Ecuaciones Diferenciales 2

Apuntes

Andrés Herrera Poyatos
Paco Luque Sánchez
Universidad de Granada
andreshp9@gmail.com

1. Introducción

En esta sección introducimos los conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.1. Notación y terminología

En esta sección haremos una pequeña introducción a los problemas que abordaremos en esta asignatura. El objetivo es obtener propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial que no podemos resolver explícitamente. Concretamente, estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias (que abreviaremos EDO). Una EDO es una ecuación de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ con } (t, x(t)) \in D, \tag{E}$$

donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ es un conjunto abierto y arcoconexo y $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ es una función continua. Los elementos que intervienen en una EDO tienen una terminología específica que introducimos a continuación:

- D: dominio de la ecuación.
- f: campo de la ecuación.
- t: tiempo o variable independiente.
- $x(t)$: función incógnita o variable dependiente. En lo que sigue, por comodidad, la notaremos simplemente por x, sin especificar la variable de la que depende.

Ejemplo 1.1: Veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- EDO escalar:
$$x' = \frac{x}{t} \text{ con } t > 0,$$
donde $D = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
- Sistema de EDOs:
$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1x_2 + t \\ x_2' &= x_1 + x_2 + t^2 \end{aligned}\right\}$$
donde $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ y $f(t, x_1, x_2) = (x_1x_2 + t, x_1 + x_2 + t^2)$. △

Definición 1.1 (Concepto de solución)**.** Una *solución* de una EDO es una función $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^d$ donde I es un intervalo abierto no vacío, tal que:

a) $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$;

b) $(t, \varphi(t)) \in D$;

c) $\varphi'(t) = f(t, \phi(t))$ para todo $t \in I$.

Ejemplo 1.2: Sea $I \subset \mathbb{R}^+$ un intervalo y $a \in \mathbb{R}$. La función $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = at$ es una soluciónn de la EDO escalar propuesta en el Ejemplo 1.1. Esto prueba que una EDO puede tener infinitas soluciones. △

Definición 1.2 (Problema de valores iniciales)**.** Un *problema de valores iniciales* o *problema de Cauchy* (de aquí en adelante lo abreviaremos PVI) consiste en añadir a una EDO un dato o condición inicial, esto es, un par $(t_0, x_0) \in D$. Un PVI se escribe

$$\begin{cases} x' = f(t, x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{P}$$

Una solución del PVI es una solución de la EDO que cumple

a) $t_0 \in I$;

b) $\varphi(t_0) = x_0$.

En lo que sigue referiremos a (P) cuando trabajemos con un PVI genérico.

Ejemplo 1.3: Sea $t_0 = 1$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. La función $\varphi \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = x_0 t$ es una soluciónn de la EDO escalar propuesta en el Ejemplo 1.1 y verifica $\varphi(t_0) = x_0$. Nótese que la restricción de φ a cualquier intervalo que contenga a 1 es una solución del PVI dado por $(1, x_0)$. De todas las soluciones, nos interesan aquellas con el mayor dominio posible. La única solución maximal resultará ser φ. El concepto de maximalidad se estudia en la siguiente sección. $\triangle$

1.2. Unicidad de solución y soluciones maximales

Consideremos un PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{P}$$

En primer lugar introducimos los diferentes conceptos de unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.3 (Conceptos de unicidad)**.**

- Diremos que (P) verifica la *propiedad de unicidad local* si dadas $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma$, existe H intervalo abierto con $t_0 \in H$ tal que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2 \cap H$.
- Diremos que (P) verifica la *propiedad de unicidad en* H, con H intervalo abierto y $t_0 \in H$ si dadas $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma$, se cumple que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2 \cap H$.
- Diremos que (P) verifica la *propiedad de unicidad global* si dadas $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma$, se cumple que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

El siguiente resultado se deduce fácilmente de las definiciones de unicidad.

Proposición 1.4. *En el contexto actual se cumplen las siguientes afirmaciones.*

a) El PVI (P) *verifica la propiedad de unicidad global si, y solo si, verifica la propiedad de unicidad en* $\mathbb{R}$.

b) El PVI (P) *verifica la propiedad de unicidad local si, y solo si, existe un intervalo abierto* H *con* t_0 *tal que* (P) *verifica la propiedad de unicidad en* H.

Corolario 1.5. *Si el PVI* (P) *verifica la propiedad de unicidad global, entonces verifica la propiedad de unicidad global.*

El recíproco del Corolario 1.5 no es cierto como cabe esperar. No obstante, sí se puede demostrar el resultado bajo una condición más restrictiva.

Proposición 1.6. *La EDO* (E) *verifica la propiedad de unicidad local para cualquier condición inicial* $(t_0, x_0) \in D$ *si, y solo si, verifica la propiedad de unicidad global para cualquier condición inicial* $(t_0, x_0) \in D$.

Demostración. La implicación de derecha a izquierda es trivial. Veamos que se da el recíproco. Sean $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma(\text{P})$, donde (P) es el PVI asociado a $(t_0, x_0) \in D$. Veamos que coinciden en $I_1 \cap I_2$. Definimos $H = \{t \in I_1 \cap I_2; \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. Por hipótesis tenemos que $t_0 \in H$ y, por tanto, $H \neq \emptyset$. Además, H es un cerrado relativo de $I_1 \cap I_2$ por ser el conjunto donde coinciden dos funciones continuas. Por último, razonamos que H es abierto. En efecto, fijado $\tau \in H$, consideremos el PVI $(\tilde{\text{P}})$ asociado a $(\tau, \varphi_1(\tau))$. Nótese que φ_1 y φ_2 son soluciones de $(\tilde{\text{P}})$. Por la propiedad de unicidad local existe un intervalo abierto $\tilde{H}$ con $\tau \in \tilde{H}$ tal que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in \tilde{H} \cap I_1 \cap I_2$. Consecuentemente, $\tau \in \tilde{H} \cap I_1 \cap I_2 \subset H$. La prueba finaliza al recordar que $I_1 \cap I_2$ es conexo y, por tanto, el único abierto y cerrado no trivial de $I_1 \cap I_2$ es el propio $I_1 \cap I_2$. □

Es claro que un PVI admite infinitas soluciones ya que dada una solución cualquier restricción suya a un intervalo que contenga a t_0 sigue siendo solución del PVI. En tal caso estamos tratando esencialmente con la misma solución. Por tanto, interesa considerar solamente aquellas soluciones con el mayor dominio posible. Para ello introducimos los conceptos de prolongación y solución maximal.

Definición 1.4. Sea $\Sigma = \Sigma(\text{P}) = \{(I, \varphi) \mid \varphi\colon I \to \mathbb{R}^d \text{ es solución de (P)}\}$. El par $(\widetilde{I}, \widetilde{\varphi}) \in \Sigma$ es una *prolongación* de $(I, \varphi) \in \Sigma$ si $I \subsetneq \widetilde{I}$ y $\widetilde{\varphi}_{|I} = \varphi$ y lo denotaremos $(I, \varphi) >> (\widetilde{I}, \tilde{\varphi})$. Un elemento de Σ es *prolongable* si admite una prolongación. El par $(I, \varphi) \in \Sigma$ es *maximal* si no es prolongable.

Lema 1.7. *Toda solución no maximal de* (P) *puede prolongarse a una solución maximal.*

Demostración. La demostración es consecuencia del Lemma de Zorn. Sea $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ solución no maximal de (P). Basta aplicar este resultado sobre el conjunto

$$\{(I, \varphi) \mid \varphi\colon I \to \mathbb{R}^d \text{ es solución de (P) y } I_1 \subsetneq I\}$$

con la relación de orden $<<$ definida previamente. Nótese que este conjunto es no vació ya que φ_1 es prolongable. Encontramos pues una solución maximal que es prolongación de φ_1 como se quería. □

Transladamos ahora el concepto de unicidad global al ámbito de las soluciones maximales.

Proposición 1.8. *Consideremos el PVI* (P). *Éste verifica la propiedad de unicidad global si, y solo si, tiene una única solución maximal.*

Demostración. Supongamos que (P) verifica la propiedad de unicidad global. Definimos $J = \cup_{(I,\varphi)\in\Sigma} I$, que es un intervalo ya que es unión de conexos de $\mathbb{R}$ que tienen un punto en común. Además, J es abierto porque es unión de abiertos. Definimos la función $\Psi : J \to \mathbb{R}^d$ como $\Psi(t) = \varphi(t)$ para algún $(\varphi, I) \in \Sigma(P)$ con $t \in I$. Nótese que la función está bien definida gracias a la unicidad global. Además, Ψ es solución de (**??**). Es claro por construcción que Ψ es la única solución maximal.

Veamos que se verifica el recíproco. Sean $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ y $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^d$ dos soluciones de (P). Por el Lema 1.7 podemos prolongarlas a dos soluciones maximales, que deben ser iguales por hipótesis. Por tanto, φ_1 y φ_2 coinciden en $I_1 \cap I_2$ como se quería. □

Ejemplo 1.9: Consideramos la EDO $x' = x$. En un curso básico de cálculo se demuestra que la derivada de la función exponencial es ella misma, esto es, la función exponencial verifica la ecuación diferencial. Es claro que cualquier constante por la función exponencial también verificará la ecuación diferencial. Vamos a demostrar que estas son las únicas soluciones maximales de la ecuación diferencial. Para ello vamos a probar que se verifica la propiedad de unicidad local para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. En primer lugar, $x_0 \neq 0$, tenemos que $\varphi(t) = x_0 \exp(t - t_0)$ es solución (maximal) del PVI. Sea $x : I \to \mathbb{R}$ es solución del

PVI. Como $x(t_0) = x_0 \neq 0$, encontramos un intervalo abierto $t_0 \subset J \subset I$ donde x no se anula. En ese intervalo se tiene la igualdad $x'/x = 1$. Podemos integrar esta expresión para cada $t \in J$, obteniendo

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} \mathrm{d}s = \log(x(t)) - \log(x(t_0)).$$

Aplicando la función exponencial en ambos lados de la igualdad deducimos que $x(t) = x(t_0)\exp(t - t_0)$ para todo $t \in J$ como se quería. El método que hemos utilizado para obtener la expresión de x en un entorno de t_0 se denomina *método de las variables separadas*, que generalizaremos más adelante. Por último, sabemos que la función $x = 0$ es solución de la ecuación diferencial. Tenemos que demostrar que si $x_0 = 0$, entonces cualquier solución es constantemente 0 es un entorno de t_0. Para ello, razonamos por reducción al absurdo y utilizamos que x se comporta como la exponencial cuando no se anula y, por tanto, no puede tomar el valor 0 y ser continua al mismo tiempo. Se dejan rellenar los detalles de este último razonamiento al lector. $\triangle$

El siguiente lema cuya demostración es trivial será utilizado a menudo para crear crear soluciones que muestren que no se verifica la unicidad global.

