



Modelos matemáticos 2

Apuntes

Andrés Herrera Poyatos
Universidad de Granada
andreshp9@gmail.com



1. Introducción

En esta asignatura se resuelven problemas varacionales que aparecen tanto en la física como en la biología. El objetivo principal será desarrollar las herramientas que nos permitan abordar estos problemas. En este proceso aparecerán múltiples ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas de contorno.

En primer lugar vamos a ver un ejemplo de este tipo de problemas que motive el desarrollo de la teoría.

EJEMPLO 1.1 (Problema de la cuerda mínima): Sean (x_0, y_0) y (x_1, y_1) dos puntos del plano. Consideramos todas las cuerdas que van desde (x_0, y_0) a (x_1, y_1) y nos preguntamos cuál es la cuerda de longitud mínima. La respuesta a este problema debería ser el segmento que une ambos puntos. No obstante, la demostración de este hecho no es tan evidente. Una cuerda es una curva continua que tiene su origen en (x_0, y_0) y termina en (x_1, y_1) . En este momento nos centramos en aquellas curvas que son la gráfica de una función con el objetivo de simplificar el problema. Parece evidente que el resto de curvas no van a tener longitud mínima aunque no disponemos una prueba de este hecho todavía. Además, exigimos que las curvas sean de clase uno. En resumen, consideramos solamente el siguiente conjunto de curvas

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

Recordemos que la longitud de una curva $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1])$ viene dada por $\int_{x_0}^{x_1} |y'(x)| dx$. Por tanto, buscamos aquel elemento $\bar{y} \in \mathcal{D}$ que minimice el funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Esta cuestión se denomina *formulación variacional del problema*. Supongamos que existe $\bar{y} \in \mathcal{D}$ mínimo de \mathcal{F} y busquemos alguna condición necesaria que debe verificar tal mínimo. Nótese que para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1]) = \{\phi \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : \phi(x_0) = 0 = \phi(x_1)\}$ y $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\bar{y} + s\phi \in \mathcal{D}$ y, por tanto, $\mathcal{F}[\bar{y}] \leq \mathcal{F}[\bar{y} + s\phi]$. Esto es, 0 es el mínimo global de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \mathcal{F}[\bar{y} + s\phi]$. Esta función es derivable gracias a la regla de Leibniz y su derivada viene dada por

$$f'(s) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\phi'(x)(\bar{y}'(x) + s\phi'(x))}{\sqrt{1 + (\bar{y}'(x) + s\phi'(x))^2}} dx.$$

Puesto que $f'(0) = 0$, hemos obtenido que \bar{y} verifica

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\phi'(x)\bar{y}'(x)}{\sqrt{1 + \bar{y}'(x)^2}} dx. \quad (1)$$

Supongamos que $\bar{y} \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$. En tal caso podemos integrar (1) por partes con $u = \bar{y}' / \sqrt{1 + \bar{y}'(x)^2}$ y $dv = \phi'(x)$ para obtener

$$0 = - \int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{y}'(x)}{\sqrt{1 + \bar{y}'(x)^2}} dx. \quad (2)$$

A la búsqueda de aquellas funciones $\bar{y} \in \mathcal{D}$ que verifican (2) para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$ se le llama *formulación débil del problema*. En la Sección 2 veremos una versión básica del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones, que aplicamos a (2) para obtener que \bar{y} verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{y}'(x)}{\sqrt{1 + \bar{y}'(x)^2}} = 0. \quad (3)$$

A esta ecuación diferencial se le denomina ecuación de Euler-Lagrange. Recordemos que además tenemos que $\bar{y}(x_0) = 0 = \bar{y}(x_1)$ y, por tanto, la función \bar{y} es solución de un problema de contorno, que se denomina *formulación clásica del problema*. En este caso el problema de contorno tiene fácil solución. En efecto, desarrollando (7) obtenemos que

$$\frac{\bar{y}''(x)}{\sqrt{1 + \bar{y}'(x)^2}} = 0,$$

esto es, $\bar{y}'' = 0$ y, por tanto, $\bar{y}(x) = ax + b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Las condiciones de contorno implican que \bar{y} debe ser el segmento que une (x_0, y_0) con (x_1, y_1) . En resumen, si la solución fuese de clase 2, entonces es el segmento que une ambos puntos. \triangle

En lo que sigue demostraremos que bajo determinadas condiciones las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange siempre son soluciones de nuestro problema variacional e intentaremos rebajar cada una de las hipótesis que se han asumido a lo largo del ejemplo.

2. Problemas varacionales

Definición 2.1. Sea $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio. Consideramos $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y un conjunto no vacío

$$\mathcal{D} \subset \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega\}$$

que puede ser de una de las siguientes formas:

- a) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega\};$
- b) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0\}$ para cierto valor y_0 ;
- c) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_1) = y_1\}$ para cierto valor y_1 ;
- d) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ para ciertos valores y_0 e y_1 .

Definimos el funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Un problema variacional consiste en encontrar el mínimo o máximo de \mathcal{F} en caso de que exista.

En lo que sigue denotaremos x, y y p a las tres variables de F . También denotaremos F_x, F_y y F_p a sus primeras derivadas parciales respectivamente.

Vamos a reproducir en este contexto general el argumento que se desarrolló en el Ejemplo 1.1. Como se avisó en este ejemplo necesitaremos utilizar el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones.

Teorema 2.1 (Versión básica del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones). *Sea $f \in \mathcal{C}([x_0, x_1])$. Entonces, $f = 0$ si, y solo si, para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$ se tiene*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x) dx = 0.$$

Demostración. Es claro que si $f = 0$ entonces se verifica la segunda afirmación. Veamos que el recíproco también es cierto. Razonamos por el contrarrecíproco. Supongamos que existe $x_2 \in [x_0, x_1]$ tal que

$|f(x_2)| > 0$. Como f es continua, existe un intervalo abierto $J =]a, b[\subset]x_0, x_1[$ tal que $f(x)f(x_2) > 0$ para todo $x \in J$. Definimos la función $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$

$$\phi(x) = \begin{cases} \cos\left(\pi \frac{x-(a+b)/2}{b-a}\right) + 1 & \text{si } x \in J; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nótese que $\phi(x) > 0$ para todo $x \in J$. Por tanto, obtenemos que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x) dx \neq 0,$$

como se quería. \square

Teorema 2.2. *Consideremos un problema variacional. Si $\bar{y} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$ es un mínimo de \mathcal{F} , entonces \bar{y} cumple la ecuación diferencial*

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

A esta ecuación se le denomina ecuación de Euler-Lagrange y por comodidad la escribiremos como

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_p = 0.$$

Demostración. Supongamos que $\bar{y} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$ es un mínimo de \mathcal{F} . Consideremos $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$. Utilizando la compacidad de la imagen de \bar{y} y que Ω es abierto es sencillo ver que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{y} + s\phi \in \mathcal{D}$ para todo $s \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$. Puesto que \bar{y} es mínimo global de \mathcal{F} , obtenemos que $\mathcal{F}[\bar{y}] \leq \mathcal{F}[\bar{y} + s\phi]$ para todo $s \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$. Esto es, 0 es el mínimo global de la función $f :]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \mathcal{F}[\bar{y} + s\phi]$. Escribimos por comodidad $\#(x, s) = (x, \bar{y}(x) + s\phi(x), \bar{y}'(x) + s\phi'(x))$. La función f es derivable gracias a la regla de Leibniz y su derivada se corresponde con

$$f'(s) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s} F(\#(x, s)) dx = \int_{x_0}^{x_1} F_y(\#(x, s))\phi(x) + F_p(\#(x, s))\phi'(x) dx.$$

