



# *Ecuaciones Diferenciales 2*

## *Apuntes*

Andrés Herrera Poyatos  
Paco Luque Sánchez  
Universidad de Granada  
[andreshp9@gmail.com](mailto:andreshp9@gmail.com)

---

# 1. Introducción

En esta sección introducimos los conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

## 1.1. Notación y terminología

En esta sección haremos una pequeña introducción a los problemas que abordaremos en esta asignatura. El objetivo es obtener propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial que no podemos resolver explícitamente. Concretamente, estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias (que abreviaremos EDO). Una EDO es una ecuación de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ con } (t, x(t)) \in D, \quad (\text{E})$$

donde  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  es un conjunto abierto y arcoconexo y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  es una función continua. Los elementos que intervienen en una EDO tienen una terminología específica que introducimos a continuación:

- $D$ : dominio de la ecuación.
- $f$ : campo de la ecuación.
- $t$ : tiempo o variable independiente.
- $x(t)$ : función incógnita o variable dependiente. En lo que sigue, por comodidad, la notaremos simplemente por  $x$ , sin especificar la variable de la que depende.

EJEMPLO 1.1: Veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- EDO escalar:

$$x' = \frac{x}{t} \text{ con } t > 0,$$

donde  $D = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .

- Sistema de EDOs:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 x_2 + t \\ x'_2 &= x_1 + x_2 + t^2 \end{aligned} \right\}$$

donde  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  y  $f(t, x_1, x_2) = (x_1 x_2 + t, x_1 + x_2 + t^2)$ . △

**Definición 1.1** (Concepto de solución). Una *solución* de una EDO es una función  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  donde  $I$  es un intervalo abierto no vacío, tal que:

- a)  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ ;
- b)  $(t, \varphi(t)) \in D$ ;
- c)  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ .

EJEMPLO 1.2: Sea  $I \subset \mathbb{R}^+$  un intervalo y  $a \in \mathbb{R}$ . La función  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = at$  es una solución de la EDO escalar propuesta en el Ejemplo 1.1. Esto prueba que una EDO puede tener infinitas soluciones. △

**Definición 1.2** (Problema de valores iniciales). Un *problema de valores iniciales* o *problema de Cauchy* (de aquí en adelante lo abreviaremos PVI) consiste en añadir a una EDO un dato o condición inicial, esto es, un par  $(t_0, x_0) \in D$ . Un PVI se escribe

$$\begin{cases} x' = f(t, x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{P})$$

Una solución del PVI es una solución de la EDO que cumple

- a)  $t_0 \in I$ ;
- b)  $\varphi(t_0) = x_0$ .

En lo que sigue referiremos a (P) cuando trabajemos con un PVI genérico.

EJEMPLO 1.3: Sea  $t_0 = 1$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . La función  $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = x_0 t$  es una solución de la EDO escalar propuesta en el Ejemplo 1.1 y verifica  $\varphi(t_0) = x_0$ . Nótese que la restricción de  $\varphi$  a cualquier intervalo que contenga a 1 es una solución del PVI dado por  $(1, x_0)$ . De todas las soluciones, nos interesan aquellas con el mayor dominio posible. La única solución maximal resultará ser  $\varphi$ . El concepto de maximalidad se estudia en la siguiente sección.  $\triangle$

## 1.2. Unicidad de solución y soluciones maximales

Consideremos un PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{P})$$

En primer lugar introducimos los diferentes conceptos de unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales.

**Definición 1.3** (Conceptos de unicidad).

- Diremos que (P) verifica la *propiedad de unicidad local* si dadas  $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma$ , existe  $H$  intervalo abierto con  $t_0 \in H$  tal que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2 \cap H$ .
- Diremos que (P) verifica la *propiedad de unicidad en  $H$* , con  $H$  intervalo abierto y  $t_0 \in H$  si dadas  $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma$ , se cumple que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2 \cap H$ .
- Diremos que (P) verifica la *propiedad de unicidad global* si dadas  $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma$ , se cumple que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ .

El siguiente resultado se deduce fácilmente de las definiciones de unicidad.