Lema 1.10. *Sean $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ y $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^d$ soluciones del PVI* (P) *y sea $\tau \in I_1 \cap I_2$ con $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$. Entonces la función $\Psi : I_1 \cap I_2 \to \mathbb{R}^d$ dada por*

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & t \leq \tau \\ \varphi_2(t) & t > \tau \end{cases}$$

es solución del PVI.

1.3. Ecuación integral de Volterra

Sea $x : I \to \mathbb{R}$ una solución del PVI (P). Recordemos que x verifica $x'(s) = f(s, x(s))$ para todo $s \in I$. Si integramos la expresión, obtenemos para cada $t \in I$ la igualdad

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s) \, \mathrm{d}s = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \, \mathrm{d}s \tag{EV}$$

A esta ecuación se le conoce como ecuación integral de Volterra, que abreviaremos EIV.

Definición 1.5. Sea $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^d$ con I intervalo abierto. Diremos que φ es solución de la ecuación integral de Volterra si

a) $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$;

b) $(t, \varphi(t)) \in D$ para todo $t \in I$;

c) $t_0 \in I$;

d) para cada $t \in I$ se verifica

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds.$$

Hemos visto que toda solución de (P) es solución de la ecuación integral de Volterra asociada. El recíproco también es cierto y se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 1.11. *Sea I un intervalo abierto y $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^d$. Son equivalentes:*

a) φ es solución del PVI (P)*;*

b) φ es solución de la ecuación integral de Volterra (EV).

Demostración. Ya sabemos que a) implica b). Veamos el recíproco. Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^d$ solución de (EV). Por el Teorema fundamental del cálculo aplicado a (EV) obtenemos que φ es derivable y su derivada es $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Puesto que f es continua, obtenemos que $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Por último, es claro que $\varphi(t_0) = x_0$. □

Vamos a ver un ejemplo práctico de cómo se relacionan los dos conceptos que hemos estado tratando.

Ejemplo 1.12: Resolver la EIV

$$x(t) = 8 + \int_0^t x(s)^2 \, \mathrm{d}s.$$

Solución: El PVI asociado es

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2; \\ x(0) = 8. \end{cases}$$

Discutimos el caso de las soluciones constantes primero. Si la solución es constante tenemos que $0 = x^2$, que sólo ocurre si $x = 0$. Esto no es posible ya que $x(0) = 8$. Por tanto, no hay soluciones constantes. Discutimos ahora el caso de las soluciones no constantes, aplicando de nuevo el método de variables separadas. Nótese que si $x : I \to \mathbb{R}$ es solución, donde I es un intervalo abierto y $t_0 = 0 \in I$, tal que x no se anula, entonces para cada $t \in I$ se tiene

$$t = \int_0^t \mathrm{d}s = \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x^2(s)} \, \mathrm{d}t = \frac{-1}{x(t)} - \frac{-1}{x(t_0)} = \frac{-1}{x(t)} + \frac{1}{8}.$$

Deducimos que debe verificarse

$$x(t) = \frac{8}{1 - 8t}.$$

Definimos $\varphi\colon \,]-\infty, \frac{1}{8}[\to \mathbb{R}$ con $\varphi(t) = \frac{8}{1-8t}$ y comprobamos que sea solución, Efectivamente tenemos que

$$\varphi(0) = 8 \quad \text{y} \quad \varphi'(t) = \frac{64}{(1-8t)^2} = \varphi^2(t).$$

Por tanto, φ es solución del PVI, y toda solución es igual a esta última en el mayor intervalo que contenga a 0 donde no se anule. No es difícil ver que esto implica que φ es la única solución del PVI y, por tanto, de la EIV. No obstante, veremos este hecho formalmente en la siguiente sección. △

2. Existencia y unicidad de solución

En este apartado proporcionamos los primeros resultados de existencia y unicidad para PVIs. En primer lugar consideraremos EDOs en variables separadas, que ya han surgido en los ejemplos anteriores. Posteriormente estudiaremos dos teoremas clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales, el Teorema de unicidad Peano y el Teorema de Picard-Lindelöf.

2.1. Variables separadas

Hemos mencionado el método de variables separadas con anterioridad. La idea es obtener una igualdad donde en un lado solamente intervenga la variable independiente mientras que en el otro solamente intervenga la variable dependiente. De esta forma podemos integrar y aplicar el teorema del cambio de variables para obtener una igualdad donde no intervenga la variable independiente. Este método solo se puede aplicar a casos muy concretos. Introducimos estos casos en la siguiente definición.

Definición 2.1. Una EDO (E) es de variables separadas si existen J_1, J_2 intervalos abiertos y $a : J_1 \to \mathbb{R}$, $g : J_2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $D = J_1 \times J_2$ y $f(t,x) = a(t)g(x)$ para todo $(t,x) \in J_1 \times J_2$. Un PVI es de variables separadas si la EDO asociada lo es. En tal caso escribimos

$$\begin{cases} x' = a(t)g(x), \quad (t,x) \in J_1 \times J_2; \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{VS}$$

Teorema 2.1 (Existencia y unicidad en variables separadas)**.** *Consideremos un PVI de variables separadas* (VS)*. Se verifican las siguientes afirmaciones.*

a) El PVI (VS) *tiene solución.*

b) Si $g(x_0) \neq 0$, entonces (VS) *verifica la propiedad de unicidad local.*

c) Si $g(x_0) = 0$ y existe $G \in \mathcal{C}(J_2)$ tal que $G(x_0) = 0$ y existe $\delta > 0 : G'(x) = \frac{1}{g(x)} \forall x \in J_2 \cap]x_0, x_0 + \delta[$ y además $a(t_0) \neq 0$, entonces (VS) *no verifica la propiedad de unicidad local.*

Demostración. Comenzamos demostrando **i)**. Distinguimos dos casos:

Caso 1: $g(x_0) = 0$. Entonces, $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) = x_0$ es una solución de (P).

Caso 2: $g(x_0) \neq 0$. Entonces, existe I_1 abierto tal que $x_0 \in I_1, g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_1$. Tomamos entonces la aplicación que asigna a x el valor $\frac{1}{g(x)} \in \mathcal{C}(I_1)$. Sea ahora la aplicación $G : I_1 \to \mathbb{R}$ tal que $G(x_0) = 0, G'(x) = \frac{1}{g(x)}$. Tenemos que G es estrictamente monótona. Tomamos $I_2 = G(I_1)$ intervalo abierto. Entonces, $\exists G^{-1} : I_2 \to \mathbb{R}$ con $G^{-1}(I_2) = I_1$. Además, tenemos que $G^{-1} \in \mathcal{C}(I_2)$, con $(G^{-1})'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(x))} = g(G^{-1}(x)) \forall x \in I_2$. Sea ahora $A = A(t)$ una primitiva de $a(t)$ tal que $A(t_0) = 0 \in I_2$. Por continuidad, $\exists I_3 \subset J_1$ abierto tal que $t_0 \in I_3$, $A(I_3) \subset I_2$. Definimos:

$$\begin{aligned} \varphi \colon I_3 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I_3) \\ t \to G^{-1}(A(t)) \end{aligned}$$

Tenemos que $t_0 \in I_3$, $\varphi(t_0) = G^{-1}(a(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0$. Tenemos que $(t, \varphi(t)) \in J_1 \times J_2$ y $\varphi'(t) = g(G^{-1}(A(t))a(t) = a(t)g(\varphi(t)) \quad \forall t \in I_3$

Pasamos ahora a demostrar **ii)**. Sean $\varphi_1 : H_1 \to \mathbb{R}$, $\varphi_2 : H_2 \to \mathbb{R}$ dos soluciones de (P). □

2.2. Unicidad en el futuro y en el pasado. Teorema de unicidad de Peano

Si $d = 1$, en algunos casos podemos obtener "gratuitamente" la propiedad de unicidad a la derecha o a la izquierda de t_0 mediante el Teorema de unicidad de Peano. Introducimos a continuación la nomenclatura pertinente.

Definición 2.2. Diremos que el PVI (P) verifica la propiedad de unicidad en el futuro si verifica la propiedad de unicidad en el intervalo $[t_0, +\infty[$. Análogamente, diremos que el PVI (P) verifica la propiedad de unicidad en el pasado si verifica la propiedad de unicidad en el intervalo $]-\infty, t_0]$.