Puesto que $f'(0) = 0$, hemos obtenido que \bar{y} verifica

$$0 = f'(0) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(\#(x, 0))\phi(x) + \int_{x_0}^{x_1} F_p(\#(x, 0))\phi'(x) dx. \quad (4)$$

Por hipótesis $\bar{y} \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$ y, por tanto, podemos integrar el segundo sumando de (4) por partes con $u = F_p(\#(x, 0))$ y $dv = \phi'(x)$ para obtener

$$0 = [F_p(\#(x, 0))\phi(x)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} F_p(\#(x, 0)) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} F_p(\#(x, 0)) dx. \quad (5)$$

En vista de (5) podemos escribir (4) como sigue

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y(\#(x, 0)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(\#(x, 0)) \right) \phi(x) dx. \quad (6)$$

Aplicamos el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones a (6) para obtener que \bar{y} verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$0 = F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \quad (7)$$

como se quería. \square

En este punto estudiamos cada una de las tres posibles definiciones del conjunto \mathcal{D} por separado con el fin de comprobar que los mínimos de \mathcal{F} también verifican dos condiciones de contorno. En efecto, tenemos los siguientes casos:

- a) El conjunto \mathcal{D} es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ para ciertos valores y_0 e y_1 . En tal caso las condiciones de contorno son $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$.
- b) \mathcal{D} es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega\}$. En tal caso podemos repetir el razonamiento realizado en la demostración del Teorema 2.2 para $\phi \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1])$ obteniendo

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y(\#(x, 0)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(\#(x, 0)) \right) \phi(x) dx + [F_p(\#(x, 0))\phi(x)]_{x_0}^{x_1}. \quad (8)$$

No obstante, ya sabemos que \bar{y} verifica la ecuación de Euler-Lagrange y, por tanto, (8) se puede simplificar para obtener

$$0 = F_p(x_1, \bar{y}(x_1), \bar{y}'(x_1))\phi(x_1) - F_p(x_0, \bar{y}(x_0), \bar{y}'(x_0))\phi(x_0). \quad (9)$$

Puesto que (9) es válida para cualquier ϕ podemos escoger ϕ verificando $\phi(x_0) = 0$ y $\phi(x_1) = 1$, obteniendo que $F_p(x_1, \bar{y}(x_1), \bar{y}'(x_1)) = 0$. Análogamente deducimos que $F_p(x_0, \bar{y}(x_0), \bar{y}'(x_0)) = 0$.

- c) \mathcal{D} es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0\}$ para cierto valor y_0 . Razonamos de forma análoga a b) para obtener las condiciones de contorno $y(x_0) = y_0$ y $F_p(x_1, \bar{y}(x_1), \bar{y}'(x_1)) = 0$.
- d) \mathcal{D} es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_1) = y_1\}$ para cierto valor y_1 . Razonamos de forma análoga a b) para obtener las condiciones de contorno $y(x_1) = y_1$ y $F_p(x_0, \bar{y}(x_0), \bar{y}'(x_0)) = 0$.

Definición 2.2. En el contexto actual, el problema de contorno que hemos obtenido se denomina problema de contorno del problema variacional. A las soluciones del problema de contorno se les llaman extremales.

Cuando pretendamos resolver un problema variacional el primer paso será calcular las extremales asociadas. La ecuación de Euler-Lagrange no siempre es sencilla de resolver. No obstante, en la práctica la función F puede no depender de alguna de las variables x , y o p . En tal caso la resolución de la ecuación de Euler-Lagrange se simplifica enormemente como mostramos a continuación.

- a) La función F no depende de x . En tal caso tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} (F(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \bar{y}(x)F_p(\bar{y}(x), \bar{y}'(x))) = \bar{y} \left(F_y(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \right) = 0.$$

Consecuentemente, los extremales son aquellas soluciones de las ecuaciones

$$F(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = \bar{y}(x)F_p(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + k \quad (10)$$

para $k \in \mathbb{R}$ arbitrario que verifican las condiciones de contorno. Estas ecuaciones suelen ser más sencillas de resolver ya que solo intervienen F y F_p .

- b) La función F no depende de y . En tal caso, la ecuación de Euler-Lagrange se simplifica enormemente, obteniendo que los extremales son aquellas soluciones de las ecuaciones

$$F_p(x, \bar{y}'(x)) = k \quad (11)$$

para $k \in \mathbb{R}$ arbitrario que verifican las condiciones de contorno. Este es el caso del Ejemplo 1.1.

3. Problemas de contorno

3.1. Tipos de problemas de contorno

EJEMPLO 3.1 (Problema de la viga):

△

EJEMPLO 3.2 (Formulación variacional del problema de la viga):

△

3.2. Forma autoadjunta

Aunque el problema de la viga admita una formulación variacional, no todo problema de contorno puede verse como la ecuación de Euler-Lagrange de un PV. En esta sección nos centramos en EDOs de segundo orden, que sí provienen de un PV. Consideramos tres funciones continuas $a, b, c : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ y la EDO

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x). \quad (12)$$

Las EDOs de segundo orden permiten una formulación más simple como mostramos a continuación. Fijamos $x_0 \in [x_0, x_1]$. Definimos $P(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(s) ds\right)$ para todo $x \in [x_0, x_1]$. Nótese que $P > 0$. Por tanto, multiplicando (12) por $P(x)$ obtenemos una ecuación equivalente que responde a

$$c(x)P(x) = P(x)y''(x) + P'(x)y'(x) + P(x)b(x)y(x) = (P(x)y'(x))' + P(x)b(x)y(x).$$

Denotando $R(x) = c(x)P(x)$ y $Q(x) = P(x)b(x)$, hemos obtenido que (12) es equivalente a la ecuación

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = R(x), \quad (13)$$

que se denomina *forma autoadjunta* o *forma de Sturm* de la EDO de segundo orden. La forma autoadjunta nos permite trabajar de forma más cómoda con la ecuación diferencial, por lo que será habitualmente utilizada de aquí en adelante.

Proposición 3.3. PV

Teorema 3.4. Sean P, Q y R son funciones continuas en $[x_0, x_1]$ con $P \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1])$ y $P > 0$. Si $Q < 0$, entonces la función $F(x, y, p) = Pp^2/2 - Qy^2/2 + R$ (está bien?) es convexa. Además, bajo estas hipótesis, el problema de contorno con condiciones

$$\begin{cases} a_0y(x) + b_0y'(x) = c_0; \\ a_1y(x) + b_1y'(x) = c_1; \end{cases} \quad (14)$$

Entonces existe una extremal, que es el único mínimo de \mathcal{F} .

Demostración. Es fácil ver que la función F es convexa. Utilizamos el Teorema 10 para reducir el problema de contorno a uno de tipo Dirichlet. En este contexto, por la alternativa de Fredholm, basta corroborar que el sistema homogéneo tiene solamente como solución a la trivial. Por reducción al absurdo, supongamos que el problema tiene una solución y distinta de la trivial. Nótese que $y'(x_0) \neq 0$. Suponemos que $y'(x_0) > 0$. La función tendrá un máximo en un punto x_2 , con $y(x_2) > 0$. Este punto debe ser interior y, por tanto, $y'(x_2) = 0$ e $y''(x_2) < 0$. No obstante, en la ecuación obtenemos que $P(x_2)y''(x_2) + P'(x_2)y'(x_2) + Q(x_2)y(x_2) = 0$. Consecuentemente, $y''(x_2) = -Q(x_2)y(x_2)/P(x_2) > 0$, contradicción. □

EJEMPLO 3.5:

△

EJEMPLO 3.6: Resultado análogo para condiciones Newmann no homogéneas ($y'(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1$). \triangle

EJEMPLO 3.7: \triangle

$$(Py')' + Qy = R \quad (15)$$

$$(Py')' + Qy = 0 \quad (16)$$

Consideramos las condiciones de contorno separadas

$$\begin{cases} a_0y(x_0) + b_0y'(x_0) = 0; \\ a_1y(x_1) + b_1y'(x_1) = 0; \end{cases} \quad (17)$$

donde $|a_0| + |b_0| > 0$, y las condiciones periódicas

$$\begin{cases} y(x_0) = y(x_1); \\ y'(x_0) = y'(x_1). \end{cases} \quad (18)$$

Ya sabemos resolver los problemas homogéneos. A partir de las soluciones de los problemas homogéneos nos planteamos resolver los problemas completos. Esta resolución se enuncia en el siguiente resultado.

