
INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE REACCIONES NUCLEARES

EJERCICIOS DE CLASE - PROF. EDNA CAROLINA PINILLA.

A. F. Vargas-Londoño¹

¹*Departamento de Física, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia*

Email: ¹anvargasl@unal.edu.co

22 de abril de 2024

Ejercicio 1

Punto 1 del capítulo 1 de [1]: In a scattering experiment a beam of ${}^9\text{Be}$ ($Z_P = 4$) nuclei with energy $E_{lab} = 19$ MeV impinges on a thin solid target of ${}^{64}\text{Zn}$ ($Z_T = 30$). The scattered particles are measured by a set of five detectors distributed on a circumference at the angles (referred to the beam direction) $\theta_1, \dots, \theta_5$. The yields in the detectors, $N(\theta)$, are listed in the table below. The experimental setup is such that the product $J \cdot n \cdot \Delta\Omega$ is $2.9 \times 10^{27} \text{ cm}^{-2}$. Transform these angles to the CM-frame and obtain the corresponding experimental cross sections. Plot the experimental points in comparison with the Rutherford cross section.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} &= \frac{a^2}{4} \left[\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \right] \\ a &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2 Z_P Z_T}{4\pi\epsilon_0 E} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

where e is the absolute value of the electronic charge and $v = \sqrt{2E_{lab}/M_P}$

Tabla 1: Particle yield in the detectors at the given angles.

α [°]	30	60	90	120	150
$N(\alpha)$	32983 ± 181	2296 ± 50	545 ± 10	181 ± 7	82 ± 3

Solución

La ecuación (2) expresa la sección eficaz en el marco del laboratorio.

$$\frac{d\sigma_\alpha(\Omega)}{d\Omega} = \frac{N_\alpha(\Omega, \Delta\Omega)}{\Delta\Omega \cdot n \cdot J} \quad (2)$$

De modo que es posible calcular la sección eficaz del laboratorio tomando $N_\alpha(\Omega, \Delta\Omega) = N_\alpha(\alpha)$ y $J \cdot n \cdot \Delta\Omega = 2.9 \times 10^{27} \text{ cm}^{-2}$. Obteniendo así los siguientes valores:

La transformación de la sección eficaz al marco centro de masa está dada por (3),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{Lab}} \frac{|1 + \lambda \cos \theta|}{(1 + 2\lambda \cos \theta + \lambda^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Tabla 2: Sección eficaz en el marco del laboratorio.

α [°]	30	60	90	120	150
$d\sigma/d\Omega_{Lab}$ [b]	11.37(6)	0.79(2)	0.188(3)	0.062(2)	0.028(1)

de modo que es necesario conocer el valor de $\cos\theta$. Expresado en términos del ángulo de dispersión α en el marco del laboratorio se tiene la siguiente igualdad para este caso (dado $\lambda = \frac{m_{^9Be}}{m_{^{64}Zn}} = 9.012 \text{ AMU}/63.929 \text{ AMU} = 0.14 < 1$)

$$\cos\theta = -\lambda \sin^2\alpha + \cos\alpha\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}, \quad \text{para } \lambda < 1 \quad (4)$$

De esta relación se pueden encontrar ángulos θ en los cuales se encuentra el detector en el marco C.M:

Tabla 3: Ángulo de dispersión en el marco C.M.

α [°]	30	60	90	120	150
θ [°]	34	67	98	127	154

En el caso de la sección eficaz de Rutherford (1) (calculada en el marco C.M) es necesario transformar la energía del laboratorio bajo la siguiente relación:

$$E_{C.M} = \frac{m_{^{64}Zn}}{M} E_{lab} = \frac{63.929 \text{ AMU}}{72.941 \text{ AMU}} 19 \text{ MeV} = 16.652 \text{ MeV} \quad (5)$$

Tomando entonces los ángulos mostrados en 3 se tiene todo lo necesario para el cálculo. La Figura 1 muestra entonces los resultados de el cálculo de Rutherford junto con la transformación (3) a partir de los datos en la tabla 2 y la ecuación (4).