Teorema 2.2 (Teorema de unicidad de Peano)**.** *Consideramos un PVI* (P) *con* $d = 1$*.*

a) Si para cada $t \geq t_0$ *la función* $g(x) = f(t, x)$ *es decreciente, entonces* (P) *verifica la propiedad de unicidad en el futuro.*

b) Si para cada $t \leq t_0$ *la función* $g(x) = f(t, x)$ *es creciente, entonces* (P) *verifica la propiedad de unicidad en el pasado.*

Demostración. Vamos a demostrar el apartado a) ya que el otro apartado se demuestra de forma análoga. Sean $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ y $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$. Definimos la función $h : I_1 \cap I_2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = (\varphi_1(t) - \varphi_2(t))^2$. La función h es derivable y su derivada viene dada por

$$h'(t) = 2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))(\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)) = 2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))(f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))),$$

que es menor o igual que 0 para todo $t \in I_1 \cap I_2 \cap [t_0, +\infty[$. Por tanto, h es decreciente en $I_1 \cap I_2 \cap [t_0, +\infty[$. Nótese que $h(t_0) = 0$ y $h \geq 0$. Por tanto, h es constantemente 0 en $I_1 \cap I_2 \cap [t_0, +\infty[$, esto es, φ_1 y φ_2 coinciden en este intervalo como se quería. □

En este punto interesa introducir la ecuación dual en el tiempo, que nos servirá para trasladar los resultados que conciernan al intervalo $[t_0, +\infty[$ al intervalo $]-\infty, t_0]$. Dado el PVI (P) y una solución $x : I \to \mathbb{R}^d$ de éste, nos preguntamos de qué PVI es solución la función $y(t) = x(-t)$, definida en el intervalo $-I$. Claramente tenemos que $y(-t_0) = x_0$. Además, para cada $t \in -I$ se verifica

$$y'(t) = -x'(-t) = -f(-t, x(-t)) = -f(-t, y(t)).$$

En resumen, y es solución del PVI

$$\begin{cases} y' = f(-t, y); \\ y(-t_0) = x_0; \end{cases} \tag{D}$$

que se conoce como *problema dual* o *ecuación dual en el tiempo*. Nótese que la aplicación $\Lambda : \Sigma(\mathrm{P}) \to \Sigma(\mathrm{D})$ dada por $\Lambda(\varphi(t)) = \varphi(-s)$ es biyectiva. La siguiente proposición, cuya demostración es sencilla y se deja para el lector muestra la relación existente entre un PVI y su dual.

Proposición 2.3. *El PVI* (P) *verifica la propiedad de unicidad en el intervalo* I *si, y solo si, el PVI dual* (D) *verifica la propiedad de unicidad en el intervalo* $-I$*. Como consecuencia se verifican las siguientes afirmaciones:*

a) El PVI (P) *verifica la propiedad de unicidad local si, y solo si, el PVI dual* (D) *verifica la propiedad de unicidad local.*

b) El PVI (P) *verifica la propiedad de unicidad global si, y solo si, el PVI dual* (D) *verifica la propiedad de unicidad global.*

Podemos utilizar la Proposición 2.3 para demostrar el apartado b) del Teorema 2.2 a partir del apartado a).

Ejemplo 2.4: Estudia la unicidad de solución del PVI

$$\begin{cases} x' = -t\sqrt[3]{x}; \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Claramente la función $x = 0$ es una solución de (1). Tenemos que $f(t,x) = -t\sqrt[3]{x}$. Para $t \geq 0$ fijo la función $\varphi(x) = f(t,x)$ es decreciente mientras que para $t \leq 0$ fijo la función $\varphi(x) = f(t,x)$ creciente. Por tanto, el Teorema de unicidad de Peano nos dice que (1) verifica la propiedad de unicidad en el futuro y en el pasado, esto es, verifica la propiedad de unicidad global. Por tanto, la única solución de (1) es la trivial. △

2.3. Teorema de Picard-Lindelöf

En esta sección estudiamos el Teorema de Picard-Lindelöf, que también se conoce como Teorema de Picard, Teorema de Cauchy - Lipschitz o Teorema de Existencia y Unicidad. Es el principal resultado de existencia y unicidad de solución para PVIs. Existen numerosas versiones del resultado y, además, múltiples demostraciones. Enunciamos el teorema a continuación.

Teorema 2.5 (Teorema de Picard-Lindelöf)**.** *Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ continua y localmente lipschitziana respecto de la segunda variable. Dado $(t_0, x_0) \in D$, el PVI* (P) *tiene solución y verifica la propiedad de unicidad global.*

En primer lugar, tenemos que introducir el concepto de ser lipschitziana respecto de la segunda variable (Sección 2.3.1). Posteriormente desarrollaremos el denominado operador integral de Volterra (2.3.2), que es la herramienta que se utiliza para demostrar el Teorema de Picard-Lindelöf.

2.3.1. Funciones lipschitzianas

Se asume que el lector tiene una cierta familiaridad con el concepto de función lipschitizana. Por tanto, solo se enuncian los resultados que sean relevantes en lo que sigue, dejando las pruebas para el lector.

Definición 2.3. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ y sea $f\colon D \to \mathbb{R}^k$. La función f es *localmente lipschitziana*, que abreviaremos LL, si para cada $x \in D$ existe un entorno abierto $U \subset D$ de x tal que f es lipschitziana en U.

Proposición 2.6. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^k)$, donde $A \subset \mathbb{R}^d$ es abierto convexo. Si $\frac{\partial}{\partial x} f$ está acotada en A, entonces f es lipschitziana.*

Corolario 2.7. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^k)$, donde $A \subset \mathbb{R}^d$ es abierto. Entonces f es localmente lipschitziana.*

Definición 2.4. Sea $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ y sea $f\colon D \to \mathbb{R}^k$. La función $f(x,y)$ es *lipschitziana respecto de la variable* $x \in \mathbb{R}^d$ si existe $M \geq 0$ tal que para cada $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^m$ con $(x,y) \in D$ y $(x',y) \in D$ se tiene

$$||f(x,y) - f(x',y)|| \leq M||x - x'||.$$

Definición 2.5. Sea $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ y sea $f\colon D \to \mathbb{R}^k$. La función $f(x,y)$ es *localmente lipschitziana respecto de la variable* $x \in \mathbb{R}^d$ o *LL respecto de la variable* $x \in \mathbb{R}^d$ si para cada $(p,q) \in D$ existe un entorno abierto $U \subset D$ de (p,q) tal que f es lipschitziana respecto de la variable x en U.

Proposición 2.8. *Sea $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ y sea $f\colon D \to \mathbb{R}^k$ continua y derivable respecto de la variable $x \in \mathbb{R}^d$. Si la función $\frac{\partial}{\partial x} f\colon D \to \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$ es continua, entonces f es LL respecto de la variable x.*

2.3.2. Operador integral de Volterra

Fijado una EIV (EV) queremos definir un operador $V\colon E \to E$ tal que a la función $y\colon I \to \mathbb{R}^d$ le asigne la función $V(y)\colon I \to \mathbb{R}^d$ dada por

$$V(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{2}$$

Nótese que y es solución de (EV) si, y solo si, $V(y) = y$. Queremos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach para asegurar la existencia y la unicidad de tal y. Para ello necesitamos encontrar un conjunto $E \subset \{f\colon I \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ es continua}\}$ apropiado que sea un espacio métrico completo. Además, V debe ser una contracción en tal espacio. En tal caso, a V se le denomina *operador integral de Volterra*.

En este contexto introducimos la siguiente notación. Dados $a, b > 0$ denotamos

$$R_{a,b}(t_0, x_0) = [t_0 + a, t_0 - a] \times \overline{B}(x_0, b).$$

Existen $a, b > 0$ tales que $R_{a,b}(t_0, x_0) \subset D$. Consideramos el conjunto $E = \overline{B}(x_0, b) \subset \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^d)$, que es un espacio métrico completo con la norma infinito.

Lema 2.9. *Sea $\varphi \in E$ y $M = \max\{||f(t,x)|| \mid (t,x) \in R_{a,b}(t_0,x_0)\}$. Si $aM \le b$, entonces $V(\varphi) \in E$.*

Demostración. La comprobación es sencilla. Sea $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, tenemos que

$$||V(\varphi)(t) - x_0|| \le \int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi(s))|| \,\mathrm{d}s \le M(t - t_0) \le Ma \le b.$$

De la arbitrariedad de t se obtiene que $||V(\varphi) - x_0|| \le b$. □

Comentario 2.10. *Si se verifican las hipótesis del Lema 2.9 y $\varphi\colon [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ es solución de* (EV)*, entonces $(t, \varphi(t)) \in R_{a,b}$ para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.*

Lema 2.11. *Si la función f es lipschitziana respecto de la segunda variable en $R_{a.b}(t_0, x_0)$ con constante de Lipschitz $L \ge 0$, entonces*

$$||V(\varphi) - V(\Psi)||_\infty \le La||\varphi - \Psi||_\infty,$$

Demostración. Sea $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$. Tenemos que

$$(V(\varphi) - V(\Psi))(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - f(s, \Psi(s))] \,\mathrm{d}s.$$

Tomamos normas y acotamos la integral

$$|(V(\varphi) - V(\Psi))(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \Psi(s))| \,\mathrm{d}s \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} L|\varphi(s) - \Psi(s)| \,\mathrm{d}s \right| \le La||\varphi - \Psi||_\infty.$$

De la arbitrariedad de t se obtiene el resultado. □

2.3.3. Demostración del Teorema de Picard-Lindelöf

Gracias al operador integral de Volterra podemos dar una demostración sencilla del Teorema de Picard-Lindelöf. Presentamos la demostración a continuación.

Demostración. Existe $U \subset D$ entorno de (t_0, x_0) y $L \geq 0$ tal que f es lipschitziana respecto de la segunda variable en U con constante de Lipschitz $L \geq 0$. Existen $\overline{a}, b \in \mathbb{R}^+$ tal que $R_{\overline{a},b}(t_0, x_0) \subset U$. Por el teorema de Weierstrass, existe $M = \text{máx}\{||f(t,x)|| : (t,x) \in R_{\overline{a},b}(t_0,x_0)\}$. Tomamos $0 < a < \overline{a}$ tal que $aM < b$ y $aL < 1$. En el nuevo recinto $R_{a,b}(t_0, x_0)$ se cumplen todas las propiedades que se requieren para finalizar la demostración. Consideramos el espacio métrico completo

$$E = \{\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^d) : ||\varphi(t) - x_0|| \leq b \ \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]\}.$$

Por los lemas anteriores tenemos que $V(E) \subset E$ y V es contractiva. La existencia de solución se deduce del Teorema del punto fijo de Banach.

