilizando los parámetros amp op del problema 15.57.



PROBLEMA P14.60

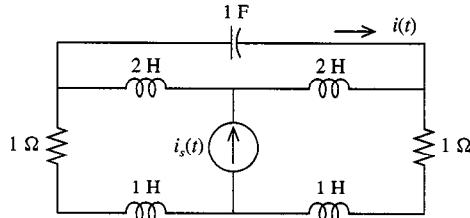
Problemas más complejos

14.61. Obtenga $H(s) = I(s)/V_s(s)$ y la respuesta forzada $i(t)$ para $v_s = \sin 2t$ V. ¿Para qué rango de α corresponde esto a la respuesta en estado estable? Explique



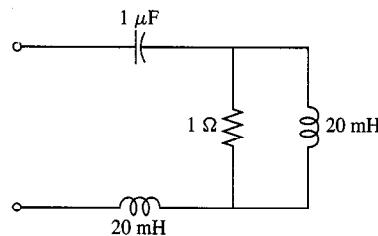
PROBLEMA P14.61

14.62. Repita el problema 14.21 para este circuito.



PROBLEMA P14.62

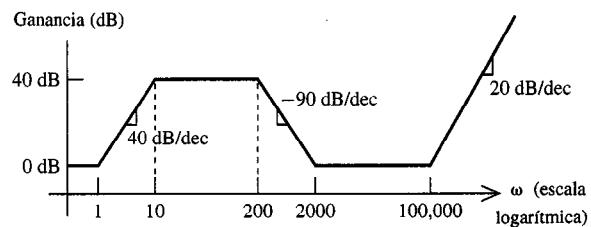
14.63. Obtenga una ecuación cuya única incógnita es la frecuencia de resonancia exacta, para este circuito. Con ayuda de una calculadora, resuelva esta ecuación utilizando prueba y error hasta una exactitud de tres cifras significativas. Verifique utilizando SPICE.



PROBLEMA P14.63

14.64. ¿Qué tanto importa el orden de multiplicación de impedancia y frecuencia, si se hacen simultáneamente? Discútalo con un ejemplo.

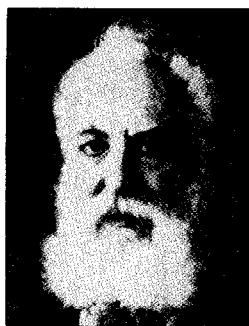
14.65. Obtenga un circuito que tiene la siguiente gráfica de ganancia de Bode no corregida. Suponga que todos los polos y ceros son reales.



PROBLEMA P14.65

14.66. Repita 14.65, pero cambie el par de polos con frecuencia de corte 200 rad/s a polos complejos con $\zeta = 0.001$.

Inductancia mutua y circuitos de dos puertos



Alexander Graham Bell
1847-1922

Señor Watson, venga. Lo necesito.

Alexander Graham Bell

Indudablemente el instrumento eléctrico más común y más ampliamente usado es el teléfono, inventando por el científico escocés-estadounidense Alexander Graham Bell. La fecha fue el 2 de junio de 1875, cuando Bell y su asistente Thomas Watson transmitieron una nota musical. Las primeras palabras telefónicas inteligibles, "Señor Watson, venga. Lo necesito", fueron dichas inadvertidamente por Bell el 10 de marzo de 1876, cuando pidió a Watson que fuera a una sala adjunta para ayudarlo con un ácido derramado.

Bell nació en Edimburgo, Escocia. Su padre, Alexander Melville Bell, era un conocido maestro de dicción, y su abuelo, Alexander Bell, también enseñaba dicción. El joven Bell, luego de asistir a las universidades de Edimburgo y Londres, también se hizo maestro de dicción. En 1866, Bell se interesó en tratar de transmitir eléctricamente el habla, luego de leer un libro que describía cómo podían hacerse sonidos de vocales mediante diapasones. Poco después, dos hermanos de Bell murieron de tuberculosis, y Melville Bell movió a su familia a Canadá por razones de salud. En 1873, el joven Graham se hizo profesor en la Universidad de Boston, y comenzó sus experimentos en su tiempo libre. Fue ahí donde formó su sociedad con Watson, e inició su gran invención. La patente del teléfono de Bell es la más valiosa que se haya expedido, y el teléfono abría una nueva era en el desarrollo de la civilización.

Contenido del capítulo

- 15.1 Inductancia mutua
- 15.2 Circuitos con inductancia mutua
- 15.3 Inductancia mutua y transformadores
- 15.4 Transformadores ideales
- 15.5 Circuitos de dos puertos
- 15.6 Parámetros de dos puertos
- 15.7 Modelos de dos puertos
- 15.8 Interconexión de circuitos de dos puertos
- 15.9 SPICE, transformadores y circuitos de dos puertos
- Resumen
- Problemas



Una forma en que la corriente y voltaje de la terminal de un elemento puede influir sobre el comportamiento de otro, es mediante su interconexión de terminal a terminal, utilizando cable conductor. Esta es la única clase de interacción entre circuitos de elementos que hemos considerado hasta este punto. Ciertamente, definimos un circuito eléctrico como un conjunto de elementos y el cable conductor que los interconecta.

Hay otra forma en la que pueden interactuar los elementos de un circuito, una que no requiere de contacto físico directo mediante cables conductores. En el capítulo 5 vimos que un voltaje puede inducirse a través de las terminales de un inductor en presencia de un campo magnético que varía respecto al tiempo. Este campo puede producirse mediante el inductor mismo, a lo que llamamos autoinductancia, o puede producirse por un segundo inductor, el fenómeno de inductancia mutua, que exploraremos en el presente capítulo.

Generalizando a partir del caso de la inductancia mutua, a menudo nos interesamos en la relación entre la corriente de voltaje en un par de terminales, o puerto, y los de un segundo puerto. Por ejemplo, si deseamos aplicar una entrada a un puerto y una entrada en el otro, o si resolvemos un complejo problema de diseño descomponiendo en un conjunto de subproblemas más simples, resolviendo cada uno separadamente, y conectando la salida de uno a la entrada del siguiente. En estos casos, tenemos circuitos de dos puertos. Un par de inductores acoplados es un ejemplo de un *puerto doble*, como lo es un amplificador de guitarra eléctrica con un puerto marcado “entrada de audio”, y el otro “a las bocinas”.

En la sección 15.1 estudiamos el fenómeno físico básico de la inductancia mutua, derivando las leyes $i-v$ para bobinas acopladas. A continuación consideraremos la forma de analizar circuitos que contienen bobinas acopladas, poniendo especial interés en el caso de acoplamiento perfecto, o transformador ideal. Se discuten los usos prácticos de transformadores para transformar corriente, voltaje y niveles de impedancia, así como porciones de un circuito que están aisladas entre sí. En la sección 15.5, ampliaremos nuestro enfoque para incluir toda clase de circuitos de dos puertos. Primero se discuten sus propiedades básicas y uso; luego, en la sección 15.6, se considerará la variedad de los parámetros de dos puertos y la forma en que se calcula. El capítulo se cierra con el modelo de circuitos para dos puertos, los efectos de sus interconexiones y los usos de SPICE para simular inductancia mutua y otros elementos de dos puertos.

En el capítulo 5 descubrimos que la corriente i en un inductor o bobina, como a veces lo designamos, produce un estado magnético ϕ que pasa a través de sus N espiras, produciendo una corriente de unión

$$\lambda = N\phi \quad (15.1)$$

En un inductor lineal (seguiremos suponiendo linealidad de todos los inductores y el medio magnético que pasa a través de estos), la corriente producida es lineal en i , y por consiguiente también es para λ , y por eso puede ser escrita como

$$\lambda = Li \quad (15.2)$$

La constante de proporcionalidad L es la inductancia del inductor. La unidad convencional SI del flujo ϕ y la corriente de unión λ es el weber (W), y la inductancia L es en henrys (H). La ley de Faraday postula que un voltaje inducido a través de las terminales de la bobina es igual al ritmo de cambio de la corriente de unión λ respecto al tiempo lo que produce la familiar ley de elemento para un inductor

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (15.3)$$

Este análisis anterior supuso que únicamente el flujo que une la bobina se debía a su propia corriente, es decir, la bobina es una bobina simple o *no acoplada*. A veces, por las espiras de una bobina pasa el flujo producido por las corrientes de una o más bobinas, en cuyo caso tenemos *bobinas acopladas*. Considérese la figura 15.1 en donde dos bobinas tienen lugares y orientaciones relativas. La corriente i_1 en la bobina 1 produce la corriente ϕ_{11} , parte de la cual pasa a través de la bobina 2 y parte de ella no pasa:

$$\phi_{11} = \phi_{21} + \phi_{L1} \quad (15.4)$$

Aquí, ϕ_{21} es la componente de ϕ_{11} que pasa a través de la bobina 2, el resto, ϕ_{L1} , se conoce como *corriente de fuga* de la bobina 1. La bobina 2 también tiene una corriente, i_2 , que produce un flujo ϕ_{22} , donde

$$\phi_{22} = \phi_{12} + \phi_{L2} \quad (15.5)$$

ϕ_{12} es la componente de ϕ_{22} que pasa a través de las espiras de la bobina 1, y ϕ_{L2} es su corriente de fuga.

La corriente total que pasa a través de la bobina 1 es la suma de las componentes ϕ_1 debidas a i_1 e i_2 .

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \quad (15.6)$$

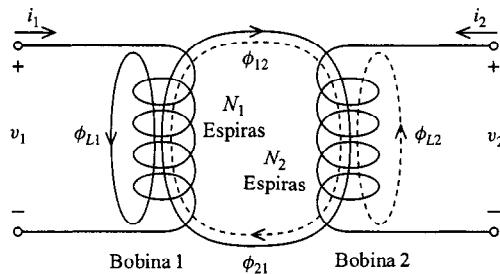


FIGURA 15.1 Par de bobinas acopladas. Las líneas continuas de corriente son producidas por la corriente i_1 en la bobina 1, y las líneas punteadas de corriente por i_2 en la bobina 2.

La corriente neta de unión para la bobina 1, es por (15.1) y lo anterior,

$$\lambda_1 = N_1\phi_1 = N_1\phi_{11} + N_1\phi_{12} \quad (15.7)$$

Cada término a la derecha es una unión mediante corriente y, por linealidad, es proporcional a la corriente que la produce. El primer término se debe a la propia corriente de la bobina 1,

$$N_1\phi_{11} = L_1 i_1 \quad (15.8)$$

donde la constante de proporcionalidad L_1 se conoce como *auto-inductancia* de la bobina 1, y, como en (15.2), ésta se mide en unidades de henrys. El segundo término es producido por y es proporcional a la corriente en la otra bobina:

$$N_1\phi_{12} = \pm M_{12}i_2 \quad (15.9)$$

La constante positiva M_{12} conoce como *inductancia mutua*. Ésta también se mide en henrys como lo requiere la equivalencia dimensional de (15.8) y (15.9).

La razón para el signo \pm en (15.9) la componente de flujo ϕ_{12} producida por la corriente en la bobina 2, puede estar en una dirección *igual* u *opuesta* que la producida por la bobina 1. Si las dos bobinas están orientadas de forma que i_2 positiva produce flujo que pasa a través de la bobina 1, en la misma dirección que el flujo que pasa a través de la bobina 1 debida a su propia i_1 positiva, entonces debe utilizarse el signo más, de otro modo, utilizamos el signo menos.

Para un par dado de bobinas acopladas, siempre puede determinarse el signo correcto a partir de una descripción física detallada de las bobinas, la forma en que están embobinadas y sus lugares y orientaciones relativos en el espacio. Para evitar la necesidad de especificar el detalle físico que se requiere, en breve introduciremos un sistema abreviado conocido como convención de punto, que inmediatamente identificará el signo apropiado.

Sustituyendo (15.8) y (15.9) en (15.7) y diferenciando, por la ley de Faraday

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (15.10)$$

Invirtiendo los papeles desempeñados por las dos bobinas, y queda implicado que

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (15.11)$$

donde L_2 es la autoinductancia de la bobina 2 y M_{21} es la corriente relativa a la inductancia mutua en la bobina 1 con el voltaje resultante inducido en la bobina 2. Nótese que en estas ecuaciones no necesita haber una conexión de circuito *eléctrico* entre dos bobinas para que la corriente en una influya al voltaje en la otra; es suficiente con un circuito *magnético* (ruta de corriente). La capacidad de producir una respuesta eléctrica y sin embargo mantener el *aislamiento eléctrico*, es decir, que no haya conexión de circuito eléctrico, es uno de los usos primarios de las bobinas acopladas.

A continuación determinaremos la energía almacenada en un par de bobinas acopladas. Al hacerlo, descubriremos la relación de las inductancias mutuas M_{12} y M_{21} y entre los signos que se asociarán con los términos de inductancia mutua en las leyes $i-v$ (15.10) y (15.11). La potencia instantánea suministrada a las bobinas en la figura 15.1 es

$$p_1 = v_1 i_1 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} \quad (15.12a)$$

$$p_2 = v_2 i_2 = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} \quad (15.12b)$$

Supongamos que en $t = 0$ todas las corrientes y flujos son ceros, de forma que no hay energía inicial almacenada en las bobinas acopladas; es decir $w(0)=0$. Puesto que los inductores son elementos sin pérdida, la energía total $w(t_1)$ almacenada en el sistema en un instante posterior $t=t_1$ es simplemente la suma de toda la energía suministrada a las bobinas 1 y 2, entre los instantes 0 y t_1 :

$$w(t_1) = \int_0^{t_1} p_1 dt + \int_0^{t_1} p_2 dt \quad (15.13)$$

Si se mantiene i_2 en su valor inicial de cero durante todo el intervalo de tiempo $[0, t_1]$, entonces el segundo término en (15.12a) es cero, al igual que ambos términos en (15.12b), y

$$\begin{aligned} w(t_1) &= \int_0^{t_1} L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt \\ &= L_1 \int_0^{i(t_1)} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t_1) \end{aligned} \quad (15.14)$$

Esta es la forma derivada en el capítulo 5 para energía almacenada para un inductor no acoplado. Para un intervalo de tiempo subsiguiente $[t_1, t_2]$, supongamos que se fija i_1 constante en su valor en t_1 , $i_1(t_1)$. Entonces $w(t_2)$, la energía almacenada en t_2 , está dada por

$$w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} p_2 dt$$

Con i_1 constante en t_1 y t_2 , $di_1/dt = 0$, y por (15.12a y b) y lo anterior,

$$\begin{aligned} w(t_2) - w(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\pm M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} dt \\ &= \left(\int_0^{i_2(t_2)} (\pm M_{12} i_1) di_2 + \int_0^{i_2(t_2)} L_2 i_2 di_2 \right) \end{aligned}$$

Evaluando las integrales y utilizando (15.14) para $w(t_1)$ con $i_1(t_1) = i_1(t_2)$, la energía almacenada en el par de bobinas acopladas en el instante t_2 es

$$w(t_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t_2) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t_2) \pm M_{12} i_1(t_2) i_2(t_2) \quad (15.15)$$

Ahora, volviendo a iniciar en el instante $t = 0$ sin energía almacenada, si invertimos los papeles de las bobinas 1 y 2, es decir, fijamos i_1 en cero hasta t_1 y luego fijamos i_2 y constante a partir de entonces, tendríamos $w(t_2)$ dada por (15.15), pero con los índices de las bobinas invertidos; es decir,

$$w(t_2) = \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t_2) + \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t_2) \pm M_{21} i_2(t_2) i_1(t_2) \quad (15.16)$$

Las últimas dos ecuaciones tienen exactamente el mismo valor: la energía almacenada en el par de bobinas acopladas en el instante t_2 cuando las corrientes son $i_1(t_2)$ en la bobina 1 e $i_2(t_2)$ en la bobina 2. Lo único que difiere es la forma en que se llegó a este estado. Puesto que la energía almacenada no depende en la forma en que se llegue a un estado final, sino únicamente en el valor de ese estado, estas dos cantidades deben ser idénticas. Esto implica que los últimos términos a la derecha de (15.15) y (15.16) son iguales, y se nos revelan dos hechos importantes. El primero es que

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (15.17)$$

Las inductancias mutuas son idénticas. Utilizaremos el símbolo M para su valor común, la *inductancia mutua* del par de bobinas no acopladas. Reescribiendo (15.10) y (15.11) utili-

zando M , tenemos las leyes $i-v$ para bobinas acopladas:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (15.18a)$$

$$v_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (15.18b)$$

Simplificando (15.15) o (15.16) mediante el uso de M , y suprimiendo el argumento de tiempo, la energía almacenada en un par de bobinas acopladas es

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \quad (15.19)$$

El segundo hecho que se nos revela, notando que los últimos términos en (15.15 y 15.16) deben ser idénticos, es que *debe tomarse el mismo signo para ambos términos de inductancia mutua*. Para un par dado de bobinas acopladas, si se tomara un signo más en una ecuación, y un signo menos en la otra (15.15) y (15.16) no tendrían valores de energías idénticas, como deben tenerlo. Nótese que el signo seleccionado para los términos de inductancia mutua en las leyes $i-v$ (15.18) también es verdad para el término de inductancia mutua en la ecuación de energía (15.19).

Ejemplo 15.1

Este ejemplo muestra la forma en que la autoinductancia y la inductancia mutua, y el signo asociado con los términos de inductancia mutua en (15.18), pueden determinarse experimentalmente. Para un par de bobinas acopladas en una orientación relativa fija, supongamos que inyectamos una corriente de prueba de rampa $i_1(t) = t$ A en la bobina 1, en tanto que dejamos a la bobina 2 en circuito abierto, y con un voltímetro medimos respuestas que resultan ser voltajes de $v_1(t) = 6$ V y $v_2(t) = -4$ V. Entonces, por (15.18a y b),

$$v_1 = L_1 \frac{d}{dt}(t) \pm M \frac{d}{dt}(0) = L_1 = 6 \text{ V}$$

$$v_2 = \pm M \frac{d}{dt}(t) + L_2 \frac{d}{dt}(0) = \pm M = -4 \text{ V}$$

La autoinductancia L_1 de la bobina 1 es 6 H, y notando que M está definida como no negativa, la inductancia mutua M es 4 H. Es claro que debe tomarse el signo menos en ambas ecuaciones en las leyes $i-v$ para estas bobinas acopladas (15.18); es decir, sus leyes $i-v$ son

$$v_1 = 6 \frac{di_1}{dt} - 4 \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = -4 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Para determinar L_2 , fijamos $i_1 = 0$ e inyectamos una corriente conveniente que varía respecto al tiempo en la bobina 2. Supongamos que la respuesta v_2 a la rampa unitaria $i_2(t) = t$ bajo estas condiciones es de 5 V. Entonces, por la última ecuación $L_2 = 5$ H.

Finalmente, supongamos que en algún instante t tenemos corrientes instantáneas de bobina $i_1(t) = 15 \text{ A}$ e $i_2(t) = -9 \text{ A}$. Entonces la potencia almacenada en el par de bobinas acopladas en t es, por (15.19),

$$w = \frac{1}{2}(6)(15^2) + \frac{1}{2}(5)(-9)^2 - 4(15)(-9) = 1417.5 \text{ J}$$

El *coeficiente de acoplamiento* k es una medida del grado en el que el flujo producido por una bobina fluye sobre la otra, y está definido por

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (15.20)$$

Si no hay acoplamiento entre las bobinas, $M = k = 0$. Un par de bobinas con coeficiente de acoplamiento k cero es equivalente a dos bobinas simples y no acopladas, como puede verse al fijar $M = 0$ en las leyes $i-v$ (15.18). Si hay acoplamiento, entonces por (15.8), (15.9) y (15.17),

$$k = \frac{\sqrt{M_{21} M_{12}}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}} \sqrt{\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}}}$$

Puesto que ambos numerados a la derecha son componentes de sus respectivos denominadores, esto indica que $k \leq 1$. De este modo, el coeficiente acoplamiento k está acotado por

$$0 \leq k \leq 1 \quad (15.21)$$

o, de manera equivalente, la inductancia mutua M está acotada por

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (15.22)$$

De un par de bobinas con coeficiente de acoplamiento k cerca de su cota superior de la unidad, se dice que están *estrechamente acopladas*. Estas bobinas son particularmente eficientes para unir partes de un circuito eléctrico que no pueden ser conectadas directamente, una posibilidad que examinaremos en nuestra discusión de los transformadores en sección 15.4.

EJERCICIOS

15.1.1. Cuando $i_1(t) = 5 \cos 2t \text{ A}$ y la bobina 2 están en circuito abierto, los voltajes en la figura 15.1 son de $v_1(t) = 2 \sin(2t+180^\circ) \text{ V}$ y $v_2(t) = 3 \sin(2t+180^\circ) \text{ V}$. Cuando se invierten estos papeles, $i_2(t) = 5 \cos 2t \text{ A}$ y la bobina 1 se mantienen en circuito abierto, y $v_2(t) = 10 \sin(2t+180^\circ) \text{ V}$. Obtenga L_1, L_2, M , y el signo de los términos de inductancia mutua en las leyes $i-v$ de bobina acoplada (15.19).

Respuesta $\frac{1}{3} \text{ H}, 1 \text{ H}, \frac{3}{10} \text{ H}$, signo más.

15.1.2. La corriente $i_1 = +1 \text{ A}$ produce el flujo $\phi_{11} = 2 \text{ mW}$, de la cual la mitad pasa por las espiras de la bobina 2; $\phi_{21} = 1 \text{ mW}$. $i_2 = +1 \text{ A}$ produce el flujo $\phi_{22} = 10 \text{ mW}$ en la misma dirección que ϕ_{21} . La bobina 1 tiene 100 espiras

y la bobina 2 tiene 900 espiras. Obtenga la fracción de ϕ_{22} que pasa por la bobina 1 y la potencia almacenada en el par de bobinas acopladas cuando $i_1 = +1 \text{ mA}$ e $i_2 = +5 \text{ mA}$.

Respuesta $\frac{9}{10}, 117.1 \mu\text{J}$

15.1.3. Determine el coeficiente de acoplamiento para los ejercicios 15.1.1 y 15.1.2.

Respuesta 0.671, 0.671

15.2

CIRCUITOS CON INDUCTANCIA MUTUA

Las leyes $i-v$ para una pareja de bobinas acopladas, dadas en (15.18) y repetidas aquí para nuestra conveniencia, son

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (15.23a)$$

$$v_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (15.23b)$$

Para analizar un circuito que contiene bobinas acopladas, tenemos que saber qué signos deben usarse. En la sección anterior vimos que debe utilizarse el mismo signo para ambos términos de inductancia mutua en estas ecuaciones. La notación abreviada que utilizaremos para indicar qué signo debe usarse se conoce como *convención de punto*. Los diagramas de circuito incluirán un par de puntos, uno para cada inductor, y los valores de las dos autoinductancias y de inductancia mutua, como se muestra en la figura 15.2.

Para aplicar la convención de punto, primero asignaremos separadamente direcciones de referencia de corriente y voltaje para cada inductor, de forma que cada uno satisfaga la convención de signo pasivo (las flechas de i_1 e i_2 señalan hacia los extremos positivos de v_1 y v_2). De este modo, la *convención de punto* es la siguiente regla: si ambas flechas de referencia de las corrientes señalan hacia los extremos con puntos, o ambas hacia los extremos sin puntos de los inductores, utilizaremos el signo más para ambos términos de inductancia mutua en las leyes $i-v$. De otro modo, se utilizará el signo menos.

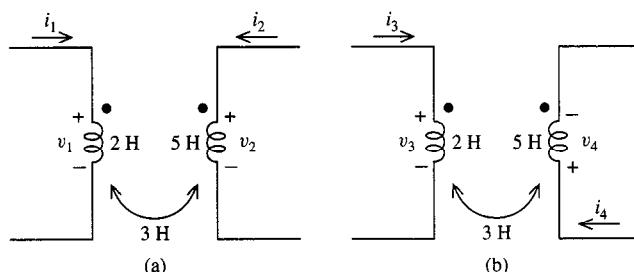


FIGURA 15.2 (a) Bobinas acopladas; (b) las mismas bobinas pero con variables distintas.

Ejemplo 15.2

Obtengamos las leyes $i-v$ para las bobinas acopladas en la figura 15.2(a) y (b). Aplicando la convención de punto para figura 15.2(a), primero verificaremos que se satisface separadamente la convención de signo pasivo para (i_1, v_1) e (i_2, v_2) . Entonces, puesto que las flechas de referencia de las corrientes señalan ambas hacia los extremos conjun-

tos, se toman los signos positivos en (15.23) y las leyes $i-v$

$$v_1 = 2 \frac{di_1}{dt} + 3 \frac{di_2}{dt} \quad (15.24a)$$

$$v_2 = 3 \frac{di_1}{dt} + 5 \frac{di_2}{dt} \quad (15.24b)$$

Para las mismas bobinas, supongamos que asignamos las variables de corriente y voltaje para la figura 15.2(b). Nuevamente (i_3, v_3) , e (i_4, v_4) , satisfacen por separado la convención de signo pasivo. Esta vez, una flecha señala hacia el extremo con punto, y el otro extremo a un extremo sin punto, de forma que

$$v_3 = 2 \frac{di_3}{dt} - 3 \frac{di_4}{dt} \quad (15.25a)$$

$$v_4 = -3 \frac{di_3}{dt} + 5 \frac{di_4}{dt} \quad (15.25b)$$

Examinando la figura, si se trata de las mismas bobinas, entonces $v_3 = v_1$, $i_3 = i_1$, $i_4 = -i_2$ y $v_4 = -v_2$. Sustituyéndolas en (15.25) se recupera (15.24), de forma que las leyes $i-v$ son completamente equivalentes. No importa en qué forma se elijan las parejas de direcciones de referencia. *Pueden elegirse libremente conjuntos separados de direcciones de referencia para ambas bobinas sin importar los puntos.* Desde luego, con frecuencia será ligeramente más conveniente elegir las flechas de corriente de forma que se eviten signos menos en las leyes $i-v$ como en la figura 15.2(a), pero no en la figura 15.2(b).

La transformada de Laplace o versión en dominio- s de las leyes $i-v$ (15.23), es muy conveniente para analizar circuitos que involucran respuesta de condiciones iniciales o transitorias de interruptores. Utilizando la propiedad de diferenciación de la transformada de Laplace (tabla 12.1), las leyes $i-v$ para las bobinas acopladas en el dominio- s son, a partir de (15.23)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(s) &= \{sL_1\mathbf{I}_1(s) - L_1i_1(0-)\} \\ &\quad \pm \{sM\mathbf{I}_2(s) - Mi_2(0-)\} \end{aligned} \quad (15.26a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2(s) &= \pm \{sM\mathbf{I}_1(s) - Mi_1(0-)\} \\ &\quad + \{sL_2\mathbf{I}_2(s) - L_2i_2(0-)\} \end{aligned} \quad (15.26b)$$

En el importante caso especial de condiciones iniciales cero, éstas simplifican a

$$\mathbf{V}_1(s) = sL_1\mathbf{I}_1(s) \pm sM\mathbf{I}_2(s) \quad (15.27a)$$

$$\mathbf{V}_2(s) = \pm sM\mathbf{I}_1(s) + sL_2\mathbf{I}_2(s) \quad (15.27b)$$

Ejemplo 15.3

Considérese el circuito de la figura 15.3(a) y la respuesta de circuito deseada $v_3(t)$, $t > 0$. Las condiciones iniciales en el instante $t = 0-$ son todas cero, puesto que el escalón unitario $u(t)$ no energiza la fuente hasta que $t = 0$. Para $t > 0$ hay sólo una corriente de malla desconocida, i_m , en la figura 15.3(b). Asignemos direcciones de referencia (i_1, v_1), (i_2, v_2), que por separado satisfacen la convención de signo pasivo para los dos inductores, como se muestra. La ecuación de malla es

$$\mathbf{V}_1(s) + 3\mathbf{I}_m(s) + \mathbf{V}_2(s) + 5\mathbf{I}_m(s) = 0$$

Utilizando la leyes $i-v$ en el dominio-s (15.27) para determinar los voltajes,

$$\{4s\mathbf{I}_1(s) + s\mathbf{I}_2(s)\} + 8\mathbf{I}_m(s) + \{s\mathbf{I}_1(s) + 2s\mathbf{I}_2(s)\} = 0$$

De la figura 15.3(b) podemos ver que $i_m = i_2$ e $i_1 = i_m - 8u(t) = i_2 - 8u(t)$. Utilizándolas para eliminar i_m e i_1 ,

$$4s\left(\mathbf{I}_2(s) - \frac{8}{s}\right) + s\mathbf{I}_2(s) + 8\mathbf{I}_2(s) + s\left(\mathbf{I}_2(s) - \frac{8}{s}\right) + 2s\mathbf{I}_2(s) = 0$$

Resolviendo,

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{5}{s+1}$$

$$\text{y } v_3(t) = 3i_2(t) = 15e^{-t}, \text{ V, } t > 0$$

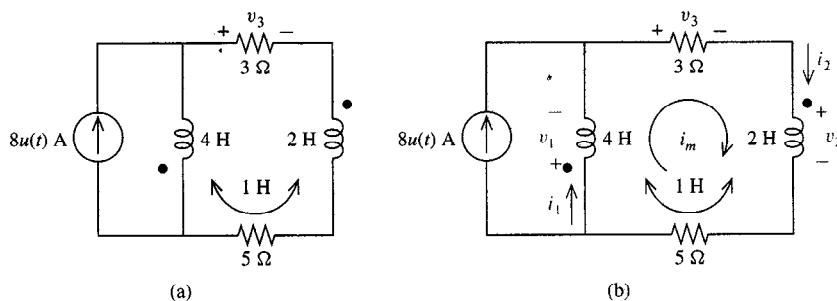


FIGURA 15.3 (a) Circuitos para el ejemplo 15.2; (b) marcada para análisis.

En este ejemplo podemos ver que escribir ecuaciones de malla para circuitos con bobinas acopladas es un proceso directo de los pasos. Primero se escriben las ecuaciones de malla en términos de los voltajes de bobina; luego se utilizan las leyes $i-v$ (15.26) o (15.27) para eliminar los voltajes de bobina, y las corrientes de bobina resultantes se expresan en términos de corrientes de malla. El proceso puede acelerarse escribiendo las ecuaciones de malla directamente en las corrientes de malla en un solo paso, pero con el peligro de tener errores de signo. Se recomienda que se hagan explícitamente los dos pasos hasta que los estudiantes se sientan con la suficiente confianza para escribir las ecuaciones de malla directamente en términos de las corrientes.

Ejemplo 15.4

Buscamos la corriente $i_2(t)$, $t > 0$ para el circuito de la figura 15.4. En $t = 0-$ el circuito está en estado estable dc, y por las leyes $i-v$ de bobina acoplada (15.23), cuando las corrientes son constantes no hay voltaje a través de los inductores. *Las bobinas acopladas se comportan como circuitos cerrados en estado estable dc*, del mismo modo en

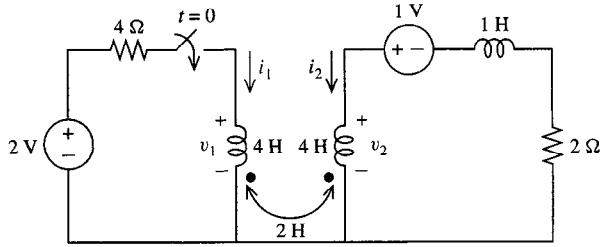


FIGURA 15.4 Circuito para el ejemplo 15.4.

que se comportan las bobinas no acopladas. Entonces $i_2(0-) = \frac{1}{2} \text{ A}$ y, puesto que el circuito está abierto para $t < 0$, $i_1(0-) = 0$. Para $t > 0$ el interruptor está cerrado, y las ecuaciones de malla en dominio- s son

$$4\mathbf{I}_1(s) + \mathbf{V}_1(s) = \frac{2}{s} \quad (15.28a)$$

$$\mathbf{V}_2(s) + 2\mathbf{I}_2(s) + \left[s\mathbf{I}_2(s) - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{s} \quad (15.28b)$$

Utilizando las leyes $i-v$ en el dominio- s (15.26) para eliminar los voltajes, y luego reescribiéndola en forma de vector matriz para una solución más conveniente, tenemos

$$4\mathbf{I}_1(s) + \{4s\mathbf{I}_1(s) + 2s\mathbf{I}_2(s) - 1\} = \frac{2}{s} \quad (15.29a)$$

$$\{4s\mathbf{I}_2(s) - 2 + 2s\mathbf{I}_1(s)\} + 2\mathbf{I}_2(s) + \left[s\mathbf{I}_2(s) - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{s} \quad (15.29b)$$

$$\begin{bmatrix} 4s+4 & 2s \\ 2s & 5s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s} \\ \frac{5s+2}{2s} \end{bmatrix}$$

Resolviendo para $\mathbf{I}_2(s)$ por la regla de Cramer,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4s+4 & 2s \\ 2s & 5s+2 \end{vmatrix} = 16s^2 + 28s + 8$$

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 4s+4 & \frac{2s+4}{2s} \\ 2s & \frac{5s+2}{2s} \end{vmatrix} = \frac{4s^2 + 5s + 2}{2s(4s^2 + 7s + 2)}$$

Hay polos entre $s = 0$ y $s = (-7 \pm \sqrt{17})/8$ o $s = -0.360, -1.39$. La expansión en fracciones parciales para estos tres polos reales simples es

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{-0.242}{s + 0.360} + \frac{0.242}{s + 1.39}$$

y

$$i_2(t) = \frac{1}{2} + 0.242(e^{-1.39t} - e^{-0.36t}), \quad t > 0$$

Puesto que las funciones de transferencia son proporciones de salidas contra entradas en el dominio- s cuando las condiciones iniciales son cero, la forma de condición inicial

cero de las leyes $i-v$ (15.27) también pueden ser utilizadas para determinar la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ y, si el circuito es estable al sustituir s por $j\omega$, la respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$. Recordemos que los circuitos sin fuentes dependientes o trayectorias cerradas LC aisladas son siempre estables, y, en cualquier caso, puede verificarse la estabilidad determinando si el signo de la parte real de cada polo del sistema es relativo.

Ejemplo 15.5

Deseamos obtener la proporción de transferencia de corriente $\mathbf{H}(s)=\mathbf{I}_2(s)/\mathbf{I}_1(s)$ para el circuito que aparece en la figura 15.5 y la respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$. Hay dos mallas, pero sólo una corriente de malla desconocida. La ecuación de malla única es

$$\left(\frac{4}{s} + 1\right)\mathbf{I}_2(s) + \mathbf{V}_2(s) = 0 \quad (15.30)$$

donde, puesto que ambas corrientes fluyen hacia extremos sin punto de sus respectivos inductores, la convención de punto requiere el uso del signo más para el término de inductancia mutua, y

$$\mathbf{V}_2(s) = s\mathbf{I}_1(s) + 2s\mathbf{I}_2(s)$$

Sustituyendo la última en (15.30) y resolviendo para la respuesta $\mathbf{I}_2(s)$

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{-\frac{1}{2}s^2}{s^2 + \frac{1}{2}s + 2}\mathbf{I}_1(s)$$

La función de transferencia deseada es

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-\frac{1}{2}s^2}{s^2 + \frac{1}{2}s + 2}$$

y la respuesta de frecuencia de este circuito es

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}\omega^2}{(2 - \omega^2) + j(\omega/2)}$$

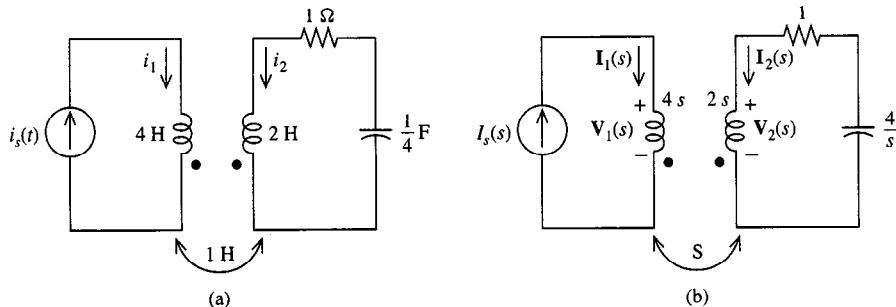


FIGURA 15.5 (a) Circuito; (b) circuito marcado en el dominio-s.

Las ecuaciones (15.26) y (15.27) son las formas v de las leyes $i-v$ para un par de bobinas acopladas, en donde los voltajes se obtienen en términos de las corrientes. Estos son convenientes para análisis de malla como lo demuestran los ejemplos. Para el análisis

nodal es necesario trabajar con la forma i de estas leyes $i-v$. Reescribiendo (15.27) en la forma de vector matriz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & \pm sM \\ \pm sM & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.31)$$

Invirtiendo la matriz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2(L_1L_2 - M^2)} \begin{bmatrix} sL_2 & -(\pm sM) \\ -(\pm sM) & sL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.32)$$

Expandiéndola nuevamente en la forma escalar de ecuaciones simultáneas, tenemos la *forma i de las leyes i-v para bobinas acopladas con condiciones iniciales cero*:

$$\mathbf{I}_1(s) = \frac{1}{sL_{e1}} V_1(s) - \left(\pm \frac{1}{sM_e} \right) V_2(s) \quad (15.33a)$$

$$\mathbf{I}_2(s) = - \left(\pm \frac{1}{sM_e} \right) V_1(s) + \frac{1}{sL_{e2}} V_2(s) \quad (15.33b)$$

donde definimos parámetros de inductancia equivalentes

$$L_{e1} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}, \quad L_{e2} = L_2 - \frac{M^2}{L_1}, \quad M_e = \frac{L_1L_2}{M} - M \quad (15.34)$$

Nótese el signo menos que antecede al término $1/(sM_e)$. Si la convención de puntos requiere que el signo positivo sea tomado en el término de inductancia mutua, los términos correspondientes $[\pm 1/(sM_e)]$ en la forma i de las leyes $i-v$ son negativos, y viceversa. En otras palabras, si ambas direcciones de referencia de corrientes señalan hacia los extremos con punto, o ambos hacia los extremos sin punto de sus inductores, entonces se necesitarán de signos menos en esta forma de las leyes $i-v$.

Usando (15.26), cuando las condiciones iniciales no son cero, (15.31) se convierte en

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) + L_1i_1(0-) \pm Mi_2(0-) \\ \mathbf{V}_2(s) \pm Mi_1(0-) + L_2i_2(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & \pm sM \\ \pm sM & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix}$$

La misma matriz se invierte como en (15.31); de este modo, la forma i de la ley $i-v$ es la que se muestra en (15.33), pero con $\mathbf{V}_1(s)$ y $\mathbf{V}_2(s)$ en (15.33) sustituidas por $\mathbf{V}_1(s) + L_1i_1(0-) \pm Mi_2(0-)$ y $\mathbf{V}_2(s) \pm Mi_1(0-) + L_2i_2(0-)$, respectivamente.

Ejemplo 15.6

Deseamos determinar la impedancia $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{V}(s)/\mathbf{I}(s)$ de este circuito de dos terminales. Las ecuaciones niales son

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(s) + 2\mathbf{V}_1(s) - \mathbf{V}_2(s) &= \mathbf{I}(s) \\ \mathbf{I}_2(s) + 4\mathbf{V}_2(s) - \mathbf{V}_1(s) &= 0 \end{aligned} \quad (15.35)$$

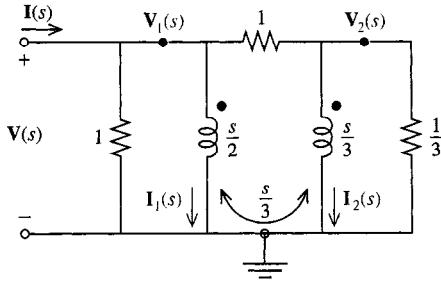


FIGURA 15.6 Circuito para el ejemplo 15.6.

Eliminaremos $I_1(s)$ e $I_2(s)$ (15.33). Los parámetros de inductancia equivalente son

$$L_{e1} = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}} = 1/6 \text{ H} \quad (15.36a)$$

$$L_{e2} = \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 1/9 \text{ H} \quad (15.36b)$$

$$M_e = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} - 1/3 = 1/6 \text{ H} \quad (15.36c)$$

y utilizando las leyes $i-v$ para bobina (15.33) en (15.35),

$$\left[\frac{6}{s}V_1(s) - \frac{6}{s}V_2(s) \right] + 2V_1(s) - V_2(s) = I(s) \quad (15.37a)$$

$$\left[-\frac{6}{s}V_1(s) + \frac{9}{s}V_2(s) \right] + 4V_2(s) - V_1(s) = 0 \quad (15.37b)$$

Resolviendo la segunda ecuación para $V_2(s)$,

$$V_2(s) = \frac{s+6}{4s+9}V_1(s)$$

Sustituyendo (15.37a) elimina $V_2(s)$, y

$$\left(\frac{6}{s} + 2 \right) V_1(s) - \left(\frac{6}{s} + 1 \right) \left(\frac{s+6}{4s+9} \right) V_1(s) = I(s) \quad (15.38a)$$

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I(s)} = \frac{4s^2 + 9s}{7s^2 + 30s + 18} \quad (15.38b)$$

Comparado a las formas v (15.26) y (15.27), las formas i de las leyes $i-v$ para bobinas acopladas son más laboriosas. Esto hace que el análisis de malla sea preferible al análisis nodal para la mayoría de los problemas. Sin embargo, a veces se da el caso, como en el ejemplo anterior, que hay significativamente menos variables de voltaje nodal que variables de corriente de malla, y en estos casos se garantiza el análisis nodal.

En tanto que el análisis en dominio- s presentado en esta sección puede aplicarse a cualquier problema de circuitos, el análisis fasorial es más eficiente para obtener la respuesta forzada o en estado estable ac a la excitación sinusoidal. Como se muestra en el capítulo 14, las relaciones en dominio- s calculadas con condiciones iniciales cero deben convertirse al dominio fasorial simplemente sustituyendo s por $j\omega$. Las leyes $i-v$ fasoriales para bobinas acopladas son, de (15.27),

$$\mathbf{V}_1(j\omega) = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 \pm j\omega M \mathbf{I}_2 \quad (15.39a)$$

$$\mathbf{V}_2(j\omega) = \pm j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2 \quad (15.39b)$$

y, con L_{e1} , L_{e2} y M_e definidos como en (15.34),

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{1}{j\omega L_{e1}} \mathbf{V}_1 - \left(\pm \frac{1}{j\omega M_e} \right) \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= - \left(\pm \frac{1}{j\omega M_e} \right) \mathbf{V}_1 + \frac{1}{j\omega L_{e1}} \mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

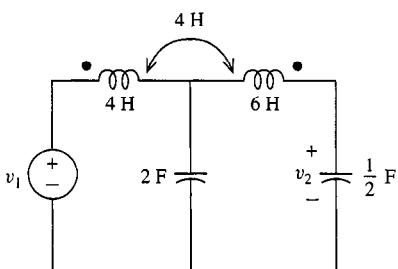
Por ejemplo, la impedancia fasorial $\mathbf{Z}(j\omega)$ para el circuito del ejemplo anterior es, sustituyendo s por $j\omega$ en (15.38b),

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(j\omega) &= \frac{4(j\omega)^2 + 9(j\omega)}{7(j\omega)^2 + 30(j\omega) + 18} \\ &= \frac{-4\omega^2 + j9\omega}{(18 - 7\omega^2) + j30\omega} \end{aligned} \quad (15.40)$$

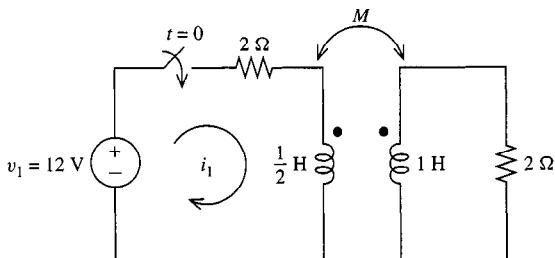
De la figura 15.6 podemos ver que, en estado estable dc, la entrada queda en circuito cerrado por el inductor izquierdo y la impedancia es por consiguiente cero, lo que es congruente con fijar $\omega = 0$ en (15.40). En el límite de alta frecuencia, los inductores en figura 15.6 se comportan como circuitos abiertos y la impedancia es la de una resistencia de $1-\Omega$ en paralelo con una resistencia de $4/3-\Omega$, o $4/7-\Omega$. Esto coincide con el valor limitante en (15.40) de $\omega \rightarrow \infty$.

Para resumir esta sección, los circuitos que contienen bobinas acopladas pueden analizarse sin dificultades indebidas utilizando análisis de malla nodal. Las ecuaciones de malla se escriben primero en términos de variables de voltaje de bobina, y luego se usa la forma v de las leyes $i-v$ (15.26), o (15.27) si las condiciones iniciales no son cero, para eliminar estos voltajes. Se utiliza la convención de punto para determinar el signo adecuado que debe utilizarse con los términos de inductancia mutua en las leyes $i-v$. De modo parecido, primero se escriben las ecuaciones de análisis nodal para contener variables de corriente de bobina, que se sustituyen utilizando la forma i de las leyes $i-v$. La forma i utiliza parámetros de inductancia equivalentes L_{e1} , L_{e2} y M_e definidos en (15.34) y, particularmente cuando hay condiciones iniciales no nulas, es ligeramente menos conveniente de utilizar que la forma v el análisis de malla.

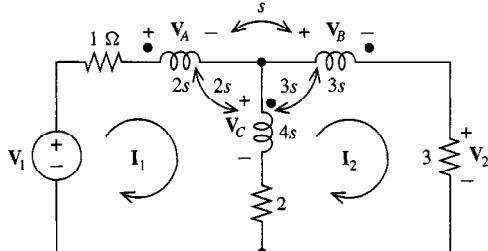
EJERCICIOS



EJERCICIO 15.2.2



EJERCICIO 15.2.1



EJERCICIO 15.2.3

- 15.2.1. Obtenga i_1 para $t > 0$ si $M = 1/\sqrt{2}$ H y el circuito está en estado estable en $t = 0-$.
 Respuesta $6 - 2e^{-4/3t}$ A

- 15.2.2. Obtenga v_2 en estado estable ac si $v_1 = 8e^{-2t} \cos t$ V.
 Respuesta $\sqrt{2}e^{-2t} \cos(t + 45^\circ)$ V

- 15.2.3. Obtenga la función de transferencia V_2/V_1 . Nótese que cada inductor es acoplado con otros dos, de forma que las leyes $i-v$ para cada par de bobinas deben tener dos términos de inductancia mutua.

$$\text{Respuesta } \frac{3(10s + 2)}{30s^2 + 49s + 11}$$

- 15.2.4. Escriba las formas i de las leyes $i-v$ en el dominio- s para la figura 15.2(a) con condiciones iniciales cero y la figura 15.2(b) con condiciones iniciales arbitrarias.

$$\begin{aligned} \text{Respuesta (a)} \quad & I_1 = \frac{5}{s}V_1 - \frac{3}{s}V_2 \\ & I_2 = -\frac{3}{s}V_1 + \frac{2}{s}V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & I_1 = \left(\frac{5}{s}\right)(V_3 + 2i_3(0-) - 3i_4(0-)) + \frac{3}{s}(V_4 - 3i_1(0-) + 5i_4(0-)) \\ & I_2 = \frac{3}{s}(V_3 + 2i_3(0-) - 3i_4(0-)) + \frac{2}{s}(V_4 - 3i_1(0-) + 5i_4(0-)) \end{aligned}$$

15.3

INDUCTANCIA MUTUA Y TRANSFORMADORES

El uso práctico más común del fenómeno de inductancia mutua en los circuitos eléctricos son los transformadores. Un transformador es un circuito de dos puertos que contiene bobinas acopladas con sus espiras alrededor de un núcleo común. En la figura 15.7 hay un esquema de un transformador típico. Cada bobina, o devanado, termina en un par de nodos designados puerto, que están disponibles para conectarse a un circuito externo. Uno de estos puertos se conoce como *primario*. Generalmente, el primario está conectado a una fuente externa, como se muestra en la figura. El otro puerto, conocido como *secundario*, generalmente está conectado a una carga. En aplicaciones de transformadores de potencia, la carga puede ser una impedancia pasiva, en tanto que en aplicaciones electrónicas, puede ser la entrada a un filtro, amplificador u otro circuito activo.

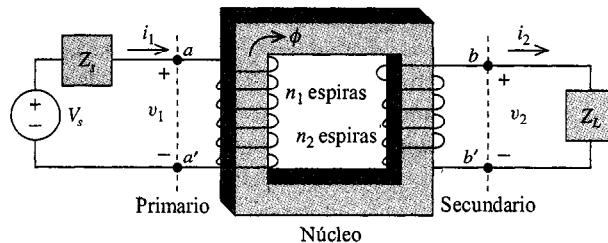


FIGURA 15.7 Transformador.

El rectángulo en la figura 15.7 alrededor de la cual están devanadas las bobinas, se conoce como *núcleo* del transformador. El núcleo se construye principalmente de material ferromagnético para facilitar la producción de campos magnéticos intensos en respuesta a las corrientes que fluyen en las bobinas, y para guiar estos flujos a través de los devanados primario y secundario. El núcleo puede ser una “rosca” simple de hierro dulce, o una sofisticada construcción en capas de materiales compuestos con láminas que contienen aleaciones de cobalto, selenio y otros materiales con las propiedades magnéticas deseadas.

Los transformadores son dispositivos eléctricos sumamente versátiles, y se utilizan en un amplio rango de aplicaciones de circuitos, incluyendo electrónica para energía, industrial y para el consumidor. Su principal uso es multiplicar, o transformar, variables de circuito primarias, a niveles más adecuados para impulsar el circuito conectado al secundario. Utilizando este dispositivo puede transformarse la corriente, voltaje y los niveles de impedancia, como veremos a continuación. Además, los transformadores se utilizan con frecuencia para aislar el circuito primario del secundario.

Considérese el circuito básico que aparece en la figura 15.8. Mientras los transformadores se usan con mayor frecuencia en los circuitos estado estable ac, utilizaremos el análisis fasorial. La autoinductancia del devanado primario es L_1 , el del secundario L_2 y la inductancia mutua del transformador es M . El circuito externo unido al primario fue simplificado con un equivalente de Thevenin de fuente de voltaje V_s e impedancia Z_s . La carga también se redujo (si esto es necesario) en su equivalente de Thevenin, y la ausencia de una fuente equivalente en serie con Z_L implica que no hay fuentes independientes en el circuito de carga unido al secundario.

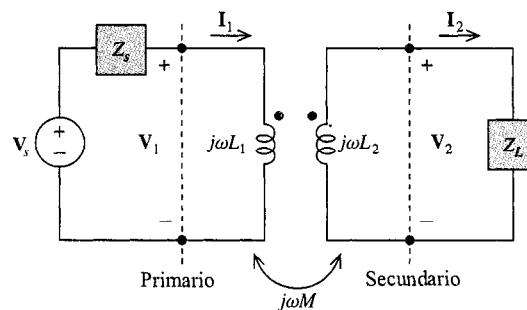


FIGURA 15.8 Circuito transformador básico (dominio fasorial).

Nótense cuidadosamente las direcciones de referencia que aparecen en la figura 15.8. Siguiendo la convención de transformadores, *la corriente y voltaje primarios se definen para satisfacer la convención de signo pasivo, en tanto que esto no ocurre en el voltaje y corriente secundarios (\mathbf{I}_2 , \mathbf{V}_2)*. Nuestra postulación de la convención de punto en la última sección requiere que la convención de signo pasivo sea satisfecha por ambas bobinas por separado, de forma que utilizaremos \mathbf{I}_2 y $-\mathbf{V}_2$ como las variables de corriente y voltaje para el secundario al escribir las leyes $i-v$.

Las leyes fasoriales $i-v$ para el transformador son, a partir de (15.39),

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 \quad (15.41a)$$

$$-\mathbf{V}_2 = -j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2 \quad (15.41b)$$

Puesto que \mathbf{I}_1 señala hacia el extremo con punto y \mathbf{I}_2 hacia el extremo sin punto, la convención de punto dicta signos menos para los términos de inductancia mutua. Las variables de voltaje de bobina utilizados en (15.41), son aquellos que satisfacen la convención de signo pasivo junto con \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 , es decir, \mathbf{V}_1 y $-\mathbf{V}_2$. Advierta que de la figura $\mathbf{V}_2 = Z_L \mathbf{I}_2$ podemos resolver que (15.41b) para \mathbf{I}_2 en términos de \mathbf{I}_1 ,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2} \mathbf{I}_1 \quad (15.42)$$

Utilizando esta expresión para eliminar \mathbf{I}_2 de (15.41a), tenemos

$$\mathbf{V}_1 = \left[j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \right] \mathbf{I}_1 \quad (15.43)$$

Esta expresión tiene una interesante interpretación. Sugiere que la impedancia $\mathbf{Z} = \mathbf{V}_1 / \mathbf{I}_1$ orientada hacia el puerto primario, es equivalente a un inductor simple (no acoplado) de L_1 henrys en serie con una segunda impedancia, como se muestra en la figura 15.9. Esta segunda impedancia muestra el efecto de una carga y devanado secundario cuando aparece en el circuito primario, y se conoce como *impedancia reflejada* $\mathbf{Z}_R(j\omega)$.

$$\mathbf{Z}_R(j\omega) = \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \quad (15.44)$$

Los subcircuitos a la derecha de las terminales primarias en las figuras 15.8 y 15.9 son subcircuitos equivalentes, y por consiguiente el circuito de una trayectoria cerrada de la figura 15.9, puede utilizarse para simplificar el análisis del circuito básico de transformadores de la figura 15.8.

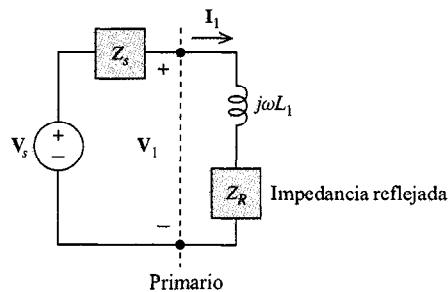


FIGURA 15.9 Devanado secundario y carga reflejada en el primario.

La proporción de corrientes primaria contra secundaria y la proporción de voltaje I_2/I_1 y la proporción de voltaje V_2/V_1 son también de interés. Por (15.42),

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2} \quad (15.45)$$

puesto que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L I_2}{V_1} = Z_L \frac{I_2}{I_1} \frac{I_1}{V_1} \quad (15.46)$$

entonces, por (15.43)–(15.46),

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{j\omega M Z_L}{j\omega L_1 (Z_L + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \quad (15.47)$$

Las ecuaciones (15.45) y (15.47), muestran la forma en que la corriente y voltaje primario se transforman al pasar a través del transformador, y (15.44) muestra la forma en que la impedancia secundaria se transforma al reflejarse hacia el circuito primario.

Ejemplo 15.7

Un circuito doméstico de 60-Hz que suministra $V_s = 156\angle 0^\circ$ V a una impedancia de fuente $Z_s = 20\Omega$ se utilizará para impulsar una carga $Z_L = 5\text{k}\Omega$. Determine la corriente, voltaje y potencia suministrada a la carga si se conecta directamente a la fuente como en la figura 15.10(a), compare en el caso de conexión a través de un transformador con $L_1 = \frac{1}{4}\text{H}$, $L_2 = 10\text{H}$ y $M = 1\text{H}$, como se muestra en la figura 15.10(b).

En la figura 15.10(a) con conexión directa, el voltaje de carga es

$$V_L = \frac{Z_L}{Z_L + Z_s} V_s = \frac{5000}{5020} (156) = 155.4 \text{ V}$$

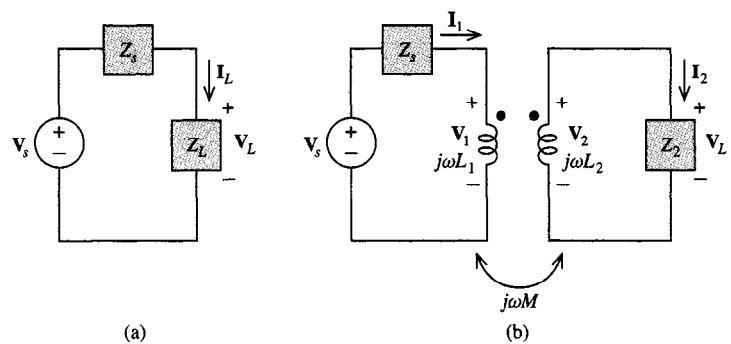


FIGURA 15.10 Dos formas de conectar una fuente y una carga.

La corriente de carga y la disipación de potencia son

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_L + Z_s} = \frac{156}{5020} = 0.031 \text{ A}$$

$$P_L = \frac{R_L |I_L|^2}{2} = 2500(0.031^2) = 2.4 \text{ W}$$

Con conexión directa, se suministra 2.4 W a la carga 155.4 V y a una amplitud en estado estable ac de 3.1 mA. Volviendo al circuito acoplado con transformador de la figura 15.10(b), la impedancia reflejada es

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \Big|_{\omega=377} = \frac{(377^2)(1^2)}{5000 + j3770} = 18.1 - j13.7 \Omega$$

Examinando la figura 15.9, la corriente y voltaje primarios son

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{j\omega L_1 + Z_R + Z_s} = \frac{156 \angle 0}{38.1 + j80.6} = 0.75 - j1.58 \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_1 = (j\omega L_1 + Z_R)\mathbf{I}_1 = (18.1 + j80.6)(0.75 - j1.58)$$

$$= 141 + j31.9 \text{ V}$$

Luego, por las proporciones primaria contra secundaria (15.45),

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2} \mathbf{I}_1 = \frac{j377}{5000 + j3770} (0.75 - j1.58)$$

$$= 0.103 - j0.021 \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_2 = Z_L \mathbf{I}_2 = 5000(0.103 - j0.021) = 516 - j106 \text{ V}$$

En este caso, la potencia suministrada a la carga es

$$P_L = \frac{R_L |I_2|^2}{2} = 2500 |0.103 - j0.021|^2 = 27.6 \text{ W}$$

Comparando estos valores, podemos ver que hay más de un orden de magnitud de potencia adicional suministrada a la carga cuando se acopla un transformador. Recuérdese del capítulo 10, que la máxima transferencia de potencia de la carga requiere que $Z_L = Z_s^* = 20 \Omega$. Cuando se conecta directamente, como en la figura 15.10(a), el desajuste de impedancias es severo, con $Z_L = 5000 \Omega$. En la figura 15.9 puede verse el efecto de un acoplamiento con transformador, en donde la impedancia secundaria reflejada a la primaria es igual a $j\omega L_1 + Z_R = 18.1 + j80.6 \Omega$. El desajuste de impedancia es mucho menos severo y provoca un mayor flujo de potencia a la carga. Finalmente, nótese que en el caso de transformador acoplado,

$$\left| \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \right| = \left| \frac{516 - j106}{141 + j31.9} \right| = 3.64$$

$$\left| \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right| = \left| \frac{0.103 - j0.021}{0.75 - j1.58} \right| = 0.060$$

Es decir, este transformador actúa para aumentar el voltaje y reducir la corriente.