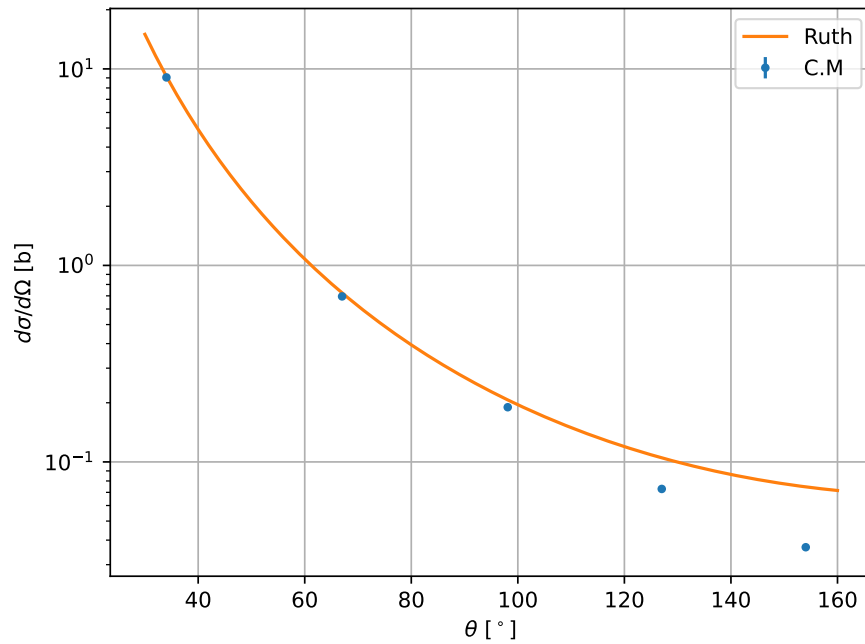


Figura 1: Comparación de secciones eficaces, Rutherford y marco C.M.

Para evidenciar mejor las incertidumbres es posible reducir la escala al tomar el cociente entre los dos resultados. Dividiendo $d\sigma/d\Omega_{C.M.}$ por los valores de $d\sigma/d\Omega_{Ruth}$ en los ángulos θ dados en la Tabla 3, se tiene entonces lo ilustrado en la Figura 2.

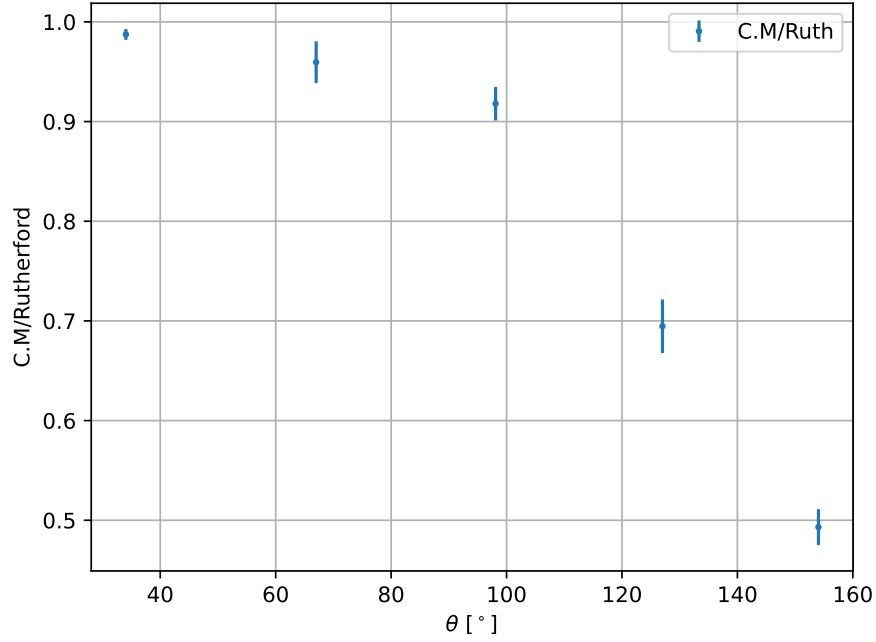


Figura 2: Razón entre las secciones eficaces C.M./Rutherford.

