Introducción a la teoría de reacciones nucleares

Ejercicios de clase - Prof. Edna Carolina Pinilla.

A. F. Vargas-Londoño[1]

[1]*Departamento de Física, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia*
Email: [1]anvargasl@unal.edu.co

20 de mayo de 2024

Ejercicio 4

a) Reproduzca la Figura 3.6 del libro L.F. Canto & M. S. Hussein, Scattering theory of molecules, atoms and nuclei World Scientific, (2012) [1]. Utilice el potencial descrito en la sección 3.4.1 del mismo libro.

b) Utilice el método de la matriz-R o Numerov para hallar los corrimientos de fase dados en la Figura 4 de [2]. Los elementos de matriz del operador cinético más el operador de Bloch están definidos en las ecuaciones (3.128) y (3.129) de [3].

Solución

La Figura 3.6 de [1] muestra el potencial efectivo entre dos partículas α, dado por la ecuación (1).

$$V_l^{eff}(r) = V_C(r) + \bar{V}(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{1}$$

Donde V_C representa el potencial Coulombiano, el cual está definido en dos regiones cuyo limite se encuentra en $R_C \approx 2R_\alpha$. Considerando un potencial partícula-esfera, puede asumirse que el potencial que siente una partícula α al estar "dentro" de la otra ($r < R_C$) es igual al de una partícula dentro de una esfera de radio R_c con carga $q = 2e$.

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e^2}{r} & \text{for } r \geq R_C \approx R_P + R_T = 2R_\alpha \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e^2}{2R_C}\left(3 - \frac{r^2}{R_C^2}\right) & \text{for } r < R_C \end{cases} \tag{2}$$

$\bar{V}$ por otro lado, representa el potencial nuclear atractivo entre ambas partículas, el cual toma una forma gaussiana representada en la ecuación (3)

$$\bar{V}(r) = -V_0 e^{-r^2/R_C^2} \tag{3}$$

a) Con esto es posible entonces reproducir la Figura 3.6 de [1] al tomar además los valores $V_0 = 60$ MeV y $R_C = a = 4.5$ fm (Fig. 1).

Incluyendo ahora el potencial de corto alcance $\bar{V}(r)$, la ecuación de Schöinger toma la siguiente forma:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right)\Psi(\vec{k};\vec{r}) = \bar{V}(r)\Psi(\vec{k};\vec{r}) + E\Psi(\vec{k};\vec{r}) \tag{4}$$

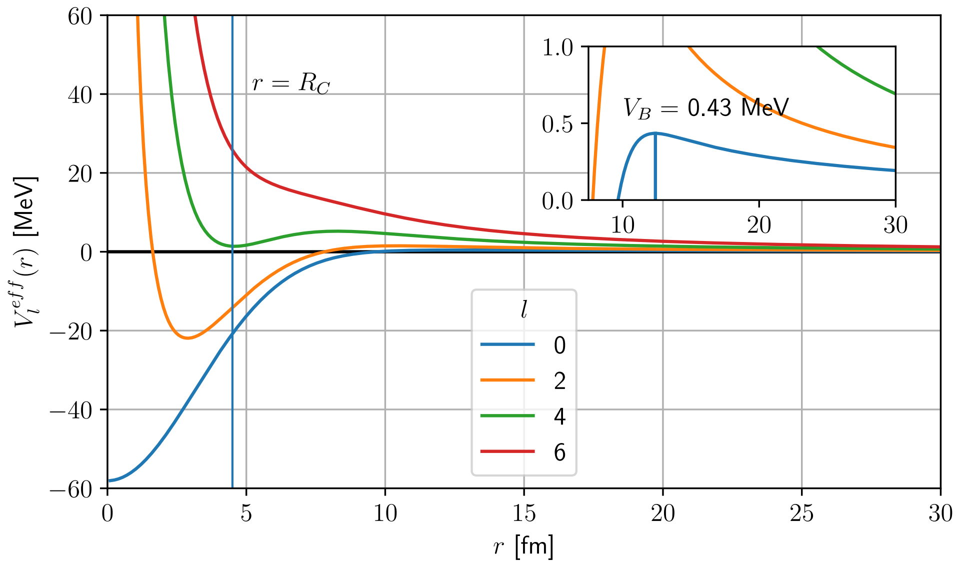

Figura 1: Potencial efectivo entre dos partículas α para distintos valores de l.