Otro uso práctico de los transformadores que mencionaremos es lograr un *aislamiento eléctrico*. El aislamiento es útil para la seguridad y para establecer niveles de voltaje de referencia separados en los circuitos primario y secundario. Considérense los dos circuitos que aparecen en la figura 15.10. En la figura 15.10(a) la fuente está directamente acoplada a la carga, y en la 15.10(b) están acopladas mediante transformador. Llamando al extremo negativo de la fuente como nodo de tierra, supóngase que una persona en contacto con la tierra toca accidentalmente el nodo $+V_L$. El cuerpo humano, es un conductor relativamente bueno y forma una ruta de corriente a tierra. En el caso conectado directamente, la corriente fluirá de la fuente a través de la persona hacia tierra, pero en el caso acoplado con transformador, el circuito secundario está eléctricamente aislado de tierra; no hay ruta de regreso del flujo de corriente, y no hay peligro de choque eléctrico. Como otro uso del aislamiento, supóngase que la fuente y la carga en la figura 15.10 están separadas por cierta distancia física, y cada una de ellas debe conectarse a tierra. Las dos tierras locales no necesitan ser idénticas; alguna diferencia potencial entre ellas puede hacer que una corriente indeseada fluya a través de lo que se conoce como *trayectoria cerrada de tierra*, a menos que la fuente y la carga estén aisladas eléctricamente, como en el caso acoplado con transformador.

Finalmente, si el transformador no se utiliza para aislamiento, si una terminal del primario y el secundario, están, o pueden estar, unidas, el circuito equivalente que aparece en la figura 15.11 puede utilizarse para simplificar el análisis. Si uno de los puntos es situado al otro extremo de su inductor, M debe ser reemplazado por $-M$ en los tres lugares donde aparece el circuito equivalente. Las dos ecuaciones de malla para el circuito de la figura 15.11(b) simplemente repiten las leyes $i-v$ (15.41) para un transformador, y el circuito equivalente tiene la ventaja de contener únicamente inductores simples (no acoplados). Los inductores en el modelo pueden ser negativos, lo que no es posible físicamente utilizando elementos pasivos, pero lo que no causa ninguna dificultad en el análisis matemático.

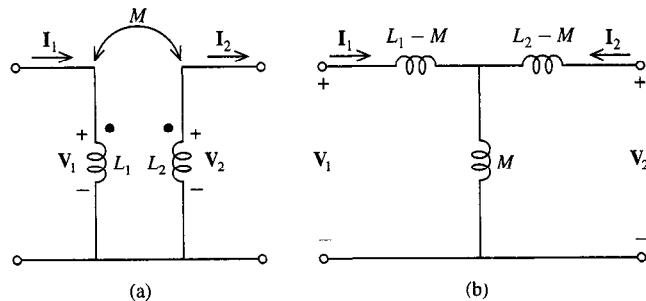


FIGURA 15.11 (a) Transformador de tres terminales; (b) circuito equivalente.

EJERCICIOS

- 15.3.1.** Obtenga las proporciones V_2/V_1 e I_2/I_1 para la figura 15.5 en $\omega = 4 \text{ rad/s}$.

Respuesta $0.058\angle-126^\circ, 0.565\angle-172^\circ$

- 15.3.2.** Obtenga la potencia promedio real suministrada a una resistencia de carga $100\text{-}\Omega$ a través del secundario de la figura 15.2 (a) para $v_1(t) = 50 \cos 377t \text{ V}$.

Respuesta 6.18 W

- 15.3.3.** Obtenga ω para el que la impedancia reflejada de la figura 15.8 es puramente real si $L_2 = 2 \text{ H}$ y Z_L es una resistencia de $6\text{-}\Omega$ en serie con un capacitor de $\frac{1}{32} \text{ F}$.

Respuesta 4 rad/s

Cualquier par de bobinas acopladas puede utilizarse como transformador y multiplicará, o transformará los niveles de voltaje, corriente e impedancia del circuito. Las proporciones de voltaje y corriente secundario contra primario (15.45) y (15.47) muestran que, en general, esta multiplicación varía con la frecuencia ω y la impedancia de carga Z_L .

Con frecuencia es deseable que las proporciones de corriente secundario contra primario del transformador queden fijos, independientes de la carga y la frecuencia. Por ejemplo, si utilizamos un transformador para aumentar el voltaje generado en circuito de transmisión de potencia, podríamos desear que el voltaje de línea transmitido quede estable aun cuando los clientes entraran o salieran de la línea y variara la carga efectiva Z_L .

Para ver cómo puede lograrse esto, consideremos una bobina de N_1 espiras con autoinductancia L_1 que produce un flujo ϕ_{11} es respuesta a su propia corriente i_1 . Supongamos que el número de espiras se incrementa de N_1 a αN_1 . Suponiendo que el cable infinitamente delgado, las αN_1 espiras ocupan el mismo espacio que las N_1 espiras, y la corriente i_1 en cada una de las αN_1 espiras es físicamente indistinguible de la corriente αi_1 en cada una de las N_1 espiras. Por linealidad de la bobina en i_1 (15.8), el flujo producido por αi_1 es $\alpha \phi_{11}$. Incrementando N_1 por un factor de α incrementa ϕ_{11} por el mismo factor; en otras palabras, el flujo producido por la corriente i_1 está relacionada linealmente con el número de espiras N_1 . Designando β_1 a la constante de proporcionalidad, entonces, por (15.8),

$$\frac{\phi_{11}}{i_1} = \beta_1 N_1 = \frac{L_1}{N_1}$$

$$o$$

$$L_1 = \beta_1 N_1^2 \quad (15.48)$$

Es decir, la autoinductancia de un inductor dado, es proporcional al cuadrado de sus espiras. La constante β_1 se determina por las propiedades físicas detalladas de la trayectoria magnética. Si un par de bobinas acopladas 1 y 2 comparten la misma trayectoria magnética, en otras palabras, si están acopladas en la unidad, entonces $\beta_1 = \beta_2$ y por (15.48) *las autoinductancias de las bobinas acopladas en la unidad están en la proporción del cuadrado y sus espiras*,

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = n^2$$

donde $n = N_2/N_1$ se conocen como proporción de *espiras del transformador*.

En el caso del acoplamiento unitario, $M = \sqrt{L_1 L_2}$ y, por (15.47), la proporción de voltaje secundario contra primario es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{j\omega Z_2 \sqrt{L_1 L_2}}{j\omega L_1 (Z_2 + j\omega L_2) + \omega^2 L_1 L_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = n \quad (15.49)$$

Para cualquier transformador de acoplamiento unitario, la proporción de voltaje secundario contra primario tiene la propiedad que buscamos: es una constante independiente de la carga o la frecuencia. El valor de la proporción de voltaje es simplemente la proporción de espiras n .

La proporción de corriente primaria a secundaria (15.45) en el caso de acoplamiento unitario es

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{Z_L + j\omega L_2} \quad (15.50)$$

Aun con acoplamiento unitario, la proporción de corriente sigue dependiendo de forma general de ω y Z_L . Sin embargo, si consideramos a L_2 como infinitamente grande, entonces

podemos desentendernos de Z_L en el denominador de (15.50) y

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega\sqrt{L_1L_2}}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n} \quad (15.51)$$

Los transformadores que satisfacen tanto a (15.49b) como a (15.51) tienen proporciones de corriente y voltaje que no depende de la carga o la frecuencia, y se dice que son transformadores ideales. *Un transformador ideal es un transformador de acoplamiento unitario cuyas autoinductancias L_1 y L_2 son ambas infinitamente grandes, pero cuya proporción L_2/L_1 es finita. Los transformadores ideales satisfacen las leyes i–v*

$$V_2 = \pm n V_1 \quad (15.52a)$$

$$I_2 = \pm \frac{1}{n} I_1 \quad (15.52b)$$

donde la convención de punto se aplica del modo siguiente: defina las variables primarias (I_1, V_1) como aquellas que satisfacen y las variables secundarias (I_2, V_2) como aquellas que violan la convención de signo pasivo. Entonces, si I_1 o I_2 señalan hacia un extremo con punto, en tanto que los otros señalan hacia un extremo sin punto, utilícese los signos positivos en ambas leyes i–v (15.52a, b); de otro modo, utilícese los signos menos en ambos. Este es una reformulación engorrosa, pero completamente equivalente, de la convención de punto original, que es necesaria para la práctica de transformador convención de invertir la dirección de referencia en el secundario.

El símbolo de circuito para un transformador ideal, que aparece en la figura 15.12(a), es similar a la del transformador no ideal, excepto en que se especifica la proporción de espiras en vez de las inductancias L_1 , L_2 y M la proporción de espiras (las tres son infinitamente grandes), y se dibuja un par de líneas paralelas para sugerir el anillo de material ferromagnético que comprende el núcleo de este transformador de acoplamiento unitario.

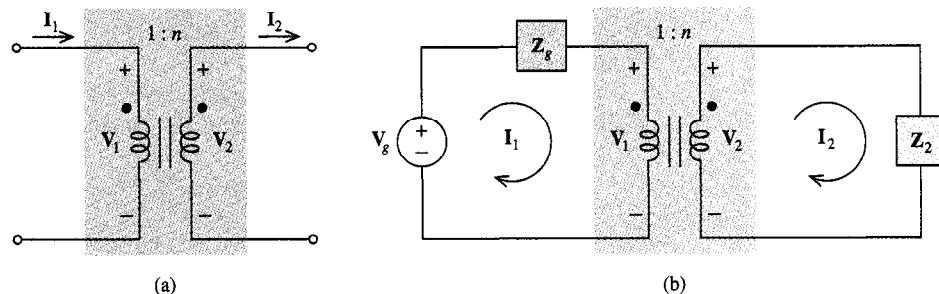


FIGURA 15.12 (a) Símbolo de circuito de transformador ideal; (b) transformador ideal con fuente primaria y carga secundaria.

Ejemplo 15.8

Especifique las leyes i–v para los dos transformadores ideales que se muestran. En la figura 15.13(a), (I_1, V_1) satisface y (I_2, V_2) la convención de signo pasivo, como se requiere en la formulación anterior de la convención de punto para transformadores ideales. Puesto que ambas corrientes fluyen hacia extremos con punto, debemos tomar

signos menos. Las leyes $i-v$ para la figura 15.13(a) son en consecuencia

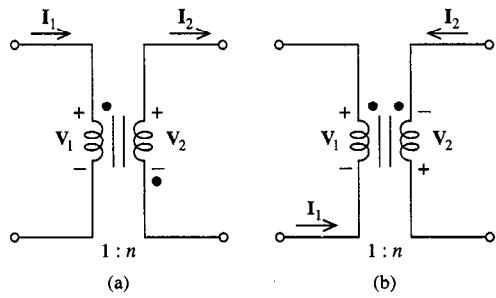


FIGURA 15.13 Dos circuitos para el ejemplo 15.8.

$$V_2 = -nV_1$$

$$I_2 = -\frac{1}{n}I_1$$

En la figura 15.13(b), las variables primarias dadas (I_1, V_1) no satisfacen la convención de signo pasivo, pero si ocurre con ($I_1, -V_1$) de forma que utilizaremos esta pareja como nuestra elección de variables primarias. (I_2, V_2) viola la convención de signo pasivo, tal y como se requirió. Entonces, utilizando los conjuntos seleccionados de variables de puerto ($I_1, -V_1$), y (I_2, V_2) una corriente señala hacia el extremo con punto, y la otra hacia el extremo sin punto, de forma que se utilizarán signos más en las leyes $i-v$. Escribiendo $-V_1$ en lugar de V_1 en (15.52), las leyes $i-v$ para la figura 15.13(b) son

$$V_2 = +n(-V_1)$$

$$I_2 = +\frac{1}{n}I_1$$

$$V_2 = -nV_1$$

$$I_2 = +\frac{1}{n}I_1$$

En la figura 15.12(b) se muestra un transformador ideal conectado a una fuente y una carga. La impedancia orientada hacia el puerto primario es

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2/n}{nI_2} = \frac{Z_L}{n^2} \quad (15.53)$$

De este modo, *un transformador ideal junto con su carga secundaria Z_L es equivalente a la impedancia de valor Z_L/n^2 reflejada en el circuito primario*, como se muestra en la figura 15.14. Con frecuencia es conveniente utilizar esta impedancia reflejada para eliminar el transformador y una trayectoria cerrada, antes de analizar un circuito que contiene un transformador ideal.

Las relaciones simples (15.52) y (15.53) revelan la mayor parte de los usos principales de los transformadores. La ecuación (15.52a) demuestra que un transformador ideal

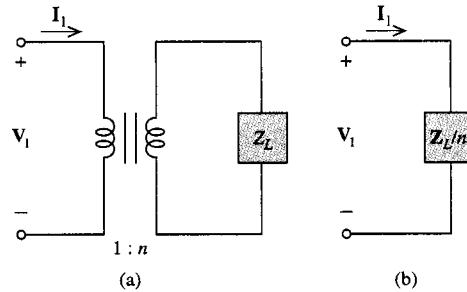


FIGURA 15.14 (a) Transformador ideal y carga secundaria; (b) equivalente cuando se refleja en el equipo primario.

puede utilizarse para aumentar un nivel de voltaje y el devanado secundario tiene más espiras que el primario, $n > 1$, para reducir el nivel de voltaje de $n < 1$, lo que resulta en un incremento equivalente en el nivel de corriente como puede verse en (15.52b), y para multiplicar la impedancia de una carga. Cada uno de estos usos aparece ilustrado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.9

La figura 15.15 muestra un circuito de suministro de potencia. Un generador hidroeléctrico produce el fasor de voltaje equivalente de Thevenin V_s a través de una impedancia equivalente de Thevenin 0.1Ω . Su salida se incrementa utilizando un transformador de aumento de proporción $10:1$ para una más eficiente transmisión por cable. Las líneas de transmisión tienen una impedancia equivalente de 1Ω . La potencia debe suministrarse a una carga 4Ω a través de un segundo transformador ideal. Deseamos determinar la proporción de espiras n en el segundo transformador ideal para maximizar la potencia suministrada por la fuente. El equivalente de este circuito a la derecha de las terminales $b-b'$, el primario del transformador de la derecha, es una impedancia de valor

$$Z_1 = \frac{Z_L}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

El transformador a la izquierda tiene una impedancia de carga secundaria de 1Ω en serie con Z_2 , o $1 + 4/n^2 \Omega$. Reflejando esto en su

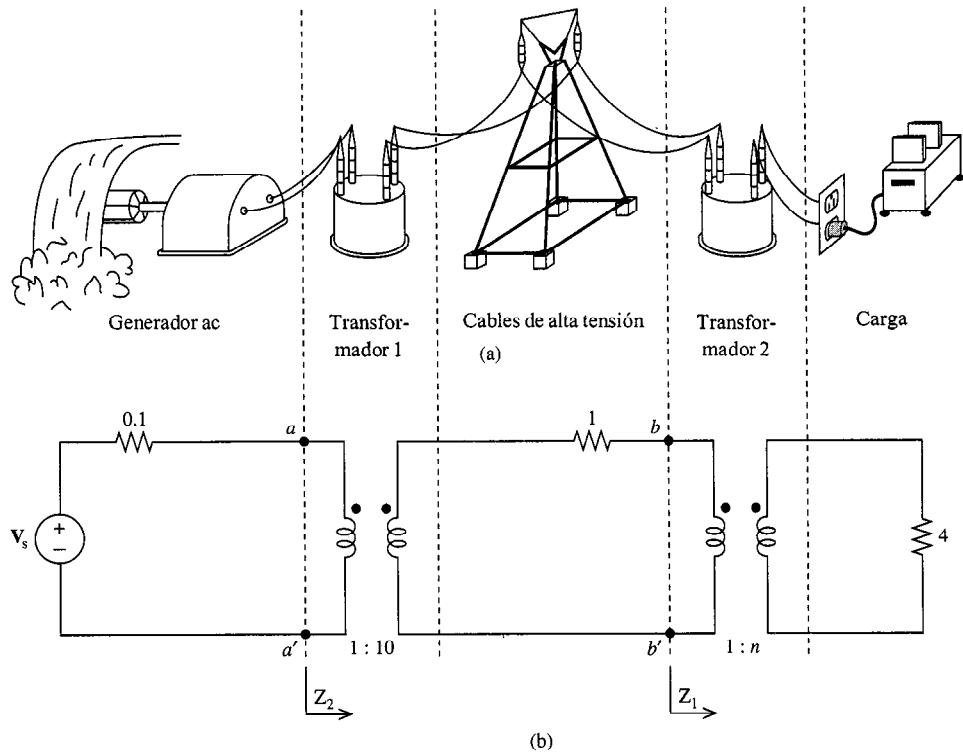


FIGURA 15.15 Circuito para el ejemplo 15.9. (a) En imágenes; (b) esquemática.

circuito primario, la impedancia a la derecha de $a-a'$, es

$$Z_2 = \frac{1 + (4/n^2)}{10^2}$$

Para una máxima transferencia de potencia, la impedancia de carga equivalente Z_2 , sentida por la fuente, debe ser igual al conjugado complejo de la impedancia de la fuente, que es idéntica a $Z_s = 0.1 \Omega$, que es puramente real. De este modo, para una máxima potencia suministrada al resto del circuito por la fuente,

$$Z_2 = \frac{1 + (4/n^2)}{10^2} = \frac{1}{10}$$

Resolviendo para la proporción de espiras requeridas

$$n = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

De este modo, se utiliza un transformador de aumento en proporción 10:1 para generar un mayor voltaje para transmisión eficiente, y luego se utiliza un transformador de disminución 2:3 para coincidir con la impedancia de la carga dada.

Del mismo modo en que podemos reflejar la carga en el primario, también podemos reflejar la fuente en el circuito secundario. El voltaje de circuito abierto V_2 en la figura 15.16(a) es

$$V_T = \pm nV_1 = \pm nV_s \quad (15.54)$$

con $V_1 = V_s$, puesto que I_2 y por consiguiente I_1 también son cero. A continuación eliminamos la fuente y determinamos la impedancia orientada hacia las terminales del secundario. Un transformador con proporción de espiras n , cuando se invierte en el primario y secundario, tiene proporción de espiras $1/n$. Por (15.53), la impedancia orientada hacia el secundario es

$$Z_T = \frac{Z_s}{(1/n)^2} = n^2 Z_s \quad (15.55)$$

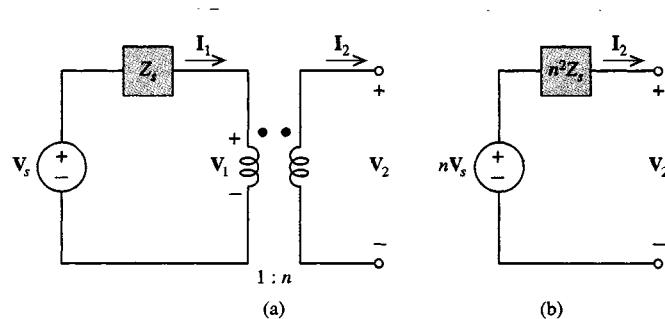


FIGURA 15.16 (a) Fuente y transformador ideal; (b) equivalente al reflejarse en el circuito secundario.

lo que resulta en el circuito equivalente de Thevenin que aparece en la figura 15.16(b). Un transformador ideal, junto con su fuente de voltaje primario V_s de impedancia de fuente Z_s , se refleja en el circuito secundario con una fuente $\pm n V_s$ de impedancia de fuente $n^2 Z_s$. El signo que proviene de la convención de punto. Que ambas reflejan la carga en el circuito primario (15.53), y la fuente en el secundario (15.54)-(15.55), resulta en un circuito equivalente con una trayectoria cerrada menos y sin transformador. Nótese que la reflexión al secundario elimina el subcicuito primario, de forma que es muy útil cuando no se requiere de variables primarias. De forma similar, la reflexión en el primario, como en (15.53), destruye las variables secundarias, de forma que es muy adecuado cuando las variables primarias son de nuestro interés.

Ejemplo 15.10

Este ejemplo continúa el ejemplo 15.9. Para el mismo circuito, supongamos que cambiamos el objetivo de maximizar la potencia suministrada a la carga de 4Ω . Reflejando la fuente y colocando un transformador de aumento de proporción $10:1$ en su circuito secundario, resulta en el equivalente que se muestra en la figura 15.17(a). Entonces, reflejando en el circuito primario de transformador restante en su secundario, resulta en el circuito de la figura 15.17(b). Para una potencia máxima en la carga de 4Ω , necesitamos $11n^2 = 4$ o

$$n = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

De forma que la máxima transmisión de potencia a la carga de 4Ω ocurre si utilizamos un transformador de disminución con proporción de espiras $2:\sqrt{11}$. Es interesante hacer notar que la proporción de espiras para la potencia máxima suministrada por la fuente calculada en el ejemplo 15.9, $2:3$ no es la misma. El transformador de disminución $2:3$ requiere de más potencia de la fuente, pero disipa menos potencia por la carga de 4Ω y más por la líneas de transmisión de 1Ω que utilizando la proporción de espiras $n = 2/\sqrt{11}$.

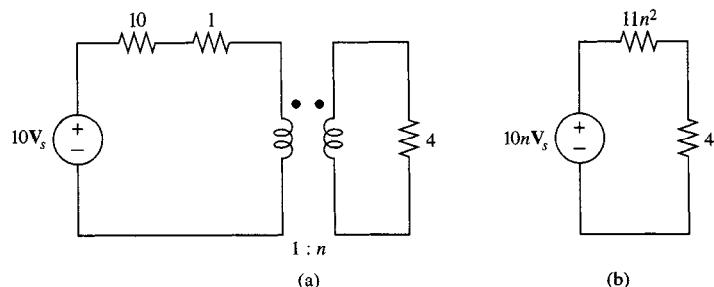


FIGURA 15.17 (a) Circuito de la figura 15.15 reflejado en el circuito secundario del transformador izquierdo; (b) reflejado nuevamente en el secundario del transformador derecho.

Terminaremos nuestra discusión del transformador ideal observando que es un elemento sin pérdida. La potencia compleja suministrada al primario es

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* \quad (15.56)$$

Recordando del capítulo 10 que $\mathbf{S} = 1/2 \mathbf{VI}^*$ se interpreta como la potencia suministrada al elemento si las variables de terminal satisfacen la convención del signo pasivo, la potencia

compleja suministrada al secundario es

$$S_2 = -1/2V_2 I_2^* = -1/2(nV_1) \left(\frac{I_1}{n} \right)^* = -S_1 \quad (15.57)$$

De este modo, la suma de la potencia suministrada al primario y secundario es igual a cero, y el transformador ideal, en pérdida. La fuente suministra S_1 al primario y el secundario disipa $-S_1$; es decir, suministra S_1 al resto del circuito. La potencia fluye del primario al secundario sin pérdida. Desde luego, los flujos sin ninguna pérdida de potencia son imposibles, y el transformador ideal es únicamente eso: una idealización. Pero son comunes los transformadores con eficiencias con más de 95% (con menos de 5% de pérdida de potencia), y el transformador ideal es una idealización sumamente útil que en la práctica tiene una buena aproximación.

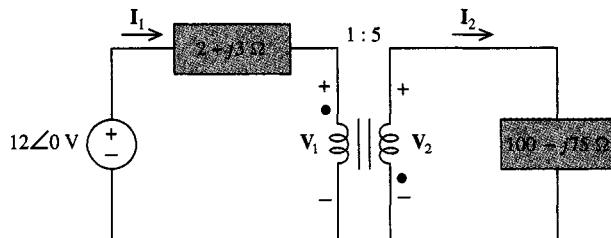
EJERCICIOS

- 15.4.1.** Obtenga los fasores V_1 y V_2 en la figura 15.6 si se conecta una fuente de corriente $I = I_s$ a través de la entrada, y se reemplaza un transformador por uno ideal con proporción de espiras $n = 10$.

Respuesta $I_s/382; 10 I_s/382$

- 15.4.2.** Obtenga V_1 , V_2 , I_1 e I_2 .

Respuesta $10\angle-36.9^\circ V; 50\angle143.1^\circ V; 2\angle0 A; 0.4\angle180^\circ A$



EJERCICIO 15.4.2

- 15.4.3.** Obtenga los valores rms de las corrientes primaria y secundaria en la figura 15.12(b) si el fasor $V_g = 16 V$, $Z_g = 2 + j\Omega$, $Z_2 = 8 - 4j\Omega$ y $n = 2$.

Respuesta $2\sqrt{2} A; 2\sqrt{2} A$

15.5

CIRCUITOS DE DOS PUERTOS

Un *circuito de un puerto* [figura 15.18(a)] contiene exactamente dos terminales que permiten conexiones a elementos externos. Puesto que no se permiten otras conexiones externas, si la corriente $i_1(t)$ fluye hacia una terminal, por la ley de corriente de Kirchhoff, debe salir la misma corriente de la otra terminal. Este par de terminales forman un *puerto*, o par de

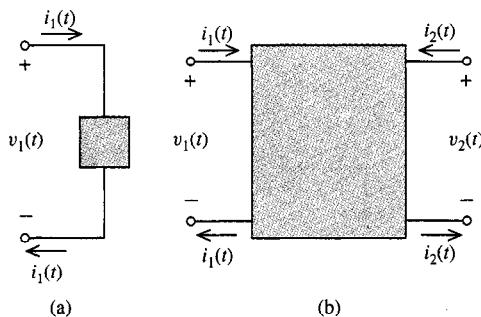


FIGURA 15.18 (a) Circuito de un puerto; (b) circuito de dos puertos.

terminales, a la que pueden conectarse otros circuitos. La condición de que la corriente que entra al circuito en una terminal del puerto es igual a la que sale de la otra terminal del puerto, se conoce como *condición de puerto*.

Un circuito de dos puertos tiene dos puertos disponibles para conexión externa, y se supone que cada una de ellas satisface la condición de puerto. Las direcciones de referencia para las variables de puerto se asignarán generalmente como se muestran en la figura 15.18(b). Con frecuencia, las corrientes que salen de las terminales inferiores no se marcarán explícitamente, pero se comprenderá que son iguales y opuestas a las corrientes de las terminales superiores correspondientes. El puerto izquierdo, se designará, de forma algo arbitraria, como el *puerto de entrada*, y el derecho como *puerto de salida*. En esta discusión, nuestro objetivo es caracterizar circuitos de dos puertos, es decir, aprender cómo escribir las relaciones que enlazan sus variables de puerto, y explorar sus usos.

¿Por qué deseamos representar un circuito como se muestra en la figura 15.17(b), una “caja negra” sin ningún rasgo de la que salen nuestros cuatro cables? Una respuesta toca lo que puede llamarse el método ingenieril para resolver problemas. *Al confrontarnos con un problema difícil, debemos descomponerlo en un conjunto de subproblemas más sencillos, resolver cada uno separadamente, y luego unir las soluciones de los problemas entre sí.* En alguna oportunidad, retirese la tapa de un radio, y examíñese su interior. Ahí se ve una considerable complejidad, tableros de circuitos, cables interruptores que forman intrincados patrones. Ningún diseñador podría, o pudo, visualizar ese circuito en su totalidad detallada como una solución unificada al problema de diseño. Es más probable que el diseñador comenzó considerando la primera subtarea que necesitaba realizar, y luego procedió hacia una solución descomponiendo el problema en varios pasos simples y manejables. Para comenzar, se necesita una antena para captar la señal de radio. Hacemos pasar la salida de la antena hacia un amplificador para aumentarla antes de proceder. Luego debemos hacer que la señal pase por un filtro de banda estrecha a la estación que nos interesa recibir. Luego... y así sucesivamente. Cada tarea define una transformación simple, una relación deseada entre la señal de entrada del módulo y su salida. El diseño general (figura 15.19) se ejecuta como una interconexión de circuito de dos puertos, donde la salida de uno de los circuitos de dos puertos se convierte en entrada del siguiente. Para aplicar esta estrategia general y sumamente útil en el contexto de circuitos lineales, necesitamos comprender su unidad básica, el circuito de dos puertos, la forma en que se describe, y cómo pueden combinarse estas descripciones. Esta es la tarea principal para el resto de este capítulo.

Una segunda razón para que nos interesemos en circuitos de dos puertos, es que enfocan la atención al lugar que con mayor frecuencia es el más importante. En muchas circunstancias nos interesa el comportamiento de entrada y salida de un circuito, y no los detalles de sus corrientes y voltajes interiores. Requerir que únicamente dos conjuntos de

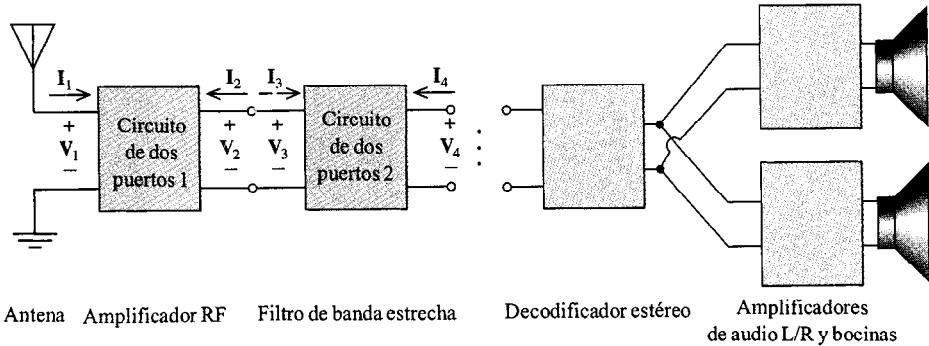


FIGURA 15.19 Diseño de receptor modular mediante circuitos de dos puertos interconectados.

variables de puertos estén involucrados en una descripción de dos puertos oculta efectivamente los detalles del circuito dentro de una caja negra impenetrable donde la descripción no puede complicarse. Compárense, por ejemplo, las ecuaciones de malla de un circuito de 10 mallas a su descripción de dos puertos. Si no nos importan las corrientes internas y voltajes, en tanto que “cumplan su trabajo”, nos funciona mejor un conjunto de ecuaciones con cuatro incógnitas, las variables de puerto, que 10 las corrientes de malla. Como ejemplo, el circuito de distribución de potencia mostrado de un extremo al otro en la figura 15.15(a) contiene muchas variables de voltaje de corriente internas. Pero sólo unas cuantas son verdaderamente significativas, las entradas y salidas de las cinco corrientes de dos puertos que aparecen en la figura. Una descripción de dos puertos es una forma eficiente y de orientación funcional para describir un circuito cuando está expresada por unas cuantas variables de entrada-salida.

Limitaremos la atención a dos puertos que contienen elementos pasivos lineales (RLC) y fuentes controladas. Las fuentes independientes se excluyen, puesto que actúan como entradas adicionales, y se les debe asignar adecuadamente un puerto adicional, lo que resulta en un circuito de n -puertos, que ya no se discutirá más. También supondremos que no hay energía almacenada inicial dentro del elemento de dos puertos; es decir, que todas las condiciones iniciales son cero.

En la figura 15.20 se muestra un elemento de dos puertos con los circuitos externos a los que está conectado. Puesto que en este capítulo se estudiarán todos los circuitos de dos puertos en el dominio- s , eliminaremos el argumento- s para nuestra conveniencia, escribiendo $\mathbf{V}_1(s)$ como \mathbf{V}_1 , y así sucesivamente.

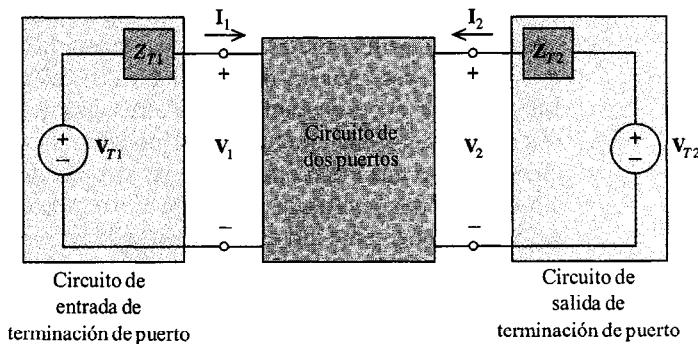


FIGURA 15.20 Circuito de dos puertos en el dominio- s donde se muestran las terminaciones de puerto (se suprimieron las dependencias de todas las cantidades en s).

Se supone que cada puerto está cerrado por, o terminado en, un circuito de un puerto conocido como *circuito de terminación de puerto*. Aunque con frecuencia el puerto de entrada se termina en una fuente, y la salida en una impedancia de carga, los circuitos de terminación tanto para el puerto de entrada como para el puerto de salida pueden ambos contener, en general, fuentes independientes. Para un par dado de circuitos de terminación de puerto, el circuito queda completamente especificado, y las cuatro variables de puerto \mathbf{I}_1 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{I}_2 y \mathbf{V}_2 , tendrán valores definidos. ¿Mediante qué ecuaciones se determinan estos valores? Las leyes $i-v$ para los circuitos de terminación de puertos, uno en el puerto de entrada y otro en el puerto de salida, resultan en dos ecuaciones con estas cuatro variables. Para los equivalentes de Thevenin que aparecen en la figura 15.20, estas son las ecuaciones

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{Z}_{T1}\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_{T1}, \quad \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{T2}\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_{T2} \quad (15.58)$$

Se necesitan dos ecuaciones más, y sólo pueden venir del elementos de dos puertos. Además, no puede haber más de dos ecuaciones independientes en la descripción de dos puertos, puesto que las variables de puerto quedarán sobredefinidas. *Una descripción de dos puertos consiste de dos ecuaciones en las cuatro variables de puerto.*

Veamos qué forma cobra este par de ecuaciones. Para ser específicos, seleccionaremos los voltajes de puerto \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 como variables dependientes, y las corrientes \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 como las variables independientes en las ecuaciones de dos puertos. Puesto que las ecuaciones que describen al elemento de dos puertos en sí deben fijarse sin importar la forma en que se termine, podemos llegar a estas ecuaciones aplicando cualquier circuito de terminación de puerto que deseemos. Dos “experimentos” serán suficientes para revelar la forma de las ecuaciones de dos puertos. Fijando la corriente de puerto de salida $\mathbf{I}_2(s) = 0$ y terminando el puerto de entrada con una fuente de corriente \mathbf{I}_1 , por linealidad los voltajes producidos deben ser cada uno de la forma

$$\mathbf{V}_1|_{\mathbf{I}_2=0} = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1, \quad \mathbf{V}_2|_{\mathbf{I}_2=0} = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 \quad (15.59a)$$

Antes de proceder, observamos que *fijando una corriente de puerto a cero, es equivalente a que ese puerto quede en circuito abierto*, de forma que en el primer experimento dejamos el puerto de salida en circuito abierto. Para el segundo de nuestros experimentos, fijamos la corriente de puerto de entrada $\mathbf{I}_1 = 0$ (dejando en circuito abierto al puerto de entrada) y terminando el puerto de salida con una fuente de corriente \mathbf{I}_1 . La respuesta debe ser nuevamente lineal en la fuente:

$$\mathbf{V}_1|_{\mathbf{I}_1=0} = \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{V}_2|_{\mathbf{I}_1=0} = \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \quad (15.59b)$$

Luego, por superposición, cada puesta de voltaje total \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 es la suma de las respuestas a las dos fuentes de corriente cuando se elimina la otra,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad (15.60a)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \quad (15.60b)$$

Estas dos ecuaciones forman la descripción deseada de dos puertos. No son la única descripción de dos puertos posibles, como vemos a continuación, pero forman una caracterización completa del elemento de dos puertos en el siguiente sentido: *dada la descripción de dos puertos (15.60a, b), entonces para cualquier par específico de circuito de terminación del puerto, podemos determinar su comportamiento de entrada-salida, es decir, todas las variables de puerto*, como se ilustrará en el ejemplo 15.11. La única condición es que el circuito de dos puertos satisfaga la condición de puerto en sus puertos de entrada y salida.

La descripción de dos puertos (15.60a, b) se conoce como la descripción de dos puertos de *impedancia*, o *parámetro-z*. El nombre proviene de la observación de que cada parámetro z_{11} , z_{12} , z_{21} , z_{22} en estas ecuaciones, está medido en ohms. La descripción de impedancias de dos puertos puede escribirse de forma compacta como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (15.61)$$

donde la matriz cuadrada se conoce como *matriz de impedancia* o *matriz de parámetro-z*.

Ejemplo 15.11

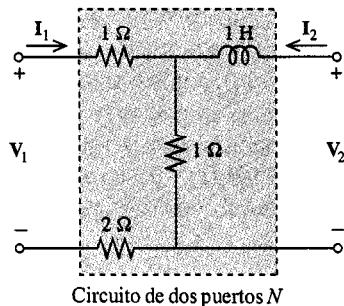


FIGURA 15.21 Circuito de dos puertos para el ejemplo 15.11.

Deseamos obtener la descripción de impedancia de dos puertos del circuito que aparece en la figura 15.21, y utilizar esta descripción para determinar las corrientes y voltajes del puerto bajo las dos condiciones de terminación de puerto distintas que se muestran en la figura 15.23.

Para obtener (15.60), realizamos el experimento que se muestra en la figura 15.22(a), dejando el circuito abierto al puerto de salida para establecer la condición de puerto $I_2 = 0$, aplicando una fuente de corriente I_1 al puerto de entrada, y determinando los voltajes de puerto resultante. Por (15.59a)

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (15.62)$$

Examinando la figura 15.22(a), por combinaciones de serie-paralelo,

$$V_1 = 4I_1$$

$$V_2 = I_1$$

Puesto que V_1 y V_2 se calcularon bajo la condición de circuito abierto $I_2 = 0$, entonces por (15.62)

$$z_{11} = 4, \quad z_{21} = 1$$

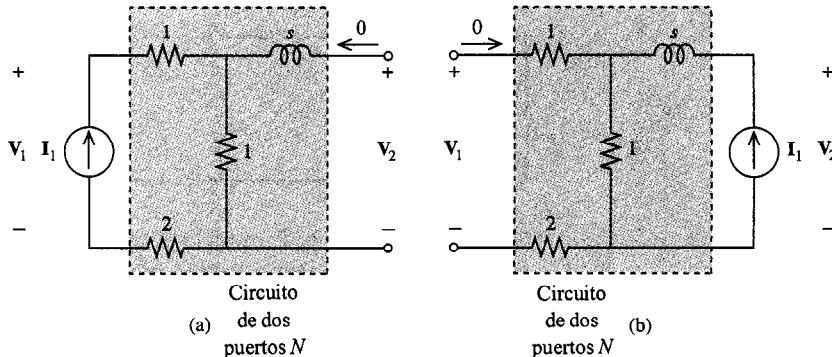


FIGURA 15.22 Dos experimentos para determinar los parámetros-z.

Los dos parámetros-z restantes se especifican por (15.59b), y son

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}, \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Para obtenerlo, realizamos el experimento que se muestra en la figura 15.22(b), resituando el circuito abierto en puerto de entrada ($I_1 = 0$) y la fuente de corriente I_2 al puerto de salida. No hay corriente a través de las dos resistencias de la izquierda,

$$V_1 = I_2$$

$$V_2 = (s + 1)I_2$$

Por consiguiente

$$z_{12} = 1, \quad z_{22} = s + 1$$

y la descripción de dos puertos del parámetro-z es

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (15.63)$$

Para obtener los valores específicos de las variables de puerto para los circuitos de terminación de puerto dados en la figura 15.22, combinaremos la descripción de dos puertos (15.63) con las dos leyes separadas $i-v$ para los circuitos de transformación de puerto. En el caso de la figura 15.23(a), estos son

$$V_1 = 4 - I_1$$

$$V_2 = -\frac{1}{2}I_2 \quad (15.64)$$

En conjunto (15.63) y (15.64), comprenden cuatro ecuaciones en las cuatro variables de puerto. Eliminando las corrientes resolviendo (15.64) para I_1 , I_2 y sustituyéndolo en (15.63)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 - V_1 \\ -2V_2 \end{bmatrix}$$

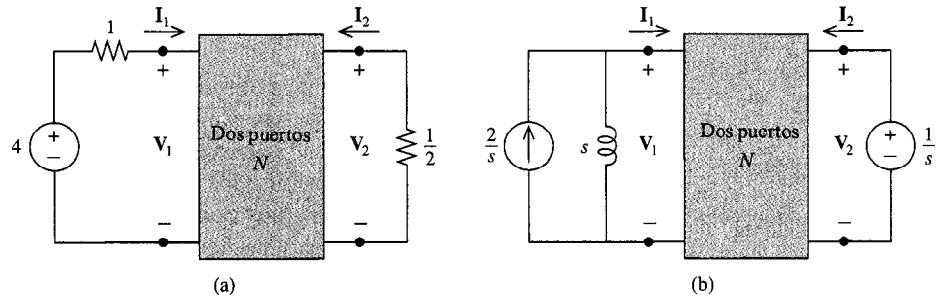


FIGURA 15.23 (a) Un par de terminaciones de puerto; (b) otro par.

Combinando términos similares,

$$5V_1 + 2V_2 = 16 \quad (15.65a)$$

$$V_1 + (2s + 3)V_2 = 4 \quad (15.65b)$$

Multiplicando el último por 5 y restándolo de la primera ecuación anterior,

$$-(10s + 15)V_2 + 2V_2 = -4$$

$$\text{o} \quad V_2 = \frac{4}{10s + 13}$$

Volviéndolo a sustituir en (15.65a),

$$V_1 = \frac{32s + 40}{10s + 13}$$

y utilizando los dos últimos en (15.64),

$$I_1 = \frac{8s + 12}{10s + 13} \quad (15.66a)$$

$$I_2 = \frac{-8}{10s + 13} \quad (15.66b)$$

lo que completa el cálculo de las variables de puerto para la terminación que aparece en la figura 15.23(a). Para circuitos de terminación de puertos distintos [figura 15.23(b)], tenemos el mismo elemento de dos puertos, de forma que tendremos que usar la misma descripción de dos puertos (15.63). Las leyes $i-v$ para los nuevos circuitos de terminación de puerto son

$$I_1 + \left(\frac{V_1}{s} \right) = \frac{2}{s} \quad (15.67a)$$

$$V_2 = \frac{1}{s} \quad (15.67b)$$

Utilizando (15.67a, b) para eliminar V_1 y V_2 de (15.63), y resolviéndolo del modo anterior, resulta en las variables de puerto y completa el ejemplo.

$$V_1 = \frac{12s - 5}{s^2 + 5s + 3}, \quad V_2 = \frac{1}{s}$$

$$I_1 = \frac{2s^2 + 2s - 1}{s(s^2 + 5s + 3)}, \quad I_2 = \frac{-s + 4}{s(s^2 + 5s + 3)}$$

Este ejemplo ilustra que la descripción de dos puertos (15.60) debe utilizarse para determinar las variables de puerto para cualquier par de circuitos de terminación de un puerto. Decimos que es una *caracterización completa del comportamiento entrada-salida o de puertos del circuito de dos puertos*. Nótese que ahora esta caracterización no sólo está completa, sino que también es muy concisa. Sin importar la complejidad del elemento de dos puertos, su cuenta de mallas, ondas y elementos, la descripción de dos puertos resume el comportamiento del puerto en apenas dos ecuaciones que contienen cuatro parámetros. Éstos son los parámetros-z en la descripción de dos puertos de impedancia (15.60), pero pueden definirse de muchos otros modos, como veremos en la siguiente sección.

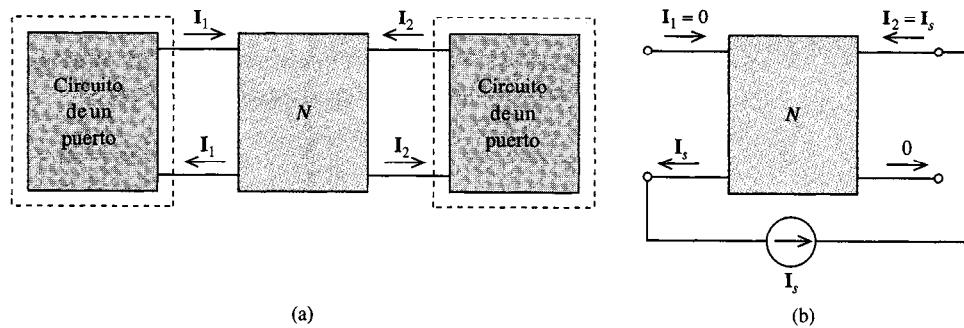
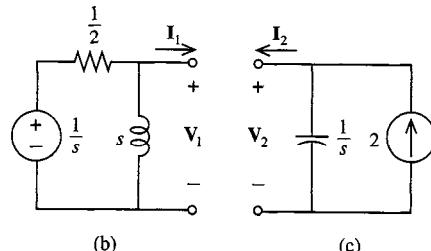
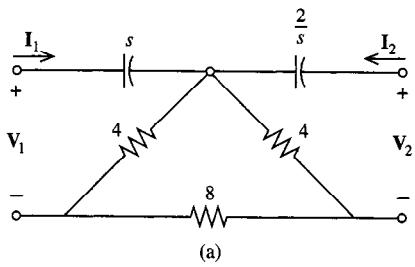


FIGURA 15.24 (a) Circuito de dos puertos N que satisface condiciones de puerto; (b) condiciones de puerto violadas. N no es operada como circuito de dos puertos.

Si se viola la condición de puerto, no serán válidas las suposiciones bajo las cuales se derivó la descripción de dos puertos, y tampoco serán válidas las ecuaciones como la (15.60). Insistimos en que la corriente que entra a la terminal superior de cada puerto, debe salir de la terminal inferior para que el circuito opere como circuito de dos puertos. En tanto que cada circuito de terminación de puerto es de un puerto, estamos a salvo. En la figura 15.24(b) se muestra un ejemplo de un circuito de cuatro terminales que no se comporta como elemento de dos puertos.

EJERCICIOS



EJERCICIO 15.5.1 (a) Dos puertos; (b) circuito terminal del puerto de entrada; (c) circuito terminal del puerto de salida.

15.5.1. Obtenga los parámetros-z para el circuito de dos puertos en la parte (a) de la figura.

$$\text{Respuesta } z_{11} = \frac{3s+1}{s}; z_{12} = z_{21} = 1; z_{22} = \frac{3s+2}{s}$$

15.5.2. Obtenga las leyes $i-v$ para los circuitos de un puerto que aparecen en las partes (b) y (c) de las figuras.

$$\text{Respuesta } V_1 = \frac{-s}{2s+1} I_1 + \frac{2}{2s+1}; V_2 = \frac{-1}{s} I_2 + \frac{2}{s}$$

15.5.3. Obtenga I_1 e I_2 si el circuito de dos puertos de la parte (a) de la figura es terminado por el circuito de un puerto que aparece en las partes (b) y (c).

$$\text{Respuesta } I_1 = \frac{2s(s+2)}{19s^3 + 35s^2 + 18s + 3},$$

$$I_2 = \frac{2(6s^2 + 5s + 1)}{(s+1)(19s^3 + 35s^2 + 18s + 3)}$$

La selección de los voltajes como variables dependientes en las ecuaciones de dos puertos, resultó en la descripción de impedancia de dos puertos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

en donde el circuito de dos puertos es descrito en términos de cuatro parámetros-z. Ahora elijamos a las corrientes como variables dependientes. Siguiendo el argumento de la sección anterior, aún habrá otras dos ecuaciones lineales, y las nuevas descripciones de dos puertos serán de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (15.68)$$

Puesto que cada parámetro y_{ij} en esta ecuación está medido en siemens, lo llamaremos la descripción de dos puertos de *admitancia*, o de *parámetro-y*.

La manera en que se determinan los parámetros-y para un circuito específico es muy similar a la forma en que se calcularon los parámetros-z en la sección anterior. Se realizan dos experimentos, en donde la primera variable de puerto independiente, y luego la otra, son fijadas en cero. En el caso presente, las variables independientes son los voltajes de puerto, y *fijar un voltaje de puerto en cero es equivalente a poner ese puerto en circuito cerrado*. La otra variable de puerto independiente se considera como fuente (fuente de voltaje en el caso presente). En cada experimento, se determinan ambas variables dependientes, que en este caso son corrientes de puerto. A continuación a partir de los resultados del primer experimento, se obtienen los parámetros-y en la primera columna de la matriz de admitancia en (15.68)

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{y}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{V}_2=0} \quad (15.69)$$

y la segunda columna se obtiene de los resultados del segundo experimento,

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{V}_1=0}, \quad \mathbf{y}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{V}_1=0} \quad (15.70)$$

Los cálculos de estos parámetros pueden simplificarse un poco más. En cada experimento, hay una fuente independiente única, la fuente de voltaje \mathbf{V}_1 en el primer experimento (15.70) y \mathbf{V}_2 en el segundo (15.71). Supongamos que su valor en dominio-s se fija en uno. Entonces, por (15.69).

$$\mathbf{y}_{11} = \mathbf{I}_1 \Big|_{\mathbf{V}_1=1, \mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{y}_{21} = \mathbf{I}_2 \Big|_{\mathbf{V}_1=1, \mathbf{V}_2=0}$$

La primera columna de la matriz y es el valor de las corrientes de puerto, cerrando el circuito del puerto de salida, y una fuente de voltaje unitario $\mathbf{V}_1(s) = 1$ a través del puerto de entrada. Luego, cerrando el puerto de entrada, y fijando una fuente unitaria en el puerto de salida por (15.70)

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{I}_1 \Big|_{\mathbf{V}_1=0, \mathbf{V}_2=1}, \quad \mathbf{y}_{22} = \mathbf{I}_2 \Big|_{\mathbf{V}_1=0, \mathbf{V}_2=1}$$

La segunda columna de la matriz y es el valor de las corrientes de puerto, donde el puerto de entrada está en circuito cerrado, y una fuente de voltaje $\mathbf{V}_2(s) = 1$ se pone en el puerto de salida.

Ejemplo 15.12

Para obtener los parámetros y de un circuito de dos puertos dado, primero se cierra el circuito de la puerta de salida y se pone una fuente de voltaje unitario en la puerta de entrada, como se describe en la figura 15.25(a). La fuente controlada no transmite corriente en este caso, y las conductancias $\frac{1}{2}S$ y $\frac{1}{4}S$ están en paralelo,

$$I_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)(1) = 3/4 = y_{11},$$

y, por división de corrientes,

$$I_2 = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} I_1 = \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4} = y_{21}$$

Invirtiendo estas condiciones de terminación de puertos, como se muestra en la figura 15.25(b), por LCK,

$$I_1 = 2(1) - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = y_{12}$$

$$I_2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)(1) - 2 = -\frac{3}{4} = y_{22}$$

De este modo, la descripción de dos puertos en el parámetro- y es

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

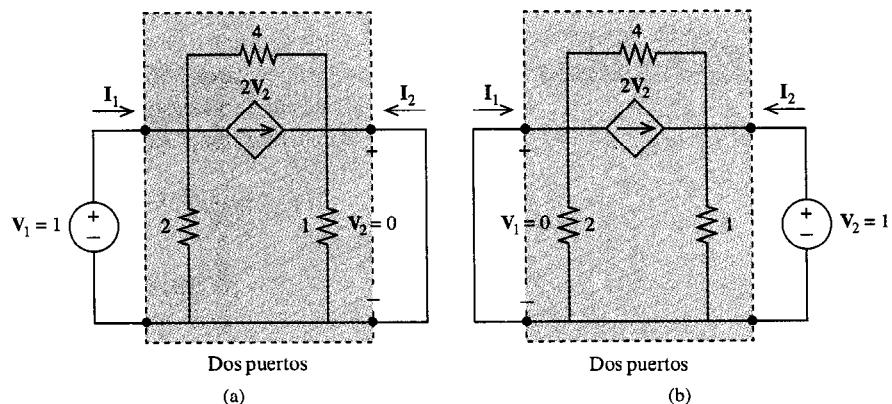


FIGURA 15.25 (a) Circuito de dos puertos con $V_1 = 1, V_2 = 0$; (b) con $V_1 = 0, V_2 = 1$.

Existen seis modos en que se pueden seleccionar dos variables de un conjunto de cuatro, y seis corresponden a descripciones de dos puertos. Junto con las formas de impedancia y admitancia presentadas hasta ahora, existen las descripciones híbrida, híbrida inversa, de transmisión y de transmisión inversa de un circuito de dos puertos. Las definiciones aparecen en la tabla 15.1.

La similitud de forma entre las diversas descripciones de dos puertos, garantizan que determinar sus matrices de parámetros es un procedimiento similar. Los pasos se resumen

Tabla 15.1 Descripciones de parámetros de dos puertos

$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$
1a. Impedancia (parámetro-z)	1b. Admitancia (parámetro-y)
$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$
2a. Híbrido	2b. Híbrido inverso
$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix}$
3a. Transmisión (ABCD)	3b. Transmisión inversa

del modo siguiente:

1. Experimento 1: Fíjese la segunda variable independiente en cero. Póngase su puerto en circuito abierto si es una corriente, y ciérrese su puerto si se trata de un voltaje. Fíjese la primera variable independiente en 1, insertando una fuente de voltaje unitario en su puerto si se trata de un voltaje; de otro modo, insértense una fuente de corriente unitaria.
2. Determínense las dos variables dependientes. Ésta es la primera columna de la matriz de parámetros.
3. Experimento 2: Es igual que en el experimento 1, pero primero fíjese la primera variable independiente en cero y la segunda en la unidad.
4. Resuélvase para dos variables dependientes. Ésta es la segunda columna de la matriz de parámetros.

Ejemplo 15.13

Obtengamos los parámetros híbridos y de transmisión para el circuito que aparece en la figura 15.26. Las variables independientes en la descripción híbrida son \mathbf{I}_1 y \mathbf{V}_2 ; las variables dependientes son \mathbf{V}_1 e \mathbf{I}_2 . Los experimentos para obtener la descripción híbrida aparecen en la figura 15.26.

La impedancia Z_{in} orientada hacia el circuito del experimento 1 es

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{2s}{s+2} + \frac{1[1+(4/s)]}{1+1+(4/s)} = \frac{\frac{5}{2}s+2}{s+2} \\ \mathbf{V}_1 &= Z_{in}\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{5}{2}s+2}{s+2} \end{aligned}$$

y por división de corrientes

$$\mathbf{I}_2 = \left(\frac{-1}{1+\frac{s}{s+4}} \right) (1) = \frac{-\frac{1}{2}s-2}{s+2}$$

\mathbf{V}_1 e \mathbf{I}_2 forman la primera columna de la matriz híbrida (entrada 2a en la tabla 15.1). Para obtener la segunda columna, abrimos la puerta 1 y ponemos una fuente de voltaje unitario a través del puerto 2, como se

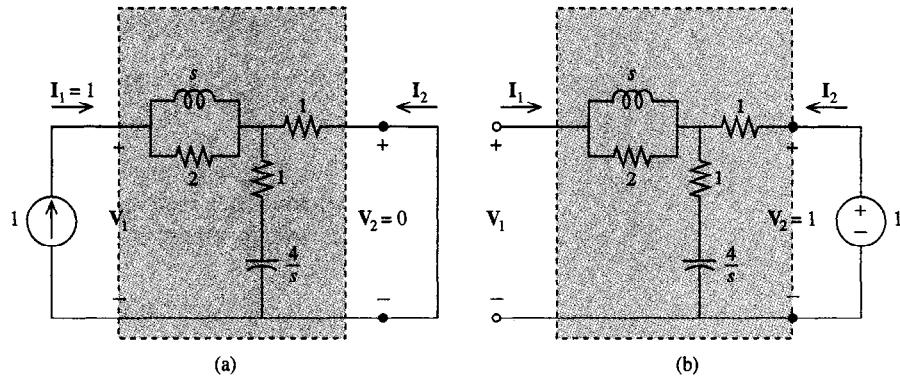


FIGURA 15.26 (a) Primer experimento para determinar parámetros híbridos; (b) segundo experimento.

muestra en la figura 15.26(b). Puesto que $V = I = 0$ a través del RL paralelo,

$$I_2 = \frac{V_2}{2 + (4/s)} = \frac{s}{2s + 4}$$

$$V_1 = \left(1 + \frac{4}{s}\right) I_2 = \frac{s + 4}{2(s + 2)}$$

Por consiguiente, la matriz híbrida es

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5s + 4}{2(s + 2)} & \frac{s + 4}{2(s + 2)} \\ \frac{-(s + 4)}{2(s + 2)} & \frac{s}{2(s + 2)} \end{bmatrix}$$

Volviendo a los parámetros de transmisión, en la figura 15.27(a), hemos fijado $-I_2 = 0$ y $V_2 = 1$. Por LVK alrededor de la trayectoria

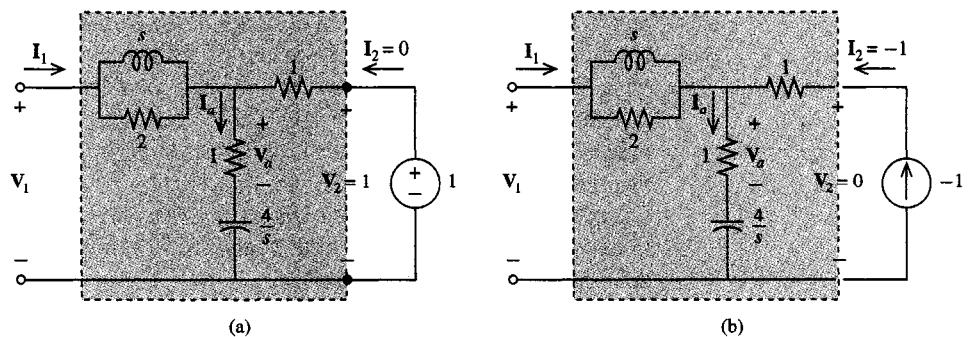


FIGURA 15.27 (a) Primer experimento para determinar los parámetros de transmisión; (b) segundo experimento.

cerrada derecha, $\mathbf{V}_a = 1$, y

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_a}{a + (4/s)} = \frac{s}{s + 4}$$

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{2s}{s + 2} + 1 + \frac{4}{s} \right) \mathbf{I}_1 = \frac{3s^2 + 6s + 8}{(s + 2)(s + 4)}$$

En el segundo experimento de la figura 15.27(b), se invierten las condiciones que se fijaron anteriormente; $-\mathbf{I}_2 = 1$ y $\mathbf{V}_2 = 0$. La ecuación de la trayectoria cerrada derecha es $V_a = 1$, de forma que

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_a}{1 + (4/s)} = \frac{s}{s + 4}$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_a + 1 = \frac{2s + 4}{s + 4}$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{2s}{s + 2} \mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_a = \frac{5s + 4}{s + 4}$$

y la matriz de parámetro de transmisión, o $ABCD$, es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s^2 + 6s + 8}{(s + 2)(s + 4)} & \frac{5s + 4}{s + 4} \\ \frac{s}{s + 2} & \frac{2s + 4}{s + 4} \end{bmatrix}$$

lo que completa el ejemplo.