**Proposición 1.4.** *En el contexto actual se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- a) *El PVI (P) verifica la propiedad de unicidad global si, y solo si, verifica la propiedad de unicidad en  $\mathbb{R}$ .*
- b) *El PVI (P) verifica la propiedad de unicidad local si, y solo si, existe un intervalo abierto  $H$  con  $t_0$  tal que (P) verifica la propiedad de unicidad en  $H$ .*

**Corolario 1.5.** *Si el PVI (P) verifica la propiedad de unicidad global, entonces verifica la propiedad de unicidad local.*

El recíproco del Corolario 1.5 no es cierto como cabe esperar. No obstante, sí se puede demostrar el resultado bajo una condición más restrictiva.

**Proposición 1.6.** *La EDO (E) verifica la propiedad de unicidad local para cualquier condición inicial  $(t_0, x_0) \in D$  si, y solo si, verifica la propiedad de unicidad global para cualquier condición inicial  $(t_0, x_0) \in D$ .*

*Demostración.* La implicación de derecha a izquierda es trivial. Veamos que se da el recíproco. Sean  $(I_1, \varphi_1), (I_2, \varphi_2) \in \Sigma(P)$ , donde  $(P)$  es el PVI asociado a  $(t_0, x_0) \in D$ . Veamos que coinciden en  $I_1 \cap I_2$ . Definimos  $H = \{t \in I_1 \cap I_2; \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$ . Por hipótesis tenemos que  $t_0 \in H$  y, por tanto,  $H \neq \emptyset$ . Además,  $H$  es un cerrado relativo de  $I_1 \cap I_2$  por ser el conjunto donde coinciden dos funciones continuas. Por último, razonamos que  $H$  es abierto. En efecto, fijado  $\tau \in H$ , consideremos el PVI  $(\tilde{P})$  asociado a  $(\tau, \varphi_1(\tau))$ . Nótese que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son soluciones de  $(\tilde{P})$ . Por la propiedad de unicidad local existe un intervalo abierto  $\tilde{H}$  con  $\tau \in \tilde{H}$  tal que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  para todo  $t \in \tilde{H} \cap I_1 \cap I_2$ . Consecuentemente,  $\tau \in \tilde{H} \cap I_1 \cap I_2 \subset H$ . La prueba finaliza al recordar que  $I_1 \cap I_2$  es conexo y, por tanto, el único abierto y cerrado no trivial de  $I_1 \cap I_2$  es el propio  $I_1 \cap I_2$ .  $\square$

Es claro que un PVI admite infinitas soluciones ya que dada una solución cualquier restricción suya a un intervalo que contenga a  $t_0$  sigue siendo solución del PVI. En tal caso estamos tratando esencialmente con la misma solución. Por tanto, interesa considerar solamente aquellas soluciones con el mayor dominio posible. Para ello introducimos los conceptos de prolongación y solución maximal.

**Definición 1.4.** Sea  $\Sigma = \Sigma(P) = \{(I, \varphi) \mid \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ es solución de } (P)\}$ . El par  $(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) \in \Sigma$  es una *prolongación* de  $(I, \varphi) \in \Sigma$  si  $I \subsetneq \tilde{I}$  y  $\tilde{\varphi}|_I = \varphi$  y lo denotaremos  $(I, \varphi) \gg (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$ . Un elemento de  $\Sigma$  es *prolongable* si admite una prolongación. El par  $(I, \varphi) \in \Sigma$  es *maximal* si no es prolongable.

**Lema 1.7.** *Toda solución no maximal de  $(P)$  puede prolongarse a una solución maximal.*

*Demostración.* La demostración es consecuencia del Lemma de Zorn. Sea  $\varphi_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución no maximal de  $(P)$ . Basta aplicar este resultado sobre el conjunto

$$\{(I, \varphi) \mid \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ es solución de } (P) \text{ y } I_1 \subsetneq I\}$$

con la relación de orden  $<<$  definida previamente. Nótese que este conjunto es no vacío ya que  $\varphi_1$  es prolongable. Encontramos pues una solución maximal que es prolongación de  $\varphi_1$  como se quería.  $\square$

Transladamos ahora el concepto de unicidad global al ámbito de las soluciones maximales.