Ejercicio 2

Use la forma integral del corrimiento de fase para potenciales débiles y onda $l = 0$, con un potencial de Yukawa dado por:

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (6)$$

Grafique el corrimiento de fase δ_0 como función de la energía E . Escoja un proyectil y blanco sin interacción Coulombiana (ligeros). Ejemplo ^{12}C -n, n-n, etc. Analice el comportamiento de δ_0 para diferentes valores de V_0 y α .

Solución

La forma integral del corrimiento de fase está dada por (7)

$$\sin \delta_l \approx -\frac{1}{k} \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \int_0^\infty dr \hat{j}_l(kr) V(r) \quad (7)$$

de modo que es necesario conocer \hat{j} , el cual está definido a partir de las funciones esféricas de Bessel $j_l(\rho)$ según la ecuación (8)

$$\hat{j}_l(\rho) = \rho \cdot j_l(\rho) = \rho \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{l+1/2}(\rho) \quad (8)$$

Es posible a partir de la definición en series de $J_l(\rho)$ ver que la función esférica de Bessel de orden $l = 0$ está dada por:

$$j_0(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho} \quad (9)$$

de modo que al reemplazar $j_0(\rho)$ en (8) y luego en (7) junto con el potencial $V(r)$ se tiene la siguiente aproximación:

$$\sin \delta_l \approx V_0 \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \int_0^\infty dr \frac{\sin^2(kr)}{kr} e^{-\alpha r} = V_0 \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \frac{\ln \left(\frac{4k^2}{\alpha^2} + 1 \right)}{4k}$$

Basta entonces con tomar el arco seno de esta aproximación para encontrar el corrimiento de fase como función de E , V_0 y α . Para dar valores numéricos de δ_0 es entonces necesario recordar las definiciones de μ y k , ilustradas en (10).

$$k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad \mu = \frac{m_P \cdot m_T}{m_P + m_T} \quad (10)$$

Donde E y m_P son la energía y masa del proyectil respectivamente, y m_T la masa masa del blanco. Tomando entonces un neutrón como proyectil (1.00866 u) y ^9Be como blanco (9.01218 u) se tiene entonces $\mu = 0.90714 \text{ u} = 844.99192 \text{ MeV}$.

En este caso, dado que se está tomando la aproximación de potencial débil, es importante además tomar energías de colisión mayores a la energía de la barrera de Coulomb E_C , la cual puede calcularse según la ecuación (11).

$$E_C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_P \cdot Z_T}{R_P + R_T} \quad (11)$$

Donde $R_P = R_n = 0.8 \text{ fm}$ y R_T son los radios del proyectil y blanco respectivamente, este último puede calcularse al tomar $R_T = 1.2 \cdot A_T^{1/3} \text{ fm}$, con A_T el número de nucleones del blanco (considerando también $Z_P = 1$). Dado que se esta usando ^9Be , la barrera de Coulomb en este caso tiene una energía de 1.75 MeV, de modo que la mínima energía considerada en la Figura 3(a) es 2 MeV.