Para un circuito dado de dos puertos, podemos calcular seis descripciones distintas de dos puertos. ¿Cuáles son las relaciones entre ellas? No pueden ser independientes la una de la otra, puesto que cada una afirma ser una representación completa del mismo comportamiento (comportamiento de entrada-salida) del mismo circuito. Considérese, por ejemplo, la relación entre los parámetros de impedancia e híbrido. Si conocemos los parámetros de impedancia, debemos tener la posibilidad de especificar las salidas de los dos experimentos que definen las columnas de la matriz híbrida, puesto que cada experimento simplemente fija los circuitos de terminación de puerto, y cualquier descripción de dos puertos nos da las variables de puerto para cualquier condición de terminación de puerto específica.

La integridad de cualquiera de las descripciones de dos puertos sugiere que debe existir una conversión entre ellas.

En el caso de dos descripciones que ocupan el mismo renglón de la tabla 15.1, las matrices de parámetros están relacionadas porque son inversas la una de la otra. Esto proviene de la observación de que las variables dependientes e independientes se invierten en las dos representaciones que hay en cada renglón. Si \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 son dos matrices cuadradas, tales que para todo vector \mathbf{A} y \mathbf{B} tenemos $\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{M}_2\mathbf{B} = \mathbf{A}$, como lo hacemos en un renglón cualquiera de la tabla 15.1, entonces al invertir la segunda, $\mathbf{B} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{A}$, y de la primera, $\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{A}$; es decir, las matrices son inversas la una de la otra. Las matrices de impedancia y admitancia son pares de matrices inversas, como lo son las matrices híbrida inversa e híbrida y las matrices de transmisión y transmisión inversa (lo que explica el uso del término *inverso* en sus nombres).

En la tabla 15.2 se reúnen las reglas para conversión entre todo par de descripciones de dos puertos. Cada entrada muestra la conversión en término de una matriz dividida por un escalar que es común a los cuatro elementos de la matriz. A continuación se muestran ejemplos del uso de esta tabla.

Tabla 15.2 Descripción de parámetros de dos puertos.

De:	z	y	h	g	t	s
A:						
z	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} / Y$	$\begin{bmatrix} H & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix} / h_{22}$	$\begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & G \end{bmatrix} / g_{11}$	$\begin{bmatrix} t_{11} & T \\ 1 & t_{22} \end{bmatrix} / t_{21}$	$\begin{bmatrix} -s_{22} & -1 \\ -S & -s_{11} \end{bmatrix} / s_{21}$
y	$\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} / Z$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & H \end{bmatrix} / h_{11}$	$\begin{bmatrix} G & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix} / g_{22}$	$\begin{bmatrix} t_{22} & -T \\ -1 & t_{11} \end{bmatrix} / t_{12}$	$\begin{bmatrix} -s_{11} & 1 \\ S & -s_{22} \end{bmatrix} / s_{12}$
h	$\begin{bmatrix} Z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix} / z_{22}$	$\begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{22} & Y \end{bmatrix} / y_{11}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} / G$	$\begin{bmatrix} t_{12} & T \\ -1 & t_{21} \end{bmatrix} / t_{22}$	$\begin{bmatrix} -s_{12} & 1 \\ -S & -s_{21} \end{bmatrix} / s_{11}$
g	$\begin{bmatrix} 1 & -z_{12} \\ z_{21} & Z \end{bmatrix} / z_{11}$	$\begin{bmatrix} Y & y_{12} \\ -y_{21} & 1 \end{bmatrix} / y_{22}$	$\begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix} / H$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} / g_{11}$	$\begin{bmatrix} t_{21} & -T \\ 1 & t_{12} \end{bmatrix} / t_{11}$	$\begin{bmatrix} -s_{21} & -1 \\ S & -s_{12} \end{bmatrix} / s_{22}$
t	$\begin{bmatrix} z_{11} & Z \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix} / z_{21}$	$\begin{bmatrix} -y_{22} & -1 \\ -Y & -y_{11} \end{bmatrix} / y_{21}$	$\begin{bmatrix} -H & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix} / h_{21}$	$\begin{bmatrix} 1 & g_{22} \\ g_{11} & Y \end{bmatrix} / g_{21}$	$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & S_{22} \end{bmatrix} / S$
s	$\begin{bmatrix} z_{22} & -Z \\ -1 & z_{11} \end{bmatrix} / z_{12}$	$\begin{bmatrix} -y_{11} & 1 \\ Y & y_{22} \end{bmatrix} / y_{12}$	$\begin{bmatrix} 1 & -h_{11} \\ -h_{22} & H \end{bmatrix} / h_{12}$	$\begin{bmatrix} -G & g_{22} \\ -g_{11} & -1 \end{bmatrix} / g_{12}$	$\begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{bmatrix} / T$	$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} / T$
	$Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$				$Y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$	
	$H = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$				$G = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$	
	$T = T_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}$				$S = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}$	

Ejemplo 15.14

Los parámetros-z para un circuito de dos puertos dado son

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3s \\ -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Para convertir a la descripción híbrida de dos puertos, utilizamos el tercer renglón, primera columna de la tabla 15.2, con $z_{11}=4$, $z_{12}=3s$, $z_{21}=-s$, $z_{22}=2$, y $Z=z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}=3s^2+8$. Aplicando estos factores de conversión,

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3s^2 + 8 & 3s \\ s & 1 \end{bmatrix}}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}s^2 + 4 & \frac{3}{2}s \\ \frac{s}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La derivación de cada una de estas reglas de conversión consiste simplemente en resolver la descripción original de dos puertos para las variables dependientes de la descripción a la que estamos convirtiendo, por ejemplo, al convertir de impedancia a híbrida, resuélvase la segunda ecuación de impedancia para (15.60b) para I_2 , sustitúyase en la primera (15.60a) y agrúpense los términos. De esto resulta V_1 e I_2 como las variables dependientes e I_1 y V_2 como las variables independientes, lo que es la descripción híbrida deseada. Las fórmulas en la entrada correspondiente en la tabla 15.2 son los parámetros híbridos en términos de los parámetros (z) originales.

Ejemplo 15.15

En el ejemplo 15.13 calculamos los parámetros híbridos y de transmisión para el circuito que aparece en la figura 15.26. Los parámetros de transmisión fueron

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s^2 + 6s + 8}{(s+2)(s+4)} & \frac{5s+4}{s+4} \\ \frac{s}{s+4} & \frac{2s+4}{s+4} \end{bmatrix}$$

Aplicando la transmisión a la entrada de conversión híbrida de la tabla 15.2, con estos parámetros de transmisión y

$$T = \frac{3s^2 + 6s + 8}{(s+2)(s+4)} \frac{2s+4}{s+4} - \frac{5s+4}{s+4} \frac{s}{s+4} = 1$$

Se obtiene

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{5s+4}{s+4} & 1 \\ -1 & \frac{s}{s+4} \end{bmatrix}}{\frac{2s+4}{s+4}} = \begin{bmatrix} \frac{5s+4}{2(s+2)} & \frac{s+4}{2(s+2)} \\ \frac{-(s+4)}{2(s+2)} & \frac{s}{2s+4} \end{bmatrix}$$

Lo que concuerda con la matriz híbrida calculada independientemente en el ejemplo 5.13.

Tener la posibilidad de convertir de una a la otra, muestra vívidamente que hay mucha redundancia en la información que se obtiene de seis descripciones separadas de dos puertos. ¿Qué sentido tiene tener seis, cuando basta con sólo una? Una razón es de que *no toda descripción de dos puertos existe para todo circuito de dos puertos*. Examinando la tabla 15.2, nótese que para convertir entre descripciones, se requiere dividir entre un parámetro. Si ese parámetro resulta ser cero, no es posible realizar la conversión, porque la correspondiente descripción de dos puertos no existe.

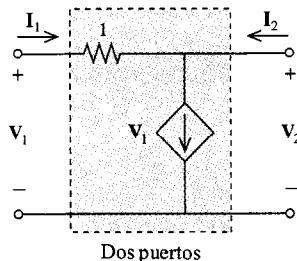
Una segunda razón práctica para tener varias descripciones distintas de dos puertos, es que a veces es más fácil determinar un conjunto de parámetros de dos puertos que otro. Por ejemplo, si la descripción de dos puertos de un circuito de transistores debe determinarse por medición, los cuatro parámetros que comprenden la descripción híbrida, son fácilmente medibles para este tipo de circuito. Otros, que requieren experimentos con una puerta de salida en circuito abierto, son más difíciles de disponer, sin impulsar el circuito fuera de la operación lineal. O quizás debamos calcular la descripción de dos puertos de un circuito realizando análisis de malla, y las condiciones de puerto en circuito abierto de la descripción de impedancia puede producir menos ecuaciones que la descripción de admittance en circuito cerrado.

Finalmente, cuando los dos puertos están interconectados, es mucho más fácil determinar la descripción general en dos puertos del circuito interconectado, si utilizamos los parámetros derechos de dos puertos. Lo que sea correcto depende de la forma en que los dos puertos están interconectados, como veremos en la sección 15.8.

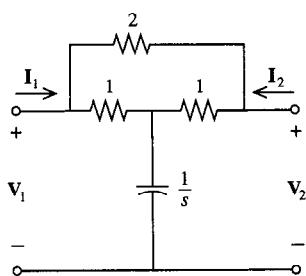
Para resumir, en esta sección definimos las seis descripciones de dos puertos: impedancia, admittance, híbrida e híbrida inversa, transmisión y transmisión inversa. El proce-

dimento general para determinar cualquiera de estas descripciones es realizar dos experimentos, en cada caso estableciendo un valor de cero para una variable independiente poniendo su puerto en circuito abierto o cerrado, poniendo una fuente en el otro puerto para reflejar la otra variable independiente, y calculando las variables dependientes en el circuito resultante. Cada experimento produce una columna de la matriz de parámetros. Las seis descripciones están relacionadas por los factores de conversión que aparecen en la tabla 15.2.

EJERCICIOS



EJERCICIO 15.6.1



EJERCICIO 15.6.2

15.6.1. Obtenga los parámetros y . ¿Cuál de las descripciones de dos puertos no existe para este circuito?

Respuesta $y_{11} = y_{22} = 1$, $y_{12} = 0$, $y_{21} = -1$; no existe transmisión inversa

15.6.2. Determine las seis descripciones de dos puertos.

Respuesta

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4s} \begin{bmatrix} 3s + 4 & s + 4 \\ s + 4 & 3s + 4 \end{bmatrix}; \mathbf{Y} = \frac{1}{2s + 4} \begin{bmatrix} 3s + 4 & -(s + 4) \\ -(s + 4) & 3s + 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{3s + 4} \begin{bmatrix} 2s + 4 & s + 4 \\ -(s + 4) & 4s \end{bmatrix}; \mathbf{g} = \frac{1}{3s + 4} \begin{bmatrix} 4s & -(s + 4) \\ s + 4 & 2s + 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{s + 4} \begin{bmatrix} 3s + 4 & 2s + 4 \\ 4s & 3s + 4 \end{bmatrix}; \mathbf{s} = \frac{1}{s + 4} \begin{bmatrix} 3s + 4 & -2(s + 2) \\ -4s & 3s + 4 \end{bmatrix}$$

15.6.3. Un circuito *bilateral* tiene $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$. ¿Cuáles son las igualdades que satisface un circuito bilateral en términos de los otros parámetros de dos puertos?

Respuesta $y_{12} = y_{21}$, $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$, $\mathbf{g}_{12} = -\mathbf{g}_{21}$; $S = T = 1$ (S y T son las determinantes de las matrices \mathbf{s} y \mathbf{t} como en la tabla 15.2)

15.7

MODELOS DE DOS PUERTOS

Hasta este punto de nuestra discusión de los circuitos de dos puertos, nos hemos enfocado en los usos y procedimientos para convertir un diagrama de circuito en un conjunto de cuatro parámetros, el proceso de *análisis* de dos puertos. El proceso inverso, en que obtenemos un circuito que concuerda con un conjunto dado de parámetro de dos puertos, se conoce como *síntesis* o *modelo de dos puertos*.

Los modelos de dos puertos son útiles en varios contextos. Nos permiten visualizar un circuito descrito por un conjunto de parámetros de dos puertos, para considerar los efectos de interconectarlos con otros elementos o subcircuitos, y de utilizar SPICE para analizarlos. En el caso de bobinas acopladas, nos permite modelar un circuito con inductancia mutua, mediante uno que no contiene inductancia mutua.

Para ver la forma en que puede derivarse fácilmente una clase de modelo de dos puertos, considérese la descripción en parámetro-z

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad (15.71a)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \quad (15.71b)$$

Todo circuito que satisface estas dos ecuaciones se conoce como modelo de circuito para esta descripción de dos puertos. Podemos utilizar cualquier configuración de circuito que concuerde con estas ecuaciones, aunque generalmente es más beneficioso seleccionar una que sea simple. Con cada término expresado en voltos, llegamos al modelo que aparece en la figura 15.28(a), en el lado de la entrada, mediante (15.71a), \mathbf{V}_1 es la suma de dos caídas de voltaje. Una es proporcional a la corriente que pasa a través de ésta, de forma que lo mismo debe ocurrir con la impedancia, y la otra es proporcional a otra corriente en alguna parte, de forma que debe ser una fuente de voltaje controlada por corriente. De ahí se desprende de manera similar el circuito del puerto de salida.

La mayoría de las otras descripciones de dos puertos resultan en modelos del mismo modo natural. Por ejemplo, para el caso híbrido, las ecuaciones son

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \quad (15.72a)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \quad (15.72b)$$

La primera ecuación sugiere un modelo de puerto de entrada LVK como el modelo anterior, y ésta aparece en la figura 15.28(b). La segunda estará expresada en amperes, y se considera como una ecuación LCK. La corriente de puerto \mathbf{I}_2 es aparentemente la suma de dos corrientes, una que pasa a través de una impedancia de valor $1/\mathbf{h}_{12}$ y la otra a través de una fuente de corriente controlada por corriente como se muestra en la figura 15.28(b).

Los modelos de circuito para las descripciones híbrida inversa y de admitancia se desprenden de forma similar. Únicamente los casos de transmisión y de transmisión inversa no evocan de forma natural modelos de circuitos de este tipo, y si se necesita primero un modelo de circuito, se recomienda que se realice una conversión a parámetros de impedancia, admitancia, híbridos o híbridos inversos.

Un importante ejemplo de un circuito de dos ejemplos, es un par de bobinas acopladas. Las leyes $i - v$ para bobinas acopladas (15.27) repetidas aquí, son

$$\mathbf{V}_1 = sL_1\mathbf{I}_1 \pm sM\mathbf{I}_2 \quad (15.73a)$$

$$\mathbf{V}_2 = \pm sM\mathbf{I}_1 + sL_2\mathbf{I}_2 \quad (15.73b)$$

Este par de ecuaciones puede reconocerse también como una descripción de impedancia de dos puertos de las bobinas acopladas. En consecuencia, puede utilizarse siempre un mode-

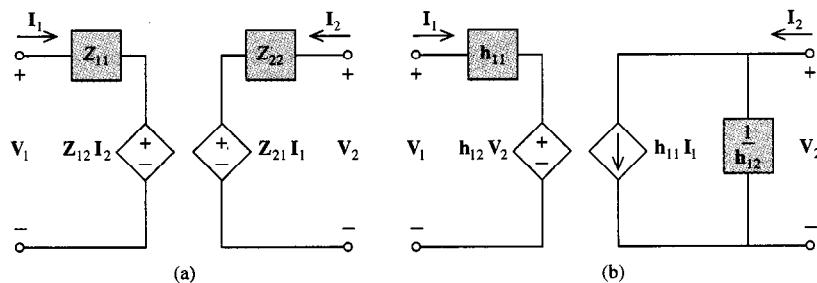


FIGURA 15.28 Modelos de circuitos de dos puertos (a) parámetro-z; (b) parámetro híbrido.

lo de la forma que aparece en el modelo de la figura 15.28(a) con $\mathbf{z}_{11} = sL_1$, $\mathbf{z}_{22} = sL_2$, y $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21} = \pm sM$ para reemplazar el par de bobinas acopladas. El modelo sustituye la complicación de la inductancia mutua con una de un par de fuentes controladas, y por consiguiente, no siempre puede tener beneficio. En la figura 15.11 se mostró un modelo menos general, pero más simple, para un par de bobinas acopladas con una terminal común.

Las formas para estos circuitos no son únicas. Por ejemplo, pueden aplicarse transformaciones de Thevenin-Norton al modelo de circuito para alguno de sus puertos, con lo que se obtiene un nuevo modelo con una fuente distinta. Puesto que muchos circuitos distintos tienen la misma descripción de dos puertos, cabe esperar que estén disponibles muchos modelos de circuito para el mismo conjunto de parámetros de dos puertos. Ciertamente, la esencia de la descripción de dos puertos, es lo que preserva el comportamiento de puertos del circuito, en tanto que oculta los detalles internos. Cuando recuperamos los detalles del circuito interno creando un modelo de circuito explícito, siempre habrá muchas formas distintas en la que podemos hacer esto.

Los modelos descritos hasta ahora no tienen cables que conectan los puertos de entrada y salida; es decir, sus dos puertos están eléctricamente aislados. Muchos circuitos de dos puertos, tales como los circuitos amp op de etapas múltiples, tienen un nodo común que une la entrada con la salida. Puesto que los puertos en los modelos anteriores están eléctricamente aislados, un solo cable que se añade entre los puertos, no transmitirá ninguna corriente, y no cambiará ninguna caída de corriente o de voltaje. De forma que los modelos anteriores, al añadir un cable para cerrar el circuito, pueden utilizarse como modelo de nodo común (tierra común), así como de circuitos de dos puertos eléctricamente aislados. Los circuitos en donde hay un nodo común entre los puertos de entrada y salida, también se conocen como circuitos de dos puertos de tres terminales. En la figura 15.29 se muestra un modelo de un circuito de *dos puertos de tres terminales* para el tipo anteriormente descrito.

Además del modelo convencional de dos puertos que contiene dos fuentes controladas que aparecen en la figura 15.29(b), los circuitos de dos puertos de tres terminales tienen otro tipo de modelo que aprovecha la configuración de nodo común. Considérese un circuito de dos puertos general con los parámetros-z dados en (15.71). Supongamos que sumamos el término $(\mathbf{z}_{12} - \mathbf{z}_{21})\mathbf{I}_1$ a ambos lados de (15.71b), lo que resulta en

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad (15.74a)$$

$$\mathbf{V}'_2 = \mathbf{V}_2 + (\mathbf{z}_{12} - \mathbf{z}_{21})\mathbf{I}_1 = \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \quad (15.74b)$$

Obtengamos la descripción en parámetro-z del circuito de la figura 15.30, utilizando terminales $a-a'$ como la puerta de salida y \mathbf{V}'_2 como el voltaje de puerto de salida. Este circuito contiene tres impedancias, marcadas como $\mathbf{z}_{11} - \mathbf{z}_{12}$, $\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{21}$ y \mathbf{z}_{12} . Calculando los paráme-

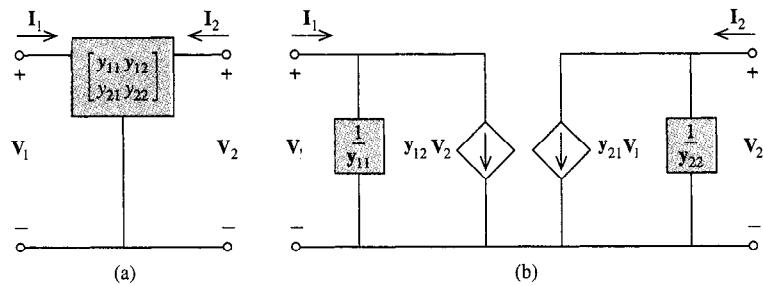


FIGURA 15.29 (a) Circuito de dos puertos con tres terminales; (b) modelo.

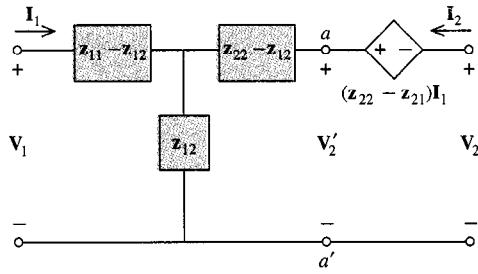


FIGURA 15.30 Modelo de circuito para circuito de dos puertos de tres terminales.

tros-z de la forma conocida, puede verificarse fácilmente que este circuito obedece la descripción de dos puertos

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad (15.75a)$$

$$\mathbf{V}'_2 = \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \quad (15.75b)$$

A continuación observamos de la figura que $\mathbf{V}'_2 = \mathbf{V}_2 + (\mathbf{z}_{12} - \mathbf{z}_{21})\mathbf{I}_1$. Combinando esto con (15.75), regresamos con la forma general (15.71). De este modo, la *figura 15.30 es un modelo de circuito general para un circuito de dos puertos de tres terminales con parámetros de impedancia \mathbf{z}_{11} , \mathbf{z}_{12} , \mathbf{z}_{21} y \mathbf{z}_{22}* . En contraste con los modelos anteriores, contiene una sola fuente controlada.

En el importante caso especial $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$, incluso esta fuente controlada restante desaparece, lo que resulta en el modelo que contiene únicamente impedancias. Los circuitos de dos puertos para los que $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$ o, de modo equivalente, en términos de parámetros y , $y_{12} = y_{21}$ se conocen como bilaterales. Puede demostrarse que todos los circuitos que contienen únicamente impedancias son bilaterales, y por consiguiente pueden tener un modelo mediante tres impedancias en la configuración Y que aparece en la figura 15.30.

Ejemplo 15.16

Obtengamos un modelo compacto de dos puertos para el circuito de la figura 15.31(a), un modelo sin trayectorias cerradas internas. Comencemos obteniendo los parámetros-z para este circuito. Poniendo la salida en circuito abierto, y colocando una fuente de corriente unitaria en la puerta de entrada, la ecuación de la trayectoria cerrada es

$$1(\mathbf{I}_a - 1) + (s + 3)\mathbf{I}_a = 0$$

donde $\mathbf{I}_a = 1/(s+4)$.

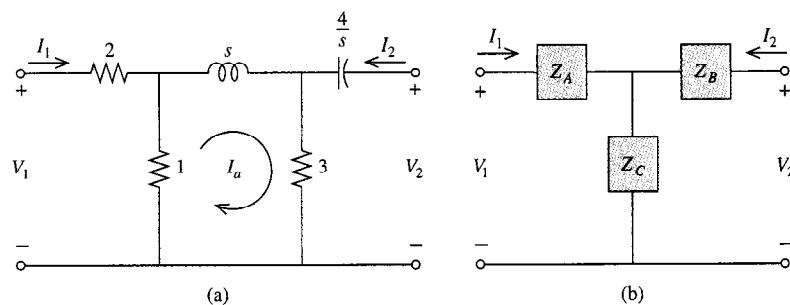


FIGURA 15.31 (a) Circuito para el ejemplo 15.16; (b) modelo de dos puertos sin trayectorias cerradas internas.

$$\mathbf{V}_1 = 2\mathbf{I}_1 + 1(1 - \mathbf{I}_a) = 2 + \frac{s+3}{s+4} = \frac{3s+11}{s+4}$$

y

$$\mathbf{V}_2 = 3\mathbf{I}_a = \frac{3}{s+4}$$

\mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 forman la primera columna de la matriz- z . A continuación, poniendo la entrada en circuito abierto, y poniendo la fuente de corriente unitaria en la salida,

$$3(\mathbf{I}_a + 1) + (s+1)\mathbf{I}_a = 0$$

Resolviendo para \mathbf{I}_a y luego \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 como en el primer experimento, la matriz- z es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s+11}{s+4} & \frac{3}{s+4} \\ \frac{3}{s+4} & \frac{3s^2+7s+16}{s(s+4)} \end{bmatrix}$$

Comparando esto con la figura 15.30, se muestra en la figura 15.31(b) un modelo de dos puertos para este circuito bilateral de tres terminales con

$$\mathbf{Z}_A = \mathbf{z}_{11} - \mathbf{z}_{12} = \frac{3s+8}{s+4}$$

$$\mathbf{Z}_B = \mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12} = \frac{3s^2+4s+16}{s(s+4)}$$

$$\mathbf{Z}_C = \mathbf{z}_{12} = \frac{3}{s+4}$$

Todo par de bobinas acopladas forma un circuito de dos puertos bilateral, como puede verse de (15.73). Si pueden unirse las dos bobinas para formar un circuito de dos puertos de tres terminales, el modelo que contiene únicamente impedancias de la figura 15.30 con $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$ es un modelo de circuito sumamente útil para bobinas acopladas. El modelo reemplaza el par de bobinas acopladas, con sus acoplamientos magnéticos por tres bobinas simples, no acopladas. Nótese que, aun si el par de bobinas acopladas no tienen un nodo de referencia común, en tanto que no haya una conexión eléctrica externa entre ellos, siempre puede instalarse un cable de circuito cerrado entre las bobinas sin afectar la corriente o caída de voltaje de ningún elemento. Esto se debe a la LCK generalizada, que garantiza un sólo cable entre subcircuitos que de otro modo estarían eléctricamente aislados, no transmite corriente.

Ejemplo 15.17

Obtenga un circuito equivalente para la figura 15.32(a) que no tenga bobinas acopladas ni fuentes controladas. Las leyes $i - v$ para las bobinas acopladas son

$$\mathbf{V}_1 = 2s\mathbf{I}_1 - 2s\mathbf{I}_2 \quad (15.76a)$$

$$\mathbf{V}_2 = -2s\mathbf{I}_1 + 3s\mathbf{I}_2 \quad (15.76b)$$

Conectando a y a' , podemos utilizar el modelo de terminales que aparece en la figura 15.30, que, para el caso bilateral $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$, contiene sólo impedancias. Con $\mathbf{z}_{11} - \mathbf{z}_{12} = 4s$, $\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12} = 5s$, y $\mathbf{z}_{12} = -2s$, el resultado aparece en la figura 15.32(b).

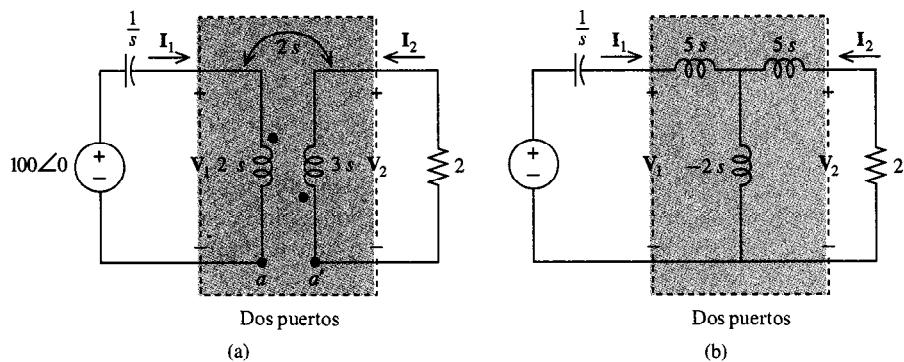


FIGURA 15.32 (a) Circuito para el ejemplo 15.17; (b) equivalente.

Finalmente, recuérdese del capítulo 11, que un conjunto de impedancias de tres terminales configurado en Y, como el de la figura 15.32(b) y figura 15.30, tienen un equivalente configurado en Δ. De este modo, la transformación Y-Δ puede utilizarse para convertir estos modelos a modelos equivalentes con el mismo número de elementos, pero con menos trayectorias cerradas (configuración Y) o menos nodos (configuración Δ). Las fórmulas de conversión Y - Δ y Δ - Y aparecen en la sección 11.5 como (11.31) y (11.32).

Ejemplo 15.18

Ciertos circuitos de dos puertos de tres terminales tienen parámetros-z

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(4s+1)}{4s+3} & \frac{4s}{4s+3} \\ \frac{-2(2s+3)}{4s+3} & \frac{4s(s+2)}{4s+3} \end{bmatrix}$$

Con base en la figura 15.30, en la figura 15.33(a) se muestra un modelo de circuito para este circuito. Utilizando las fórmulas de conversión Y-Δ (11.31) con

$$Y_a = \frac{4s+3}{2(2s+1)}, \quad Y_b = \frac{4s+3}{4s(s+1)}, \quad Y_c = \frac{4s+3}{4s}$$

llegamos al modelo equivalente de dos puertos que aparece en la figura 15.33(b). En ambos modelos, los valores dentro de los apartados son impedancias

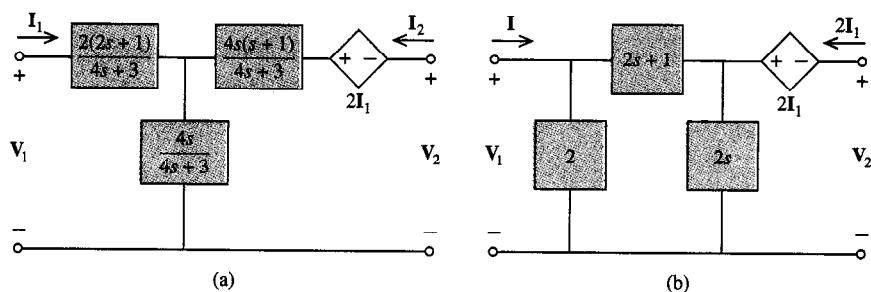
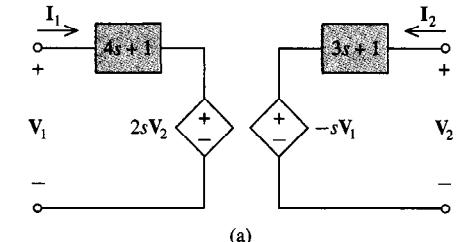
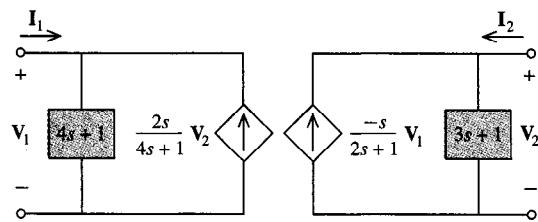


FIGURA 15.33 (a) Modelo de dos puertos para el ejemplo; (b) modelo de dos puertos equivalentes, utilizando la transformación Y-Δ.

15.7.1. Un circuito de dos puertos tiene parámetros $z_{11} = 4s + 1$, $z_{12} = 2s$, $z_{21} = -s$, y $z_{22} = 3s + 1$. Encuéntrese un modelo de circuito con dos fuentes de voltaje controlado y utilícese Thevenin-Norton para convertirlo a un modelo con dos fuentes de corriente controlada.



(a)



(b)

EJERCICIO 15.7.1

15.7.2. ¿Cuáles son las condiciones para que un circuito de dos puertos de tres terminales tenga un modelo de circuito que contenga únicamente impedancias? Formúlese en términos de los diversos parámetros de dos puertos.

Respuesta $z_{12} = z_{21}$, $y_{12} = y_{21}$, $h_{12} = -h_{21}$, $g_{12} = -g_{21}$, $S = T = 1$ (S y T son los determinantes de las matrices s y t que se muestran en la tabla 15.2)

15.7.3. Aplíquese el modelo de la figura 15.30 a un par de tres terminales de bobinas acopladas. Compárese el resultado con la figura 15.11.

Respuesta Son idénticos

15.8 INTERCONEXIÓN DE CIRCUITOS DE DOS PUERTOS

Iniciamos nuestro estudio de los circuitos eléctricos en los capítulos 1 y 2 considerando las propiedades de los circuitos básicos de un puerto (dos terminales): resistencias, fuentes, combinaciones en serie-paralelo, y así sucesivamente. La potencia y versatilidad de estos circuitos simples de un puerto no nos parecía obvio de sus comportamientos limitados como circuitos individuales de un puerto, pero se nos hizo evidente cuando se interconectaban dos o más. De los pares RC emergieron filtros pasa-bajas o pasa-altas y de las combinaciones RLC derivamos la resonancia, de las interconexiones de unidades de amp op obtuvimos circuitos que simultáneamente tenían alta ganancia y amplitud de banda, y así sucesivamente.

Lo que es verdad para circuitos de un puerto, es también verdad para los de dos puertos. Su verdadera utilidad emerge únicamente de su interconexión. Ciertamente, nuestra principal motivación para estudiar circuitos de dos puertos tiene que ver con el hecho de que podríamos instrumentar un enfoque de diseño de circuito basado en su interconexión. Propusimos resolver complejos problemas de diseño descomponiéndolos en un conjunto de tareas de entrada y salida muy definidas, cada una resuelta por un simple circuito de dos puertos. La solución del problema general yace en la interconexión de estos circuitos de dos puertos.

En la presente sección consideraremos varias formas prácticas de interconectar circuitos de dos puertos. Nuestro énfasis estará en obtener la descripción de dos puertos del circuito general a partir de las descripciones de sus componentes de dos puertos interconectados.

Se dice que dos circuitos de dos puertos están conectados en *cascada*, si el puerto de salida de uno está unido directamente al puerto de entrada del otro, como se muestra en la figura 15.34. En conjunto, forman un solo circuito de dos puertos general, cuya puerta de entrada es el puerto de entrada de *A*, y cuyo puerto de salida coincide con los de *B*. Nos referiremos a *A* como el circuito de *dos puertos de entrada* y el *B* como el circuito de *dos puertos de salida* de estar en interconexión en cascada. Los circuitos de dos puertos individuales *A* y *B* tienen matrices de parámetro de transmisión, cuya notación es

$$A: \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}, \quad B: \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

Examinando el puerto en el que se interconecta, claramente $V_3 = V_2$ e $-I_3 = I_2$ o

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde la última proviene de la descripción de dos puertos de *B*. Sustituyendo esto en la descripción de dos puertos de *A*, obtenemos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} \quad (15.77)$$

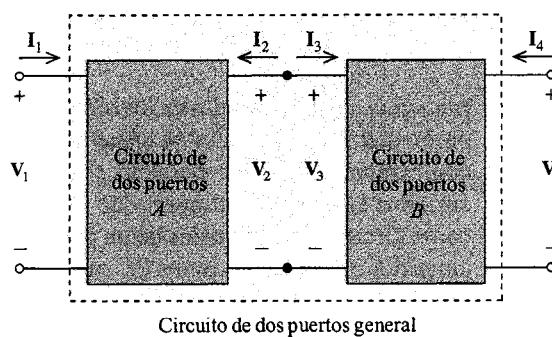


FIGURA 15.34 (a) Interconexión en cascada de circuitos de dos puertos.

Ahora (15.77) es la forma de una descripción de dos puertos de transmisión.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_4 \\ -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \quad (15.78)$$

del circuito general interconectado, donde las t_{ij} , son los parámetros de transmisión general para par de circuitos conectados en cascada. Comparando (15.77) y (15.78), debe ser el caso que

CASCADA

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} \quad (15.79)$$

La matriz de transmisión general para un par de circuitos de dos puertos conectados en cascada es el producto de sus matrices de transmisión, donde el primer miembro de la multiplicación es el circuito de dos puertos de entrada.

Para obtener la descripción de transmisión general, únicamente necesitamos multiplicar las matrices de transmisión individuales entre sí en el orden natural (en primer lugar la matriz de dos puertos de entrada). Recuérdese que, en general, las matrices no son conmutativas; es decir, el producto de matrices AB en general no es igual a BA , de forma que el orden sí altera el producto.

La simplicidad con que pueden derivarse los parámetros de transmisión general de la interconexión en cascada, de los parámetros de transmisión individual, no pasa a las demás descripciones de dos puertos. Por ejemplo, no hay una relación simple entre los parámetros de impedancia de dos circuitos y los parámetros de impedancia de su interconexión en cascada. Por esta razón, es útil convertir a parámetros de transmisión antes de calcular la descripción de dos puertos de una conexión en cascada.

Ejemplo 15.19

Dos circuitos A y B se conectan en cascada en la figura 15.34. Deseamos conocer la descripción híbrida del circuito de dos puertos resultante, dada las descripciones híbridas individuales.

$$A: \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}^a & \mathbf{h}_{12}^a \\ \mathbf{h}_{21}^a & \mathbf{h}_{22}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -3 \\ -s & s+3 \end{bmatrix},$$

$$B: \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}^b & \mathbf{h}_{12}^b \\ \mathbf{h}_{21}^b & \mathbf{h}_{22}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

Primero convertiremos las descripciones dadas a parámetros de transmisión. Para A , $s(s+3)-3s = s^2$ y la conversión es, por la tabla 15.2,

$$\begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} -\mathbf{H}^a & -\mathbf{h}_{11}^a \\ -\mathbf{h}_{22}^a & -1 \end{bmatrix}}{\mathbf{h}_{21}^a}$$

$$= \begin{bmatrix} s & 1 \\ \frac{s+3}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Haciendo lo mismo para B , $\mathbf{H}^b = 4(s+1) + 1 = 4s + 5$ y

$$\begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s+s & 4 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transmisión general es su producto, escribiendo primero (multiplicando primero), la matriz de transmisión del circuito de entrada de dos puertos A .

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & 1 \\ \frac{s+3}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4s+5 & 4 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación de matrices, los parámetros de transmisión de la conexión en cascada de A y B son

$$t_{11} = s(4s+5) + 1(s+1) = 4s^2 + 6s + 1$$

$$t_{12} = s(4) + 1(1) = 4s + 1$$

$$t_{21} = \frac{s+3}{s}(4s+5) + \frac{1}{s}(s+1) = \frac{4s^2 + 18s + 16}{s}$$

$$t_{22} = \frac{s+3}{s}(4) + \frac{1}{s}(1) = \frac{4s + 13}{s}$$

La tabla 15.2 cita la conversión de los parámetros de transmisión a parámetros híbridos como

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{12} & T \\ -1 & t_{21} \end{bmatrix}$$

donde $T = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}$. El resultado final es

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 4s+1 & \frac{-3}{s} \\ -1 & \frac{4s^2+18s+16}{s} \end{bmatrix}}{\frac{4s+13}{s}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s(4s+1)}{4s+13} & \frac{-3}{4s+13} \\ \frac{-s}{4s+13} & \frac{4s^2+18s+16}{4s+13} \end{bmatrix}$$

La ecuación (15.79) puede generalizarse fácilmente a una cadena de tres o más elementos en cascada. Supongamos que el orden de la condición en cascada es ABC siendo A el circuito de dos puertos de entrada y C el circuito de dos puertos de salida. Entonces $\mathbf{T}_{ab} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b$ donde \mathbf{T}_a y \mathbf{T}_b son matrices de transmisión para A y B y \mathbf{T}_{ab} es la matriz de transmisión A conectada en cascada con B . Cuando esto se conecta en cascada con C , tenemos la triple cascada: $\mathbf{T}_{abc} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{T}_c = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \mathbf{T}_c$. Las matrices de transmisión en una cadena de circuitos en cascada se multiplican en orden natural.

Otra interconexión común es la interconexión en paralelo que aparece en la figura 15.35. Las terminales positivas de cada puerto están conectadas entre sí, y el nodo se define como la terminal positiva del conjunto interconectado. Puesto que

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^a \\ I_2^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1^b \\ I_2^b \end{bmatrix}$$

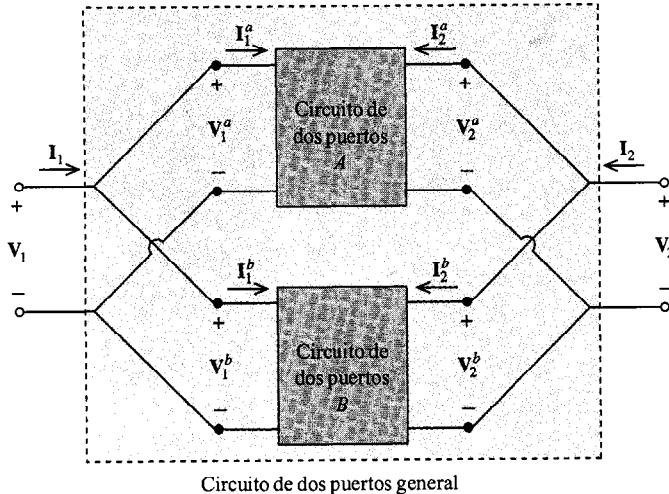


FIGURA 15.35 Interconexión en paralelo de circuitos de dos puertos.

entonces, utilizando las matrices de admitancia de los dos circuitos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}^a & \mathbf{y}_{12}^a \\ \mathbf{y}_{21}^a & \mathbf{y}_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^a \\ \mathbf{V}_2^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}^b & \mathbf{y}_{12}^b \\ \mathbf{y}_{21}^b & \mathbf{y}_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^b \\ \mathbf{V}_2^b \end{bmatrix} \quad (15.80)$$

Pero de la figura nos es claro que los voltajes son iguales:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^a \\ \mathbf{V}_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^b \\ \mathbf{V}_2^b \end{bmatrix} \quad (15.81)$$

Y combinando las últimas dos ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}^a & \mathbf{y}_{12}^a \\ \mathbf{y}_{21}^a & \mathbf{y}_{22}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}^b & \mathbf{y}_{12}^b \\ \mathbf{y}_{21}^b & \mathbf{y}_{22}^b \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Ésta es una ecuación de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

de forma que debe ser la descripción de admitancia (en parámetro-y) de la combinación en paralelo.

EN PARALELO

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}^a + \mathbf{y}_{11}^b & \mathbf{y}_{12}^a + \mathbf{y}_{12}^b \\ \mathbf{y}_{21}^a + \mathbf{y}_{21}^b & \mathbf{y}_{22}^a + \mathbf{y}_{22}^b \end{bmatrix} \quad (15.82)$$

La matriz general de admitancia para circuitos de dos puertos en paralelo es la suma de sus matrices individuales de admitancia.

Del mismo modo que los parámetros de transmisión son los más compatibles con interconexiones en cascada, son los parámetros y los más adecuados para el caso en paralelo. Nótese que en tanto que conexión en paralelo significa algo muy distinto para los circuitos de un puerto y para los de dos puertos, en ambos casos podemos resumir el resultado al

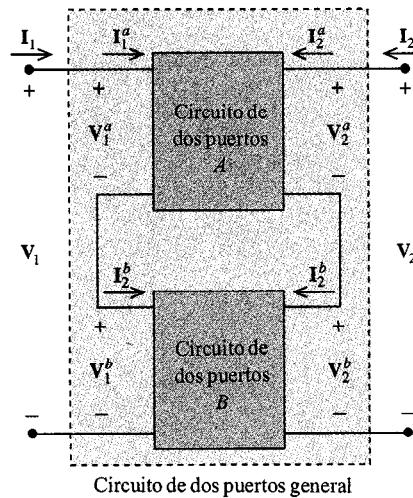


FIGURA 15.36 Interconexión en serie de circuitos de dos puertos.

decir que las admitancias en paralelo se suman. En un caso nos referimos a admitancias escalares, y en el otro a matrices de admisión, pero aun así la regla sigue siendo la misma.

El tipo tercero y último de interconexión que consideraremos es la interconexión en serie que aparece en la figura 15.36. Aplicando LVK en cada puerto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^a \\ \mathbf{V}_2^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^b \\ \mathbf{V}_2^b \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las descripciones de impedancia para A y B ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}^a & \mathbf{z}_{12}^a \\ \mathbf{z}_{21}^a & \mathbf{z}_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^a \\ \mathbf{I}_2^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}^b & \mathbf{z}_{12}^b \\ \mathbf{z}_{21}^b & \mathbf{z}_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^b \\ \mathbf{I}_2^b \end{bmatrix} \quad (15.83)$$

Pero las corrientes de puerto de entrada son todas iguales, al igual que las corrientes de puerto de salida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^a \\ \mathbf{I}_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^b \\ \mathbf{I}_2^b \end{bmatrix}$$

Al sustituirlo en (15.83), esto resulta en

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}^a & \mathbf{z}_{12}^a \\ \mathbf{z}_{21}^a & \mathbf{z}_{22}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}^b & \mathbf{z}_{12}^b \\ \mathbf{z}_{21}^b & \mathbf{z}_{22}^b \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

EN SERIE

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}^a + \mathbf{z}_{11}^b & \mathbf{z}_{12}^a + \mathbf{z}_{12}^b \\ \mathbf{z}_{21}^a + \mathbf{z}_{21}^b & \mathbf{z}_{22}^a + \mathbf{z}_{22}^b \end{bmatrix}$$

La matriz de impedancia general para circuitos de dos puertos conectados en serie, es la suma de sus matrices de impedancia individuales.

Ejemplo 15.20

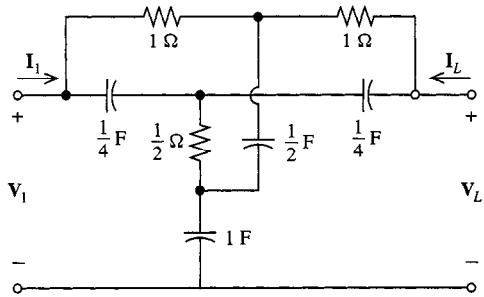


FIGURA 15.37 Circuito para el ejemplo 15.20.

Deseamos conocer la función de transferencia $H(s) = V_2(s)/V_1(s)|_{I_L(s)=0}$, conocida como proporción de transferencia del voltaje de circuito abierto, para el circuito en la figura 15.37. Puesto que cualquier descripción de dos puertos es una caracterización completa del comportamiento de los puertos del circuito, una función de transferencia que involucra únicamente variables de puerto como esta $H(s)$, pueden calcularse fácilmente una vez que se conoce una descripción de dos puertos. Examinando la figura 15.37, el circuito general consiste de dos circuitos de dos puertos en forma de T en paralelo, todos en serie con un circuito de dos puertos que consiste de un solo capacitor, como se muestra en la figura 15.38. Puesto que las admitancias en paralelo se suman, iniciemos el procedimiento obteniendo las matrices de admittance para N_1 y N_2 . Para N_1 primero fijamos $V_1 = 1$ y $V_2 = 0$. Entonces

$$I_1 = \frac{1}{1 + \left[\frac{2/s}{1+(2/s)} \right]} = \frac{s+2}{s+4}$$

y por división de corrientes

$$-I_2 = \frac{1}{1 + (s/2)} \frac{s+2}{s+4} = \frac{2}{s+4}$$

Invirtiendo los lugares del circuito cerrado y la fuente de voltaje unitaria, por la simetría del circuito veremos que obtendremos los mismos

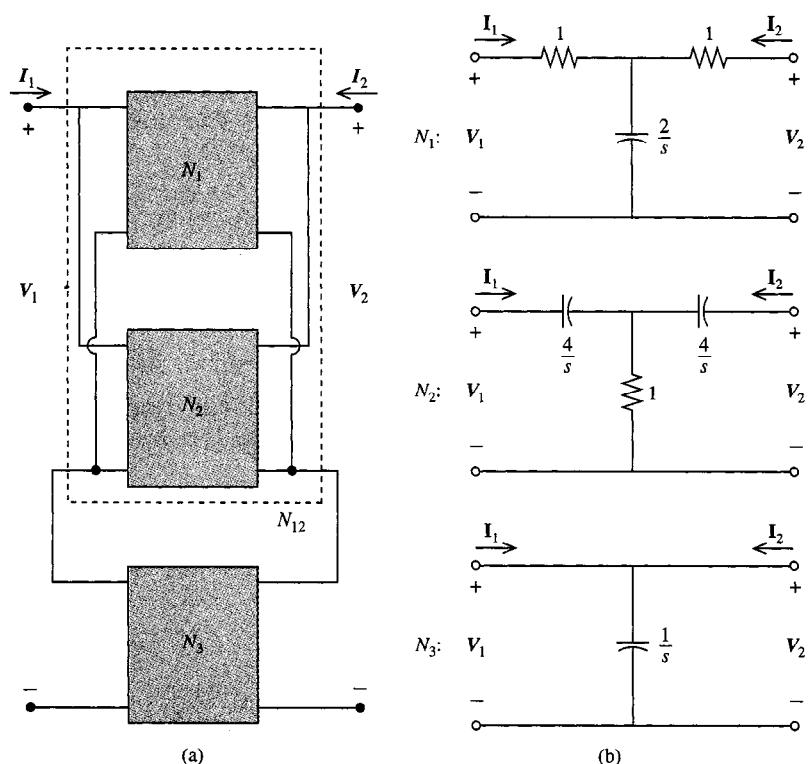


FIGURA 15.38 (a) Circuito anterior como interconexión de tres circuitos de dos puertos; (b) N_1 , N_2 , N_3 .

valores anteriores, con sus índices invertidos. Entonces, para N_1 ,

$$N_1: \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{s+4} \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s+2 \end{bmatrix} \quad (15.84)$$

N_2 se analiza del mismo modo. Con $\mathbf{V}_1 = 1$ y $\mathbf{V}_2 = 0$, tenemos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{\frac{4}{s} + \frac{(1/2)(4/s)}{\frac{1}{2} + (4/s)}} = \frac{s(s+8)}{8(s+4)}$$

y por división de corrientes

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{s/4}{(s/4) + 2} \frac{s(s+8)}{8(s+4)} = \frac{s^2}{8(s+4)}$$

N_2 tiene la misma simetría que N_1 , de forma que

$$N_2: \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8(s+4)} \begin{bmatrix} s^2 + 8s & -s^2 \\ -s^2 & s^2 + 8s \end{bmatrix} \quad (15.85)$$

Sumando (15.84) y (15.85), llegamos a la descripción de admitancia de N_{12} , que es la interconexión en paralelo de N_1 y N_2 :

$$N_{12}: \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8(s+4)} \begin{bmatrix} s^2 + 16s + 16 & -(s^2 + 16) \\ -(s^2 + 16) & s^2 + 16s + 16 \end{bmatrix}$$

A continuación necesitamos combinar N_{12} en serie con N_3 . Puesto que las matrices de impedancia en serie se suman, convertiremos nuestra descripción de N_{12} a la forma de impedancia. Pero las matrices en z y en y son inversos una de la otra, de forma que

$$\begin{aligned} N_{12}: \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 8(s+4) \begin{bmatrix} s^2 + 16s + 16 & -(s^2 + 16) \\ -(s^2 + 16) & s^2 + 16s + 16 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

donde utilizamos el hecho de que si $P = aQ$, donde P y Q son matrices cuadradas y a es un escalar, entonces $P^{-1} = (1/a)Q^{-1}$. El determinante es

$$\begin{aligned} (s^2 + 16s + 16)^2 - (s^2 + 16)^2 &= 32s^3 + 256s^2 + 512s \\ &= 32s(s+4)^2 \end{aligned} \quad (15.86)$$

y

$$N_{12}: \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4s(s+4)} \begin{bmatrix} s^2 + 16s + 16 & s^2 + 16 \\ s^2 + 16 & s^2 + 16s + 16 \end{bmatrix}$$

También necesitamos la matriz en z para N_3 . Al inspeccionar la figura 15.35(b), vemos que con una fuente de corriente unitaria en cada puer-

to, el otro en circuito abierto, los voltajes de puerto son $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = 1/s$ de forma que,

$$N_3: \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Sumando los parámetros-z para los dos circuitos de dos puertos en serie N_{12} y N_3 , los parámetros-z para el circuito general son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4s(s+4)} \begin{bmatrix} s^2 + 20s + 32 & s^2 + 4s + 32 \\ s^2 + 4s + 32 & s^2 + 20s + 32 \end{bmatrix} \quad (15.87)$$

Anteriormente, postulamos que cualquier función de transferencia, tales como $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|_{\mathbf{I}_2=0}$ que se necesitan en este caso, pueden determinarse fácilmente de una descripción de dos puertos. Los parámetros-z satisfacen

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Fijando $\mathbf{I}_2 = 0$ y dividiendo la segunda ecuación entre la primera,

$$\mathbf{H}(s) = \left. \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} \right|_{\mathbf{I}_2(s)=0} = \frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}} \quad (15.88)$$

y a la luz de (15.87)

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s^2 + 4s + 32}{s^2 + 20s + 32}$$

lo que completa el ejemplo.

Se requiere de una nota final de precaución acerca del uso de estos resultados. Vimos anteriormente que es posible, si no somos cuidadosos, terminar un circuito de cuatro terminales, de forma que se viola la condición de puerto, y el circuito no se opera como un circuito de dos puertos. Si la condición de puerto no es verdadera, nuestras representaciones básicas de dos puertos y todos los resultados que surgen de ellas, no podrán aplicarse. También es posible, e incluso probable, que ciertas interconexiones entre dos puertos causarán violaciones de condiciones de puerto para uno o más de dos circuitos de dos puertos interconectados. Para utilizar los resultados de este capítulo, debe evitarse una violación de la condición de puerto.

Una forma de garantizar que la condición de puerto quede satisfecha en todas partes, es introducir un transformador de aislamiento ideal 1:1 y en cualquiera de los puertos de cada uno de los circuitos de dos puertos que se interconecta, como se muestra en la figura 15.39(a). Puesto que el primario no es más que un tramo de cable que conecta las terminales superior e inferior, es claro que la condición de puerto debe quedar satisfecha. Y puesto que se satisface en este caso, aplicando LCK a los dos puertos como si fuese un todo, también se satisface en el otro puerto. Si, por decir algo, se ponen en paralelo cinco circuitos de dos puertos, entonces serán suficientes cuatro transformadores, puesto que el quinto circuito de dos puertos debe satisfacer la condición de puerto si ocurre lo mismo con el resto.

Si no deseamos sumar transformadores de aislamiento, debemos poner cuidado en que las condiciones de puerto se satisfagan en los puertos generales de entrada y salida de la interconexión, es decir, que no haya conexiones cruzadas como en la figura 15.24(b).

Aun así, los circuitos individuales que componen las interconexiones pueden violar la condición de puerto. Únicamente en el caso de conexión en cascada se satisface la condición de puerto de cada circuito, en tanto que se satisface la condición de puerto del circuito general. Para los circuitos en serie-paralelo hay un útil caso especial. La condición de puerto siempre se satisface trivialmente para dos puertos en paralelo o en serie, si cada uno de los dos puertos es del tipo de tres terminales, como se muestra en las figuras 15.39(b) y (c), y las terminales comunes de ambos circuitos se unen como se muestra. Por ejemplo, en la figura 15.39(c), puesto que $I_a + I_b = I_1 + I_2$ e I_a e I_b fluyen a través de circuitos cerrados en paralelo, podemos asignar $I_a = I_1$ e $I_b = I_2$, satisfaciendo de este modo la condición de puerto para cada circuito de dos puertos en serie. Debe considerarse, sobre la base de caso por caso, otras interconexiones en serie y en paralelo. Si no hay una conexión terminal común, bien pueden violar la condición de puerto, y posiblemente no sea aplicable el análisis de dos puertos.

