
SIMULACIÓN 2, INSTRUMENTACIÓN NUCLEAR

Julian Mauricio Cruz Rojas¹ and Andres Felipe Vargas Londoño¹

¹*Departamento de Física, Universidad Nacional, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia*
(22 de septiembre de 2022)

Distribución exponencial

$S(t) = e^{-\Gamma t}$ representa la probabilidad de que un núcleo sobreviva sin decaer hasta un instante de tiempo t desde $t = 0$, siendo Γ la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo. De este modo $P(t)$ en (1), representa la densidad de probabilidad por unidad de tiempo de que un núcleo sobreviva hasta un instante t dado y decaiga en el infinitesimal dt siguiente.

$$P(t)dt = S(t)\Gamma dt \quad (1)$$

Para efectos de la simulación se usa entonces $P(t)$ para estimar el número de decaimientos a medida que transcurre el tiempo. Dado que se está usando el método de Montecarlo, el primer paso es construir la distribución acumulativa $F(t)$ para $P(t)$, para lograr esto primero se discretizó el dominio $[t_{min} = 0, t_{max} = 7\tau]$ en intervalos de tiempo dt , siendo $\Gamma = 1/\tau$ con τ el tiempo de vida medio del núcleo escogido, en este caso Cesio-137, con una vida media de 43,35year. Para discretizar $P(t)$ se integró la función en intervalos de longitud $dt = \tau/45 = 0,963$ años, obteniendo así valores de probabilidad proporcionales al área bajo $P(t)$ para cada intervalo, luego se construyó la acumulativa sumando progresivamente los valores de probabilidad hallados. El resultado en la Figura 1.

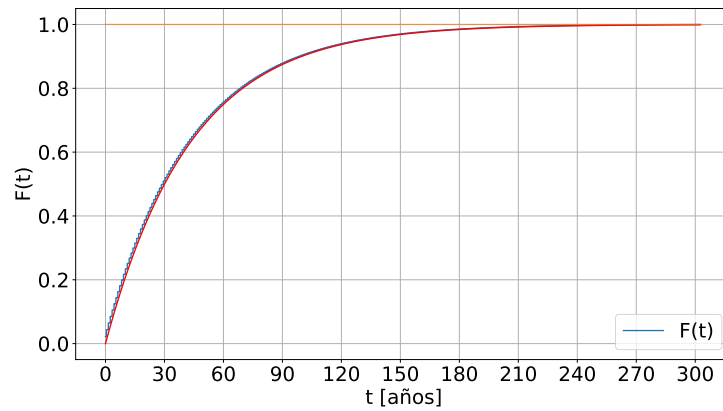


Figura 1: Distribución acumulativa exponencial.

Se logró tener un valor de 1 para el último intervalo de la distribución acumulativa dividiendo toda la distribución $F(t)$ por el valor numérico original para dicho intervalo, esto ya que en realidad para lograr una función acumulativa de valor final 1 se debe tomar t_{max} en infinito, sin embargo esto no es práctico

para efectos de la simulación y el análisis que se desean hacer. Todo esto puede encontrarse en la parte de “#SETUP” del archivo adjunto exp-decay.py.

Una vez se tiene $F(t)$, se puede entonces simular por Montecarlo el decaimiento de los átomos. Las figuras 2 muestran el número de átomos decaídos por intervalo de tiempo dt (la actividad de la muestra) variando el total de núcleos N .