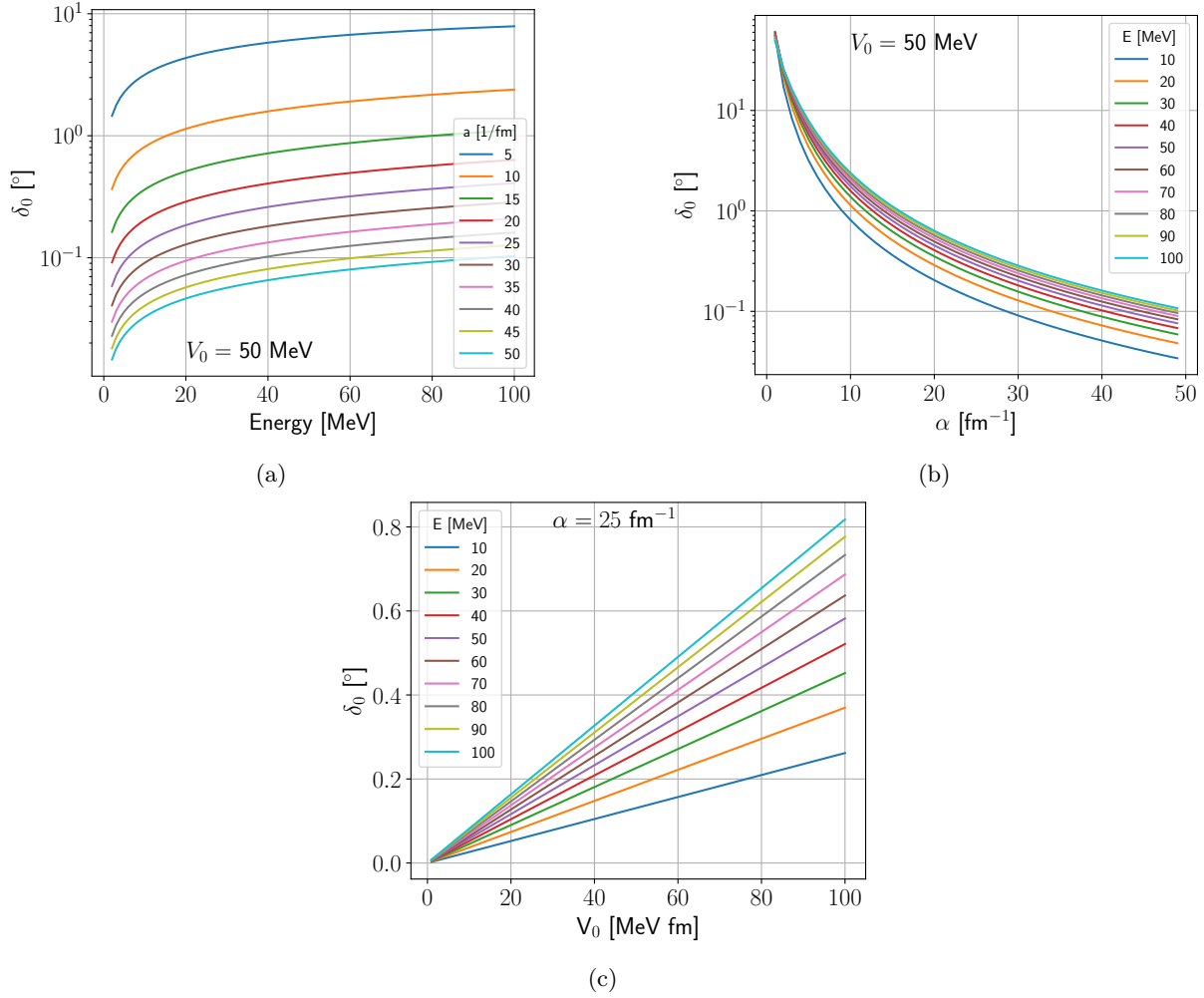


Figura 3: Dependencia del corrimiento de fase con la energía (a), α (b) y V_0 (c).

Ejercicio 3

- Reproduzca la Fig. 3 del artículo D. Baye, Phys. Rep. 565 1 (2015) [2]
- Utilice el método variacional para hallar la energía del estado base del deuterio y dibuje la función radial $u_0(r)$ utilizando el potencial de la diapositiva 10 y las funciones anteriores. Introduzca un factor de escalamiento h (Ecuaciones (2.45) y (2.46) de [2]).

Solución

Es importante recordar entonces que se está resolviendo el problema de autovalores y autovectores de la matriz hamiltoniana dado por la ecuación:

$$Hu_l(r) = Eu_l(r) \quad (12)$$

Donde la función de onda radial $u_l(r)$ se puede hallar a partir del principio variacional expandiendo en

una base de funciones ϕ

$$u_l(r) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(r) \quad (13)$$

Bajo esta expansión, el problema de autovalores toma entonces la siguiente forma al proyectar sobre una de las funciones de la base ϕ_i :

$$\sum_{j=1}^N c_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N c_j [T_{ij} + V_{ij}^{eff}] = E_i c_i \quad (14)$$

donde T_{ij} y V_{ij}^{eff} son los elementos de la matriz $\langle \phi_i | T | \phi_j \rangle$ y $\langle \phi_i | V^{eff} | \phi_j \rangle$. Es claro entonces que los coeficientes de la expansión (13) están dados por las componentes de este problema de autovalores, es decir que $u_l(r) = \vec{c} \cdot \vec{\phi}$ con $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ un autovector de la matriz hamiltoniana y $\vec{\phi}$ la base de funciones ϕ en que se expande.