Teorema 3.8 (Alternativa de Fredholm). *Se cumple una de estas alternativas (para (17) o (18)):*

- a) *El problema homogéneo tiene como única solución a $y = 0$, en cuyo caso el problema completo tiene una única solución.*
- b) *El problema homogéneo tiene más de una solución (un espacio vectorial de dimensión 1 o 2), en cuyo caso el problema completo tiene solución si, y solo si, para cualquier solución y del problema homogéneo*

$$\int_{x_0}^{x_1} R(s)y(s) \, ds = 0,$$

en cuyo caso cada solución del problema homogéneo determina una única solución del problema completo.

Demostración. Vamos a escribir las soluciones de (EC). Sea $\{\phi_1, \phi_2\}$ un SFS de (EH). Entonces, una solución y de (EC) es de la forma

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + A\phi_1 + B\phi_2$$

para ciertos $A, B \in \mathbb{R}$ e y_p es una solución particular de (EC), que se puede calcular mediante la fórmula de variación de las constantes, esto es,

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{R(s)}{W(x_0)P(x_0)} ((\phi_2(x)\phi_1(s) - \phi_2(s)\phi_1(x)) \, ds)$$

En este punto estudiamos el resultado para distintos problemas de contorno. Nosotros vamos a ver la demostración para condiciones tipo Dirichlet, esto es, las condiciones son $y(x_0) = 0 = y(x_1)$. Puedo

suponer que $\phi_1(x_0) = 1$, $\phi_1'(x_0) = 0$, $\phi_2(x_0) = 0$ y $\phi_2'(x_0) = 1$. Evaluando y en las condiciones de contorno obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi_2(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

donde $\beta = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{R(s)}{W(x_0)P(x_0)} (\phi_2(x_1)\phi_1(s) - \phi_2(s) - \phi_1(x_1)) ds$. Estudiando las soluciones del sistema anterior obtenemos fácilmente el resultado. En efecto, el sistema homogéneo tiene única solución si, y solo si $\phi_2(x_1) \neq 0$. En tal caso, el sistema completo tiene solución única. Si $\phi_2(x_1) = 0$, entonces el sistema previo tendrá solución si, y solo si, $\beta = 0$. Como $\phi_2(x_1) = 0$ tenemos que $\phi_1(x_1) \neq 0$ gracias a $W(x_1) \neq 0$. Por tanto, la existencia de solución equivale

$$\int_{x_0}^{x_1} R(s)\phi_2(s) ds = 0.$$

Nótese que las soluciones de la homogénea son de la forma $B\phi_2$. □

Podemos demostrar en este punto el Teorema 9

4. Problemas variacionales generalizados

4.0.1. Motivación: Existencia de geodésicas

El problema de las geodésicas consiste en, dada una superficie y dos puntos suyos, buscar una curva que conecte los dos puntos y que tenga la mínima longitud posible. Nosotros hemos resuelto parcialmente este problema en el plano, obteniendo que la solución era el segmento que une los dos puntos. Las geodésicas se plantean mediante un PV que dependen de varias funciones con restricciones. Por ejemplo, podemos considerar la esfera, en cuyo caso la solución es un segmento de círculo. La superficie se escribirá de la forma $S = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ y el funcional a minimizar se corresponde con

$$L[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y_1'(x)^2 + y_2'(x)^2 + y_3'(x)^2} dx$$

para cualquier $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1], \mathbb{R}^3)$ tal que $\phi(y) = 0$.

Como vemos el funcional a minimizar depende de varias funciones. Esto lo formalizamos considerando $n \in \mathbb{N}$ y $F : [x_0, x_1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que el funcional a minimizar viene dado por

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx.$$

4.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En este punto extendemos las ecuaciones de Euler-Lagrange al problema de Lagrange.

Teorema 4.1. *En el contexto actual, si $\bar{y} \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$ es un mínimo de \mathcal{F} , entonces verifica el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales*

$$\begin{cases} F_{y_1} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1} &= 0; \\ &\vdots \\ F_{y_n} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_n} &= 0; \end{cases}$$

que se denomina ecuación de Euler-Lagrange.

4.2. Restricciones de tipo algebraico

En este punto añadiremos ligaduras de tipo algebraico $\varphi_j(y_1, \dots, y_n) = 0$, donde $j \in \{1, \dots, m\}$ y $m < n$. Definimos

$$\mathcal{D}_\varphi = \{y_i \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1}, \text{Im}(y, y') \subset \Omega, \varphi_j(y_1, \dots, y_n) = 0\}.$$

El problema variacional a resolver consiste en hallar el mínimo de $\mathcal{F}(y)$ en \mathcal{D}_φ . Amén de una posible sustitución (despejar alguna $y_i(x)$ en función de las otras), vamos a generalizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

Definimos la función

$$F^* = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(y_1, \dots, y_n)$$

y el funcional $\mathcal{F}^* = \int F$.

El siguiente resultado nos proporciona una propiedad e los mínimos de \mathcal{F} .

Teorema 4.2. *Si \bar{y} es un mínimo de \mathcal{F} en \mathcal{D}_φ , entonces existen m funciones $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$, denominadas multiplicadores de Lagrange, tales que en \bar{y} se cumplen*

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{y_1}^* - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_{p_1}^* = 0; \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{y_n}^* - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_{p_n}^* = 0; \\ \varphi_1(y_1, \dots, y_n) = 0; \\ \vdots \\ \varphi_m(y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases}$$

A las soluciones de estas ecuaciones se les llaman *extremales* de \mathcal{F}^* .

Demostración. Véase [Elsqoltz]. □

4.3. Restricciones de tipo algebraico-diferencial

Abordamos el problema generalizado incluyendo restricciones sobre las derivadas $\varphi_j(y_1, \dots, y_n) = 0$, para $j \in \{1, \dots, m\}$ y $m < n$. Esto es, consideramos

$$\mathcal{D}'_\varphi = \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1}, \text{Im}(y, y') \subset \Omega, \varphi_j(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0\}.$$

Proposición 4.3. *Sea $\bar{y} \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{D}'_\varphi$ mínimo de \mathcal{F} en \mathcal{D}'_φ . Existen m funciones $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$,*

denominadas multiplicadores de Lagrange, tales que en \bar{y} se cumplen

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{y_1}^* - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_{p_1}^* = 0; \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{y_n}^* - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_{p_n}^* = 0; \\ \varphi_1(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0; \\ \vdots \\ \varphi_1(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0. \end{cases}$$

A las soluciones de estas ecuaciones se les llaman extremales de \mathcal{F}^* .

4.4. Restricciones de tipo integral

En este apartado consideramos restricciones de tipo integral.

$$\mathcal{D}_G = \{y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]) : y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1}, \text{Im}(y, y') \subset \Omega, \int_{x_0}^{x_1} G_j(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = L_j \forall j \in \{1, \dots, m\},$$

donde $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.4 (Ligaduras integrales). Sea $\bar{y} \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{D}_G$ mínimo de \mathcal{F} en \mathcal{D}_G . Existen m constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, denominadas multiplicadores de Lagrange, tales que, para $F^* = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$, en \bar{y} se cumplen las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{y_1}^* - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_{p_1}^* = 0; \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{y_n}^* - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_{p_n}^* = 0; \\ \int_{x_0}^{x_1} G_1(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = L_1; \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x_1} G_m(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = L_m. \end{cases}$$

A las soluciones de estas ecuaciones se les llaman extremales de \mathcal{F}^* .