Estudiemos ahora la unicidad local de (P). Consideremos dos soluciones $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$. Podemos tomar $0 < a' < a$ tal que $[t_0 - a', t_0 + a'] \subset I_1 \cap I_2$ y, además, $||\varphi_i(t) - x_0|| < b$ para todo $t \in [t_0 - a', t_0 + a']$, $i \in \{1, 2\}$. Nótese que se sigue verificando $a'M < b$ y $a'L < 1$. Tomamos el espacio métrico completo

$$E' = \{\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - a', t_0 + a'], \mathbb{R}^d) : ||\varphi(t) - x_0|| \leq b \ \forall t \in [t_0 - a', t_0 + a']\}.$$

Tenemos que $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$ son puntos fijos del operador integral de Volterra definido sobre E'. Como consecuencia del Teorema del punto fijo de Banach, φ_1 y φ_2 coinciden en $[t_0 - a', t_0 + a']$, lo que demuestra la unicidad local.

Por último, de la arbitrariedad de (t_0, x_0) deducimos que la EDO verifica la propiedad de unicidad local en cualquier punto $(t_0, x_0) \in D$. Podemos aplicar pues la Proposición 1.6 para completar la demostración. □

Recuérdese en este punto que el Teorema del punto fijo de Banach nos dice además que dado un elemento $\varphi_0 \in E$, la sucesión $\varphi_n = V^n(\varphi)$ converge en norma a la solución de **??**. Puesto que estamos usando la norma infinito, esta convergencia equivale a la convergencia uniforme. A la sucesión φ_n se le denomina iterantes de Picard.

Ejemplo 2.12 (Iterantes de Picard): Consideramos el PVI

$$\begin{cases} x' = x^2; \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Para este PVI obtenemos $f(t,x) = x^2$. En el entorno $U = \mathbb{R} \times [0, 2]$ de $(0, 1)$ tenemos que f es lipschitziana respecto de la segunda variable con constante de Lipschitz $L = 4$ y está acotada por $M = 4$. Tomamos pues $a = 1/8$. Podemos definir en $R_{a,b}(0, 1)$ las iterantes de Picard, que nos permiten encontrar una aproximación numérica de la solución en caso de no conocer ésta. △

2.4. Solución general

Como consecuencia del Teorema de Picard-Lindelöf y los resultados de la Sección 1.2 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.13. *Sea $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y $f : D \to \mathbb{R}^d$ continua y localmente lipschitziana respecto de la segunda variable. Entonces, para cualquier $(t_0, x_0) \in D$ el PVI* (P) *tiene una única solución maximal.*

Definición 2.6. Sea $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y $f \colon D \to \mathbb{R}^d$ continua y localmente lipschitziana. Fijado $(t_0, x_0) \in D$ denotaremos $\alpha(t_0, x_0)$ y $\omega(t_0, x_0)$ al extremo inferior y superior, respectivamente, de la solución maximal del PVI asociado a la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Definimos el conjunto

$$\Omega = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : (t_0, x_0) \in D, \alpha(t_0, x_0) < t < \omega(t_0, x_0)\}$$

y la llamada *solución general* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ a partir del Teorema de Picard-Lindelöf como aquella función diferenciable en la primera variable que verifica $X_t(t, t_0, x_0) = f(t, X(t, t_0, x_0))$ y $X(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Esto es, la función $\varphi(t) = X(t, t_0, x_0)$ es la solución maximal del PVI asociado a (t_0, x_0).

Cuando no haya ambigüedad en la solución maximal que estamos considerando utilizaremos $]\alpha, \omega[$ para indicar su dominio. Algunos autores escriben $]\omega_-, \omega_+[$ en lugar de $]\alpha, \omega[$. No obstante, la notación que hemos escogido nos facilita la escritura.

2.5. Teorema de Cauchy - Peano

Nos preguntamos en este punto si todo PVI tiene solución. De momento no nos hemos encontrado un PVI que no tenga solución. Sí hemos encontrado ejemplos donde las soluciones maximales no eran únicas y, por tanto, no podemos aspirar a demostrar un resultado como el Teorema de Picard-Lindelöf en un contexto general. El Teorema de Cauchy - Peano responde afirmativamente a nuestra pregunta.

Teorema 2.14 (Teorema de Cauchy - Peano)**.** *El PVI* (P) *tiene solución.*

Demostración. NO LA HEMOS DADO TODAVÍA... SE AÑADIRÁ EN UN FUTURO. □

3. EDOs autónomas escalares

La solución general de una EDO se simplifica enormemente cuando la función f no depende de la variable t. En tal caso, podemos obtener una gran cantidad de información acerca de las soluciones de la EDO solamente utilizando la unicidad del Teorema de Picard - Lindelöf.

Definición 3.1. Una *EDO autónoma escalar* es una EDO de la forma

$$x' = f(x),\ x \in I, \tag{AE}$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función localmente lipschitziana. Para cada $x_0 \in I$ denotamos por $X(t; x_0)$ a la única solución maximal de (AE) que verifica $x(0) = x_0$.

Nótese que $X(t; x_0)$ está bien definida gracias al Teorema de Picard-Lindelöf. De aquí en adelante nos referiremos a (AE) cuando utilicemos EDOs autónomas escalares en un contexto general.

Definición 3.2. La *órbita de* (AE) *asociada a* x_0 es el conjunto imagen de $X(t; x_0)$ y se denota $\Theta(x_0)$.

El siguiente lema, cuya demostración es una simple comprobación, nos proporciona a partir de una solución maximal de (AE) infinitas (no numerables) soluciones maximales con el mismo conjunto imagen. Esto quiere decir que las órbitas de (AE) se repiten un número no numerable de veces.

Lema 3.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha, \omega[)$ solución de* (AE) *y sea $\tau \in$. Entonces, la función $\Psi\colon]\alpha - \tau, \omega - \tau[\to \mathbb{R}$ dada por $\Psi(t) = \varphi(t + \tau)$ es solución de* (AE)*.*

Cabe preguntarse si, dadas dos soluciones maximales de (AE) con la misma órbita, puede obtenerse una de otra mediante el Lema 3.1. La respuesta es afirmativa y es consecuencia del Teorema de Picard-Lindelöf. A continuación la enunciamos de forma más general.

Lema 3.2. *Consideremos la EDO* (AE)*. Sean $x_1, x_2 \in I$ tales que $\Theta(x_1) \cap \Theta(x_2) \neq \emptyset$. Denotemos $\varphi_1(t) = X(t; x_1)$ y $\varphi_2(t) = X(t; x_2)$. Entonces, existe $\tau > 0$ tal que $\alpha(x_2) = \alpha(x_1) + \tau$, $\omega(x_2) = \omega(x_1) + \tau$ y $\varphi_1(t) = \varphi_2(t + \tau)$ para todo $t \in]\alpha(x_1), \omega(x_1)[$.*

Demostración. Existen t_1 y t_2 tales que $\varphi(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Definimos $\phi(t) = \varphi_2(t + (t_2 - t_1))$ en el intervalo que corresponda. En virtud del Lema 3.1 ϕ es solución de (AE) y verifica $\phi(t_1) = \varphi_2(t_2) = \varphi_1(t_1)$. Por el Teorema de Picard-Lindelöf obtenemos que $\phi = \varphi_1$. □

Nótese que por el Teorema del valor intermedio la órbita asociada a x_0 es un intervalo. Además, es claro que

$$I = \bigcup_{x_0 \in I} \Theta(x_0).$$

Corolario 3.3. *Consideremos la EDO* (AE)*. Para cualesquiera $x_0, x_0' \in I$ o bien $\Theta(x_0) = \Theta(x_0')$ o bien $\Theta(x_0) \cap \Theta(x_0') = \emptyset$. Por tanto, Las órbitas de* (AE) *constituyen una partición de I.*

Demostración. Sean $x_0, x_0' \in I$ tales que $\Theta(x_0) \cap \Theta(x_0') \neq \emptyset$. Veamos que $\Theta(x_0) = \Theta(x_0')$. Denotamos $\varphi_1(t) = X(t; x_0)$ y $\varphi_2(t) = X(t; x_0')$. Aplicamos el Lema 3.2 sobre φ_1 y φ_2, obteniendo en particular que $\Theta(x_0) = \Theta(x_0')$. □

Cabe preguntarse cuándo una órbita es trivial, esto es, tiene solamente un punto. El siguiente lema resuelve esta cuestión.

Lema 3.4. *Consideremos la EDO* (AE) *y $x_0 \in I$. Equivalen:*

a) La órbita $\Theta(x_0)$ es $[x_0, x_0] = \{x_0\}$.

b) La solución $X(t; x_0)$ *es constante.*

c) La función f *se anula en* x_0.

Demostración. Nótese que $\Theta(x_0) = \mathrm{Im}(X(t; x_0)) = \{x_0\}$ si, y solo si, la solución $X(t; x_0)$ es constantemente x_0. Veamos que esto equivale a que f se anula en x_0. En efecto, si $X(t; x_0) = x_0$, entonces evaluando la derivada en $t = 0$ obtenemos $0 = f(x_0)$. Ahora, si $f(x_0) = 0$, la función constantemente x_0 es una solución de (AE). Por el Teorema de Picard-Lindelöf, debe tenerse $X(t; x_0) = x_0$ como se quería. □

Definición 3.3. Diremos que la EDO (AE) tiene un punto de equilibrio en x_0 si $f(x_0) = 0$. Denotaremos por $\mathrm{Z}(f)$ al conjunto de los ceros de f, que es compacto por ser f continua.

Corolario 3.5. *Si* p *es un punto de equilibrio de* (AE) *y* $x_0 \in I$ *con* $x_0 \neq p$, *entonces* $X(t, x_0) \neq p$ *para todo* $t \in]\alpha(x_0), \omega(x_0)[$. *Por tanto, o bien* $\Theta(x_0) \subset]-\infty, p[$ *o bien* $\Theta(x_0) \subset]p, \infty[$.