En este caso, la base está dada por las funciones de Lagrange-Laguerre regularizadas en la singularidad $x = 0$, las cuales están dadas por la ecuación (15)

$$\hat{f}_j(x) = \left(\frac{x}{x_j} \right)^n f_j(x) = (-1)^j x_j^{1/2} \left(\frac{x}{x_j} \right)^n \frac{L_N(x)}{x - x_j} e^{-x/2} \quad (15)$$

Donde una función de Lagrange $f_j(x)$ es aquella que cumple las condiciones de Lagrange:

1. Infinitamente diferenciables
2. $f_i(x_j) = \lambda_i^{-1/2} \delta_{ij}$
3. $\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$

En particular, para un sistema de k cuerpos se toma $n = k - 1$, de modo que para el deuterio se tiene entonces $n = 1$.

a) La Fig. 3 de [2] puede entonces recrearse al tomar $h = 1$, $n = 1$ y $N = 4$ como se muestra en la Fig. 4.

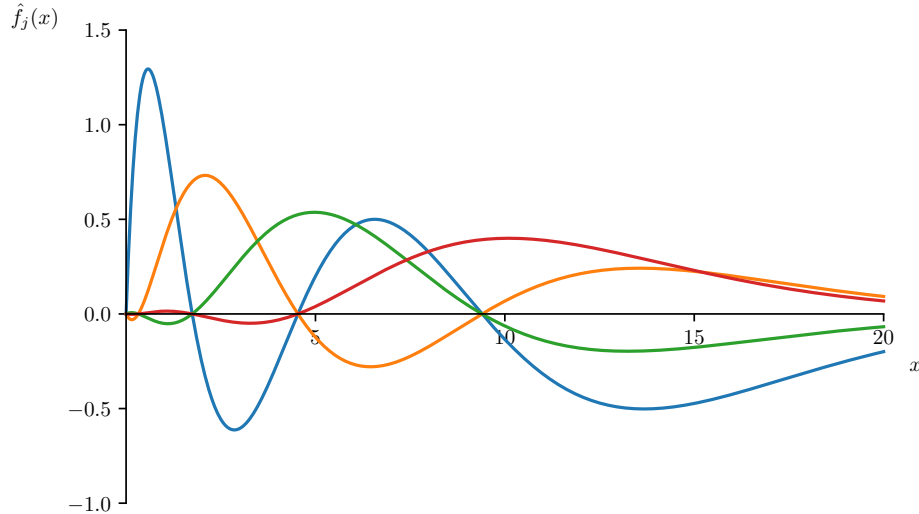


Figura 4: Funciones de Lagrange-Laguerre escaladas y regularizadas, $h = 1$, $n = 1$, $N = 4$.

Considerando el estado base del deuterio como una función exclusiva de $l = 0$, el potencial efectivo y energía cinética están dados por:

$$V^{eff}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) = V(r), \quad T = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} \quad (16)$$

Usando además una cuadratura de Gauss con puntos de malla en las raíces de los polinomios de Laguerre $L_N(x_i) = 0$, es posible entonces encontrar los elementos de matriz del potencial y la energía cinética, ecuaciones (2.28, 3.75, 3.76) de [2].

$$V_{ij}^{eff} = \langle \hat{f}_i | V^{eff} | \hat{f}_j \rangle = -\frac{\hbar^2}{2\mu} V(r_i) \delta_{ij} = 200e^{-1.47r_i^2} - 178e^{-0.639r_i^2} \delta_{ij} \quad (17)$$

$$T_{ii} = -\frac{\hbar}{2\mu} \frac{x_i^2 - (4N+2)x_i - 4}{12x_i^2}, \quad T_{i \neq j} = \frac{\hbar}{2\mu} (-1)^{i-j} \frac{x_i + x_j}{(x_i \cdot x_j)^{1/2} (x_i - x_j)^2} \quad (18)$$

