Modelos matemáticos 2
Apuntes

Andrés Herrera Poyatos
Universidad de Granada
andreshp9@gmail.com

1. Introducción

El principal objetivo de la asignatura es la resolución de problemas varacionales que aparecen en la física. A este propósito se dedicará la mayor parte de los esfuerzos. No obstante, en la última sección se introducen problemas clásicos de la química y la biología que se modelizan mediante ecuaciones diferenciales. El uso de las ecuaciones diferenciales será una constante durante todo el curso, apareciendo habitualmente en forma de problemas de contorno.

En primer lugar vamos a ver un ejemplo de este tipo de problemas que motive el desarrollo de la teoría.

Ejemplo 1.1 (Problema de la cuerda mínima): Sean (x_0, y_0) y (x_1, y_1) dos puntos del plano. Consideramos todas las cuerdas que van desde (x_0, y_0) a (x_1, y_1) y nos preguntamos cuál es la cuerda de longitud mínima. La respuesta a este problema debería ser el segmento que une ambos puntos. No obstante, la demostración de este hecho no es tan evidente. Una cuerda es una curva continua que tiene su origen en (x_0, y_0) y termina en (x_1, y_1). En este momento nos centramos en aquellas curvas que son la gráfica de una función con el objetivo de simplificar el problema. Parece evidente que el resto de curvas no van a tener longitud mínima aunque no disponemos una prueba de este hecho todavía. Además, exigimos que las curvas sean de clase uno. En resumen, consideramos solamente el siguiente conjunto de curvas

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) \mid (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

Recordemos que la longitud de una curva $y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1)$ viene dada por $\int_{x_0}^{x_1} |y'(x)| \, \mathrm{d}x$. Por tanto, buscamos aquel elemento $\overline{y} \in \mathcal{D}$ que minimice el funcional $\mathcal{F} \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Esta cuestión se denomina *formulación variacional del problema*. Supongamos que existe $\overline{y} \in \mathcal{D}$ mínimo de $\mathcal{F}$ y busquemos alguna condición necesaria que debe verificar tal mínimo. Nótese que para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1]) = \{\varphi \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) \mid \varphi(x_0) = 0 = \varphi(x_1)\}$ y $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\overline{y} + s\phi \in \mathcal{D}$ y, por tanto, $\mathcal{F}[\overline{y}] \leq \mathcal{F}[\overline{y} + s\phi]$. Esto es, 0 es el mínimo global de la función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \mathcal{F}[\overline{y} + s\phi]$. Esta función es derivable gracias a la regla de Leibniz y su derivada viene dada por

$$f'(s) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\phi'(x)(\overline{y}'(x) + s\phi'(x))}{\sqrt{1 + (\overline{y}'(x) + s\phi'(x))^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Puesto que $f'(0) = 0$, hemos obtenido que $\overline{y}$ verifica

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\phi'(x)\overline{y}'(x)}{\sqrt{1 + \overline{y}'(x)^2}} \, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

A la búsqueda de aquellas funciones $\overline{y} \in \mathcal{D}$ que verifican (1) para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$ se le llama *formulación débil del problema*. Supongamos que $\overline{y} \in \mathcal{C}^2(x_0, x_1)$. En tal caso podemos integrar (1) por partes con $u = \overline{y}'/\sqrt{1 + \overline{y}'(x)^2}$ y $\mathrm{d}v = \phi'(x)$ para obtener

$$0 = -\int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overline{y}'(x)}{\sqrt{1 + \overline{y}'(x)^2}} \, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

En la Sección 2 veremos una versión básica del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones, que aplicamos a (2) para obtener que $\overline{y}$ verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\overline{y}'(x)}{\sqrt{1 + \overline{y}'(x)^2}} = 0. \tag{3}$$

A esta ecuación diferencial se le denomina *ecuación de Euler-Lagrange*. Recordemos que además tenemos que $\overline{y}(x_0) = 0 = \overline{y}(x_1)$ y, por tanto, la función $\overline{y}$ es solución de un problema de contorno, que se denomina *formulación clásica del problema*. En este caso el problema de contorno tiene fácil solución. En efecto, desarrollando (7) obtenemos que

$$\frac{\overline{y}''(x)}{\sqrt{1+\overline{y}'(x)^2}} = 0,$$

esto es, $\overline{y}'' = 0$ y, por tanto, $\overline{y}(x) = ax + b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Las condiciones de contorno implican que $\overline{y}$ debe ser el segmento que une (x_0, y_0) con (x_1, y_1). En resumen, si la solución fuese de clase 2, entonces es el segmento que une ambos puntos. △

En el ejemplo anterior hemos seguido el siguiente proceso:

a) Suponemos que $\overline{y}$ es un mínimo del funcional $\mathcal{F}$ con la regularidad requerida.

b) Fijado $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ definimos la función $f(s) = \mathcal{F}[\overline{y} + s\phi]$. De $f'(0) = 0$ obtenemos una ecuación integral.

c) Integramos por partes la ecuación obtenida, utilizando las condiciones de contorno de ϕ.

d) Por el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones obtenemos una ecuación diferencial que verifica $\overline{y}$. Esta ecuación se denomina ecuación de Euler-Lagrange.

e) Resolvemos la ecuación de Euler-Lagrange imponiendo las condiciones de contorno, obteniendo los candidatos a mínimo de $\mathcal{F}$.

Queda demostrar que una de las soluciones obtenidas en e) es el mínimo de $\mathcal{F}$. Esta cuestión es compleja y en este curso solo podremos resolverla bajo condiciones bastante restrictivas.

En lo que sigue desarrollaremos formalmente la ecuación de Euler-Lagrange y demostraremos que bajo determinadas condiciones las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange siempre son soluciones de nuestro problema variacional. Además, intentaremos rebajar cada una de las hipótesis que se han asumido a lo largo del ejemplo.

2. Problemas varacionales

Introducimos a continuación una primera definición de problema variacional que incluye al Ejemplo 1.1. Esta definición se irá ampliando a lo largo del curso a medida que nuestras herramientas sean más potentes.

Definición 2.1. Sea $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio. Consideramos $F\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$ derivable y un conjunto no vacío

$$\mathcal{D} \subset \{y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) \mid (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega\}$$

que puede ser de una de las siguientes formas:

a) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) \mid (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega\}$;

b) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) \mid (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0\}$ para cierto valor y_0;

c) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) \mid (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_1) = y_1\}$ para cierto valor y_1;

d) $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) \mid (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ para ciertos valores y_0 e y_1.

Definimos el funcional $\mathcal{F} \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Un problema variacional consiste en encontrar el mínimo o máximo de $\mathcal{F}$ en caso de que exista.

En lo que sigue denotaremos x, y y p a las tres variables de F. También denotaremos F_x, F_y y F_p a sus primeras derivadas parciales respectivamente.

2.1. Ecuación de Euler-Lagrange

Vamos a reproducir en este contexto general el argumento que se desarrolló en el Ejemplo 1.1. Como se avisó en este ejemplo necesitaremos utilizar el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones.

Teorema 2.1 (Versión básica del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones)**.** *Sea $f \in \mathcal{C}([x_0, x_1])$. Entonces, $f = 0$ si, y solo si, para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$ se tiene*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Demostración. Es claro que si $f = 0$ entonces se verifica la segunda afirmación. Veamos que el recíproco también es cierto. Razonamos por el contrarrecíproco. Supongamos que existe $x_2 \in [x_0, x_1]$ tal que $|f(x_2)| > 0$. Como f es continua, existe un intervalo abierto $J =]a, b[\subset]x_0, x_1[$ tal que $f(x)f(x_2) > 0$ para todo $x \in J$. Definimos la función $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$

$$\phi(x) = \begin{cases} \cos\left(\pi \frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) + 1 & \text{si } x \in J; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nótese que $\phi(x) > 0$ para todo $x \in J$. Por tanto, obtenemos que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0,$$

como se quería. □

Aunque de momento podemos desarrollar la teoría usando la versión básica del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones, en un futuro vamos a necesitar aplicar una versión más general del mismo. Esta versión se enuncia en el siguiente resultado pero no podemos demostrarla con las herramientas de este curso.

Teorema 2.2 (Lema fundamental del cálculo de variaciones)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio y $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. La función f es igual a la función constantemente cero c.p.d si, y solo si, para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega) \mid \phi = 0$ fuera de un compacto de $\Omega\}$ se tiene*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ya podemos deducir en un ámbito general la denominada ecuación de Euler-Lagrange.

Teorema 2.3 (Condición necesaria - Ecuación de Euler-Lagrange). *Consideremos un problema variacional tal que F es dos veces derivable respecto de y y p. Si $\overline{y} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2(x_0, x_1)$ es un mínimo de $\mathcal{F}$, entonces $\overline{y}$ cumple la ecuación diferencial*

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

A esta ecuación se le denomina ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema variacional. Por comodidad la escribiremos como

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_p = 0.$$

Demostración. Supongamos que $\overline{y} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2(x_0, x_1)$ es un mínimo de $\mathcal{F}$. Consideremos $\phi \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$. Utilizando la compacidad de la imagen de $\overline{y}$ y que Ω es abierto es sencillo ver que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{y} + s\phi \in \mathcal{D}$ para todo $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Puesto que $\overline{y}$ es mínimo global de $\mathcal{F}$, obtenemos que $\mathcal{F}[\overline{y}] \leq \mathcal{F}[\overline{y} + s\phi]$ para todo $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Esto es, 0 es el mínimo global de la función $f \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \mathcal{F}[\overline{y} + s\phi]$. Escribimos por comodidad $\#(x, s) = (x, \overline{y}(x) + s\phi(x), \overline{y}'(x) + s\phi'(x))$. La función f es derivable gracias a la regla de Leibniz y su derivada se corresponde con

$$f'(s) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s} F(\#(x, s)) \, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} F_y(\#(x, s))\phi(x) + F_p(\#(x, s))\phi'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Puesto que $f'(0) = 0$, hemos obtenido que $\overline{y}$ verifica

$$0 = f'(0) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(\#(x, 0))\phi(x) + \int_{x_0}^{x_1} F_p(\#(x, 0))\phi'(x) \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Por hipótesis $\overline{y} \in \mathcal{C}^2(x_0, x_1)$ y, por tanto, podemos integrar el segundo sumando de (4) por partes con $u = F_p(\#(x, 0))$ y $\mathrm{d}v = \phi'(x)$ para obtener

$$\int_{x_0}^{x_1} F_p(\#(x, 0))\phi'(x) \, \mathrm{d}x = [F_p(\#(x, 0))\phi(x)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} F_p(\#(x, 0)) \, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

En vista de (5) y que ϕ se anula en x_0 y x_1 podemos escribir (4) como sigue

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y(\#(x, 0)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(\#(x, 0)) \right) \phi(x) \, \mathrm{d}x. \tag{6}$$

Aplicamos el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones a (6) para obtener que $\overline{y}$ verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$0 = F_y(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \tag{7}$$

como se quería. □

En este punto estudiamos cada una de las tres posibles definiciones del conjunto $\mathcal{D}$ por separado con el fin de comprobar que los mínimos de $\mathcal{F}$ también verifican dos condiciones de contorno. En efecto, tenemos los siguientes casos:

a) El conjunto $\mathcal{D}$ es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) : (y, y')([x_0, x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ para ciertos valores y_0 e y_1. En tal caso las condiciones de contorno son $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$.

b) $\mathcal{D}$ es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1(x_0,x_1) : (y,y')([x_0,x_1]) \subset \Omega\}$. En tal caso podemos repetir el razonamiento realizado en la demostración del Teorema 2.3 para $\phi \in \mathcal{C}^1(x_0,x_1)$ obteniendo

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y(\#(x,0)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(\#(x,0)) \right) \phi(x)\,\mathrm{d}x + \left[F_p(\#(x,0))\phi(x) \right]_{x_0}^{x_1}. \tag{8}$$

No obstante, ya sabemos que $\overline{y}$ verifica la ecuación de Euler-Lagrange y, por tanto, (8) se puede simplificar para obtener

$$0 = F_p(x_1, \overline{y}(x_1), \overline{y}'(x_1))\phi(x_1) - F_p(x_0, \overline{y}(x_0), \overline{y}'(x_0))\phi(x_0). \tag{9}$$

Puesto que (9) es válida para cualquier ϕ podemos escoger ϕ verificando $\phi(x_0) = 0$ y $\phi(x_1) = 1$, obteniendo que $F_p(x_1, \overline{y}(x_1), \overline{y}'(x_1)) = 0$. Análogamente deducimos que $F_p(x_0, \overline{y}(x_0), \overline{y}'(x_0)) = 0$.

c) $\mathcal{D}$ es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1(x_0,x_1) : (y,y')([x_0,x_1]) \subset \Omega, y(x_0) = y_0\}$ para cierto valor y_0. Razonamos de forma análoga a b) para obtener las condiciones de contorno $y(x_0) = y_0$ y $F_p(x_1, \overline{y}(x_1), \overline{y}'(x_1)) = 0$. Nótese que no podemos obtener la condición $F_p(x_0, \overline{y}(x_0), \overline{y}'(x_0)) = 0$ ya que para que $\phi \in \mathcal{C}^1(x_0,x_1)$ verifique (8) debe cumplir $\phi(x_0) = 0$ (en caso contrario $\overline{y} + s\phi \notin \mathcal{D}$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$).

d) $\mathcal{D}$ es de la forma $\{y \in \mathcal{C}^1(x_0,x_1) : (y,y')([x_0,x_1]) \subset \Omega, y(x_1p) = y_1\}$ para cierto valor y_1. Razonamos de forma análoga a c) para obtener las condiciones de contorno $y(x_1) = y_1$ y $F_p(x_0, \overline{y}(x_0), \overline{y}'(x_0)) = 0$.

Definición 2.2. En el contexto actual, el problema de contorno que hemos obtenido se denomina *problema de contorno del problema variacional*. A las soluciones del problema de contorno se les llaman *extremales*.