Demostración. Por la Proposición 3.3 $\Theta(x_0) \cap \Theta(p) = \emptyset$, lo que prueba el resultado. □

Lema 3.6. *Sean* p_1, p_2 *dos puntos de equilibrio de* (AE) *con* $p_1 \leq p_2$. *Entonces*

$$]p_1, p_2[= \bigcup_{x_0 \in]p_1, p_2[} \Theta(x_0);$$
$$]p_1, +\infty[= \bigcup_{x_0 \in]p_1, +\infty[} \Theta(x_0);$$
$$]-\infty, p_1[= \bigcup_{x_0 \in]-\infty, p_1[} \Theta(x_0).$$

Demostración. Demostramos solo la primera igualdad, pues las otras dos se deducen de forma análoga. Basta ver que para cada $x_0 \in]p_1, p_2[$ se tiene $\Theta(x_0) \subset]p_1, p_2[$. En efecto, por el Corolario 3.5 tenemos que $\Theta(x_0) \subset]-\infty, p_2[\cap]p_1, +\infty[$.

Proposición 3.7. *Consideremos la EDO* (AE). *Si* $f(x_0) > 0$ *(resp.* $f(x_0) < 0$*), entonces la función* $X(t; x_0)$ *es estrictamente creciente (resp. decreciente).*

Demostración. Lo demostramos para el caso $f(x_0) > 0$ pues el otro es análogo. Denotemos $\varphi(t) = X(t; x_0)$. Supongamos que existe $t' \in]\alpha, \omega[$ tal que $0 = \varphi'(t') = f(\varphi(t'))$. Denotemos $x_0' = \varphi(t')$. Este hecho contradice que $\Theta(x_0)$ sea disjunta con $\Theta(x_0') = \{x_0'\}$. Tenemos pues que $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in]\alpha, \omega[$. Por tanto, φ es estrictamente monótona y su monotonía viene determinada por el signo de $\varphi'(t_0) = f(x_0)$. □

Corolario 3.8. *Las órbitas de* (AE) *son conjuntos unitarios o intervalos abiertos.*

Demostración. Sea $x_0 \in I$. Si $X(t; x_0)$ no es constante, entonces es estrictamente monótona, luego su imagen es un intervalo abierto. □

Ya disponemos de las herramientas para encontrar las órbitas de (AE) a partir de sus puntos de equilibrio.

Proposición 3.9. *Consideremos la EDO* (AE) *y* $x_0 \in I$. *Se verifican las siguientes afirmaciones.*

a) Si f *no se anula, entonces* $\Theta(x_0) = I$.

b) Si $x_0 \in \mathrm{Z}(f)$, *entonces* $\Theta(x_0) = \{x_0\}$ *y* $X(t; x_0) = x_0$.

c) Si p_1, p_2 *son dos ceros consecutivos de* f *con* $p_1 < x_0 < p_2$, *entonces* $\Theta(x_0) =]p_1, p_2[$.

d) Si $x_0 > p = \max \mathrm{Z}(f)$, *entonces* $\Theta(x_0) =]p, \sup I[$.

e) Si $x_0 < p = \min \mathrm{Z}(f)$*, entonces* $\Theta(x_0) =]p, \inf I[$.

Demostración. Demostramos cada apartado por separado.

a) Recordemos que I es unión disjunta de sus órbitas, que como f no se anulan son intervalos abiertos. Nótese que una unión disjunta de más de un abierto no es conexa. Por tanto, f solo tiene una órbita distinta. Esto es, $\Theta(x_0) = I$.

b) Este apartado se demostró en el Lema 3.4.

c) Razonamos como en a) sobre $]p_1, p_2[$ utilizando el Lema 3.6.

d) Razonamos como en a) sobre $]p, +\infty[$ utilizando el Lema 3.6.

e) Razonamos como en a) sobre $]-\infty, p[$ utilizando el Lema 3.6. □

Definición 3.4. Una representación en la recta real de las órbitas de (AE) recibe el nombre de *diagrama de fases*. Habitualmente utilizamos flechas en lugar de segmentos para unir los puntos equilibrio de (AE). El sentido de la flecha indica la monotonía de las soluciones que tienen ese segmento como órbita (derecha = creciente, izquierda = decreciente).

En vista de la Proposición 3.9 el diagrama de fases viene determinado por el diagrama de signos de f. Además, utilizando la proposición 3.7, un signo positivo indica que la solución asociada a esa órbita es estrictamente creciente mientras que un signo negativo indica que dicha solución es estrictamente decreciente.

Ejemplo 3.10 (Ecuación logística): Sean $\lambda, L > 0$. Consideramos la EDO autónoma escalar

$$x' = \lambda x(L - x) \tag{4}$$

La función $f(x) = \lambda x(x - L)$ definida en $\mathbb{R}$ es de clase 1 y, por tanto, localmente lipschitziana. Tenemos que $\mathrm{Z}_f = \{0, L\}$. El diagrama de fases de la ecuación es

$$-\infty \to 0 \leftarrow L \to +\infty.$$ △

Corolario 3.11. *Sea* $\varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha, \omega[)$ *solución maximal de* (AE).

a) Si $\lim_{t\to\omega} \varphi(t) = p \in I$*, entonces* $p \in \mathrm{Z}_f$ *y* $\omega = +\infty$.

b) Si $\lim_{t\to\alpha} \varphi(t) = p \in I$*, entonces* $p \in \mathrm{Z}_f$ *y* $\alpha = -\infty$.

Demostración. Demostramos a) pues b) es análogo. En virtud de la Proposición 3.9 y la Proposición 3.9 obtenemos que $p \in \mathrm{Z}_f$. Además, $\lim_{t\to\omega} \varphi'(t) = \lim_{t\to\omega} f(\varphi(t)) = 0$. Si se tuviese $\omega < +\infty$, entonces podemos utilizar el Lema 1.10 para obtener una nueva solución a partir de φ y la solución constantemente p, lo que contradice la maximalidad de φ. □

Corolario 3.12. *Sean* p_1 *y* p_2 *dos puntos de equilibrio consecutivos de* (AE) *con* $p_1 < p_2$*. Sea* φ *solución maximal de* (AE) *tal que su imagen es* $]p_1, p_2[$*. Entonces, el dominio de* φ *es* $\mathbb{R}$*. A la solución* φ *se le llama sigmoide.*

Ejemplo 3.13 (Ecuación logística - 2): Recuperamos el Ejemplo 3.10, donde se estudiaba la ecuación logística. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Si $x_0 \in \{0, L\}$, entonces $]\alpha(x_0), \omega(x_0)[= \mathbb{R}$.

b) Si $x_0 < 0$, entonces $\lim_{t\to+\infty} X(t, x_0) = 0$ y, por tanto, $\omega(x_0) = +\infty$.

c) Si $0 < x_0 < L$, entonces $\alpha(x_0) = -\infty$ y $\omega(x_0) = +\infty$. Además, $\lim_{t\to-\infty} X(t, x_0) = L$ y $\lim_{t\to+\infty} X(t, x_0) = 0$.

d) Si $x_0 > L$, entonces $\lim_{t\to-\infty} X(t, x_0) = L$ y, por tanto, $\alpha(x_0) = -\infty$. △

Hemos demostrado la Proposición 3.9 mediante un argumento de conexión, obteniendo varios corolarios en consecuencia. Parte de estos resultados también se podían haber deducido a partir del siguiente lema.

Lema 3.14 (Barbalet, versión débil)**.** *Sea* $\varphi \in D(]\alpha, +\infty[)$ *tal que* $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = L \in \mathbb{R}$. *Entonces, existe* $\{t_n\} \subset]\alpha, +\infty[$ *estrictamente creciente con* $\{t_n\} \to +\infty$ *tal que* $\{f'(t_n)\} \to 0$.
Demostración. Es una consecuencia sencilla del teorema del valor medio. □

Definición 3.5. Sea $p \in I$ un punto de equilibrio de la ecuación (AE). Se define la *región de atracción de* p como

$$\mathcal{R}(p) = \{x_0 \in I : \omega(x_0) = +\infty \text{ y } \lim_{t\to+\infty} X(t; x_0) = p\}.$$

Claramente tenemos que $p \in \mathcal{R}(x_0)$.

Definición 3.6. En el contexto de la Definición 3.5:

- Si $p \in \text{int}(\mathcal{R}(p))$, entonces diremos que p es un *atractor* o *sumidero.* Esto equivale a que el diagrama de fases sea de la forma $\to p \leftarrow$ en un entorno de p.
- Si $\mathcal{R}(p) = I$, entonces diremos que p es un *atractor global.* Esto equivale a que el diagrama de fases sea exactamente $\to p \leftarrow$.
- Si $\mathcal{R}(p) = \{p\}$ y p es un cero aislado de f, entonces diremos que p es una *fuente* o un *repulsor.* Esto equivale a que le diagrama de fases sea de la forma $\leftarrow p \to$ en un entorno de p.
- Si $\text{int}(\mathcal{R}(p)) \neq \emptyset$ y $p \in \partial\mathcal{R}(p)$, entonces diremos que p es un *semiatractor.* Esto equivale a que el diagrama de fases sea de la forma $\to p$ algo o bien algo $p \leftarrow$ en un entorno de p.

Utilizando herramientas de un curso básico de cálculo fácilmente obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.15 (Test de la derivada primera)**.** *Sea* $p \in I$ *un punto de equilibrio de la ecuación* (AE) *tal que* f *es de clase* 1 *en un entorno de* p. *Se verifican las siguientes afirmaciones.*

a) Si $f'(p) < 0$, *entonces* p *es un atractor de* $x' = f(x)$.

b) Si $f'(p) > 0$, *entonces* p *es un repulsor de* $x' = f(x)$.

Ejemplo 3.16 (Ecuación logística - 3): Recuperamos el Ejemplo 3.10. Tenemos que $f(x) = \lambda x(L - x)$ y sus puntos críticos son $\{0, L\}$. Deducimos que 0 es un atractor mientras que L es un repulsor. △

4. Prolongación y acotación de soluciones

Todos los resultados se enuncian y se prueban para el extremo superior del dominio de una solución. No obstante, también se pueden establecer de forma análoga para el extremo inferior, hecho que se deja al lector como ejercicio.