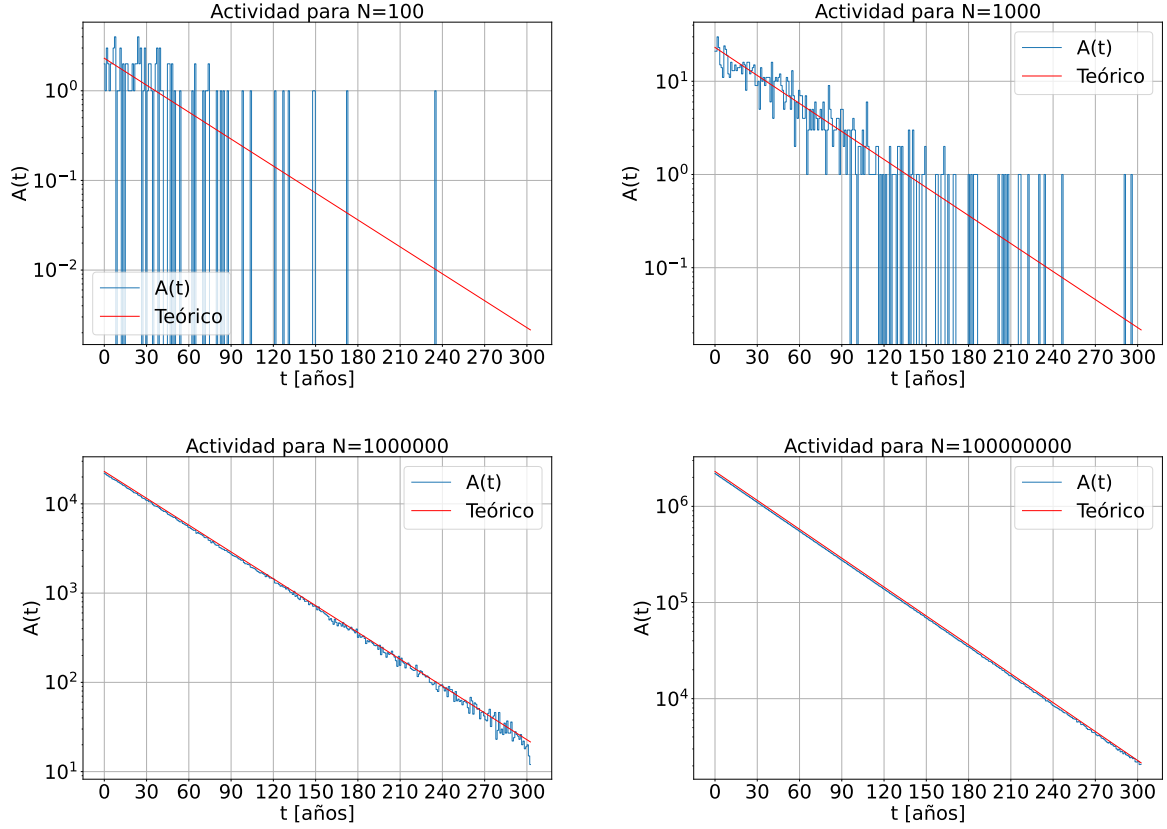


Figura 2: Histogramas resultantes para los diferentes valores de N bajo la teoría de decaimiento exponencial.

Se tomó t_{max} de aproximadamente 7τ , dado que para $N = 10^8$ núcleos, el último intervalo dt cuenta con tan solo 2000 decaimientos, lo cual puede considerarse insignificante comparado con el número inicial.

Es claro además que para números elevados de núcleos lo simulado se aproxima bastante bien a la predicción teórica, esto dado que para $N = 100$ y $N = 1000$, los máximos decaimientos por unidad de tiempo alcanzados son de apenas unas decenas, de modo que pequeñas variaciones entre el número de decaimientos entre dos intervalos de tiempo consecutivos resultan fácilmente comparables, mientras que para $N = 10^6$ y $N = 10^8$ variaciones de decenas o incluso cientos resultan diminutas comparadas con la escala de los gráficos.

Se encontró además que la escogencia del dt resulta importante a la hora de comparar con la teoría, en las figuras 3, se muestran los resultados obtenidos para distintos dt .

Nótese que Γ está definida como la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo ($dt = 1$), de modo que para un $dt \ll 1$ el resultado está por debajo de lo esperado, esto ya que se tiene una división de tiempo mucho menor a lo descrito por la teoría a través de Γ , ocurre lo contrario en cambio al considerar $dt \gg 1$, ya que al tener divisiones de tiempo tan grandes, el programa resulta sobrestimando el número de decaimientos. Teniendo entonces $dt \approx 1$, se logra la mayor cercanía a lo esperado.