EJEMPLO 2.4 (Curva de longitud mínima): Retomamos el Ejemplo 1.1 eliminando la condición de contorno $y(x_1) = y_1$. En tal caso por los razonamientos anteriores las extremales verifican la ecuación de Euler-Lagrange, $y'' = 0$, y las condiciones $y(x_0) = x_0$ y $0 = F_p(x_1, y(x_1), y'(x_1))$. Recuérdese que $F_p = p/\sqrt{1+p^2}$ y, por tanto, la segunda condición de contorno es $y'(x_1) = 0$. Obtenemos que solo hay una única extremal, la función $y = x_0$ como cabría esperar. △

Cuando pretendamos resolver un problema variacional el primer paso será calcular las extremales asociadas. La ecuación de Euler-Lagrange no siempre es sencilla de resolver. No obstante, en la práctica la función F puede no depender de alguna de las variables x, y o p. En tal caso la resolución de la ecuación de Euler-Lagrange se simplifica enormemente como mostramos a continuación.

a) La función F no depende de de x. En tal caso tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(F(\overline{y}(x), \overline{y}'(x)) - \overline{y}'(x) F_p(\overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \right) = \overline{y}'(x) \left(F_y(\overline{y}(x), \overline{y}'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} F_p(\overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \right) = 0.$$

Consecuentemente, los extremales son aquellas soluciones de las ecuaciones

$$F(\overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = \overline{y}(x) F_p(\overline{y}(x), \overline{y}'(x)) + k \tag{10}$$

para $k \in \mathbb{R}$ arbitrario que verifican las condiciones de contorno. Estas ecuaciones suelen ser más sencillas de resolver ya que solo intervienen F y F_p.

b) La función F no depende de de y. En tal caso las extremales son aquellas soluciones de las ecuaciones

$$F_p(x, \overline{y}'(x)) = k \tag{11}$$

para $k \in \mathbb{R}$ arbitrario que verifican las condiciones de contorno. Este es el caso del Ejemplo 1.1.

2.2. Convexidad: Condición suficiente de existencia

En este apartado damos una primera condición suficiente de existencia de solución para un problema variacional. Recordemos en este punto que cuando uno minimiza una función real de variable real derivable la convexidad local de la función nos permite discernir si un punto crítico es mínimo, máximo o punto de inflexión. Vamos a aplicar el concepto de convexidad en el ámbito actual.

Definición 2.3. Sea V un espacio vectorial. Un conjunto $\Omega \subset V$ es *convexo* si para todo $x, y \in \Omega$ se cumple que $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\} \subset \Omega$. En tal caso, una función $f: \Omega \to \mathbb{R}$ es *convexa* si para cualquier $x, y \in \Omega$ se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para todo $t \in [0,1]$. Si la desigualdad anterior siempre es estricta, entonces f es *estrictamente convexa*.

Desarrollamos a continuación el principal teorema de esta sección.

Teorema 2.5. *Consideremos un problema variacional con las condiciones de regularidad el Teorema 2.3. Sea $\overline{y} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2(x_0, x_1)$ una extremal. Si el conjunto $\mathcal{D}$ y el funcional $\mathcal{F}$ son convexos, entonces $\overline{y}$ es un mínimo global de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.*

Demostración. En primer lugar, observamos que invirtiendo la demostración del Teorema 2.3 obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{F}[\overline{y} + t\phi]\right)\bigg|_{t=0} = 0$$

para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1(x_0, x_1)$. Sea $z \in \mathcal{D}$. Veamos que $\mathcal{F}[\overline{y}] \leq \mathcal{F}[z]$. Definimos la función $\phi = z - \overline{y} \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1)$. Por la convexidad de $\mathcal{F}$ deducimos que para t lo suficientemente pequeño se verifica $y + t\phi \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{F}[\overline{y} + t\phi] = \mathcal{F}[(1-t)\overline{y} + tz] \leq (1-t)\mathcal{F}[\overline{y}] + t\mathcal{F}[z]$. Consecuentemente obtenemos que

$$\frac{\mathcal{F}[\overline{y} + t\phi] - \mathcal{F}[\overline{y}]}{t} \leq \mathcal{F}[z] - \mathcal{F}[\overline{y}].$$

Haciendo tender t a 0 deducimos el resultado. □

En ocasiones podemos encontrar mínimos locales de $\mathcal{F}$. En tal caso la convexidad también nos permite asegurar que son mínimos globales.

Proposición 2.6. *Consideremos un problema variacional tal que el conjunto $\mathcal{D}$ y el funcional $\mathcal{F}$ son convexos. Si $\overline{y} \in \mathcal{D}$ es mínimo local (resp. mínimo local estricto) de $\mathcal{F}$ bajo la norma $||\cdot||_\infty$, entonces $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo global (resp. mínimo global estricto) en $\overline{y}$.*

Demostración. Sea $U \subset D$ entorno convexo en el que $\overline{y}$ es mínimo global. Sea $z \in \mathcal{D}$. Existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $tz + (1-t)y \in U$. Tenemos que $\mathcal{F}[\overline{y}] \leq \mathcal{F}[tz + (1-t)y] \leq (1-t)\mathcal{F}[\overline{y}] + t\mathcal{F}[z]$. Consecuentemente $\mathcal{F}[\overline{y}] \leq \mathcal{F}[z]$ como se quería. □

En este punto nos preguntamos cómo podemos comprobar que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}$ son convexos. El siguiente resultado nos proporciona una condición suficiente fácil de verificar.

Proposición 2.7 (Condición de convexidad)**.** *Consideremos un problema variacional. Si el conjunto Ω es convexo y la función F es convexa sobre Ω, esto es, para cualquier $x \in I$ fijo la función $F(x, y, p)$ es convexa, entonces $\mathcal{D}$ es convexo y $\mathcal{F}$ es convexo.*

Demostración. Es una consecuencia de la linealidad y la monotonía de la integral. □

Comentario 2.8. *Recordemos en este punto que dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, la función f es convexa si, y solo si, su matriz hessiana es semidefida positiva. Este resultado nos permitirá comprobar las hipótesis de la Proposición 2.7.*

Comentario 2.9. *La condición anterior no es necesaria. Por ejemplo, el funcional*

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y^2(x)(1 - y'(x))\,\mathrm{d}x$$

es convexo sobre $\mathcal{D} = \mathcal{C}_0^1(0,1)$ pero F no es una función convexa. En efecto, tenemos que

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 y^2(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2(x)\,\mathrm{d}x - \left[\frac{y^3(x)}{3}\right]_0^1 = \int_0^1 y^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

de donde deducimos por la proposición previa que $\mathcal{F}$ es convexo. No obstante, la función F verifica

$$\mathrm{Hess}(F)(y,p) = \begin{pmatrix} 2(1-p) & -2y \\ -2y & 0 \end{pmatrix},$$

que es semidefinida negativa para $p > 1$.

3. Cálculo de extremales: Problemas de contorno

En la sección anterior deducimos la ecuación de Euler-Lagrange así como las condiciones de contorno que debe verificar un mínimo del funcional que sea de clase 2. Esto es un problema de contorno.

Definición 3.1. Un *problema de contorno* o *PC* consiste en encontrar una solución de una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo $I = [x_0, x_1]$ obligando a que la solución verififique ciertas condiciones en los extremos del intervalo.

Las condiciones de contorno pueden ser muy variadas. A continuación introducimos los tipos de condiciones de contorno más habituales.

a) **Condiciones de tipo Dirichlet:** Se fija el valor de la función en los extremos del intervalo.

b) **Condiciones de tipo Newmann:** Se fija el valor de la derivada en los extremos del intervalo.

c) **Condiciones periódicas:** Los valores de la función o su derivada en el extremo deben ser los mismos.

d) **Condiciones separadas:** En cada extremo del intervalo se fija el valor de una combinación lineal de la función y su derivada. Generalizan a las condiciones anteriores.

Además, si los valores impuestos son nulos las condiciones se denominan *homogéneas* mientras que se denominan *no homogéneas* en caso contrario.

Los problemas de contorno pueden tener solución única, tener múltiples soluciones o no tener solución. En lo que sigue vemos un ejemplo de cada uno de estos casos.

Ejemplo 3.1: Consideramos la EDO $x'' + x = 0$. Sabemos que las soluciones de esta EDO son de la forma $A\cos(x) + B\sin(x)$ con $A, B \in \mathbb{R}$.

a) Si fijamos condiciones de tipo Dirichlet en $I = [0, \pi]$ ($y(0) = y_0$, $y(\pi) = y_1$), entonces el problema de contorno tiene solución si, y solo si, $y_0 = y_1$, en cuyo caso hay tantas soluciones como posibles valores de B.

b) Si fijamos condiciones de tipo Dirichlet en $I = [0, \pi/2]$, entonces existe una única solución. △

EJEMPLO 3.2: Consideramos el problema de contorno con condiciones de tipo Newmann

$$\begin{cases} y'' = 2; \\ y'(0) = 0; \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

El problema no tiene solución ya que esta debe ser de la forma $y(t) = t^2 + At + B$ pero $y'(0) = A \neq y'(1) = 1 + A$. △

Nos preguntamos en este punto si todo problema de contorno puede verse como la ecuación de Euler-Lagrange de algún funcional. La respuesta es en general negativa aunque esto sea posible a veces como mostramos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.3: En el Ejemplo 3.2 vimos un problema de contorno que no tiene solución. Nos preguntamos si proviene de un problema variacional. En tal caso, debe tenerse $F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_p = y'' - 2$. Supongamos que $F_y = -2$. Entonces, $\frac{\partial}{\partial x} F_p = -y''$ y, por tanto, $F_p = -y'$. Deducimos que debe tenerse $F(x, y(x), y'(x)) = -2y(x) - y'(x)^2/2$. Por tanto, $F(x, y, p) = -2y - p^2/2$. Consideramos $\Omega = \mathbb{R}^2$, $I = [0, 1]$ y $\mathcal{D} = \mathcal{C}^1(0, 1)$. El problema variacional asociado tiene a $y'' - 2 = 0$ como ecuación de Euler-Lagrange. Además, las condiciones de contorno son $y'(0) = 0 = y'(1)$ pues $\mathcal{F}_p(x, y(x), y'(x)) = -y'(x)$. Por tanto, el funcional no tiene ningún mínimo de clase 2. De hecho, el funcional no va a tener ningún mínimo pues no está acotado, basta considerar las funciones $Cx^2(x-1)^2$ para comprobarlo. △

3.1. El problema de la viga

EJEMPLO 3.4 (Problema de la viga): △

EJEMPLO 3.5 (Formulación variacional del problema de la viga): △

3.2. Forma autoadjunta

Aunque el problema de la viga admita una formulación variacional, no todo problema de contorno puede verse como la ecuación de Euler-Lagrange de un PV. En esta sección nos centramos en EDOs de segundo orden, que sí provienen de un PV. Consideramos tres funciones continuas $a, b, c : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ y la EDO

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x). \tag{E2}$$

Las EDOs de segundo orden permiten una formulación más simple como mostramos a continuación. Fijamos $x_0 \in [x_0, x_1]$. Definimos $P(X) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$ para todo $x \in [x_0, x_1]$. Nótese que $P > 0$. Por tanto, multiplicando (E2) por $P(x)$ obtenemos una ecuación equivalente que responde a

$$c(x)P(x) = P(x)y''(x) + P'(x)y'(x) + P(x)b(x)y(x) = \left(P(x)y'(x)\right)' + P(x)b(x)y(x).$$

Denotando $R(x) = c(x)P(x)$ y $Q(x) = P(x)b(x)$, hemos obtenido que (E2) es equivalente a la ecuación

$$\left(P(x)y'(x)\right)' + Q(x)y(x) = R(x), \tag{S}$$

que se denomina *forma autoadjunta* o *forma de Sturm* de la EDO de segundo orden. La forma autoadjunta nos permite trabajar de forma más cómoda con la ecuación diferencial, por lo que será habitualmente utilizada de aquí en adelante.

En este punto podemos intentar utilizar la estrategia del Ejemplo 3.3 sobre (S). Obligamos a que $\frac{\partial}{\partial x}F_p = -\left(P(x)y'(x)\right)'$, obteniendo que $F_p = -P(x)y'(x)$ y $F_y = Q(x)y - R(x)$. Deducimos que la única posibilidad es $F(x,y,p) = Q(x)y^2/2 - R(x)y - P(x)p^2/2$. Este hecho da lugar al siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Consideramos una EDO de segundo orden* (S) *y definimos* $F(x,y,p) = P(x)p^2/2 - Q(x)y^2/2 + R(x)y$. *Entonces* (S) *es la ecuación de Euler-Lagrange del problema variacional asociado a* F *para cualquier* $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$.

Demostración. La demostración de este hecho es una simple comprobación. □

Cabe resaltar que a priori el funcional $\mathcal{F}$ del Teorema 3.6 puede tener un mínimo que no sea extremal. En este punto entra en juego el Teorema 3.10. Para poder demostrarlo necesitamos desarrollar antes varias herramientas.

En primer lugar, vamos a poner en equivalencia problemas de contorno de tipo Dirichlet o Newmann no homogéneos con un problema del mismo tipo homogéneo. El siguiente lema consigue este hecho para problemas de tipo Dirichlet y es fácilmente generalizable a problemas de tipo Newmann. En vista de este resultado de aquí en adelante consideraremos condiciones homogéneas.

Lema 3.7. *Consideramos una EDO* (S) *con condiciones de contorno tipo Dirichlet. Sea* $y(x)$ *una solución de este problema de contorno. Entonces la función*

$$z(x) = y(x) - \frac{y_1(x-x_0) - y_0(x-x_1)}{x_1 - x_0} = y(x) - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

es solución del problema de contorno

$$\begin{cases} (P(x)z'(x))' + Q(x)z(x) = R(x) + P'(x)\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} + Q(x)\frac{y_1(x-x_0)-y_0(x-x_1)}{x_1-x_0}; \\ z(x_0) = 0; z(x_1) = 0. \end{cases}$$

Demostración. Es una comprobación directa. □

Consideramos una EDO de segundo orden homogénea. Esta puede escribirse como sigue

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = 0. \tag{SH}$$

Sabemos que las soluciones de esta ecuación forman un espacio vectorial de dimensión 2 y, por tanto, son de la forma $A\phi_1(x) + B\phi_2(x)$, donde $\{\phi_1, \phi_2\}$ es un sistema fundamental de soluciones. Nótese que las condiciones de contorno del tipo $a_i y(x_i) + b_i y'(x_i) = 0$ y las condiciones periódicas dan lugar a ecuaciones lineales sobre A y B. Juntando las dos ecuaciones que obtenemos de x_0 y x_1 tenemos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuyas soluciones forman un espacio vectorial de dimensión 0, 1 o 2. En el Ejemplo 3.1 hemos visto todos estos casos.

Ejemplo 3.8: Justificar por qué es imposible que todas las soluciones de una EDO lineal de orden 2 resuelvan el mismo PC con condiciones de contorno separadas.