4.1. Prolongación de soluciones

En este apartado estudiamos cómo prolongar soluciones de un PVI arbitrarios. Encontraremos prolongaciones bajo ciertas hipótesis sobre la solución y / o el problema. En consecuencia, para las soluciones maximales fallará alguna de estas hipótesis, obteniendo información sobre el dominio u acotación éstas.

Lema 4.1. *Sea $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to \mathbb{R}^d$ una solución de* (P) *tal que* $\lim_{t\to\omega}\varphi(t)=\xi\in\mathbb{R}^d$. *Si $(\omega,\xi)\in D$, entonces la solución es prolongable.*

Demostración. Consideramos el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x); \\ x(\omega)=\xi. \end{cases}$$

Existe $a>0$ tal que $\widetilde{\varphi}\colon]\omega-a,\omega+a[\to\mathbb{R}^d$ es solución del nuevo PVI. La función $\Psi\colon]\alpha,\omega+a[\to\mathbb{R}^d$ dada por

$$\Psi(t)=\begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t\le\omega; \\ \widetilde{\varphi}(t) & \text{si } t>\omega; \end{cases}$$

es una solución de (P) (Lemma 1.10) y, por tanto, es una prolongación de φ. □

El Lemma 4.1 se puede ampliar, obteniendo el siguiente resultado.

Lema 4.2. *Sea $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to\mathbb{R}^d$ una solución de* (P) *tal que existe una sucesión $\{t_n\}\subset]\alpha,\omega[$ con $\{t_n\}\to\omega$ y $\{\varphi(t_n)\}\to\xi\in\mathbb{R}^d$. Si $(\omega,\xi)\in D$, entonces* $\lim_{t\to\omega}\varphi(t)=\xi$ *y, además, la solución es prolongable.*

Demostración. Sean $a,b\in\mathbb{R}^+$ tales que $R_{a,b}(\omega,\xi)\subset D$. Existe

$$M=\max\{||f(t,x)||:(t,x)\in R_{a,b}(\omega,\xi)\}.$$

Fijado $0<\varepsilon<b$, tomamos $\delta>0$ tal que $\delta<a$ y $\delta M<\varepsilon/2$. Consideramos la región $R_{\delta,\varepsilon}(\omega,\xi)$. Por la convergencia de $\{t_n\}$ y $\{\varphi(t_n)\}$ encontramos $m\in\mathbb{N}$ tal que $t_m\in]\omega-\delta,\omega[$ y $\varphi(t_m)\in\overline{\mathrm{B}}(\xi,\varepsilon/2)$. Por tanto, tenemos que $(t_m,\varphi(t_m))\in R_{\delta,\varepsilon}(\omega,\xi)$. Vamos a demostrar que $(t,\varphi(t))\in R_{\delta,\varepsilon}(\omega,\xi)$ para todo $t\in[t_m,\omega[$. Razonamos por reducción al absurdo. En tal caso mediante un argumento del primer instante existe Nótese que para cada $t\in]t_m,\omega[$ se verifca

$$\varphi(t)=\varphi(t_m)+\int_{t_m}^{t}\varphi'(s)\,\mathrm{d}s=\varphi(t_m)+\int_{t_m}^{t}f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Por tanto, deducimos que

$$||\varphi(t)-\varphi(t_m)||=||\int_{t_m}^{t}f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s||\le\int_{t_m}^{t}||f(s,\varphi(s))||\,\mathrm{d}s\le M|t-t_m|\le M\delta<\varepsilon/2.$$

Por último, hemos demostrado que $||\varphi(t)-\xi|| \leq ||\varphi(t_m)-\xi|| + ||\varphi(t)-\varphi(t_m)|| \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2$. Esto es, $\varphi(t) \in \overline{\mathrm{B}}(\xi,\varepsilon)$ para todo $t \in]t_m,\omega[$. De la arbitrariedad de ε se deduce que $\lim_{t\to\omega}\varphi(t)=\xi$. En vista del Lema 4.1 la solución es prolongable. □

Aplicando el Lema 4.2 a soluciones maximales obtenemos el siguiente teorema, que es uno de los principales resultados de la sección.

Teorema 4.3 (Comportamiento de la soluciones maximales en el extremo superior)**.** *Sea* $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to \mathbb{R}^d$ *una solución maximal de* (P)*. Si* $\omega < +\infty$*, entonces se ha de cumplir una de las siguientes alternativas:*

a) $\lim_{t\to\omega} ||\varphi(t)|| = +\infty$*;*

b) Existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ *con* $(\omega,\xi)\in\partial D$ *y existe* $\{t_n\} \subset]\alpha,\omega[$ *tal que* $\{t_n\}\to\omega$ *y* $\{\varphi(t_n)\}\to\xi$*.*

Demostración. Supongamos que no se cumple a). En tal caso encontramos una sucesión $\{t_n\}$ convergente a ω tal que $\{\varphi(t_n)\}$ está acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass obtenemos una parcial $\{\varphi(t_{\sigma(n))}\}$ convergente a $\xi\in\mathbb{R}^d$. Nótese que $(\omega,\xi)\notin D$ ya que en caso contrario la solución sería prolongable por el Lema 4.2. Puesto que $\{(t_{\sigma(n)},\varphi(t_{\sigma(n)}))\}\to(\omega,\xi)$ tenemos que $(\omega,\xi)\in \mathrm{Fr}(D)\setminus D=\partial D$. □

Definición 4.1. Sea $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to\mathbb{R}^d$ continua. El conjunto ω-límite de (P) se define como

$$\mathrm{L}_\omega(\varphi)=\{q\in\mathbb{R}^d \mid \exists\{t_n\}\subset]\alpha,\omega[,\{t_n\}\to\omega,\{\varphi(t_n)\}\to q\}.$$

Comentario 4.4. *Nótese que en el Teorema 4.3 la alternativa a) equivale a* $\mathrm{L}_\omega(\varphi)=\emptyset$ *mientras que la alternativa a) equivale a* $\{\omega\}\times\mathrm{L}_\omega(\varphi)\cap\partial D\neq\emptyset$*.*

Corolario 4.5. *Si el conjunto* D *es acotado y* $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to\mathbb{R}^d$ *solución maximal de* (P)*, entonces* $\omega<+\infty$ *y además existe* $\xi\in\mathbb{R}^d$ *con* $(\omega,\xi)\in\partial D$ *y* $\{t_n\}\subset]\alpha,\omega[$ *creciente tal que* $\{t_n\}\to\omega$ *y* $\{\varphi(t_n)\}\to\xi$*.*

Definición 4.2. Sea $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to\mathbb{R}^d$ una solución maximal de (P). La solución φ *explota en tiempo finito* si $\omega<+\infty$ y $\lim_{t\to\omega}||\varphi(t)||=+\infty$.

Corolario 4.6. *Sean* $D=]a,b[\times\mathbb{R}^d$ *con* $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ *y sea* $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to\mathbb{R}^d$ *solución maximal de* (P)*. Si* $\omega<b$*, entonces la solución explota en tiempo finito.*

Ejemplo 4.7: Consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = x^2+t; \\ x(0)=0. \end{cases}$$

Sea $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to\mathbb{R}$ solución maximal. Puesto que f está definida en $\mathbb{R}^2$ deducimos que si $\omega<+\infty$, entoces la solución explota en tiempo finito. △

Corolario 4.8. *Sean* $D=]a,b[\times\mathbb{R}^d$ *con* $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ *y sea* $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to\mathbb{R}^d$ *solución maximal de* (P) *tal que* $||\varphi'(t)||\leq g(t)$ *para todo* $t\in]\alpha,\omega[$*, donde* g *es una función continua. Entonces,* $\alpha=a$ *y* $\omega=b$*. En particular, si existe una función* $g\in\mathcal{C}(R)$ *tal que* $f(t,x)\leq g(t)$ *para todo* $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$*, entonces* $\alpha=a$ *y* $\omega=b$*.*

Demostración. Realizamos la prueba para ω. Supongamos por reducción al absurdo que $\omega<b$. Sea $M=\max g([t_0,\omega])$. Para cada $t\in[t_0,\omega[$ tenemos que

$$||\varphi(t)||=||\varphi(t_0)+\int_{t_0}^t\varphi'(s)\,\mathrm{d}s||\leq||\varphi(t_0)||+\int_{t_0}^t||\varphi'(s)||\,\mathrm{d}s=||\varphi(t_0)||+M(t-t_0)\leq||\varphi(t_0)||+M(\omega-t_0),$$

lo que contradice la tesis del Corolario 4.6. □

Ejemplo 4.9: Consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = g(x) + h(t), & x \in]a, b[; \\ x(0) = 0; \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $g\mathcal{C}(]a, b[)$ acotada por $M > 0$. Sea $\varphi \colon]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}$ solución maximal. Tenemos que $D =]a, b[\times\mathbb{R}$. Puesto que $f(t, x)$ está acotada por $|h(t)| + M$, deducimos que $\omega = b$ y $\alpha = a$ por el Corolario 4.8. En particular, podemos aplicar este resultado a $g(x) = \sin(x)$ y $h(t) = t^2$. △

4.2. Crecimiento a lo sumo lineal

En esta sección intentamos generalizar el Corolario 4.8. Como motivación considerese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.10: Sea $]\alpha, \omega[$ el intervalo de definición de la solución maximal de

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{x} + \frac{\sin(t)}{x^2}, & x > 0; \\ x(0) = 2. \end{cases} \tag{5}$$

Demuestra que $\omega = +\infty$.