Introduciendo el parámetro de Sommerfeld η, esta ecuación puede reescribirse de forma compacta como se muestra en (5)

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla^2 + k^2 - \frac{2\eta k}{r}\right)\Psi(\vec{k};\vec{r}) = \bar{V}(r)\Psi(\vec{k};\vec{r}) \ , \qquad \eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\nu} \ , \qquad \nu = \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \tag{5}$$

Expandiendo en ondas parciales se tiene entonces una solución radial que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2\eta}{\rho}\right)u_l(k,\rho) = \bar{V}(r)u_l(k,\rho) \ , \qquad \rho = kr \tag{6}$$

Cuya solución para $r > a$ (donde $r = a$ es la distancia a la cual $\bar{V}(r)$ se desvanece) es la ecuación de onda de Coulomb, dada por las funciones de Coulomb-Haenkel $H_l^{(\pm)}(\eta,\rho)$, teniendo entonces la forma:

$$u_l(k, r > a) = \frac{i}{2}[H_l^{(-)}(\eta,\rho) - \bar{S}_l H_l^{(+)}(\eta,\rho)] \ , \qquad \bar{S}_l = e^{2i\bar{\delta}_l} \tag{7}$$

En el intervalo $(0, a)$ la ecuación (5) no es hermítica dado que el hamiltoniano H_l no es hermítico, de modo que se introduce el operador de Bloch $\mathcal{L}$ para restaurar la hermiticidad:

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\delta(r-a)\frac{d}{dr} \tag{8}$$

resultando entonces en la ecuación de Schrödinger

$$(H_l + \mathcal{L} - E)u_l^{int}(r) = \mathcal{L}u_l^{ext}(r) \tag{9}$$

que es equivalente a las siguientes igualdades:

$$(H_l - E)u_l^{int} = 0 \ , \qquad \left.\frac{du_l^{int}}{dr}\right|_a = \left.\frac{du_l^{ext}}{dr}\right|_a \ , \qquad u_l^{int}(a) = u_l^{ext}(a) \tag{10}$$

donde $u_l^{int}(r)$ y $u_l^{ext}(r)$ representan respectivamente las ecuaciones de onda radiales en las regiones dentro ($r < a$) y fuera ($r > a$) del potencial de corto alcance. u_l^{int} puede expandirse ahora en una base de funciones de Lagrange, para este caso particular se toman las funciones de Lagrange-Legendre regularizadas y escaladas, ilustradas en (11)

$$\tilde{f}_j(x) = (-1)^{N+j}\left(\frac{x}{ax_j}\right)\sqrt{ax_j(1-x_j)}\frac{P_N(2x/a-1)}{x-ax_j} \tag{11}$$

siendo x_j las raíces tales que $P(2x_j - 1) = 0$, esto puede simplificarse al evaluar en $x = a$, obteniendo así:

$$\tilde{f}_j(a) = \frac{(-1)^{N-j}}{ax_j(1-x_j)} \tag{12}$$

De modo que la expansión de la funcion de onda radial interna tiene la forma

$$u_l^{int}(r) = \sum_{j=1}^{N} c_j\tilde{f}_j(r) \tag{13}$$

reemplazando esto en (9) y proyectando sobre una función $\tilde{f}_j$ en el espacio de coordenadas, es posible llegar al siguiente resultado para los coeficientes c_j de la expansión:

$$c_j = u_l'^{ext}(a)\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_{i=1}^{N} C_{ji}^{-1}\tilde{f}_i(a) \tag{14}$$

donde C_{ji} son los elementos de matriz $\langle\tilde{f}_j|\, T_l + \mathcal{L} + V_{eff} - E\,|\tilde{f}_i\rangle$ ilustrados en las ecuaciones (15) a (17).

$$\langle\hat{f}_j|\, V^{eff}(r) - E\,|\hat{f}_i\rangle = (V_{eff}(ax_i) - E)\delta_{ij} \tag{15}$$

$$\langle\hat{f}_i|\, T + \mathcal{L}\,|\hat{f}_i\rangle = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2}\frac{(4N^2+4N+3)x_i(1-x_i) - 6x_i + 1}{3x_i^2(1-x_i)^2} \qquad \text{for} \quad i = j \tag{16}$$

$$\langle\hat{f}_j|\, T + \mathcal{L}\,|\hat{f}_i\rangle = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2}\frac{(-1)^{i+j}}{[x_ix_j(1-x_i)(1-x_j)]^{1/2}} \cdot \left[N^2 + N + 1 + \frac{x_i + x_j - 2x_ix_j}{(x_i-x_j)^2} - \frac{1}{1-x_i} - \frac{1}{1-x_j}\right] \qquad \text{for} \quad i \neq j \tag{17}$$