Teniendo una cuadratura de Gauss definida en s en el dominio (a, b) , es posible introducir otro parámetro variacional h que reescala el modelo, teniendo entonces el dominio (ha, hb) sobre la variable $x = hs$. Este factor de escala h tiene entonces los siguientes efectos en las funciones regularizadas de Lagrange-Laguerre (15) y el problema de autovalores (14):

$$\tilde{f}_j(x) = \frac{1}{h^{1/2}} \hat{f}_j(x/h) \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j \left[\frac{1}{h^2} T_{ij} + V_{ij}^{eff}(x_i h) \right] = E_i c_i \quad (20)$$

Es suficiente con esto entonces para hallar los elementos de la matriz hamiltoniana para resolver el problema de autovalores y autovectores.

- b) Dado que se quiere encontrar el valor de la energía E_0 del estado base del deuterio, es importante entonces determinar valores de los parámetros h y N que mejor aproximan dicha energía. La Figura 5 ilustra el cambio en el mínimo autovalor de H variando h entre $[0.1, 0.9]$ y N .

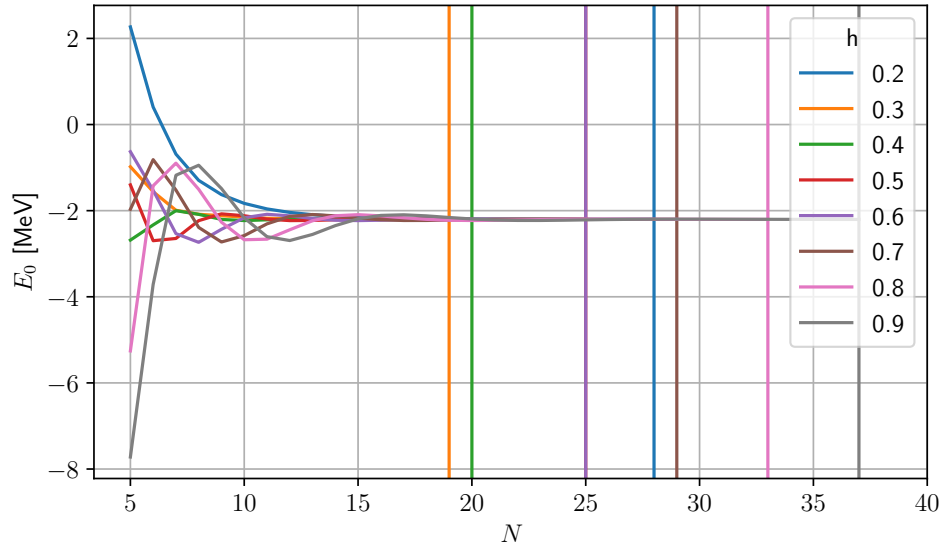


Figura 5: Energía del estado base del deuterio en función del número de funciones de Lagrange-Laguerre N y factor de escala h . Las líneas verticales representan el último valor de N usado para el h correspondiente.

En este caso para cada h se aumentó N hasta que la diferencia de E_0 para N y $N+1$ fuese menor a 10^{-4} , las líneas verticales indican el valor de N en que se alcanzó dicha diferencia, siendo $h = 0.3, 0.4, 0.5$ y 0.6 los más rápidos en converger.