En esta sección estudiamos las conexiones en cascada, en paralelo y en serie de circuitos de dos puertos. Descubrimos que las matrices de transmisión en cascada se multiplican, las matrices de admitancia en paralelo se suman, y las matrices de impedancia en serie se suman. La simplicidad de estos resultados nos estimula a convertir, con ayuda de la tabla 15.2, a la matriz de dos puertos apropiada antes de intentar determinar la presentación de

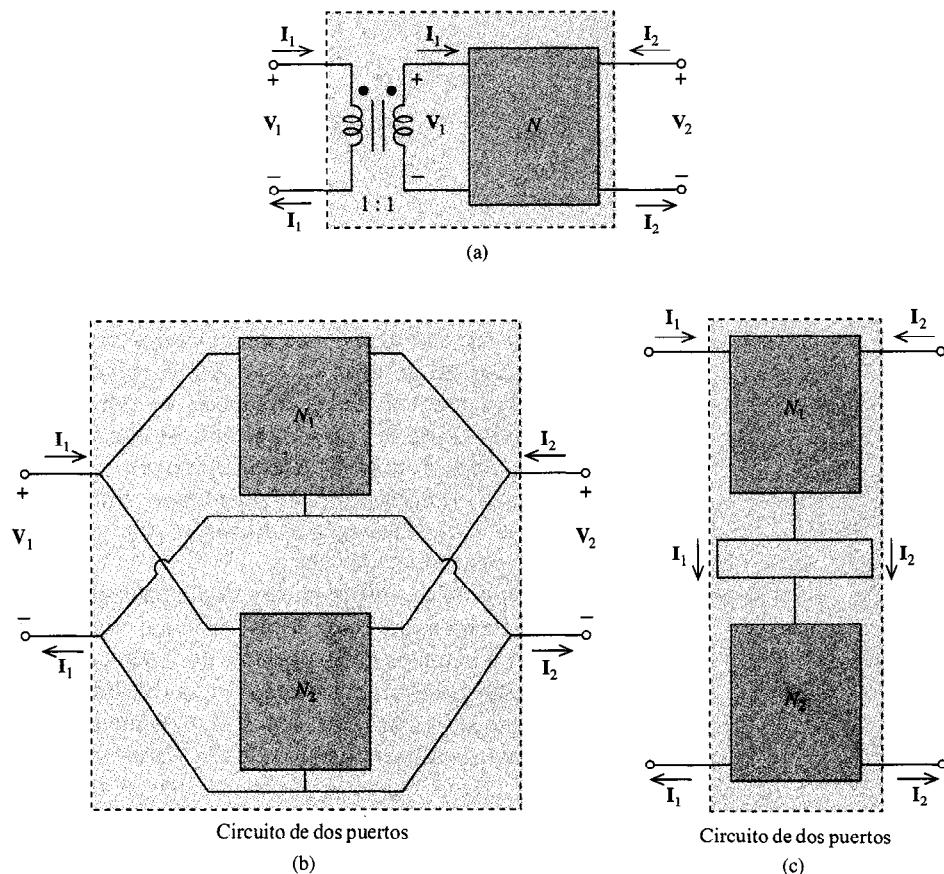
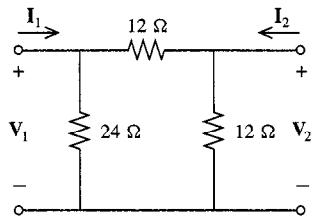


FIGURA 15.39 Interconexiones garantizadas para satisfacer la condición de puertos. (a) Por acoplamiento con transformador; (b) en paralelo; (c) en serie.

dos puertos general. Cada circuito interconectado debe seguir satisfaciendo la condición de puerto, con el fin de que este procedimiento sea aplicable, porque sólo entonces tendremos verdaderamente una interconexión de circuito de dos puertos como se definieron y estudiaron anteriormente. Si no trabajamos con un circuito de dos puertos de tres terminales, esto puede necesitar la suma de un transformador de aislamiento 1:1.

EJERCICIOS



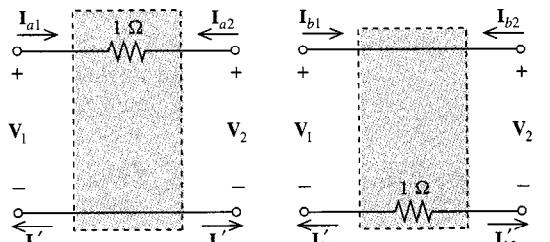
EJERCICIO 15.8.1

15.8.1. Obtenga la matriz-*t* y determine el voltaje a través del puerto de entrada si cuatro de estos circuitos se conectan en cascada, la salida se pone en circuito abierto, y se coloca una fuente de a +2-A en el puerto de salida.

Respuesta $t_{11} = 2$, $t_{12} = 12$, $t_{21} = \frac{1}{6}$, $t_{22} = \frac{3}{2}$; 20.2 V

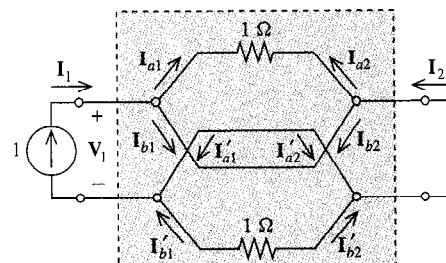
15.8.2. Cuando dos circuitos de dos puertos (a) y (b) se conectan en paralelo, y se pone una fuente de corriente unitaria en la entrada con una salida en circuito abierto como se muestra en (c), la condición de puerto se viola para ambos circuitos de dos puertos.

Respuesta Para que se satisfaga la condición de puerto, se necesita que $I_{a1} = I'_{a1}$, $I_{a2} = I'_{a2}$, $I_{b1} = I'_{b1}$, $I_{b2} = I'_{b2}$. Pero $I_{a1} = I_{a2} = I'_{b2} = I'_{b1} = 0$, en tanto que $I_{b1} = I'_{a1} = 1$, $I_{b2} = I'_{a2} = -1$, de tal forma que no se satisface ninguna de las condiciones de puerto.



(a) Circuito de dos puertos *A*

(b) Circuito de dos puertos *B*



(c) Conexión en paralelo de *A* y *B*

EJERCICIO 15.8.2

15.8.3. Obtenga los parámetros-*y* para interconexión en paralelo de los dos circuitos del ejercicio anterior, examinando el caso de colocar un transformador de aislamiento 1 : 1, en cualquiera de los puertos de cualquiera de los circuitos de dos puertos, y sin colocar el transformador de aislamiento.

Respuesta Con el transformador de aislamiento $y_{11} = y_{22} = -y_{12} = -y_{21} = 2$. Sin éste, los parámetros *y* no existen (admitancia infinita, entrada y salida están en circuito cerrado en conjunto).

La inductancia mutua se señala en SPICE mediante la inclusión de una declaración de elemento de la forma.

K	LXXXXX	LYYYYY	KVAL
---	--------	--------	------

LXXXXX y **LYYYYY** son los dos inductores, y **KVAL** es el valor del coeficiente de acoplamiento. $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ donde L_1 y L_2 son las autoinductancias y M es la inductancia mutua como en (15.20). Se requiere que el valor de k esté dentro del rango $0 < k < 1$, de forma que deben aproximarse los transformadores ideales fijando a k en un valor justo menor a 1.000. Para propósitos de la convención de punto, se considera que los puntos están situados en los primeros nodos especificados en las declaraciones de elemento de **LXXXXX** y **LYYYY**.

SPICE no permite nodos “flotantes”; es decir, debe haber siempre una trayectoria dc entre cada par de nodos, de forma que el voltaje de cada nodo en referencia al nodo de referencia (nodo 0) está bien definido. Si deseamos utilizar SPICE para analizar un circuito que tiene un transformador que divide el circuito en dos subcircuitos eléctricamente aislados, debemos realizar ciertos pasos para evitar que SPICE se queje. Puede introducirse un cable que cierre el circuito entre dos inductores, sin afectar las corrientes o voltajes de los elementos. Si hay una conexión entre subcircuitos que contengan los dos inductores, pero es una conexión puramente capacitiva, una cuya impedancia dc sea infinita, debe introducirse en una resistencia muy grande en la conexión que se suma, para evitar un significativo flujo de corriente en esta conexión simulada.

Ejemplo 15.21

Determine la potencia en estado estable ac suministrada a la resistencia de carga $5\text{-}\Omega$ si el transformador tiene un acoplamiento unitario, y determíñese el coeficiente de acoplamiento en el que la potencia se reduce a 10% de este valor. A continuación se muestra el archivo de entrada SPICE para la evaluación de acoplamiento unitario. Nótese que los extremos inferiores de los inductores se conectaron entre sí para sumar una trayectoria dc entre los subcircuitos primario y secundario, y que el coeficiente de acoplamiento se fijó en 0.99999 para cumplir con el rango permitido $0 < k < 1$.

```

Ejemplo 15.21
*
V1      1      0      AC      156
RS1     2      1
LPRI    2      0      1
LSEC    0      3      10
K       LPRI    LSEC    0.99999
C1      3      0      500
RL      3      0      5
.AC      LIN     1      60      60
.PRINT AC     VM(3)
.END

```

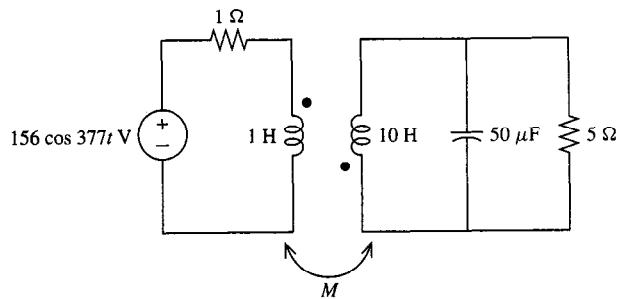


FIGURA 15.40 Circuito para el ejemplo 15.21.

La salida de SPICE resultante indica que $VM(3) = 164.1$ V, de forma que la potencia suministrada a la carga $5\text{-}\Omega$ es $164.1^2/(10) = 2.693$ kW. El voltaje de carga en el que se reduce la potencia en 90% es $VM(3)^2/10 = (0.10)(2693)$ o $VM(3) = 51.9$ V. Volviendo a hacer correr el archivo de entrada con el valor de k disminuido por el proceso de prueba y error, obtenemos que esta condición se satisface para $k = 0.994$ (hasta tres cifras significativas). Nótese que se requiere únicamente de una pequeña corriente de fuga para reducir en gran medida la eficiencia de un circuito de transmisión de potencia con transformador acoplado.

Puede utilizarse SPICE para determinar descripciones de dos puertos, pero sólo en frecuencias específicas. Sustituyendo s por $j\omega$ en cualquiera de los dos puertos, resulta en ecuaciones en dominio fasorial, que pueden evaluarse utilizando SPICE en el modo .AC.

Ejemplo 15.22

Verifiquemos los resultados del ejemplo 15.20, en donde los parámetros-z para el circuito de la figura 15.37 fueron

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4s(s+4)} \begin{bmatrix} s^2 + 20s + 32 & s^2 + 4s + 32 \\ s^2 + 4s + 32 & s^2 + 20s + 32 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo s por $j\omega$, los parámetros-z en la frecuencia angular ω son

$$\begin{bmatrix} z_{11}(j\omega) & z_{12}(j\omega) \\ z_{21}(j\omega) & z_{22}(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{4j\omega(j\omega+4)} \begin{bmatrix} (32 - \omega^2) + 20j\omega & (32\omega^2) + 4j\omega \\ (32 - \omega^2 + 4j\omega) & (32 - \omega^2) + 20j\omega \end{bmatrix}$$

Utilizaremos SPICE para verificar el valor de los parámetros-z en las frecuencias de 1 y 10 Hz. Se requieren de dos experimentos para obtener los parámetros-z para un circuito de dos puertos. A continuación se muestra el archivo de entrada SPICE para el experimento 1, en donde la fuente de corriente unitaria se sitúa en el puerto de entrada, y el puerto de salida queda en circuito abierto. Nótese que se han puesto resistencias $100\text{-M}\Omega$ en paralelo con los capacitores para eliminar nodos flotantes. Puesto que la impedancia de cada capacitor es menor en muchos órdenes de magnitud, el error introducido es despreciable.

```

Ejemplo 15.22
*
I1      1      0      AC      1
C1      1      2      0.25
R1      1      2 100MEG
R1      2      3      0.50
C2      2      5      0.25
R2      2      5 100MEG
CE      3      0      1
RD3      3      0 100MEG
R2      1      4      1
R3      4      5      1
C4      4      3      0.50
.AC      LIN      2      1      10
.PRINT AC    VR(1)    VI(1)    VR(5)    VI(5)
.END

```

A continuación se muestra una porción de la salida:

FREQ	VR(1)	VI(1)	VR(5)	VI(5)
1.00E+00	-3.94E-01	5.44E-01	-1.05E-01	9.18E-02
1.00E+01	-2.48E-01	6.35E-02	-2.48E-01	1.28E-04

Estos valores corresponden a la primera columna de la matriz-z para $\omega = 2\pi$ y $\omega = 20\pi$. Para el experimento 2, se modifica el archivo de entrada editando la declaración de fuente I1 al nodo de referencia 5 en lugar del nodo 1, moviendo de este modo la fuente unitaria al puerto de salida, y el circuito abierto al puerto de entrada. La correspondiente salida de SPICE es la segunda columna de la matriz-z para estas dos frecuencias.

FREQ	VR(1)	VI(1)	VR(5)	VI(5)
1.00E+00	-1.05E-01	9.18E-02	-3.94E-01	5.44E-01
1.00E+01	-2.48E-01	1.28E-04	-2.52E-01	6.35E-02

Ciertamente, coinciden estos valores. Por ejemplo, en $f = 1$ Hz o $\omega = 2\pi$ rad/s,

$$z_{11}(j2\pi) = \frac{(32 - \omega^2) + 20j\omega}{4j\omega(j\omega + 4)} \Big|_{\omega=2\pi} = -0.394 + j0.0545$$

lo que concuerda con los resultados del primer experimento para V(1). En $f = 10$ Hz o $\omega = 20\pi$ rad/s,

$$z_{22}(j20\pi) = \frac{(32 - \omega^2) + 20j\omega}{4j\omega(j\omega + 4)} \Big|_{\omega=20\pi} = -0.252 + j0.0635$$

lo que concuerda con el valor del segundo experimento para V(5).

EJERCICIOS

15.9.1. Verifíquese el cálculo de impedancia para el ejemplo 15.6 para $\omega = 1 \text{ rad/s}$ y $\omega = 2 \text{ rad/s}$ utilizando SPICE.

Respuesta Utilizando una fuente 1-A en el nodo de entrada (nodo 1).

FREQ	VM(1)	VP(1)
1.592E-01	3.083E-01	4.409E+01
3.183E-01	3.959E-01	3.217E+01

que concuerda con (15.38b) para $s = j\omega = j1$ y $j2$

15.9.2. Verifíquese el cálculo de respuesta transitoria del ejemplo 15.4 utilizando SPICE.

Respuesta La salida graficada del archivo de entrada SPICE que se muestra concuerda estrechamente con el resultado $i_2(t)$, $t > 0$, del ejemplo

Ejemplo 15.9.2					
*					
V1	1	0	DC	2	
R1	1	2	4		IC=0
L1	0	2	4		
L2	0	3	4		IC=-0.5
KL	1	L2	0.5		
V2	4	3	DC	-1	
L3	4	5	1		IC=-0.5
R2	5	0	2		
.TRAN	.1	10	UIC		
.PRINT	TRAN	I(V2)			
END					

15.9.3. Verifíquese el voltaje calculado en el ejercicio 15.8.1 utilizando SPICE. Utilícese el enunciado de control .SUBCKT para definir el circuito de dos puertos, y utilícese cuatro llamadas de subcircuitos dentro del archivo de entrada.

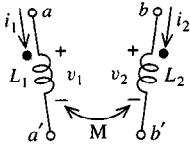
RESUMEN

Los elementos pueden interactuar eléctricamente, a través de los cables que los conectan, o magnéticamente, cuando el campo magnético creado por uno de los elementos influye sobre el otro. La inductancia mutua hace que la corriente y voltaje de terminal de un inductor dependa de los de otro mediante su interacción magnética. De forma más general, la corriente y voltaje de cualquier par de cables, o puerto de entrada, afecta a los de un segundo par, o puerto de salida, con los que están eléctrica o magnéticamente conectados. Las representaciones de circuitos de dos puertos son conjuntos de ecuaciones que muestran las relaciones de entrada-salida en los dos puertos.

- El voltaje inducido en una bobina acoplada consiste de un término proporcional a la derivada de su propia corriente, más los términos proporcionales a las derivadas de las corrientes que fluyen a través de cada uno de sus elementos de bobina acoplada. Los coeficientes de estos términos de acoplamiento, se conocen como inductancia mutua.
- El coeficiente de acoplamiento entre dos bobinas acopladas es una inductancia mutua dividida por la media geométrica de sus inductancias.
- Un transformador es un dispositivo para cambiar los niveles de voltaje, corriente o impedancia en un circuito. Consiste en un par de bobinas acopladas con un núcleo común.
- Un transformador ideal eleva el voltaje mediante la proporción de espiras, reduce la corriente por el inverso negativo de la proporción de espiras.
- Un transformador ideal no disipa potencia eléctrica.
- Un circuito con dos pares de terminales accesibles, cada una satisfaciendo la condición de puerto, se conoce como circuito de dos puertos. Estos circuitos son descritos por pares de ecuaciones que involucran a las cuatro variables de puerto.
- Hay seis conjuntos distintos de parámetros de dos puertos: impedancia o parámetro-Z, admittance o parámetro-Y, híbrido, híbrido inverso, transmisión y transmisión inversa. Son cada una resultado de una elección específica de dos de las cuatro variables de puerto para actuar como variables independientes en las ecuaciones de dos puertos.
- Las matrices de transmisión de circuitos de dos puertos conectadas en cascada se multiplican, las matrices de admitancia de los circuitos de dos puertos conectados en dos puertos se suman, y las matrices de impedancia de circuito de dos puertos se suman.
- Poniendo un transformador ideal en cualquiera de los puertos de un circuito de dos puertos, garantiza que se satisface la condición de puerto.

PROBLEMAS

15.1. Suponga que $L_1 = L_2 = 0.1 \text{ H}$, $M = 0.05 \text{ H}$, $N_1 = N_2 = 1000$ espiras. Obtenga las corrientes de fuga de ϕ_{L1} ϕ_{L2} y los flujos totales ϕ_1 y ϕ_2 que influyendo sobre los inductores si $i_1 = 3t + 2$ A, $i_2 = 3 \text{ A}$.

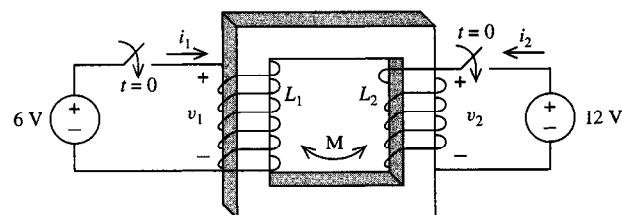


PROBLEMA P15.1

15.2. Un par de bobinas acopladas tienen auto-inductancias $L_1 = 1 \text{ H}$, $L_2 = 5 \text{ H}$. Si $i_1(t) = 5 \cos 2t \text{ A}$, $i_2(t) = 2 \cos 2t \text{ A}$, ¿cuál es la amplitud A máxima de la unión de flujo sinusoidal $\lambda_1(t) = A \cos(2t + \phi)$ que pasa por la bobina 1? ¿La amplitud mínima A?

15.3. Cuando a' y b' se conectan en circuito cerrado en la figura del problema 15.1 la inductancia de a entre b es 10 H , y cuando a' se conecta en circuito cerrado con b , la inductancia entre a y b' es 7 H . Obtenga la inductancia mutua M.

15.4. $L_1 = L_2 = 2 \text{ H}$, $M = 1 \text{ H}$ y di_1/dt positiva resulta en una v_2 negativa. Obtenga i_1 e i_2 para $t > 0$.



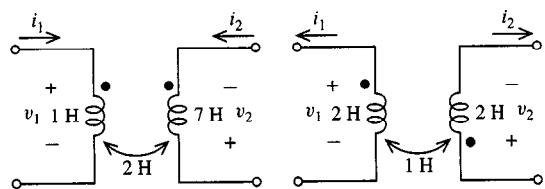
PROBLEMA P15.4

15.5. Si $\omega(0)=0$, determíñese la potencia $p(t)$ y energía $\omega(t)$ para las bobinas acopladas del problema 15.1 anterior, con las corrientes que se indican.

15.6. Suponga que $L_1 = 1 \text{ H}$, $L_2 = 5 \text{ H}$, $M = 2 \text{ H}$ en la figura del problema 15.1. Obtenga las potencias instantáneas pico en watts, que se suministra a los inductores si $i_1(t) = 3 \cos t \text{ A}$, $i_2 = \sin(t + 45^\circ) \text{ A}$. ¿Esta potencia se disipa en forma de calor? Explique.

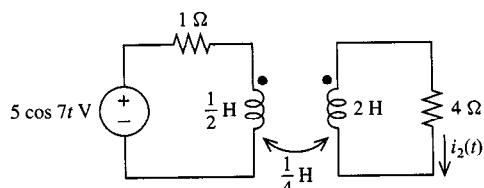
15.7. Cuando se hacen dos bobinas idénticas para transmitir simultáneamente una corriente dc de 1 A, cada una tiene una corriente de unión $i_1 = i_2 = 10$ Wb. Cuando se cubre una de la otra de forma que la corriente de una no influye sobre la otra, la corriente de unión se eleva a 12 Wb. Obtenga M en ambos casos.

15.8. Obtenga las leyes $i-v$ en los dominios s y de tiempo. En ambos casos $i_1(0-) = 1$ A, $i_2(0-) = 0$.



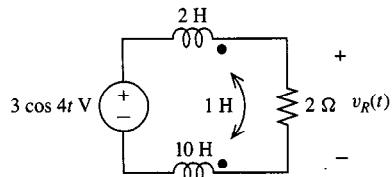
PROBLEMA P15.8

15.9. Obtenga $i_2(t)$ en el estado estable ac.



PROBLEMA P15.9

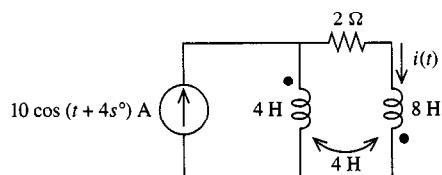
15.10. Obtenga el valor en estado estable ac de $v_R(t)$.



PROBLEMA P15.10

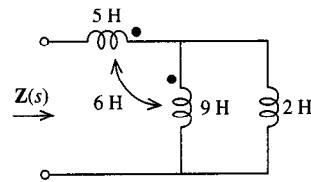
15.11. Obtenga $v_R(t)$ en el circuito del problema 15.10 para $t > 0$ si $v_R(0-) = 0$.

15.12. Obtenga $i(t)$ en el estado estable ac.



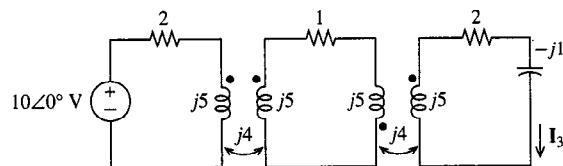
PROBLEMA P15.12

15.13. Determine $Z(s)$, la impedancia orientada hacia este circuito.



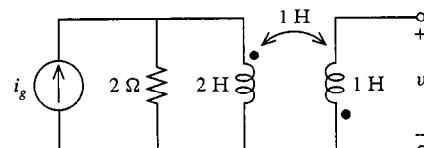
PROBLEMA P15.13

15.14. Obtenga \mathbf{I}_1 y \mathbf{I}_3 utilizando análisis de malla.



PROBLEMA P15.14

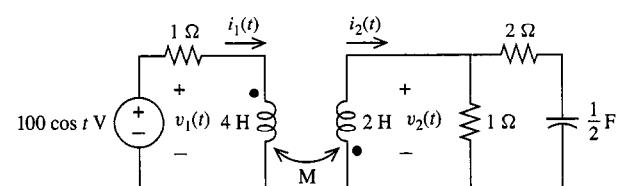
15.15. Obtenga v para $t > 0$ si $i_g = 2 u(t)$ A. Utilice análisis de malla y suponga que no hay energía almacenada inicial en $t = 0$.



PROBLEMA P15.15

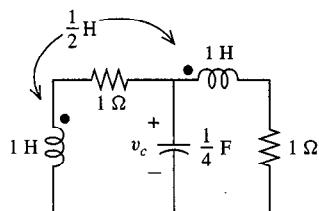
15.16. Repita 15.15 utilizando análisis nodal.

15.17. Obtenga la corriente ac en estado estable $i_2(t)$ utilizando análisis de malla.



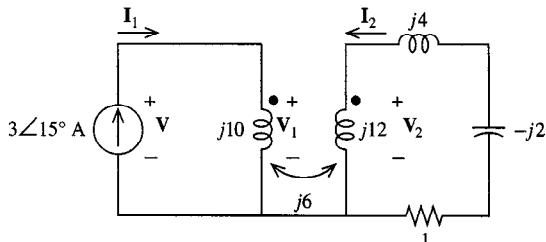
PROBLEMA P15.17

15.18. Obtenga $v_c(t)$, $t > 0$ si $v_c(0-) = 12 \text{ V}$.



PROBLEMA P15.18

15.19. Obtenga el voltaje V a través de la fuente.



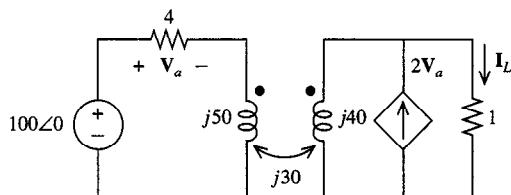
PROBLEMA P15.19

15.20. Determine la impedancia reflejada Z_R , las proporciones de corriente y voltaje I_2/I_1 , V_2/V_1 para el circuito del problema 15.17.

15.21. Determine la impedancia reflejada Z_R , las proporciones de corriente y voltaje I_2/I_1 , V_2/V_1 para el circuito del problema 15.19.

15.22. Resuelva 15.17 utilizando el modelo de bobina no acoplada de la figura 15.11 y análisis nodal.

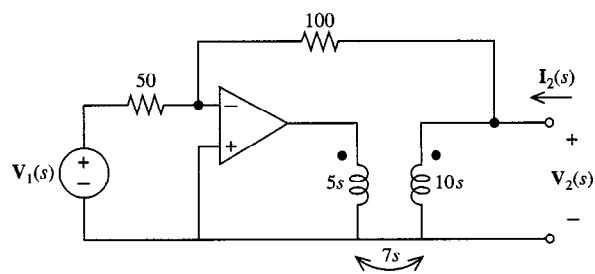
15.23. Obtenga I_L .



PROBLEMA P15.23

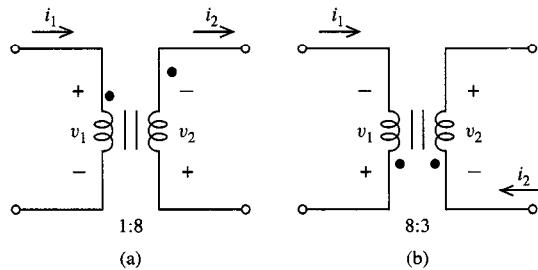
15.24. Obtenga la función de transferencia

$$H(s) = V_2(s)/V_1(s)|_{I_2(s)=0}$$



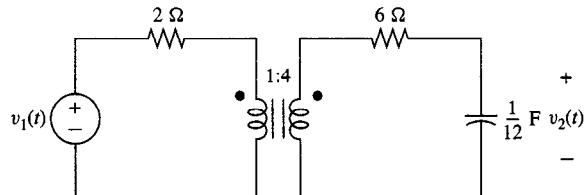
PROBLEMA P15.24

15.25. Escriba las leyes $i - v$ en los dominios de tiempo y s . No suponga que las corrientes iniciales son cero.



PROBLEMA P15.25

15.26. Obtenga el valor en estado estable ac de $v_2(t)$ para $v_1(t) = 50 \sin 3t \text{ V}$.

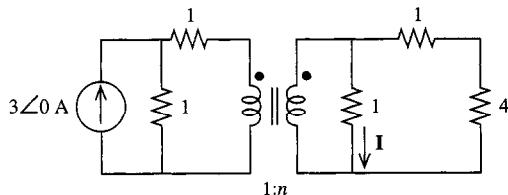


PROBLEMA P15.26

15.27. Repita 15.26 para $v_1(t) = 50e^{-t} \sin 3t \text{ V}$.

15.28. Obtenga $v_2(t)$ en el problema 15.26 si todas las condiciones iniciales en el instante $t = 0$ son cero y $v_1(t) = u(t)$.

15.29. Si $I = 2\angle 0^\circ \text{ A}$, ¿cuál es la proporción de espiras en n ?

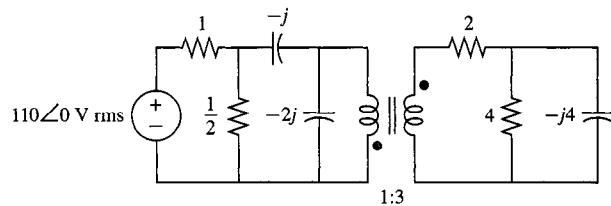


PROBLEMA P15.29

15.30. Obtenga I_1 en el problema 15.14 reflejando dos veces las impedancias en los primarios.

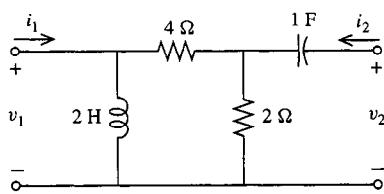
15.31. Obtenga I_3 en el problema 15.14 reflejando dos veces las fuentes en los secundarios.

15.32. Obtenga la potencia promedio real suministrada por la fuente.



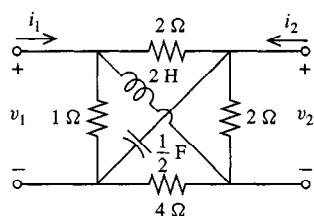
PROBLEMA P15.32

15.33. Obtenga los parámetros-z para este circuito de dos puertos. Repita para los parámetros-n (no use la tabla 15.2).



PROBLEMA P15.33

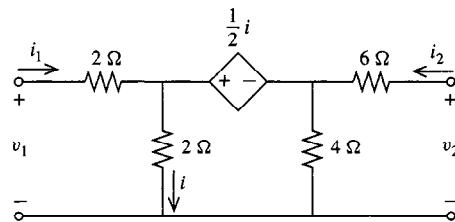
15.34. Obtenga los parámetros-y para este circuito. Repita para los parámetros de transmisión (no use la tabla 15.2).



PROBLEMA P15.34

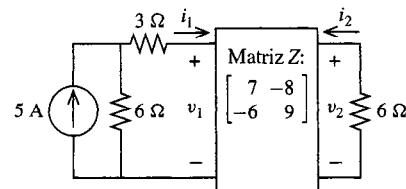
15.35. Obtenga los parámetros de transmisión inversa e híbrido inversos para el circuito del problema 15.33 (no use la tabla 15.2).

15.36. Obtenga los parámetros-z realizando los dos experimentos descritos en la sección 15.6. Repita para los parámetros-y. Verifique que las matrices son inversa una de la otra.



PROBLEMA P15.36

15.37. Obtenga las variables de puerto i_1, i_2, v_1, v_2 .

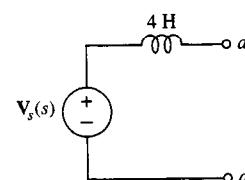


PROBLEMA P15.37

15.38. Un circuito de una matriz de transmisión

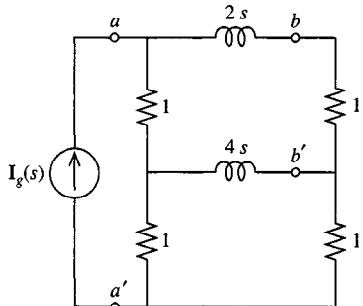
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{I}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2(s) \\ -\mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix}$$

Obtenga las variables de cuatro puertos, si ambos puertos están terminados con copias de circuito de un puerto que se muestra, alineado de forma que la terminal a está conectada a los extremos positivos de ambos puertos.



PROBLEMA P15.38

- 15.39.** Obtenga los parámetros híbridos de este circuito de dos puertos con $a-a'$ como el puerto de entrada y $b-b'$ como puerto de salida. Luego obtenga $v_{aa'} = v_1$, $v_{bb'} = v_2$ en términos de $I_g(s)$.

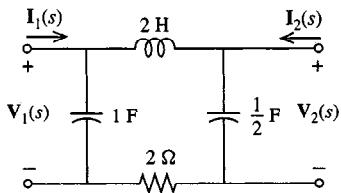


PROBLEMA P15.39

- 15.40.** Obtenga las seis descripciones de parámetros de dos puertos para el circuito del problema 15.33, calculando las descripciones de parámetro g de los experimentos y el resto de la tabla 15.2.

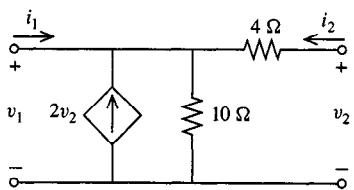
- 15.41.** Obtenga las seis descripciones de parámetros de circuito de dos puertos del problema 15.34, calculando los parámetros híbridos de dos experimentos, y el resto de la tabla 15.2.

- 15.42.** Obtenga los parámetros-z, y obtenga la impedancia orientada hacia el puerto de entrada, con el puerto de salida en circuito abierto $V_1/I_1|_{I_2=0}$ y la impedancia orientada hacia el punto de salida con la entrada en circuito abierto $V_2/I_2|_{I_1=0}$.



PROBLEMA P15.42

- 15.43.** Determine los parámetros de transmisión, y la función de transferencia $I_1/I_2|_{V_1=0}$



PROBLEMA P15.43

- 15.44.** Determine la función de transferencia de ganancia de voltaje en el circuito abierto de un circuito de dos puertos, definido como $H(s) = V_2(s)/V_1(s)|_{I_1(s)=0}$, en términos de sus parámetros-z $z_{11}(s)$, $z_{12}(s)$, $z_{21}(s)$, $z_{22}(s)$. Repita para los parámetros híbridos.

- 15.45.** Obtenga la transconductancia

$$H(s) = I_2(s)/V_1(s)|_{I_1(s)=0}$$

para un circuito de dos puertos general, en términos de sus parámetros híbridos inversos, y el término de sus parámetros de transmisión.

- 15.46.** Obtenga los parámetros híbridos del circuito de dos puertos que consiste de dos copias del circuito del problema 15.33 en paralelo.

- 15.47.** Obtenga los parámetros-y del circuito de dos puertos que consiste de dos copias del circuito del problema 15.33 en cascada.

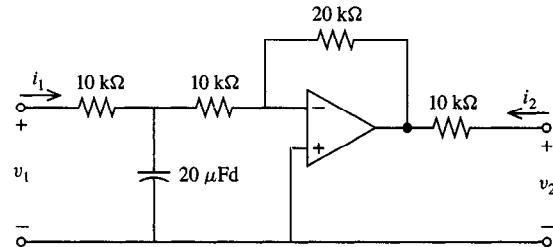
- 15.48.** Obtenga los parámetros-t del circuito de dos puertos que consiste de dos copias del circuito del problema 15.33 en serie.

- 15.49.** Obtenga los parámetros-z de tres copias del circuito del problema 15.43 en cascada.

- 15.50.** Obtenga los parámetro-g de tres copias, del circuito del problema 15.43 en paralelo.

- 15.51.** Obtenga los parámetros de transmisión inversa de tres copias del circuito del problema 15.43 en serie.

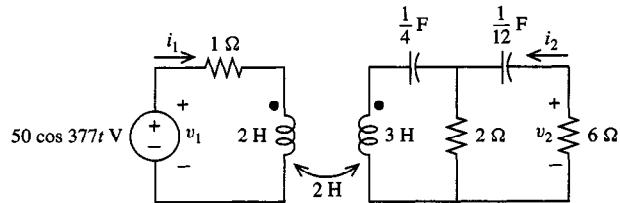
- 15.52.** Obtenga la descripción en parámetro-y.



PROBLEMA P15.52

Problemas usando SPICE

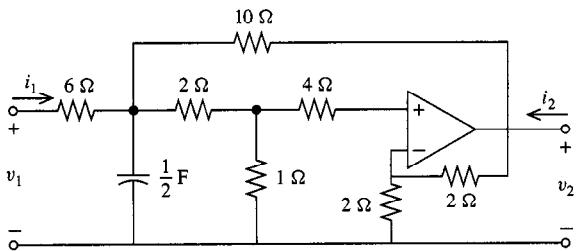
- 15.53.** Utilice SPICE para determinar los valores en estado estable ac para las cuatro variables de puerto.



PROBLEMA P15.53

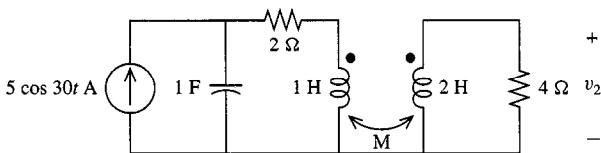
- 15.54.** Repita el problema 15.53 si las bobinas acopladas son reemplazadas por un transformador ideal con proporción de espiras $n = 20$.

15.55. Obtenga los parámetros-z $z_{11}(j\omega)$, $z_{12}(j\omega)$, $z_{21}(j\omega)$, y $z_{22}(j\omega)$ en $\omega = 1$ y $\omega = 100$ rad/s. Utilice el modelo de amplificador de voltaje ideal para el amp op con ganancia de trayectoria cerrada abierta 10^5 .



PROBLEMA P15.55

15.56. Obtenga el valor para M en el que la amplitud en estado estable ac de v_2 se reduce a $\frac{1}{10}$ de su valor, cuando sus bobinas están unitariamente acopladas.

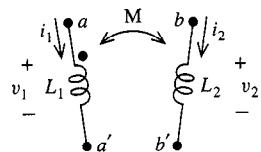


PROBLEMA P15.56

15.57. Determine los parámetros-y $y_{11}(j\omega)$, $y_{12}(j\omega)$, $y_{21}(j\omega)$, $y_{22}(j\omega)$ en $\omega = 377$ rad/s si se pone en cascada 10 copias del circuito del problema 15.34. Resuelva utilizando SPICE y subcircuitos .SUBCKT.

Problemas más complejos

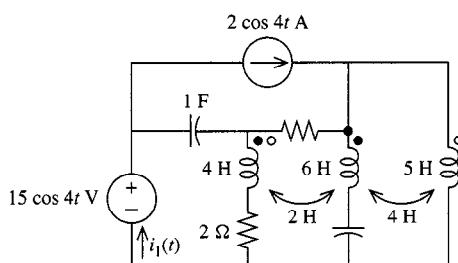
15.58. Cuando b se conecta en circuito cerrado b' , el otro inductor satisface $v_1 = 4di_1/dt$. Cuando a se conecta a circuito cerrado a' , el otro inductor satisface $v_2 = 2di_2/dt$. Si $L_1 = 5$ H, obtenga M e indique si el punto debe estar en b o b' .



PROBLEMA P15.58

15.59. Demuestre que un transformador real, con $0 \leq k \leq 1$, satisface la condición de pasividad $\omega(t) \geq 0$ para toda t .

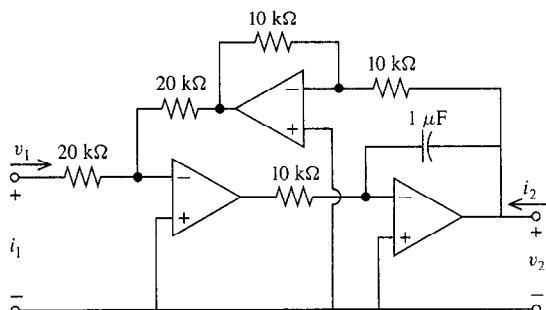
15.60. Obtenga $i_1(t)$ en estado estable ac. Las bobinas 4 H y 6 H están acopladas con $M_a = 2$ H (puntos negros). Las bobinas 6 H y 5 H también están acopladas con $M_b = 4$ H (puntos blancos). Las bobinas 4 H y 5 H no están acopladas.



PROBLEMA P15.60

15.61. Dibuje un circuito para el que los parámetros híbridos no existan, pero que existan los demás parámetros. Calcule los valores de las cinco descripciones restantes de circuitos de dos puertos para su circuito.

15.62. Obtenga la matriz-h para el circuito de dos puertos.



PROBLEMA P15.62

16

Series y transformadas de Fourier



Jean Baptiste Joseph Fourier
1768-1830

Un gran poema matemático.

Lord Kelvin, acerca de las series de Fourier

En 1822 se publicó una obra pionera en su campo que ejercería gran influencia sobre la teoría matemática de conducción del calor. Fue obra del gran matemático, egiptólogo y administrador francés Jean Baptiste Joseph Fourier. Obra maestra no sólo por el nuevo campo de conducción de calor que exploró, sino también por las series infinitas de sinusoides que desarrolló; estas últimas se hicieron famosas como series de Fourier. Con ayuda de las series de Fourier, ya no es necesario restringir los métodos fasoriales a circuitos cuyas entradas sean sinusoides.

Fourier nació en Auxerre, Francia, hijo de un sastre. Asistió a una escuela militarizada local dirigida por monjes Benedictinos, y mostró tal talento en matemáticas, que llegó a ser maestro de matemáticas en esa misma escuela. Al igual que la mayoría de los franceses de su edad, fue arrastrado a la política de la Revolución Francesa y sus consecuencias, y más de una vez arriesgó la vida. Fue uno de los primeros maestros de la recién formada Escuela Politécnica en la que fue profesor de análisis matemático. A los 30 años, Fourier fue nombrado asesor científico de Napoleón en una expedición a Egipto, y durante cuatro años fue secretario del Institute Egypte, cuya obra marcó a la egiptología como una disciplina particular. Fue prefecto del departamento de Isere desde 1801 a 1814, donde escribió su famoso tratado sobre la conducción del calor. Terminó un libro sobre ecuaciones algebraicas justo antes de su muerte en 1830.

Contenido del capítulo

- 16.1 Funciones periódicas
- 16.2 Series trigonométricas de Fourier
- 16.3 Series exponenciales de Fourier
- 16.4 Respuesta a entradas periódicas
- 16.5 Espectros discretos y gráficas de fase
- 16.6 La transformada de Fourier
- 16.7 Propiedades de la transformada de Fourier
- 16.8 SPICE y el análisis de Fourier
- Resumen
- Problemas



Casi cualquier función matemática de interés práctico puede expresarse como superposición de sinusoides. Esta observación, que nos legó el gran matemático y físico francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), tiene importantes aplicaciones para el análisis de circuito. Puesto que los circuitos lineales satisfacen el principio de superposición, significa que podemos escribir la respuesta a cualquier entrada en forma de sinusoides si conocemos la respuesta. La respuesta sinusoidal es la respuesta de frecuencia, que se presentó en el capítulo 14. A la clara luz de la observación de Fourier, la idea de la respuesta de frecuencia cobra un significado expandido. Es una herramienta para predecir la respuesta de un circuito lineal a cualquier clase de entrada, y no sólo a entradas sinusoidales. La capacidad de expresar una señal arbitraria como superposición de sinusoides, también implica que los fasores son una herramienta mucho más generalizada de lo que habíamos sospechado hasta este punto. Sobre la base de una expansión de Fourier de una entrada arbitraria en sinusoides, puede aplicarse el análisis fasorial a cada sinusoide componente del circuito. Luego, puede utilizarse la superposición para determinar la respuesta general. Por consiguiente, pueden utilizarse los fasores en circuitos lineales de forma sumamente general para determinar las salidas impulsadas por entradas no sinusoidales al igual que las sinusoidales.

La forma que cobra la superposición en componentes sinusoidales depende de si la señal es periódica. Para señales periódicas, obtendremos una suma directa de sinusoides conocida como *serie de Fourier*. De otro modo, la superposición cobra la forma de una integral, y la representación resultante se conoce como *transformada de Fourier*. Primero discutimos algunas de las propiedades básicas de las señales periódicas, y luego el proceso mediante el que pueden obtenerse las series de Fourier para funciones periódicas. Se presentan dos formas de las series de Fourier, las formas trigonométrica y exponencial compleja, que están estrechamente relacionadas mediante la identidad de Euler. Utilizamos este resultado y el principio de superposición para obtener la respuesta de un circuito lineal a cualquier señal periódica. Luego nos concentraremos en las señales no periódicas, definiendo la transformada de Fourier y mostrando su relación a señales no sinusoidales y a la transformada de Laplace introducida en el capítulo 12. Se desarrollarán algunas propiedades útiles de la transformada de Fourier, y el presente capítulo concluye con una breve discusión de SPICE y el dominio de Fourier.

Como se hizo notar primeramente en nuestro estudio de las propiedades de los sinusoides en el capítulo 8, una función $f(t)$ es *periódica* si existe una constante real $T > 0$ tal que

$$f(t + T) = f(t), \quad \text{para toda } -\infty < t < +\infty \quad (16.1)$$

La T mínima que satisface (16.1) se conoce como *periodo* de $f(t)$, y se mide en unidades de tiempo. La ecuación (16.1) indica que

$$f(t + nT) = f(t), \quad \text{para toda } -\infty < t < +\infty, \text{ todos los enteros } n \quad (16.2)$$

El periodo T es la cantidad mínima con la que podemos desplazar la gráfica de $f(t)$ y hacer que coincida con su forma no desplazada, en tanto que (16.2) identifica otros valores de desplazamiento que tienen el mismo efecto: $2T, 3T, -T$, y así sucesivamente.

Las funciones periódicas quedan completamente especificadas por sus valores sobre cualquier periodo, como puede verse de (16.2). Sea

$$f_T(t) = f(t)[u(t - t_0) - u(t - t_0 - T)] \quad (16.3)$$

una función que puede ser no nula sobre un intervalo finito de duración T que se inicia en t_0 . Luego, sumando copias desplazadas de $f_T(t)$, definimos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_T(t + nT) \quad (16.4)$$

como la *extensión periódica* de $f_T(t)$. $f_T(t)$ es, a su vez, designada *generador* de su extensión periódica $f(t)$. t_0 y T son el *tiempo inicial* y *duración* del generador $f_T(t)$. $f(t)$ es claramente periódica, puesto que por (16.4)

$$f(t + mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_T(t + (n + m)T)$$

y con $i = n + m$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_T(t + iT) = f(t)$$

En tanto que esto verifica que $f(t)$ es periódica, nótese que la duración T del generador $f_T(t)$ no siempre coincide con el periodo de $f(t)$, puesto que puede haber un número menor que satisfaga (16.1) para $f(t)$. Por ejemplo, si $f(t)$ es una función periódica de periodo T y consideramos cualquier $f_T(t)$ en (16.3) con duración $2T$, entonces su extensión periódica $f(t)$ simplemente reproduce a $f(t)$ misma. El periodo de $f(t)$ sigue siendo T , no la duración $2T$ de su generador $f_T(t)$. En el ejemplo 16.1 se ilustran estas ideas.

Ejemplo 16.1

Considérese la función $f(t) = e^{-|t|}$. Claramente, no se trata de una función periódica. Las extensiones periódicas de dos funciones generadoras de duración y tiempo inicial distintos, ambas tomadas a partir de $f(t)$, aparecen en la figura 16.1. Para ayudar a la visualización, un periodo de la extensión periódica se ha señalado con puntos.

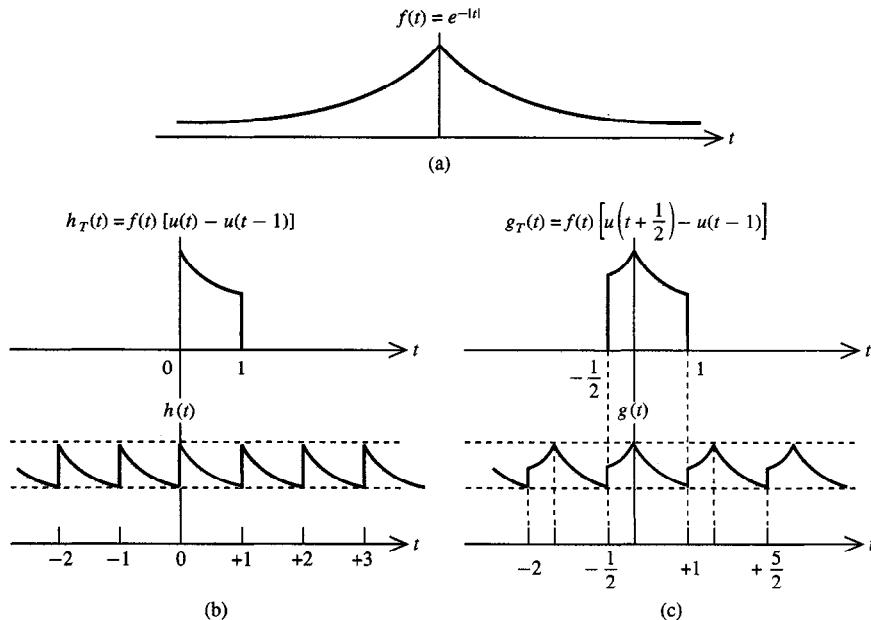


FIGURA 16.1 (a) $f(t)$; (b) un generador $h_T(t)$ y su extensión periódica; (c) un generador distinto $g_T(t)$ y su extensión periódica.

El desplazamiento mínimo de la función $h(t)$ en la figura 16.1(b) para el que la gráfica coincide consigo misma es claramente $T = 1$, y la de la figura 16.1(c) es $T = 3/2$. Considérese a continuación un generador $h'_T(t)$ de duración 3 tomada de la función $h(t)$ de la figura 16.1(b) que se inicia en $t = 0$:

$$h'_T(t) = h(t)[u(t) - u(t-3)]$$

Este generador contiene exactamente tres períodos de $h(t)$. Desplazando por 3 y sumándola como en (16.4), vemos que la extensión periódica $h'(t)$ de $h'_T(t)$ es simplemente una réplica de $h(t)$ cada tres períodos de tiempo. De forma que $h'(t) = h(t)$, y el periodo de esta función es $T = 1$, como se hizo notar anteriormente. Ésta es menor que la duración 3 del generador $h'_T(t)$.

Las funciones periódicas pueden poseer *propiedades de simetría* que facilitan su análisis. Si una función $f(-t) = f(t)$ se designa función *par*, y si una función cumple $f(t) = -f(-t)$ se conoce como función *ímpar*. Las funciones periódicas sólo necesitan probarse para saber si son pares o impares, sobre el periodo único, simétricamente situado $-T/2 \leq t < +T/2$. Dada cualquier $t' = t + nT$ con $-T/2 \leq t < +T/2$, entonces por periodicidad $f(t') = f(t)$, y si $f(t) = f(-t)$, entonces $f(-t') = f(-t - nT) = f(-t) = f(t')$ y por consiguiente la función es par. El argumento para $f(t)$ periódica e ímpar es similar.

La función coseno $A \cos \omega t$ es par puesto que $A \cos \omega(-t) = A \cos \omega t$, y la seno es ímpar, puesto que $A \sin \omega(-t) = -A \sin \omega t$. La función exponencial compleja $e^{j\omega t}$ se compone de la suma de una parte real par, $\cos \omega t$, y una parte imaginaria ímpar, $\sin \omega t$.

Si $f_e(t)$ y $g_e(t)$ son ambas funciones pares, entonces la combinación lineal general de ambas

$$h(t) = K_1 f_e(t) + K_2 g_e(t)$$

también es par, puesto que

$$\begin{aligned} h(-t) &= K_1 f_e(-t) + K_2 g_e(-t) \\ &= K_1 f_e(t) + K_2 g_e(t) = h(t) \end{aligned}$$

en tanto que por un razonamiento similar, cualquier combinación lineal de funciones impares es también impar. Por consiguiente, *las sumas y diferencias de funciones pares son pares, y de funciones impares son impares*. Los productos de funciones pares e impares heredan propiedades simétricas en la misma forma en que lo heredan los productos de enteros pares e impares. Para $f_e(t)$ y $g_e(t)$ pares,

$$h(t) = f_e(t)g_e(t)$$

implica que

$$h(-t) = f_e(-t)g_e(-t) = f_e(t)g_e(t) = h(t)$$

de forma que $h(t)$ es par. El producto de una función par $f_e(t)$ y una impar $g_o(t)$ es

$$h(t) = f_e(t)g_o(t)$$

de forma que

$$h(-t) = f_e(-t)g_o(-t) = -f_e(t)g_o(t) = -h(t)$$

y el producto es impar. *El producto de funciones pares es par, el de funciones impares es también par y el producto de una función par con una par es impar.*

En tanto que existen funciones arbitrarias que no son pares ni impares, pueden ser reescritas como la suma de dos componentes, donde cada una posee la propiedad de simetría. *Toda $f(t)$ puede expresarse como la suma de una función par y una función impar.* Definamos

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad (16.5a)$$

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (16.5b)$$

como la *parte par* $f_e(t)$ y la *parte impar* $f_o(t)$ de $f(t)$. Claramente, $f_e(t) = f_e(-t)$ y $f_o(t) = -f_o(-t)$ como se requiere de las funciones pares e impares. Sumando (16.5a) y (16.5b)

$$f_e(t) + f_o(t) = f(t)$$

lo que verifica que su suma es $f(t)$.

Ejemplo 16.2

Obtengamos las partes par e impar de una función periódica $f(t) = 2 \cos(3t + 30^\circ)$. Debido al desplazamiento de fase de 30° , esta función no tiene simetría par ni impar. Por (16.5a) su parte par es

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[2 \cos(3t + 30^\circ) + 2 \cos(-3t + 30^\circ)]$$

$$= \cos(3t + 30^\circ) + \cos(3t - 30^\circ)$$

Utilizando las identidades para el coseno de suma y resta de ángulos,

$$= (\sqrt{\frac{3}{2}} \cos 3t - \frac{1}{2} \sin 3t) + (\sqrt{\frac{3}{2}} \cos 3t + \frac{1}{2} \sin 3t)$$

$$f_e(t) = \sqrt{3} \cos 3t \quad (16.6)$$

y, por (16.5b),

$$\begin{aligned} f_o(t) &= \frac{1}{2}[2\cos(3t + 30^\circ) - 2\cos(-3t + 30^\circ)] \\ &= (\sqrt{\frac{3}{2}}\cos 3t - \frac{1}{2}\sin 3t) - (\sqrt{\frac{3}{2}}\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t) \\ \text{o } f_o(t) &= -\sin 3t \end{aligned} \quad (16.7)$$

$f_e(t)$ y $f_o(t)$ son claramente par e impar, respectivamente. El resultado $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ con $f_e(t)$ en (16.6) y $f_o(t)$ en (16.7), de hecho proviene directamente de la identidad del coseno de suma de ángulos (estas identidades trigonométricas se tabulan en la primera guarda, al reverso de la portada). *La parte par de un sinusoides es una función coseno, y la parte impar es una función seno.*

Finalmente, recordamos ciertos promedios de funciones periódicas que se definieron por primera vez en el capítulo 7 en el contexto del estado estable ac. Las funciones de periodo T poseen *un valor medio o promedio*

$$f_{av} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (16.8)$$

y *un valor cuadrado medio*

$$|f|_{av}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt \quad (16.9)$$

donde las integrales varían sobre un periodo T , y t_0 es arbitraria. El valor cuadrado medio también se conoce como la *potencia promedio* en $f(t)$. La raíz cuadrada del valor cuadrado medio es el valor rms de $f(t)$:

$$f_{rms} = \sqrt{|f|_{av}^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt} \quad (16.10)$$

Por ejemplo, el valor promedio de la función $f(t)$ que aparece en la figura 16.1(b) es

$$f_{av} = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$$

y los valores cuadrado medio y rms son

$$\begin{aligned} |f|_{av}^2 &= \int_0^1 e^{-2t} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) \\ f_{rms} &= \sqrt{|f|_{av}^2} = \sqrt{\frac{e^2 - 1}{2e^2}} \end{aligned}$$

Podemos simplificar ligeramente el cálculo de estos promedios para funciones pares e impares. Para una función par $f_e(t)$,

$$f_{e av} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_e(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 f_e(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f_e(t) dt$$

Cambiando la variable de integración de t a $-x$ en la primera integral en la extrema derecha, tenemos

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_e(t) dt = \frac{-1}{T} \int_{T/2}^0 f_e(-x) dx + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f_e(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f_e(t) dt \quad (16.11)$$

Por consiguiente, el valor promedio de una función periódica par es su promedio sobre el semiperíodo $[0, T/2]$. Si $f(t)$ es impar, las dos integrales en la suma anterior se cancelan,

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_o(t) dt = \frac{-1}{T} \int_{T/2}^0 f_o(-x) dx + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f_o(t) dt = 0 \quad (16.12)$$

y el valor promedio de una función periódica impar es cero.

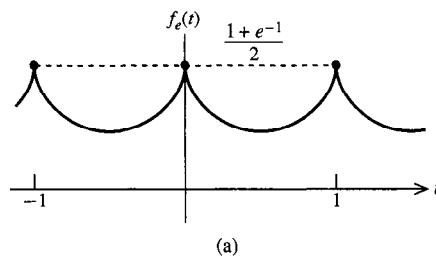
Cada uno de estos promedios serán de interés en la descomposición de funciones periódicas en sus componentes sinusoidales, que examinaremos a continuación.

EJERCICIOS

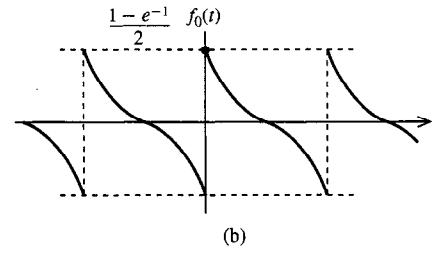
16.1.1. Demuestre que la combinación lineal general de funciones impares es impar, y que el producto de funciones impares es par.

16.1.2. Obtenga y dibuje las partes par e impar de la función $f(t)$ que aparece en la figura 16.1b.

Respuesta Para $0 < t < 1$, $f_e(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{t-1})$, $f_o(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{t-1})$



(a)



(b)

EJERCICIO 16.1.2

16.1.3. ¿Es $f(t) = \sin t + \cos \omega t$ periódica para $\omega = \frac{2}{3}$? De ser así, ¿cuál es el período de $f(t)$? Repita para $\omega = \sqrt{2}$.

Respuesta Sí; $T = 6\pi$; no

Nuestro trabajo anterior sobre el estado estable ac enfatizó el hecho de que muchas fuentes prácticas son sinusoidales. Sin embargo, esto no implica que todas las funciones periódicas de fuente de interés práctico sean sinusoidales. Por ejemplo, considérense las cuatro funciones periódicas que se muestran en la figura 16.2. La primera, onda diente de sierra, se utiliza para barrer un rayo de electrones a través de la fase de un tubo de rayos catódicos para generar una imagen. Su generador es una rampa con tiempo inicial $t_0 = 0$ y duración T . La segunda, onda seno rectificada, es común en receptores de comunicación y fuentes de potencia.