**Proposición 1.8.** *Consideremos el PVI  $(P)$ . Éste verifica la propiedad de unicidad global si, y solo si, tiene una única solución maximal.*

*Demostración.* Supongamos que  $(P)$  verifica la propiedad de unicidad global. Definimos  $J = \cup_{(I, \varphi) \in \Sigma} I$ , que es un intervalo ya que es unión de conexos de  $\mathbb{R}$  que tienen un punto en común. Además,  $J$  es abierto porque es unión de abiertos. Definimos la función  $\Psi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  como  $\Psi(t) = \varphi(t)$  para algún  $(\varphi, I) \in \Sigma(P)$  con  $t \in I$ . Nótese que la función está bien definida gracias a la unicidad global. Además,  $\Psi$  es solución de  $(P)$ . Es claro por construcción que  $\Psi$  es la única solución maximal.

Veamos que se verifica el recíproco. Sean  $\varphi_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $\varphi_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  dos soluciones de  $(P)$ . Por el Lema 1.7 podemos prolongarlas a dos soluciones maximales, que deben ser iguales por hipótesis. Por tanto,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  coinciden en  $I_1 \cap I_2$  como se quería.  $\square$

**EJEMPLO 1.9:** Consideramos la EDO  $x' = x$ . En un curso básico de cálculo se demuestra que la derivada de la función exponencial es ella misma, esto es, la función exponencial verifica la ecuación diferencial. Es claro que cualquier constante por la función exponencial también verificará la ecuación diferencial. Vamos a demostrar que estas son las únicas soluciones maximales de la ecuación diferencial. Para ello vamos a probar que se verifica la propiedad de unicidad local para todo  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ . En primer lugar,  $x_0 \neq 0$ , tenemos que  $\varphi(t) = x_0 \exp(t - t_0)$  es solución (maximal) del PVI. Sea  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  es solución del

PVI. Como  $x(t_0) = x_0 \neq 0$ , encontramos un intervalo abierto  $t_0 \in J \subset I$  donde  $x$  no se anula. En ese intervalo se tiene la igualdad  $x'/x = 1$ . Podemos integrar esta expresión para cada  $t \in J$ , obteniendo

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t ds = \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \log(x(t)) - \log(x(t_0)).$$

Aplicando la función exponencial en ambos lados de la igualdad deducimos que  $x(t) = x(t_0) \exp(t - t_0)$  para todo  $t \in J$  como se quería. El método que hemos utilizado para obtener la expresión de  $x$  en un entorno de  $t_0$  se denomina *método de las variables separadas*, que generalizaremos más adelante. Por último, sabemos que la función  $x = 0$  es solución de la ecuación diferencial. Tenemos que demostrar que si  $x_0 = 0$ , entonces cualquier solución es constantemente 0 en un entorno de  $t_0$ . Para ello, razonamos por reducción al absurdo y utilizamos que  $x$  se comporta como la exponencial cuando no se anula y, por tanto, no puede tomar el valor 0 y ser continua al mismo tiempo. Se dejan rellenar los detalles de este último razonamiento al lector.  $\triangle$

El siguiente lema cuya demostración es trivial será utilizado a menudo para crear crear soluciones que muestren que no se verifica la unicidad global.

**Lema 1.10.** Sean  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  soluciones del PVI (P) y sea  $\tau \in I_1 \cap I_2$  con  $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$ . Entonces la función  $\Psi : I_1 \cap I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & t \leq \tau \\ \varphi_2(t) & t > \tau \end{cases}$$

es solución del PVI.

### 1.3. Ecuación integral de Volterra

Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  una solución del PVI (P). Recordemos que  $x$  verifica  $x'(s) = f(s, x(s))$  para todo  $s \in I$ . Si integramos la expresión, obtenemos para cada  $t \in I$  la igualdad

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t x'(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (\text{EV})$$

A esta ecuación se le conoce como ecuación integral de Volterra, que abreviaremos EIV.

**Definición 1.5.** Sea  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $I$  intervalo abierto. Diremos que  $\varphi$  es solución de la ecuación integral de Volterra si

- a)  $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$ ;
- b)  $(t, \varphi(t)) \in D$  para todo  $t \in I$ ;
- c)  $t_0 \in I$ ;
- d) para cada  $t \in I$  se verifica

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Hemos visto que toda solución de (P) es solución de la ecuación integral de Volterra asociada. El recíproco también es cierto y se recoge en la siguiente proposición.