Demostración. Defino el funcional $\tilde{F}[y, z_1, \dots, z_m] = \mathcal{F}[y]$, que depende de $n + m$ funciones, y lo considero sobre el conjunto

$$\mathcal{D}'_\varphi = \{y \in \mathcal{D}, z_j \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1]), z_j(x_0) = 0, z_j(x_1) = L_j, \varphi_j = G_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) - z'_j = 0\}.$$

Nótese que estas restricciones sobre z_j equivalen a

$$L_j = z_j(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} G_j(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n).$$

Aplicamos la Proposición 4.3, obteniendo para $\tilde{\mathcal{F}}^* = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)(G_j - z'_j)$ las ecuaciones

$$\tilde{\mathcal{F}}_{y_1}^* - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathcal{F}}_{p_1}^*$$

para $i = 1, \dots, n$ y las ecuaciones

$$0 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathcal{F}}_{z_j}^* = 0$$

para $j = 1, \dots, m$. Estas últimas ecuaciones equivalen a $\lambda'_j(x) = 0$, esto es, las funciones λ_j son constantes. La demostración finaliza al comprobar que las ecuaciones obtenidas son las mismas que las del enunciado. \square

EJEMPLO 4.5 (Problemas isoperimétricos): Se trata de maximizar el área que pueda encerrar una cuerda de longitud prefijada. Modelizamos la cuerda como una curva $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase 1, que escribimos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, verificando $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$. La longitud de la curva viene dada por $\ell(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$. Por el teorema de Stokes obtenemos que

$$\text{Area}(\alpha) = \int_{\Omega} 1 dx = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Buscamos maximizar el funcional

$$\mathcal{F}[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{2} dt$$

sobre

$$\mathcal{D}_G = \{x, y \in C^1([0, 1]) : x(0) = x(1), y(0) = y(1), \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = L\}.$$

Definimos $F(x, y, p, q) = (xq - yp)/2$ y $G(x, y, p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$. Aplicamos el Teorema 4.4, obteniendo las ecuaciones

$$\begin{cases} -\frac{x'}{2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{2} + \lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0; \\ -\frac{y'}{2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{2} + \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0; \end{cases}$$

que se simplifican en

$$\begin{cases} x - \lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = x_0; \\ y - \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = y_0. \end{cases}$$

Veamos que la solución es una circunferencia de centro (x_0, y_0) . En efecto,

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = \left(\lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2 + \left(\lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2 = \lambda^2$$

y el radio es el multiplicador de Lagrange λ . Por tanto, de tener solución el problema y ser ésta de clase 2, entonces es la circunferencia. En el futuro probaremos que efectivamente se verifican estos hechos con el Teorema de Lax-Milgram. \triangle

EJEMPLO 4.6 (Problema de la Catenaria): Fijada una longitud $L > 1$ de ante mano, buscamos la curva y de longitud L que encontramos al fijar los extremos de una cuerda en los puntos $(0, h)$ y $(1, h)$ y someterla a la acción de la gravedad. Tras plantear el problema mediante razonamientos físicos obtenemos que hay que minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2},$$

que mide la energía potencial de la cuerda, y está definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D}_G = \{y \in C^1([0, 1]) : y(0) = y(1) = h, \int_0^1 \sqrt{1 + y'(t)^2} dt = L > 1\}.$$

Aplicamos los multiplicadores de Lagrange para restricciones de tipo integral. Tenemos $F^* = y\sqrt{1+p^2} + \lambda\sqrt{1+p^2}$. La ecuación de Euler-Lagrange equivale a las ecuaciones

$$C = F^* - y'F_p^* = (y + \lambda)\sqrt{1+p^2} - p(y + \lambda)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

para $C > 0$. Esta ecuación se simplifica en

$$y = C\sqrt{1+(y')^2} - \lambda.$$

Para resolver esta ecuación, en primer lugar, buscamos las posibles soluciones constantes. Nótese que la única solución constante es $y = C - \lambda$. No obstante, estas soluciones están en \mathcal{D}_G . Para encontrar las soluciones no constantes realizamos el cambio de variable $y' = \sinh(t)$. Obtenemos la ecuación

$$y = C \cosh(t) - \lambda.$$

Sea $x = x(y)$ una función que depende de y . Tenemos que x verifica la ecuación

$$x = \int \frac{1}{y'(x(y))} dy = \int \frac{C \sinh(t)}{\sinh(t)} dt = Ct + K.$$

Tenemos que $t = (x - k)/C$ y, por tanto, $y = C \cosh((x - k)/C) - \lambda$. NO ENTIENDO NADA DE ESTOS CAMBIOS...

Ahora, fijada $y = C \cosh((x - k)/C) - \lambda$, imponemos las condiciones de Dirichlet y la restricción integral. De las primeras condiciones obtenemos que $\cosh(-k/C) = \cosh((1 - k)/C)$. Esto se produce si, y solo si, $|k/C| = |(1 - k)/C|$, de donde deducimos que $k = 1/2$. Además,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{2x-1}{2C}\right)^2} dx = \int_0^1 \cosh\left(\frac{2x-1}{2C}\right) dx = 2C \sinh\left(\frac{1}{2C}\right).$$

Esta ecuación en función de C tiene una única solución. Por tanto, solo hay una extremal válida para el problema que viene dada por $y = C \cosh((x - 0,5)/C) - \lambda$. De la condición $y(0) = h$ obtenemos el valor de λ . \triangle

5. Problemas de Sturm-Liouville

En esta sección relacionamos los problemas de Sturm-Liouville con los PV con restricciones integrales. En primer lugar vemos un ejemplo que motiva el estudio de los problemas de Sturm-Liouville.

EJEMPLO 5.1: Sea $L > 0$. Busca los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \\ y(0) = 0; \\ y(L) = 0; \end{cases} \quad (19)$$

tiene soluciones no nulas y di cuáles son esas soluciones.

Procedemos como es habitual. El polinomio de la EDO es $P(\mu) = \mu^2 + \lambda$. Distinguimos tres casos.

- a) El número λ es negativo. Entonces las raíces de P son $\mu_+ = \sqrt{-\lambda}$ y $\mu_- = -\sqrt{-\lambda}$, que son reales. Por tanto, las soluciones de la EDO vienen dadas por

$$y(x) = Ae^{\mu_+ x} + Be^{\mu_- x},$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$. Imponemos las condiciones de contorno a la solución general. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ Ae^{\mu_+ L} + Be^{\mu_- L} = 0; \end{cases} \quad (20)$$

que tiene solución única.

- b) El número λ es 0. En tal caso, las soluciones son las rectas. Al imponer las condiciones iniciales obtenemos que la única solución es $y = 0$.
- c) El número λ es positivo. En tal caso las raíces de P son $\mu_+ = i\sqrt{\lambda}$ y $\mu_- = -i\sqrt{\lambda}$. Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$. Imponemos las condiciones de contorno a la solución general. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A = 0; \\ A \cos(\sqrt{\lambda}L) + B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0; \end{cases} \quad (21)$$

que tiene solución única si, y solo si, $\sin(\sqrt{\lambda}L) \neq 0$, lo que sucede si, y solo si, $\lambda \neq (n\pi/L)^2$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, la solución es $A = 0$ y $B = 0$. Si por el contrario, $\lambda = (n\pi/L)^2$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces obtenemos una recta de soluciones, que son los múltiplos de

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad \triangle$$

Definición 5.1. Un problema de Sturm-Liouville consiste en encontrar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema de contorno

$$\begin{cases} (Py')' + (Q + \lambda S)y = 0; \\ a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) = 0; \\ a_1 y(x_1) + b_1 y'(x_1) = 0; \end{cases} \quad (\text{SL})$$

donde P, Q, S son continuas, P es de clase 1 y $P, S > 0$. A los valores λ los llamamos valores propios asociados al problema de Sturm-Liouville y a las soluciones no nulas de (SL) funciones propias.