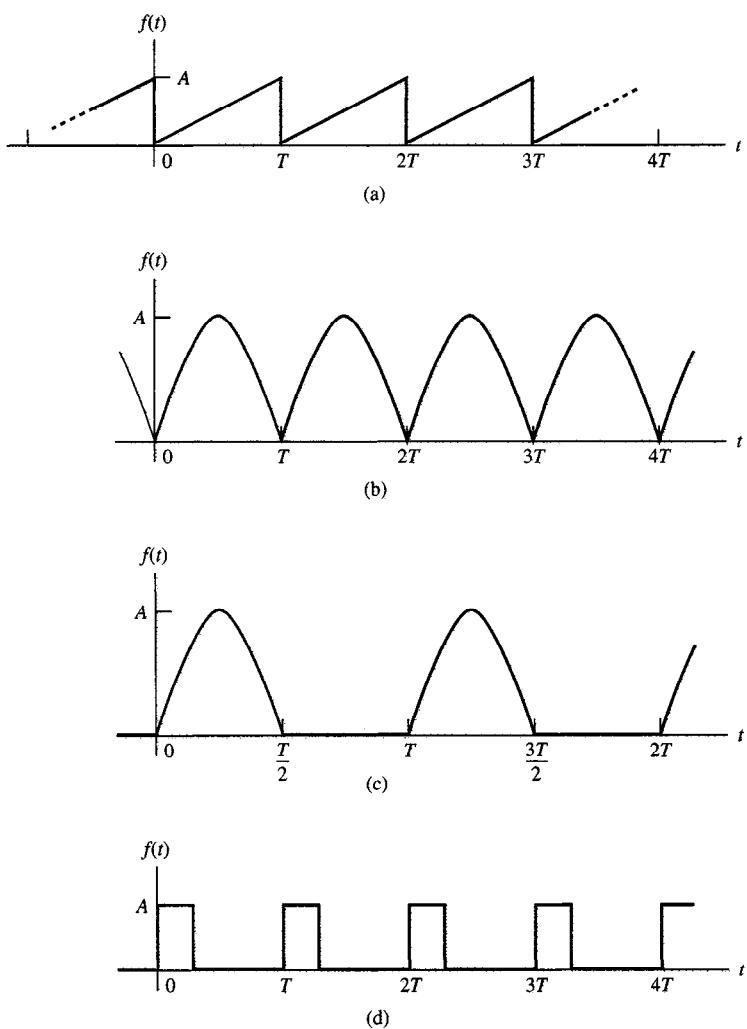


FIGURA 16.2 (a) Onda dientes de sierra; (b) onda sinusoidal completa y totalmente rectificada; (c) semionda sinusoidal rectificada; (d) onda cuadrada. Un período aparece señalado con puntos.

Su generador es un semiperíodo de una onda seno. La siguiente, onda seno semirectificada, también aparece en fuentes de poder, y la onda cuadrada en los circuitos de reloj de computadoras digitales. Ninguna de estas funciones es sinusoidal. Aquí consideraremos cómo funciones de esta clase pueden expresarse como suma de sinusoides.

Como lo demostró Fourier, si una función periódica $f(t)$ con período T satisface un conjunto de condiciones más bien generales, puede representarse por la serie infinita de sinusoides.

$$\begin{aligned}f(t) = & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots \\& + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots\end{aligned}$$

o, de forma más compacta

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (16.13)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Esta serie se conoce como *serie trigonométrica de Fourier*, o simplemente *serie de Fourier*, de $f(t)$. Las a_n y b_n se conocen como *coeficientes de Fourier* y dependen de $f(t)$.

Los coeficientes de Fourier pueden determinarse con facilidad. Comencemos obteniendo a_0 , que puede hacerse integrando ambos lados de (16.13) sobre un período completo; es decir,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) dt = & \int_0^T \frac{a_0}{2} dt \\& + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt\end{aligned}$$

Cada término de esta sumatoria es la integral de una sinusoidal sobre n de sus períodos $T_n = T/n$. Puesto que el valor promedio de una sinusoidal sobre un período es cero, la suma es cero y, por consiguiente, tenemos simplemente

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (16.14)$$

A continuación, multipliquemos (16.13) por $\cos m\omega_0 t$, donde m es un entero no negativo, e integremos. De esto resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt = & \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos m\omega_0 t dt \\& + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt \\& + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt \quad (16.15)\end{aligned}$$

Utilizando las identidades trigonométricas descritas en la tabla mencionada,

$$\cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (\cos(n+m)\omega_0 t + \cos(n-m)\omega_0 t)$$

$$\cos m\omega_0 t \operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(n+m)\omega_0 t + \operatorname{sen}(n-m)\omega_0 t)$$

Aplicando esto a (16.15), cada término de la suma es nuevamente cero, puesto que es la integral de un sinusoide sobre una integral de períodos, excepto el término donde $n = m$ en la primera suma. Este término está dado por

$$a_m \int_0^T \cos^2 m\omega_0 t dt = \frac{\pi}{\omega_0} a_m = \frac{T}{2} a_m$$

de forma que

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.16a)$$

Finalmente, multiplicando (16.13) por $\operatorname{sen} m\omega_0 t$, integrando, y aplicando el mismo argumento, obtenemos

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} m\omega_0 t dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.16b)$$

Notamos que (16.14) es el caso especial, $m = 0$ de (16.16a) (lo que explica por qué utilizamos $a_0/2$ en lugar de a_0 para el término constante). También, puesto que $f(t)$ y $\cos n\omega_0 t$ son ambas funciones periódicas de periodo T , su producto es periódico de periodo T . Similarmente, el producto de $f(t)$ y $\operatorname{sen} n\omega_0 t$ es también periódico con periodo T . De este modo, lo podemos integrar sobre cualquier intervalo de longitud T , tales como de t_0 a $t_0 + T$, para una t_0 arbitraria, y los resultados serán los mismos. Por consiguiente, podemos resumir al expresar los coeficientes de Fourier en la forma

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.17)$$

Hemos reemplazado el subíndice m por n para que corresponda con la notación de (16.13).

El término $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$ en (16.13) a veces se conoce como *armónico enésimo*, por analogía con la teoría musical. El caso $n = 1$ es el primer armónico, o *fundamental*, con frecuencia fundamental ω_0 . El caso $n = 2$ es el segundo armónico con frecuencia $2\omega_0$, y así sucesivamente. Nótese que la frecuencia $2\omega_0$ del segundo armónico está una *octava* (un factor de 2) sobre la fundamental, y el cuarto armónico está una octava sobre el segundo y dos octavas sobre el fundamental. El término $a_0/2$ es el componente constante, o dc, y por (16.14) puede verse que es el valor promedio de $f(t)$ sobre un periodo. Con frecuencia, para obtenerlo basta inspeccionar la gráfica de $f(t)$.

Las condiciones de que (16.13) sea serie de Fourier que represente a $f(t)$, donde los coeficientes de Fourier están dados por (16.17), son, como hemos dicho, sumamente generales y son vigentes para casi cualquier función que encontramos en ingeniería. Las condi-

ciones de suficiencia, conocidas como *condiciones de Dirichlet* son:

1. $f(t)$ es continua a tramos.
2. $f(t)$ tiene máximos y mínimos aislados.
3. $f(t)$ es absolutamente integrable a un periodo,

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty \quad (16.18)$$

Recuérdese que la continuidad a tramos fue definida en la sección 12.1, y que los máximos y mínimos aislados significa que todo intervalo de tiempo finito contiene únicamente un número finito de estos puntos. Las funciones que satisfacen las condiciones de Dirichlet son iguales en todas partes a sus series de Fourier (16.13), (16.17), excepto en los puntos de discontinuidad $t = \tau$ donde las series convergen al valor promedio $\frac{1}{2} [f(\tau^-) + f(\tau^+)]$ a ambos lados de la discontinuidad.

Ejemplo 16.3

Como ejemplo, obtengamos las series de Fourier para la onda diente de sierra de la figura 16.3, dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= t, & -\pi < t < \pi \\ f(t + 2\pi) &= f(t) \end{aligned} \quad (16.19)$$

Puesto que $T = 2\pi$, tenemos $\omega_0 = 2\pi/T = 1$. Si elegimos $t_0 = -\pi$, entonces la primera ecuación de (16.17) para $n = 0$ nos da

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt dt \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (\cos nt + nt \operatorname{sen} nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} nt dt \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (\operatorname{sen} nt + nt \cos nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2 \cos n\pi}{n} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

El caso $n = 0$ debe ser considerado separadamente por la aparición de n^2 en el denominador en el caso general. Además, puesto que $a_0/2$ es el valor promedio de la onda diente de sierra sobre un periodo, por inspección de la figura 16.3 podemos ver que $a_0 = 0$.

De nuestros resultados, las series de Fourier para la onda diente de sierra es

$$f(t) = 2 \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right) \quad (16.20)$$

La armónica fundamental, así como la segunda, tercera y quinta aparecen dibujadas sobre un periodo en la figura 16.4. Si se toma un número suficiente de términos en (16.20) puede hacerse que las series aproximen a $f(t)$ de forma muy cercana. Por ejemplo, en la figura 16.5 se suman los primeros 10 armónicos y se grafica el resultado.

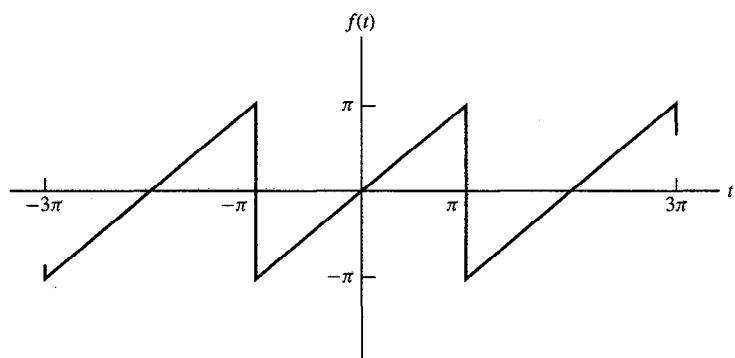


FIGURA 16.3 Onda dientes de sierra.

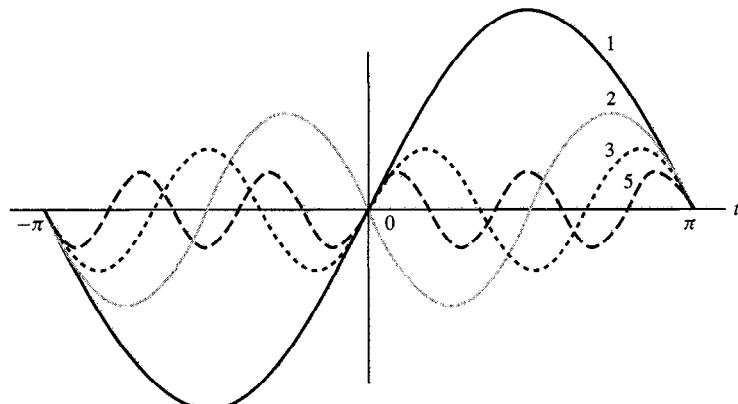


FIGURA 16.4 Cuatro armónicos de (16.20).

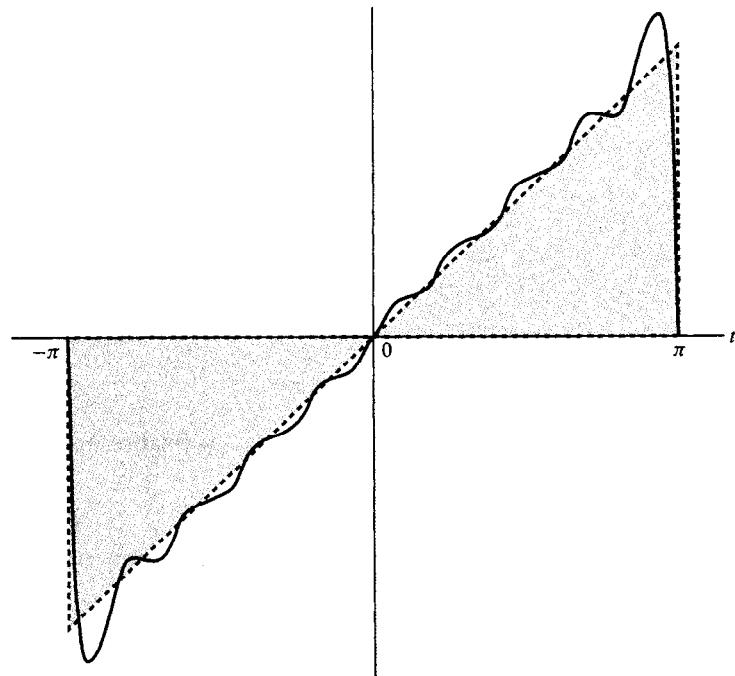


FIGURA 16.5 Suma de los primeros 10 armónicos de (16.20).

Ejemplo 16.4

Como otro ejemplo, supongamos que tenemos la función generadora

$$\begin{aligned} f_T(t) &= 0, & -2 < t < -1 \\ &= 6, & -1 < t < 1 \\ &= 0, & 1 < t < 2 \end{aligned}$$

con duración $T=4$. Su extensión periódica es $f(t)$, cuya onda cuadrada aparece en la figura 16.6. Evidentemente, el periodo de $f(t)$ es $T=4$ y $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$. Si tomamos $t_0 = 0$ en (16.17), debemos descomponer cada integral en tres partes puesto que, sobre el intervalo de 0 a 4, $f(t)$ tiene valores 0, 6 y 0. Si $t_0 = -1$, únicamente tenemos que dividir la

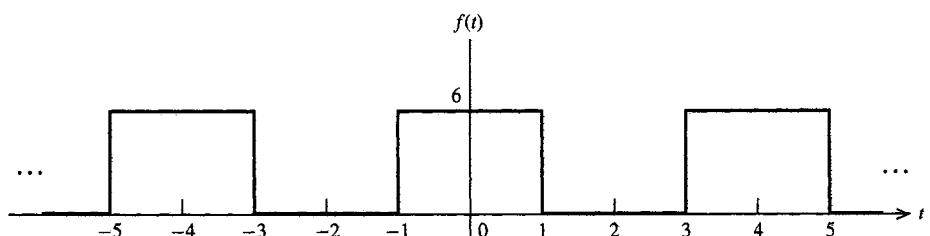


FIGURA 16.6 Una función periódica.

integral en dos partes puesto que $f(t) = 6$ de -1 a 1 y $f(t) = 0$ de 1 a 3 . Por consiguiente, elijamos este valor de t_0 , para obtener

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 dt = 6$$

Además, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \cos \frac{n\pi t}{2} dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \cos \frac{n\pi t}{2} dt \\ &= \frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \sin \frac{n\pi t}{2} dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \sin \frac{n\pi t}{2} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie de Fourier es

$$f(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} - \dots \right)$$

Puesto que no hay armónicos pares, podemos expresar el resultado en la forma más compacta

$$f(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[(2n-1)\pi t]/2}{2n-1}$$

Cualquiera que dude de la importancia de seleccionar un buen valor de t_0 en (16.17), podrá tomar $t_0 = 0$. Los resultados serán los mismos, pero no así el esfuerzo realizado.

Ahora veamos la forma en que puede simplificarse el cálculo de los coeficientes de Fourier a_n y b_n si $f(t)$ es simétrica. En (16.17) necesitamos integrar las funciones

$$g(t) = f(t) \cos n\omega_0 t$$

y

$$h(t) = f(t) \sin n\omega_0 t$$

Si $f(t)$ es par, entonces puesto que $\cos n\omega_0 t$ es par y $\sin n\omega_0 t$ es impar, $g(t)$ es par y $h(t)$ es impar. Por consiguiente, por (16.11) y (16.12), para una función $f(t)$ par

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= 0, & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{16.21}$$

y para $f(t)$ impar

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.22)$$

En cualquiera de los casos, todo un conjunto de coeficientes es cero, y el otro conjunto se obtiene calculando dos veces la integral sobre la mitad del periodo.

En resumen, *una función par no tiene términos seno, y una función impar no tiene términos constantes o coseno en su serie de Fourier*. Por ejemplo, la función diente de sierra del ejemplo 16.3 es impar, y sus series de Fourier no tienen términos coseno, en tanto que la onda cuadrada del ejemplo 16.4 es par, y no hay términos seno en su serie de Fourier.

Ejemplo 16.5

Para ilustrar el uso de la simetría, obtengamos los coeficientes de Fourier de la onda cuadrada de periodo $T = 2$ definida por

$$\begin{aligned} f(t) &= 4, & 0 < t < 1 \\ &= -4, & 1 < t < 2 \end{aligned}$$

Puesto que $T = 2$, $\omega_0 = \pi$. La función es par, y por consiguiente, por (16.22) tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{4}{2} \int_0^1 4 \sin n\pi t \, dt \\ &= \frac{8}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \quad n \text{ par} \\ &= \frac{16}{n\pi}, \quad n \text{ impar} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

16.2.1. Obtenga la representación en series de Fourier de la onda cuadrada

$$\begin{aligned} f(t) &= 4, & 0 < t < 1 \\ &= -4, & 1 < t < 2 \\ f(t+2) &= f(t) \\ \text{Respuesta} \quad &\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi t}{2n-1} \end{aligned}$$

16.2.2. Obtenga los coeficientes de Fourier para

$$\begin{aligned} f(t) &= 3, & 0 < t < 1 \\ &= -1, & 1 < t < 4 \\ f(t+4) &= f(t) \end{aligned}$$

$$Respuesta \quad a_0 = 0, \quad a_n = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad b_n = \frac{4}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

16.2.3. Obtenga las series de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= 2, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ &= 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ f(t+\pi) &= f(t) \end{aligned}$$

$$Respuesta \quad 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{2n-1}$$

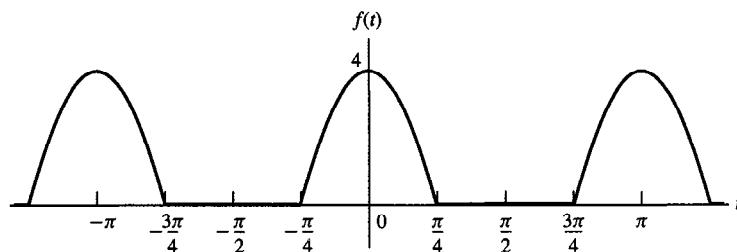
16.2.4. Obtenga las series de Fourier para onda diente de sierra del ejemplo 16.3 utilizando propiedades de simetría.

16.2.5. Obtenga las series de Fourier para el senoide rectificado de semionda con generador

$$f_T(t) = 4 \cos 2t \left[u\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

de duración π y tiempo inicial $t_0 = -\pi/2$ que aparece en la figura.

$$Respuesta \quad a_0 = \frac{8}{\pi}, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \frac{8}{\pi(1-n^2)} \cos \frac{n\pi}{2}, \\ n = 2, 3, 4, \dots; \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

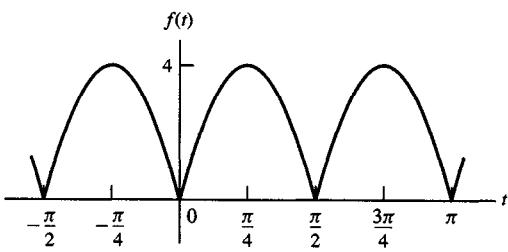


EJERCICIO 16.2.5

16.2.6. Obtenga las series de Fourier para el senoide rectificado de onda completa (o cicloide)

$$f(t) = |4 \sin 2t|$$

que se muestra en la figura anexa.



EJERCICIO 16.2.6

$$Respuesta \quad \frac{16}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos 4nt \right)$$

Podemos obtener otra forma de las series de Fourier sustituyendo las funciones seno y coseno por sus equivalentes exponenciales, mediante la fórmula de Euler. Esta forma se conoce como *serie exponencial de Fourier* y es extremadamente útil, particularmente para considerar respuestas de frecuencia, una de las aplicaciones más importantes de las series de Fourier. En esta sección, consideraremos las series exponenciales de Fourier, y en la siguiente sección investigaremos las respuestas de frecuencia, o espectros de frecuencia.

Por la igualdad de Euler

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

y

$$\operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{1}{j2} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

Sustituyendo en (16.13) y agrupando términos semejantes,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad (16.23)$$

Si definimos al nuevo coeficiente c_n

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (16.24)$$

y sustituyendo para a_n y b_n de (16.17) con $t_0 = -T/2$, tenemos

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)(\cos n\omega_0 t - j \operatorname{sen} n\omega_0 t) dt$$

o, por la fórmula de Euler,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (16.25)$$

Observamos que para cualquier función $f(t)$ real, a_n y b_n son ambos reales, de forma que c_n^* (el conjugado de c_n) está dado por

$$\begin{aligned} c_n^* &= \frac{a_n + jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)(\cos n\omega_0 t + j \operatorname{sen} n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

que es evidentemente c_{-n} (c_n con n sustituida por $-n$). Es decir,

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_n^* \quad (16.26)$$

Finalmente, observemos que

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

que, por (16.25) es

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad (16.27)$$

Sumando (16.24), (16.26) y (16.27) nos permiten escribir (16.23) en la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

Hemos combinado c_0 con la primera suma, y sustituido el índice de suma n por $-n$ en la segunda suma. El resultado puede escribirse de forma más compacta como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (16.28)$$

donde c_n está dada por (16.25). Esta versión de las series de Fourier se conoce como *serie exponencial de Fourier*.

Ejemplo 16.6

Como ejemplo, obtengamos la serie exponencial para la onda cuadrada del ejemplo 16.5 dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= 4, & 0 < t < 1 \\ &= -4, & 1 < t < 2 \end{aligned}$$

con $T=2$. Tenemos $\omega_0=2\pi/T=\pi$, y por consiguiente, por (16.25)

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-jn\pi t} dt$$

Para $n \neq 0$, esto es

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-4) e^{-jn\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 4 e^{-jn\pi t} dt \\ &\quad - \frac{4}{jn\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Además, tenemos

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 4 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 4 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que $c_n = 0$ para n par y $c_n = 8/jn\pi$ para n impar, podemos escribir las series exponenciales en la forma

$$f(t) = \frac{8}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{j(2n-1)\pi t} \quad (16.29)$$

El lector puede verificar que este resultado es equivalente al obtenido en el ejemplo 16.5.

Convertir entre series trigonométricas y exponenciales de Fourier es un proceso muy directo. Por (16.24), los coeficientes de la serie exponencial pueden derivarse de la forma trigonométrica por

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

y por (16.24) y (16.26), los coeficientes trigonométricos son

$$a_n = c_{-n} + c_n = 2 \operatorname{Re} c_n \quad (16.30a)$$

$$b_n = c_{-n} - c_n = -2 \operatorname{Im} c_n \quad (16.30b)$$

EJERCICIOS

16.3.1. Obtenga la serie exponencial de Fourier para $f(t)$ periódica con periodo $T=4$.

$$\begin{aligned} f(t) &= 1, & -1 < t < 1 \\ &= 0, & 1 < |t| < 2 \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta } \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n} e^{jn\omega t/2}$$

16.3.2. La función

$$\operatorname{Sa}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

llamada *función de muestreo*, ocurre con frecuencia en teoría de comunicaciones. [Una función estrechamente relacionada es la *función sinc*, definida por $\operatorname{sinc} x = (\operatorname{sen} \pi x)/\pi x = \operatorname{Sa}(\pi x)$.] Demuéstrese que si definimos

$$c_0 = \lim_{n \rightarrow 0} c_n$$

entonces el resultado del ejercicio 16.3.1 puede estar dado por

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\pi t/2}$$

16.3.3. Generalice los resultados del ejercicio 16.3.2 obteniendo la serie exponencial de un tren de pulsos de amplitud $\delta < T$, descrita por

$$\begin{aligned} f(t) &= 1, & -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ &= 0, & \frac{\delta}{2} < |t| < \frac{T}{2} \\ f(t+T) &= f(t) \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta } \frac{\delta}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) e^{j2n\pi t/T}$$

16.3.4. Demuestre que si $f(t)$ es par, los coeficientes exponenciales de Fourier son

$$c_n = \frac{a_n}{2} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

y si $f(t)$ es impar, entonces son

$$c_n = \frac{b_n}{2j} = \frac{2}{jT} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Utilice los resultados para obtener (16.29).

16.3.5. Obtenga las series exponenciales de Fourier para la función del ejercicio 16.2.3.

$$\text{Respuesta } 1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-j2}{(2n-1)\pi} e^{-j(2n-1)2t} \right]$$

16.4

RESPUESTA A ENTRADAS PERIÓDICAS

El principio de superposición asegura que en cualquier circuito lineal, la respuesta forzada a una fuente independiente con función de fuente

$$v_s(t) = v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

es la suma de respuestas para cada $v_i(t)$. Aquí $v_s(t)$ puede ser una corriente o voltaje. Puede aplicarse la superposición para obtener la respuesta a cualquier excitación periódica $v_0(t)$ que esté representada por una serie de Fourier. La respuesta a cada término de la serie de Fourier puede obtenerse utilizando análisis fasorial, y pueden sumarse estas respuestas componentes para llegar a la respuesta general.

Ejemplo 16.7

Calculemos la respuesta forzada $i(t)$ en el circuito que se muestra en la figura 16.7, donde la entrada $v(t)$ es la onda cuadrada $f(t)$ del ejemplo 16.4. Puesto que los términos en la expansión de series de Fourier de la fuente están a frecuencias distintas, el diagrama fasorial de la figura 16.7(b) también se marcó para que pueda aplicarse para cada frecuen-

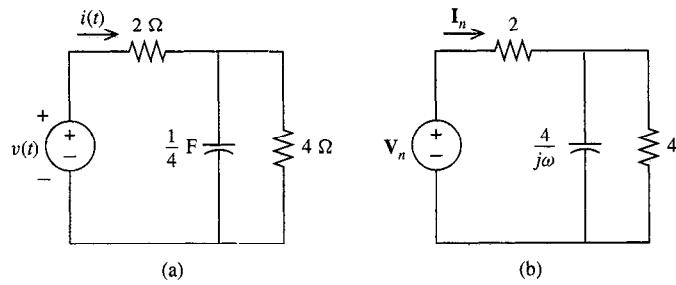


FIGURA 16.7 (a) Circuito para el ejemplo 16.7; (b) circuito fasorial.

cia componente ω . La fuente fasorial se marcó como \mathbf{V}_n , el fasor asociado con el término enésimo $v_n(t)$, que dependerá de la frecuencia $\omega = n\omega_0$ de ese término. La salida cuando se utiliza esta fuente fasorial se marcó como \mathbf{I}_n . La impedancia del circuito es

$$Z = 2 + \frac{[4/(j\omega)]4}{[4/(j\omega)] + 4} = \frac{6 + j\omega 2}{1 + j\omega}$$

Entonces, la corriente \mathbf{I}_n es

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{V}_n}{Z} = \frac{1 + j\omega}{2(3 + j\omega)} \mathbf{V}_n \quad (16.31)$$

En el ejemplo 16.4, la expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada $v(t)$ de periodo $T = 4(\omega_0 = \pi/2)$ se obtuvo como tipo puramente coseno puesto que $v(t)$ es una función par.

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{2} t$$

Aquí tenemos la fuente expresada como una serie:

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + \dots \quad (16.32)$$

donde

$$v_0(t) = a_0/2 \quad (16.33a)$$

y

$$v_n(t) = a_n \cos(n\pi t/2), \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.33b)$$

En el ejemplo se obtuvo que $a_0 = 6$, y para $n = 1, 2, \dots$,

$$a_n = \frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (16.34)$$

Entonces, los fasores de fuente correspondientes a estos términos de fuentes son $\mathbf{V}_0 = a_0/2 = 3$ y $\mathbf{V}_n = a_n$. La respuesta a \mathbf{V}_0 es

$$\mathbf{I}_0 = \left. \frac{1 + j\omega}{2(3 + j\omega)} \right|_{\omega=0}, \quad \mathbf{V}_0 = \left(\frac{1}{6} \right) 3 = \frac{1}{2} \quad (16.35)$$

y para el término *enésimo* en la serie de Fourier de la excitación ($n = 1, 2, \dots$)

$$\mathbf{I}_n = \frac{1 + j\omega}{2(3 + j\omega)} \Big|_{\omega=(n\pi)/2} \mathbf{V}_n \quad (16.36a)$$

$$= \frac{6}{n\pi} \left(\frac{2 + jn\pi}{6 + jn\pi} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \quad (16.36b)$$

Éstas son las respuestas fasoriales a cada componente de entrada. La respuesta general es

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) + \dots \quad (16.37a)$$

$$= \mathbf{I}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{I}_n| \cos \left(\frac{n\pi}{2} t + \theta_n \right) \quad (16.37b)$$

donde, como acostumbramos en el análisis fasorial, la amplitud de la respuesta sinusoidal es la magnitud del fasor, y el desplazamiento de fase es el ángulo del fasor:

$$\theta_n = \angle \mathbf{I}_n \quad (16.38)$$

La ecuación (16.37b) es la serie trigonométrica de Fourier para la respuesta forzada $i(t)$, en donde se han combinado los términos seno y coseno en la misma frecuencia. Utilizando (16.36b), podemos evaluar los coeficientes de Fourier en esta forma combinada,

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_n| &= \frac{6}{n\pi} \sqrt{\frac{4 + n^2\pi^2}{36 + n^2\pi^2}}, & n &= 1, 3, 5, \dots \\ &= 0, & n &= 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

Puesto que no hay términos pares, necesitamos calcular únicamente los ángulos de fase para n impar:

$$\begin{aligned} \theta_n &= \tan^{-1} \frac{n\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{n\pi}{6}, & n &= 1, 5, 9, \dots \\ &= \tan^{-1} \frac{n\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{n\pi}{6} + \pi, & n &= 3, 7, 11, \dots \end{aligned}$$

Lo que completa el ejemplo.

El lector notará una estrecha similitud entre este análisis y el uso de la función de respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$ presentada en el capítulo 14. Ciertamente, la respuesta a las entradas periódicas puede calcularse directamente en términos de $\mathbf{H}(j\omega)$. Recuérdese que la respuesta forzada $\mathbf{V}_o(\omega)$ a la entrada fasorial $\mathbf{V}_i(\omega)$ a la frecuencia ω es

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{V}_i(\omega) \quad (16.39)$$

Dada la serie trigonométrica de Fourier para una entrada general

$$v_i(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

tenemos fasores de entrada a cada $\omega = n\omega_0$ dada por

$$\mathbf{V}_i(n\omega_0) = |\mathbf{V}_i(n\omega_0)| \angle \theta_i(n\omega_0) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \angle -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (16.40)$$

para $n = 1, 2, \dots$ y la $n = 0$ (dc), por

$$\mathbf{V}_i(0) = |\mathbf{V}_i(0)| \angle \theta_0 = a_0/2 \quad (16.41)$$

Entonces el fasor de salida en $\omega = n\omega_0$ es la entrada multiplicada por la respuesta de frecuencia evaluada en esa frecuencia,

$$\mathbf{V}_o(n\omega_0) = \mathbf{H}(jn\omega_0)\mathbf{V}_i(n\omega_0) \quad (16.42)$$

y la salida sinusoidal general es la suma de cada una de las componentes de salidas sinusoidales:

$$v_o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbf{V}_o(n\omega_0)| \cos[n\omega_0 t + \theta_0(n\omega_0)]$$

donde, por (16.40),

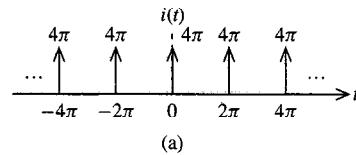
$$|\mathbf{V}_o(n\omega_0)| = |\mathbf{H}(n\omega_0)| |\mathbf{V}_i(n\omega_0)| \quad (16.43)$$

$$\theta_0(n\omega_0) = \angle \mathbf{H}(n\omega_0) + \theta_i(n\omega_0) \quad (16.44)$$

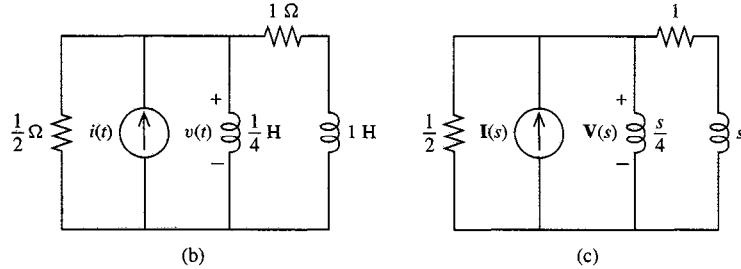
Esta última nos recuerda que la ganancia experimentada por la componente en la frecuencia $n\omega_0$ es la magnitud de la respuesta de frecuencia en esa frecuencia, y su desplazamiento de fase es el ángulo de la respuesta de frecuencia. *Cada componente de la expansión de series de Fourier de la entrada tiene ganancia y desplazamiento de fase dada por $\mathbf{H}(jn\omega_0)$, donde la función de respuesta de frecuencia de circuito se evalúa en la frecuencia del componente $n\omega_0$.*

Ejemplo 16.8

Deseamos determinar la salida en estado estable $v(t)$ cuando la entrada $i(t)$ es el tren de impulsos periódico que se muestra en la figura 16.8. Claramente, el circuito es estable (no tiene fuentes controladas ni trayectorias cerradas LC aisladas), de forma que existe una respuesta en estado estable y puede calcularse a partir de la respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$. La respuesta de frecuencia se deriva de la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ sustituyendo s por $j\omega$, como se muestra en el capítulo 13.



(a)



(b)

(c)

FIGURA 16.8 (a) $i(t)$; (b) circuito para el ejemplo 16.8; (c) circuito en el dominio-s.

La ecuación nodal en el dominio-s que utiliza condiciones iniciales cero es

$$\left(2 + \frac{4}{s} + \frac{1}{s+1}\right) V(s) = I(s)$$

de forma que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{2 + (4/s) + [1/(s+1)]} = \frac{s^2 + s}{2s^2 + 7s + 4} \quad (16.45)$$

Sustituyendo s por $j\omega$, tenemos la función de respuestas de frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j\omega}{(4 - 2\omega^2) + j\omega}$$

La magnitud y ángulo de esta función en $\omega = n\omega_0$ nos dará la ganancia y desplazamiento de fase que asociaremos con cada componente de frecuencia $n = 0, 1, 2, \dots$. Para determinar estas componentes, necesitamos una representación en series de Fourier de entrada $i(t)$. Calculando los coeficientes de la forma acostumbrada, y notando que $T = 2\pi$ de forma que $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ (16.46a y b),

$$a_n = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos(nt) dt = 4, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.46a)$$

$$b_n = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \sin(nt) dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.46b)$$

Por consiguiente, los fasores para cada componente de la entrada son simplemente

$$I(n\omega_0) = I_n = 4\angle 0^\circ, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.47)$$

de forma que los fasores de salida son

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{H}(jn\omega_0)\mathbf{I}_n \quad (16.48)$$

$$\mathbf{V}_n = \left[\frac{-\omega^2 - j\omega}{(4 - 2\omega^2) + j\omega 7} \Big|_{\omega=n} \right] 4 = 4 \left[\frac{-n^2 + jn}{(4 - 2n^2) + j7n} \right]$$

Nótese que la componente dc será cero, puesto que $\mathbf{V}_0 = 0$. Las series de Fourier para la salida son, por consiguiente

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{V}_n| \cos(nt + \angle \mathbf{V}_n) \quad (16.49)$$

o, después de realizar el álgebra,

$$|\mathbf{V}_n| = 2 \sqrt{\frac{n^4 + n^2}{n^4 + \frac{33}{4}n^2 + 4}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.50a)$$

$$\angle \mathbf{V}_n = -\tan^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) - \tan^{-1} \frac{7n}{4 - 2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.50b)$$

Esto completa los cálculos necesarios. Nótese que la intensidad de entrada (16.47) es la misma a cada frecuencia $n\omega_0$, en tanto que los componentes de salida varían en intensidad debido a la variación en la ganancia $|\mathbf{H}(j\omega)|$ respecto a la frecuencia. Por ejemplo, el componente dc de la salida es cero. Esto es lo que sería de esperarse, puesto que la respuesta de voltaje en estado estable de un inductor a una corriente dc es cero, y superpusimos respuestas en estado estable a cada frecuencia. A frecuencias muy altas, las amplitudes de respuesta todas tienden a 2, reflejando las amplitudes de entrada de 4 y una ganancia que tiende a $\frac{1}{2}$ conforme ω tiende a infinito [a frecuencias muy altas, casi toda la corriente $i(t)$ fluye a través de la resistencia de $\frac{1}{2}\Omega$].

En los ejemplos precedentes utilizamos series trigonométricas de Fourier para describir la entrada. De manera equivalente, pueden utilizarse las series exponenciales de Fourier:

$$v_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (16.51)$$

Puesto que la respuesta forzada a cada componente exponencial compleja $e^{jn\omega t}$ de la entrada se multiplica por $H(j\omega)$, utilizando superposición, la respuesta forzada es

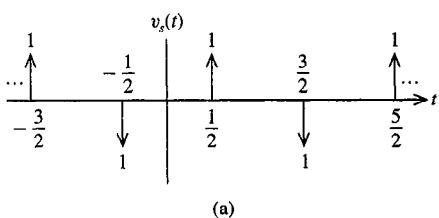
$$v_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(jn\omega_0) c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (16.52)$$

Aunque esto nos parece una atractiva ruta directa a $v_o(t)$ en comparación a utilizar las fórmulas (16.17) y (16.40) requeridas por las series trigonométricas de Fourier, en la ma-

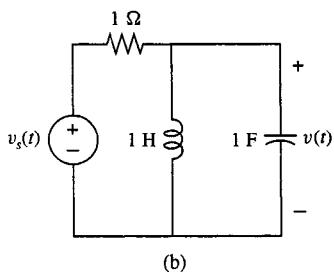
yoría de los casos es deseable expresar la salida $v_o(t)$ en términos de funciones reales, es decir, sinusoides. De este modo, los términos en $\pm n$ expresados en (16.52) aún necesitan ser combinados por la igualdad de Euler, y se pierde una parte de la aparente ventaja que nos ofrece la forma exponencial para calcular.

En esta sección calculamos la respuesta a una entrada periódica a partir de los fasores de salida debidos a cada una de las componentes de Fourier de la entrada. Estos fasores pueden determinarse directamente del circuito fasorial o, con mayor eficiencia, a partir de la función de respuesta de frecuencia $H(j\omega)$. Puede utilizarse la serie trigonométrica o exponencial de Fourier para describir la entrada.

EJERCICIOS



(a)



(b)

EJERCICIO 16.4.3 (a) $v_s(t)$; (b) circuito para el ejercicio 16.4.3.

16.4.1. La señal periódica $f(t)$ de periodo $T=2$ que es igual a $\cosh t$ [$\cosh t = \frac{1}{2}(e^{+t} + e^{-t})$] para $-1 < t < +1$, pasa a través de un filtro pasa-bajos ideal $H(j\omega) = u(\omega + 4) - u(\omega - 4)$. Obtenga la salida forzada $g(t)$.

$$\text{Respuesta } (e^1 - e^{-1}) \left[1 + \frac{1}{1 + \pi^2} \cos(\pi t + 180^\circ) \right]$$

16.4.2. La corriente en una combinación paralela de una resistencia 4Ω y un inductor $1-H$ es la onda cuadrada $f(t)$ del ejercicio 16.2.3. ¿Cuál es la corriente que entra al inductor $1-H$ [definida como aquella que satisface la convención de signo pasivo con $f(t)$?] Expréselo en términos de series exponenciales de Fourier.

Respuesta $w_0 = 2$; $c_n = 0$ para n par; $c_n = 4/([jn\pi][2 + jn])$ para n impar

16.4.3. Obtenga la respuesta en estado estable $v(t)$ en el circuito al tren periódico de impulsos $v_s(t)$ que se muestra. Expréselo como serie trigonométrica de Fourier.

Respuesta

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n\pi(1 - n^2\pi^2) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{(1 - n^2\pi^2)^2 + n^2\pi^2} \right] \cos n\pi t + \left[\frac{2n^2\pi^2 \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{(1 - n^2\pi^2)^2 + n^2\pi^2} \right] \operatorname{sen} n\pi t$$

16.5 ESPECTROS DISCRETOS Y GRÁFICAS DE FASE

Las series de Fourier revelan que una señal periódica dada es en realidad la suma de componentes exponenciales complejos o sinusoidales en frecuencias armónicamente relacionadas $n\omega_0$, donde cada una tiene su propia intensidad y fase. Es útil poder visualizar la intensidad y fase relativas de estos componentes y cómo varían estos respecto a la frecuencia $n\omega_0$ de la componente. Estas gráficas se conocen como espectros discretos y gráficas de fase discreta.

De (16.13) podemos ver que combinando las componentes seno y coseno en una sola componente de fase desplazada a cada frecuencia $n\omega_0$, la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (16.53)$$

tiene una amplitud

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

y fase

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (16.54)$$

Con $A_0 = a_0/2$ y A_n para $n = 1, 2, \dots$ en el caso anterior, la variación de A_n con $n, n = 0, 1, 2, \dots$, revela la forma en que la amplitud de las componentes de frecuencia armónicamente relacionadas en $f(t)$ cambian respecto a la frecuencia, y ϕ_n contra n muestra la forma en que la fase cambia respecto a la frecuencia. Puede obtenerse esta misma información de las series de Fourier. A la luz de (16.24)

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \quad (16.55)$$

y

$$\angle c_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = \phi_n \quad (16.56)$$

De este modo, una gráfica de $|c_n|$ contra n revela la variación de amplitud con respecto a la frecuencia, y respecto a $\angle c_n$, la variación de la fase respecto a la frecuencia. La gráfica de $|c_n|$ contra n para toda n se conoce como *espectro de amplitud discreta* o *espectro de línea* de $f(t)$, y la de $\angle c_n$ contra n , el *espectro de fase discreta*.

Ejemplo 16.9

Supongamos que aplicamos la onda cuadrada de la figura 16.9(b) como voltaje $v(t)$ a través de un capacitor 1-F. La corriente a través del capacitor $i(t)$ podrá satisfacer

$$i(t) = \frac{dv}{dt} \quad (16.57)$$

Puesto que sobre un periodo, digamos $-\frac{3}{2} \leq t < \frac{1}{2}$,

$$v(t) = 4 - 8u(t+1) + 8u(t), \quad -\frac{3}{2} \leq t < \frac{1}{2} \quad (16.58)$$

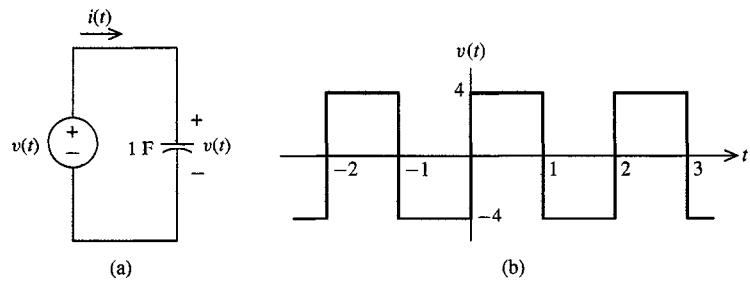


FIGURA 16.9 Circuito para el ejemplo 16.9.

luego, diferenciando sobre un periodo de valor de $i(t)$ obtendremos

$$i(t) = -8\delta(t+1) + 8\delta(t), \quad -\frac{3}{2} \leq t < \frac{1}{2} \quad (16.59)$$

Deseamos comparar la amplitud discreta y espectro de fase de las señales periódicas $v(t)$ e $i(t)$. Por los resultados del ejemplo 16.5,

$$\begin{aligned} v(t): \quad c_n &= \frac{8}{jn\pi}, & n &\text{ impar} \\ &= 0, & n &\text{ par} \end{aligned} \quad (16.60)$$

De este modo, el espectro de amplitud es

$$\begin{aligned} v(t): \quad |c_n| &= \frac{8}{n\pi}, & n &\text{ impar} \\ &= 0, & n &\text{ par} \end{aligned} \quad (16.61)$$

y el espectro de fase es

$$v(t): \quad \angle c_n = -90^\circ, \quad n \text{ impar} \quad (16.62)$$

Con $\omega_0 = \pi$, la serie exponencial de Fourier para $i(t)$ tiene coeficientes

$$i(t): \quad c_n = \frac{1}{2} \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} [-8\delta(t+1) + 8\delta(t)] e^{-jnt\pi} dt = 4(1 - e^{jn\pi})$$

Aquí, seleccionamos $-3/2$ como el tiempo inicial para la integración, de forma que los impulsos no coinciden con ninguno de los límites de integración. Entonces

$$\begin{aligned} i(t): \quad |c_n| &= 8, & n &\text{ impar} \\ &= 0, & n &\text{ par} \end{aligned} \quad (16.63)$$

$$\text{y} \quad \angle c_n = 0^\circ, \quad n \text{ impar} \quad (16.64)$$

La amplitud discreta y espectro de fase de las señales periódicas $v(t)$ e $i(t)$ aparecen en la figura 16.10. Nótese que, en tanto que $v(t)$ tiene componentes de frecuencia cuya intensidad disminuye con ω grande (n grande), el efecto de la diferenciación de $v(t)$ es la de aumentar los componentes de alta frecuencia. Ciertamente, sabemos que la deriva-

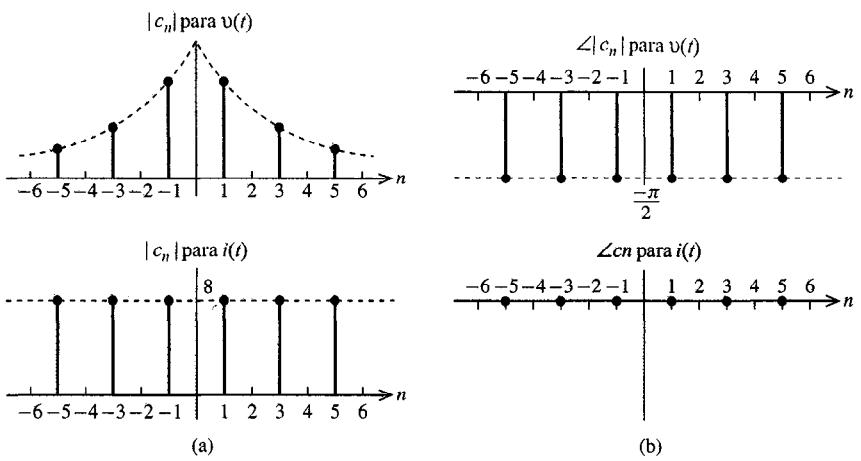


FIGURA 16.10 (a) Espectro de amplitudes discretas para la entrada $v(t)$ y salida $i(t)$; (b) espectro de fase discreta.

da de un sinusoide se multiplica por ω , de forma que los componentes de alta frecuencia son relativamente más prominentes. Además, la diferenciación provoca un desplazamiento de fase de $+90^\circ$ en todos los componentes de frecuencia.

Finalmente, a menudo es de interés saber la forma en que se divide la potencia en una señal periódica entre sus componentes de frecuencia. Por ejemplo, el propósito de rectificar un sinusoide como en el de la figura 16.2(b), es el de producir potencia dc. Las series de Fourier resultantes presentan una componente dc de potencia, pero también tiene potencia en muchas otras frecuencias. O podemos pasar una señal a través de un filtro, y necesitamos saber cuánta potencia en la salida permanece dentro de la banda de paso del filtro, y cuánta en la banda de tensión.

Multiplicando $f(t)$ por su conjugado $f^*(t)$ en (16.28) e integrando sobre un periodo,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_m^* e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$$

Integrando término a término, tenemos cero para los términos en los que $n - m$ no es cero, puesto que integramos la exponencial compleja sobre un número integral de períodos, y su parte real $\cos(n - m)\omega_0 t$ e imaginaria $\sin(n - m)\omega_0 t$ tienen un valor promedio cero. De este modo, con los términos restantes $n = m$ con integrandos constantes,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Dividiendo entre T , la potencia promedio o valor promedio cuadrado de $f(t)$ es

$$|f|_{av}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (16.65)$$

Podemos identificar cada término a la derecha como una componente única de frecuencia de $f(t)$. La ecuación (16.65) es la *relación de Parseval*, que postula que *la potencia promedio en una señal periódica es la suma sobre todas las componentes n de la potencia $|c_n|^2$ en sus componentes de serie de Fourier exponencial*. La gráfica de $|c_n|^2$ contra n se conoce como *espectro de potencia discreta* de la señal $f(t)$. Consiste de un conjunto de *líneas espectrales* espaciadas a intervalos regulares que nos muestran la forma en que se distribuye la potencia de una señal periódica sobre el dominio de la frecuencia.

Ejemplo 16.10

Determine la amplitud y espectro de potencia de la extensión periódica $f(t)$ del generador $f_T(t) = e^{-t}$ con duración $T = 1$ y tiempo inicial $t_0 = 0$ que se utilizó primeramente en el ejemplo 16.1. En la figura 16.1b se muestra un dibujo de $f(t)$, y se repite como figura 16.11 por comodidad.

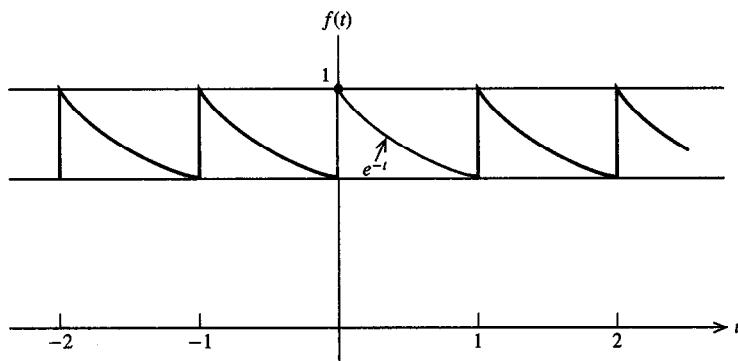


FIGURA 16.11 $f(t)$ para el ejemplo 16.10. Un periodo aparece señalado con puntos.

Con $\omega_0 = 2\pi$, c_n está dada por

$$c_n = \int_0^1 e^{-(1+j2\pi n)t} dt = \frac{1}{1+j2\pi n} [1 - e^{-(1+j2\pi n)}]$$

$$c_n = \frac{1 - e^{-1}}{1 + j2\pi n}$$

El espectro de amplitud está dado por

$$|c_n| = \frac{1 - e^{-1}}{\sqrt{(2\pi n)^2 + 1}}$$

y el espectro de potencia por

$$|c_n|^2 = \frac{(1 - e^{-1})^2}{(2\pi n)^2 + 1}$$

De este modo, por ejemplo, la potencia dc en ($n = 0$) en $f(t)$ es $(1 - e^{-1})^2$. Puesto que la potencia total en $f(t)$ es

$$\begin{aligned}|f|_{\text{av}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \int_0^1 e^{-2t} dt \\&= \frac{1}{2}(1 - e^{-2})\end{aligned}$$

entonces la fracción de la potencia total en esta onda, es decir, en dc, es

$$\frac{2(1 - e^{-1})^2}{1 - e^{-2}} = 0.924$$

Si se utiliza para desarrollar potencia dc, esta onda tiene una eficiencia de 92.4%, con una “arruga” de 7.6% para que la filtre el pasa-bajos. En la figura 16.12 se grafican la amplitud y el espectro de potencia.

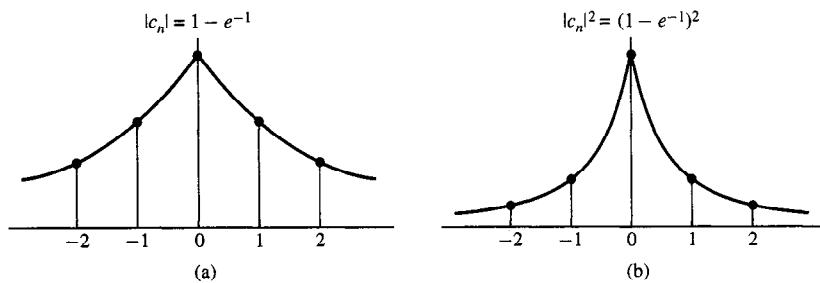
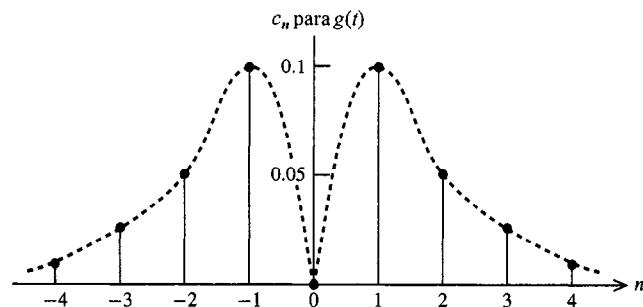


FIGURA 16.12 (a) Espectro de amplitud de $f(t)$; (b) espectro de potencia.

EJERCICIOS

16.5.1. Suponga que la onda $f(t)$ del ejemplo 16.10 pasa a través de un filtro pasa-altas con respuesta de frecuencia $H(j\omega) = j\omega/(1 + j\omega)$. Dibuje el espectro de líneas discretas de la salida $g(t)$.

$$\text{Respuesta } |c_n| = \frac{(1 - e^{-1})2\pi|n|}{1 + (2\pi n)^2}$$



EJERCICIO 16.5.1

16.5.2. Reescriba la relación de Parseval (16.65) en términos de los coeficientes de las series trigonométricas de Fourier.

$$\text{Respuesta } |f|_{av}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

16.5.3. ¿Cómo se relacionan el espectro de amplitud discreta $|c_n|$ y el espectro de fase discreta θ_n de $f(t)$ con el espectro de amplitud discreta $|c'_n|$ y el espectro de fase discreta θ'_n con su derivada $df(t)/dt$?

$$\text{Respuesta } |c'_n| = |n\omega_0|c_n; \theta'_n = \theta_n + 90^\circ$$

16.6

LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Los espectros discretos nos muestran que la energía en las funciones periódicas está altamente concentrada en el dominio de frecuencia sobre un conjunto discreto de frecuencias. Estas funciones no tienen ninguna energía en la vasta mayoría de las frecuencias, aquellas que no satisfacen $\omega = n\omega_0$ para un entero n . Si debiéramos pasar una señal periódica a través de cualquier filtro cuya ganancia en las frecuencias $n\omega_0$ fuera cero, entonces, sin importar su ganancia en otras partes entre estas frecuencias, no saldría absolutamente nada.

Las funciones periódicas son más uniformes, dispersando su energía de forma continua a través del dominio de frecuencias. La *transformada de Fourier* es una función de una ω continua, que revela la forma en que la energía en una función no periódica se distribuye sobre el dominio continuo de la frecuencia, del mismo modo en que las series de Fourier nos demostraron la forma en que las funciones periódicas distribuyen sus energías sólo sobre sus frecuencias armónicas discretas $n\omega_0$.

Iniciamos el desarrollo de la transformada de Fourier considerando una función $f(t)$ definida sobre un intervalo infinito, pero que no es periódica y por consiguiente no puede ser representada por series de Fourier. Sin embargo, puede ser posible considerar la función como periódica con un periodo *infinito*, y extender nuestros resultados anteriores para incluir este caso. El desarrollo que daremos no es riguroso, pero los resultados pueden obtenerse rigurosamente si $f(t)$ satisface las condiciones de Dirichlet de la sección 16.2, sustituyendo la condición de cuadrado-integrable por la integrabilidad del cuadrado a escala total.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (16.66)$$

Nuestra estrategia es considerar la extensión periódica $f_p(t)$ del generador $f_T(t)$ dado por

$$f_T(t) = f(t) \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

como se ilustra en la figura 16.13. La serie exponencial de Fourier para $f_p(t)$ es

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt/T} \quad (16.67)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-j2\pi nx/T} dx \quad (16.68)$$

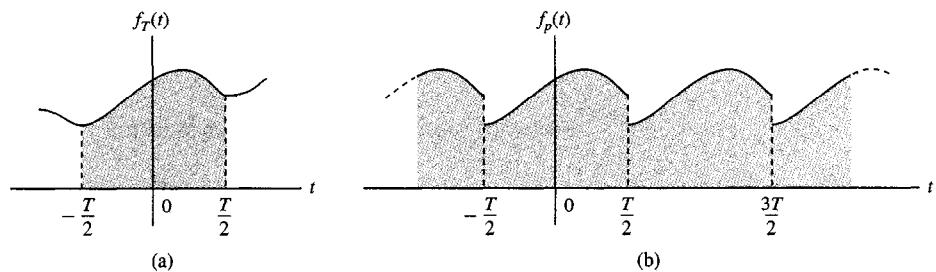


FIGURA 16.13 (a) Función $f_T(t)$; (b) su extensión periódica $f_p(t)$.

Sustituimos ω_0 por $2\pi/T$, y utilizamos la variable x en lugar de t en la expresión de coeficientes. Nuestra intención es hacer que $T \rightarrow \infty$, en cuyo caso $f_p(t) \rightarrow f(t)$. La distribución de energía sobre la frecuencia en la $f_p(t)$ periódica (16.67), en el límite, revelará la forma en que se distribuya la energía en la $f(t)$ no periódica.

Puesto que el proceso de límite requiere que $\omega_0 = 2\pi/T \rightarrow 0$, para mayor énfasis sustituimos $2\pi/T$ por $\Delta\omega$. Por consiguiente, sustituyendo (16.68) en (16.67), tenemos

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-jx n \Delta\omega} dx \right] e^{jtn \Delta\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-j(x-t)n \Delta\omega} dx \right] \Delta\omega \end{aligned} \quad (16.69)$$

Si definimos la función

$$g(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-j\omega(x-t)} dx \quad (16.70)$$

entonces, claramente, el límite de (16.69) está dado por

$$f(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n \Delta\omega, t) \Delta\omega \quad (16.71)$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral, el último resultado es

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, t) d\omega \quad (16.72)$$

Pero, en el límite, $f_T \rightarrow f$ y $T \rightarrow \infty$ en (16.69), de forma que lo que resulta ser $g(\omega, t)$ en (16.69) es realmente su límite, que por (16.70) es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x-t)} dx$$

Por consiguiente, (16.71) es realmente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x-t)} dx \right] d\omega \quad (16.73)$$

Podemos escribir este resultado en la forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (16.74)$$

Definiendo la expresión entre paréntesis como la función

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (16.75)$$

donde cambiamos la variable de integración de x a t , obtenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (16.76)$$

La función $\mathbf{F}(j\omega)$ se conoce como *transformada de Fourier* de $f(t)$, y $f(t)$ se conoce como la *transformada inversa de Fourier* de $\mathbf{F}(j\omega)$. Con frecuencia, esto se expresa simbólicamente como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(j\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(j\omega)] \end{aligned} \quad (16.77)$$

donde \mathcal{F} denota la operación de realizar la transformada de Fourier, del mismo modo en que \mathcal{L} y \mathcal{L}^{-1} denotaban la transformada de Laplace y su transformada inversa. Además, (16.75) y (16.76) se conocen colectivamente como la *pareja de transformadas de Fourier*.