Recordando ahora que: la R_l matriz es la inversa de la derivada logarítmica y las derivadas en la frontera $r = a$ deben ser iguales (10), se puede hacer el siguiente desarrollo al reemplazar c_j en la expansión de $u_l^{int}(r)$:

$$u_l^{int}(a) = \sum_{j=1}^{N}\left(u_l'^{ext}(a)\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_{i=1}^{N} C_{ji}^{-1}\tilde{f}_i(a)\right)\tilde{f}_j(a) \tag{18}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\left(u_l'^{int}(a)\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_{i=1}^{N} C_{ji}^{-1}\tilde{f}_i(a)\right)\tilde{f}_j(a) \tag{19}$$

$$= u_l'^{int}(a)\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_{i,j=1}^{N} C_{ji}^{-1}\tilde{f}_i(a)\tilde{f}_j(a) \tag{20}$$

$$\to R_l = \frac{\hbar^2}{2a\mu}\sum_{i,j=1}^{N} C_{ji}^{-1}\tilde{f}_i(a)\tilde{f}_j(a) = \frac{1}{L_{int}(a)} \tag{21}$$

Tomando ahora la derivada logarítmica de la función de onda externa (7) se encuentra lo siguiente:

$$L_{ext}(a) = \frac{a u_l'^{ext}(k,a)}{u_l^{ext}(k,a)} \tag{22}$$

$$= \frac{ka[H_l'^{(-)}(\eta,ka) - \bar{S}_l H_l'^{(+)}(\eta,ka)]}{[H_l^{(-)}(\eta,ka) - \bar{S}_l H_l^{(+)}(\eta,ka)]} = L_{int}(a) \tag{23}$$

$$\to \bar{S}_l = -\frac{kaH_l'^{(-)}(\eta,ka) - L_{int}(a)H_l^{(-)}(\eta,ka)}{kaH_l'^{(+)}(\eta,ka) - L_{int}(a)H_l^{(+)}(\eta,ka)} \tag{24}$$

$$= -\frac{kaR_l H_l'^{(-)}(\eta,ka) - H_l^{(-)}(\eta,ka)}{kaR_l H_l'^{(+)}(\eta,ka) - H_l^{(+)}(\eta,ka)} \tag{25}$$

De modo que encontrar la R matriz es suficiente para obtener los corrimientos de fase correspondientes recordando nuevamente la relación de la matriz de dispersión $S_l = e^{2i\delta_l}$.

b) Dado que en este caso se estudiará la colisión p+^{12}C, es necesario entonces cambiar el potencial, teniendo así:

$$V_l^{eff}(r) = V_N + V_C + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{26}$$

$$= -73.8e^{-(r/2.70)^2} + \frac{6e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{27}$$

Con esto es posible entonces reproducir la Figura 4 de [2] (Fig 2).

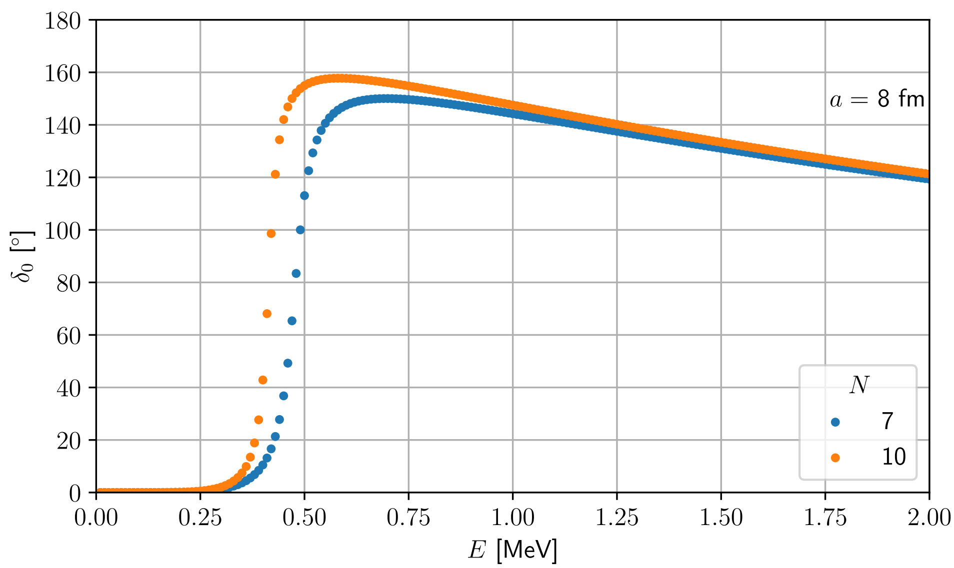

Figura 2: Corrimientos de fase calculados por el método de R-matriz para la colisión p+^{12}C, con $a = 8$ fm y $N = 7$ y 10.

Referencias

[1] Luiz Felipe Canto and Mahir S Hussein. *Scattering Theory of Molecules, Atoms, and Nuclei.* World Scientific, 2013.

[2] Pierre Descouvemont and D Baye. The r-matrix theory. *Reports on progress in physics*, 73(3):036301, 2010.

[3] Daniel Baye. The lagrange-mesh method. *Physics reports*, 565:1–107, 2015.