Vamos a utilizar el Teorema de Sturm-Liouville, que no demostraremos por la dificultad de la demostración.

Las soluciones del problema de Sturm-Liouville son elementos del espacio de Hilbert

$$L_S^2(x_0, x_1) = \left\{ y \in L(x_0, x_1) : \int_{x_0}^{x_1} y^2(x) S(x) dx < +\infty \right\},$$

cuyo producto escalar es

$$\langle y, z \rangle = \int_{x_0}^{x_1} y(x) z(x) S(x) dx.$$

Teorema 5.2 (Sturm-Liouville). *Los valores propios del problema de Sturm-Liouville forman una sucesión $\{\lambda_n\}$ creciente que diverge positivamente. Las funciones propias normalizadas quedan determinadas de forma única salvo el signo y verifican:*

- a) *Tienen exactamente $n - 1$ ceros en $[x_0, x_1]$.*
- b) *Son ortogonales dos a dos.*
- c) *Cualquier otra función en $L_S^2(x_0, x_1)$ admite un desarrollo en funciones propias, eso es,*

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} \langle y, y_n \rangle y_n(x).$$

Sea $\mathcal{D} = \{y \in L^2 : y \in \mathcal{C}^2\}$ y $L : \mathcal{D} \rightarrow L_S^2$ dado por $L[y] = ((Py')' + Qy)/S$. Tenemos que

$$\langle y, L(z) \rangle = \int_{x_0}^{x_1} y((Pz')' + Qz) dx = - \int_{x_0}^{x_1} Py'z' + \int_{x_0}^{x_1} yQz dx = \langle Ly, z \rangle.$$

Consecuentemente, L es un funcional autoadjunto. No sabemos de momento si es continuo.

5.1. Relación con PVs

Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} (P(x)y'(x)^2 + Q(x)y(x)^2) dx.$$

Buscamos su mínimo en $y \in \mathcal{C}^2$ con $y(x_0) = 0 = y(x_1)$ con restricción de tipo $\int_{x_0}^{x_1} y(x)^2 S(x) dx = 1$.

Tenemos que $F(x, y, p) = Pp^2 - Qy^2$. Utilizando el Teorema 4.4 encontramos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $F^*(x, y, p) = Pp^2 - Qy^2 + \lambda y^2 S$ tal que las soluciones del problema verifican las ecuaciones

$$0 = \mathcal{F}_y^* - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_p^* = -2[(Py')' + (Q + \lambda S)y],$$

y, por tanto, las extremales del problema son soluciones de un problema de Sturm-Liouville. El objetivo es buscar los valores propios y las funciones propias del problema.

Teorema 5.3. *En el contexto actual, sean (λ_n, y_n) los valores y funciones propios del problema de Sturm-Liouville asociado al funcional*

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} P(x)(y'(x))^2 - Q(x)y(x)^2 dx.$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, el mínimo del funcional \mathcal{F} en el conjunto

$$\mathcal{D}_{n-1} = \{y \in \mathcal{C}^2(x_0, x_1) \text{ con c.c. separadas y restricciones de tipo integral} \\ \int_{x_0}^{x_1} y(x)^2 S(x) dx = 1, \int_{x_0}^{x_1} y_1(x)y(x)S(x) dx = 0, \dots, \int_{x_0}^{x_1} y_{n-1}(x)y(x)S(x) dx = 0\}$$

es y_n y verifica $\mathcal{F}[y_n] = \lambda_n$.

EJEMPLO 5.4: Calcula el mínimo de

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^e x(y'(x))^2 dx$$

en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in \mathcal{C}^1(1, e) : y(1) = 0 = y(e), \int_{x_0}^{x_1} y(x)^2/x dx = 1, \int_{x_0}^{x_1} \sin(\pi \log(x)) y(x) S(x) dx = 0 \right\}.$$

△

6. Funcionales de funciones que dependen de varias variables

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto conexo y $\gamma : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea además $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D = \Omega \times W \subset \mathbb{R}^5$, $F(x, u, p, q)$. Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, u(x), u_{x_1}(x), u_{x_2}(x)) dx$$

definido en $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{C}^2(\Omega) : u(x) = \gamma(x) \forall x \in \partial\Omega[\text{restricciones del conjunto } D]\}$. Podemos adaptar el Teorema 2.2 en este contexto para obtener una nueva ecuación de Euler-Lagrange

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_p - \frac{\partial}{\partial x_2} F_q = 0. \quad (22)$$

EJEMPLO 6.1 (La membrana vibrante): Se trata de modelar la posición de una membrana (película elástica homogénea) sometida a fuerzas verticales. EN equilibrio, suponemos que $(x, \varphi(x))$ describe su posición, donde $\varphi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi \in \mathcal{C}^2$. Supongamos que solo hay desplazamientos verticales y llamo $(x, u(t, x))$ a la posición en tiempo t , con $u(t, x) = \varphi(x)$. Por el *principio de Halminton* los físicos obtienen que la solución al problema minimiza la energía el sistema, esto es, minimiza el siguiente funcional

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\Omega} (E_k[u] - E_p[u]) dx \right) dt,$$

donde $E_k[u] = \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)^2/2$ es la energía cinética mientras que $E_p[u]$ es la energía potencial en el punto x . Tras desarrollar las expresiones físicas que aparecen en el funcional obtenemos un modelo muy complejo que no merece la pena estudiar a mi criterio. Tras varias simplificaciones de este funcional obtenemos

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma(\nabla u)^2 + \alpha u^2 - 2f(x)u) dx$$

en $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ en } \Omega\} = \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, donde σ y α son constantes y f es una función en x . Escribiendo la ecuación de Euler - Lagrange asociada a este PV obtenemos la denominada ecuación de la membrana

$$-\text{div}(\sigma(x)\nabla u) = -\alpha(x)u + f,$$

donde $\text{div}(G) = \frac{\partial}{\partial x_1} G_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} G_n$.

[AÑADIR DEL PAPEL DEL AMIGO JUANJO].

△

6.1. Resolución de la ecuación de ondas

En el Ejemplo 6.1 hemos obtenido la ecuación de Ondas como ecuación de Euler-Lagrange de un PV. En esta sección vamos a resolver la ecuación de ondas en casos particulares.