Escribiendo (16.67) y (16.76) juntas, las series y transformadas de Fourier son muy similares.

$$\text{Series de Fourier: } f_p(t) = \sum_{\substack{\omega=n\omega_0 \\ n=-\infty}}^{+\infty} c_n e^{j\omega t} \quad (16.78a)$$

$$\text{Transformada de Fourier: } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (16.78b)$$

Ambas expresan una función de tiempo como superposición de componentes de frecuencia. En el caso de las series, la función es periódica, y únicamente se necesita de un conjunto

discreto de frecuencias, de forma que la superposición es una suma. En el caso de transformadas, toda frecuencia ω contribuye a una amplitud de incremento $\mathbf{F}(j\omega)d\omega$, de forma que se necesita una integral sobre toda ω .

Ejemplo 16.11

Como ejemplo, obtengamos la transformada de

$$f(t) = e^{-at}u(t) \quad (16.78)$$

donde $a > 0$. Por la definición (16.75), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a-j\omega)t} dt\end{aligned}$$

o

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

Debido a que $a > 0$, el límite superior es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at}(\cos \omega t - j \sin \omega t) = 0$$

puesto que la expresión entre paréntesis está acotada en tanto que la exponencial tiende a cero. De este modo

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+j\omega} \quad (16.79)$$

Ejemplo 16.12

Como otro ejemplo, obtengamos la transformada del pulso rectangular único

$$\begin{aligned}f(t) &= A, & -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ &= 0, & |t| > \frac{\delta}{2}\end{aligned} \quad (16.80a)$$

que aparece en la figura 16.14. Por definición, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} Ae^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{2A}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega\delta/2} - e^{-j\omega\delta/2}}{j^2} \right)\end{aligned}$$

o

$$\mathbf{F}(j\omega) = \frac{2A}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega\delta}{2} \quad (16.80b)$$

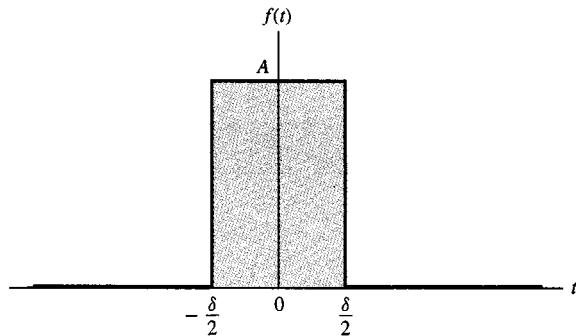


FIGURA 16.14 Pulso finito de amplitud δ .

En este punto, quizás el lector ya haya notado una estrecha similitud entre el primer ejemplo, que resultó en la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(e^{-at}u(t)) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (16.81)$$

y la transformada de Laplace de la misma función de tiempo del capítulo 12,

$$\mathcal{L}(e^{-at}u(t)) = \frac{1}{s + a} \quad (16.82)$$

Incluso los pasos en la derivación de estos resultados, (12.3) y (12.4) para la transformada de Laplace y el ejemplo 16.11 para la transformada de Fourier, son casi exactamente iguales.

Esto no es ninguna coincidencia. *Para cualquier función Fourier-transformable $f(t)u(t)$ que es cero para $t < 0$, ambas transformadas están relacionadas de forma simple por*

$$\mathcal{F}[f(t)u(t)] = \mathcal{L}[f(t)u(t)] \Big|_{s=j\omega} \quad (16.83)$$

Llamemos a una función $f(t)$ que es cero para $t < 0$ una función $t \geq 0$ de un lado. Entonces (16.83) asegura que *dondequiera que exista, la transformada de Fourier de cualquier función $t \geq 0$ de un lado es idéntica a la transformada de Laplace de la misma función, con s evaluada en $j\omega$* . Esto es ciertamente el caso para la función de un solo lado $t \geq 0$, $e^{-at}u(t)$ ($a > 0$), que fue el tema del ejemplo 16.11, como puede verse a partir de (16.79).

Para ver que esto es en general verdadero, primero hacemos notar que el postulado anterior implica que en tanto que $f(t)u(t)$ sea Fourier transformable, también será Laplace transformable. Revisando las condiciones de transformabilidad, toda función $t \geq 0$ de un lado que satisface las condiciones de Dirichlet debe ser absolutamente integrable, y por consiguiente de orden exponencial (con $\sigma = 0$), y por consiguiente Laplace transformable. Ciertamente, *el conjunto de funciones de Fourier transformables es un conjunto de las*

funciones Laplace transformables. Las condiciones para la transformabilidad de Fourier son más estrictas. Para completar la justificación de (16.83), escribamos juntas las definiciones de las transformadas:

$$\text{Transformada de Fourier: } \mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Transformada de Laplace: } \mathbf{F}(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Claramente, si ambas existen y $f(t)$ es cero para $t < 0$, estas integrales son idénticas después de identificar s con $j\omega$.

La igualdad de las transformadas de Laplace y Fourier en $s = j\omega$ para funciones $t \geq 0$ de un solo lado, no serán útiles para derivar parejas de transformadas de Fourier a partir de parejas de transformadas de Laplace conocidas, como aquellas que se reunieron en la tabla 12.2.

Ejemplo 16.13

Obtenga la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} 2t u(t)$. Esta es una función $t \geq 0$ de un solo lado. De la tabla 12.2,

$$\mathcal{L}[e^{-t} \operatorname{sen} 2t u(t)] = \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

Por (16.68), tenemos la transformada de Fourier deseada simplemente sustituyendo s por $j\omega$.

$$\mathbf{F}(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 1)^2 + 4}$$

Aun para las transformadas de Fourier de funciones generales de dos lados $f(t)$, aquellas que no son cero para $t < 0$ o para $t > 0$, pueden obtenerse a partir de transformadas de Laplace de funciones $t \geq 0$ de un solo lado como las que aparecen en la tabla 12.2. En el ejemplo se demuestra esta técnica.

Ejemplo 16.14

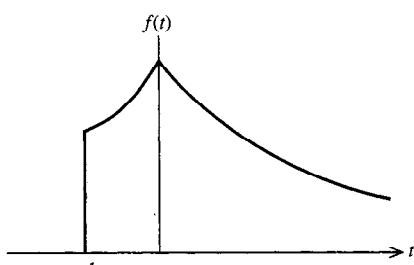


FIGURA 16.15 $f(t)$ para el ejemplo 16.14.

Deseamos la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-|t|} u(t+1)$ que aparece en la figura 16.15. Escribamos $f(t)$ como la suma de una función $t \geq 0$ de un solo lado y una función $t \leq 0$ de un solo lado:

$$f(t) = e^{-t} u(t) + e^{+t} (u(t+1) - u(t)) \quad (16.84)$$

Entonces

$$\mathbf{F}(j\omega) = \mathcal{F}(e^{-t} u(t)) + \mathcal{F}[e^{+t} (u(t+1) - u(t))] \quad (16.85)$$

El primer término, la transformada de la función $t \geq 0$ de un solo lado $e^{-t} u(t)$ está dada por (16.79) con $\alpha = 1$.

$$\mathcal{F}(e^{-t} (u(t+1) - u(t))) = \int_{-1}^0 e^t e^{-j\omega t} dt = - \int_1^0 e^{-\tau} e^{j\omega \tau} d\tau$$

Puede evaluarse el segundo término cambiando las variables $\tau = -t$ en la integral. Ahora, si sustituimos $j\omega$ por $-s$, esta integral queda identificada como la transformada de Laplace de la función de tiempo $e^{-t} (u(t) - u(t-1))$.

Luego, podemos calcular esta transformada de Laplace utilizando las técnicas del capítulo 12:

$$\mathcal{L}[e^{-t}u(t) - e^{-t}u(t-1)] = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-1}e^{-s}}{s+1} = \frac{1-e^{-(s+1)}}{s+1} \quad (16.86)$$

Revirtiendo la sustitución de $j\omega$ por s (sustituyendo s por $-j\omega$), tenemos la transformada de Fourier de la función $t \leq 0$ de un solo lado en (16.84):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{+t}(u(t+1) - u(t))] &= \left. \frac{1-e^{-(s+1)}}{s+1} \right|_{s=-j\omega} \\ &= \frac{1-e^{(-j\omega+1)}}{-j\omega+1}\end{aligned}\quad (16.87)$$

Luego, combinando los dos términos en (16.84),

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} + \frac{1-e^{j\omega-1}}{-j\omega+1} = \frac{2-(j\omega+1)e^{j\omega-1}}{1+\omega^2}$$

Esta es la transformada de Fourier que buscamos.

EJERCICIOS

16.6.1. Confirme el resultado del ejemplo 16.14. Obtenga $F(j\omega)$ evaluando directamente la definición de integral de la transformada de Fourier (16.75).

16.6.2. Obtenga $\mathcal{F}[e^{-a|t|}]$, donde $a > 0$.

Respuesta $\frac{2a}{\omega^2+a^2}$

16.6.3. Obtenga $\mathcal{F}[-\frac{1}{4}(t-3)e^{-(t-3)} \operatorname{sen} 2(t-3)u(t-3)]$.

Respuesta $\frac{e^{-3j\omega}(j\omega+1)}{[j\omega+1]^2+4^2}$

16.6.4. ¿Cuál de estas funciones satisface las condiciones de Dirichlet? $\operatorname{sen} t, 1/t, u(t), u(t+1)-u(t-1), \cos \frac{1}{t}(u(t+1)-u(t-1))$.

Respuesta No; no; no; sí; no

16.6.5. Obtenga la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-2t}, t > 0, e^{+3t}, t < 0$.

Respuesta $\frac{5}{\omega^2+6+j\omega}$

16.7

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

De la misma forma en que las propiedades de la transformada de Laplace resumidas en la tabla 12.1 nos resultaron útiles para trabajar en el dominio- s , en esta sección derivaremos y aplicaremos las propiedades de la transformada de Fourier. Ciertamente, la estrecha relación entre estas transformadas sugiere que las propiedades de Fourier pueden derivarse a partir de las propiedades de Laplace. Aquí, derivaremos las propiedades de Fourier deseadas a partir de la definición integral (16.75) de esta transformada.

Una de las propiedades que se utilizan con más frecuencia es la linealidad, que es consecuencia del hecho de que la transformada de Fourier es una transformada integral, y por consiguiente es una operación *lineal*. Es decir, la transformada de la combinación

$$v(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

es la combinación de las transformadas

LINEALIDAD

$$\mathcal{F}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 \mathbf{F}_1(j\omega) + c_2 \mathbf{F}_2(j\omega) \quad (16.88)$$

donde \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 son, respectivamente, las transformadas de Fourier de f_1 y f_2 , y c_1 y c_2 son constantes. Este concepto de linealidad nos permite obtener inmediatamente transformadas de funciones relativamente complicadas a partir de transformadas de funciones más simples.

Ejemplo 16.15

Por ejemplo, la transformada de la función

$$f(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

es, por linealidad y (16.79),

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(j\omega) &= \frac{2}{2+j\omega} - \frac{2}{3+j\omega} \\ &= \frac{2}{(2+j\omega)(3+j\omega)} \end{aligned}$$

Otra operación que involucra las transformadas de Fourier y que nos será útil es la diferenciación respecto al tiempo. Supongamos que deseamos obtener la transformada de Fourier de la derivada de una función $f(t)$. Por definición

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

de la que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [\mathbf{F}(j\omega) e^{j\omega t}] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega \mathbf{F}(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos

DIFERENCIACIÓN

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = j\omega \mathbf{F}(j\omega) \quad (16.89)$$

Es decir, puede obtenerse la transformada de la derivada f simplemente multiplicando la transformada de f por $j\omega$. Este resultado puede extenderse inmediatamente al caso general:

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (j\omega)^n \mathbf{F}(j\omega) \quad (16.90)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$. Suponemos que existen las derivadas involucradas, y que el intercambio de operaciones de diferenciación e integración es válido. Las condiciones en que esto es verdad son muy generales y son vigentes para casi cualquier función con la que nos podemos topar.

Ejemplo 16.16

Como otro ejemplo, obtengamos la transformada de $f(t - \tau)$, donde τ es una constante. Sustituyendo t por $t - \tau$ en (16.76), obtenemos

$$\begin{aligned} f(t - \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{F}(j\omega) e^{-j\omega\tau}] e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

de lo que concluimos, por (16.76), que

$$\mathcal{F}(f(t - \tau)) = \mathbf{F}(j\omega) e^{-j\omega\tau} \quad (16.91)$$

El significado físico de este resultado es un *retardo* en el dominio del tiempo [la función $f(t - \tau)$ es $f(t)$ retardada por τ segundos] corresponde a un desplazamiento de fase (la suma de $-j\omega\tau$ a la fase) en el dominio de frecuencia. Nótese que τ puede ser positiva o negativa.

La similitud de las integrales para $f(t)$ y su transformada en (16.75) y (16.76) sugiere que intercambiar t y ω de algún modo puede resultar en un nuevo conjunto de transformadas. Ciertamente, si en (16.75) sustituimos ω por x y t por $-\omega$ y multiplicamos ambos lados de la ecuación por 2π , tenemos

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(jx) e^{-jx\omega} dx$$

El miembro derecho, como vimos de (16.75), es la transformada de Fourier de $\mathbf{F}(jt)$. Por consiguiente, tenemos

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}(jt)) = 2\pi f(-\omega) \quad (16.92)$$

Es decir, la transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$ con ω sustituida por t es una función de tiempo cuya transformada de Fourier es $2\pi f(t)$, con t sustituida por $-\omega$.

DESPLAZAMIENTO RESPECTO AL TIEMPO

PROPIEDAD DE DUALIDAD

Ejemplo 16.17

Como ejemplos, si aplicamos (16.92) a (16.79) y (16.80b), respectivamente, obtenemos

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a + jt}\right) = 2\pi e^{a\omega} u(-\omega), \quad a > 0$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \mathcal{F}\left(\frac{2A}{t} \operatorname{sen} \frac{t\delta}{2}\right) &= 2\pi A, \quad |\omega| < \frac{\delta}{2} \\ &= 0, \quad |\omega| > \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

En la tabla 16.1 tabulamos las operaciones de transformada de Fourier derivadas en esta sección, junto con otras. Se pide del lector derivar las otras como ejercicios y problemas.

Tabla 16.1 Operaciones con la transformada de Fourier

	$f(t)$	$\mathbf{F}(j\omega)$
1. Linealidad	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 \mathbf{F}_1(j\omega) + c_2 \mathbf{F}_2(j\omega)$
2. Multiplicación tiempo/frecuencia	$f(t/a)$	$ a \mathbf{F}(j\omega a)$
3. Desplazamiento respecto al tiempo	$f(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau} \mathbf{F}(j\omega)$
4. Desplazamiento respecto a la frecuencia	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$\mathbf{F}(j\omega - j\omega_0)$
5. Propiedad de dualidad	$\mathbf{F}(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
6. Inversión tiempo/frecuencia	$f(-t)$	$\mathbf{F}(-j\omega)$
7. Diferenciación enésima	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n \mathbf{F}(j\omega), n = 0, 1, 2, \dots$
8. t -multiplicación enésima	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{d(j\omega)^n} \mathbf{F}(j\omega), n = 0, 1, 2, \dots$

También podemos utilizar las transformadas de Fourier para extender el concepto de respuesta de frecuencia, considerada en el capítulo 14, a circuitos con excitaciones no sinusoidales. Como veremos, las funciones de respuesta son exactamente las mismas que en el caso de circuitos con excitaciones sinusoidales. Por consiguiente, todas las propiedades de funciones de transferencia que hemos considerado son válidas en este caso más generalizado. La única diferencia es que aquí las entradas y salidas son transformadas de Fourier, en vez de fasores.

Comenzaremos considerando el circuito general de la figura 16.16, donde, para ser más específicos, consideraremos a la entrada y a la salida como los voltajes $v_i(t)$ y $v_o(t)$, respectivamente. Del mismo modo, también podríamos permitir que una de estas funciones fuera una corriente. Tomaremos la ecuación descriptiva de circuito como

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n v_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv_o}{dt} + a_0 v_o \\ = b_m \frac{d^m v_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v_i}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dv_i}{dt} + b_0 v_i \end{aligned}$$

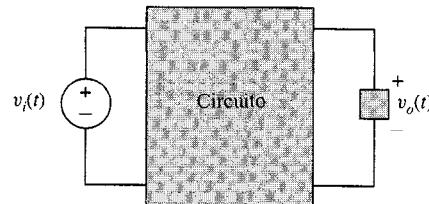


FIGURA 16.16 Circuito general.

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados, haciendo uso de la propiedad 7 en la entrada respectiva de la tabla 16.1 y la linealidad, obtenemos

$$\begin{aligned}[a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 j\omega + a_0] \mathbf{V}_o(j\omega) \\ = [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 j\omega + b_0] \mathbf{V}_i(j\omega)\end{aligned}$$

Las funciones \mathbf{V}_0 y \mathbf{V}_i son las transformadas de Fourier de las funciones de entrada y salida, v_o y v_i . De este resultado, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_o(j\omega)}{\mathbf{V}_i(j\omega)} &= \mathbf{H}(j\omega) \\ &= \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0}\end{aligned}\tag{16.93}$$

donde $\mathbf{H}(j\omega)$ es idéntica a la función de transferencia del capítulo 13 evaluada en $s = j\omega$.

Este desarrollo indica que la función de transferencia, definida previamente como la proporción de la transformada de Laplace de la salida contra la transformada de Laplace de la entrada, es precisamente la misma que la proporción de la transformada de Fourier de la salida contra la transformada de Fourier de la entrada. Desde luego, tanto la entrada como la salida deben satisfacer las condiciones de Dirichlet de (16.93) para ser válidas.

Ejemplo 16.18

Por ejemplo, supongamos que la entrada $v_i(t)$ está dada por

$$v_i(t) = e^{-3t} u(t)$$

y que está relacionada con la entrada $v_o(t)$ por la ecuación

$$\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 2v_i$$

Transformando la ecuación, tenemos

$$(j\omega + 2)\mathbf{V}_o(j\omega) = 2\mathbf{V}_i(j\omega)$$

de donde la función de transferencia es

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(j\omega)}{\mathbf{V}_i(j\omega)} = \frac{2}{2\omega + 2}$$

También por (16.79), tenemos

$$\mathbf{V}_i(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega}$$

de forma que la transformada de la salida es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(j\omega) &= \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{V}_i(j\omega) \\ &= \frac{2}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)}\end{aligned}$$

Esto puede ser reescrito, después de expansión por fracciones parciales, como

$$\mathbf{V}_o(j\omega) = 2\frac{1}{2 + j\omega} - 2\frac{1}{3 + j\omega}$$

y, por linealidad, obtenemos

$$v_o(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

En el ejemplo anterior utilizamos la expansión en fracciones parciales para facilitar la transformada inversa de Fourier, del mismo modo en que anteriormente lo hicimos para las transformadas de Laplace. *Se aplican las mismas reglas para la expansión en fracciones parciales, con $j\omega$ sustituyendo a s en las reglas y procedimientos.*

Puesto que el concepto de función de transferencia implica condiciones iniciales cero, las respuestas en el dominio del tiempo obtenidas de este modo son respuestas de circuitos inicialmente *relajados*. (No hay energía inicial almacenada.) Podríamos desarrollar métodos generales para utilizar las transformadas de Fourier y obtener soluciones en el dominio del tiempo, pero la transformada de Fourier es más adecuada para otras aplicaciones. Por consiguiente, preferimos utilizar la *transformada de Laplace*, que a diferencia de la transformada de Fourier toma en cuenta condiciones iniciales no nulas para estos problemas.

Dado que las funciones de transferencia de este capítulo son idénticas a las que se consideraron anteriormente, no entraremos en detalles con su respuestas de frecuencia, polos y ceros, frecuencias naturales y otras propiedades. Todos estos temas fueron considerados en los capítulos 12 y 13.

EJERCICIOS

16.7.1. Derive las operaciones 2, 4, 6 y 8 de la tabla 16.1.

16.7.2. Obtenga la transformada inversa de $2e^{-j\omega}/(\omega^2 + 1)$.

Respuesta $e^{-|t-1|}$

16.7.3. Si $x(t)$ es entrada y $y(t)$ es salida, obtenga $\mathbf{H}(j\omega)$ utilizando las transformadas de Fourier, donde

$$y'' + 4y' + 3y = 4x$$

Respuesta $4/(3 - \omega^2 + j4\omega)$

16.7.4. Si en el ejercicio 16.7.3

$$x = e^{-2t}u(t)$$

obtenga $\mathcal{F}[y(t)]$.

Respuesta $4/[(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)]$

16.7.5. Verifique en el ejercicio 16.7.4 que

$$\mathcal{F}[y(t)] = \frac{2}{j\omega + 1} - \frac{4}{j\omega + 2} + \frac{2}{j\omega + 3}$$

y obtenga $y(t)$ para el caso $y(0) = y'(0) = 0$.

Respuesta $(2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$

16.8

SPICE Y EL ANÁLISIS DE FOURIER

Puede utilizarse SPICE para obtener las series de Fourier para una función periódica $f(t)$. La forma directamente apoyada por SPICE es

$$f(t) = d_o + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}(n\omega_o t + \psi_n) \quad (16.94)$$

Comparando (16.53) y (16.94), esta última puede convertirse fácilmente a la forma de coseno de fase desplazada (16.53), que nos es más familiar, por el cambio de variables

$$d_o = \frac{a_o}{2} \quad (16.95a)$$

$$D_n = A_n \quad (16.95b)$$

$$\psi_n = \phi_n - \frac{\pi}{2} \quad (16.95c)$$

Para utilizar SPICE en la determinación de una serie de Fourier, primero produciremos en la función generadora $f_T(t)$ para la función periódica $f(t)$ de nuestro interés. Esto puede hacerse realizando un análisis transitorio, como lo explicamos en la sección 6.8, sobre un circuito que produce $f_T(t)$ como parte de una de sus corrientes o voltajes transitorios. Recuérdese que la sintaxis del enunciado de control .TRAN es

.TRAN TSTEP TSTOP <UIC>

donde TSTEP es el intervalo de tiempo entre los valores que se imprimirán o graficarán, TSTOP es el tiempo final del análisis transitorio, que siempre se inicia en $t = 0$, y la palabra clave opcional UIC hace que SPICE utilice las condiciones iniciales especificadas en las tarjetas de elementos L y C , en lugar de las condiciones iniciales derivadas de un análisis en estado estable dc.

Suponiendo que se especifica un análisis transitorio, la declaración de control que instruye a SPICE a realizar a continuación un análisis de series de Fourier es la declaración .FOUR, cuyo formato es

```
.FOUR TINV F1 < F2 F3 ... >
```

El primer parámetro TINV es el inverso de la duración T de $f_T(t)$, el generador de la serie de Fourier. Por consiguiente, TINV es también la frecuencia fundamental $f_o = \omega_o / 2\pi$ medida en hertz. El tiempo inicial en el que se toma el generador es TSTOP-T, donde TSTOP es el tiempo final del análisis transitorio. TRAN y T es la duración de $f_T(t)$, es decir, el inverso de TINV. F1 es la corriente o voltaje que contiene $f_T(t)$, y F2, F3, ... son corrientes o voltajes adicionales opcionales de los que se desea obtener sus series de Fourier. Si se especifica más de una corriente o voltaje, se parte de la suposición de que se aplican a todas la misma duración de generador y tiempo inicial. SPICE calcula únicamente los primeros 10 componentes de las series de Fourier, el componente dc, el fundamental en $f_o = \text{TINV}$, y los siguientes ocho componentes armónicos.

En la sección 16.1 se señaló que si un generador $f_T(t)$ consiste de un número entero exacto de repeticiones de una onda, el periodo de su extensión periódica no coincidirá con la duración específica del generador (será más breve). SPICE simplemente supone que el generador no tiene esta propiedad, lo que generalmente es una buena suposición puesto que SPICE calcula valores de muestra aproximados, y no valores continuos exactos, para el generador y, en todo caso, no podría decir si hay una repetición exacta. Por consiguiente, TINV siempre será la salida, en tanto que la frecuencia fundamental f_o de las series de Fourier que SPICE calcula y aparecen como componente 1 (componente fundamental) de la salida, como se muestra a continuación.

Ejemplo 16.19

Como ejemplo, obtengamos los coeficientes de Fourier de la onda de la figura 16.3. Para realizar un análisis transitorio, necesitamos definir un circuito al que pueda aplicarse la descomposición de Fourier para la respuesta. Supongamos que utilizamos el circuito simple compuesto de una fuente de corriente con una salida que pasa del nodo de referencia al nodo 1 igual al de la figura 16.3, conectada a una resistencia $1-\Omega$. Los coeficientes de Fourier para este voltaje pueden calcularse utilizando el comando .FOUR. El archivo de circuito que producirá este resultado utilizando la PWL (especificación momentánea de onda lineal por tramos en I) es

```
EJEMPLO PARA LA SERIE DE FOURIER DE LA FIGURA 16.3
*DECLARACIONES DE DATOS
I 0 1 PWL(0 0A 3.1416 3.1416A 3.1417 -3.1416A 6.2832 0A)
R 1 0 1
.TRAN 0.1 6.2832
.FOUR 0.159 V(1)
.END
```

En este programa, la duración de generador se define como un intervalo de 0 a 6.2832 s, que es el intervalo de respuesta transitoria. Por

consiguiente, se utiliza una frecuencia fundamental de 0.159 Hz en el comando .FOUR. La solución resultante para la descomposición es

COMPONENTES DE FOURIER DE LA RESPUESTA TRANSITORIA V(1)					
DC COMPONENT	FREQUENCY	FOURIER	NORMALIZED	PHASE	NORMALIZED
HARMONIC NO.	(HZ)	COMPONENT	COMPONENT	(DEG)	PHASE (DEG)
1	1.590E-01	2.000E+00	1.000E-00	5.805E-04	0.000E+00
2	3.180E-01	1.001E+00	5.002E-01	-1.800E-02	-1.800E+02
3	4.770E-01	6.676E-01	3.338E-01	1.936E-04	-3.869E-04
4	6.360E-01	5.013E-01	2.506E-01	1.800E-02	1.800E+02
5	7.950E-01	4.016E-01	2.008E-01	1.156E-04	-4.649E-04
6	9.540E-01	3.353E-01	1.676E-01	1.800E-02	1.800E+02
7	1.113E+00	2.880E-01	1.440E-01	8.192E-05	-4.986E-04
8	1.272E+00	2.526E-01	1.263E-01	-1.800E-02	-1.800E+02
9	1.431E+00	2.252E-01	1.126E-01	6.606E-05	-5.144E-04

Una vez que se determinan los coeficientes de Fourier, las series pueden escribirse utilizando (16.94) para describir la función original. La respuesta de una red a una función periódica puede obtenerse ahora aplicando el comando .DC para la componente dc d_0 en el circuito y en el comando .AC para cada componente armónico (amplitud D_n , frecuencia nf_0 y fase ψ_n). La solución, por superposición, es entonces la suma de las componentes individuales en el dominio del tiempo.

También puede utilizarse SPICE para obtener 19 muestras de la transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$ de ciertas funciones de tiempo $f(t)$, aquellas que son cero fuera de un intervalo finito de tiempo. Supongamos que $f(t)$ es cero fuera del intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + T]$. Sea $\omega_1 = 2\pi/T$. Calculando (16.75), la integral que define la transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$, en $\omega = n\omega_1$, es

$$\mathbf{F}(jn\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Puesto que $f(t)$ es cero fuera del intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + T]$, podemos reducir los límites de integración, y luego notar que la integral resultante es idéntica a (16.25), la ecuación del coeficiente c_n de la serie exponencial de Fourier multiplicada por T :

$$\mathbf{F}(jn\omega_1) = \int_{t_0+T}^{t_0} f(t)e^{-jn\omega_1 t} dt = T c_n \quad (16.96)$$

Por consiguiente, puede utilizarse SPICE para calcularse un conjunto de muestras a partir de la transformada de Fourier, $\mathbf{F}(jn\omega_1)$, $n = 0, \pm 1, \dots, 9$, de una función $f(t)$ que es cero fuera de un intervalo finito $[t_0, t_0 + T]$. $f(t)$ es tratada como el generador $f_T(t)$ para un análisis de series de Fourier como se describió anteriormente, y los resultantes coeficientes de la serie de Fourier .FOUR se convierten a forma exponencial. Éstos son a su vez multiplicados por T , la duración de $f_T(t)$ y obtenemos 19 muestras de la transformada de Fourier de $f(t)$, es decir, $\mathbf{F}(j\omega)$ para $\omega = n\omega_1$, $n = 0, \pm 1, \dots, 9$.

Ejemplo 16.20

Obtengamos algunas muestras de la transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$ de la función de tiempo $f(t)(u(t+\pi)-u(t-\pi))$ para la $f(t)$ dibujada en la figura 16.3. Para $T = 2\pi$, que tenemos $\omega_1=1$, y el c_n en (16.95) son coeficientes de la serie exponencial de Fourier que corresponden a los coeficientes que se obtuvieron en el ejemplo anterior. Por ejemplo, el componente armónico 1, o fundamental, obtenido en el ejemplo, resultó ser $D_1 = 2.00$ y $\psi_1 = 0.000584^\circ$. Redondeemos este resultado a 2 sen t . En términos de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier, esto implica que $a_1=0$ y $b_1=2$. Por consiguiente

$$c_1 = 1/2(a_1 - jb_1) = -j$$

Por (16.95),

$$\mathbf{F}(j\omega)\Big|_{\omega=1} = T c_n = -j2\pi$$

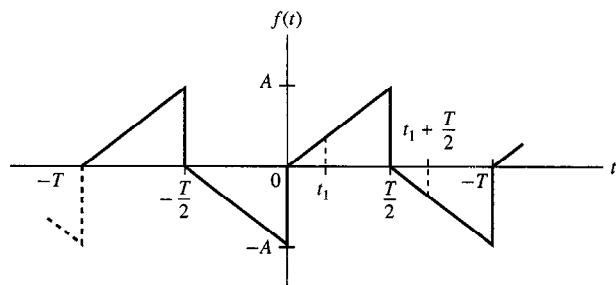
En otras palabras, la transformada de Fourier de la función limitada respecto al tiempo $f(t)(u(t+\pi)-u(t-\pi))$ tiene el valor $-j2\pi$ en $\omega=1$. Utilizando los coeficientes restantes del ejemplo anterior, podemos calcular $\mathbf{F}(j\omega)$ en $\omega=n\omega_1=n$, $n=0, 1, \dots, 9$.

Finalmente, ciertos dialectos de SPICE, permiten una información más completa de la transformada de Fourier que se necesita. Utilizando el postprocesador PROBE disponible para PSPICE, pueden aparecer en las gráficas de alta resolución la magnitud y fase, o si lo prefiere, las partes reales imaginarias de $F(j\omega)$. En este libro elegimos concentrarnos en las características principales que se utilizan en la versión ordinaria de SPICE, y por consiguiente dejaremos al lector que tiene acceso a PSPICE y PROBE para que explore esta útil característica por cuenta propia.

EJERCICIOS

16.8.1. Utilizando SPICE, obtenga los coeficientes de Fourier de onda de la figura 16.2(b).

16.8.2. Utilizando SPICE, obtenga los coeficientes de Fourier de las ondas que se muestran si $T = 10 \mu s$ y $A = 1$.



EJERCICIO 16.8.2

El análisis de Fourier es la descomposición de una onda en sinusoides de distintas frecuencias, amplitudes y fases. Supongamos que se analiza de esta forma la entrada a un circuito lineal. Puesto que puede determinarse fácilmente la ganancia y desplazamiento de fase de cada componente sinusoidal a partir de la respuesta de frecuencia, y la salida es simplemente su suma, con frecuencia el análisis de Fourier es una ruta conveniente para determinar la respuesta de un circuito.

- Las funciones periódicas quedan representadas por series de Fourier, y las funciones no periódicas por la transformada de Fourier.
- Las series trigonométricas de Fourier son una suma infinita de senos y cosenos en frecuencias enteras múltiples, o armónicas. Sus coeficientes de Fourier son números reales.
- Las series exponenciales de Fourier son sumas infinitas de exponentiales complejas de frecuencias enteras múltiples (armónicas). Sus coeficientes de Fourier son números complejos.
- Las dos formas de las series de Fourier están relacionadas por $c_n^* = (a_n + jb_n)/2$, donde c_n es el coeficiente exponencial de Fourier, a_n es el coeficiente coseno y b_n el coeficiente seno.
- $|c_n|^2$ es igual a la potencia en la componente enésima de frecuencia $n\omega_0$.
- La transformada de Fourier está definida como la transformada integral

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- $|\mathbf{F}(j\omega)|$ corresponde a la intensidad de la componente sinusoidal en la frecuencia ω , $\angle \mathbf{F}(j\omega)$ al desplazamiento de fase en la frecuencia ω .
- La transformada de Fourier de una suma es la suma de las transformadas de Fourier; multiplicar una función de tiempo también multiplica su transformada. La transformada de Fourier es una operación lineal.
- Puede utilizarse la tabla 16.1 de operaciones de transformadas de Fourier para derivar nuevas transformadas a partir de las ya conocidas.
- La transformada de Fourier de la respuesta al impulso $h(t)$ es la respuesta de frecuencia $H(j\omega)$.

PROBLEMAS

16.1. Sea $f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$. Dibuje las extensiones periódicas de cada uno de los siguientes generadores tomados de $f_1(t)$, e indicando el periodo. T es la duración y t_0 el momento inicial para el generador.

- (a) $T = 4, t_0 = -2$
- (b) $T = 10, t_0 = -2$
- (c) $T = 10, t_0 = -5$
- (d) $T = 2, t_0 = 0$
- (e) $T = 1, t_0 = 0$
- (f) $T = 1, t_0 = -1$

16.2. Sea $f_1(t) = \sin 2\pi t$. Dibuje las extensiones periódicas de cada uno de los siguientes generadores tomados de $f(t)$, e indique su periodo. T es la duración y t_0 el instante inicial para el generador.

- (a) $T = 1, t_0 = -\frac{1}{2}$
- (b) $T = 1, t_0 = 0$
- (c) $T = \frac{1}{2}, t_0 = 0$
- (d) $T = 4, t_0 = 0$
- (e) $T = 4, t_0 = -2$
- (f) $T = \frac{1}{2}, t_0 = -\frac{1}{4}$

16.3. Sea $f_2(t) = r(t-1) - 2r(t) + 2r(t-1) - 2r(t-2) + r(t-3)$. Dibuje la extensión periódica de los siguientes generadores tomados de $f_2(t)$ e indique su periodo. T es la duración y t_0 el instante inicial para el generador.

- (a) $T = 2, t_0 = -1$
- (b) $T = 4, t_0 = -1$

- (c) $T = 8, t_0 = -4$
 (d) $T = 1, t_0 = -\frac{1}{2}$

16.4. Sea $f_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), f_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$. Obtenga condiciones suficientes y necesarias para ω_1 y ω_2 de forma que $f_1(t) + f_2(t)$ sea periódica, y repita para $f_1(t) \cdot f_2(t)$.

16.5. Suponga que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son periódicas con períodos nT_1 y mT_2 , respectivamente, donde n y m son enteros negativos.

- (a) ¿Es $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ periódica? De ser así, ¿cuál es su periodo?
 (b) ¿Es $f_1(t)f_2(t)$ periódica? De ser así, ¿cuál es su periodo?
 (c) ¿Es $(1 + f_1(t))f_2(t)$ periódica? De ser así, ¿cuál es su periodo?

16.6. Demuestre que si la parte par de $f(t)$ es idénticamente cero, entonces $f(t)$ tiene simetría impar, y si la parte impar es cero, entonces tiene simetría par.

16.7. Obtenga las partes par e impar de $f_e(t)$ y $f_o(t)$ si $f(t) = :$

- (a) $u(t)$
 (b) $r(t)$
 (c) $\sin t$
 (d) $\sin tu(t)$
 (e) $\cos t$
 (f) $\cos tu(t)$

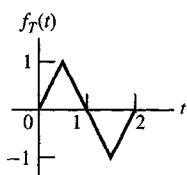
16.8. Obtenga las partes par e impar $f_e(t)$ y $f_o(t)$ si $f(t) = :$

- (a) $f_1(t)$ del problema 16.3
 (b) $\sin^2 2\pi t$
 (c) $4 \cos(2t + 17^\circ)$
 (d) $4 \cos(2t + 17^\circ)(u(t-1) - u(t+1))$

16.9. Obtenga las partes par e impar de las extensiones periódicas de cada uno de los generadores descritos en el problema 16.1.

- (a) $T=4, t_0=-2$
 (b) $T=10, t_0=-2$
 (c) $T=10, t_0=-5$
 (d) $T=2, t_0=0$
 (e) $T=1, t_0=0$
 (f) $T=1, t_0=-1$

16.10. Sea $f(t)$ una extensión periódica del generador $f_T(t)$ que aparece, con duración $T = 2$ y tiempo inicial $t_0 = 0$. Demuestre que $f(t)$ es impar y que $f(t-\tau)$ es par para una τ seleccionada convenientemente. Obtenga todos los τ que hacen que $f(t-\tau)$ sea par.



PROBLEMA P16.10

16.11. Determine $f_{av}, |f_{av}|^2$, y f_{rms} para las extensiones periódicas de cada uno de los generadores descritos en el problema 16.1.

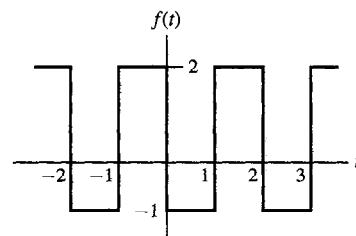
- (a) $D=4, t_0=-2$
 (b) $D=10, t_0=-2$
 (c) $D=10, t_0=-5$
 (d) $D=2, t_0=0$
 (e) $D=1, t_0=0$
 (f) $D=1, t_0=-1$

16.12. Determine $f_{av}, |f_{av}|^2$ y f_{rms} para los siguientes $f(t)$:

- (a) Figura 16.5(a)
 (b) Figura 16.5(b)
 (c) Figura 16.5(c)
 (d) Figura 16.5(d)

16.13. Para $f(t)$ compleja, si $\operatorname{Re} f(t)$ es periódica con periodo T_1 e $\operatorname{Im} f(t)$ es periódica con periodo T_2 , ¿es $f(t)$ necesariamente periódica? Justifique.

16.14. Obtenga las series trigonométricas de Fourier para las onda periódica que se muestra.



PROBLEMA P16.14

16.15. Obtenga las series trigonométricas de Fourier para las extensiones periódicas de cada uno de los generadores tomados de $f_1(t)$ en el problema 16.1 :

- (a) $T=4, t_0=-2$
 (b) $T=10, t_0=-2$
 (c) $T=10, t_0=-5$
 (d) $T=2, t_0=0$
 (e) $T=1, t_0=0$
 (f) $T=1, t_0=-1$

16.16. Obtenga las series trigonométricas de Fourier para la extensión periódica del generador $f_T(t) = |t-1|$ con duración $T = 2$ y $t_0 = 0$.

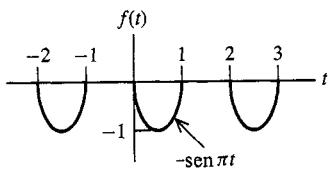
16.17. Sea

$$f(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leq t < 2 \\ \sin 2\pi t, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para las extensiones de periodo de $f_T(t)$ con $T = 3, t_0 = 0$.

16.18. Obtenga las series trigonométricas de Fourier para $g(t) = df/dt$, con la $f(t)$ que se muestra en la figura del problema 16.14.

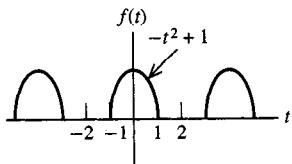
16.19. (a) Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para la $f(t)$ que se muestra.



PROBLEMA P16.19

- (b) Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para $f(t-1)$.
(c) Utilice linealidad para obtener la serie trigonométrica de Fourier para $f(t-1) - f(t)$.

16.20. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para la $f(t)$ que se muestra ($T=4$). Para $-1 \leq t \leq 1$, $f(t) = -t^2 + 1$.

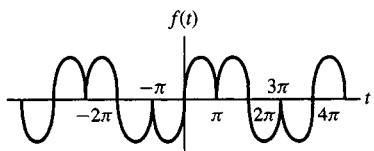


PROBLEMA P16.20

16.21. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para la $f(t)$ que se muestra. La ecuación es

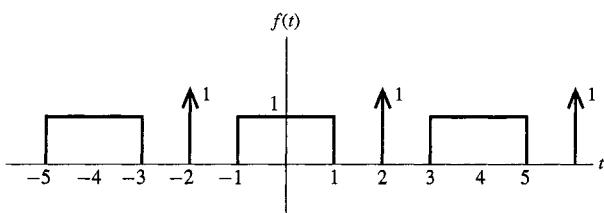
$$f_T(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & -\pi \leq t < +\pi \\ -\operatorname{sen} t, & -2\pi \leq t < -\pi \\ \operatorname{sen} t, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

con $T=4\pi$ y $t_0=-2\pi$.



PROBLEMA P16.21

16.22. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier.

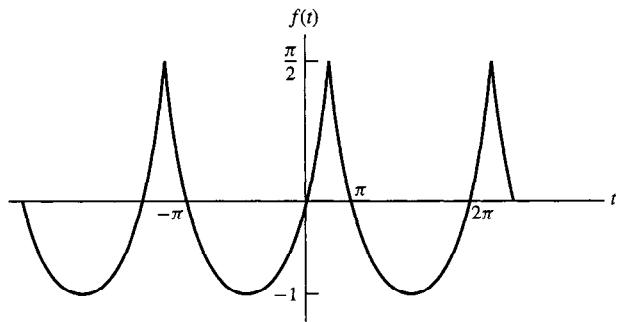


PROBLEMA P16.22

16.23. Suponga que una función de tiempo $f(t)$ está multiplicada con el tiempo $g(t) = f(ct)$. Relacione los coeficientes a_n , b_n y la ω_0 de la serie de Fourier para las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$.

16.24. Sea $f_T(t)$ el generador para esta extensión periódica $f(t)$, y sea $g_T(t) = \int_{t_0}^t f_T(\tau) d\tau$ el generador para $g(t)$. Relacione los coeficientes a_n , b_n , y las ω_0 para las series trigonométricas de Fourier para $f(t)$ y $g(t)$.

16.25. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para la función $f(t)$ que se muestra, $f(t) = \operatorname{sen} t$ para $-\pi \leq t < 0$, $f(t) = t$ para $0 \leq t < \pi/2$ y $f(t) = -t + \pi$ para $\pi/2 \leq t < \pi$.



PROBLEMA P16.25

16.26. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para df/dt si $f(t)$ es la onda diente de sierra que aparece en la figura 16.3.

16.27. Sea $f(t)$ la extensión periódica del generador $f_T(t) = te^{-t}$ con $t_0 < 0$ y $T=2$. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier.

16.28. Obtenga la serie exponencial de Fourier para $f(t)$ del problema 16.14.

16.29. Obtenga la serie exponencial de Fourier para la extensión periódica de cada uno de estos generadores, tomados de $f_1(t)$ en el problema 16.1.

- (a) $T=4$, $t_0=-2$
- (b) $T=10$, $t_0=-2$
- (c) $T=10$, $t_0=-5$
- (d) $T=2$, $t_0=0$

- (e) $T=1, t_0=0$.
(f) $T=1, t_0=-1$

16.30. Obtenga la serie exponencial de Fourier para la extensión periódica $f(t)$ del generador $f_T(t)=u(t-1)+\delta(t)$ con $t_0=-1, T=4$.

16.31. Sea $g(t)=f(ct)$ de forma que $g(t)$ sea una versión multiplicada por el tiempo de $f(t)$ con factor de compresión de tiempo c . Relacione c_n , los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de $f(t)$, con c'_n , los coeficientes para $g(t)$.

16.32. Sea $g(t)=f(t-\tau)$. Relacione los coeficientes de la serie exponencial de Fourier c_n de $f(t)$ y c'_n de $g(t)$.

16.33. Obtenga la serie exponencial de Fourier para la función $f(t)$ en el problema 16.19.

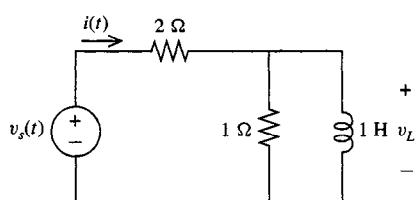
16.34. (a) ¿Qué significa acerca de $f(t)$ que todos los coeficientes de su serie exponencial de Fourier sean puramente reales?
(b) Repita para el caso en que sean puramente imaginarios.

16.35. Supóngase que los términos seno y coseno de una serie trigonométrica de Fourier se combinan como en (16.53). ¿Cuál es la relación entre las A_n y ϕ_n para $f(t)$ y su versión desplazada respecto al tiempo $f(t-\tau)$? ¿Su versión diferenciada df/dt ?

16.36. Obtenga la serie exponencial de Fourier para $f(t)=2|\cos t - \frac{1}{2}|$.

16.37. Obtenga la respuesta forzada $i(t)$ como una serie exponencial de Fourier si $v_s(t)$ es la onda en $f(t)$:

- (a) Figura 16.2(a)
(b) Figura 16.2(b)
(c) Figura 16.2(c)
(d) Figura 16.2(d)

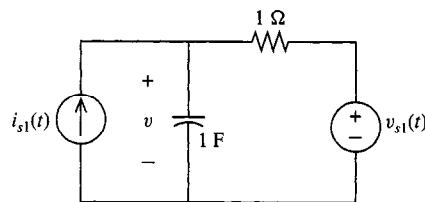


PROBLEMA P16.37

16.38. Obtenga las amplitudes A_n como en (16.53) de los componentes dc, fundamental y segundo armónico de $v_2(t)$ en el problema 16.37 si $v_s(t)=f(t)$ en la figura 16.2(a) y $T=1$.

16.39. Obtenga la serie compleja de Fourier para $v(t)$ si $i_{s_1}(t)$ la onda ilustrada en las siguientes figuras. Tome $T=1$ en cada caso, y $v_{s_1}(t)=12 \text{ V dc}$.

- (a) Figura 16.2(a)
(b) Figura 16.2(b)
(c) Figura 16.2(c)
(d) Figura 16.2(d)

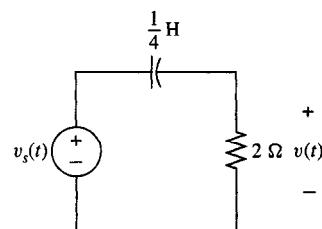


PROBLEMA P16.39

16.40. Repita el problema 16.39, pero con $v_{s_1}(t)=f(t)$ que aparece en la figura 16.1(b), y sea $i_s(t)$ la $f(t)$ en:

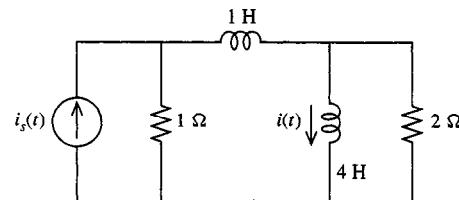
- (a) Figura 16.2(a)
(b) Figura 16.2(b)
(c) Figura 16.2(c)
(d) Figura 16.2(d)

16.41. Determine los valores de las amplitudes A_n de la componente dc y los primeros tres armónicos de $v(t)$ si $v_s(t)$ es la onda cuadrada $f(t)$ del ejemplo 16.5.



PROBLEMA P16.41

16.42. Determine la salida $i(t)$ si la entrada $i_{s_1}(t)$ es la extensión periódica del generador $i_{s_T}(t)=\delta(t)$ con $t_0=-1$ y $T=2$. Expréselo como en (16.53).



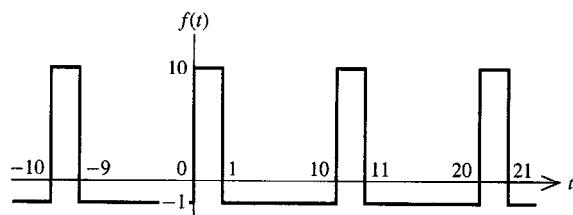
PROBLEMA P16.42

16.43. Obtenga la amplitud discreta, fase y espectro de potencia para $i(t)$ en el problema 16.43. Dibújelo.

16.44. Obtenga la amplitud discreta, fase y espectro de potencia para $v(t)$ en el problema 16.41. Dibújelo.

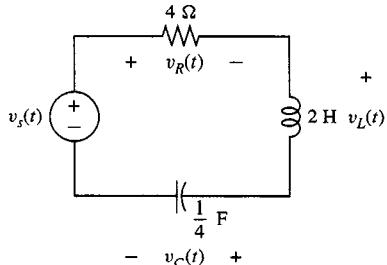
16.45. ¿Qué fracción de la potencia total es la onda rectificada completa de la figura 16.2(b) está en su componente dc? ¿En el dc más sus componentes fundamentales?

16.46. ¿Cuál es la componente de frecuencia más intensa en $f(t)$? Si $f(t) = v_s(t)$ es una frecuencia alta filtrada del circuito del problema 16.41, creando $v(t)$, ¿cuál es entonces la componente de frecuencia más intensa?



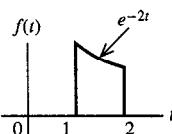
PROBLEMA P16.46

16.47. Si $v_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [e^{-(1+jn\pi)}] e^{j4n\pi t}$, obtenga y dibuje el espectro de fase de $v_S(t)$, $v_L(t)$, $v_C(t)$ y $v_R(t)$.



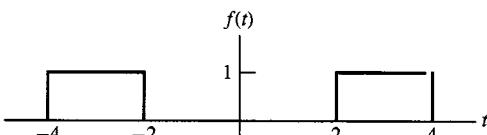
PROBLEMA P16.47

16.48. Determine la transformada de Fourier.



PROBLEMA P16.48

16.49. Obtenga la transformada de Fourier de $f(t)$.



PROBLEMA P16.49

16.50. Obtenga las transformadas de Fourier de los generadores $f_T(t)$ con tiempo inicial $t_0 = 0$ y duración T , para cada uno de los siguientes:

(a) Figura 16.2(a)

- (b) Figura 16.2(b)
- (c) Figura 16.2(c)
- (d) Figura 16.2(d)

16.51. Obtenga la transformada de Fourier de $f(t) = te^{-6t}u(t-2)$.

16.52. Obtenga las transformadas de Fourier de $e^{-\alpha t} \cos \beta t u(t)$ y $e^{+\alpha t} \cos \beta t u(-t)$ ($\alpha > 0$).

16.53. Obtenga la transformada $D(j\omega)$ de

$$d(t) = 1/\Delta \left[u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right]$$

Notando que $d(t) \rightarrow \delta(t)$ cuando $\Delta \rightarrow 0$, demuestre que el límite de $D(j\omega)$ como $\Delta \rightarrow 0$, coincide con la transformada de Fourier de $\delta(0)$ calculada directamente de la definición integral 16.75.

16.54. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante transformadas de Fourier:

- (a) $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$
- (b) $\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}u(t)$
- (c) $\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$
- (d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-4|t|}$
- (e) $\frac{d^2y_2}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-|t|}$
- (f) $\frac{d^3y}{dt^3} = te^{-t}u(t)$

16.55. Obtenga las transformadas inversas de Fourier

- (a) $\frac{6}{j\omega - 3}$
- (b) $\frac{6}{\omega^2 + 9}$
- (c) $\frac{2}{(j\omega - 1)(j\omega - 3)}$
- (d) $\frac{j\omega 7}{(j\omega - 1)^3}$

16.56. Un circuito tiene entrada $v_s(t) = e^{-t}u(t)$ y salida $v(t) = (3te^{-t} + 4e^{-t})u(t)$. Obtenga la respuesta de frecuencia $H(j\omega)$ y la salida $v(t)$ si la entrada es $v_s(t) = e^{-|t|} \sin t$.

Problemas usando SPICE

16.57. Utilice SPICE para determinar los valores de los primeros 10 coeficientes de ángulos de fase para la extensión periódica con periodo $T=6$ de la $f(t)$ del problema 16.9.

16.58. Obtenga los 19 valores centrales de la amplitud, fase y espectro de potencia de la extensión periódica del generador

$f(t) = te^{-1000t}$ con tiempo inicial $t_0 = 0$ y $T = 3$ utilizando SPICE.

16.59. Calcule los coeficientes de la serie exponencial de Fourier c_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2$ para el tren de impulsos $f(t)$ con periodo $T = 2\pi$ si $f(t) < \delta(t)$ en el periodo $-\pi \leq t < \pi$. Conviértalo a la forma (16.88) utilizada por SPICE. Ahora utilice SPICE para determinar cuán pequeña debe ser Δ en la aproximación $\delta(t) \approx d(t) = 1/\Delta[u(t) - u(t - \Delta)]$ con el fin de que el componente dc y los dos primeros componentes armónicos de frecuencia reportados por SPICE concuerden en la amplitud (d_0, D_n) y fase (ψ_n) hasta dos figuras significativas. Toda Δ que satisfaga esta condición es aceptable.

16.60. Ayúdese con SPICE para dibujar $|F(j\omega)|$ para $f(t) = (1 - e^{-t})(u(t) - u(t - 2))$. Primero, obtenga un circuito simple de trayectoria cerrada que contenga una fuente dc cuya respuesta forzada sea $v(t) = 1 - e^{-t}$. Luego utilice $v(t)$, $0 \leq t < 2$ y SPICE para obtener $|F(j\omega)|$, $\omega = n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 9$. Dibuje $|F(j\omega)|$ con base en estos valores de muestra.

Problemas más complejos

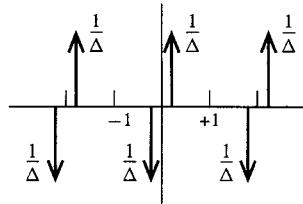
16.61. Demuestre que si $f(t)$ es periódica, df/dt es también periódica y que su periodo es menor o igual a T . De ejemplos de ambos casos. Es $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ periódica? ¿Bajo qué condiciones?

16.62. Sean a_n, b_n los coeficientes de la serie de Fourier de $f(t)$. Defina $g(t) = f(t - \tau)$ como $f(t)$ desplazada respecto al tiempo a la derecha de τ . Para las siguientes τ 's, determine a'_n, b'_n , los coeficientes de $g(t)$, en términos de a_n y b_n . T es el periodo

de $f(t)$.

- (a) $\tau = T/2$
- (b) $\tau = T$
- (c) $\tau = -T/2$
- (d) $\tau = +T/4$
- (e) $\tau = -I/4$
- (f) $\tau = -10T$

16.63. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para la $f(t)$ que se muestra. El generador ($t_0 = -1$, $T = 2$) es $f_T(t) = \frac{1}{\Delta}(\delta(t - \Delta) - \delta(t + \Delta))$. Entonces obtenga la serie límite de Fourier cuando $\Delta \rightarrow 0$.



PROBLEMA P16.63

16.64. Demuestre que si $f(t)$ tiene simetría de semionda, es decir, $f[t + T/2] = -f(t)$, es decir $c_n = 0$ para todo n par.

16.65. Utilice SPICE para determinar 10 coeficientes de la serie de Fourier para la extensión periódica del generador $f_T(t) = (t + 1)^2(u(t) - u(t - 2))$. Utilice tiempo inicial $t_0 = -1$ y duración $T = 2$.

Apéndice A

Métodos de matrices

Un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned} \tag{A.1}$$

puede escribirse de forma compacta mediante una sola ecuación vector-matriz, luego se utilizan métodos de matrices para solucionarla. Los conjuntos de ecuaciones de este tipo (A.1) surgen de forma natural al aplicar a los circuitos lineales métodos sistemáticos de análisis de circuitos, tales como análisis nodal o de malla. A continuación resumiremos los elementos de álgebra lineal que producen la forma vector-matriz y su solución por inversión de matrices, la regla de Cramer y la eliminación de Gauss.

A.1

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LAS MATRICES

Una *matriz A* de dimensión de m renglones por n columnas es un arreglo ordenado de valores a_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; la suma de matrices $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ se define para matrices de la misma dimensión $m \times n$, como suma por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

La multiplicación escalar $k\mathbf{A}$, la operación de multiplicar una matriz \mathbf{A} por una escalar k , se define como multiplicación elemento \mathbf{A} por k :

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

La multiplicación de matrices \mathbf{AB} se define entre pares ordenados de matrices, tales que la dimensión de la columna de la matriz izquierda \mathbf{A} es igual a la dimensión de renglones de la matriz derecha \mathbf{B} , en cuyo caso, las matrices se designan *conformables*. Dadas matri-

ces conformables \mathbf{A} de dimensión $m_A \times n_A$ y \mathbf{B} de dimensión $m_B \times n_B$ ($n_A = m_B$), su producto de matrices

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

está definido como la matriz \mathbf{C} $n_A \times m_B$ cuyos elementos son

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_A} a_{ik} b_{kj}$$

La multiplicación de matrices $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ puede realizarse escribiendo \mathbf{A} abajo y a la izquierda de \mathbf{B} , y luego extendiendo los renglones de \mathbf{A} y columna de \mathbf{B} hacia el espacio que se forma de este modo, como se muestra en la figura A.1. Cada intersección corresponde a un elemento de la matriz \mathbf{C} . Para determinar su valor, debemos ir a partir de una intersección dada al elemento más lejano en \mathbf{A} y \mathbf{B} , sobre las “huellas”, que se intersecan, y se multiplican estos escalares entre sí. Luego nos movemos un elemento más cerca a la intersección sobre ambas huellas, se multiplican estos elementos y se suman al anterior. Esto debe repetirse hasta que se llega a la intersección, y ahí se escribe el valor acumulado. Si el número de elementos sobre las huellas no cazan exactamente, entonces las matrices no son conformables.