Realizamos el ejercicio para condiciones Dirichlet del tipo $y(x_0) = 0$ y $y(x_1) = 0$. Tras resolver la EDO y aplicar las condiciones de contorno a la solución $A\phi_1(x) + B\phi_2(x)$ obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

Todas las soluciones de la EDO verifican el problema de contorno si, y solo si, cualquier par (A, B) es solución el sistema, esto es, la matriz de coeficientes es idénticamente 0. Pero esto implica que el wronsquiano de ϕ_1 y ϕ_2 en x_0 y x_1 es 0, lo que contradice que sean un sistema fundamental de soluciones. $\triangle$

Ya sabemos resolver los problemas homogéneos. A partir de las soluciones de los problemas homogéneos nos planteamos resolver los problemas completos. En primer lugar, nótese que dadas y_1, y_2 soluciones de (S) se tiene que $y_1 - y_2$ es solución de (SH). Por tanto, para calcular todas las soluciones de (S) basta conocer una solución particular y resolver la ecuación homogénea. Para obtener una solución particular podemos utilizar el método de variación de las constantes.

El siguiente resultado discute la existencia de solución del los problemas completos.

Teorema 3.9 (Alternativa de Fredholm)**.** *Consideramos un problema de contorno cuya EDO es* (S) *con condiciones de contorno separadas homogéneas o periódicas. Se cumple una de estas alternativas:*

a) *El problema homogéneo tiene como única solución a $y = 0$, en cuyo caso el problema completo tiene una única solución.*

b) *El problema homogéneo tiene más de una solución (un espacio vectorial de dimensión 1 o 2), en cuyo caso el problema completo tiene solución si, y solo si, para cualquier solución y del problema homogéneo se cumple*

$$\int_{x_0}^{x_1} R(s)y(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

en cuyo caso cada solución del problema homogéneo determina una única solución del problema completo.

Demostración. Vamos a escribir las soluciones de (S). Sea $\{\phi_1, \phi_2\}$ un SFS de (SH). Entonces, una solución y de (S) es de la forma

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + A\phi_1 + B\phi_2$$

para ciertos $A, B \in \mathbb{R}$ e y_p es una solución particular de (EC), que se puede calcular mediante la fórmula de variación de las constantes, obteniendo

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{R(s)}{W(x_0)P(x_0)}((\phi_2(x)\phi_1(s) - \phi_2(s)\phi_1(x))\,\mathrm{d}s),$$

donde $W(x)$ es el wronskiano de ϕ_1 y ϕ_2. En este punto estudiamos el resultado para distintos problemas de contorno. Nosotros vamos a ver la demostración para condiciones tipo Dirichlet, esto es, las condiciones son $y(x_0) = 0 = y(x_1)$. Podemos suponer que $\phi_1(x_0) = 1$, $\phi_1'(x_0) = 0$, $\phi_2(x_0) = 0$ y $\phi_2'(x_0) = 1$. Evaluando y en las condiciones de contorno obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

donde $\beta = -y_p(x_1)$. Estudiando las soluciones del sistema anterior obtenemos fácilmente el resultado. En efecto, el sistema homogéneo tiene única solución si, y solo si $\phi_2(x_1) \neq 0$. En tal caso, el sistema completo tiene solución única. Si $\phi_2(x_1) = 0$, entonces el sistema previo tendrá solución si, y solo si, $\beta = 0$. Como $\phi_2(x_1) = 0$ tenemos que $\phi_1(x_1) \neq 0$ gracias a $W(x_1) \neq 0$. Por tanto, la existencia de solución equivale

$$\int_{x_0}^{x_1} R(s)\phi_2(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Nótese que las soluciones de la ecuación homogénea son de la forma $B\phi_2$ y cada valor de B determina una única solución de la ecuación completa. $\square$

Como consecuencia obtenemos el principal resultado de esta sección.

Teorema 3.10. *Sean P, Q y R son funciones continuas en $[x_0, x_1]$ con $P \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1)$ y $P > 0$. Si $Q < 0$, entonces la función $F(x, y, p) = P(x)p^2/2 - Q(x)y^2/2 + R(x)y$ es convexa. Además, bajo estas hipótesis, consideramos el problema de contorno dado por* (S) *y las condiciones*

$$\begin{cases} a_0 y(x) + b_0 y'(x) = c_0; \\ a_1 y(x) + b_1 y'(x) = c_1; \end{cases} \tag{12}$$

cumpliendo $|a_0| + |a_1| > 0$, $a_0 b_0 \geq 0$ y $a_1 b_1 \geq 0$. Entonces existe una única solución del problema de contorno que es mínimo de $\mathcal{F}$.

Demostración. Es fácil ver que la función F es convexa. En efecto, fijado x obtenemos que

$$\operatorname{Hess}(F)(x, y, p) = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

que es definida positiva. Por tanto, F es convexa y el funcional $\mathcal{F}$ también lo es. El Teorema 2.5 garantiza que las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange son mínimos de $\mathcal{F}$. Veamos que hay una única solución de este problema de contorno. Utilizamos una variante del Lema 3.7 para reducir el problema de contorno a uno Dirichlet homogéneo. En este contexto, por la alternativa de Fredholm basta corroborar que el sistema homogéneo tiene solamente como solución a la trivial. Por reducción al absurdo, supongamos que el problema tiene una solución y distinta de la trivial. Nótese que $y'(x_0) \neq 0$ por unicidad de solución del PVI $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $y'(x_0) > 0$. La función tendrá un máximo en un punto x_2, con $y(x_2) > 0$. Este punto debe ser interior y, por tanto, $y'(x_2) = 0$ e $y''(x_2) < 0$. No obstante, en la ecuación obtenemos que $P(x_2)y''(x_2) + P'(x_2)y'(x_2) + Q(x_2)y(x_2) = 0$. Consecuentemente, $y''(x_2) = -Q(x_2)y(x_2)/P(x_2) > 0$, contradicción. $\square$

4. Problemas variacionales generalizados

4.0.1. Motivación: Existencia de geodésicas

El problema de las geodésicas consiste en, dada una superficie y dos puntos suyos, buscar una curva que conecte los dos puntos y que tenga la mínima longitud posible. Nosotros hemos resuelto parcialmente este problema en el plano, obteniendo que la solución era el segmento que une los dos puntos. Las geodésicas se plantean mediante un PV que dependen de varias funciones con restricciones. Por ejemplo, podemos considerar la esfera, en cuyo caso la solución es un segmento de círculo. La superficie se escribirá de la forma $S = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ y el funcional a minimizar se corresponde con

$$L[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y_1'(x)^2 + y_2'(x)^2 + y_3'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

para cualquier $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1], \mathbb{R}^3)$ tal que $\phi(y) = 0$.

Como vemos el funcional a minimizar depende de varias funciones. Esto lo formalizamos considerando $n \in \mathbb{N}$ y $F : [x_0, x_1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ de manera que el funcional a minimizar viene dado por

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\,\mathrm{d}x.$$

4.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En este punto extendemos las ecuaciones de Euler-Lagrange al problema de Lagrange.

Teorema 4.1. *En el contexto actual, si $\overline{y} \in \mathcal{C}^2(x_0, x_1)$ es un mínimo de $\mathcal{F}$, entonces verifica el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales*

$$\begin{cases} F_{y_1} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1} & = 0; \\ & \vdots \\ F_{y_n} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_n} & = 0; \end{cases}$$

que se denomina ecuación de Euler-Lagrange.

4.2. Restricciones de tipo algebraico

En este punto añadiremos ligaduras de tipo algebraico $\varphi_j(y_1, \ldots, y_n) = 0$, donde $j \in \{1, \ldots, m\}$ y $m < n$. Definimos

$$\mathcal{D}_\varphi = \{y_i \in \mathcal{C}^1(x_0, x_1) : y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1}, \mathrm{Im}(y, y') \subset \Omega, \varphi_j(y_1, \ldots, y_n) = 0\}.$$

El problema variacional a resolver consiste en hallar el mínimo de $\mathcal{F}(y)$ en $\mathcal{D}_\varphi$. Amén de una posible sustitución (despejar alguna $y_i(x)$ en función de las otras), vamos a generalizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

Definimos la función

$$F^* = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) \varphi_j(y_1, \ldots, y_n)$$

y el funcional $\mathcal{F}^* = \int F$.

El siguiente resultado nos proporciona una propiedad e los mínimos de $\mathcal{F}$.

Teorema 4.2. *Si $\overline{y}$ es un mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_\varphi$, entonces existen m funciones $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, denominadas multiplicadores de Lagrange, tales que en $\overline{y}$ se cumplen*

$$\begin{cases} \mathcal{F}^*_{y_1} - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}^*_{p_1} = 0; \\ \vdots \\ \mathcal{F}^*_{y_n} - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}^*_{p_n} = 0; \\ \varphi_1(y_1, \ldots, y_n) = 0; \\ \vdots \\ \varphi_1(y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

A las soluciones de estas ecuaciones se les llaman extremales de $\mathcal{F}^*$.

Demostración. Véase [Elsgoltz]. □

4.3. Restricciones de tipo algebraico-diferencial

Abordamos el problema generalizado incluyendo restricciones sobre las derivadas $\varphi_j(y_1,\dots,y_n)=0$, para $j\in\{1,\dots,m\}$ y $m<n$. Esto es, consideramos

$$\mathcal{D}'_\varphi=\{y\in\mathcal{C}^1(x_0,x_1): y_i(x_0)=y_{i0}, y_i(x_1)=y_{i1}, \operatorname{Im}(y,y')\subset\Omega, \varphi_j(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)=0\}.$$

Proposición 4.3. *Sea $\overline{y}\in\mathcal{C}^2\cap\mathcal{D}'_\varphi$ mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}'_\varphi$. Existen m funciones $\lambda_1(x),\dots,\lambda_m(x)$, denominadas multiplicadores de Lagrange, tales que en $\overline{y}$ se cumplen*

$$\begin{cases}\mathcal{F}^*_{y_1}-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}^*_{p_1}=0;\\ \vdots\\ \mathcal{F}^*_{y_n}-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}^*_{p_n}=0;\\ \varphi_1(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)=0;\\ \vdots\\ \varphi_1(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)=0.\end{cases}$$

A las soluciones de estas ecuaciones se les llaman extremales de $\mathcal{F}^*$.

4.4. Restricciones de tipo integral

En este apartado consideramos restricciones de tipo integral.

$$\mathcal{D}_G=\{y\in\mathcal{C}^1(x_0,x_1): y_i(x_0)=y_{i0}, y_i(x_1)=y_{i1}, \operatorname{Im}(y,y')\subset\Omega, \int_{x_0}^{x_1}G_j(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)=L_j\ \forall j\in\{1,\dots,m\},$$

donde $m\in\mathbb{N}$.

Teorema 4.4 (Ligaduras integrales)**.** *Sea $\overline{y}\in\mathcal{C}^2\cap\mathcal{D}_G$ mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_G$. Existen m constantes $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, denominadas multiplicadores de Lagrange, tales que, para $F^*=F+\sum_{j=1}^m\lambda_jG_j(x,y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)$, en $\overline{y}$ se cumplen las ecuaciones*

$$\begin{cases}\mathcal{F}^*_{y_1}-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}^*_{p_1}=0;\\ \vdots\\ \mathcal{F}^*_{y_n}-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}^*_{p_n}=0;\\ \int_{x_0}^{x_1}G_1(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)=L_1;\\ \vdots\\ \int_{x_0}^{x_1}G_1(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)=L_m.\end{cases}$$

A las soluciones de estas ecuaciones se les llaman extremales de $\mathcal{F}^*$.

Demostración. Defino el funcional $\widetilde{F}[y,z_1,\dots,z_m]=\mathcal{F}[y]$, que depende de $n+m$ funciones, y lo considero sobre el conjunto

$$\mathcal{D}'_\varphi=\{y\in\mathcal{D}, z_j\in\mathcal{C}^1([x_0,x_1]), z_j(x_0)=0, z_j(x_1)=L_j, \varphi_j=G_j(x,y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)-z'_j=0\}.$$

Nótese que estas restricciones sobre z_j equivalen a

$$L_j=z_j(x_1)=\int_{x_0}^{x_1}G_1(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n).$$

Aplicamos la Proposición 4.3, obteniendo para $\widetilde{\mathcal{F}}^* = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)(G_j - z_j')$ las ecuaciones

$$\widetilde{\mathcal{F}}^*_{y_1} - \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{\mathcal{F}}^*_{p_1}$$

para $i = 1, \ldots, n$ y las ecuaciones

$$0 - \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{\mathcal{F}}^*_{z_j} = 0$$

para $j = 1, \ldots, m$. Estas últimas ecuaciones equivalen a $\lambda_j'(x) = 0$, esto es, las funciones λ_j son constantes. La demostración finaliza al comprobar que las ecuaciones obtenidas son las mismas que las del enunciado. □

Ejemplo 4.5 (Problemas isoperimétricos): Se trata de maximizar el área que pueda encerrar una cuerda de longitud prefijada. Modelizamos la cuerda como una curva $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ de clase 1, que escribimos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, verificando $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$. La longitud de la curva viene dada por $\ell(\alpha) = \int_{t_0}^{t_0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$. Por el teorema de Stokes obtenemos que

$$\text{Area}(\alpha) = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Buscamos maximizar el funcional

$$\mathcal{F}[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{2}\,\mathrm{d}t$$

sobre

$$\mathcal{D}_G = \{x, y \in \mathcal{C}^1([0,1]) : x(0) = x(1), y(0) = y(1), \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 = L}\}.$$

Definimos $F(x, y, p, q) = (xq - yp)/2$ y $G(x, y, p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$. Aplicamos el Teorema 4.4, obteniendo las ecuaciones

$$\begin{cases} -\frac{x'}{2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{2} + \lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right) = 0; \\ -\frac{y'}{2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y}{2} + \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right) = 0; \end{cases}$$

que se simplifican en

$$\begin{cases} x - \lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = x_0; \\ y - \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = y_0. \end{cases}$$

Veamos que la solución es una circunferencia de centro (x_0, y_0). En efecto,

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = \left(\lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)^2 + \left(\lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)^2 = \lambda^2$$

y el radio es el multiplicador de Lagrange λ. Por tanto, de tener solución el problema y ser ésta de clase 2, entonces es la circunferencia. En el futuro probaremos que efectivamente se verifican estos hechos con el Teorema de Lax-Milgram. △

Ejemplo 4.6 (Problema de la Catenaria): Fijada una longitud $L > 1$ de ante mano, buscamos la curva y de longitud L que encontramos al fijar los extremos de una cuerda en los puntos $(0, h)$ y $(1, h)$ y someterla a la acción de la gravedad. Tras plantear el problema mediante razonamientos físicos obtenemos que hay que minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2},$$

que mide la energía potencial de la cuerda, y está definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D}_G = \{y \in \mathcal{C}^1([0,1]) : y(0) = y(1) = h, \int_0^1 \sqrt{1 + y'(t)^2} = L > 1\}.$$

Aplicamos los multiplicadores de Lagrange para restricciones de tipo integral. Tenemos $F^* = y\sqrt{1+p^2} + \lambda\sqrt{1+p^2}$. La ecuación de Euler-Lagrange equivale a las ecuaciones

$$C = F^* - y' F_p^* = (y+\lambda)\sqrt{1+p^2} - p(y+\lambda)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

para $C > 0$. Esta ecuación se simplifica en

$$y = C\sqrt{1+(y')^2} - \lambda.$$

Para resolver esta ecuación, en primer lugar, buscamos las posibles soluciones constantes. Nótese que la única solución constante es $y = C - \lambda$. No obstante, estas soluciones están en $\mathcal{D}_G$. Para encontrar las soluciones no constantes realizamos el cambio de variable $y' = \sinh(t)$. Obtenemos la ecuación

$$y = C\cosh(t) - \lambda.$$

Sea $x = x(y)$ una función que depende de y. Tenemos que x verifica la ecuación

$$x = \int^y \frac{1}{y'(x(y))}\,\mathrm{d}y = \int \frac{C\sinh(t)}{\sinh(t)}\,\mathrm{d}t = Ct + K.$$

Tenemos que $t = (x-k)/t$ y, por tanto, $y = C\cosh((x-k)/C) - \lambda$. NO ENTIENDO NADA DE ESTOS CAMBIOS...