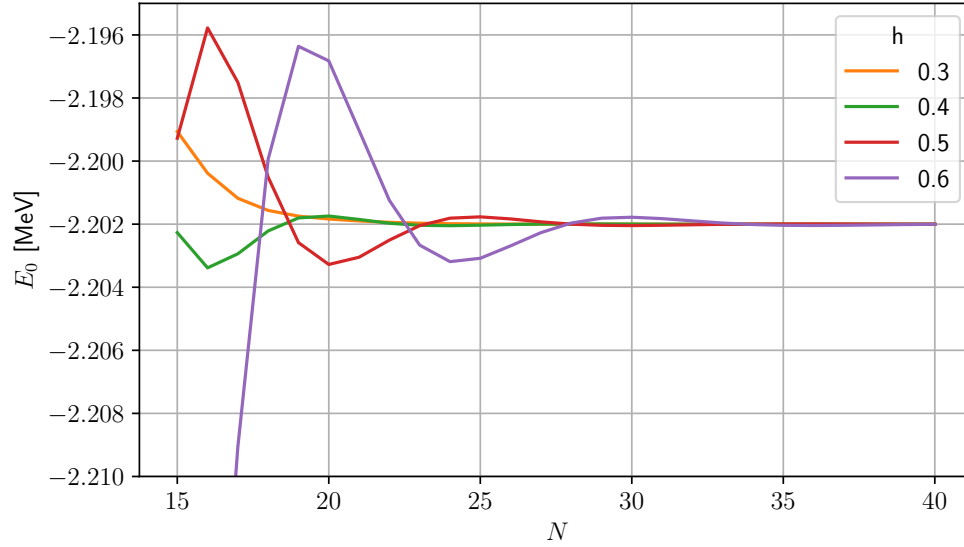


Figura 6: Energía del estado base del deuterio variando h entre $[0.3, 0.6]$ y N entre $[15, 40]$.

Es importante resaltar sin embargo que todos convergen a un valor similar de $E_0 \approx -2.202$ MeV como se ilustra en le Fig 6, el cual tiene un error del 1 % respecto al valor experimental de $E_0 = -2.225$ MeV. Dado que $h = 0.3$ converge más rápido, es posible entonces tomar $N = 30$ para obtener una buena aproximación del sistema con una matriz pequeña. Bajo estas condiciones es posible ahora encontrar la función de onda tomando el autovector asociado a la energía E_0 .

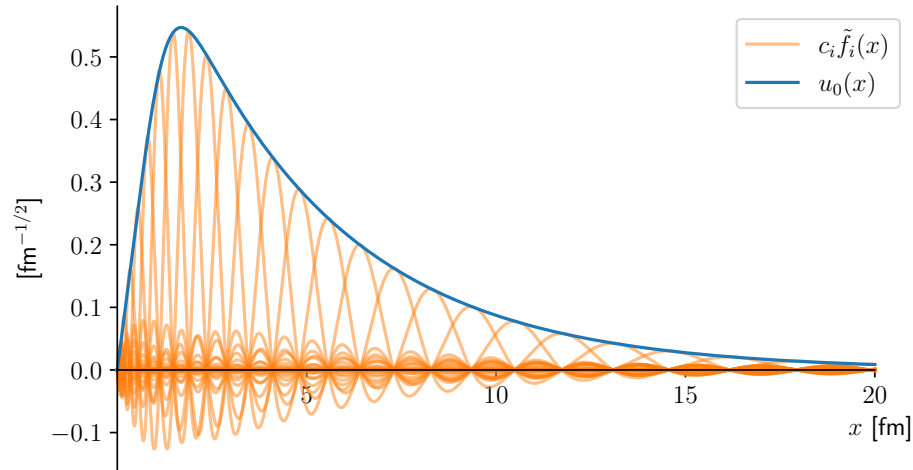


Figura 7: Función de onda radial $u_0(x)$ a partir de su expansión en funciones de Lagrange-Laguerre regularizadas y escaladas con $h = 0.3$ y $N = 30$.

Ejercicio 4

- Reproduzca la Figura 3.6 del libro L.F. Canto & M. S. Hussein, *Scattering theory of molecules, atoms and nuclei* World Scientific, (2012) [1]. Utilice el potencial descrito en la sección 3.4.1 del mismo libro.
- Con base al potencial anterior, utilice el método de la matriz- R o Numerov para hallar los corrimientos de fase dados en la Figura 3.7.
- Reproduzca la gráfica de dispersión angular elástica para alguno de los sistemas $\alpha + {}^{154}\text{Sm}$ o $\alpha + {}^{148}\text{Sm}$ (Figura 4.2 del libro *Direct Nuclear Reactions* de Glendenning [3]). Utilice el potencial con parámetro dados en la Tabla I.