Denotemos $\varphi(t) = X(t; 0, 2)$. Vamos a demostrar que $1 < \varphi(t) \leq 2 + 3t$ para todo $t \geq 0$. Razonemos por reducción al absurdo. Si $1 > \varphi(t')$ para cierto $t' > 0$, podemos encontrar $\tau = \inf\{t > 0 : \varphi(t) < 1\} > 0$. Nótese que como $\varphi(t)$ es contínua debe tenerse $\varphi(\tau) = 1$ y $\varphi(t) > 1$ para todo $0 < t < \tau$. Como consecuencia, debe tenerse $\varphi'(\tau) \leq 0$. Sin embargo, usando que φ es solución de (5) se tiene que $\varphi'(\tau) = 2 + \sin(\tau) > 0$, contradicción. Utilizando esta información y (5) deducimos que

$$\varphi'(t) \leq \varphi'(t)\varphi(t) = 2 + \frac{\sin(t)}{\varphi(t)} \leq 3.$$

Por tanto, deducimos que

$$\varphi(t) = 2 + \int_0^t \varphi'(s)\, \mathrm{d}s \leq 2 + 3t.$$

Por último, la cota que hemos encontrado impide que se verifiquen las alternativas del Teorema 4.3, esto es, $\omega = +\infty$. △

Definición 4.3. Sea $D =]a, b[\times R^2$ y $f \colon]a, b[\times\mathbb{R}^d$. Diremos que f tiene a lo sumo crecimiento lineal en la variable x si existen dos funciones continuas $m, n :]a, b[\to \mathbb{R}_0^+$ tales que para cada $(t, x) \in D$ se tiene

$$||f(t, x)|| \leq m(t)||x|| + n(t).$$

En tal caso escribiremos que f es CSL.

Comentario 4.11. *Todas las funciones definidas en D que sean globalmente lipschitzianas respecto de la variable x son CSL.*

Comentario 4.12. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ continua tal que existen* $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x$. *Entonces f tiene crecimiento a lo sumo lineal.*

Lema 4.13 (Lema de Gronwall)**.** *Sea $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ continua tal que existen dos constantes $C, R \in \mathbb{R}$ con $R \geq 0$ tales que para cada $t \in [t_0, \omega[$ se verifica*

$$y(t) \leq C + R \int_{t_0}^{t} y(s)\, \mathrm{d}s.$$

Entonces $y(t) \leq Ce^{R(t-t_0)}$ par todo $t \in [t_0, \omega[$.

Demostración. De la tesis deducimos en particular que $y'(t) \leq Ry(t)$ para todo $t \in [t_0, \omega[$. Si $y = 0$, entonces la tesis es clara. En caso contrario, para cada $t' \in [t_0, \omega[$ existe un intervalo $t' \in I = [t_1, t_2] \subset [t_0, \omega[$ tal que $y(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. En consecuencia, encontramos que para cada $t \in I$ se verifica

$$\log(y(t)) - \log(y(t_1)) = \int_{t_1}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)}\, \mathrm{d}s \leq R(t - t_1).$$

De la monotonía de la función exponencial se deduce que...

$\square$

Teorema 4.14 (Teorema de crecimiento a lo sumo lineal)**.** *Si f tiene crecimiento a lo sumo lineal, entonces todas las soluciones maximales de* (P) *verifican que* $]\alpha, \omega[=]a, b[$.

Demostración. Sean $m, n\colon]a, b[\to \mathbb{R}_0^+$ continuas de la definición de crecimiento a lo sumo lineal. Sea $\varphi\colon]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}^d$ solución de (P). Veamos que $\omega = b$. Supongamos por reducción al absurdo que $\omega < b$. Tenemos que $[t_0, \omega] \subset]a, b[$. Por el teorema de Weierstrass existe $M = \max\{m(t) \mid t \in [t_0, \omega]\}$ y $N = \max\{n(t) \mid t \in [t_0, \omega]\}$ Por tanto, se cumple que

$$||\varphi(t)|| \leq ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi(s))||\, \mathrm{d}s \leq ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} M||\varphi(s)|| + N\, \mathrm{d}s) \leq ||x_0|| + N(\omega - t_0) + M \int_{t_0}^{t} ||\varphi(s)||\, \mathrm{d}s.$$

Podemos aplicar pues el Lema de Gronwall, obteniendo que

$$||\varphi(t)|| \leq (||x_0|| + N(\omega - t_0)) \exp(M(t - t_0)) \leq (||x_0|| + N(\omega - t_0)) \exp(M(\omega - t_0)),$$

y, por tanto, φ está acotada, lo que contradice el Corolario **??**. Para demostrar que $\alpha = a$ basta aplicar el argumento anterior sobre el PVI dual, que también es CSL. $\square$

Ejemplo 4.15: Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = \frac{x^3}{x^2+1} & x \in \mathbb{R}; \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Es autónoma escalar y su diagrama de fases se corresponde con $\leftarrow 0 \rightarrow$. Consecuentemente, $\alpha(0, x_0) = -\infty$. Por el Teorema previo obtenemos que $\omega(0, x_0) = +\infty$. $\triangle$

Comentario 4.16. *Las EDOs lineales son CSL. En efecto, éstas son de la forma*

$$x' = A(t)x + b(t),$$

con $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ y $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. En efecto, tenemos que

$$||A(t)x + b(t)|| \leq ||A(t)x|| + ||b(t)|| \leq ||A(t)||\, ||x|| + b(t)||.$$

Comentario 4.17. *Veremos en una relación de problemas que cuando $f(x)$ tiene un crecimiento mayor que una función potencial x^p con $p > 1$, entonces ciertas soluciones explotan en tiempo finito.*

Las hipótesis del Teorema CSL no son óptimas ya que hay funciones con crecimiento super lineal tales que las soluciones de las EDOs asociadas no explotan en tiempo finito. Esto queda reflejado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.18: Consideramos el PVI

$$\begin{cases} x' = x\log(x), \quad x > 0; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Nótese que $\varphi(t) = X(t, 2) = \exp(\log(2)e^t)$ y $\alpha = -\infty$ y $\omega = +\infty$. △

Comentario 4.19. *La hipótesis del Teorema de CSL se puede cambiar por las siguientes:*

a) Existe $A \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\varphi(t) \in A$ para todo $t \in]\alpha, \omega[$.

b) Existen $m, n :]a, b[\to \mathbb{R}_0^+$ continuas tales que $||f(t,x)|| \leq m(t)||x|| + n(t)$ para todo $t \in]a, b[$ y $x \in A$.

4.3. Acotación de soluciones. Funciones guía

Consideramos el conjunto abierto $D =]a, +\infty[\times \mathbb{R}^d$, con $-\infty \leq a$. Sea $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ una función continua y sea $(t_0, x_0) \in D$. Consideramos el PVI (P).

Definición 4.4. Sea $\varphi\colon]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}^d$ una solución maximal de (P). Diremos que la solución φ está acotada en el futuro si $\omega = +\infty$ y $\sup\{||\varphi(t)|| : t \in [t_0, +\infty[\} < +\infty$. Análogamente, diremos que la solución φ está acotada en el pasado si $\alpha = -\infty$ y $\sup\{||\varphi(t)|| : t \in]-\infty, t_0]\} < +\infty$.

Proposición 4.20. *Supongamos que $d = 1$. Sea $\varphi\colon]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}$ una solución maximal de* (P)*. Si existen $p_1 < p_2$ tales que $x_0 \in]p_1, p_2[$, $f(t, p_1) > 0$ y $f(t, p_2) < 0$, entonces $\varphi(t) \in]p_1, p_2[$ para todo $t \geq t_0$ y, por tanto, la solución es acotada en el futuro.*

Demostración. Veamos que $\varphi(t) > p_1$ para todo $t \geq t_0$. En efecto, $\varphi(t_0) = x_0 > p_1$. Supongamos que el resultado es falso. Existe $\tau > t_0$ tal que $\varphi(t) > p_1$ para todo $t \in [t_0, \tau[$ y $\varphi(\tau) = p_1$. Por tanto, $\varphi'(\tau) \leq 0$. Sin embargo, $\varphi'(\tau) = f(\tau, p_1) > 0$, contradicción. Análogamente se prueba la segunda afirmación. □

Definición 4.5. Consideremos una EDO (E). Sea $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Se define $\dot{V} : D \to \mathbb{R}$ como $\dot{V}(t, x) = \langle \nabla V(x), f(t, x) \rangle$. Se dice que V es una función guía de la EDO si $\dot{V}$ tiene signo constante (para valores x suficientemente grandes).

Sea $\varphi\colon]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}^d$ una solución maximal de (P). Nótese que la función $V(\varphi(t))$ es derivable y su derivada viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} V(\varphi(t)) = \langle \nabla V(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \dot{V}(t, \varphi(t)).$$

Definición 4.6. Sea $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua y $r \in \mathbb{R}$, se definen el conjunto de nivel r

$$C_r = V^{-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) = r\}$$

y el conjunto de subnivel r

$$\Omega_r = \bigcup_{s \leq r} C_r(s) = V^{-1}(]-\infty, r]).$$

Diremos que V es una función coerciva si todos sus conjuntos de subnivel son compactos.

Proposición 4.21. *En el contexto actual, se verifican las siguientes afirmaciones:*

- *Si $d = 1$, V es coerciva si, y solo si, $\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = +\infty$.*

- *Si $V(x_1, \dots, x_d) = V_1(x_1) + \cdots + V_d(x_d)$, entonces es coerciva si, y solo si, todos los sumandos V_i son coercivas en $\mathbb{R}$.*
- *Si $V(x) \geq W(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y W es coerciva, entonces V es coerciva.*
- *Si V es una función cuadrática (polinómica de grado 2), entonces es coerciva si, y solo si, $\mathrm{Hess}V$ es una matriz definida positiva.*
- *Si $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ es una función convexa y tiene un único punto crítico, entonces V es coerciva.*

Teorema 4.22. *Si existe $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ coerciva tal que $\dot{V}(t,x) \leq 0$ para todo $(t,x) \in D$, entonces las soluciones maximales de* (P) *están acotadas en el futuro.*

Demostración. Sea $\varphi\colon]\alpha,\omega[\to \mathbb{R}^d$ una solución maximal de (P). Definimos $y = V \circ \varphi$. Tenemos que $y'(t) = \dot{V}(t,\varphi(t)) \leq 0$, luego y es decreciente. Por tanto, $V(\varphi(t)) \leq V(\varphi(t)_0) = r_0$ para todo $t \geq t_0$. Por tanto, $\varphi([t_0,\omega[) \subset \Omega_{r_0}$ por ser V coerciva. Como Ω_{r_0} es compacto, la función φ está acotada en $[t_0,\omega[$. Consecuentemente, del Teorema de prolongación de soluciones se deduce que $\omega = +\infty$. □

GENERALIZAR EL TEOREMA.