Una matriz $x m \times 1$ con una sola columna, se conoce como *vector columna*, o simplemente *vector*. Los elementos $x_i, i=1, \dots, n$ de un vector \mathbf{x} necesitan un solo índice, indicando el renglón del elemento. Siguiendo las reglas de la multiplicación de matrices, el producto de una matriz $\mathbf{A} m \times n$ y un n -vector \mathbf{x} es una matriz $m \times 1$, o m -vector \mathbf{y} ,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (\text{A.3})$$

cuyos elementos son, para $i = 1, \dots, m$,

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (\text{A.4})$$

Necesitaremos la operación de multiplicación de matrices, para convertir ecuaciones a nuestra forma deseada, y para resolver la ecuación resultante.

Finalmente, la *transpuesta* \mathbf{A}^T de una matriz $\mathbf{A} m \times n$ se define como la matriz $n \times m$ cuyos elementos (i, j) es el elemento (j, i) de \mathbf{A} . Es decir, \mathbf{A}^T es la imagen especular de \mathbf{A} que es girada respecto a la diagonal principal. La matriz transpuesta nos será muy útil para calcular la inversa de una matriz, lo que haremos en breve.

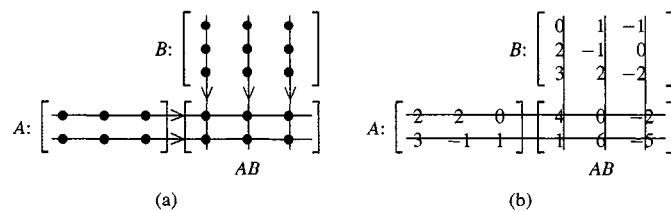


FIGURA A.1 Multiplicación de matrices.

A.2

CONVERSIÓN A LA FORMA DE VECTOR-MATRIZ

Un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas, tales como (A.1), puede convertirse fácilmente a una sola ecuación de la forma (A.3), y se dice de ésta que está en *forma de vector-matriz*, donde \mathbf{x} se designa como el vector incógnita, y el vector conocido y \mathbf{A} la matriz de

conexión. Comencemos asignando las n incógnitas en el conjunto de ecuaciones escalares, como los n elementos del vector \mathbf{x} . Luego, a partir de (A.4), consideremos a la primera ecuación dada como el primer renglón de una ecuación vector-matriz (A.3). Esto requiere que y_i con $i = 1$ en (A.4) coincida con y_1 en (A.1), y que los elementos del primer renglón de la matriz de conexión A coincidan con los coeficientes de la primera ecuación en (A.1). Siguiendo de esta manera para cada renglón, la forma vector-matriz (A.3), puede escribirse por inspección del conjunto de ecuaciones escalares (A.1).

Por ejemplo, considérense las tres ecuaciones en tres incógnitas

$$\begin{aligned} 3v_1 + v_2 - 2v_3 &= 0 \\ v_1 - 2v_2 - v_3 &= -6 \\ -v_1 + v_2 - 2v_3 &= 2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La convertiremos a la forma vector-matriz $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ con

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

nos dará

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Según (A.4) con $i = 1$, debemos tener

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = 0$$

Comparando la primera ecuación en (A.5), entonces $a_{11} = 3$, $a_{12} = 1$, y $a_{13} = -2$. Repitiendo el mismo procedimiento para el segundo y tercer renglón, la forma vector-matriz deseada de las ecuaciones (A.5) es

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Durante el resto del presente apéndice, resumiremos métodos para resolver la ecuación vector-matriz $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ en caso de que la matriz de conexión A sea cuadrada o, en otras palabras, que haya tantas incógnitas como ecuaciones.

A.3

DETERMINANTES

Los dos métodos principales para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, la regla de Cramer y la inversión de matrices, dependen de calcular determinantes. Sea A una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$. El determinante Δ de A , denotado como $|\mathbf{A}|$, es una función escalar de A , que se calcula de la forma siguiente. Para $n = 1$, A es la matriz $1 \times 1 a_{11}$, y es su propio determinante.

$$\Delta = a_{11} \quad (\text{A.6})$$

Para $n = 2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{A.7})$$

Esquemáticamente, esto puede pensarse como la *regla en diagonal*. Es decir,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{A.8})$$

o Δ es la diferencia del producto $a_{11}a_{22}$ de elementos sobre la diagonal que apunta hacia la derecha, y el producto $a_{12}a_{21}$ de los elementos sobre la diagonal hacia la izquierda.

Como ejemplo, el determinante, 2×2

dado por

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (1)(4) - (2)(-3) = 10$$

Un determinante de tercer orden, de 3×3 , tal como

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.9})$$

también puede evaluarse por la regla diagonal, dada por

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \end{array} \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

El valor del determinante es una diferencia de los productos de elementos sobre las tres diagonales que apuntan hacia la derecha, y los productos de los elementos sobre las tres diagonales que apuntan hacia la izquierda.

Un ejemplo de un determinante de tercer orden, y su cálculo, está dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [(1)(-1)(2) + (1)(1)(-1) + (1)(1)(2)] \\ &\quad [(1)(-1)(-1) + (1)(1)(1) + (2)(2)(1)] \\ &= -7 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Puede darse y utilizarse una definición general de los determinantes para derivar varios procedimientos y evaluarlos. Esta es la técnica que generalmente aparece en los libros de álgebra elemental. Sin embargo, para nuestros propósitos, utilizaremos las reglas diagonales que hemos considerado para los determinantes de segundo y tercero orden, y evaluaremos los determinantes de orden mayor por el método de expansión por *menores o cofactores*.

El menor A_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz que queda luego de que se eliminan el renglón i -ésimo y la columna j -ésima. Por ejemplo, en (A.11) el menor A_{21} del elemento $a_{21} = 2$ (segundo renglón, primera columna), es

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

El *cofactor* C_{ij} del elemento a_{ij} está dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} \quad (\text{A.12})$$

En otras palabras, el cofactor es el menor con *signo*, el menor multiplicado por ± 1 donde el signo depende de si la suma del número de renglón y el número de columna es par o impar.

El valor de un determinante es la suma de los productos de los elementos en cualquier renglón o columna y sus cofactores. Por ejemplo, expandamos el determinante de (A.9) mediante cofactores de la primera columna. El resultado es

$$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

o, por (A.12)

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\ &= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

Escribiendo explícitamente los menores, obtenemos,

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Por regla diagonal, esto puede ser escrito como

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

lo que puede simplificarse a (A.10).

Para ilustrar la expansión por menores, evaluemos el determinante de (A.11) aplicando la técnica a la tercera columna. Obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta &= 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2 - 1) - (1 + 1) + 2(-1 - 2) = -7 \end{aligned}$$

A.4

REGLA DE CRAMER

El primer método que resumiremos para resolver la ecuación vector-matriz,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

donde A es una matriz con conexión cuadrada $n \times n$ y \mathbf{x} y \mathbf{y} son n -vectores, se conoce como regla de Cramer. Esta regla postula que el componente i -ésimo x_i , $i=1, \dots, n$ de la solución es

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

donde Δ es el determinante de A y Δ_i es el determinante de la matriz formada al sustituir la columna i -ésima de A por el vector conocido \mathbf{y} . Si $\Delta = 0$, claramente esta regla no puede aplicarse, y se dice que A es *no invertible*. Los conjuntos de ecuaciones con matrices de conexión no invertibles no tienen soluciones únicas, y serán discutidas posteriormente.

El caso que resolveremos para ilustrar la regla de Cramer es la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

que, evidentemente, es la forma vector-matriz que corresponde a las ecuaciones escalares

$$x_1 - 2x_2 = 5$$

$$6x_1 + x_2 = 4$$

La regla de Cramer postula que

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5(1) - 4(-2)}{1(1) - 6(-2)} = 1$$

y

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1(4) - 5(6)}{1(1) - 6(-2)} = -2$$

donde los determinantes son calculados por (A.7). La regla de Cramer es particularmente eficiente cuando se necesita únicamente de un pequeño número de elementos del vector de incógnitas.

A.5

INVERSIÓN DE MATRICES

El segundo método que resumiremos para resolver la ecuación vector-matriz

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (\text{A.13})$$

donde \mathbf{A} es una matriz cuadrada de conexión $n \times n$ y \mathbf{x} y \mathbf{y} son n -vectores, se conoce como inversión de matrices. Supongamos que podemos obtener una matriz $n \times n \mathbf{A}^{-1}$, que tiene la propiedad de

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (\text{A.14})$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad $n \times n$ [cada (i, i) es 1, cada elemento (i, j) es 0 para i distinta de j]. Luego, premultiplicando ambos lados de (A.13) por \mathbf{A}^{-1} ,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad (\text{A.15})$$

puesto que $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$ para cualquier matriz conformable \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad (\text{A.16})$$

lo que es la solución deseada. La matriz \mathbf{A}^{-1} , se conoce como *inversa de A*.

Para determinar \mathbf{A}^{-1} , comenzemos calculando la $n \times n$ cuyo elemento (i, j) -ésimo, es el cofactor C_{ij} definido en (A.12). La transpuesta de esta matriz de cofactores se denota como \mathbf{A} (*adjunto de A*). Entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{A}}{\Delta} \quad (\text{A.17})$$

donde, como siempre, Δ es el determinante de \mathbf{A} . La ecuación (A.17) es el caso de multiplicación escalar, es decir, la multiplicación de una matriz ($\text{adj } \mathbf{A}$) por un escalar ($1/\Delta$), que se definió en la sección A.3.

Para ilustrarlo, resolveremos la ecuación vector-matriz resuelta utilizando la regla de Cramer en la subsección anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La determinante de \mathbf{A} es

$$\Delta = (1)(1) - (-2)(6) = 13$$

Podemos obtener cada cofactor C_{ij} eliminando el renglón i -ésimo de la columna j -ésima de \mathbf{A} , calculando el determinante de lo que queda, y multiplicando por $(-1)^{i+j}$. Luego de eliminar el primer renglón y la primera columna, C_{11} es el determinante de la matriz 1×1 restante $+ 1$, multiplicada por $(-1)^{1+1}=1$, o $+1$. Podemos obtener C_{12} eliminando el primer renglón y la segunda columna, calculando el determinante de la matriz, 6 , y multiplicando por $(-1)^{1+2}=-1$. Procediendo de este modo, la matriz de cofactores es

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y luego de transponer, para obtener la adjunta, la inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\Delta} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-6}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Luego, aplicando (A.16), la solución es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-6}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

lo que concuerda con el resultado que obtuvimos utilizando la regla de Cramer. Con frecuencia la matriz de inversiones es más eficiente que el uso repetido de la regla de Cramer, cuando se requiere la mayoría o todos los elementos del vector incógnito.

A.6

ELIMINACIÓN DE GAUSS

El último método para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ para matrices cuadradas \mathbf{A} , basadas en la eliminación sucesiva de incógnitas, se conoce como eliminación de Gauss. A diferencia de la regla de Cramer y la inversión de matrices, puede desarrollarse sin recurrir al formalismo de matrices. A continuación lo presentaremos como método de matrices, puesto que también es útil en ese contexto.

Ilustraremos el método para un caso 3×3 ; la generalización a otras dimensiones es evidente. Consideremos la ecuación vector-matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Nuestro primer objetivo será *triangular* la matriz, es decir, sustituir los elementos bajo la diagonal principal por ceros. Desde luego, podemos considerar (A.18) como el conjunto de tres ecuaciones en tres incógnitas:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7\end{aligned}$$

Supongamos que restamos dos veces la primera ecuación a la segunda, y usamos esto como una nueva segunda ecuación. De manera similar, sumemos la primera ecuación a la tercera, y sustituimos la tercera ecuación anterior por ésta. Nuevamente, en forma de vector-matriz,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array} \right] \quad (\text{A.19})$$

Nótese el conjunto de ceros en la primera columna bajo la diagonal principal. Luego sumemos dos tercios de la segunda ecuación a la tercera, con lo que se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & 7 \end{array} \right]$$

La matriz tiene forma de matriz *triangular superior*. La ecuación renglón final puede resolverse ahora fácilmente para x_3 , puesto que no hay otras incógnitas en esta ecuación. La solución es $x_3 = 3$. Subiendo un renglón, luego de sustituir el valor x_3 , la segunda ecuación tiene una sola incógnita x_2 . Dividiendo esta ecuación entre -3 , obtenemos

$$x_2 = 3 - \frac{x_3}{3} = 3 - 1 = 2$$

y volviendo a la sustitución en la ecuación del primer renglón,

$$x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 2 - 3 = 1$$

lo que completa la solución.

El método de eliminación de Gauss, puede ser visto como la formación de una matriz aumentada que contiene tanto \mathbf{A} como \mathbf{y} . En el caso del elemento que recién termina, esto es la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

Restando dos veces el primer renglón del segundo, y sumando el primer renglón al tercero, la matriz aumentada se convierte en

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array} \right]$$

(compárese con A.19). Sumando dos tercios del segundo renglón al tercero, y luego dividiendo el segundo renglón entre -3 y el tercero entre $\frac{7}{3}$, se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

El último renglón revela que $x_3 = 3$. Puede instrumentarse el proceso de sustitución en la matriz aumentada, restando un tercio del último renglón del segundo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y luego, restando el segundo y tercer renglones del primero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El último elemento en el renglón superior es $x_1 = 1$, el segundo renglón $x_2 = 2$, y el último renglón, $x_3 = 3$, como se calculó anteriormente. El proceso de transformar las primeras n columnas a la matriz identidad, resulta en la solución deseada como la columna restante.

Apéndice B

Números complejos y la exponencial compleja

B.1

NÚMEROS COMPLEJOS

Desde nuestra primera formación en aritmética, manejamos números *reales*, como 3, -5 , $\frac{4}{7}$, π , y así sucesivamente, que pueden utilizarse para medir distancias sobre la *línea real*, desde un punto fijo. Un número x que satisface

$$x^2 = -4 \quad (\text{B.1})$$

no es un número real y se acostumbra, desafortunadamente, llamarlo número *imaginario*. Para manejar números imaginarios, se define una *unidad imaginaria*, denotada por j ,

$$j = \sqrt{-1} \quad (\text{B.2})$$

De este modo, tenemos $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, y así sucesivamente. (Cabe hacer notar que las matemáticas utilizan el símbolo i como la unidad imaginaria, pero en ingeniería eléctrica, esto puede confundirse con corriente.) Un número imaginario se define como el producto de j con un número real, tales como $x = j2$. En este caso, $x^2 = (j2)^2 = -4$, y por consiguiente, x es una solución de (B.1).

Un número *complejo*, es la suma de un número real y un número imaginario, tal como

$$A = a + jb \quad (\text{B.3})$$

donde a y b son reales. El número complejo A tiene una *parte real*, a , y una *parte imaginaria*, b , que a veces se expresa como

$$a = \operatorname{Re} A$$

$$b = \operatorname{Im} A$$

Es importante hacer notar que ambas partes son reales, a pesar de sus nombres.

El número complejo $a + jb$ puede representarse sobre un plano de coordenadas rectangulares, o un *plano complejo*, interpretándolo como un punto (a, b) . Es decir, la coordenada horizontal es a y la coordenada vertical es b , como se muestra en la figura B.1, para el

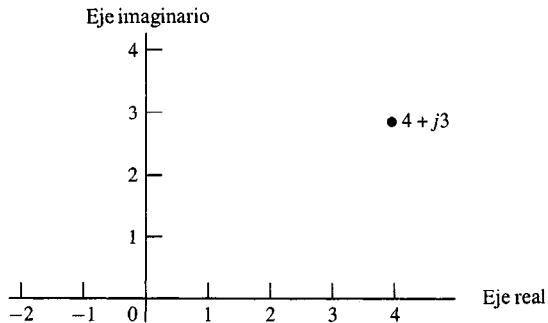


FIGURA B.1 Representación gráfica de un número complejo.

caso $4 + j3$. Debido a esta analogía con puntos graficados en un sistema de coordenadas rectangulares, (B.3) se designa a veces como la *forma rectangular* del número complejo A.

El número complejo $A = a + jb$ puede ser situado de forma única en el plano complejo especificando su distancia r sobre una línea recta a partir del origen, y el ángulo θ hace esta línea respecto al eje real, como se muestra en la figura B.2. A partir del triángulo rectángulo que se forma de este modo, podemos ver que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (B.4)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

y que

$$a = r \cos \theta \quad (B.5)$$

$$b = r \sin \theta$$

Denotamos esta representación del número complejo por

$$A = r/\theta \quad (B.6)$$

que se conoce como *forma polar*. El número r se conoce como su *magnitud*, y a veces se denota por

$$r = |A|$$

El número θ es el *ángulo* o *argumento*, y con frecuencia se denota por

$$\theta = \text{ang } A = \arg A$$

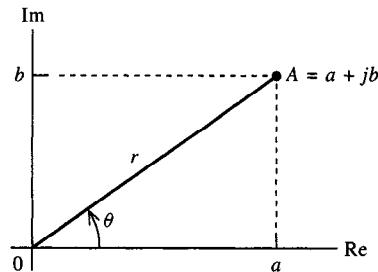


FIGURA B.2 Dos representaciones de un número complejo.

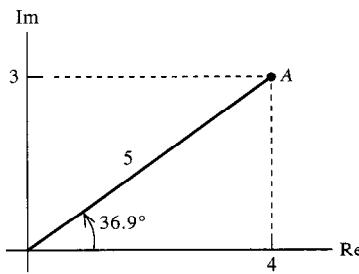


FIGURA B.3 Dos representaciones de un número complejo A .

Podemos convertir fácilmente de la forma rectangular a la polar, o viceversa, mediante (B.4) y (B.5). Por ejemplo, el número A , que se muestra en la figura B.3, está dado por

$$A = 4 + j3 = 5/36.9^\circ$$

puesto que por (B.4)

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36.9^\circ$$

El *conjugado* del número complejo A , se define como $A = a + jb$

$$A^* = a - jb \quad (\text{B.7})$$

Es decir, j sustituido por $-j$. Puesto que tenemos

$$|A^*| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |A|$$

y

$$\arg A^* = \tan^{-1} \left(\frac{-b}{a} \right) = -\tan^{-1} \frac{b}{a} = -\arg A$$

podemos escribir, en forma polar,

$$(r/\theta)^* = r/-\theta \quad (\text{B.8})$$

Podemos notar a partir de la definición que si A^* es el conjugado de A , entonces A es el conjugado de A^* . Es decir, $(A^*)^* = A$.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, se aplican a los números complejos exactamente como se aplican a los números reales. En el caso de suma y resta, podemos escribir, de forma general,

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \quad (\text{B.9})$$

y

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d) \quad (\text{B.10})$$

Es decir, para sumar (o restar) dos números complejos, simplemente sumamos (o restamos) sus partes reales y sus partes imaginarias.

Como ejemplo, sean $A = 3 + j4$ y $B = 4 - j1$. Entonces

$$A + B = (3 + 4) + j(4 - 1) = 7 + j3$$

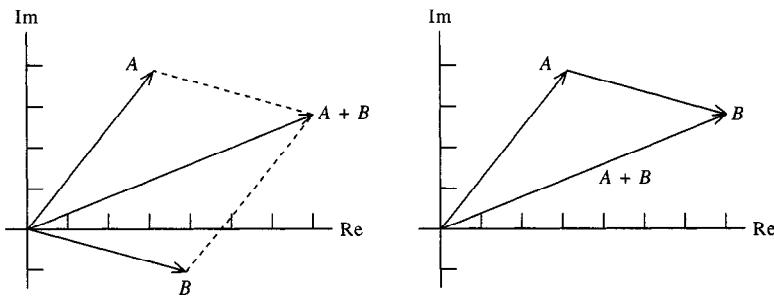


FIGURA B.4 Dos métodos gráficos para sumar.

Esto también puede hacerse gráficamente, como se muestra en la figura B.4(a), donde los números A y B , están representados como vectores a partir del origen. El resultado es equivalente a completar el paralelogramo, o a conectar las puntas de flecha de los vectores A y B como se muestra en la figura B.4(b), como lo puede comprobar el lector comparando los números. Por esta razón, la suma de números complejos, a veces se conoce como suma vectorial.

En el caso de la multiplicación de los números A y B , dados por

$$\begin{aligned} A &= a + jb = r_1 \cos \theta_1 + jr_1 \sin \theta_1 \\ B &= c + jd = r_2 \cos \theta_2 + jr_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

tenemos

$$\begin{aligned} AB &= (a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc + j^2 bd \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Alternativamente, tenemos de (B.11)

$$\begin{aligned} AB &= (r_1 \cos \theta_1 + jr_1 \sin \theta_1)(r_2 \cos \theta_2 + jr_2 \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Por consiguiente, en la forma polar tenemos

$$(r_1/\theta_1)(r_2/\theta_2) = r_1 r_2 / \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{B.13})$$

Por consiguiente, podemos multiplicar dos números multiplicando sus magnitudes y sumando sus ángulos.

De este resultado podemos ver que

$$AA^* = (r/\theta)(r/-\theta) = r^2 / 0 = |A|^2 / 0$$

Puesto que $|A|^2 / 0$ es el número real $|A|^2$, tenemos

$$|A|^2 = AA^* \quad (\text{B.14})$$

Al dividir un número complejo entre otro, tal como

$$N = \frac{A}{B} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

resulta en un denominador irracional, puesto que $j = \sqrt{-1}$. Podemos racionalizar el denominador y mostrar las partes real e imaginaria de N escribiendo

$$N = \frac{AB^*}{BB^*} = \frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{c-jd}{c-jd}$$

la cual es

$$N = \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2} \quad (\text{B.15})$$

También podemos demostrar mediante el método utilizado para obtener (B.13) que

$$\frac{r_1/\theta_1}{r_2/\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}/\underline{\theta_1 - \theta_2} \quad (\text{B.16})$$

Como ejemplo, sean $A = 4+j3 = 5/\underline{36.9^\circ}$ y $B = 5+j12 = 13/\underline{67.4^\circ}$. Entonces tenemos

$$AB = (5)(13)/\underline{36.9^\circ + 67.4^\circ} = 65/\underline{104.3^\circ}$$

y

$$\frac{A}{B} = \frac{5}{13}/\underline{36.9^\circ - 67.4^\circ} = 0.385/\underline{-30.5^\circ}$$

Evidentemente, es más fácil sumar y restar números complejos en su forma rectangular, y multiplicar y dividirlos en su forma polar.

B.2

FUNCIONES EXPONENCIALES COMPLEJAS

Los números complejos se utilizan ampliamente en la ingeniería eléctrica, debido a la íntima relación entre los senos y cosenos reales y la *función exponencial compleja* $e^{j\theta}$. Para exponer esta relación, definamos

$$g = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{B.17})$$

Diferenciando,

$$\frac{dg}{d\theta} = j(\cos \theta + j \sin \theta) = j\theta$$

Esta es una ecuación diferencial lineal no forzada de primer orden, con solución general $ke^{s\theta}$. Donde s satisface la ecuación característica

$$s - j = 0$$

y evaluando (B.17) en $\theta = 0$, $k = 1$. De este modo $g = e^{j\theta}$ y, por (B.17),

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{B.18.a})$$

Convirtiéndolo a la forma polar y notando que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,

$$e^{j\theta} = 1/\theta \quad (\text{B.18.b})$$

Las ecuaciones (B.18a, b), son las formas rectangular y polar de la *fórmula de Euler*, o la *identidad de Euler*. Sustituyendo θ por $-\theta$ en (B.18a),

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (\text{B.19})$$

Combinando (B.18a) y (B.19),

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (\text{B.20a})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \quad (\text{B.20b})$$

La forma polar de la fórmula de Euler (B.18b) sugiere que todo número complejo puede representarse como exponencial compleja. Sea x un número complejo con magnitud $r \geq 0$ y un ángulo θ . Entonces,

$$\begin{aligned} x &= r/\theta \\ &= (r/0)(1/\theta) \\ &= re^{j\theta} \end{aligned}$$

De este modo, junto con las formas rectangular y polar para representar números complejos, tenemos la *forma exponencial*

$$x = a + jb \text{ (forma rectangular)} \quad (\text{B.21a})$$

$$= r/\theta \text{ (forma polar)} \quad (\text{B.21b})$$

$$= re^{j\theta} \text{ (forma exponencial)} \quad (\text{B.21c})$$

Por ejemplo, el número complejo en forma rectangular $x = 1 + j$ tiene representación polar $x = \sqrt{2}/45^\circ$ y exponencial $x = \sqrt{2}e^{j45^\circ}$.

Un uso principal de la forma exponencial, es para formar exponenciales complejas de fase desplazada. Por ejemplo, supongamos

$$i(t) = xe^{j\omega t} \quad (\text{B.22})$$

donde x es un número complejo. Luego, utilizando la forma exponencial (B.21),

$$i(t) = re^{j\theta} e^{j\omega t} = re^{j(\omega t + \theta)}$$

Por la fórmula de Euler (B.18a), este último es fácilmente reconocible como aquella que tiene la parte real $r \cos(\omega t + \theta)$ y la parte imaginaria $r \sin(\omega t + \theta)$. La resta de partes real e imaginaria de expresiones como (B.22), es una parte integral del análisis fasorial.

La forma exponencial puede utilizarse para justificar de forma concisa las fórmulas de multiplicación y división que se presentaron anteriormente. Sean

$$x = r_1/\theta_1, \quad y = r_2/\theta_2$$

Entonces

$$\begin{aligned} xy &= (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= r_1 r_2 / (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

como se aseguró en (B.13), y

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} / (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

como en (B.16)

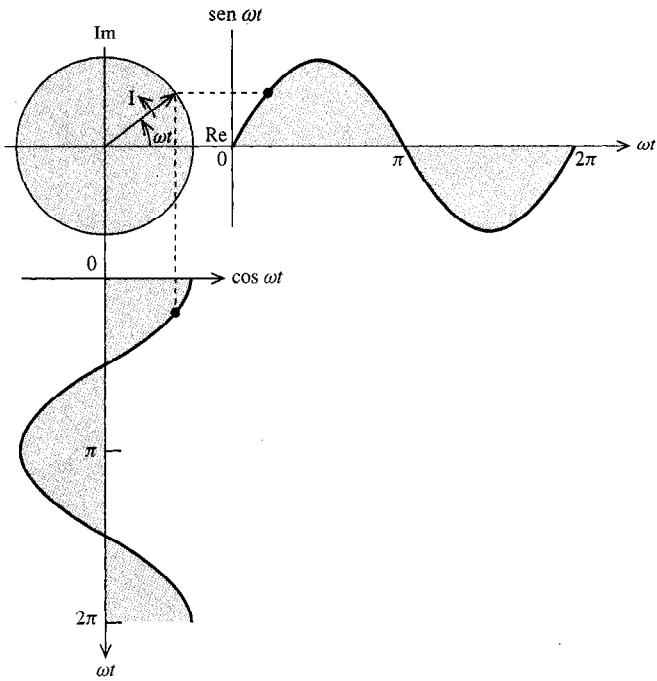


FIGURA B.5 Ilustración gráfica de la fórmula de Euler.

En la figura B.5 se ilustra gráficamente la fórmula de Euler. Un vector unitario gira alrededor de un círculo de la dirección que se muestra, con velocidad angular de ω rad/s. Por consiguiente, en ωt segundos se mueve a través de un ángulo t como se muestra, y por consiguiente, el vector puede especificarse por $1/\omega t$ o $e^{j\omega t}$. Su parte real es la proyección sobre el eje horizontal, dado por $\cos \omega t$, y la parte imaginaria es la proyección sobre el eje vertical, dado por $\sin \omega t$. Es decir,

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

lo que es la fórmula de Euler en la fórmula (B.18a). Las proyecciones siguen las ondas seno y coseno, como se muestra, conforme el vector gira con periodo $\omega T = 2\pi$ o $T = 2\pi/\omega$.

Apéndice C

Topología de circuitos

Los métodos generales de análisis nodal y de malla enfatizados en el presente texto, resultan en un número igual de ecuaciones e incógnitas. Esto, en sí, no es suficiente para garantizar que podemos utilizar estas ecuaciones para “descomponer” el circuito, es decir, evaluar sus incógnitas, los voltajes de nodo o corrientes de malla, y a partir de ellos los demás voltajes y corrientes. Es fácil escribir k ecuaciones con k incógnitas para los que no hay soluciones, o para las que existen un número infinito de soluciones igualmente válidas. En ninguno de los casos podríamos completar el análisis de circuito a partir de estas ecuaciones. Es decir, obtener valores únicos para todas las corrientes y voltajes.

En el presente apéndice, presentaremos algunos de los resultados más importantes de un estudio de *topología* de circuito, o la forma en que los elementos se interconectan. Esto resulta ser una forma efectiva para determinar cuántas ecuaciones se requieren para analizar un circuito dado, cuáles son independientes, y cuál es el conjunto de ecuaciones más eficiente para el análisis. Buscaremos los conjuntos más pequeños de ecuaciones con número igual de incógnitas, en tanto que trataremos de evitar la trampa doble de un número infinito de soluciones, o que no exista ninguna solución.

C.1

GRÁFICAS DE REDES

Al estudiar la topología de un circuito, no distinguiremos a los elementos individuales por *lo que son*, resistencias, fuentes de corriente, y así sucesivamente, sino por *dónde* están. La configuración de líneas y nodos formadas siguiendo elementos de un circuito por líneas sin características se conoce como *gráfica de circuito* o *gráfica de red*. Para enfatizar la gran generalidad de esta gráfica, su capacidad para representar redes de todo tipo, y o sólo circuitos eléctricos, la designaremos como gráfica de redes a partir de este momento. Las líneas en una gráfica de redes, se designan como sus *ramas*.

Una gráfica de redes es *conexa* si existe una trayectoria entre dos nodos cualesquiera. Nuestra discusión supondrá que la gráfica es conexa, puesto que, si no lo es, cada parte disjunta puede ser analizada separadamente, como gráfica conexa.

Un *árbol* es una subgráfica con todos los nodos de la gráfica de redes completa, pero sin trayectorias cerradas. Un ejemplo de un circuito simple, subgráfica de redes y dos árboles distintos, aparecen en la figura C.1. En tanto que una gráfica de redes dada con B

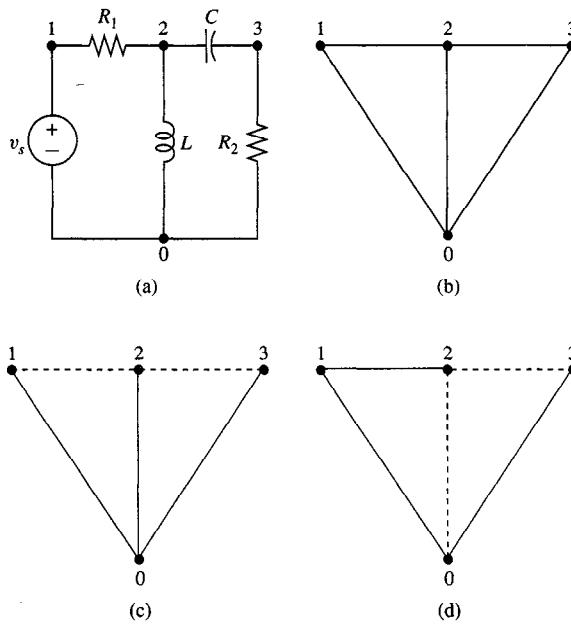


FIGURA C.1 (a) Circuito; (b) gráfica de red; (c) un árbol; (d) otro árbol.

ramas y N nodos puede tener muchos árboles, cada árbol tiene exactamente $N - 1$ ramas. Esto proviene del hecho de que debe conectar todos los N nodos, pero no puede tener ninguna trayectoria cerrada. Las ramas en un árbol, se conocen como *ramas del árbol*, y las ramas restantes se conocen como *eslabones*. Por ejemplo, la rama b_{01} conecta los nodos 0 y 1 en la figura C.1 es una rama de árbol para los tres árboles que se muestran, en tanto que b_{02} es una rama de árbol para la figura C.1(c) y un eslabón para el árbol de la figura C.1(d). Puesto que hay $N - 1$ ramas de árbol, deben haber $B - (N - 1) = B - N + 1$ eslabones en cualquier árbol. El conjunto de estos $B - N + 1$ se conoce como *coárbol*, asociado con un árbol dado. La unión del árbol y el coárbol, es la totalidad de la gráfica de redes.

C.2

ANÁLISIS NODAL

Considérese una gráfica de redes con N nodos, B ramas y un árbol dado. Sumando un solo eslabón al árbol, resulta en una trayectoria cerrada, puesto que hay una trayectoria en el árbol entre los nodos a cada extremo del eslabón, y la segunda trayectoria formada por el eslabón en sí, debe cerrar una trayectoria. De este modo, por LVK, el voltaje del eslabón está fijo por los tres voltajes de ramas. Por otra parte, el conjunto de voltaje de ramas de árbol en sí, no tienen ninguna limitación por LVK, puesto que no contienen ninguna trayectoria cerrada. Los voltajes de las ramas del árbol pueden tener cualquier conjunto de valores independientemente uno del otro. Puesto que los $N - 1$ voltajes de ramas de árbol son un conjunto independiente de voltajes, y los voltajes de eslabón restante $B - N + 1$, están fijos por los voltajes de las ramas del árbol. Todos los voltajes de rama pueden expresar en términos de los $N - 1$ voltajes de las ramas de los árboles.

Sabemos bien que un conjunto de k ecuaciones independientes con k incógnitas poseen una solución única. Por consiguiente, si podemos obtener $N - 1$ ecuaciones independientes en los $N - 1$ voltajes de las ramas de los árboles, podemos obtener sus valores,

puesto que fijan los voltajes de eslabón, también todos los voltajes restantes. Del conjunto completo de voltajes resultante podemos recuperar las corrientes mediante las leyes de elementos $i-v$. Por consiguiente, si podemos obtener $N-1$ ecuaciones independientes en los voltajes de las ramas del árbol, esto será suficiente para un análisis de red completo.

Escribamos LCK en cualquier nodo en la gráfica de red. Moviéndonos hacia cualquier otro nodo, la ecuación LCK en este segundo nodo debe ser independiente del primero si, $N > 2$. Esto resulta del hecho de que la segunda ecuación contiene por lo menos una rama no referida en la primera ecuación. Si la segunda ecuación contuviera las mismas ramas que la primera, toda rama conectada a un nodo terminaría en el otro, en otras palabras, $N=2$. Moviéndonos a un tercer nodo, su LCK contiene una nueva rama no referida en ninguna de las dos primeras, siempre y cuando $N > 3$, o, si no es así, entonces $N=3$. Concluimos que cualquier conjunto de $N-1$ ecuaciones nodales LCK es independiente.

Por ejemplo, haciendo referencia a la figura C.1(c), sea que i_{nm} , se refiera a la corriente que pasa por la rama b_{nm} del nodo n al nodo m . Entonces LCK en el nodo 0 es

$$i_{01} + i_{02} + i_{03} = 0$$

y LCK en el nodo 1 es

$$i_{10} + i_{12} = 0$$

Esta segunda ecuación tiene una nueva corriente de rama, i_{12} , no en la primera, de forma que es independiente. LCK en el nodo 2 es

$$i_{21} + i_{20} + i_{23} = 0$$

Otra vez, la nueva LCK es independiente de las demás, puesto que contiene una nueva corriente de rama, i_{23} . La ecuación LCK final, en el nodo 3, es

$$i_{32} + i_{30} = 0$$

Ninguno de los términos es nuevo en el conjunto de las cuatro ecuaciones nodales, y esta ecuación no es independiente de las primeras tres. De hecho, es sólo la suma negativa de las tres primeras ecuaciones. En esta gráfica de red hay cuatro nodos, $N=4$, hay $N-1=3$ ecuaciones nodales independientes LCK y la cuarta no es independiente de las primeras tres.

Ahora supongamos que escribimos $N-1$ ecuaciones nodales LCK en términos de $N-1$ voltajes de ramas de árbol. Cada voltaje de rama, sea rama de árbol o eslabón, puede expresarse en términos de los $N-1$ voltajes de ramas de árbol y, con la ayuda de las leyes $i-v$, también puede hacerse así con las corrientes de las rama. Puesto que las $N-1$ ecuaciones resultantes en $N-1$ incógnitas son independientes, concluimos que podemos obtener soluciones únicas para los voltajes de las ramas del árbol, y por consiguiente todos sus voltajes y corrientes. Concluimos que todas las $N-1$ ecuaciones nodales LCK en términos de los voltajes de ramas de árbol para cualquier árbol son independientes, y serán suficientes para completar el análisis de circuito.

Generalmente es más conveniente trabajar con voltajes de nodo que con voltajes de árbol de ramas de árbol, puesto que de este modo no necesitamos construir un árbol. $N-1$ voltajes nodales dados, fijan la totalidad del conjunto de $N-1$ voltajes de ramas de árbol, puesto que los voltajes de las ramas de árbol son diferencias de voltaje nodales. Igualmente, los $N-1$ voltajes de ramas de árbol fijan los $N-1$ voltajes nodales, como puede verse al empezar con una rama de árbol conectada con el nodo de referencia, marcando como cero el voltaje en el nodo de referencia, y en el otro voltaje nodal igual al voltaje de la rama del árbol. Puesto que los dos puntos de $N-1$ voltajes son equivalentes entre sí, y 1 es independiente, entonces el otro también debe serlo.

Concluimos que la ecuaciones LCK para cualesquiera $N-1$ nodos escritos en términos de los voltajes de nodos, son independientes, y serán suficientes para completar el

análisis de circuito. A esto nos referimos como análisis nodal en el capítulo 4 y en el resto del texto, y podemos ver que queda garantizado que funcionan para cualquier circuito.¹

C.3

ANÁLISIS DE TRAYECTORIA CERRADA Y ANÁLISIS DE MALLA BÁSICO

Concentrándonos ahora en las corrientes, para cualquier gráfica de red con un árbol dado, el conjunto de corrientes de ramas de árbol es fijado por los valores de los $B - N + 1$ corrientes de eslabón. Esto se debe a que si fijamos en cero todas las corrientes del eslabón, puesto que no hay trayectorias cerradas en el árbol, entonces no hay trayectorias cerradas en ninguna parte, y todas las corrientes de rama de árbol están fijas en cero. Puede asignarse independientemente a las demás, toda corriente de eslabón individual, como puede verse al fijar todas, excepto una en cero, y notando que la última puede tener cualquier valor, puesto que es parte de una trayectoria cerrada sin ningún eslabón en la trayectoria cerrada. Concluimos que el conjunto de $B - N + 1$ corrientes de eslabón es independiente, y las corrientes de rama de árbol están fijas por las corrientes de eslabón.

Si eliminamos todos los eslabones excepto uno de una gráfica de red, nos quedará una sola trayectoria cerrada. Llamaremos al conjunto de estos $B - N + 1$ trayectorias cerradas, una por cada eslabón, como *trayectorias cerradas básicas* asociadas con el árbol dado. El conjunto de ecuaciones LCK escritas alrededor de estas trayectorias cerradas es independiente, puesto que cada ecuación contiene una rama no contenida en ninguna de las demás, es decir, su eslabón definitorio. Por ejemplo, haciendo referencia a la figura C.1(d), con $B = 5$ y $N = 4$, los $B - N + 1 = 2$ eslabones son b_{20} y b_{23} . Las dos trayectorias cerradas básicas se cierran al insertar en primer lugar b_{20} en el árbol, y luego sustituyéndolo con b_{23} . Estas trayectorias cerradas básicas son 2012 y 2302, enumeradas por el orden en que se pasa por sus nodos.

Por consiguiente, $B - N + 1$ ecuaciones LCK independientes alrededor de las trayectorias cerradas básicas, escritas en términos de las $B - N + 1$ corrientes de eslabón, también se conoce como corrientes de *trayectorias cerradas básicas* y pueden ser resueltas para las corrientes de los eslabones. Las corrientes de rama de árbol restantes están fijas por éstas, y, dado el conjunto completo de corrientes de rama, los voltajes de rama resultan aplicando las leyes $i-v$. Concluimos que para cualquier árbol dado, con LVK escrita alrededor de los $B - N + 1$ trayectorias cerradas básicas, en términos de las $B - N + 1$ corrientes de trayectorias cerradas básicas, son independientes, y son suficientes para un análisis de circuito completo. Esto se conoce como *análisis de trayectorias cerradas básicas* y, al igual que el análisis nodal, se garantiza que funciona para cualquier circuito.

Del mismo modo en que nos fue conveniente convertir en el extremo de los voltajes de rama de árbol a los voltajes nódulos en nuestra discusión anterior del análisis nodal, es preferible, donde quiera que esto sea posible, trabajar con mallas en lugar de trayectorias cerradas básicas. Las mallas se definen únicamente para redes planas, aquellas redes cuyas gráficas pueden dibujarse sobre un plan sin que se entrecrece ninguna rama. Se define una malla como una trayectoria cerrada y vacía en una gráfica de *red plana*, es decir, una trayectoria cerrada que no contiene ramas en su interior. Pueden identificarse por inspección, las trayectorias de las corrientes de malla, en tanto que las trayectorias cerradas básicas deben construirse a partir de un árbol.

El conjunto de ecuaciones de malla LVK es independiente, puesto que cada ecuación de malla que añadimos forma por lo menos una nueva rama (si la gráfica de redes contiene

¹ Partiendo de que cada fuente de voltaje define un supernodo que debería ser considerado como un solo nodo (las fuentes de voltaje son topológicamente equivalentes a circuitos cerrados). Por consiguiente, un circuito con cinco nodos y una fuente de voltaje, tendrá tres ecuaciones de análisis nodal, dos nodos que no son de referencia, y uno en el supernodo.

mallas totalmente abarcadas por conjuntos de otras mallas, es necesario sumarlas antes de las mallas que las contienen). Por sus definiciones, hay tantas ecuaciones de malla LVK como corrientes de malla. Además, cada corriente de rama puede expresarse en términos de corriente de malla, y con ayuda de las leyes $i-v$, cada voltaje de rama. Por consiguiente, las ecuaciones de malla LVK escritas en términos de corrientes de malla constituyen un número igual de ecuaciones independientes e incógnitas, y por consiguiente tiene una solución única para las corrientes de malla. Todas las corrientes de malla, y por consiguiente los voltajes de las ramas, pueden determinarse de las corrientes de malla resultantes. Por consiguiente, se garantiza que el análisis de malla es suficiente para completar el análisis de cualquier circuito plano.²

La relativa eficiencia del análisis de malla depende de cuántas ecuaciones se requieren (en comparación a las $N-1$ ecuaciones nodales y las $B-N+1$ ecuaciones de trayectorias cerradas básicas). Supongamos que reconstruimos una red plana dada a razón de una malla por vez. La primera malla tiene tantos nodos como ramas, por ejemplo, k_1 de cada una. La siguiente, y todas las mallas subsiguientes sumadas, sumarán un nodo menos que la rama a la de construcción creciente. Cada rama en la malla nueva también agregará un nuevo nodo, excepto la última rama en la malla, que volverá al circuito previamente reconstruido. Por consiguiente, si se añaden k_2 ramas a la segunda malla, k_3 , en la tercera, y así sucesivamente, al completar la reconstrucción tendremos M mallas, donde

$$\begin{aligned}B &= k_1 + k_2 + \cdots + k_M \\N &= k_1 + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \cdots + (k_M - 1) \\&= B - (M - 1)\end{aligned}$$

de forma que el número de mallas M , es

$$M = B - N + 1 \quad (\text{C.1})$$

que es igual al número de trayectorias cerradas básicas. *Concluimos que las ecuaciones LVK alrededor de las $B-N+1$ trayectorias cerradas básicas asociadas con cualquier árbol, expresadas en términos de corrientes de trayectorias cerradas básicas, o ecuaciones LVK alrededor de las $B-N+1$ mallas en un circuito plano, expresadas en términos de corrientes de malla, son linealmente independientes y suficientes para un análisis de circuito completo.*

Para ilustrarlo, considérese el circuito de la figura C.2(a). En la figura C.2(b) se muestra la gráfica de red, con un árbol en azul. Con este árbol se asocian cuatro trayectorias cerradas básicas: 014530, 03520, 0120 y 3453. La fuente de corriente I_{s1} reduce en uno la cantidad de ecuaciones de trayectoria cerrada necesarias, puesto que la corriente de trayectoria cerrada básica marcada como i_4 , es de hecho igual a I_{s1} , lo que es un valor conocido. Las tres ecuaciones de trayectoria cerrada básicas, asociadas con las tres primeras trayectorias cerradas básicas anteriormente citadas, son

$$\begin{aligned}\text{Trayectoria cerrada básica 1: } & (R_1 + R_2 + R_6 + R_7)i_1 - R_7i_2 + R_1i_3 = V_{s2} - R_6I_{s1} \\ \text{Trayectoria cerrada básica 2: } & -R_7i_1 + (R_3 + R_4 + R_7)i_2 + R_4i_3 = -V_{s2} \\ \text{Trayectoria cerrada básica 3: } & (R_1i_1 + R_4i_2 + (R_1 + R_5 + R_4)i_3 = 0\end{aligned}$$

En la figura C.3 aparecen las cuatro mallas y sus corrientes de malla para este circuito plano. Hay tres corrientes de malla desconocidas marcadas como i_5 , i_6 , e i_7 . La eliminación

² Partiendo de que cada fuente de corriente disminuye en uno el número de mallas (las fuentes de corrientes son topológicamente equivalentes a circuitos abiertos). Por consiguiente, un circuito con cuatro mallas y una fuente de corriente tendrá tres ecuaciones LCK de análisis de malla.

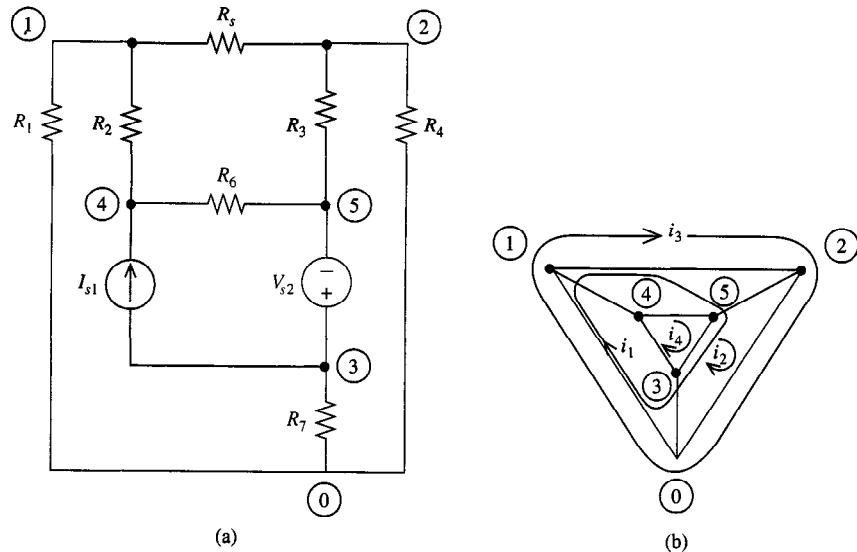


FIGURA C.2 (a) Circuito; (b) gráfica de red que muestra el árbol y las corrientes de trayectoria cerrada básica.

temporal de la fuente de corriente hace que las dos mallas 01430 y 3453 se conviertan en la única supermallas 014530. Las ecuaciones de malla son

$$\text{Supermallas: } R_1i_5 + R_2(i_5 - i_6) + R_6(I_{s1} - i_5 - i_6) + R_7(i_5 - i_7) = V_{s2}$$

$$\text{Malla 6: } R_5i_6 + R_3(i_6 - i_7) + R_6(i_6 - I_{s1} + i_5) + R_2(i_6 - i_5) = 0$$

$$\text{Malla 7: } R_4i_7 + R_7(i_7 - i_5) + R_3(i_7 - i_6) = -V_{s2}$$

¿Cuál de estos métodos, el análisis nodal, de malla o de trayectoria cerrada básica, deberá usarse para estudiar un circuito dado? Si $N - 1 \ll B - N + 1$, como en el caso de circuitos con muchos elementos en paralelo (muchas ramas por nodo), el análisis nodal será más eficiente. Si $B - N + 1 \ll N + 1$, como en circuitos con muchos elementos en serie, y por consiguiente con pocos elementos por nodo, será una mejor elección el análisis de malla o de trayectoria básica. Para circuitos planos, es preferible el análisis de malla sobre el análisis de trayectorias cerradas básicas, puesto que no se necesita de ningún árbol. Dado que la mayoría de los circuitos de complejidad baja o media, como los que utilizamos en este libro son planos, los análisis nodal y de malla son los métodos que enfatizamos en el presente texto.

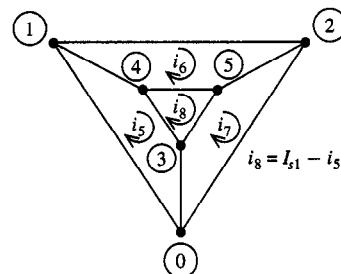


FIGURA C.3 Mallas y corrientes de malla para el circuito de la figura C.2(a).

Apéndice D

Guía de referencia de SPICE

Este apéndice hace una lista de los formatos de enunciados de entrada y reglas de uso básicos para la familia de simuladores de circuitos designados en este libro como SPICE. Esta familia abarca muchas variaciones, o “dialectos”, algunos de los cuales son del dominio público (SPICE1, SPICE2, SPICE3) y algunos que son propiedad (PSPICE, HSPICE). Los dialectos difieren ligeramente respecto a las restricciones y aumentos. En los detalles donde los dialectos difieren en sus restricciones, en el presente apéndice aparece la forma más restrictiva. Por ejemplo, algunos dialectos permiten que el primer carácter del enunciado de título sea un espacio en blanco, y otros no lo permiten; aquí se advierte que es preferible no utilizar el espacio en blanco. Los dialectos también difieren en mucho en aumentos de varias clases; por ejemplo, algunos ofrecen soporte para gráficas e impresiones de alta resolución. Para las capacidades que están más allá del común denominador universal que se discute aquí, se refiere el usuario a la documentación del programa de software específico. *La sintaxis resumida aquí es el común denominador, aplicable a todos los dialectos de SPICE.*

SPICE1, que quiere decir Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis, Programa de Simulación con Énfasis en Circuitos Integrados (Versión 1), fue escrito por académicos y estudiantes de la Universidad de California en Berkeley, en gran parte debido a becas, y fue puesto al dominio público en 1972. La primera modificación a gran escala, SPICE2, publicada en 1975, mejoró la precisión y amplitud del programa, y expandió el conjunto de dispositivos de circuitos a los que se daba soporte. SPICE2 sigue siendo el miembro más utilizado de la familia SPICE para calcular entornos que favorecen el procesamiento en lote para usuarios múltiples, tales como en entornos de grandes universidades. SPICE3, publicado en 1985, está codificado en el lenguaje C en lugar del FORTRAN de las versiones anteriores. Aunque está diseñado para uso interactivo e incorpora menús y una interfaz gráfica para el usuario, SPICE3, también da soporte al modo de operación lote, haciéndolo retroactivamente compatible con las versiones anteriores.

El primer dialecto de SPICE diseñado para utilizarse en computadoras personales, PSPICE, fue publicado en 1984 por MicroSim, Inc. Sigue siendo el dialecto propietario de más amplia difusión, en parte por la disponibilidad de una versión de evaluación del estudiante gratuita. PSPICE fue adaptado para los sistemas operativos más populares para las PC y estaciones de trabajo: DOS (Microsoft, Inc.), Windows (Microsoft, Inc.), Macintosh/OS (Apple, Inc.), Unix, y otros. Al igual que con otros dialectos propietarios, PSPICE tiene soporte para muchos aumentos, incluyendo gráficas de alta resolución y simulación de circuitos digitales y de modo mixto.

Toda la información descriptiva y de control, pasa a SPICE en un archivo de texto ordinario (ASCII) que se designa como archivo de entrada de SPICE. Este archivo es un conjunto de enunciados separados por la tecla *Enter*, con un enunciado por renglón. Se inicia con el enunciado del título y termina con el enunciado .END. Entre estos dos enunciados hay tres clases de enunciados: enunciados de listas de redes, enunciados de control y enunciados de comentarios. Los enunciados de lista de redes definen el circuito: tipos de elementos, valores, parámetros e interconexiones. Los enunciados de control especifican el modo de análisis, las variables de salida y el tipo de salida que se desea y otra información de control. Los enunciados pueden entrar en archivo de entrada en cualquier orden, excepto en que el archivo debe iniciar y terminar con los enunciados de título y .END, y que todos los enunciados entre un enunciado .SUBCKT y el enunciado .ENDS (FIN de Subcircuito) se interpretan como parte de la definición del subcircuito.

Los enunciados de lista de red y de control consisten en campos separados por cualquier cantidad de espacios en blanco (teclas de espacio y/o tabulador). Estos campos pueden ser de tres tipos: palabra clave, de texto y numérico. Los campos de palabras clave deben escribirse exactamente como se especifica, tales como la palabra clave .END. Los campos de textos pueden consistir de cualquier carácter ASCII. Los números pueden alimentarse en cualquiera de los siguientes formatos:

Formato	Ejemplos
ENTERO	77, -56
PUNTO FLOTANTE	7.54, -33.65
EXPONENCIAL	100E-02, 1.755E3

Los sufijos en los campos numéricos que multiplican por potencias de 10 son

Sufijo	Factor	Sufijo	Factor
K	10^{+3}	M	10^{-3}
MEG	10^{+6}	U	10^{-6}
G	10^{+9}	N	10^{-9}
T	10^{+12}	P	10^{-12}
		F	10^{-15}

Por ejemplo, los siguientes son campos numéricos equivalentes entre sí:

$$1.05\text{E}6 \quad 1.05\text{MEG} \quad 1.05\text{E}3\text{K} \quad 0.00105\text{G}$$

El lugar de todos los elementos en el circuito y el lugar de todas las direcciones de referencia de voltajes y corrientes quedan indicados especificando sus nodos. Debe enunciarse a un nodo del circuito como nodo de referencia, que está dado por el número de nodo cero. Otros nodos quedan identificados por números enteros sin signos.

La caída de voltaje entre los nodos N y M, queda especificada como V(N, M), con un signo positivo de la dirección de referencia de V(N, M) en el nodo N y un signo negativo en M. V(N, 0) puede ser abreviado V(N).

Las corrientes quedan especificadas en la forma I(VNAME), donde VNAME es una fuente de voltaje independiente declarada en la lista de redes (ver la sección D.3 para el

formato de enunciado de lista de redes). La flecha de dirección de referencia para los puntos a partir del extremo negativo de VNAME (el segundo nodo en su enunciado de lista de redes) hacia el extremo positivo (el primer nodo en el enunciado de su lista de redes). Si se requiere una corriente que pasa a través de un elemento distinto de la fuente de voltaje independiente, debe insertarse una fuente de voltaje vacía, con valor +0 V en serie con este elemento.¹ Todo enunciado puede ser continuada a la siguiente línea, incluyendo un signo (+) en la primera columna de la nueva línea para indicar la continuación.

D.2 ENUNCIADOS DE TÍTULO Y DE COMENTARIO

El *enunciado de título* es el primer enunciado del título del archivo de entrada de SPICE. Queda restringido a un solo renglón, que no debe empezar con espacio en blanco (espacio o tabulador), pero que de otro modo es un formato libre para texto. Se utiliza el enunciado de título para identificar el circuito que se estudia. Un ejemplo es

```
DC analysis of circuit L2
```

Los *enunciados de comentario* se utilizan para insertar texto libre descriptivo o explicitorio dentro del archivo de entrada de SPICE y para separar partes del archivo. Toda línea que se inicia con un asterisco (*) es un enunciado de comentario y el compilador de SPICE lo ignora. Los ejemplos son

```
*This circuit becomes unstable for R2<15K  
*
```

D.3 ENUNCIADOS EN LAS LISTAS DE RED

El circuito a investigarse queda especificado por una lista de redes. Una lista de redes es una lista de todos los elementos en una red, sus tipos, valores, parámetros y lugares. El circuito no puede contener una trayectoria cerrada de fuente de voltaje o una región cerrada en la que solamente fluyen fuentes de corriente. Cada elemento en el circuito queda completamente especificado por un solo enunciado de *lista de redes*. A continuación se describen los formatos para enunciados de listas de redes por tipo de elemento.

Resistor

```
R<NOMBRE> <(+) NODO> <(-) NODO> <VALOR>
```

⟨NOMBRE⟩ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres para marcar al elemento. Los ⟨NODOS⟩ (+) y (-) definen la polaridad de la conexión de resistencias. La corriente positiva fluye de (+) nodo a través de la resistencia hacia (-) nodo.

⟨VALOR⟩ es el valor de resistencia no nulo (positivo o negativo) expresado en ohms.

Ejemplo D.1:

```
RLOAD 12 3 10K
```

¹ La restricción de que sólo deben declararse corrientes a través de fuentes de voltaje no es vigente en todos los dialectos de SPICE. Algunos permiten formas tales como I(R1). Consulte su documentación.

denota una resistencia de $10-k\Omega$ marcado como RLOAD conectado entre los nodos 12 y 3 que tienen corriente que fluye desde el nodo positivo 12 de la resistencia hacia el nodo negativo 3.

Capacitor

C<NAME> <(+)> NODO <(-)> NODO <VALOR> [IC = <VALOR INICIAL>]

<NOMBRE> denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

<NODO> (+) y NODO (-) definen la polaridad de la conexión del capacitor. La corriente positiva fluye de (+) NODO a través del capacitor hacia (-) NODO.

<VALOR> es el valor no nulo (positivo o negativo) expresado en farads.

<VALOR INICIAL> es optativo y denota el voltaje de capacitor inicial en el instante $t = 0$ de (+) NODO respecto a (-) NODO para un análisis de respuesta transitoria.

Ejemplo D.2:

CEXT 2 3 10U
CEXT 2 3 10U IC = 4

denota un capacitor de $10-\mu F$ marcado EXT conectado entre los nodos 2 y 3. Si se incluye $IC = 4$, entonces existe un voltaje inicial de 4 V para el nodo 2 con respecto al 3 en $t = 0$. Esto se usa únicamente en la respuesta transitoria.

Inductor

L<NAME> <(+)> NODE <(-)> NODE <VALUE> [IC = <INITIAL VALUE>]

<NOMBRE> denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

<NODE> (+) y NODE (-) definen la polaridad de la conexión del inductor. La corriente positiva fluye de (+) NODO a través del inductor hacia (-) NODO.