Solución

La Figura 3.6 de [1] muestra el potencial efectivo entre dos partículas α , dado por la ecuación (21).

$$V_l^{eff}(r) = V_C(r) + \bar{V}(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (21)$$

Donde V_C representa el potencial Coulombiano, el cual está definido en dos regiones cuyo limite se encuentra en $R_C \approx 2R_\alpha$. Considerando un potencial partícula-esfera, puede asumirse que el potencial que siente una partícula α al estar “dentro” de la otra ($r < R_C$) es igual al de una partícula dentro de una esfera de radio R_C con carga $q = 2e$.

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4e^2}{r} & \text{for } r \geq R_C \approx R_P + R_T = 2R_\alpha \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4e^2}{2R_C} \left(3 - \frac{r^2}{R_C^2}\right) & \text{for } r < R_C \end{cases} \quad (22)$$

\bar{V} por otro lado, representa el potencial nuclear atractivo entre ambas partículas, el cual toma una forma gaussiana representada en la ecuación (23)

$$\bar{V}(r) = -V_0 e^{-r^2/R_C^2} \quad (23)$$

- Con esto es posible entonces reproducir la Figura 3.6 de [1] al tomar además los valores $V_0 = 60 \text{ MeV}$ y $R_C = \bar{R} = 4.5 \text{ fm}$.

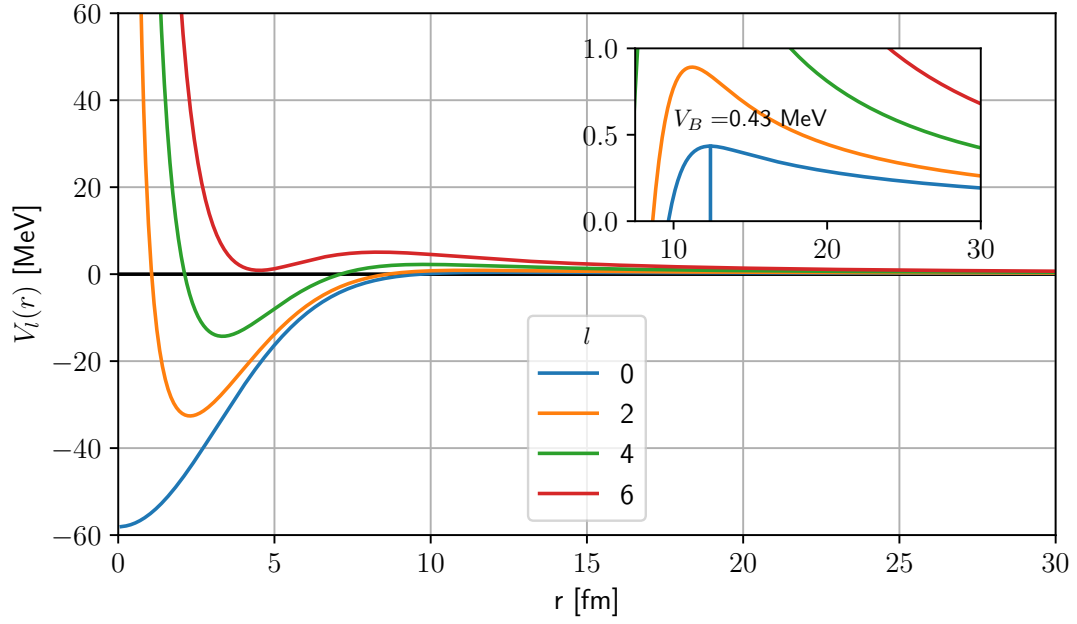


Figura 8: Potencial efectivo entre dos partículas α para distintos valores de l .

Referencias

- [1] Luiz Felipe Canto and Mahir S Hussein. *Scattering Theory of Molecules, Atoms, and Nuclei*. World Scientific, 2013.
- [2] Daniel Baye. The lagrange-mesh method. *Physics reports*, 565:1–107, 2015.
- [3] Norman Glendenning. *Direct nuclear reactions*. Elsevier, 2012.