Corolario 4.23. *Si existe $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ coerciva tal que $\dot{V}(t,x) = 0$ para todo $(t,x) \in D$, entonces las soluciones maximales de* (P) *están definidas en $]-\infty,+\infty[$ y están acotadas. Además, $\varphi(t) \in C_{V(x_0)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Comentario 4.24. *Las hipótesis del Teorema 4.22 se pueden debilitar. Concretamente, la afirmación $\dot{V}(t,x) \leq 0$ para todo $(t,x) \in D$ puede substituirse por $\dot{V}(t,x) \leq 0$ para todo $t \in]t_0,+\infty[$, $x \in \mathbb{R}^d - B(p,r)$ para algunos $p \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Además, en lugar de suponer que V es coerciva basta suponer que las componenetes conexax de los conjuntos de subnivel son acotadas. El siguiente resultado es una versión más general del Teorema 4.22.*

Teorema 4.25. *Si existe $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ coerciva y existe $r \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto*

$$\Omega_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) \leq r\}$$

tiene componentes conexas acotadas y además $\dot{V}(t,x) \leq 0$ para todo $t \geq t_0$,$x \in \Omega_r$, entonces las soluciones maximales de (P) *están acotadas en el futuro para $(t_0,x_0) \in]a,+\infty[\times \Omega_r$.*

Ejemplo 4.26 (Relación de ejercicios 3, ejercicio 8): Busca funciones guía que nos permitan asegurar que las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales están acotadas en el futuro:

a) $x' = \sin(t) - x^3$. Es fácil ver que $V(x) = x^2$ es una función guía.

b) Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = -\sin(x_1) - x_1. \end{cases}$$

Buscamos una función guía de la forma $V(x_1,x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$. En tal caso se tendría $\dot{V}(x_1,x_2) = \langle (V_1'(x_1), V_2'(x_2)), (x_2, -\sin(x_1) - x_1) \rangle = V_1'(x_1)x_2 - V_2'(x_2)(\sin(x_1) + x_1)$. Bastaría que $V_1'(x_1) = \sin(x_1) + x_1$ y que $V_2'(x_2) = x_2$. Esto sucede para $V_1(x_1) = -\cos(x_1) + x_1^2/2$ y $V_2(x_2) = x_2^2/2$. Nótese que estas funciones son coercivas. Por tanto, V es una función guía.

c) Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2; \\ x_2' = -x_2. \end{cases}$$

Vamos a comprobar que $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es una función guía. Tenemos que $\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1(-x_1 + x_2)2x_2(-x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)^2 \leq 0$, que es una forma definida negativa. △

4.3.1. Aplicación a EDOs de segundo orden

Cualquier ecuación diferencial explícita de orden superior se puede transformar en una ecuación diferencial de primer orden explícito. Existe un procedimiento estándar para hacerlo, aunque no es el único. Sea $D \subset \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^d\right)^n$ abierto y $g\colon D \to \mathbb{R}^d$ continua. La ecuación

$$x^{n+1)} = g(t, x, x', \ldots, x^n) \tag{6}$$

equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2; \\ x_{n-1}' &= x_n; \\ &\vdots \\ x_n' &= g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{7}$$

Lema 4.27. *Sea $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tal que f y f'' están acotadas. Entonces f' está acotada.*
Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que f y f'' están acotadas por 1. Sea $x \in R$. Por el Teorema del valor medio encontramos $\xi \in]x-1, x[$ tal que $|f'(\xi)| = |f(x) - f(x-1)| \leq 2$. Volvemos a aplicar el teorema del valor medio para obtener $\zeta \in]x-1, x[$ tal que $f'(x) - f'(\xi) = f''(\zeta)(x - \xi)$. Consecuentemente, $|f'(x)| \leq |f'(\xi)| + 1 \leq 3$. □

Ejemplo 4.28: En la física Newtoniana es habitual encontrar ecuaciones del tipo

$$mx'' + g(x) = 0, \tag{8}$$

donde m es una constante positiva y $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ es localmente lipschitziana. Supongamos que $d = 1$. Aplicando el procedimiento anterior obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= -g(x_1)/m. \end{cases} \tag{9}$$

Por el Teorema de Picard-Lindelöf, el sistema (9) tiene solución maximal única para cada condición inicial. Este hecho se denomina *determinismo físico*. Un caso particular es el oscilador armónico, en cuyo caso se deducen las condiciones $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $xg(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Por ejemplo, podemos considerar $g(x) = ax$ (oscilador armónico) o $g(x) = ax + bx^3$ (modelo de Duffing) para $a, b > 0$.

Interesa saber si las soluciones de (8) están acotadas. Por ejemplo, podemos estar modelando la oscilación de un puente. Si las soluciones no están acotadas en el futuro, entonces el puente se terminará rompiendo. Para ello buscamos una función guía apropiada. Tomamos $V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$. Podemos tomar $V_2(x_2) = x_2^2/2$ y $V_1(x_1) = G(x_1)/m$, donde G es una primitiva de $g(x_1)$. Obtenemos por ejemplo la función guía

$$V(x_1, x_2) = G(x_1) + mx_2^2/2.$$

A la función $V(x_1, x_2)$ se le denomina energía del sistema, correspondiéndose el segundo sumando $mx_2^2/2$ con la energía cinética y G con la energía potencial. Sea $\varphi\colon]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}$ una solución de (8). Tenemos que la función $E(t) = V(\varphi(t), \varphi'(t)) = G(\varphi(t)) + m\varphi'(t)^2/2$ es constante. A este hecho se le llama *conservación de la energía.*

Si G es coerciva, entonces por el Teorema 4.22 las soluciones de (9) están acotadas. Nótese que si x es solución de (8), entonces $x'' = -g(x)/m$ está acotada. Por el Lema 4.27, x' está acotada. Por tanto, estudiar la acotación de las soluciones de (9) equivale a estudiar la acotación de las soluciones de (8).

En el caso de las ecuaciones de tipo oscilador armónico o tipo Duffing, la función G es coerciva. △

Ejemplo 4.29: Si introducimos una fuerza de rozamiento en los problemas que se reducen en ecuaciones de tipo (8), entonces obtenemos ecuaciones de la forma

$$mx'' + cx' + g(x) = 0, \tag{10}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$, m y c son constantes positivas y $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ es localmente lipschitziana. Aplicando el procedimiento anterior obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= -cx_2/m - g(x_1)/m. \end{cases} \tag{11}$$

Una función guía vuelve a ser $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $V(x_1, x_2) = G(x_1) + mx_2^2/2$, donde G es una primitiva de g. Es fácil verificar que $\dot{V}(x_1, x_2) = -cx_2^2$. Sea $\varphi\colon]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}$ una solución de (10). Tenemos que la función energía $E(t) = V(\varphi(t), \varphi'(t)) = G(\varphi(t)) + m\varphi'(t)^2/2$ es decreciente. A este hecho se le llama *disipación de la energía*; el rozamiento provoca que la energía se reduzca. △

Ejemplo 4.30 (Ecuaciones forzadas): En la física Newtoniana también aparecen ecuaciones de la forma

$$mx'' + cx' + g(x) = p(t), \tag{12}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$, m y c son constantes ($m > 0$ y $c \geq 0$), $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ es localmente lipschitziana y $p \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Estas ecuaciones surgen cuantdo se introduce en el modelo una fuerza externa que varía en el tiempo (función p). Aplicando el procedimiento anterior obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= p(t)/m - cx_2/m - g(x_1)/m. \end{cases} \tag{13}$$

La energía ya no sirve como función guía. Vamos a suponer que $m = c = 1$, $g(x) = x^3$ y $p(t) = \sin(t)$. Buscamos una función guía de la forma $V(x_1, x_2) = x_1^4/4 + x_2^2/2 + \gamma x_1 x_2$. Nótese que

$$\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{\gamma}{2}x_1^2 + \frac{1-\gamma}{2}x_2^2 \leq V(x_1, x_2).$$

Por tanto, para $\gamma \in]0,1[$ la función V es mayor o igual que una función coerciva, luego también es coerciva. Tenemos que

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\gamma x_1^4 - (1-\gamma)x_2^2 - \gamma x_1 x_2 + \sin(t)x_2 + \gamma \sin(t) x_1.$$

Vamos a ver que $\dot{V}$ es anticoerciva, esto es, $-\dot{v}$ es coerciva. Esto prueba que $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$ para (x_1, x_2) lo suficientemente alejado del origen. En efecto,

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -\gamma x_1^4 - (1-\gamma)x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + |x_2| + \gamma|x_1|.$$

Nótese que para $\gamma < 2/3$ la función de la derecha es anticoerciva. En tal caso $\dot{V}$ es mejor o igual que una función anticoerciva, luego también es anticoerciva. Obtenemos pues que para $\gamma \in]0, 2/3[$ la función V es guía y coerciva. Por el Teorema 4.22 obtenemos que las soluciones de (13) para las constantes y funciones escogidas están acotadas en el futuro. △

Ejemplo 4.31 (Ecuación de Liénard): Otra ecuación de segundo orden bien conocida es

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \tag{14}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$ y $g, f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ son localmente lipschitzianas. La ecuación es equivalente al sistema plano de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 - F(x_1); \\ x_2' &= -g(x_1); \end{cases} \tag{15}$$

donde F es una primitiva de f con $F(0) = 0$. △