<VALOR> es el valor no nulo (positivo o negativo) expresado en henrys.

<VALOR INICIAL> es optativo y denota la corriente de inductor inicial en el instante $t = 0$ desde (+) NODO a través del inductor hacia (-) NODO para un análisis de respuesta transitoria.

Ejemplo D.3:

L12 100 0 10M
L12 100 0 10M IC=-0.5

denota un capacitor de $10-mH$ marcado 12 conectado entre los nodos 100 y 0 (nodo de referencia). Si se incluye $IC = -0.5$, entonces existe un corriente inicial del nodo 100 a través del inductor hacia el nodo 0 en $t = 0$. Esto se usa únicamente en la respuesta transitoria.

Transformador lineal

K<NAME> L<INDUCTOR NAME A> L<INDUCTOR NAME B> <COUPLING VALUE>

K<NOMBRE> acopla dos inductores *A* y *B* utilizando la convención de punto que se determina por las asignaciones de nodo de los inductores *A* y *B*. La polaridad queda determinada por el orden de los nodos en los dispositivos L y no por el orden de los inductores

en el enunciado K. Las terminales conjunto de los inductores *A* y *B* son conectadas hacia los nodos positivos (los que se marcaron en primer lugar) en sus enunciados definitorios.

⟨NOMBRE⟩ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

⟨VALOR DE ACOPLAMIENTO⟩ es el coeficiente del acoplamiento mutuo en el rango $0 \leq k < 1$.

Ejemplo D.4:

```
LPRI 2 3 500M
LSEC 5 4 400M
KXFRM LPRI LSEC 0.98
```

denota un transformador lineal que tiene un acoplamiento mutuo de 0.98 entre LPRI y LSEC. Las terminales con punto para la polaridad del acoplamiento son la terminal de LPRI conectada al nodo 2 y la terminal de LSEC conectada al nodo 5.

Fuente independiente

```
I<NAME> <(+) NODE> <(-) NODE> [TYPE <VALUE>] [TRANSIENT SPEC.]  
V<NAME> <(+) NODE> <(-) NODE> [TYPE <VALUE>] [TRANSIENT SPEC.]
```

I denota la fuente de corriente independiente.

V denota la fuente de voltaje independiente.

⟨NOMBRE⟩ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

Los NODOS (+) y (-) definen la polaridad de la fuente. La corriente positiva fluye de (+) NODO a través de la fuente hacia (-) NODO (la flecha de referencia apunta hacia el (-) NODO).

TYPE es DC (por omisión) para una fuente dc y ac para una fuente sinusoidal ac.

⟨VALOR⟩ es el valor dc para dc o una magnitud y fase (en grados) para ac. Los valores por omisión son cero.

[SPEC TRANSITORIO] se utiliza únicamente en análisis transitorio y puede ser uno de los siguientes:

```
EXP(<x1> <x2> <td1> <tc1> <td2> <tc2>)
```

La forma EXP hace que la corriente de voltaje de salida sea ⟨x1⟩ durante los primeros ⟨td1⟩ segundos. Entonces, la salida decae exponencialmente de ⟨x1⟩ a ⟨x2⟩ con una constante de tiempo de ⟨tc1⟩. El decaimiento dura ⟨td2⟩ segundos. Luego, la salida decae de ⟨x2⟩ de vuelta a ⟨x1⟩ con una constante de tiempo de ⟨tc2⟩.

```
PULSE(<x1> <x2> <td> <tr> <tf> <pw> <per>)
```

La forma PULSE hace que la salida se inicie en ⟨x1⟩ y dure durante ⟨td⟩ segundos. La salida entonces pasa linealmente de ⟨x1⟩ a ⟨x2⟩ durante los siguientes ⟨tr⟩ segundos. La salida sigue siendo ⟨x2⟩ durante ⟨pw⟩ segundos. Luego regresa linealmente a ⟨x1⟩ durante los siguientes ⟨tf⟩ segundos. Permanece en ⟨x1⟩ durante ⟨per⟩ – (⟨tr⟩ + ⟨pw⟩ + ⟨tf⟩) segundos y luego el ciclo se repite, excluyendo el retardo inicial de segundos.

```
PWL(<T1> <X1> <T2> <X2> . . . <tn> <xn>)
```

La forma PWL describe una onda lineal por tramos. Cada par de valores de tiempo-salida especifican un pico de la onda. La salida entre los instantes entre picos es la interpolación lineal de las corrientes en los picos.

```
SIN(<xoff> <xamp1> <freq> <td> <itc>)
```

La forma SIN hace que la salida se inicie en $\langle xoff \rangle$ y permanezca así $\langle td \rangle$ durante segundos, luego, la salida se convierte en una onda sinusoidal amortiguada exponencialmente descrita por la ecuación

```
xoff + xamp1 * sen{2π * [freq · (TIME-td)]} · e^{-(TIME-td)} * itc
```

Ejemplo D.5:

```
IG1 2 3 0.2A o IG1 2 3 DC 0.2A
```

denota una fuente de corriente dc marcada G1 suministra 0.2 A del nodo 2 al nodo 3 a través de la fuente.

```
ISOURCE 0 5 AC 10 64
```

denota una fuente ac $10\angle 64^\circ$ A marcada SOURCE conectada entre los nodos 0 y 5 con la terminal positiva al nodo 0.

```
I2 0 2 EXP(10M 0M 0 0.1 1)
```

denota una corriente exponencial de $10e^{-10t}$ mA que fluye del nodo 0 al nodo 2 a través de la fuente en el intervalo $0 < t < 0.1$ para análisis transitorio.

Fuentes dependientes

Fuente de Voltaje Controlada por Voltaje (FVCV)

```
E<NAME> <(+) NODE> <(-) NODE> <(+ CONTROLLING) NODE>
+ <(-CONTROLLING) NODE> <GAIN>
```

$\langle \text{NOMBRE} \rangle$ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

Los NODOS (+) y (-) definen la polaridad de la fuente. La corriente positiva fluye de (+) NODO a través de la fuente hacia (-) NODO.

(+CONTROL) y (-CONTROL) aparecen en pares y definen un conjunto de voltajes de control que se multiplican por $\langle \text{GANANCIA} \rangle$. Un nodo particular puede aparecer más de una vez, y la salida y los nodos de control no necesitan ser distintos.

El signo positivo de la segunda línea de este enunciado, indica continuación.

Ejemplo D.6:

```
EBUFF 1 3 11 92.4
```

denota un FVCV marcado BUFF conectado entre los nodos 1 y 3, con el voltaje del nodo 1 respecto al 3 igual a 2.4 veces el voltaje del nodo 11 con respecto al 9.

Fuente de Corriente Controlada por Corriente (FCCC)

```
F<NAME> <(+) NODE> <(-) NODE> <(CONTROLLING V DEVICE) NAME> <GAIN>
```

⟨NOMBRE⟩ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

Los NODOS (+) y (−) definen la polaridad de la fuente. La corriente positiva fluye de (+) NODO a través de la fuente hacia (−) NODO. La corriente que pasa a través de ⟨NOMBRE⟩ (DISPOSITIVO V DE CONTROL) multiplicado por ⟨GANANCIA⟩ determina la corriente de salida.

(DISPOSITIVO V DE CONTROL) es una fuente de voltaje independiente.

Ejemplo D.7:

```
F23 3 7 VOUT 1.2
```

denota una FCCC marcado 23, con una corriente que fluye desde el nodo 3 a través de la fuente hacia el nodo 7 con un valor igual a 1.2 veces el de la corriente que fluye en la fuente que fluye en una corriente positiva VOUT de fuente independiente (de − terminal a + terminal).

Fuente de Corriente Controlada por Voltaje (FCCV)

```
G<NAME> <(+) NODE> <(-) NODE> <(+ CONTROLLING) NODE>  
+ <(-CONTROLLING) NODE> <TRANSCONDUCTANCE>
```

⟨NOMBRE⟩ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

Los NODOS (+) y (−) definen la polaridad de la fuente. La corriente positiva fluye de (+) NODO a través de la fuente hacia (−) NODO.

(+CONTROL) y (−CONTROL) aparecen en pares y definen un conjunto de voltajes de control que son multiplicados por ⟨TRANSCONDUCTANCIA⟩.

Ejemplo D.8:

```
GAMP 4 3 1 9 1.7
```

denota una FCCV marcado AMP, conectada a los nodos 4 y 3, donde la corriente fluye del nodo 4 al 3 a través de la fuente y es igual a 1.7 veces el voltaje del nodo 1 respecto al 9.

Fuente de Voltaje Controlada por Corriente (FVCC)

```
H<NAME> <(+) NODE> <(-) NODE> <(CONTROLLING V DEVICE) NAME>  
+ <TRANSRESISTANCE>
```

⟨NOMBRE⟩ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

Los NODOS (+) y (−) definen la polaridad de la fuente. La corriente positiva fluye de (+) NODO a través de la fuente hacia (−) NODO. La corriente que pasa a través de ⟨NOMBRE⟩ (DISPOSITIVO V DE CONTROL) multiplicado por ⟨TRANSRESISTENCIA⟩ determina el voltaje de salida.

(DISPOSITIVO V DE CONTROL) es una fuente de voltaje independiente.

Ejemplo D.9:

```
HIN 4 8 VDUMMY 7.7
```

denota una FVCC marcada IN con corriente positiva que fluye del nodo 4 a través de la fuente hacia el nodo 8 con un igual a 7.7 veces desde la corriente que fluye en la fuente de voltaje independiente de VDUMMY (de – terminal a + terminal).

Enunciado de llamada de subcircuito

```
X<NAME> [<NODE>]* <(SUBCIRCUIT) NAME>
```

⟨NOMBRE⟩ denota cualquier serie alfanumérica de 1 a 7 caracteres.

[NODO]* denota una lista de nodos requeridos por la definición de subcircuito.

⟨NOMBRE (SUBCIRCUITO)⟩ es el nombre de la definición del subcircuito (ver posteriormente el enunciado .SUBCKT). En la llamada debe haber el mismo número de nodos que en la definición del subcircuito.

Este enunciado hace que el subcircuito llamado quede insertado en el circuito, donde los nodos dados reemplazan los nodos en la definición .SUBCKT en orden. Permite definir un bloque de circuitos una vez, y luego que se use en otros lugares el uso de ese bloque.

Ejemplo D.10:

```
XBUFF 4 1 7 9 UNITAMP
```

denota una llamada a un subcircuito que sustituye el enunciado de llamada por el contenido del archivo UNITAMP para el análisis SPICE.

D.4

ENUNCIADOS DE CONTROL DE SOLUCIONES

Todos los enunciados que se inician en un punto (.) son enunciados de control. Los comandos discutidos en esta sección son .AC, .DC, .FOUR, .IC, .LIB, .SUBCKT, .TF, y .TRAN. Los enunciados de control de salida .PLOT y .PRINT serán descritos en la siguiente sección.

.AC

Análisis AC: El enunciado .AC se utiliza para calcular la frecuencia de un circuito sobre un rango de frecuencia

```
.AC [<LIN|<OCT|<DEC]> <(POINTS) VALUE> <(START FREQUENCY) VALUE>
+ <(END FREQUENCY) VALUE>
```

LIN, OCT o DEC son palabras clave que especifican el tipo de barrido de la forma siguiente:

LIN: Barrido lineal. La frecuencia varía linealmente desde START FREQUENCY hasta END FREQUENCY. ⟨VALOR (EN PUNTOS)⟩ es el número de puntos en el barrido.

OCT: Barrido por octavas. La frecuencia es barrida logarítmicamente por octavas. ⟨VALOR (PUNTOS)⟩ es el valor de puntos por octava.

DEC: Barrido por décadas. La frecuencia es barrida logarítmicamente por décadas. ⟨VALOR (PUNTOS)⟩ es el número de puntos por década.

Debe especificarse exactamente una de entre LIN, OCT o DEC.

⟨VALOR (FRECUENCIA FINAL)⟩ debe ser mayor que ⟨VALOR (FRECUENCIA INICIAL)⟩ y ambos deben ser mayores que cero. Si se desea, todo el barrido podrá especificar un solo punto.

Ejemplo D.11:

```
.AC LIN 1 100HZ 100HZ
```

denota una solución en estado estable ac para una frecuencia de 100 Hz.

```
.AC LIN 101 100KHZ 200KHZ
```

denota una respuesta de frecuencia lineal con 101 puntos distribuidos uniformemente en el rango de entre 100 a 200 kHz.

.DC

Análisis DC: El enunciado .DC hace que se realice un análisis de barrido DC para el circuito. Tiene la forma

```
.DC <(SWEEP VARIABLE) NAME> <(START) VALUE> <(END) VALUE>
+ <(INCREMENT) VALUE>
```

⟨NOMBRE (VARIABLE DE BARRIDO)⟩ es el nombre de una fuente independiente de voltaje o corriente. Es barrida linealmente desde ⟨VALOR (INICIAL)⟩ a ⟨FINAL⟩. El valor del tamaño de los incrementos es ⟨VALOR (INCREMENTO)⟩. ⟨VALOR (INICIAL)⟩ puede ser mayor o menor que ⟨VALOR (FINAL)⟩; es decir, el barrido puede ir en cualquier dirección. ⟨VALOR (INCREMENTO)⟩ debe ser mayor que cero. Si se desea, todo el barrido puede especificar un sólo punto.

Ejemplo D.12:

```
.DC VIN 10V 10V 1V
```

denota una solución dc para un circuito con fuente de voltaje independiente VIN = 10 V.

```
.DC IGEN 1M 10M 1M
```

denota un barrido dc para una fuente de corriente independiente IGEN que se barre de 1 a 10 mA en escalones de 1-mA.

.FOUR

Análisis de Fourier: El análisis de Fourier realiza una descomposición en componentes Fourier como resultado de un análisis transitorio. Un enunciado .FOUR requiere un enunciado .TRAN (descrita posteriormente). Tiene la forma

```
.FOUR <(FREQUENCY) VALUE> <(OUTPUT VARIABLE)>*
```

⟨(VARIABLE DE SALIDA)⟩ es una lista de una o más variables para las que se desean las componentes de Fourier. El análisis de Fourier se realiza iniciando con los resultados del análisis momentáneo para las variables de salida especificadas. Para estos voltajes o co-

rrientes, se calculan el componente dc, la frecuencia fundamental y los armónicos segundo a noveno. La frecuencia fundamental es **⟨VALOR (FRECUENCIA)⟩** que especifica el periodo para el análisis. El análisis transitorio debe tener una duración de por lo menos $1/\langle\text{VALOR (FRECUENCIA)}\rangle$ segundos.

Ejemplo D.13: **.FOUR 10KHZ V(5) V(6, 7) I(VSENS3)**

da como resultado los componentes de Fourier para las variables $V(5)$, $V(6, 7)$, e $I(VSENS3)$. La frecuencia fundamental para la descomposición se fija igual a 10 kHz.

.IC

Condiciones transitorias iniciales: El enunciado .IC se utiliza para fijar las condiciones iniciales para el análisis transitorio. Tiene la forma

.IC <V(<NODO>) = <VALUE>>*

Cada **⟨VALOR⟩** es un voltaje que se asigna al **⟨NODO⟩** para el voltaje del nodo inicial en el instante $t=0$ para el análisis transitorio.

Ejemplo D.14: **.IC V(2)=5 V(5)=-4V V(101)=10**

denota que se fijan los voltajes de nodo iniciales de los nodos 2, 5 y 101 en 5, -4 , y 10 V, respectivamente, en $t = 0$.

.LIB

Archivo de consulta: El enunciado .LIB se utiliza para hacer referencia a una consulta de subcircuito en otro archivo. Tiene la forma

.LIB <(FILE) NAME>

⟨NOMBRE (ARCHIVO)⟩ es el nombre del archivo de consulta del subcircuito.

Ejemplo D.15: **.LIB OPAMP .LIB**

denota que el archivo de consulta del subcircuito tiene el nombre OPAMP.LIB.

.OP

Análisis dc de punto de operación: El enunciado .OP calcula todos los voltajes de nodo dc y las corrientes en todas las fuentes de voltaje. Tiene la forma simple

.OP

.SUBCKT

Definición de subcircuito: El enunciado .SUBCKT se utiliza para definir un subcircuito que es llamado utilizando el enunciado X descrito anteriormente. Tiene la forma

```
.SUBCKT <NAME> [<NODE>]*
```

El enunciado .SUBCKT se inicia con la definición de un subcircuito. La definición termina con un enunciado .ENDS. Todos los enunciados entre .SUBCKT y .ENDS están incluidos en la definición. Cada vez que se llama a un subcircuito por un enunciado X (llamar un subcircuito), todos los enunciados en la definición sustituyen el enunciado de llamada.

.TF

Función de transferencia: El enunciado .TF produce la función de transferencia de señal dc. Tiene la forma

```
.TF <(OUTPUT VARIABLE)> <(INPUT SOURCE) NAME>
```

La ganancia de nombre <(NOMBRE (FUENTE DE ENTRADA))> hacia <(VARIABLE DE SALIDA)> se calcula junto con las resistencias de entrada y salida. <(VARIABLE DE SALIDA)> puede ser una corriente o voltaje; sin embargo, en el caso de una corriente está restringido a ser la corriente que pasa a través de una fuente de voltaje.

Ejemplo D.16:

```
.TF V(3) IIN
```

produce la función de transferencia de señal pequeña dc para V(3)/IIN, la resistencia de entrada desde las terminales de la fuente de corriente independiente IIN, y la resistencia de salida que pasa a través del nodo V(3).

.TRAN

Análisis transitorio: El enunciado .TRAN hace que se realice un análisis transitorio para un circuito. Tiene la forma

```
.TRAN <(PRINT STEP) VALUE> <(FINAL TIME) VALUE> [<UIC>]
```

El análisis transitorio calcula el comportamiento del circuito respecto al tiempo, iniciándose en $t = 0$ y hacia <VALOR (TIEMPO FINAL)>. <VALOR (ESCALÓN DE IMPRESIÓN)> es el intervalo de tiempo que se utiliza para graficar o imprimir los resultados del análisis. La palabra clave UIC (*use initial conditions*); (“uso de condiciones iniciales”) hace que se utilicen las condiciones iniciales fijadas utilizadas para capacitores e inductores con la especificación IC.

Ejemplo D.17:

```
.TRAN 1NS 100NS UIC
```

produce un análisis transitorio en el intervalo de 0 a 100 ns, con una salida graficada o impresa en intervalos 1-ns.

Los enunciados de control de salida para imprimir y graficar son los enunciados .PLOT, .PRINT, y .WIDTH.

.PLOT

Los enunciados .PLOT permiten que los resultados de los análisis transitorios, dc, ac sean la salida en la forma de gráficas de *impresor de líneas* [por ejemplo, las figuras 14.44(a) o (b)]. Tiene la forma

```
PLOT [DC][AC][TRAN][OUTPUT VARIABLE]*  
+ (E<(LOWER LIMIT) VALUE>, <(UPPER LIMIT) VALUE>).
```

DC, AC y TRAN son los tipos de análisis que puede estar en la salida. Debe especificarse exactamente un tipo de análisis. [VARIABLE DE SALIDA]* es una lista de las variables de salida deseadas para la gráfica. Las corrientes se especifican en la forma I(VNAME), donde VNAME es una fuente de voltaje independiente y I(VNAME) fluye a través de la fuente de voltaje de su – terminal a su + terminal. Para el análisis ac puede añadirse el sufijo M, P, R o I a los especificadores de variable V o I. Éstos indican magnitud, fase y parte real e imaginaria. En un solo enunciado .PLOT se permite un máximo de ocho variables de salida.

El rango e incremento del eje x quedan fijados por el análisis que se grafica. El rango del eje y puede fijarse añadiendo <VALOR (DE LÍMITE INFERIOR)>, <VALOR (LÍMITE SUPERIOR)> a las variables de salida con el mismo rango del eje y. Cada ocurrencia define un eje y con el rango especificado. Todas las variables de salida que vienen entre éste y el siguiente rango a la izquierda, son puestos en su eje y correspondiente. Si no se especifican límites para el eje y, el programa determina automáticamente los límites de la gráfica.

Ejemplo D.18: .PLOT DC V(2) V(3, 5)

grafica la respuesta dc para V(2) y V(3, 5),

```
.PLOT AC VM(E) VP(3) IR(V1) II(V1)
```

grafica la magnitud y fase de V(3) y las partes real e imaginaria de la corriente que pasa a través de V1.

```
.PLOT TRAN V(5) V(2, 3) (0, 5V) I(VCC) (-5mA, 5mA)
```

grafica la respuesta transitoria de V(5) y V(2, 3) entre los límites de 0 y 5 V e I(VCC) entre los límites de -5 y 5 mA.

.PRINT

Impresión: El enunciado .PRINT permite que los resultados de salida de los análisis transitorios, dc y ac aparezcan en forma de tabla. Tiene la forma

```
.PRINT [DC][AC][TRAN][OUTPUT VARIABLE]*
```

DC, AC y TRAN son los tipos de análisis que pueden ser la salida. Debe especificarse exactamente un tipo de análisis. Variable de salida es una lista de las variables de salida deseadas (ver el enunciado .PLOT descrito anteriormente). No hay límite a la cantidad de variables de salida. El formato de salida (caracteres por línea) queda determinado como la especificación del comando .WIDTH.

Ejemplo D.19: **.PRINT DC V(1) I(V12)**

imprimir los valores dc para V(1) e I(V12).

.PRINT AC VM(1,5) VP(1,5) IR(V2) II(V2)

imprime la magnitud y fase de V(1,5) y las partes real e imaginaria de I(L2).

.PRINT TRAN V(7) I(VCC) V(3,1)

imprimir la respuesta transitoria para V(7), I(VCC) y V(3,1).

.WIDTH

Amplitud: el enunciado .WIDTH fija la amplitud de la salida. Tiene la forma

.WIDTH OUT = <VALUE>

<VALOR> es el número de columnas y debe ser 80 o 132.

Ejemplo D.20: **.WIDTH OUT = 132**

D.6

ENUNCIADO FINAL

Los enunciados de final para los archivos de subcircuito y circuito son .ENDS y .END, respectivamente.

.ENDS

Definición de subcircuito: El enunciado .ENDS marca el final de una definición de subcircuito (iniciada por un enunciado .SUBCKT). Tiene la forma

.ENDS [SUBCIRCUIT] NAME]

Es buena práctica repetir el nombre del subcircuito, aunque esto no se necesite.

.END

Fin de circuito: El enunciado .END marca el final del archivo de circuito. Tiene la forma

.END

Índice

A

admitancia, 294, 296, 308
circuito de dos puertos, 618
en el dominio-s
equivalente, 300
aislador, 144
aislamiento eléctrico,
transformadores, 603
uso de bobinas acopladas, 586
amortiguado crítico, 239, 241
circuitos de segundo orden, 242, 259
amortiguado,
de circuitos de segundo orden, 238-241
ampere, 4
Ampère, André Marie, 4, 21, 155
amplificador de voltaje,
ideal, 68, 74, 88
amplificador inversor, 77, 543
amplificador no inverso, 79
amplificador operacional (amp op), 64, 67-73
circuitos,
comportamiento de primer orden, 189
configuraciones básicas de circuitos
construidos, 76-81
en circuitos de fasor, 305
interconectando configuraciones
básicas, 81
límites en la banda de frecuencia, 88
no inversor, 79
práctica, 86-88
principio de análisis virtual para, 121, 136
respuesta de frecuencia de, 542-545
selección modelo, 71-72
amplificadores, 65
no inversor, 79, 554
operacionales, 3, 64
amplitud,
sinusoidal, 273
análisis de circuitos, 15-16, 17
en el dominio-s, 483
usando análisis de malla, 328-333
usando SPICE, 125

análisis de lazo básico, 728
análisis de lazo generales, 114
análisis de malla, 114-117, 136, 728
corriente(s), 115
de circuitos de estado estable de AC, 328-333
análisis nodal, 106
en circuitos en fasores, 322-327, 348
en el dominio-s, 494
topología de circuitos, 726
ancho de banda,
de circuitos resonantes, 538
ángulo de fase,
de funciones sinusoidales, 274
función(es) de respuesta en frecuencia, 519
árbol, 725
archivo de entrada SPICE, 732
archivo de entrada,
declaraciones de SPICE, 743
argumento de número complejo, 718

B

batería, 1, 13
bel, 522
Bell, Alexander Graham, 522, 583
block de circuitos construidos, 76-81, 554
bobina,
acoplada, 585, 646
flujo de escape, 585
bobinas acopladas, 585
leyes fasoriales i - v para, 597
leyes i - v para, 591, 595
bobinas en serie y paralelo, 160-162
bobinas, 2, 155
dualidad de, 187
energía almacenada en 158
ley de la inducción electromagnética, 156
relación de corriente-voltaje, 145, 170
series y paralelo, 160-162
voltaje y forma de señal de corriente para, 291

Bode, Hendrick, 524
borde de subida de la respuesta de pulso, 211
Bunsen, 93

C

cadena galvánica, 30, 63
cadena,
de bobinas en serie, 161
de fuente de corriente,
en serie, 41
de fuentes de voltaje, 40
de resistencias en serie, 38
cambio de fase,
función de respuesta en frecuencia, 519
respuesta a entradas periódicas, 675
cambio de frecuencia, 451
campo eléctrico, 148
campo(s) magnético, 155
candela, 3
capacitancia, 145
equivalente, 153, 154
capacitores, 2, 144
almacenamiento de energía en, 148
dualidad de, 187
formato de onda de voltaje y corriente para, 292
paralelo, 151, 152
relación de corriente-voltaje, 145, 170
series, 151
características de las ecuaciones,
de circuitos de segundo orden, 233, 238-240, 248
de circuitos paralelo RLC, 238
características exponenciales, 238
carga, 84, 549-550
cargas eléctricas, 5
cargas,
conexión delta, 417, 418
balanceado, 425, 429
conexión estrella, 406
conexión estrella-delta, 421
cascada,

- interconexión en cascada, 82
 tubo de rayos catódicos, 8
 Cavendish, Sir Henry, 30
 circuito de elementos pasivos, 12, 14, 17
 bobinas, 159
 capacitores, 149
 circuito forzado de segundo orden, 235
 circuito forzado de primer orden, 178, 223
 circuito resistivo de nodo-par-sencillo, 42
 circuito seguidor de voltaje, 74
 circuito(s) abierto(s), 32
 reemplazo de fuentes de corriente independientes, 53
 voltaje, 51, 54
 de un transformador, 608
 circuito(s) con parámetros unidos, 23, 41
 circuito(s) de un puerto, 610
 circuito(s) resistivos,
 circuitos de primer orden, 178, 273
 sin fuentes, 187
 par de nodo sencillo, 42
 simplificado, 316
 circuito(s) simples(s), 37, 64
 circuitos balanceados,
 estrella-estrella, trifásico, de cuatro hilos, 409, 429
 circuitos con n -puertos, 82
 circuitos de ac, 2
 circuitos de cuatro-hilos, 409
 circuitos de dos puertos interconectados, 631-640
 cascada, 633
 paralelo, 635
 series, 636
 circuitos de dos puertos, 82, 85, 610-617
 interconexión de, 631-640
 transformadores, 598
 tres terminales, 627
 circuitos de estado estable de DC, 163-164, 170
 circuitos de primer orden,
 respuesta de estado estable, 197, 495
 respuesta transitoria, 197
 sin fuentes, 187, 223
 superposición en, 198
 circuitos de trayectoria cerrada, 75
 circuitos equivalentes
 Thevenin-Norton, 22, 36, 48-52,
 en circuitos fasores, 308
 para análisis de estado estable de AC, 319, 320
 en el dominio-s, 486
 circuitos equivalentes, 22, 37, 41
 subcircuitos, 33-34, 36, 48, 49
 circuitos estrella-delta, 421
 circuitos estrella-estrella, 407
 circuitos fasores, 303, 308
 análisis nodal de, 323
 circuitos generales de primer orden, 187
 circuitos monofásicos, de tres hilos, 404
 terminal neutral, 404
 circuitos no lineales, 97, 102
 circuitos no planares, 114
 circuitos planares, 114
 circuitos resonantes, 535
 frecuencia, 535, 536
 circuitos RLC, 164, 277, 540
 no lineales, 31
 paralelo, 238
 simplificación de, 301
 circuitos simples RC y RL, 178
 circuitos singulares, 150, 159, 167, 170
 circuitos trifásicos, 402, 413
 análisis usando SPICE, 426
 voltajes de línea, 408
 circuitos,
 alta Q , 539
 análisis de transformada de Laplace, 232
 bilineal, 559
 circuito cerrado, 75
 circuitos de cuatro hilos, 409
 circuitos de primer orden, 178, 232
 sin fuentes, 187, 190, 191
 circuitos de segundo orden, 234
 características exponenciales, 238
 circuitos paralelo RLC, 238, 539, 540
 circuitos serie RLC, 164, 232, 540
 frecuencia resonante de, 537
 circuitos trifásicos, 402, 412
 circuitos estrella-delta, 421, 429
 circuitos estrella-estrella, 406, 429
 voltaje de línea, 408
 circuitos Y conectados, 406
 con dos o más elementos de almacenamiento, 233-234
 con dos puertos inductivos, 584
 con fuentes de DC, 191-194
 con fuentes dependientes, 66
 con inductancia mutua, 590
 conectados en delta, 417
 constante de tiempo, 183
 conteniendo fuentes de corriente, 118
 dos puertos, 82, 610, 617
 eléctricos, 2
 en el dominio-s, 483
 estabilidad de, 495
 estado estable de DC, 163-164, 170
 excitación sinusoidal con RLC, 277
 fasor RL, 341
 fasor rms, 367, 370, 394
 fasor, 303, 362
 inestable, 306, 346
 lineal, 94, 136, 517
 monofásico, trifásico, 403
 n orden, 232
 n puerto, 82
 no lineal, 97, 102
 no planar, 114
 parámetros unidos, 23
 planar, 114
 práctico, 168
 resistivo, 41, 42
 nodo par sencillo, 42
 resonancia, 535-541
 ancho de banda de, 537
 respuesta de frecuencia, 516, 575
 respuesta natural, 178, 232, 492
 respuesta total,
 circuitos de segundo orden, 251, 263
 seguidor de voltaje, 74
 simple, 37
 RC y RL sin fuentes, 178, 188
 singular, 150, 159, 167
 un puerto, 610
 círculo unitario, 280
 coeficientes de Fourier, 662, 666-667
 condiciones Dirichlet, 663, 694
 conductancia, 32, 296, 296
 de resistencias paralelas, 43-44
 conductores perfectos, 23, 33
 conductores,
 perfectos, 23
 conservación,
 de carga eléctrica, 147
 de energía compleja, 384-387, 394
 constante de tiempo de un circuito, 184
 control de salida,
 declaraciones de SPICE, 742
 convención de signos pasivos, 11, 12, 31, 53, 600
 convolución,
 de funciones en el dominio del tiempo, 502
 corriente alterna, 8
 corriente convencional, 6
 corriente de fase,
 de circuitos trifásicos, 410, 419
 corriente de fuga, 585
 corriente diente de sierra, 8

corriente eléctrica, 6
 corriente exponencial, 8
 corriente filtrada, 166
 corriente rms, 366, 394
 corriente, 3, 6, 16
 alterna, 8
 diente de sierra, 8, 660
 dirección de referencia, 7, 11, 30, 37
 divisores, 44
 exponencial, 8
 fluyendo hacia los nodos, 27
 fuente, 41, 118
 fuentes paralelas, 46
 corrimiento en tiempo,
 de transformada de Fourier, 696
 transformada de Laplace en función del
 tiempo, 451
 cortocircuito, 32, 51, 54
 reemplazo de fuentes de voltaje
 independientes, 53
 coulomb, 3, 4, 6
 Coulomb, Charles Augustin de, 4

D

Davy, Sir Humphry, 143
 declaración de entrada, SPICE, 127
 declaraciones de control de salida de
 SPICE, 742
 .PLOT, 742
 .PRINT, 742
 .WIDTH, 743
 declaraciones de control de solución de
 SPICE, 738
 .DC, 739
 .FOUR, 739
 .IC, 740
 .LIB, 740
 .OP, 740
 .SUBCKT, 740
 .TF, 741
 .TRAN, 741
 declaraciones de control de SPICE, 127
 declaraciones finales de SPICE, 743
 .END, 743
 .ENDS, 743
 descripción de parámetro-z de circuitos
 de tres terminales, de dos puertos, 627
 descripción de parámetros de dos
 puertos, 622, 646
 determinantes, 709
 cofactores, 710, 711
 devanado, 598
 dieléctrico, 144

diferencia,
 de voltajes en op amps, 84
 por funciones periódicas pares o impares, 657
 Dirac, Paul, 445
 dirección de referencia,
 corriente, 7, 11
 función de fuente, 13
 voltaje, 9, 11
 diseño de circuitos, 15-16, 17
 divisor de corriente, 44
 en circuitos fasoriales, 317
 divisor de voltaje,
 en circuitos fasores, 317
 principio de, 38, 39
 divisor de voltaje, 38
 dominio del tiempo,
 corrientes, 299
 transformación de Laplace, 464
 voltajes, 299
 dominio-s,
 circuitos, 483-484
 solución de ecuaciones diferenciales,
 467
 transformadas de Laplace, 436

E

ecuación de respuesta de frecuencia, 519
 series exponenciales de Fourier, 669
 ecuación diferencial homogénea, véase
 ecuación diferencial sin forzar
 solución general, 237
 ecuaciones de transferencia de voltaje,
 76, 77, 82
 de OPAMPS en configuraciones básicas
 cascada, 83
 ecuaciones de transferencia,
 voltaje, 76, 82, 89
 ecuaciones descriptivas, 232
 segundo orden, 255
 ecuaciones diferenciales de primer orden
 no acopladas, 234
 ecuaciones diferenciales no forzadas, 235
 Edison, Thomas Alva, 315
 editor de texto, SPICE, 127
 electricidad animal, 1
 electricidad estática, 1
 electricidad metálica, 1
 electrones, 6
 electropuro, 1
 elementos dinámicos, 144
 elemento(s),
 dos terminales, 2, 13, 34

en paralelo, 42
 general, 7
 ley(s), 34, 51
 multiterminal, 3
 sin pérdida, 364, 371
 elementos activos de un circuito, 13
 elementos de almacenamiento, 144
 elementos de circuito,
 activo, 13
 pasivo, 12, 14
 elementos de dos terminales, 2, 13, 34,
 51, 361
 elementos de red,
 elementos en serie-paralelo,
 en el dominio-s, 482
 elementos sin pérdida, 364, 371
 eliminación gaussiana, 106-107, 113, 713
 en el dominio-s, 486
 en paralelo, 42, 46
 energía reactiva, 373
 energía, 9, 11
 almacenamiento en una bobina,
 159, 170
 elementos de almacenamiento, 183
 entrada no inversa, 67
 equivalente de Norton, 49, 52, 78
 equivalente de Thevenin, 49, 52, 78
 resistencia, 234
 equivalente(s),
 bobinas en paralelo, 161
 capacitancia en paralelo, 152
 capacitores conectados en serie, 153
 conductancia en paralelo, 45
 fuentes complejas, 279
 impedancia, 299, 606
 resistencia paralela, 44-45
 serie-paralelo, 18, 316, 329
 escala de decibel, 521, 576
 escala de tiempo-frecuencia, 453
 escala, 563
 espectro de amplitud discreta, 679
 espectro de fase discreta, 679
 espectro discreto, 684
 estabilidad de circuitos, 495, 517
 excitaciones, 272
 expansión por fracciones parciales, 458,
 469, 695
 externos,
 corrientes y voltajes, 36

F

factor de amortiguamiento,
 de funciones de transferencia, 525

- factor de calidad, 539
 factor de potencia, 388, 394
 corrección para impedancia, 389
 sinusoidal, 388
 farad, 145
 Faraday, Michael, 143, 177
 fasor de referencia, 337
 fasor(es), 285, 308, 336
 correspondiente a diferentes frecuencias, 335, 394
 diagramas, 337-341, 349, 409
 cargas conectadas en delta, 419
 entrada, 518, 675
 leyes i - v para, 288-293
 propiedades de, 285-286
 relacionados con funciones sinusoidales, 286
 relaciones entre el fasor de voltaje y corriente, 289-290
 salida, 518, 675
 fasores rms, 367, 394
 filtro pasivo, 551
 filtro(s) pasa-bajos,
 con frecuencia de corte, 546
 filtros de alta Q , 539
 filtros pasa-altos, 546
 filtros pasa-banda, 547
 final,
 declaraciones de SPICE, 743
 filtro(s), 327, 546-552
 pasivo, 551
 forma de Norton, 49-50
 forma de Thevenin, 49-50
 en el dominio- s , 486
 fuente(s) de voltaje, 49
 resistencia equivalente, 49, 168
 forma polar de números complejos, 279-280, 718
 forma polar exponencial,
 de números complejos, 280
 forma rectangular, 279
 de fórmula de Euler, 722
 de números complejos, 718
 forma vector-matriz, 708
 Fourier, Jean Baptiste Joseph, 653
 Franklin, Benjamin, 6
 frecuencia angular, 273
 frecuencia baja de mitad de potencia, 538, 547
 frecuencia natural sobrearmortiguada, 238, 239
 frecuencia natural,
 de función de transferencia, 525
 frecuencia superior de potencia media, 538, 547
 frecuencia,
 de funciones sinusoidales, 273
 escala, 565
 fuente de energía trifásica balanceada, 402
 impedancia de fase conectada en delta, 425
 fuente de voltaje controlada por voltaje, 64, 67, 73
 fuente de voltaje y controlada por corriente, 64
 fuente(s) de corriente,
 en paralelo, 44
 fuente(s) independiente,
 con diferentes frecuencias, 333
 corriente, 13, 34
 en circuitos AC, 333
 voltaje, 13, 34
 suprimido, 53
 fuente(s),
 elementos ideales, 15
 potencia absorbida, 14
 potencia entregada, 14
 trifásico, 406
 fuentes complejas, 279
 circuito RLC, 282
 exponentiales, 280, 308
 para fuentes cosinusoidales y sinusoidales, 286
 fuentes controladas,
 corriente, 65
 voltaje, 65
 fuentes de voltaje,
 análisis nodal de circuitos contenido, 109, 136
 cadena de, 40
 controlada por corriente, 64
 en paralelo, 47
 controlada por voltaje, 64
 fuentes dependientes no lineales, 65
 fuentes dependientes,
 conteniendo circuitos, 66, 88
 corriente, 64
 en análisis nodal, 107-108, 136
 lineal, no lineal, 65
 voltaje, 64
 fuerza electrodinámica, 155
 fuerza electromotriz, 9
 fuerza electrostática, 155
 función de la parábola unitaria, 442
 función de la rampa unitaria, 442
 función de rueda de impulso unitario, 448
 función(es) de escalón unitario, 203, 224, 441, 446
 tiempo corrido, 205
 tiempo inverso, 206
 transformada de Laplace, 439
 función(es) de fuente, 13, 34, 46
 compleja, 279
 dirección de referencia, 13
 fuentes de corriente en paralelo, 46
 fuentes de voltaje en paralelo, 47
 función(es) impar, 656
 función(es) pares, 656
 funciones complejas exponentiales, 280, 517, 721-723
 cambio de fase, 722
 de fasores, 285
 funciones de impulso unitario, 444, 468
 integral de, 446
 regla del producto de impulso, 446
 transformada de Laplace, 449
 funciones de la transformada de Laplace, 438, 688
 funciones de respuesta de frecuencia, 518
 de circuitos lineales, 517
 funciones de transferencia biquadrática, 556
 funciones de transferencia bilineal, 556
 funciones de transferencia,
 biquadrática, 556, 561
 bilineal, 556
 forma estándar, 525
 implicaciones de estabilidad, 496
 razón en el dominio- s , 488
 realización de problema, 553
 salida en el dominio- s , 488
 funciones exponentiales,
 complejas, 280
 funciones forzadas,
 soluciones para pruebas forzadas, 247
 funciones generalizadas, 445
 funciones periódicas, 655, 665, 700
 funciones polinomiales importantes, 443
 funciones sinusoidal,
 amortiguadas, 232
 propiedades de, 273
 representación cuadrática, 276
 funciones singulares de alto orden, 448, 497
 funciones transformables de Fourier, 688
 fundamentos de matriz, 707
 forma vector-matriz, 708
 inversas, 712
 juntas, 712

multiplikación, 708
no inversas, 711
transposición, 708
triangularización, 714

G

Galvani, Luigi, 1
ganancia de lazo abierto,
amp(s) op, 68, 73, 542
ganancia de voltaje, 65
ganancia,
corriente, 65
en respuesta a entradas periódicas, 675
escala de decibel, 521, 522
funciones de respuesta de frecuencia, 519
gráfica de ganancia de Bode, 526
lazo abierto, 68, 75, 542
voltaje, 65
gráfica de circuito, 725
conectados, 725
gráfica de red, véase gráfica de circuito
gráficas de fase de Bode, 51
gráficas de ganancia de Bode, 516,
524-534
circuitos resonantes, 535
frecuencia de corte, 527, 532

H

Heaviside, Oliver, 203, 445, 477
Helmholtz, Hermann von, 515
henry, 155
Henry, Joseph, 155, 177
hertz, 274
Hertz, Heinrich R., 274, 515
HSPICE, 126, 731

I

ideal,
amplificador de voltaje, 68, 74, 88
elementos, 15
filtros, 546
fuente de corriente, 34, 41
fuente de voltaje, 34
interruptor, 149
transformadores, 604, 646
identidad de Euler, 279, 669
impedancia de fase conectado en delta,
425
impedancia de fase,
circuitos trifásicos, 409
impedancia reflejada, 600

impedancia(s), 294, 308
conversiones serie-paralelo, 32
de bobinas, 290
de capacitores, 292
de resistencias, 289
dependencia en frecuencia, 333
en el dominio-s, 480, 507
en forma polar, 295
en paralelo, 348
en series, 317-318, 348
equivalente, 299, 606
escala, 564
representación gráfica de, 295
inducción electromagnética,
ley de, 156
inductancia mutua, 585-589
circuitos con, 590
transformadores, 598
inductancia reactiva, 296
inductancia,
mutua, 586
integrador inversor, véase integrador
integrador, 210
inversión, 712

J

jarra de Leyden, 1
joule, 4
Joule, James Prescott, 4, 357

K

Kelvin, 3
kilogramo, 3, 4
Kirchhoff, Gustav, 22, 93

L

Laplace, Pierre Simon, Marqués de, 435
ley de elementos, 13
ley de Joule, 357
ley de Ohm, 22, 30-32
circuitos de elementos paralelos, 43
circuitos simples, 37
ley inversa-inversa, 44
leyes de $i-v$,
para bobinas acopladas, 591, 595
leyes de Kirchhoff,
aplicados a circuitos de dos puertos,
611
aplicados a circuitos lineales, 94, 136
aplicados a circuitos trifásicos, 405,
410

aplicados a fasores, 297-301, 308, 319,
348
aplicados al análisis nodal, 104, 136,
726
de corriente, 22-25, 29, 37, 51, 54-55,
93
análisis nodal, 325-327
supermodo(s), 111, 324
de radiación, 93
de voltaje, 22, 25-26, 29, 37, 54-55,
93
análisis de malla, 114-117
aplicado a capacitores en serie y
paralelo, 151-153
transformación(es) en el dominio-s,
479, 483-484, 507

lineal,

capacitor, 145
circuitos, 95, 136
análisis dc, 94
con fuentes múltiples
independientes, 98-99
de estado estable en D.C., 165
elementos, 95
resistencia, 31

linearidad,

de transformada(s) de Fourier, 692
de transformada(s) de Laplace, 440

lista de mallas,

declaraciones de SPICE, 733
listado de estatutos de SPICE, 733

bobina, 734
capacitor, 734
declaraciones de subcircuito
mencionado, 738
fuente independiente, 735
fuente(s) dependiente, 736
resistencia, 733
transformador lineal, 734

M

matriz de impedancia, 614
matriz de parámetros-z, 614
matriz no inversas, 711
Maxwell, James Clerk, 515
medidor, 3
método de fasor,
análisis de circuitos de estado estable
constante de AC usando SPICE,
346
análisis de circuitos, 273, 284-285,
301, 305-306
mho, 32

modelo de circuitos,
para circuitos de dos puertos, 626
modelo de fuente de voltaje, SPICE, 129
modelos de dos puertos, 625-630
Morse, Samuel F. B., 231

N

neutralmente eléctricos, 7
neutrones, 6
newton, 4
Newton, Sir Isaac, 4
nodo(s) de referencia,
análisis nodal, 103
nodo(s), 23
 ecuación(es), 104
 referencia, 103
Norton,
 fuente de corriente equivalente, 49
 resistencia equivalente, 49, 168
números complejos, 717-721
 conjugación de, 719
 forma polar, 721
 forma rectangular, 279, 718
 identidad de Euler, 279, 280,
 721-723
 notación, 238
 parte real e imaginario, 279, 717

O

Oersted, Hans Christian, 21
ohm, 30
Ohm, Georg Simon, 30, 63

P

paralelo,
 bobinas, 161
 capacitores, 152, 170
 circuitos RLC, 238, 540
 conductancia, 55
 elementos de circuito, 42
 fuentes de corriente, 46, 49
 resistencias, 43-44, 49
parámetro y
pasa-bandas, 576
pérdida lineal,
 sistemas trifásicos, 413
periodo,
 de funciones sinusoidales, 273
placas paralelas de capacitor, 145
plano complejo, 280

polo real simple,
 de transformadas de Laplace, 460
polos complejos conjugados,
 de transformada de Laplace, 460, 493
polos,
 de transformadas de Laplace, 459
 par simple de polos conjugados
 complejos, 460
 real simple, 460
 repetidas, 461
potencia aparente, 388
potencia compleja, 369
 circuitos de estado estable de AC,
 376-380
potencia en estado estable de ac, 358
 potencia aparente, 388
 potencia promedio, 358, 366, 369, 388,
 393
potencia entregada,
 circuitos conectados en delta, 420
 monofásicos contra trifásicos, 412, 414
potencia instantánea, 11, 17, 32, 39, 358
 monofásico contra trifásico
 entrega, 415-416
 periódica, 360
potencia periódica instantánea, 360
potencia pico, 358
potencia promedio,
 componente de dos terminales, 361
 de circuitos de estado estable, 358, 366,
 369
 de señales periódicas, 682
potencia, 10
 compleja, 369
 fuentes polifásicas, 402
 instantánea, 11, 17, 358, 393
 máxima, 381
 neta, 386
 promedio, 358, 366
razón, 522
 reactiva, 373
práctico,
 bobinas, 166
 capacitores, 166
principio de circuito abierto virtual,
 para amps op, 122
principio de continuidad, 147, 157, 167,
 170
principio de corto circuito virtual,
 para OPAMPS, 122
principio de superposición, 672
principio del divisor de corriente, 44
principio del divisor de voltaje, 38
Programa Simulador con un énfasis de

Circuitos Integrados, véase
SPICE
propiedad de diferenciación,
 de transformadas de Fourier, 691
propiedad de dualidad para
 transformadas de Fourier, 692
propiedad de proporcionalidad,
 de elementos de circuitos lineales,
 95, 96
propiedad,
 de integral de impulso unitario
 función, 448
protones, 6
PSPICE, 126, 218, 731
puerto primario de un transformador, 598
puerto secundario de un transformador,
 598
puerto, 82
punto convencional,
 para inductores, 590
 para transformadas ideales, 609
punto singular, 442

R

radián de frecuencia,
 de sinusoidales, 273
razón de amortiguamiento, 238, 239, 263
razón(es) de voltaje de transferencia,
 configuraciones básicas con OPAMPS,
 85, 89
reactancia capacitiva, 296
reactancia, 295
 capacitiva, 296
 inductiva, 296
red de escalera, 97
red(es),
 eléctrica, 2
 escalera, 97
 gráfica, 725
 lazo simple, 37, 277
 lineal-resistivo, 53
redes de lazo simple, 37, 178, 277
redes planares, 728
región de convergencia, 437
regla de Cramer, 106, 711
regla de Leibniz, 447
regla del producto de impedancia, 446
relación Parseval, 682
representación cuadrática,
 para funciones sinusoidales, 276
 para potencia reactiva, 374
representación de variables
 interrumpidas, 204

resistencia de entrada,
 modelo mejorado de OPAMPS, 70, 89
 resistencia de salida,
 modelo de amp op mejorados, 70
 resistencia en serie crítica, 242
 resistencia no lineal, 31
 resistencia paralela crítica, 239
 resistencia, 2, 22, 30
 forma de señal de voltaje y corriente
 para, 290
 ley de i - v , 30, 55
 lineal, 31
 paralelo, 43-45
 respuesta al impulso, 499
 en el dominio-s, 502
 respuesta al pulso,
 de circuitos de primer orden, 208
 flanco de bajada, 211
 flanco de subida, 211
 respuesta de escalón unitario,
 circuitos de primer orden, 203
 de circuitos de segundo orden, 257, 263
 en el dominio-s, 501
 respuesta del estado estable, 197
 de circuitos estables, 306, 508
 respuesta escalonada,
 de circuitos de primer orden, 208
 respuesta forzada,
 circuitos de AC de estado estable, 346
 circuitos de máximo orden, 272
 circuitos de segundo orden, 235, 245-248
 respuesta natural,
 circuitos RLC, 232
 con condiciones inicial diferentes de
 cero, 492
 de circuitos de segundo orden, 235-237,
 239, 262
 respuesta sinusoidal, 308
 respuesta total,
 circuitos de segundo orden, 251
 respuesta transitoria, 197
 análisis usando SPICE, 213
 retroalimentación negativa,
 circuito, 74
 rollo de, 73-75, 89

S

secundarios, véase cofactores
 segundo, 3
 series de Fourier exponenciales,
 669-671, 700
 series de Fourier, 654
 amplitud, 679

fase, 679
 trigonométrica, 661
 series trigonométricas de Fourier, 661,
 700
 series,
 bobinas, 161, 170
 cadena de capacitores en serie, 151
 cadena de fuentes de corriente, 41
 cadena de fuentes de voltaje, 40
 cadena de resistencias, 38
 circuito(s) RLC, 232, 536, 540
 elementos en, 37
 resistencia, 55
 SI, véase Sistema Internacional de
 Unidades
 Siemens, Werner y William, 32
 siguiendo el borde de una respuesta de
 pulso, 211
 simplificación de circuitos, 51
 sin pérdida, 364, 371
 singularidad de funciones,
 diferenciación de, 449
 funciones de alto orden, 448, 497
 funciones de demandas al impulso
 unitario, 448
 funciones de impulso unitario, 444
 integral de, 446
 salto de propiedad, 448
 funciones escalón unitario, 203, 224,
 441, 444, 468
 funciones generalizadas, 445
 funciones principales polinominales, 443
 integración de, 449
 Sistema de Unidades Británicas, 3
 Sistema Internacional de Unidades (SI),
 3
 sistemas de tres hilos, 403
 sobreamortiguado,
 circuitos de segundo orden, 240, 243,
 259, 263
 solución complementaria, véase
 respuesta natural
 solución de control,
 declaraciones de SPICE, 738
 solución natural
 de circuitos con fuentes de DC,
 192-194
 prueba pareja de soluciones forzadas,
 248
 solución natural de parámetros libres,
 de ecuación diferencial forzada, 193,
 194
 solución(es) de prueba,
 de circuitos de segundo orden, 242, 263

forzada,
 con fasores, 285
 de circuitos con fuentes de DC,
 193-194
 natural,
 de circuitos con fuentes de DC,
 193, 194
 para funciones forzadas comunes,
 247
 solución natural comparable, 248
 SPICE, 94
 análisis de circuitos de estado estable
 de ac usando, 342, 349
 análisis de circuitos de segundo orden
 usando, 261
 análisis de circuitos trifásicos usando,
 426
 análisis de circuitos usando, 125
 análisis de Fourier, 696
 análisis de respuesta transitoria
 usando, 213
 análisis de transformadores y circuito
 de dos puertos, 642
 guía de referencia, 731-743
 potencia de estado estable de AC, 342,
 349
 realización de filtros activos, 570
 parámetro de sensibilidad, 573
 respuesta de frecuencia determinada
 usando, 567
 salida PROBE, 221, 261
 Steinmetz, Charles Proteus, 271
 subamortiguado,
 circuitos de segundo orden, 240, 259
 subcircuito de dos terminales, 33, 36
 equivalente, 34-35
 subcircuitos, 33-34, 36, 49, 52
 sumado no inverso, 80, 554
 sumador inversor, 78, 554
 superficie cerrada,
 total de corrientes entrando, 29
 supermallas, 332
 supernodo, 110, 324
 superposición,
 análisis del circuito lineal, 98-102,
 136
 descomposición de circuitos de estado
 estable, 336, 348
 determinación de la razón del
 dominio-s, 490-491
 en solución de circuitos de primer
 orden, 198, 201
 inaplicabilidad a potencia de estado
 estable de AC, 377-378

principio de, 336, 672
usado con fuentes de diferentes
frecuencias, 335-336, 394
susceptancia, 296

T

t-forma multiplicada,
solución de amortiguamiento crítico
circuitos de segundo-orden, 242,
249
t-multiplicación, 454
teorema de Telegan, 40
teorema del valor final, 497-499
teorema del valor inicial, 497-499
teoría del campo electromagnético, 2
terminal neutral,
para circuitos monofásicos, trifásicos,
404
para circuitos trifásicos, estrella-estrella,
406
terminal,
corriente, 33
ley, 34, 146
voltaje, 33
Tesla, Nikola, 401
tierra,
nodo, 104
OPAMPS, 68
título y comentarios,
declaraciones en SPICE, 733
títulos de declaraciones, 127
títulos y comentarios de SPICE, 733
topología de circuitos, 725-730
transformadores, 598-603, 646

escala de impedancia de carga de,
ideal, 604
impedancia reflejada, 600
razón de corriente
secundaria-a-primaria, 601, 604
transconductancia, 65
transferencia de potencia máxima
de subcircuitos de AC, 382
transformador(es), 608
transformación(es) de Thevenin-Norton,
196, 301, 348
transformación(es) estrella-delta,
422-423
transformada(s) de Fourier, 654,
684-690, 700
operaciones, 693
propiedades de, 690-695
cambio de tiempo, 692
diferenciación, 691
linealidad, 691
propiedad de dualidad, 692
transformada par, 686
transformada(s) de Laplace, 231, 468,
686
de convolución de funciones dos
tiempos, 503
dominio-*s*, 437
funciones singulares, 441, 448
diferenciación de, 449, 468
integración de, 449
inversa, 437
expansión de fracciones parciales,
458
linealidad de, 440
propiedades de, 455

t-multiplicación, 454
transformada par, 437, 457
transformada(s) inversa de Laplace,
437
expansión de fracción parcial, 458,
469

transformados aislados, 639
transistores, 2
transpuesta, 708
transresistencia, 65

V

valores efectivos de corrientes y voltajes
periódicos, véase valores rms
valores promedio al cuadrado de
funciones periódicas, 658
valores rms para corrientes y voltajes
periódicos, 366
volt, 1, 4
Volta, Alessandro, 1
voltaje rms, 366
voltaje, 3, 17
dirección de referencia, 9, 11, 146
voltajes de línea, 408
voltajes y corrientes internos, 36
vuelta,
lazo, 114

W

Watt, James, 4
watts, 4, 10
Weber, Wilhelm, 155
Wheatstone, Charles, 477

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

	<u>$f(t)$</u>	<u>$\mathbf{F}(s)$</u>
1. Linearidad	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 \mathbf{F}_1(s) + c_2 \mathbf{F}_2(s)$
2. Diferenciación	$d/dt f(t)$	$s\mathbf{F}(s) - f(0-)$
3. Diferenciación plegada- n	$d^n/dt^n f(t)$	$s^2\mathbf{F}(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2}f'(0-) - \dots - sf^{(n-2)}(0-) - f^{(n-1)}(0-)$
3. Integración	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\mathbf{F}(s)/s$
4. Corrimiento en tiempo	$f(t - t_0)u(t - t_0), t_0 > 0$	$e^{-st_0}\mathbf{F}(s)$
5. Corrimiento en frecuencia	$e^{-s_0 t} f(t)$	$\mathbf{F}(s + s_0)$
6. Escala en tiempo-frecuencia	$f(ct), c > 0$	$1/c \mathbf{F}(s/c)$
7. t -multiplicación	$t f(t)$	$-d/ds \mathbf{F}(s)$
8. n -pliegue t -multiplicación	$t^n f(t)$	$(-1)^n d^n/ds^n \mathbf{F}(s)$
9. Respuesta al impulso y función de transferencia son pares en Laplace y en tiempo	$h(t)$	$\mathbf{H}(s)$
10. Teorema del valor inicial		$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$
11. Teorema del valor final		$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$

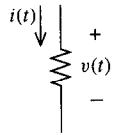
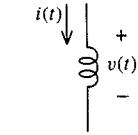
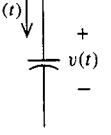


.....

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla No.</u>	<u>Título</u>	<u>Página</u>
1.1	Prefijo en el SI	3
7.1	Respuestas forzadas de prueba para funciones excitadoras más comunes	247
12.1	Propiedades de la transformada de Laplace	455
12.2	Pares de la transformada de Laplace	456
14.1	Propiedades de los circuitos RLC en serie y paralelo	540
14.2	Block de circuitos construidos	554
15.1	Descripción de los parámetros de dos puertos	620
15.2	Conversiones de los parámetros de dos puertos	623
16.1	Operaciones de la transformada de Fourier	693

ELEMENTOS RLC

	<u>Resistencia</u>	<u>Bobina</u>	<u>Capacitor</u>
Símbolo de circuito:			
Elementos en las leyes del dominio del tiempo:	$v(t) = Ri(t)$	$v(t) = L \frac{d}{dt}i(t)$	$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau + v(t_0)$
Impedancia en fasor Z	R	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$
Impedancia en Laplace $Z(s)$	R	sL	$\frac{1}{sC}$

.....