Ahora, fijada $y = C\cosh((x-k)/C) - \lambda$, imponemos las condiciones de Dirichlet y la restricción integral. De las primeras condiciones obtenemos que $\cosh(-k/C) = \cosh((1-k)/C)$. Esto se produce si, y solo si, $|k/C| = |(1-k)/C|$, de donde deducimos que $k = 1/2$. Además,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh(\frac{2x-1}{2C})^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cosh(\frac{2x-1}{2C})\,\mathrm{d}x = 2C\sinh(\frac{1}{2C}).$$

Esta ecuación en función de C tiene una única solución. Por tanto, solo hay una extremal válida para el problema que viene dada por $y = C\cosh((x-0{,}5)/C) - \lambda$. De la condición $y(0) = h$ obtenemos el valor de λ. △

5. Problemas de Sturm-Liouville

En esta sección relacionamos los problemas de Sturm-Liouville con los PV con restricciones integrales. En primer lugar vemos un ejemplo que motiva el estudio de los problemas de Sturm-Lioville.

Ejemplo 5.1: Sea $L > 0$. Busca los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \\ y(0) = 0; \\ y(L) = 0; \end{cases} \tag{13}$$

tiene soluciones no nulas y di cuáles son esas soluciones.

Procedemos como es habitual. El polinomio de la EDO es $P(\mu) = \mu^2 + \lambda$. Distinguimos tres casos.

a) El número λ es negativo. Entonces las raíces de P son $\mu_+ = \sqrt{-\lambda}$ y $\mu_- = -\sqrt{-\lambda}$, que son reales. Por tanto, las soluciones de la EDO vienen dadas por

$$y(x) = Ae^{\mu_+ x} + Be^{\mu_- x},$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$. Imponemos las condiciones de contorno a la solución general. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ Ae^{\mu_+ L} + Be^{\mu_- L} = 0; \end{cases} \tag{14}$$

que tiene solución única.

b) El número λ es 0. En tal caso, las soluciones son las rectas. Al imponer las condiciones iniciales obtenemos que la única solución es $y = 0$.

c) El número λ es positivo. En tal caso las raíces de P son $\mu_+ = i\sqrt{\lambda}$ y $\mu_- = -i\sqrt{\lambda}$. Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$. Imponemos las condiciones de contorno a la solución general. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A = 0; \\ A\cos(\sqrt{\lambda}L) + B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0; \end{cases} \tag{15}$$

que tiene solución única si, y solo si, $\sin(\sqrt{\lambda}L) \neq 0$, lo que sucede si, y solo si, $\lambda \neq (n\pi/L)^2$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, la solución es $A = 0$ y $B = 0$. Si por el contrario, $\lambda = (n\pi/L)^2$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces obtenemos una recta de soluciones, que son los múltiplos de

$$y_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L}).$$

△

Definición 5.1. Un problema de Sturm-Liouville consiste en encontrar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema de contorno

$$\begin{cases} (Py')' + (Q + \lambda S)y = 0; \\ a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) = 0; \\ a_1 y(x_1) + b_1 y'(x_1) = 0; \end{cases} \tag{SL}$$

donde P, Q, S son continuas, P es de clase 1 y $P, S > 0$. A los valores λ los llamamos valores propios asociados al problema de Sturm-Liouville y a las soluciones no nulas de (SL) funciones propias.

Vamos a utilizar el Teorema de Sturm-Lioville, que no demostraremos por la dificultad de la demostración.

Las soluciones del problema de Sturm-Liouville son elementos del espacio de Hilbert

$$L^2_S(x_0, x_1) = \left\{ y \in L(x_0, x_1) : \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)S(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

cuyo producto escalar es

$$\langle y, z\rangle = \int_{x_0}^{x_1} y(x)z(x)S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 5.2 (Sturm-Liouville)**.** *Los valores propios del problema de Sturm-Liouville forman una sucesión $\{\lambda_n\}$ creciente que diverge positivamente. Las funciones propias normalizadas quedan determinadas de forma única salvo el signo y verifican:*

a) *Tienen exactamente $n-1$ ceros en $[x_0, x_1]$.*

b) *Son ortogonales dos a dos.*

c) *Cualquier otra función en $L^2_S(x_0, x_1)$ admite un desarrollo en funciones propias, eso es,*

$$y(x) = \sum_{n\geq 0|} \langle y, y_n\rangle\, y_n(x).$$

Sea $\mathcal{D} = \{y \in L^2 : y \in \mathcal{C}^2\}$ y $L : \mathcal{D} \to L^2_S$ dado por $L[y] = ((Py')' + Qy)/S$. Tenemos que

$$\langle y, L(z)\rangle = \int_{x_0}^{x_1} y((Pz')' + Qz)\,\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1} Py'z' + \int_{x_0}^{x_1} yQz\,\mathrm{d}x = \langle Ly, z\rangle\,.$$

Consecuentemente, L es un funcional autoadjunto. No sabemos de momento si es continuo.

5.1. Relación con PVs

Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} (P(x)y'(x)^2 + Q(x)y(x)^2)\,\mathrm{d}x.$$

Buscamos su mínimo en $y \in \mathcal{C}^2$ con $y(x_0) = 0 = y(x_1)$ con restricción de tipo $\int_{x_0}^{x_1} y(x)^2 S(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tenemos que $F(x, y, p) = Pp^2 - Qy^2$. Utilizando el Teorema 4.4 encontramos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $F^*(x, y, p) = Pp^2 - Qy^2 + \lambda y^2 S$ tal que las soluciones del problema verifican las ecuaciones

$$0 = \mathcal{F}^*_y - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}^*_p = -2\left[(Py')' + (Q + \lambda S)y\right],$$

y, por tanto, las extremales del problema son soluciones de un problema de Sturm-Liouville. El objetivo es buscar los valores propios y las funciones propias del problema.

Teorema 5.3. *En el contexto actual, sean (λ_n, y_n) los valores y funciones propios del problema de Sturm-Liouville asociado al funcional*

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} P(x)(y'(x))^2 - Q(x)y(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, el mínimo del funcional $\mathcal{F}$ en el conjunto

$$\mathcal{D}_{n-1} = \{y \in \mathcal{C}^2(x_0, x_1) \text{ con c.c. separadas y restricciones de tipo integral}$$
$$\int_{x_0}^{x_1} y(x)^2 S(x)\,\mathrm{d}x = 1, \int_{x_0}^{x_1} y_1(x)y(x)S(x)\,\mathrm{d}x = 0, \dots, \int_{x_0}^{x_1} y_{n-1}(x)y(x)S(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$$

es y_n y verifica $\mathcal{F}[y_n] = \lambda_n$.

EJEMPLO 5.4: Calcula el mínimo de

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^e x(y'(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in \mathcal{C}^1(1,e) : y(1) = 0 = y(e), \int_{x_0}^{x_1} y(x)^2/x \, \mathrm{d}x = 1, \int_{x_0}^{x_1} \sin(\pi \log(x)) y(x) S(x) \, \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

△

6. Funcionales de funciones que dependen de varias variables

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto conexto y $\gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua. Sea además $F : D \to \mathbb{R}$ con $D = \Omega \times W \subset \mathbb{R}^5$, $F(x,u,p,q)$. Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), u_{x_1}(x), u_{x_2}(x)) \, \mathrm{d}x$$

definido en $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{C}^2(\Omega) : u(x) = \gamma(x) \ \forall x \in \partial\Omega[restricionesdelconjundoD]\}$. Podemos adaptar el Teorema 2.3 en este contexto para obtener una nueva ecuación de Euler-Lagrange

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_p - \frac{\partial}{\partial x_2} F_q = 0. \tag{16}$$

EJEMPLO 6.1 (La membrana vibrante): Se trata de modelar la posición de una membrana (película elástica homogénea) sometida a fuerzas verticales. EN equilibrio, suponemos que $(x, \varphi(x))$ describe su posición, donde $\varphi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\varphi \in \mathcal{C}^2$. Supongamos que solo hay desplazamientos verticales y llamo $(x, u(t,x))$ a la posición en tiempo t, con $u(t,x) = \varphi(x)$. Por el *principio de Halminton* los físicos obtienen que la solución al problema minimiza la energía el sistema, esto es, minimiza el siguiente funcional

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^{+\infty} \left(\int_\Omega (E_k[u] - E_p[u]) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t,$$

donde $E_k[u] = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)^2/2$ es la energía cinética mientras que $E_p[u]$ es la energía potencial en el punto x. Tras desarrollar las expresiones físicas que aparecen en el funcional obtenemos un modelo muy complejo que no merece la pena estudiar a mi criterio. Tras varias simplificaciones de este funcional obtenemos

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\sigma(\nabla u)^2 + \alpha u^2 - 2f(x)u \right) \mathrm{d}x$$

en $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ en } \Omega\} = \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, donde σ y α son constantes y f es una función en x. Escribiendo la ecuación de Euler - Lagrange asociada a este PV obtenemos la denominada ecuación de la membrana

$$-\mathrm{div}(\sigma(x)\nabla u) = -\alpha(x)u + f,$$

donde $\mathrm{div}(G) = \frac{\partial}{\partial x_1} G_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} G_n$.

[AÑADIR DEL PAPEL DEL AMIGO JUANJO]. △

l

6.1. Resolución de la ecuación de ondas

En el Ejemplo 6.1 hemos obtenido la ecuación de Ondas como ecuación de Euler-Lagrange de un PV. En esta sección vamos a resolver la ecuación de ondas en casos particulares.

6.1.1. Caso 1

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}; \\ u(0,x) = u_0(x); \\ u_t(0,x) = v_0(x). \end{cases} \tag{17}$$

Hacemos el cambio de variable $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$. Consideramos la función $U(\xi, \eta) = u(t,x) = u((\xi - \eta)/(2c), (\xi + \eta)/2)$. Por la regla de la cadena obtenemos que

$$u_{tt} = c^2 U_{\xi\xi} + c^2 U_{\eta\eta} - 2c^2 U_{\xi\eta};$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + 2U_{\xi\eta};$$

Por tanto, de (17) deducimos que $U_{\xi\eta} = 0$. Esto equivale a que $U(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta)$ para ciertas funciones g y h de clase 2. Por tanto, obtenemos que $u(t,x) = g(x+ct) + h(x-ct)$. Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos $g(x) + h(x) = u_0(x)$ y $cg'(x) - ch'(x) = v_0(x)$. En particular, $g'(x) + h'(x) = u_0'(x)$, de donde deducimos que

$$\begin{cases} g'(x) = (v_0(x) + cu_0'(x))/(2c); \\ h'(x) = (cu_0'(x) - v_0(x))/(2c). \end{cases}$$

Integrando obtenemos una expresión para g y h

$$\begin{cases} g(x) = u_0(x)/2 + \int\limits_0^x v_0(x)/(2c)\,\mathrm{d}x + K_1; \\ h(x) = u_0(x)/2 - \int\limits_0^x v_0(x)/(2c)\,\mathrm{d}x + K_2; \end{cases}$$

Sumando y comprobando que las constantes se anulan obtenemos la fórmula de D'Alembert

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

6.1.2. Caso 2

Sea $c > 0$ la velocidad de la onda.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t \geq 0, x \in [0,L]; \\ u(0,x) = u_0(x); \\ u_t(0,x) = v_0(x); \\ u(t,L) = u(t,0) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{19}$$

Añadimos además las siguientes condiciones de combatibilidad

$$\begin{cases} u_0(0) = u_0(L) = 0; \\ u_0''(0) = u_0''(L) = 0; \\ v_0(0) = v_0(L) = 0. \end{cases}$$

Buscamos soluciones no nulas de la forma $u(t,x) = T(t)W(x)$. De existir una solución de esta forma se verificará

$$u_{tt} = T''(t)W(x) \text{ y } u_{xx} = T(t)W''(x).$$

Puesto que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, suponiendo que T y W no se anulan obtenemos que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{W''(x)}{W(x)}.$$

Por tanto, las funciones T''/T y W''/W son iguales a una constante λ. Esto es, se verifican las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0; \\ W''(x) + \frac{\lambda}{c^2} W(t) = 0. \end{cases}$$

Empezamos resolviendo la ecuación de W. De las condiciones de contorno del problema deducimos que $T(t)W(0) = 0$ para todo $t \geq 0$. Puesto que hemos supuesto que T no se anula tenemos que $W(0) = 0$. Análogamente deducimos que $W(L) = 0$. Distinguimos tres casos.

a) Se tiene $\lambda < 0$. En tal caso $W(x) = A\exp(\sqrt{-\lambda}x/c) + B\exp(\sqrt{\lambda}x/c)$. No obstante, las condiciones de contorno obligan a que $A = B = 0$, luego la única solución es la constantemente cero, que hemos descartado previamente.

b) Se tiene $\lambda = 0$. Análogamente la única solución del problema de contorno es la constantemente 0.

c) Se tiene $\lambda > 0$. Las soluciones son de la forma $W(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x/c) + B\cos(\sqrt{\lambda}x/c)$. De $W(0) = 0$ deducimos que $A = 0$. De $W(L) = 0$ deducimos que o bien $B = 0$, solución que hemos descartado, o bien $\sin(\sqrt{\lambda}L/c) = 0$, esto es, $\lambda = (n\pi c/L)^2$ para algún $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso las soluciones son múltiplos de $\sin(n\pi x/L)$.