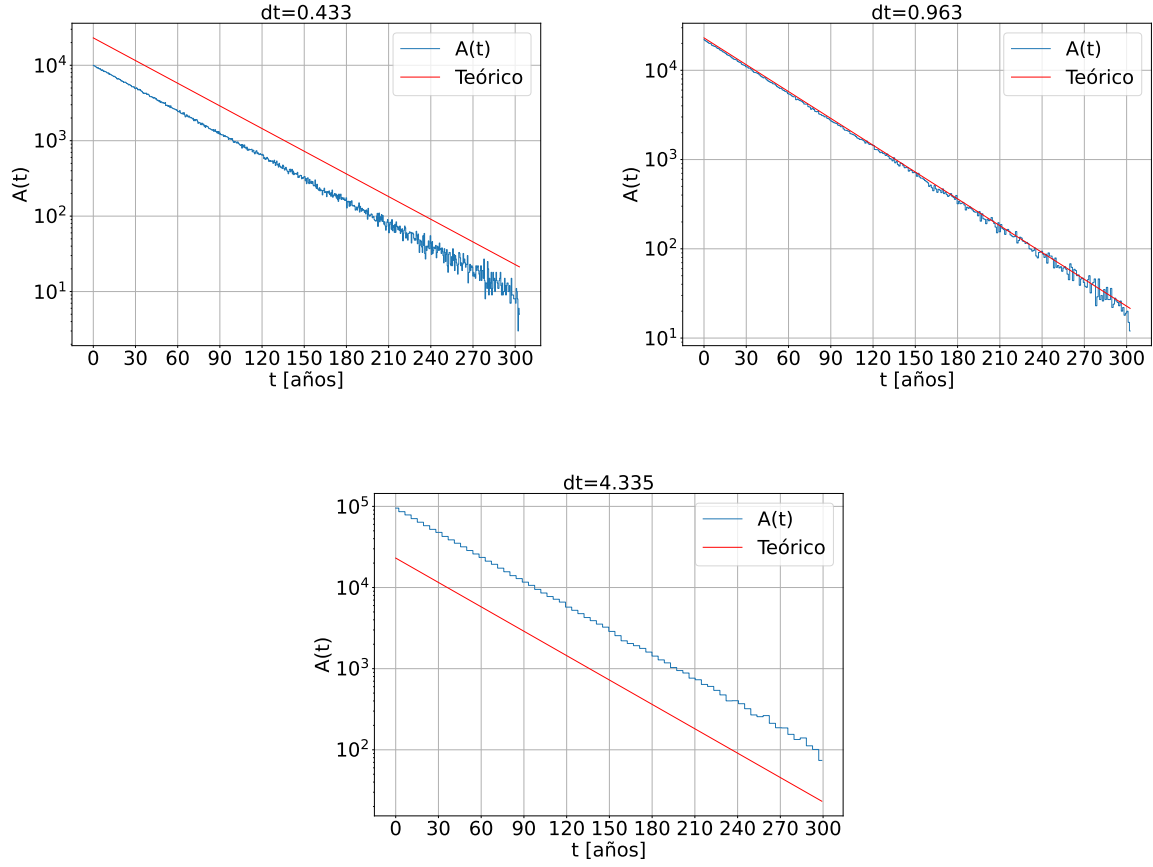


Figura 3: Histogramas resultantes para $N = 10^6$ núcleos variando dt .

Distribución binomial núcleo por núcleo.

Para este análisis se considera, en cada instante de tiempo, el decaimiento de un solo núcleo. Bajo estas condiciones se obtiene la densidad de probabilidad binomial de la ecuación (2), obtenida de [1].

$$P_B(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x} \quad (2)$$

Con $N = 1$ los únicos posibles valores de la variable aleatoria x son $x = 0, 1$. Reemplazando en la ecuación (2), según las ecuaciones (3) y (4).

$$P_B(0) = \frac{1!}{0!(1-0)!} p^0 (1-p)^{1-0} = \frac{1}{1(1)} 1(1-p) \quad (3)$$

$$P_B(1) = \frac{1!}{1!(1-1)!} p^1 (1-p)^{1-1} = \frac{1}{1(1)} p(1) \quad (4)$$

Se obtiene finalmente la función (5). El valor de p se obtuvo como el producto Γdt , teniendo en cuenta que Γ es la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo.

$$P_B(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Al igual que en la simulación de distribución exponencial, los núcleos que se consideran corresponden a Cesio 137 y los intervalos diferenciales de tiempo son de $dt = 0,963$ años. Por lo cual, siendo $\Gamma = 1/43,35$ años

para el Cesio 137, $p = 0,02\bar{2}$. A partir del valor de p y la función (5) se construyó la distribución acumulativa que se muestra en la Figura 4. En esta se observa que para $x = 0$ la distribución crece hasta un valor cercano a 1, alcanzando la total certidumbre en $x = 1$.