6.1.1. Caso 1

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}; \\ u(0, x) = u_0(x); \\ u_t(0, x) = v_0(x). \end{cases} \quad (23)$$

Hacemos el cambio de variable $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$. Consideramos la función $U(\xi, \eta) = u(t, x) = u((\xi - \eta)/(2c), (\xi + \eta)/2)$. Por la regla de la cadena obtenemos que

$$u_{tt} = c^2 U_{\xi\xi} + c^2 U_{\eta\eta} - 2c^2 U_{\xi\eta};$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + 2U_{\xi\eta};$$

Por tanto, de (23) deducimos que $U_{\xi\eta} = 0$. Esto equivale a que $U(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta)$ para ciertas funciones g y h de clase 2. Por tanto, obtenemos que $u(t, x) = g(x + ct) + h(x - ct)$. Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos $g(x) + h(x) = u_0(x)$ y $cg'(x) - ch'(x) = v_0(x)$. En particular, $g'(x) + h'(x) = u'_0(x)$, de donde deducimos que

$$\begin{cases} g'(x) = (v_0(x) + cu'_0(x))/(2c); \\ h'(x) = (cu'_0(x) - v_0(x))/(2c). \end{cases}$$

Integrando obtenemos una expresión para g y h

$$\begin{cases} g(x) = u_0(x)/2 + \int_0^x v_0(x)/(2c) dx + K_1; \\ h(x) = u_0(x)/2 - \int_0^x v_0(x)/(2c) dx + K_2; \end{cases}$$

Sumando y comprobando que las constantes se anulan obtenemos la fórmula de D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (24)$$

6.1.2. Caso 2

Sea $c > 0$ la velocidad de la onda.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0, x \in [0, L]; \\ u(0, x) = u_0(x); \\ u_t(0, x) = v_0(x); \\ u(t, L) = u(t, 0) = 0 & \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Añadimos además las siguientes condiciones de compatibilidad

$$\begin{cases} u_0(0) = u_0(L) = 0; \\ u_0''(0) = u_0''(L) = 0; \\ v_0(0) = v_0(L) = 0. \end{cases}$$

Buscamos soluciones no nulas de la forma $u(t, x) = T(t)W(x)$. De existir una solución de esta forma se verificará

$$u_{tt} = T''(t)W(x) \text{ y } u_{xx} = T(t)W''(x).$$

Puesto que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, suponiendo que T y W no se anulan obtenemos que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{W''(x)}{W(x)}.$$

Por tanto, las funciones T''/T y W''/W son iguales a una constante λ . Esto es, se verifican las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0; \\ W''(x) + \frac{\lambda}{c^2} W(x) = 0. \end{cases}$$

Empezamos resolviendo la ecuación de W . De las condiciones de contorno del problema deducimos que $T(t)W(0) = 0$ para todo $t \geq 0$. Puesto que hemos supuesto que T no se anula tenemos que $W(0) = 0$. Análogamente deducimos que $W(L) = 0$. Distinguimos tres casos.

- Se tiene $\lambda < 0$. En tal caso $W(x) = A \exp(\sqrt{-\lambda}x/c) + B \exp(\sqrt{\lambda}x/c)$. No obstante, las condiciones de contorno obligan a que $A = B = 0$, luego la única solución es la constantemente cero, que hemos descartado previamente.
- Se tiene $\lambda = 0$. Análogamente la única solución del problema de contorno es la constantemente 0.
- Se tiene $\lambda > 0$. Las soluciones son de la forma $W(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x/c) + B \cos(\sqrt{\lambda}x/c)$. De $W(0) = 0$ deducimos que $A = 0$. De $W(L) = 0$ deducimos que o bien $B = 0$, solución que hemos descartado, o bien $\sin(\sqrt{\lambda}L/c) = 0$, esto es, $\lambda = (n\pi c/L)^2$ para algún $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso las soluciones son múltiplos de $\sin(n\pi x/L)$.

Hemos deducido que la ecuación tiene solución no nula solamente para los valores $\lambda_n = (n\pi c/L)^2$. Resolvemos ahora la ecuación asociada a T para estos valores de λ . Obtenemos que $T(t) = A \cos(nc\pi x/L) + B \sin(nc\pi x/L)$. Obtenemos pues que la solución de la ecuación diferencial debe ser de la forma

$$u(t, x) = \sin(n\pi x/L) (A \cos(nc\pi x/L) + B \sin(nc\pi x/L)). \quad (26)$$

Es fácil comprobar que estas funciones son soluciones de la ecuación. Veamos si verifican las condiciones iniciales en el tiempo. Tenemos que $u(0, x) = A \sin(n\pi x/L)$ y $u_t(0, x) = Bnc\pi \sin(n\pi x/L)/L$. Estas funciones pueden no ser iguales a las funciones u_0 y v_0 . Lo solucionamos mediante el desarrollo en serie de Fourier. Por las condiciones de compatibilidad obtenemos que $u_0(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(n\pi x/L)$. Análogamente $v_0(x) = \sum_{n \geq 1} C_n \sin(n\pi x/L)$.

Comentario 6.2 (Principio de superposición). *Una suma, finita o infinita con convergencia uniforme, de soluciones de la ecuación (25) es solución de la ecuación (25).*

Si conseguimos esta convergencia uniforme de la serie de Fourier obtenemos que $u(t, x) = \sum_{n \geq 1} u_n(t, x)$ es solución de (25) y verifica todas las condiciones del problema.

EJEMPLO 6.3: Consideramos el problema de contorno

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & t \geq 0, x \in [0, 1]; \\ u(t, 0) = 0 \text{ y } u(t, 1) = 1; \\ u(0, x) = x; \\ u_t(0, x) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Utilizamos las soluciones del problema homogéneo, que es un caso particular de la ecuación de Ondas (25). Sea ω una solución del problema homogéneo y $u(t, x) = \omega(t, x) + v(x)$. Tenemos que u es solución de (27) si, y solo si, $-v''(x) = x$, $v(0) = 0$, $v(1) = 1$ y se verifican las condiciones de contorno en x . Deducimos que debe tenerse $v(x) = (7x - x^3)/6$, $\omega(0, x) = (x^3 - x)/6$, $\omega_t(0, x) = 0$. Podemos encontrar tal ω mediante una serie de Fourier como se hizo anteriormente. \triangle

En los siguientes párrafos introducimos los conceptos de análisis funcional que necesitamos para completar el desarrollo anterior.

Teorema 6.4 (Riesz-Fischer, 1907). *El conjunto*

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{nT}{2\pi}x\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{nT}{2\pi}x\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base de Hilbert de $L^2(0, T)$.

EJEMPLO 6.5: Consideramos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{en } [0, T]; \\ y(0) = y(T); \\ y'(0) = y'(T). \end{cases} \quad (28)$$

Buscamos los valores propios del problema de Sturm-Liouville, esto es, los valores de λ para los que el problema tiene solución no trivial. Es fácil comprobar que si $\lambda < 0$, entonces la única solución es $y = 0$. En cambio, si $\lambda = 0$, las soluciones son las funciones constantes, luego 0 es un valor propio. Por último, si $\lambda > 0$, el problema tiene solución si, y solo si, $\cos(T\sqrt{\lambda}) = 1$ o, equivalentemente, $\lambda = (2n\pi/T)^2$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, las funciones propias son 2 para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_{2n} = \cos(2n\pi x/T)$ y $y_{2n-1} = \sin(2n\pi x/T)$. \triangle

En $L_2([0, T])$ la convergencia en norma no implica necesariamente la convergencia puntual y mucho menos la convergencia uniforme. Necesitaremos criterios de convergencia que nos aseguren que la serie de Fourier converge uniformemente. Uno de los criterios más sencillos es el criterio de Weierstrass. En lo que sigue enunciamos los teoremas de convergencia que utilizaremos en la asignatura.

Teorema 6.6 (Teoremas de convergencia). *Sea $y \in L_2([0, T])$ con $y(0) = y(T)$. Se verifican las siguientes afirmaciones.*

- Por el Teorema de Riesz-Fischer, la serie de Fourier de y admite una parcial que converge c.p.d. a y .*
- Si y es continua, entonces la serie de Fourier de y converge puntualmente a y .*
- Si y es continua a trozos en $[0, T]$, entonces la serie de Fourier de y converge puntualmente a y fuera de los puntos de discontinuidad. En los puntos de discontinuidad la serie de Fourier converge a la media de los límites laterales de y .*

- d) Si y es continua y además y' es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de y converge absoluta y uniformemente.
- e) Si $y \in \mathcal{C}^k([0, T])$ y $y^{(m)}(0) = y^{(m)}(T)$ para todo $0 \leq m \leq k$ e $y^{(k+1)}$ es continua a trozos, entonces la serie de las derivadas hasta orden k converge absoluta y uniformemente a la correspondiente derivada de y .