Hemos deducido que la ecuación tiene solución no nula solamente para los valores $\lambda_n = (n\pi c/L)^2$. Resolvemos ahora la ecuación asociada a T para estos valores de λ. Obtenemos que $T(t) = A\cos(nc\pi x/L) + B\sin(nc\pi x/L)$. Obtenemos pues que la solución de la ecuación diferencial debe ser de la forma

$$u(t,x) = \sin(n\pi x/L)\left(A\cos(nc\pi x/L) + B\sin(nc\pi x/L)\right). \tag{20}$$

Es fácil comprobar que estas funciones son soluciones de la ecuación. Veamos si verifican las condiciones iniciales en el tiempo. Tenemos que $u(0,x) = A\sin(n\pi x/L)$ y $u_t(0,x) = Bnc\pi\sin(n\pi x/L)/L$. Estas funciones pueden no ser iguales a las funciones u_0 y v_0. Lo solucionamos mediante el desarrollo wn serie de Fourier. Por las condiciones de compatibilidad obtenemos que $u_0(x) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin(n\pi x/L)$. Análogamente $v_0(x) = \sum_{n\geq 1} C_n \sin(n\pi x/L)$.

Comentario 6.2 (Principio de superposición). *Una suma, finita o infinita con convergencia uniforme, de soluciones de la ecuación* (19) *es solución de la ecuación* (19).

Si conseguimos esta convergencia uniforme de la serie de Fourier obtenemos que $u(t,x) = \sum_{n\geq 1} u_n(t,x)$ es solución de (19) y verifica todas las condiciones del problema.

Ejemplo 6.3: Consideramos el problema de contorno

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, \quad t \geq 0, x \in [0,1]; \\ u(t,0) = 0 \text{ y } u(t,1) = 1; \\ u(0,x) = x; \\ u_t(0,x) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Utilizamos las soluciones del problema homogéneo, que es un caso particular de la ecuación de Ondas (19). Sea ω una solución del problema homogéneo y $u(t,x) = \omega(t,x) + v(x)$. Tenemos que u es solución de (21) si, y solo si, $-v''(x) = x$, $v(0) = 0$, $v(1) = 1$ y se verifican las condiciones de contorno en x. Deducimos que debe tenerse $v(x) = (7x - x^3)/6$, $\omega(0,x) = (x^3 - x)/6$, $\omega_t(0,x) = 0$. Podemos encontrar tal ω mediante una serie de Fourier como se hizo anteriormente. △

En los siguientes párrafos introducimos los conceptos de análisis funcional que necesitamos para completar el desarrollo anterior.

Teorema 6.4 (Riesz-Fischer, 1907)**.** *El conjunto*

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\frac{nT}{2\pi}x), \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\frac{nT}{2\pi}x) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base de Hilbert de $\mathrm{L}^2(0,T)$.

Ejemplo 6.5: Consideramos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad \text{en } [0,T]; \\ y(0) = y(T); \\ y'(0) = y'(T). \end{cases} \tag{22}$$

Buscamos los valores propios del problema de Sturm-Liouville, esto es, los valores de λ para los que el problema tiene solución no trivial. Es fácil comprobar que si $\lambda < 0$, entonces la única solución es $y = 0$. En cambio, si $\lambda = 0$, las soluciones son las funciones constantes, luego 0 es un valor propio. Por último, si $\lambda > 0$, el problema tiene solución si, y solo si, $\cos(T\sqrt{\lambda}) = 1$ o, equivalentemente, $\lambda = (2n\pi/T)^2$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, las funciones propias son 2 para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_{2n} = \cos(2n\pi x/T)$ y $y_{2n-1} = \sin(2n\pi x/T)$. △

En $\mathrm{L}_2([0,T])$ la convergencia en norma no implica necesariamente la convergencia puntual y mucho menos la convergencia uniforme. Necesitaremos criterios de convergencia que nos aseguren que la serie de Fourier converge uniformemente. Uno de los criterios más sencillos es el criterio de Weierstrass. En lo que sigue enunciamos los teoremas de convergencia que utilizaremos en la asignatura.

Teorema 6.6 (Teoremas de convergencia)**.** *Sea* $y \in \mathrm{L}_2([0,T])$ *con* $y(0) = y(T)$. *Se verifican las siguientes afirmaciones.*

a) *Por el Teorema de Riesz-Fisher, la serie de Fourier de* y *admite una parcial que converge c.p.d. a* y.

b) *Si* y *es continua, entonces la serie de Fourier de* y *converge puntualmente a* y.

c) *Si* y *es continua a trozos en* $[0,T]$, *entonces la serie de Fourier de* y *converge puntualmente a* y *fuera de los puntos de discontinuidad. En los puntos de discontinuidad la serie de Fourier converge a la media de los límites laterales de* y.

d) *Si y es continua y además y' es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de y converge absoluta y uniformemente.*

e) *Si $y \in \mathcal{C}^k([0,T])$ y $y^{m)}(0) = y^{m)}(T)$ para todo $0 \leq m \leq k$ e y^{k+1} es continua a trozos, entonces la serie de las derivadas hasta orden k converge absoluta y uniformemente a la correspondiente derivada de y.*

En ocasiones necesitaremos desarrollos de Fourier en $\mathrm{L}_2([-L,L])$. Para ello podemos transladar la función a $[0,2L]$, calcular el desarrollo de Fourier en este intervalo y volverlo a transladar. Realizando los cálculos obtenemos que

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \right),$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x;$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x.$$

Nótese que si la función y es par, entonces $b_n = 0$ para todo n. En cambio, si la función y es impar, entonces $a_n = 0$ para todo n.

Consideremos $y \in \mathrm{L}_2([0,L])$. Podemos extender y a $[-L,L]$ para que sea par o impar y aplicar los desarrollos obtenidos a la nueva función. Obtenemos pues dos nuevos desarrollos que solamente involucran cosenos y senos respectivamente:

- **Serie de cosenos.** Tenemos que $y(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$, donde para cada n

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y_{par}(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} y(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Serie de senos.** Tenemos que $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, donde para cada n

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y_{par}(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} y(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x.$$

Ahora podemos aplicar los teoremas de convergencia a estas nuevas series, obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 6.7. *Sea $y \in \mathcal{C}([0,T])$ con y' continua a trozos. Entonces,*

a) *su serie de cosenos converge uniformemente;*

b) *si $y(0) = y(T) = 0$, entoces la serie de senos converge.*

Ya podemos resolver la ecuación de ondas de partida. Recogemos todos los argumentos dados en el siguiente teorema.

Teorema 6.8. *Dados $u_0 \in \mathcal{C}^2(]0,1[)$ con u_0''' continua a trozos y $v_0 \in \mathcal{C}^1(]0,L[)$ con v_0'' continua a trozos tales que*

$$u_0(0) = u_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = v_0(0) = v_0(L).$$

El sistema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t \geq 0, x \in [0,L]; \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,L]; \\ u_t(0,x) = v_0(x), \quad x \in [0,L]; \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

tiene una única solución dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{nc\pi t}{L}) + \frac{b_n L}{nc\pi} \sin(\frac{nc\pi t}{L}) \right) \sin(\frac{n\pi x}{L}),$$

donde a_n y b_n provienen de las series de Hilbert de u_0 y v_0, esto es,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \text{ y } v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}).$$

Demostración. La existencia viene dada por el procedimiento desarrollado durante la sección. Veamos qe se da la unicidad. Utilizamos el denominado *método de la energía*. Definimos el funcional E que a cada función $u \in \mathcal{C}^2([0,L])$ le asgina la función $E[u]$ dada por

$$E[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) \mathrm{d}x, \quad t \geq 0.$$

Veamos que si u es solución de la ecuación de ondas, entonces $E[u]$ es constante. En efecto, tenemos que

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^L u_t u_{tt} \,\mathrm{d}x = c^2 \int_0^L u_t u_{xx} \,\mathrm{d}x = [u_t u_x]_0^L - c^2 \int_0^L u_{tx} u_x \,\mathrm{d}x.$$

Deducimos pues que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_0^L \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2 \,\mathrm{d}x + c^2 \int_0^L u_{tx} u_x \,\mathrm{d}x = [u_t u_x]_0^L.$$

Sean u_1 y u_2 dos soluciones de la ecuación de ondas. Entonces, $u = u_1 - u_2$ es solución del problema con todas las condiciones a cero. Utilizando la igualdad anterior tenemos que $E[u]$ tiene derivada nula, luego $E[u](t) = E[u](0) = 0$. $u_1 = u_2$. Deducimos pues que $u = 0$ y, por tanto, $u_1 = u_2$. □

6.2. Solución de la ecuación de Dirichlet

NO EXAMEN.

Vamos a resolver la ecuación de Dirichlet utilizando la técnica de separación de variables, que hemos utilizado para la ecuación de ondas. Recordemos que la ecuación de Dirichlet viene dada por

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega; \\ u = \gamma \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{23}$$

6.2.1. Laplaciano en polares

Realizamos un cambio a polares, $u(x_1, x_2) = U(\rho, \theta)$. Obtenemos la expresión denominada *Laplaciano en polares*

$$U_{pp} + \frac{U_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{U_\rho}{\rho} = \Delta_x u(\rho\cos(\theta), \rho\cos(\theta)). \tag{24}$$

Si la función u es racial, esto es, $u(x) = U(\rho)$ para todo $x \in \Omega$, entonces la expresión del Laplaciano en polares se simplifica, obteniendo

$$\Delta_x u(x) = U_{pp} + \frac{U_\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho^{N-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{N-1}U_\rho), \tag{25}$$

donde N es el número de variables de u.

6.2.2. La ecuación de Dirichlet para funciones radiales

Aplicando lo anterior para u radial obtenemos que la ecuación de Dirichlet equivale a

$$\rho^{N-1}U_\rho = \text{cte.} \tag{26}$$

Obtenemos pues que todas las soluciones de la ecuación son de la forma

$$u(x) = \begin{cases} C_1|x| & \text{si} N = 1; \\ C_2 \log|x| & \text{si} N = 2; \\ C_3/|x|^{N-1} & \text{si} N \geq 3, \end{cases}$$

que es la llamada *solución fundamental del laplaciano en* $\mathbb{R}^N$

6.2.3. La ecuación de Dirichlet en el disco

Nos proponemos resolver (23) en el disco unidad. Utilizando el Laplaciano en polares obtenemos el problema equivalente

$$\begin{cases} U_{pp} + \frac{U_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{U_\rho}{\rho} = 0, & (\rho, \theta) \in]0,1] \times [0, 2\pi]; \\ U(1,\theta) = \overline{\gamma}(\theta), & \theta \in [0, 2\pi]; \\ U(\rho, 0) = U(\rho, 2\pi), & \rho \in]0,1]. \end{cases} \tag{27}$$

Separamos variables. Buscamos $U(\rho, \theta) = v(\rho)w(\theta)$. En tal caso se verifica la ecuación

$$v''(\rho)w(\theta) + \frac{v(\rho)}{\rho^2}w''(\theta) + \frac{v'(\rho)}{\rho}w(\theta) = 0, \tag{28}$$

de donde deducimos que

$$\frac{w''(\theta)}{w(\theta)} = -\frac{\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho)}{v(\rho)} = -\lambda \cong \text{cte.} \tag{29}$$

7. Derivadas generalizadas

Teorema 7.1 (Fórmula de Green)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio y sean $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) v(x)\, \mathrm{d}x + \int_\Omega u(x) v(x)\, \mathrm{d}s.$$

Sea $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \mid \mathrm{Sop}(\gamma) \subset\subset \Omega\}$, donde $A \subset\subset B$ significa que $A \subset$ abierto $\subset$ compacto $\subset B$ se verifica

$$\int_\Omega \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{30}$$

A la función ϕ se le denomina *función test*. Sea $f \in \mathcal{L}^1_{loc} = \{g \colon \Omega \to \mathbb{R} \mid g \in \mathcal{L}(K)\ \forall K \subset\subset \Omega\}$. El funcional $L_f \colon \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$L_f[\phi] = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) f(x)\, \mathrm{d}x,$$

es un operador lineal. Lo denotamos $L_f[\phi] = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle$. Nótese que si f fuese de clase 1, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle$ es efectivamente el producto en L^2 por (30).

Proposición 7.2. *Si f es $\mathcal{C}^1$, entonces su derivada queda caracterizada por L_f, es decir, si $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ es otra función tal que para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x)\, \mathrm{d}x,$$

entonces $g = \frac{\partial}{\partial x_i} f$.

Demostración. Es una consecuencia del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones. □

Definición 7.1. Dada $f \in \mathcal{L}_{loc}(\omega)$ definimos su *derivada generalizada* o *derivada distribucional* respecto de la variable x_i como el operador lineal sobre $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dado por

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Comentario 7.3. *Se puede definir la* derivada generalizada de orden k *como*

$$\left\langle \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f, \phi \right\rangle = -\int_\Omega \frac{\partial^k}{\partial x^{|k|}} \phi(x) f(x)\, \mathrm{d}x,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $k = (k_1, \ldots, k_n)$

Comentario 7.4. *La derivada generalizada es un operador lineal continuo sobre el espacio $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ con una topología τ que no podemos definir en este momento. Cabe decir que la convergencia de una sucesión $\{\phi_n\}$ a ϕ en esta topología equivale a que $\{\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\phi_n\}$ converge uniformemente a $\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\phi$ para todo k.*

Definición 7.2. Una función $f \in \mathcal{L}_{loc}(\Omega)$ tiene *derivada débil* cuando su derivada generalizada viene representada por una función, es decir, existe $g \in \mathcal{L}_{loc}(\Omega)$ tal que para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f, \phi \right\rangle = \langle g, \phi \rangle = \int_\Omega g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

A la clase funciones iguales a g c.p.d. se le llama *derivada débil de f respecto de x_i*.

Comentario 7.5. *En caso de existir la derivada débil es única por el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones (versión generalizada a $\mathcal{L}_{loc}(\Omega)$).*

Ejemplo 7.6: Calculamos la derivada débil de $f(x) = |x|$ en $\Omega = \mathbb{R}$. Tenemos que

$$-\int_{\mathbb{R}} |x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 x\phi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty x\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \phi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} s_a(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde s es la función signo, definida en 0 como $s(0) = 1$. △

Ejemplo 7.7: La función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

no tiene derivada débil. En efecto, tenemos que

$$-\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0),$$

que es el operador "evaluar en 0". Los ingenieros utilizan la delta de Dirac (que no es una función) para decir que este operador es igual a $\langle \delta_0, \phi \rangle$. De ello deducen que δ_0 es la derivada débil de H. Esto es formalmente erróneo, no existe la derivada débil de esta función. En efecto, el operador "evaluar en 0" no coincide con $\langle g, \phi \rangle$ para ninguna g. En tal para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, +\infty[)$ tendríamos $\langle g, \phi \rangle$. Por el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones obtenemos que g es 0 en $[0, +\infty[$. Razonamos de forma análoga en $]-\infty, 0]$, obteniendo que g es constantemente 0, contradicción. △

Proposición 7.8. a) *Si $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, entonces u' es la derivada débil de u.*

b) *Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y u tiene derivada débil, entonces u' es la derivada débil de u.*

Puede ser que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ pero u no tenga derivada débil. En tal caso, la derivada generalizada suele ser de la forma $u' + \delta$, donde δ es una delta de dirac en un subconjunto de la frontera de Ω.

