Estructura de Datos: Eficiencia

Andrés Herrera Poyatos

27/01/2015

Problema de eficiencia

Probar que $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$ es $\Theta(n \log n)$.

Solución:

Podemos considerar que $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \log i$ pues ambas funciones solo se diferencian en multiplicar por una constante ($\frac{1}{log 2}$), lo que no cambia la eficiencia de la misma.

En segundo lugar, es claro que $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \log i \leq \sum_{i=1}^{n} \log n = n \log n$, obteniendo la primera desigualdad, $f(n)$ es $O(n \log n)$.

Ahora nos fijamos en el siguiente hecho

$$\int_1^x \log t \, dt = x\,(\log x - 1) + 1$$

Además, para $n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^n \log t \, dt = \sum_{i=2}^{n} \left(\int_{i-1}^{i} \log t \, dt \right) \leq \sum_{i=2}^{n} \log i = \sum_{i=1}^{n} \log i = f(n)$$

donde se ha utilizado la aditividad de la integral y que $\int_{i-1}^{i} \log t \, dt \leq \int_{i-1}^{i} \log i \, dt = \log i$. Juntando ambas deducciones se tiene

$$\frac{1}{2} n \log n = n \frac{\log n}{2} \leq n\,(\log n - 1) + 1 = \int_1^n \log t \, dt \leq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo que nos proporciona $\frac{1}{2} n \log n \leq f(n) \; \forall n \in \mathbb{N}$, la segunda desigualdad que necesitabamos para decir que $f(n)$ es $\Theta(n \log n)$.

■