En ocasiones necesitaremos desarrollos de Fourier en $L_2([-L, L])$. Para ello podemos trasladar la función a $[0, 2L]$, calcular el desarrollo de Fourier en este intervalo y volverlo a trasladar. Realizando los cálculos obtenemos que

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right),$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L y(x) \, dx; \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L y(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx; \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L y(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx. \end{aligned}$$

Nótese que si la función y es par, entonces $b_n = 0$ para todo n . En cambio, si la función y es impar, entonces $a_n = 0$ para todo n .

Consideremos $y \in L_2([0, L])$. Podemos extender y a $[-L, L]$ para que sea par o impar y aplicar los desarrollos obtenidos a la nueva función. Obtenemos pues dos nuevos desarrollos que solamente involucran cosenos y senos respectivamente:

- **Serie de cosenos.** Tenemos que $y(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$, donde para cada n

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L y_{\text{par}}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx.$$

- **Serie de senos.** Tenemos que $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, donde para cada n

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L y_{\text{par}}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx.$$

Ahora podemos aplicar los teoremas de convergencia a estas nuevas series, obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 6.7. Sea $y \in \mathcal{C}([0, T])$ con y' continua a trozos. Entonces,

- a) su serie de cosenos converge uniformemente;
- b) si $y(0) = y(T) = 0$, entonces la serie de senos converge.

Ya podemos resolver la ecuación de ondas de partida. Recogemos todos los argumentos dados en el siguiente teorema.

Teorema 6.8. *Dados $u_0 \in \mathcal{C}^2(]0, 1[)$ con u_0''' continua a trozos y $v_0 \in \mathcal{C}^1(]0, L[)$ con v_0'' continua a trozos tales que*

$$u_0(0) = u_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = v_0(0) = v_0(L).$$

El sistema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0, x \in [0, L]; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, L]; \\ u_t(0, x) = v_0(x), & x \in [0, L]; \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

tiene una única solución dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + \frac{b_n L}{nc\pi} \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde a_n y b_n provienen de las series de Hilbert de u_0 y v_0 , esto es,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ y } v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Demostración. La existencia viene dada por el procedimiento desarrollado durante la sección. Veamos que se da la unicidad. Utilizamos el denominado *método de la energía*. Definimos el funcional E que a cada función $u \in \mathcal{C}^2([0, L])$ le asigna la función $E[u]$ dada por

$$E[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) \, dx, \quad t \geq 0.$$

Veamos que si u es solución de la ecuación de ondas, entonces $E[u]$ es constante. En efecto, tenemos que

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 \, dx = \int_0^L u_t u_{tt} \, dx = c^2 \int_0^L u_t u_{xx} \, dx = [u_t u_x]_0^L - c^2 \int_0^L u_{tx} u_x \, dx.$$

Deducimos pues que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 \, dx + c^2 \int_0^L u_{tx} u_x \, dx = [u_t u_x]_0^L.$$

Sean u_1 y u_2 dos soluciones de la ecuación de ondas. Entonces, $u = u_1 - u_2$ es solución del problema con todas las condiciones a cero. Utilizando la igualdad anterior tenemos que $E[u]$ tiene derivada nula, luego $E[u](t) = E[u](0) = 0$. $u_1 = u_2$. Deducimos pues que $u = 0$ y, por tanto, $u_1 = u_2$. \square

6.2. Solución de la ecuación de Dirichlet

NO EXAMEN.

Vamos a resolver la ecuación de Dirichlet utilizando la técnica de separación de variables, que hemos utilizado para la ecuación de ondas. Recordemos que la ecuación de Dirichlet viene dada por

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega; \\ u = \gamma & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (29)$$

6.2.1. Laplaciano en polares

Realizamos un cambio a polares, $u(x_1, x_2) = U(\rho, \theta)$. Obtenemos la expresión denominada *Laplaciano en polares*

$$U_{pp} + \frac{U_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{U_\rho}{\rho} = \Delta_x u(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)). \quad (30)$$

Si la función u es radial, esto es, $u(x) = U(\rho)$ para todo $x \in \Omega$, entonces la expresión del Laplaciano en polares se simplifica, obteniendo

$$\Delta_x u(x) = U_{pp} + \frac{U_\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{N-1} U_\rho), \quad (31)$$

donde N es el número de variables de u .

6.2.2. La ecuación de Dirichlet para funciones radiales

Aplicando lo anterior para u radial obtenemos que la ecuación de Dirichlet equivale a

$$\rho^{N-1} U_\rho = \text{cte}. \quad (32)$$

Obtenemos pues que todas las soluciones de la ecuación son de la forma

$$u(x) = \begin{cases} C_1 |x| & \text{si } N = 1; \\ C_2 \log |x| & \text{si } N = 2; \\ C_3 / |x|^{N-1} & \text{si } N \geq 3, \end{cases}$$

que es la llamada *solución fundamental del laplaciano en \mathbb{R}^N*

6.2.3. La ecuación de Dirichlet en el disco

Nos proponemos resolver (29) en el disco unidad. Utilizando el Laplaciano en polares obtenemos el problema equivalente

$$\begin{cases} U_{pp} + \frac{U_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{U_\rho}{\rho} = 0, & (\rho, \theta) \in]0, 1] \times [0, 2\pi]; \\ U(1, \theta) = \bar{\gamma}(\theta), & \theta \in [0, 2\pi]; \\ U(\rho, 0) = U(\rho, 2\pi), & \rho \in]0, 1]. \end{cases} \quad (33)$$

Separamos variables. Buscamos $U(\rho, \theta) = v(\rho)w(\theta)$. En tal caso se verifica la ecuación

$$v''(\rho)w(\theta) + \frac{v(\rho)}{\rho^2}w''(\theta) + \frac{v'(\rho)}{\rho}w(\theta) = 0, \quad (34)$$

de donde deducimos que

$$\frac{w''(\theta)}{w(\theta)} = -\frac{\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho)}{v(\rho)} = -\lambda \cong \text{cte.} \quad (35)$$

7. Derivadas generalizadas

Teorema 7.1 (Fórmula de Green). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio y sean $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) v(x) \, dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) \, ds.$$

Sea $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega) = \{\gamma \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \text{Sop}(\gamma) \subset\subset \Omega\}$, donde $A \subset\subset B$ significa que $A \subset$ abierto \subset compacto $\subset B$ se verifica

$$\int_{\Omega} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) f(x) \, dx. \quad (36)$$

A la función ϕ se le denomina *función test*. Sea $f \in \mathcal{L}_{loc}^1 = \{g: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid g \in \mathcal{L}(K) \, \forall K \subset\subset \Omega\}$. El funcional $L_f: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$L_f[\phi] = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) f(x) \, dx,$$

es un operador lineal. Lo denotamos $L_f[\phi] = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle$. Nótese que si f fuese de clase 1, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle$ es efectivamente el producto en L^2 por (36).

Proposición 7.2. *Si f es C^1 , entonces su derivada queda caracterizada por L_f , es decir, si $g \in C^1(\Omega)$ es otra función tal que para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene*

$$\int_{\Omega} g(x) \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) \, dx,$$

entonces $g = \frac{\partial}{\partial x_i} f$.