Definición 7.3. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, +\infty]$. Sea Ω dominio de $\mathbb{R}^N$. El *espacio de Sobolev* es

$$W^{m,p} = \{\text{funciones de } L_p(\Omega) \text{ tales que sus derivadas hasta orden } m \text{ son débiles y están en } L_p(\Omega)\}.$$

Es un espacio de Banach con la norma

$$||u|| = \left(||u||^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} ||\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u||^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

si $p \in [1, +\infty[$ y

$$||u|| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} u||^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)}$$

si $p = +\infty$. Para $p = 2$ el espacio de Sobolev es un espacio de Hilbert, y se denota $\mathrm{H}^m(\Omega)$, para el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} u \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} v \, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 7.9 (Derivada débil de $|x|^\alpha$): Nótese que el gradiente de $|x|^\alpha$ es $\alpha x |x|^{\alpha - 2}$ para $x \neq 0$. Buscamos la derivada débil de $|x|^\alpha$ en $B(0,1)$. Para ello procedemos com en el Ejemplo 7.6, obteniendo que efectivamente ésta es la derivada débil. △

Ejemplo 7.10: Sea $B \subset \mathbb{R}^N$. Prueba que

- $1/|x|^\alpha \in L_p(B)$ si, y solo si, $\alpha p < N$;
- $1/|x|^\alpha \in L_p(\mathbb{R}^N \setminus B)$ si, y solo si, $\alpha p > N$.

Ayuda: Cambio a radiales en $\mathbb{R}^N$. △

En $H^1(\Omega)$ hay un subespacio destacado, $H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$. Aunque a priori no tiene sentido exigir que una función sea 0 en la frontera de Ω (la medida de su frontera es 0), esto sí se puede hacer mediante *densidad*. Esto se estudia en otras asignaturas de la carrera. De hecho, $W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)}$, donde el cierre es en $W^{1,p}$. Es más, se puede demostrar que $W^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega)}$.

Teorema 7.11 (Teorema fundamental del cálculo integral)**.** *Dado $I =]a, b[$ y $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(I)$ y $c \in I$, definimos*

$$F(x) = \int_c^x f(s) \, \mathrm{d}s$$

para todo $x \in I$. Entonces, F tiene derivada débil y ésta es f. A F se le llama primitiva de f. Además, F es continua.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
-\int_a^b F(x)\phi'(x) \, \mathrm{d}x &= -\int_a^b \int_c^s f(s)\phi'(x) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^c \int_s^c f(s)\phi'(x) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x - \int_c^b \int_c^s f(s)\phi'(x) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^c \int_x^c f(s)\phi'(x) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x - \int_c^b \int_c^x f(s)\phi'(x) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^c f(s)(\phi(c) - \phi(s)) \, \mathrm{d}s - \int_c^b f(s)(\phi(s) - \phi(c)) \, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

□

Teorema 7.12 (Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado en al menos una dirección, esto es, existe $v \in \mathbb{R}^N$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $a \leq < x, v > \leq b$ para todo $x \in \Omega$. Entonces, para cada $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ existe $c > 0$ con*

$$\int_\Omega u^2(s) \, \mathrm{d}s \leq C \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 \, \mathrm{d}s.$$

Demostración. Demostramos el resultado para el caso el caso uno dimensional. Defino el funcional $\mathcal{F}\colon \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}[u] = \int_{x_0}^{x_1} (u')^2 \,\mathrm{d}x,$$

donde $\mathcal{D}_1 = \{u \in \mathcal{C}_0^1(x_0, x_1) \mid \int_{x_0}^{x_1} u^2 \,\mathrm{d}x = 1\}$. Podemos aplicar el Teorema (5.2), obteniendo que el funcional $\mathcal{F}$ tiene mínimo y vale $\lambda_1 = (\pi/(x_1 - x_0))^2$. Por tanto, dado $u \in C_0^1(x_0, x_1)$ tenemos que

$$\mathcal{F}[u/\int_{x_0}^{x_1} u^2 \,\mathrm{d}x] \geq \lambda_1.$$

Hemos probado parcialmente el resultado para $C = 1/\lambda_1$. Para pasar a $\mathrm{H}_0^1(x_0, x_1)$ usamos que $\mathrm{H}_0^1(x_0, x_1) = \overline{\mathcal{C}_0^1(x_0, x_1)}^{\mathrm{H}^1}$. □

Teorema 7.13. *Sea Ω acotado en al menos una dirección. Entonces en el espacio $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ la norma*

$$|||u||| = \left(\int_\Omega |\nabla u(s)|^2 \,\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma heredada de $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Teorema 7.14 (Teoremas de representación de Riesz para Hilbert)**.** *Dado H espacio de Hilbert, entonces toda aplicación lineal y continua de H en $\mathbb{R}$ es de la forma $\langle v, \cdot\rangle$ para cierto $v \in H$.*

Teorema 7.15. *Sea $p \in [1, +\infty[$ y $p' > 0$ con $1 = 1/p + 1/p'$. Toda aplicación $G\colon \mathrm{L}^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineal y continua es de la forma*

$$G(f) = \int_\Omega g(x) f(x) \,\mathrm{d}x,$$

donde $g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$.

Lema 7.16. *Sea H espacio de Hilbert y $A \subset H$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

a) $(A^T)^T = \overline{\langle A\rangle}$;

b) *Si A es denso, entonces $A^T = \{0\}$.*

Recordamos en este punto el problema de la membrana. Podemos definir el operador asociado a este problema en H_0^1. Este operador viene dado por

$$E[U] = \int_\Omega \frac{\sigma}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2}|u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)u(x) \,\mathrm{d}x.$$

Recordemos que su ecuación de Euler - Lagrange era de la forma $-\sigma\Delta u = f - \alpha u$. Definimos las funciones

$$a(u, v) = \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla v + \alpha uv \,\mathrm{d}x,$$

$$\overline{f}(u) = \int_\Omega f(x)u(x) \,\mathrm{d}x,$$

y

$$J[u] = \frac{1}{2}a(u, u) - \overline{f}(u)$$

Teorema 7.17 (Teorema de Lax - Milgram)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $a\colon H\times H\to\mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva (existe α tal que $a(u,u)\geq\alpha||u||$ para todo $u\in H$). Entonces, para cada función $\overline{f}\in H^*$, existe un único elemento $\overline{u}\in H$ que sea solución de*

$$a(\overline{u},v)=\overline{f}(v)\quad\forall\, v\in H. \tag{PD}$$

Además, la aplicación $F\colon H^*\to H$ que a cada $\overline{f}$ le hace corresponder la única solución de (PD) *verifica $||F(\overline{f})||\leq||\overline{f}||/\alpha$ para todo $\overline{f}\in H^*$ y, por tanto, F es continua.*

Además, si a es simétrica, entonces $F(\overline{f})$ es también la única solución del problema

$$J(u)=\min_{u\in H}J(u), \tag{PV}$$

siendo $J(u)=a(u,u)/2-\overline{f}(u)$.

Demostración. Definimos mediante el Teorema de Riesz-Fréchet la aplicación $A\colon H\to H$ tal que $A(u)$ es el único vector que verifica $a_u(v)=a(u,v)=\langle A(u),v\rangle$ para todo $v\in H$. La aplicación A es claramente lineal. Además, por la continuidad de a existe $C\geq 0$ tal que $|a(u,v)|\leq C||u||||v||$. Obtenemos que $||A(u)||=||a_u||\leq C||u||$ por lo que A es continua.

Sea $\overline{f}\in H^*$. De nuevo por el Teorema de Riesz-Fréchet existe una única $f\in H$ tal que $\overline{f}(v)=\langle f,v\rangle$ para todo $v\in H$. Tenemos que el problema (**??**) equivale a encontrar $u\in H$ tal que $A(u)=f$. La existencia de solución equivale a la sobreyectividad de A y la unicidad de solución equivale a la inyectividad de A. Nótese que por la coercividad se cumple $\alpha||v||^2\leq|a(v,v)|=|\langle A(v),v\rangle|\leq||A(v)||||v||$. Esto es,

$$||v||\leq\frac{1}{\alpha}||A(v)||\quad\forall\, v\in H, \tag{31}$$

de donde deducimos que A es inyectiva. Veamos ahora que $A(H)$ es denso y cerrado. En efecto, $A(H)^\perp=\{0\}$ ya que si $a(u,v)=0$ para todo $u\in H$, entonces $a(v,v)=0$, pero $|a(v,v)|\geq\alpha||v||^2$, luego $v=0$. Por último, A^{-1} es continua por tenerse $||v||\leq||A(v)||/\alpha$ para todo $v\in H$. Luego A es un isomorfismo y $A(H)$ es completo. Consecuentemente, $A(H)$ es cerrado como se quería.

Supongamos ahora que a es simétrica. Tenemos que

$$J(u+v)=a(u+v,u+v)/2-\overline{f}(u+v)=J(u)+a(u,v)-\overline{f}(v)+\frac{1}{2}a(v,v)$$

para todo $u,v\in H$. Nótese que si u es solución de (PD), entonces $J(u+v)=J(u)+a(v,v)/2$ para todo $v\in H$. Esto prueba que u es el único mínimo de J. □

Ejemplo 7.18: Aplicamos a continuación este resultado al problema de la membrana. Recordemos que deducimos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{cases}-\sigma\Delta u=f-\alpha u;\\ u\in\Omega;\\ u=0\text{ en }\partial\Omega.\end{cases} \tag{32}$$

Buscábamos el mínimo del funcional

$$E[u]=\int_\Omega\frac{\sigma}{2}|\nabla v|^2+\frac{\alpha}{2}v^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{33}$$

Denotamos $a(v,v)/2$ a la primera integral y $\overline{f}(v)$ a la segunda. Generalizamos a como sigue

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v + \alpha u \cdot v \, \mathrm{d}x.$$

La función a es bilineal, continua y coerciva. Además, la función $\overline{f}$ es lineal y continua ya que

$$|\overline{f}(v)| \leq ||f||_{L^2}||v||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}||v||.$$

Recordemos de la demostración de la ecuación de Euler - Lagrange que se verifica

$$a(u,v) - f(v) = 0. \tag{34}$$

Integrando por partes esta ecuación obtuvimos que

$$\int_\Omega u(-\sigma\Delta v + \alpha v) = \int_\Omega v \cdot v \, \mathrm{d}s \tag{35}$$

△

Definición 7.4. La ecuación (32) tiene solución

a) *clásica* si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ cumple (32).

b) *distribucional* si $u \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ es el mínimo de (35).

c) *variacional* si $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ cumple (33) para todo $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

d) *débil* si $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ cumple (34) para todo $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

Como consecuencia del Teorema de Lax-Milgram obtenemos que la ecuación de la membrana tiene una única solución débil $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Además, es mínimo del funcional en cuanto $f \in \mathrm{L}^2$.

Ejemplo 7.19: Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$. Prueba que la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega; \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega; \end{cases} \tag{36}$$

tiene una única solución débil y variacional en $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ para todo $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Describe el PV asociado.

Multiplicamos la ecuación (36) por $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e integramos por partes el lado izquierdo mediante el Teorema de Green, obteniendo la formulación débil del problema

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \quad \forall \, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{37}$$

Definimos $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x$, que es claramente bilineal. Además, verifica $|a(u,v)| \leq ||\nabla u||_{L^2}||\nabla v||_{L^2} \leq ||\nabla u||||\nabla v||$. Análogamente deducimos que $\overline{f}(v) = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x$ es lineal y continua. Además, a partir de la desigualdad de Poincaré deducimos que a es coerciva. En efecto, existe $C \geq 0$ tal que $||u||^2_{H^1} \leq (1+C)\int_\Omega ||\nabla u||^2 \, \mathrm{d}s = (1+C)a(u,u)$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Lax-Milgram, obteniendo que (37) tiene una única solución en $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Además, la función bilineal a es claramente simétrica. Por tanto, resolver la ecuación (37) equivale a encontrar el mínimo del funcional

$$E[u] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

que era el que aparecía en el problema de la membrana.

$\triangle$

Ejemplo 7.20: Consideramos la forma bilineal simétrica $a\colon \mathrm{H}_0^2(-1,1) \times \mathrm{H}_0^2(-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_{-1}^{1} u''(x)v''(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostrar que a es coerciva.

El ejercicio es una consecuencia de la desigualdad de Poincaré. En efecto, existe $C \geq 0$ tal que

$$\int_{-1}^{1} u(x)^2\,\mathrm{d}x \leq C \int_{-1}^{1} u'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

para todo $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Por tanto, para cada $u \in \mathrm{H}_0^2(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} u(x)^2\,\mathrm{d}x \leq C \int_{-1}^{1} u'(x)^2\,\mathrm{d}x \leq C^2 a(u,u).$$

Consecuentemente, tenemos que

$$||u||_{\mathrm{H}_0^2}^2 \leq a(u,u) + Ca(u,u) + C^2a(u,u) = (1 + C + C^2)a(u,u)$$

para todo $u \in \mathrm{H}_0^2(-1,1)$ como se quería. $\triangle$

8. Biología

En este apartado estudiamos problemas de la biología que se reducen en resolver problemas de contorno. Concretamente el temario se divide en

a) Química, leyes de acción de masas (LAM).

b) Poblaciones, leyes de crecimiento.

c) Poblaciones + movimiento difusivo. Difusión.

d) Morfogénesis, varias poblaciones.

8.1. Leyes de acción de masas

Consideramos una reacción química, esto es, un proceso por el cuál una determinada cantidad de sustancias se convierte en otras. La denotamos $A + B \to C$ en caso de que a partir de los productos A y B se obtenga C. Buscamos la velocidad con la que reaccionan A y B. Denotamos por $[A]$ a la concentración de A (cantidad por unidad de volumen). Es una función del tiempo, por lo que también la denotaremos $a(t)$. La ley de acción de masas dice que la velocidad de la reacción, $\frac{\partial}{\partial t}[C]$ es proporcional a $[A]\,[B]$.Si k es la constante de proporcionalidad, se escribe $A + B \to^k C$. Obviamente tenemos que $\frac{\partial}{\partial t}[A] = \frac{\partial}{\partial t}[B] = -\frac{\partial}{\partial t}[C]$.