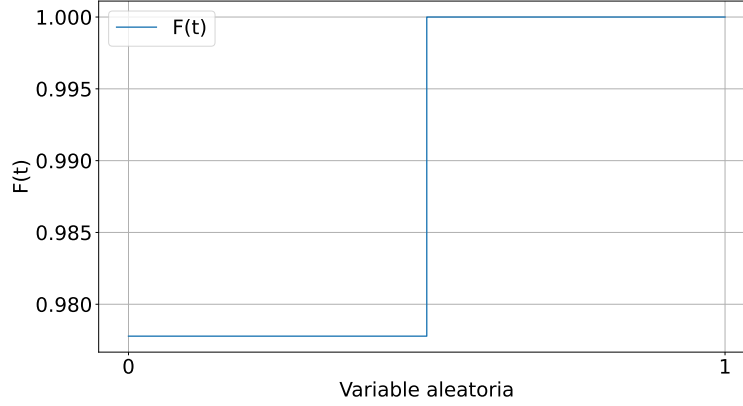


Figura 4: Distribución acumulativa binomial.

Hallada la distribución acumulativa, se hizo una simulación por método Montecarlo del decaimiento de diferentes cantidades de núcleos. En esta, se genera un número aleatorio para cada núcleo, decidiendo según p si este decae o no, los núcleos decaídos se restan del total y se considera el siguiente intervalo de tiempo. Con esta simulación fue posible obtener la cantidad de núcleos que decayeron en cada intervalo de tiempo, y del mismo modo, la cantidad de núcleos que no decayeron. Para fines comparativos se trazaron en una misma gráfica la predicciones teóricas, la actividad y los núcleos restantes según la distribución binomial y la actividad y los núcleos restantes según la distribución exponencial. Los resultados se encuentran expuestos en las Figuras 5 y 6.

En estas se observa que para $N = 100$ y $N = 1000$ la concordancia con la teoría no es buena, las diferencias en los decaimientos por unidad de tiempo son proporcionalmente grandes, llevando a escalones muy pronunciados en las gráficas, adicionalmente, el total de los núcleos decae antes de lo predicho. Por otro lado, para $N = 10^6$ y $N = 10^8$ el resultado es bueno, se observa gran similitud entre los conteos obtenidos por ambas distribuciones con la predicción teórica. Sin embargo, a medida que el número de núcleos total disminuye, las diferencias en decaimientos llevan nuevamente a escalones pronunciados.

Nótese que para los núcleos restantes, en la simulación exponencial con $N = 10^6$ y 10^8 la predicción de núcleos restantes se desvía bastante de lo predicho, esto dado que la estrategia con que se realizó la simulación obliga a que todos los núcleos decaigan en el intervalo de tiempo $[0, 7\tau]$ lo cual no representa fielmente la realidad.

Referencias

- [1] Fernando Cristancho. Instrumentación nuclear: Simulación 2. Universidad Nacional de Colombia, 2022.