Demostración. Es una consecuencia del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones. \square

Definición 7.1. Dada $f \in \mathcal{L}_{loc}(\omega)$ definimos su *derivada generalizada* o *derivada distribucional* respecto de la variable x_i como el operador lineal sobre $C_0^\infty(\Omega)$ dado por

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) f(x) \, dx.$$

Comentario 7.3. *Se puede definir la derivada generalizada de orden k como*

$$\left\langle \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f, \phi \right\rangle = - \int_{\Omega} \frac{\partial^k}{\partial x^{|k|}} \phi(x) f(x) \, dx,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $k = (k_1, \dots, k_n)$

Comentario 7.4. La derivada generalizada es un operador lineal continuo sobre el espacio $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ con una topología τ que no podemos definir en este momento. Cabe decir que la convergencia de una sucesión $\{\phi_n\}$ a ϕ en esta topología equivale a que $\{\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x^{\mathbf{k}}} \phi_n\}$ converge uniformemente a $\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x^{\mathbf{k}}} \phi$ para todo \mathbf{k} .

Definición 7.2. Una función $f \in \mathcal{L}_{loc}(\Omega)$ tiene *derivada débil* cuando su derivada generalizada viene representada por una función, es decir, existe $g \in \mathcal{L}_{loc}(\Omega)$ tal que para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle = \langle g, \phi \rangle = \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx.$$

A la clase funciones iguales a g c.p.d. se le llama *derivada débil de f respecto de x_i* .

Comentario 7.5. En caso de existir la derivada débil es única por el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones (versión generalizada a $\mathcal{L}_{loc}(\Omega)$).

EJEMPLO 7.6: Calculamos la derivada débil de $f(x) = |x|$ en $\Omega = \mathbb{R}$. Tenemos que

$$-\int_{\mathbb{R}} |x| \phi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \phi'(x) dx - \int_0^{\infty} x \phi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx - \int_0^{\infty} \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} s_a(x) \phi(x) dx,$$

donde s es la función signo, definida en 0 como $s(0) = 1$. △

EJEMPLO 7.7: La función $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

no tiene derivada débil. En efecto, tenemos que

$$-\int_{\mathbb{R}} H(x) \phi'(x) dx = -\int_0^{\infty} \phi'(x) dx = \phi(0),$$

que es el operador “evaluar en 0”. Los ingenieros utilizan la delta de Dirac (que no es una función) para decir que este operador es igual a $\langle \delta_0, \phi \rangle$. De ello deducen que δ_0 es la derivada débil de H . Esto es formalmente erróneo, no existe la derivada débil de esta función. En efecto, el operador “evaluar en 0” no coincide con $\langle g, \phi \rangle$ para ninguna g . En tal para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, +\infty[)$ tendríamos $\langle g, \phi \rangle$. Por el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones obtenemos que g es 0 en $[0, +\infty[$. Razonamos de forma análoga en $] -\infty, 0]$, obteniendo que g es constantemente 0, contradicción. △

Proposición 7.8. a) Si $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, entonces u' es la derivada débil de u .

b) Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y u tiene derivada débil, entonces u' es la derivada débil de u .

Puede ser que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ pero u no tenga derivada débil. En tal caso, la derivada generalizada suele ser de la forma $u' + \delta$, donde δ es una delta de dirac en un subconjunto de la frontera de Ω .

Definición 7.3. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, +\infty]$. Sea Ω dominio de \mathbb{R}^N . El *espacio de Sobolev* es

$$W^{m,p} = \{\text{funciones de } L_p(\Omega) \text{ tales que sus derivadas hasta orden } m \text{ son débiles y están en } L_p(\Omega)\}.$$

Es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\| = \left(\|u\|_{L_p(\Omega)}^p + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u \right\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

si $p \in [1, +\infty[$ y

$$||u|| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u||_{L_p(\Omega)}^p$$

si $p = +\infty$. Para $p = 2$ el espacio de Sobolev es un espacio de Hilbert, y se denota $H^m(\Omega)$, para el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} v \, dx.$$

EJEMPLO 7.9 (Derivada débil de $|x|^\alpha$): Nótese que el gradiente de $|x|^\alpha$ es $\alpha x|x|^{\alpha-2}$ para $x \neq 0$. Buscamos la derivada débil de $|x|^\alpha$ en $B(0, 1)$. Para ello procedemos como en el Ejemplo 7.6, obteniendo que efectivamente ésta es la derivada débil. \triangle

EJEMPLO 7.10: Sea $B \subset \mathbb{R}^N$. Prueba que

- $1/|x|^\alpha \in L_p(B)$ si, y solo si, $\alpha p < N$;
- $1/|x|^\alpha \in L_p(\mathbb{R}^N \setminus B)$ si, y solo si, $\alpha p > N$.

Ayuda: Cambio a radiales en \mathbb{R}^N . \triangle

En $H^1(\Omega)$ hay un subespacio destacado, $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$. Aunque a priori no tiene sentido exigir que una función sea 0 en la frontera de Ω (la medida de su frontera es 0), esto sí se puede hacer mediante *densidad*. Esto se estudia en otras asignaturas de la carrera. De hecho, $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, donde el cierre es en $W^{1,p}$. Es más, se puede demostrar que $W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}$.

Teorema 7.11 (Teorema fundamental del cálculo integral). Dado $I =]a, b[$ y $f \in L_{loc}^1(I)$ y $c \in I$, definimos

$$F(x) = \int_c^x f(s) \, ds$$

para todo $x \in I$. Entonces, F tiene derivada débil y ésta es f . A F se le llama primitiva de f . Además, F es continua.

Teorema 7.12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado en al menos una dirección, esto es, existe $v \in \mathbb{R}^N$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $a \leq \langle x, v \rangle \leq b$ para todo $x \in \Omega$. Entonces, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ existe $c > 0$ con

$$\int_{\Omega} u^2(s) \, ds \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 \, ds.$$

Teorema 7.13. Sea Ω acotado en al menos una dirección. Entonces en el espacio $H_0^1(\Omega)$ la norma

$$|||u||| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 \, ds \right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma heredada de $H^1(\Omega)$.

Teorema 7.14 (Teoremas de representación de Riesz para Hilbert). Dado H espacio de Hilbert, entonces toda aplicación lineal y continua de H en \mathbb{R} es de la forma $\langle v, \cdot \rangle$ para cierto $v \in H$.

Teorema 7.15. Sea $p \in [1, +\infty[$ y $p' > 0$ con $1 = 1/p + 1/p'$. Toda aplicación $G: L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua es de la forma

$$G(f) = \int_{\Omega} g(x)f(x) \, dx,$$

donde $g \in L^{p'}(\Omega)$.

Lema 7.16. Sea H espacio de Hilbert y $A \subset H$. Se verifican las siguientes afirmaciones:

- a) $(A^T)^T = \overline{\langle A \rangle}$;
 b) Si A es denso, entonces $A^T = \{0\}$.

Recordamos en este punto el problema de la membrana. Podemos definir el operador asociado a este problema en H_0^1 . Este operador viene dado por

$$E[U] = \int_{\Omega} \frac{\sigma}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} |u|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)u(x) dx.$$

Recordemos que su ecuación de Euler - Lagrange era de la forma $-\sigma \Delta u = f - \alpha u$. Definimos las funciones

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v + \alpha uv dx,$$

$$\bar{f}(u) = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx,$$

y

$$J[u] = \frac{1}{2} a(u, u) - \bar{f}(u)$$

Teorema 7.17 (Teorema de Lax - Milgram). Sea H un espacio de Hilbert y $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal, continua y coerciva. Entonces, para toda función $\bar{f}: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua, existe una única $\bar{u} \in H$ solución de

$$\begin{cases} a(\bar{u}, v) = \bar{f}(v); \\ \|\bar{u}\|_H \leq \|\bar{f}\|/\alpha. \end{cases} \quad (\text{PD})$$

Además, si a es simétrica, entonces \bar{u} es también la única solución del problema

$$J(\bar{u}) = \min_{u \in H} J(u), \quad (\text{PV})$$

siendo $J(u) = a(u, u)/2 - \bar{f}(u)$.

8. Bibliografía

- Elsgoltz....