Puede suceder que la reacción sea reversible, de manera que al mismo tiempo también se produce $C \to_{k_{-1}} A + B$. En conjunto lo denotamos $A + B \leftrightarrow^{k_1}_{k_{-1}} C$. Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}[C] = k_1[A][B] - k_{-1}[C].$$

El equilibrio tiene lugar cuando las concentraciones son constantes.

Ejemplo 8.1: Estudiamos el modelo para el crecimiento de una bacteria basado en las tesis biológicas de Michaelis y Mneten. Una bacteria tiene receptores enzimáticos que intentan obtener el substrato o alimento del exterior, pasando a través de la membrana celular Los receptores enzimáticos pueden o bien liberar el substrato que han .ªgarrado.º bien lo introduce en la bacteria en forma de producto proceso mecánico de volteo. En ambos casos la encima queda libre de nuevo. El complejo enzimático que se produce cuando el substrato se acopla a la encima lo llamamos SE. Por E nos referimos a las encimas y por S al substrato. Por último, denotamos por P a los productos que se producen cuando la encima absorbe definitivamente el substrato. Tenemos las relaciones

$$\begin{cases} S + E \to^{k_1} SE; \\ SE \to^{k_{-1}} S + E; \\ SE \to^{k_2} E + P. \end{cases} \tag{38}$$

Llamamos $e(t) = [E]$, $s(t) = [S]$, $c(t) = [SE]$, $p(t) = [P]$. Añadimos las condiciones iniciales $e(0) = e_0 > 0$, $c(0) = 0$, $s(0) = s_0 > 0$, $p(0) = 0$. Utilizando las leyes de acción de masas deducimos que estas funciones verifican el sistema

$$\begin{cases} p'(t) = k_2c(t); \\ s'(t) = k_{-1}c(t) - k_1s(t)e(t); \\ c'(t) = k_1s(t)e(t) - k_2c(t) - k_{-1}c(t); \\ e'(t) = -k_1s(t)e(t) + k_1c(t) + k_2c(t). \end{cases} \tag{39}$$

Podemos simplificar esta ecuación como sigue.

- En primer lugar, de la ecuación $p' = k_2 c$, podemos despejar la función p mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, esto es, $p(t) = \int_0^t k_2 c(s)\,\mathrm{d}s$.
- Tenemos que $c'(t) + e'(t) = 0$ ya que $e(t) + c(t)$ es constante, esto es, $e(t) = e_0 - c(t)$.

Tras estas simplificaciones el PVI resultante es

$$\begin{cases} s'(t) = k_{-1}c(t) - k_1 s(t)(e_0 - c(t)); \\ c'(t) = k_1 s(t)(e_0 - c(t)) - (k_2 + k_{-1})c(t). \end{cases} \tag{40}$$

Es claro que el sistema tiene solución única por el Teorema de Picard-Lindelöf. En lo que sigue vamos a estudiar el PVI asociado a las condiciones iniciales $s(0) = s_0$ y $c(0) = 0$. Comprobaremos las siguientes características de éste:

a) Positividad.

b) Acotación.

c) Intervalo de definición (será $[0, +\infty[$).

d) Comportamiento cuando $t \to +\infty$.

No podemos calcular una solución explícitamente, razón por la cual tendremos que utilizar los resultados clásicos de acotación para ecuaciones diferenciales ordinarias. Previamente realizamos un cambio de variable con el fin de normalizar las soluciones y eliminar las unidades físicas. El cambio de variable es $u(\tau) = s(\tau/(k_1 e_0))/s_0$ y $v(\tau) = c(\tau/(k_1 e_0))/e_0$. Obtenemos el nuevo sistema

$$\begin{cases} u' = \left(\frac{k_{-1}}{k_1 s_0} + u\right) v - u; \\ v' = \frac{s_0}{e_0} u - \left(\frac{s_0}{e_0} u + \frac{k_{-1} + k_2}{e_0 k_1}\right) v. \end{cases} \tag{41}$$

Definimos $\varepsilon = e_0/s_0$, $\lambda = k_2/(k_1 s_0)$ y $k = (k_2 + k_{-1})/(k_1 s_0)$. Nótese que estas constantes no tienen dimensiones. Escribimos (41) utilizando solamente estas constantes, obteniendo

$$\begin{cases} u' = (k - \lambda + u)\, v - u; \\ v' = (u - (u + k)v)/\varepsilon; \\ u(0) = 1; \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Nótese que $k - \lambda > 0$. Veamos que las soluciones u y v son no negativas en $[0, \omega[$. Razonamos por reducción al absurdo. Nótese que $u(0) = 1 > 0$ y $v'(0) = 1/\varepsilon > 0$, luego existe $T > 0$ tal que v y u son positivas en $]0, T[$ y una de las dos comienza a ser negativa en T. Hay tres casos posibles:

a) Se cumple $u(T) = 0$ y $v(T) = 0$. En tal caso $u = 0$ y $v = 0$ por unicidad global de solución, lo que contradice las condiciones iniciales.

b) Se cumple $u(T) = 0$ y $v(T) > 0$. Entonces, $u'(T) < 0$. No obstante, $u'(T) = (k - \lambda)v(T) > 0$, contradicción.

c) Se cumple $u(T) > 0$ y $v(T) = 0$. Entonces, $v'(T) < 0$. No obstante, $v'(T) = u(T)/\varepsilon > 0$, contradicción.

A continuación demostramos que las soluciones están acotadas. Definimos $h(\tau) = u(\tau) + \varepsilon v(\tau)$. Tenemos que $h'(\tau) = -\lambda v(\tau) \leq 0$. Recordemos que $h(0) = 1$ y $h \geq 0$, luego h es decreciente y $0 \leq h(\tau) \leq 1$ para todo $\tau \in [0, \omega[$. Consecuentemente, $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1/\varepsilon$. Como consecuencia, por el teorema de comportamiento en el extremo superior deducimos que $\omega = +\infty$.

Veamos que $u(\tau)$ y $v(\tau)$ tienden a 0 cuando $\tau \to +\infty$. Como h decrece y está acotada, deducimos que h tiene límite en $+\infty$. Sea $c \in [0, 1[$ ese límite. Existe $\{\tau_n\} \to +\infty$ con $\{-\lambda v(\tau_n)\} = \{h'(\tau_n)\} \to 0$. Por tanto, $\{u(\tau_n)\} \to c$. Podemos suponer que $\{v(\tau_n)\}$ es estrictamente decreciente. De la ecuación (42) deducimos que $\{v'(\tau_n)\} \to c/\varepsilon$. Supongamos que $c > 0$ para llegar a una contradicción. En tal caso, una parcial de $\{v'(\tau_n)\}$ es positiva, por lo que podemos asumir que es la propia sucesión. Para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos $\omega_n \in]\tau_n, \tau_{n+1}[$ tal que $v'(\omega_n) = 0$ con $v(\omega_n) < v(\tau_{n+1})$. Obtenemos $\{v(\omega_n)\} \to 0$ y $\{v'(\omega_n)\} \to 0$. De las ecuaciones deducimos $\{u(\omega_n)\} \to 0$, lo que contradice que $\{h(\omega_n)\} \to c$. Consecuentemente, $c = 0$ y $u(\tau)$ y $v(\tau)$ tienden a 0 cuando $\tau \to +\infty$.

Podemos ahora recuperar el valor de p. En efecto, tenemos que

$$p(t) = \int_0^t k_2 c(s)\, \mathrm{d}s = \frac{k_2}{k_1} \int_0^{k_1 e_0 t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau = -\frac{k_2}{k_1 \lambda} \int_0^{k_1 e_0 t} h'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{k_2}{k_1 \lambda}(1 - h(k_1 e_0 t)).$$

Por tanto, p es creciente y verifica $p(0) = 0$ y $\lim_{t \to +\infty} p(t) = k_2(k_1 \lambda)$. △

8.2. Modelos de crecimiento de poblaciones biológicas

Sea $P(t)$ el número o densidad de individuos de una cierta población en el instante de tiempo t. Se define la *tasa instantánea de crecimiento* como

$$\alpha(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{hP(t)}.$$

En este contexto, modelar es proporcionar α.

8.2.1. Modelo de Malthus (1798)

Este modelo supone que α es una constante real. La función P es solución del PVI

$$\begin{cases} P' = \alpha P; \\ P(0) = P_0. \end{cases} \tag{43}$$

Tenemos que $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$. Este modelo solo es válido normalmente en las primeras fases de una población. Tras cierto periodo de tiempo las variables ambientales influirán de alguna manera a la tasa instantánea de crecimiento.

8.2.2. Modelo de P. Verhulst o modelo logístico (1838)

La tasa α cambia en el tiempo debido a que los nutrientes de los cuales se alimenta la población se consumen si ésta es demasiado grande. Esto es, se pretende que α sea proporcional a los nutrientes del entorno. Además, se supone que el crecimiento de la población es inversamente proporcional a la variación del número de nutrientes. Deducimos que $\alpha(t) = \alpha_0(1 - P(t)/P_\infty)$. Obtenemos el PVI

$$\begin{cases} P' = \alpha_0 P(1 - \frac{P}{P_\infty}); \\ P(0) = P_0. \end{cases} \tag{44}$$

A la constante P_∞ se le llama carga máxima. El PVI (44) se puede resolver, obteniendo

$$P(t) = P_\infty \frac{e^{\alpha_0 t}}{e^{\alpha_0 t} - 1 + P_0/P_\infty}.$$

Nótese que la solución verifica $\lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$.

8.2.3. Reproducción sexual (S. XX)

Debido a la reproducción sexual de múltiples poblaciones se propone utilizar una tasa que requiera un mínimo de población para reproducirse. De esta forma se modifica el modelo logístico, obteniendo

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)\left(\frac{P(t)}{P_{min}} - 1\right).$$

El comportamiento de la solución es similar al logístico cuando $P_0 > P_{min}$. Si $P_0 \leq P_{min}$, entonces la población se extingue, lo que se llama efecto Allée fuerte.

Este modelo se puede extender al dado por la siguiente tasa

$$\alpha(t) = \alpha_0 (1 - \frac{P}{P_{\infty 8}})(\frac{P}{P_{min}})^{k+1}.$$

8.3. Movimiento

Modelamos una población que no crece pero se dispersa. En este contexto surgen la Ley de Fick y la ecuación del calor o de difusión. Denotamos por $u(x,t)$ a la densidad de población en el instante t en el lugar $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Por tanto, dado $B \subset \Omega$, el tamaño de la población contenido en B en el instante de tiempo t viene dado por

$$\int_B u(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

La población se mueve por el efecto de *difusión*. El tamaño de la población permanece constante. Por tanto, la cantidad de ésta que hay en un recinto solamente varía por los individuos que entran y salen de éste. Deducimos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_B u(x,t)\,\mathrm{d}x\right) = \text{num. de individuos que entran por el borde} - \text{num. de individuos que salen.}$$

Denotamos por $J(x,t)$ al vector que indica hacia dónde se mueven los individuos de x y cuántos lo hacen. Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_B u(x,t)\,\mathrm{d}x\right) = -\int_{\partial B} J \cdot n\,\mathrm{d}S, \tag{45}$$

donde n es la normal exterior de Ω.

Necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 8.2 (Teorema de la Divergencia de Gauss)**.** *Sea* $F\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *de clase* 1*. Se define* $\operatorname{div}(F)\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *dada por* $\operatorname{div}(F)(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x)$*. Si* $\partial\Omega$ *es regular, entonces*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\delta\Omega} F \cdot n\,\mathrm{d}S,$$

donde n *es la normal exterior de* Ω*.*

Por este teorema deducimos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_B u(x,t)\,\mathrm{d}x\right) = -\int_B \operatorname{div}(J)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{46}$$

Asumiendo hipótesis de regularidad obtenemos

$$\left(\int_B \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \operatorname{div}(J)(x)\right)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{47}$$

De la arbitrariedad de B deducimos

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \operatorname{div}(J)(x) = 0, \tag{48}$$

que se denomina *ley de movimiento*. En este punto necesitamos proponer una función J de manera que podamos determinar u. Una de las principales propuestas es la denominada *Ley de Fick*. Recordemos que la dirección en la que un potencial más crece viene dada por el gradiente de éste mientras la dirección en la que menos crece se corresponde con el opuesto del gradiente. Debido a esta observación Fick propone que $J = -D\nabla u$, donde D es una constante de difusión que depende de la población y del medio. En definitiva, esta ley dice que las partículas se mueven de donde hay mayor concentración a menos. Fourier en 1822 propuso la misma función J cuando estudiaba el movimiento del calor. Utilizando esta J obtenemos la denominada ecuación del calor o de difusión

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}(-D\nabla u) = \frac{\partial}{\partial t}u - D\Delta u. \tag{49}$$

8.3.1. Desde el random walk a la ecuación del calor

En este apartado deducimos la ecuación del calor a partir del problema denominado *random walk*, que estudia el movimiento aleatorio de una partícula en una recta. Esta deducción fue realizada por Einstein y tiene su importancia física. Brown estudió antes que Einstein el mismo problema al observar que el movimiento aleatorio de partículas de polen suspendidas en el agua seguía un comportamiento similar a la dispersión del calor.

Imaginamos una partícula que se mueve en una recta. Inicialmente se encuentra en la posición 0 de ésta. La partícula se mueve en cada paso una distancia fija $\delta > 0$ a izquierda o a derecha. El sentido lo elige de forma aleatoria con probabilidad $1/2$ para ambas opciones. Realiza un paso periódicamente con periodo $\tau > 0$. Llamamos $P(m,n)$ a la probabilidad de que tras n pasos (tiempo $n\tau$) esté en la posición $m\delta$, donde $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Usando argumentos básicos de combinatoria deducimos que

$$P(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < |m| \text{ o } (m+n) \text{ es impar;} \\ \frac{1}{2^n}\frac{n!}{((n+m)/2)!((n-m)/2)!} & \text{si } |m| \le n \text{ y } m+n \text{ es par.} \end{cases}$$

Nótese que $P(m,n+1) = (P(m-1,n) + P(m+1,n))/2$. Supongamos que existe una función $u(x,t)$ tal que $P(m,n) = u(m\delta, n\tau)$. Tenemos que

$$P(m,n+1) - P(m,n) = \frac{1}{2}(P(m-1,n) - 2P(m,n) + P(m+1,n)).$$

Sea $x = m\delta$ y $t = n\tau$. Deducimos que

$$\frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau}\frac{u(x-\delta,t) - 2u(x,t) + u(x+\delta,t)}{\delta^2}.$$

Por las fórmulas de aproximación de derivadas deducidas a partir del teorema de Taylor obtenemos

$$\partial_t u + \theta(\tau) = \frac{\delta^2}{2\tau}\partial^2_{xx} u + \theta(\delta^4/\tau).$$

Tomamos límite cuando $\delta \to 0$ y $\tau \to 0$. Asumimos que se cumple la *hipótesis parabólica*, que dice que $\delta^2/(2\tau) \to D \in \mathbb{R}$. En este caso

$$\partial_t u = D\partial^2_{xx} u,$$

que es la ecuación del calor en una dimensión. En este punto cabe mencionar que δ/τ es la velocidad de la partícula. Según la hipótesis parabólica se tiene que $\delta/\tau = \frac{\delta^2}{2\tau}\frac{2}{\delta} \to +\infty$.