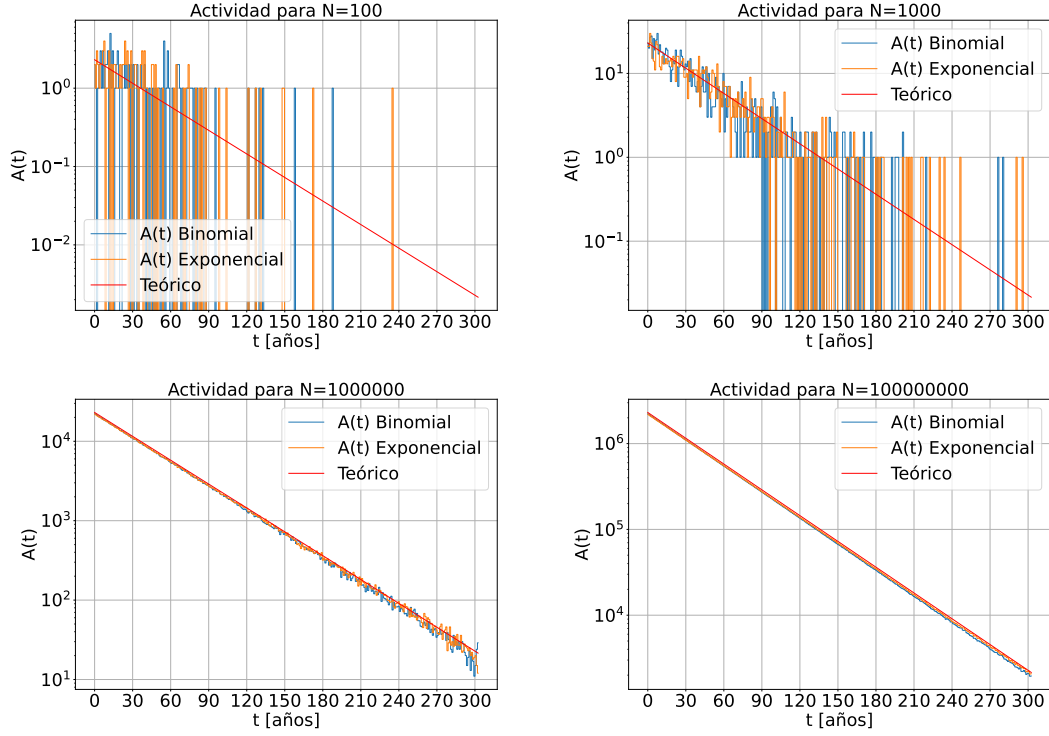


Figura 5: Histogramas resultantes para las actividades A bajo la teoría de decaimiento binomial.

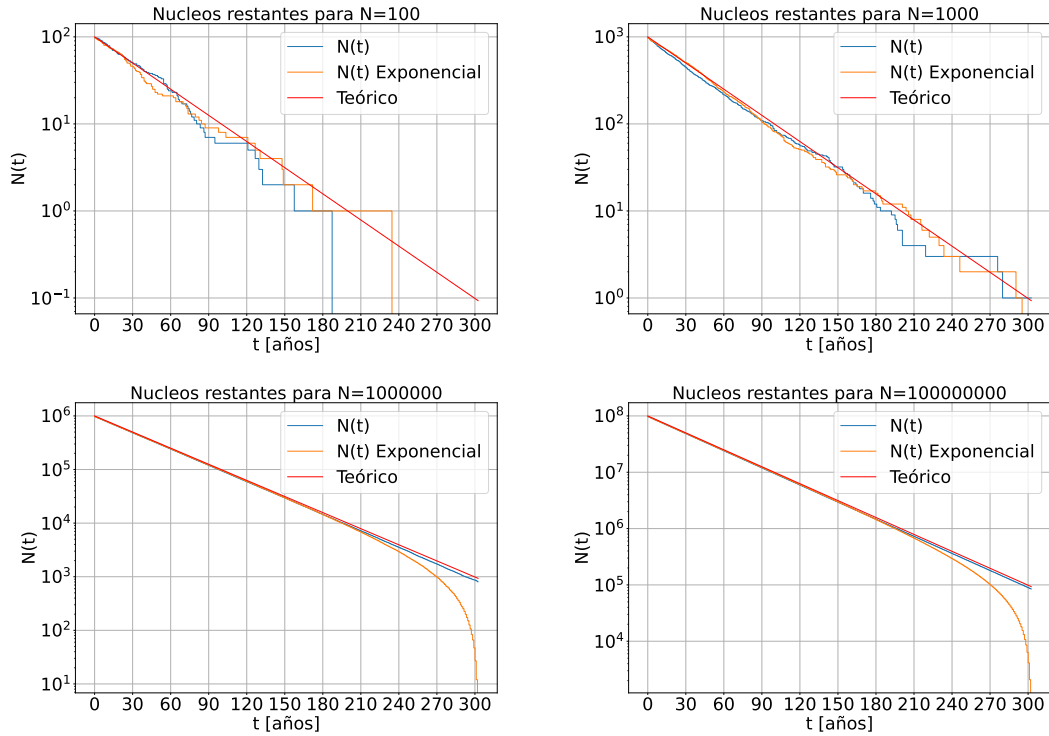


Figura 6: Histogramas resultantes para los nucleos restantes N bajo la teoría de decaimiento binomial.