8.3.2. Resolución de la ecuación del calor

En este apartado resolvemos la ecuación del calor para $x \in \mathbb{R}$. Concretamente, pretendemos resolver el problema de contorno

$$\partial_t v = D\partial^2_{xx} v; v(x,0) = v_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Para resolver esta ecuación recurriremos a la transformada de Fourier y la convolución.

Definición 8.1. La *clase de funciones de Schwartz* es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \partial^\alpha u(x)| < +\infty \quad \forall k, \alpha \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nótese que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Denotamos $G(x) = e^{-\pi x^2}$. Nótese que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces f' y $x^k f$ son elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definición 8.2. La *transformada de Fourier* es la función $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ dada por

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}x.$$

La *transformada inversa de Fourier* es la función $\mathcal{F}^{-1}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ dada por

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{2\pi i x y}\,\mathrm{d}y.$$

Comentario 8.3. *Sean $f, g \in \mathcal{S}$. Tenemos que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{F}[g](x)\,\mathrm{d}x.$$

Gracias a esta igualdad se puede definir un operador transformada de Fourier de cualquier función de $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Este operador viene dado por

$$\langle \mathcal{F}[f], g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{F}[g](x)\,\mathrm{d}x$$

para todo $g \in \mathcal{S}$.

Teorema 8.4. *Se cumplen las siguientes propiedades.*

a) *La función $\mathcal{F}$ es una biyección sobre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ es su inversa.*

b) *Se cumple* $\mathcal{F}[G] = G = \mathcal{F}^{-1}[G]$.

c) *Para cada* $f \in \mathcal{S}$ *se tiene* $\mathcal{F}[f'](y) = 2\pi i y \mathcal{F}[f](y)$.

d) *Relación con homotecias. Sea* $h_a(x) = ax$. *Denotamos* $h_a f := f(ax)$. *Se tiene que*

- $\mathcal{F}[h_a f](y) = \mathcal{F}[f](y/a)/a$;
- $\mathcal{F}^{-1}[h_a f](x) = \mathcal{F}[f](x/a)/a$.

Demostración. Demostramos algunas de estas propiedades.

a) No podemos demostrarla en este curso, necesitamos el teorema de los residuos.

b) Es fácil ver que G y $\mathcal{F}[G]$ resuelven el siguiente PVI

$$\begin{cases} G'(x) = (-2\pi x)G(x); \\ G(0) = 1. \end{cases}$$

Puesto que este PVI tiene una única solución (es lineal) deducimos que $\mathcal{F}[G] = G$. El mismo argumento de aplica a $\mathcal{F}^{-1}$.

c) Es una consecuencia de la integración por partes.

d) Basta realizar el cambio de variables $z = ax$. □

Definición 8.3 (Convolución de funciones)**.** Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medibles. Se define la convolución de f y g en caso de que exista como la función

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Proposición 8.5 (Propiedades de la convolución)**.**

a) $f * g = g * f$.

b) Desigualdad de Young. *Si* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *y* $g \in L^q(\mathbb{R})$ *con* $1 + 1/r = 1/p + 1/q$. *Entonces, existe* $f * g$ *y* $||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$.

c) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$. $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$

d) *Si* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *y* $G_\varepsilon(x) = G(x/\sqrt{\varepsilon})/\sqrt{\varepsilon}$, *que se llama aproximación de la unidad o sucesión regularizante, entonces* $f * G_\varepsilon \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ *y* $f * G_\varepsilon \to f$ *cuando* $\varepsilon \to 0$ *en* L^2.

e) *Transformada de la delta.* $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$.

f) *Si* $f \in \mathrm{L}^1$ *y* $g \in \mathcal{C}^k$ *es acotada, entonces* $f * g \in \mathcal{C}^k$ *y es acotada.*

Demostración. Las propiedades b) y d) no las podemos demostrar en este curso. El resto de las propiedades son fáciles de demostrar y se dejan como ejercicio. □

Ya podemos resolver la ecuación del calor en $\mathbb{R}$. Tomamos el cambio de variable $u(t,x) = v(\sqrt{D}x, t)$. Tenemos que $\partial_t u = \partial^2_{xx} u$. Por tanto, basta resolver la ecuación del calor para $D = 1$.

Teorema 8.6. *Dada* $f \in \mathcal{S}$ *(resp.* L^2*). Entonces la función*

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right) f(y)\,\mathrm{d}y$$

resuelve la ecuación del calor con la condición inicial $v(x,0) = f(x)$ *en el sentido de la propiedad d) de la convolución.*

Demostración. Resolvemos el problema de contorno

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0; \\ u(x,0) = \delta_0(x). \end{cases} \tag{51}$$

Consideramos el cambio de variable $\mathcal{F}[u]$ (aplicar la transformada de Fourier en la variable x), mediante el cual obtenemos la ecuación equivalente

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{F}[u] = -4\pi^2 x^2 \mathcal{F}[u], & x \in \mathbb{R}, t \geq 0; \\ \mathcal{F}[u](x,0) = 1. \end{cases} \tag{52}$$

Deducimos que $\mathcal{F}[u](x,t) = \exp(-4\pi^2 x^2 t) = (h_{\sqrt{4\pi t}} G)(x)$. Aplicando la transformada inversa de Fourier deducimos que

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[h_{\sqrt{4\pi t}} G](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathcal{F}^{-1}[G(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}})] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-x^2 7t).$$

En este punto pretendemos resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0; \\ u(x,0) = f_0(x). \end{cases} \tag{53}$$

Para ello definimos $w(x,t) = u(x,t) * f_0(x)$. Por las propiedades de la convolución es fácil comprobar que w es solución de (53). Por último, recordemos que a partir de una solución de (53) podemos construir una solución de la ecuación del calor mediante el cambio $w(t,x) = v(t, \sqrt{D}x)$. Deducimos que la función dada en el enunciado es solución de la ecuación del calor. □

Comentario 8.7. *La ecuación del calor no tiene en general solución única. En efecto, la función* $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{-1/t^2} \right)$ *cumple*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0; \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{54}$$

No obstante, si buscamos soluciones acotadas en $|x| \to +\infty$*, entonces la única solución de la ecuación del calor es la dada en el teorema anterior.*

Proposición 8.8 (Propiedades de las soluciones de la ecuación del calor)**.** *Las soluciones dadas en el teorema previo verifican las siguientes propiedades.*

a) *Conservación del digno. Si* $f \geq 0$*, entonces* $u > 0$ *para todo* $t > 0$.

b) *Conservación de la masa (temperatura).*

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall t > 0.$$

c) *Decaimiento en* $t \to +\infty$. $\sup\{|v(x,t)| : x \in \mathbb{R}\} \leq C/\sqrt{t}$.

d) *Velocidad infinita de propagación. Aunque inicialmente* $\operatorname{sop}(f)$ *esté acotado, para todo* $t > 0$ $\operatorname{sop}(v) = \mathbb{R}$.

e) *Disipación de energía.*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} v^2(x,t)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} v \right|^2 \mathrm{d}x.$$

Demostración. Son un mero ejercicio. □

8.4. Ecuaciones de reacción difusión

Sea $u(x,t)$ la densidad de población que se mueve por difusión y que crece según la tasa

$$\alpha(u) = \begin{cases} \alpha_0(\text{constante}); \\ \alpha_0(1-u/u_0); \\ \alpha_0(1-u/u_0)(u/u_{min}-1). \end{cases}$$

Estamos mezclando los conceptos estudiados en la secciones anteriores. Obtenemos la ecuación

$$\partial_t u = D\Delta_x u + f(u) \tag{55}$$

Solo vamos a estudiar esta ecuación en dos casos particulares. El primero se denomina FKPP (Fischer, Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov) y se corresponde con la ecuación

$$\partial_t u = D\Delta_x u + \alpha_0 u\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right). \tag{56}$$

El segundo caso se denomina biestable y se corresponde con la ecuación

$$\partial_t u = D\Delta_x u + \alpha_0 u\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)\left(\frac{u}{u_{min}}-1\right). \tag{57}$$

No tenemos herramientas para encontrar todas las soluciones de estas ecuaciones o hacer teoremas de unicidad. Nuestro objetivo es estudiar la existencia de soluciones del tipo *onda viajera*. Una onda viajera es una solución del tipo $u(x,t) = \phi(x-ct)$, donde $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se denomina *perfil de la onda* y $c \in \mathbb{R}$ es la *velocidad de la onda*. Trabajaremos en dimensión 1, $x \in \mathbb{R}$.

En primer lugar vamos a adimensionalizar las soluciones. Distinguimos dos casos en función de la ecuación con la que trabajamos.

a) En FKPP, tomamos el cambio de variable $v(y,\tau) = u(\sqrt{D/\alpha_0}y, \tau/\alpha_0)/u_\infty$. Recordemos que $[[\alpha_0]] = 1/\text{tiempo}$ y $[[\sqrt{D/\alpha_0}]] = \text{espacio}^2$. Obtenemos que

$$\partial_\tau v = \partial^2_{yy} v + v(1-v). \tag{58}$$

De aquí en adelante denotaremos por u a las soluciones de la ecuación anterior. No se deben confundir con las soluciones de la ecuación original.

b) En el caso biestable realizamos el cambio

$$v(y,\tau) = u\left(\sqrt{\frac{Du_{min}}{\alpha u_\infty}}, \frac{\tau u_{min}}{\alpha u_\infty}\right)/u_\infty.$$

Obtenemos la ecuación

$$\partial_\tau v = \partial^2_{yy} v + v(1-v)(v-\beta), \tag{59}$$

donde $0 < \beta < u_{min}/u_\infty < 1$.

Veamos qué ha de cumplir una onda viajera $u(x,t) = \phi(x-ct)$ para ser solución de

$$\partial_t u = \partial^2_{xx} u + f(u). \tag{60}$$

Buscamos ondas viajeras tales que $\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=0$ y ϕ es decreciente. Deducimos que ϕ es solución de la ecuación

$$-c\phi' = \phi'' + f(\phi). \tag{61}$$

Es decir, ϕ cumple una ecuación diferencial ordinaria.

Multiplicando por ϕ' e integrando obtenemos que

$$c\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi'(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z.$$

ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi''\phi'\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi'(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{\phi'(+\infty)^2-\phi'(-\infty)^2}{2} = 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\phi(\xi))\phi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_1^0 f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Si el problema es FKPP, entonces $\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z > 0$, obteniendo que $c>0$. Si el problema es biestable, entonces

$$\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 z(1-z)(z-\beta)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6}(\frac{1}{2}-\beta).$$

Por tanto, el signo de c depende de β.

8.4.1. Ondas viajeras en la biestable

En este caso particular la función ϕ verifica la ecuación

$$\phi'' + c\phi' + \phi(1-\phi)(\phi-\beta) = 0. \tag{62}$$

Buscamos ϕ cumpliendo $\phi'(\xi) = A\phi(\xi)(1-\phi(\xi))$ para cierto A. Obtenemos en tal caso que $\phi'' = A\phi'(1-\phi) - A\phi\phi'$. Podemos substituir en (62) obteniendo la ecuación equivalente

$$\phi'\left[A + c - \frac{\beta}{A} + \phi\left(-2A + \frac{1}{A}\right)\right] = 0.$$

Puesto que queremos que ϕ sea estrictamente decreciente, debe cumplirse que $A + c - \frac{\beta}{A} = 0$ y $-2A+\frac{1}{A} = 0$. Por tanto, $A = 1/\sqrt{2}$ y $c = \sqrt{2}(1/2-\beta)$. Podemos resolver para este A la ecuación $\phi'(\xi) = A\phi(\xi)(1-\phi(\xi))$ mediante el método de variables separadas. Obtenemos que $\phi(\xi) = 1/(1+k\exp(\xi/\sqrt{2}))$ para $k>0$. Esta solución verifica las hipótesis que buscábamos, luego es solución por el razonamiento previo de (62) para $c = \sqrt{2}(1/2\beta)$. Hemos encontrado ondas viajeras para c específicos.

8.5. Ondas viajeras en FKPP

En este caso particular la función ϕ verifica la ecuación

$$\phi'' + c\phi' + \phi(1-\phi) = 0. \tag{63}$$

Lema 8.9. *Para cada $c \geq 2$ existe una única ϕ tal que $u(x,t) = \phi(x-ct)$ es solución de* (58).

Demostración. Sabemos que (63) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} u' = v; \\ v' = -cv + u(1-u). \end{cases} \tag{64}$$

Nótese que $(0,0)$ y $(1,0)$ son puntos de equilibrio de esta ecuación. Utilizamos el primer método de Lyapunov para estudiar la estabilidad asintótica. Nótese que

$$\mathrm{J}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}.$$

Deducimos que $\mu < 0$ si $c > 0$, donde μ es el máximo de la parte real de los valores propios. En tal caso, $(0,0)$ es un atractor. Si $0 < c < 2$, entonces es un atractor en espiral, luego todas las soluciones tomarán valores positivos en u en algún momento, por lo que ϕ no será creciente. Suponemos pues que $c \geq 2$, en cuyo caso los valores propios son números negativos. Nótese que

$$\mathrm{J}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_+ = (-c + \sqrt{c^2+4})/2 > 0$ y $\lambda_- = (-c - \sqrt{c^2+4})/2 < 0$. $(1,0)$ es un punto de silla. Vamos a demostrar que la solución que sale de $(1,0)$ con $t_0 = -\infty$ tiene límite $(0,0)$ en $+\infty$ con u decreciente. Por el estudio del punto de equilibrio $(1,0)$ sabemos que una de las soluciones que salen de este se mantiene con $u < 0$ cerca de $(1,0)$. Esta es la solución que tomamos. Me he perdido en la demostración, la mitad de las cosas no las hemos estudiado en ecuaciones diferenciales. □

9. Bibliografía

- Elsgoltz....