**Proposición 1.11.** Sea  $I$  un intervalo abierto y  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Son equivalentes:

a)  $\varphi$  es solución del PVI (P);

b)  $\varphi$  es solución de la ecuación integral de Volterra (EV).

*Demostración.* Ya sabemos que a) implica b). Veamos el recíproco. Sea  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución de (EV). Por el Teorema fundamental del cálculo aplicado a (EV) obtenemos que  $\varphi$  es derivable y su derivada es  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ . Puesto que  $f$  es continua, obtenemos que  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ . Por último, es claro que  $\varphi(t_0) = x_0$ .  $\square$

Vamos a ver un ejemplo práctico de cómo se relacionan los dos conceptos que hemos estado tratando.

EJEMPLO 1.12: Resolver la EIV

$$x(t) = 8 + \int_0^t x(s)^2 ds.$$

**Solución:** El PVI asociado es

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2; \\ x(0) = 8. \end{cases}$$

Discutimos el caso de las soluciones constantes primero. Si la solución es constante tenemos que  $0 = x^2$ , que sólo ocurre si  $x = 0$ . Esto no es posible ya que  $x(0) = 8$ . Por tanto, no hay soluciones constantes. Discutimos ahora el caso de las soluciones no constantes, aplicando de nuevo el método de variables separadas. Nótese que si  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  es solución, donde  $I$  es un intervalo abierto y  $t_0 = 0 \in I$ , tal que  $x$  no se anula, entonces para cada  $t \in I$  se tiene

$$t = \int_0^t ds = \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x^2(s)} dt = \frac{-1}{x(t)} - \frac{-1}{x(t_0)} = \frac{-1}{x(t)} + \frac{1}{8}.$$

Deducimos que debe verificarse

$$x(t) = \frac{8}{1 - 8t}.$$

Definimos  $\varphi: ]-\infty, \frac{1}{8}[ \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\varphi(t) = \frac{8}{1-8t}$  y comprobamos que sea solución, Efectivamente tenemos que

$$\varphi(0) = 8 \quad \text{y} \quad \varphi'(t) = \frac{64}{(1-8t)^2} = \varphi^2(t).$$

Por tanto,  $\varphi$  es solución del PVI, y toda solución es igual a esta última en el mayor intervalo que contenga a 0 donde no se anule. No es difícil ver que esto implica que  $\varphi$  es la única solución del PVI y, por tanto, de la EIV. No obstante, veremos este hecho formalmente en la siguiente sección.  $\triangle$

## 2. Existencia y unicidad de solución

En este apartado proporcionamos los primeros resultados de existencia y unicidad para PVI. En primer lugar consideraremos EDOs en variables separadas, que ya han surgido en los ejemplos anteriores. Posteriormente estudiaremos dos teoremas clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales, el Teorema de unicidad Peano y el Teorema de Picard-Lindelöf.

### 2.1. Variables separadas

Hemos mencionado el método de variables separadas con anterioridad. La idea es obtener una igualdad donde en un lado solamente intervenga la variable independiente mientras que en el otro solamente intervenga la variable dependiente. De esta forma podemos integrar y aplicar el teorema del cambio de variables para obtener una igualdad donde no intervenga la variable independiente. Este método solo se puede aplicar a casos muy concretos. Introducimos estos casos en la siguiente definición.

**Definición 2.1.** Una EDO (E) es de variables separadas si existen  $J_1, J_2$  intervalos abiertos y  $a : J_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : J_2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas tales que  $D = J_1 \times J_2$  y  $f(t, x) = a(t)g(x)$  para todo  $(t, x) \in J_1 \times J_2$ . Un PVI es de variables separadas si la EDO asociada lo es. En tal caso escribimos

$$\begin{cases} x' = a(t)g(x), & (t, x) \in J_1 \times J_2; \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{VS})$$

**Teorema 2.1** (Existencia y unicidad en variables separadas). *Consideremos un PVI de variables separadas (VS). Se verifican las siguientes afirmaciones.*

- a) El PVI (VS) tiene solución.
- b) Si  $g(x_0) \neq 0$ , entonces (VS) verifica la propiedad de unicidad local.
- c) Si  $g(x_0) = 0$  y existe  $G \in \mathcal{C}(J_2)$  tal que  $G(x_0) = 0$  y existe  $\delta > 0 : G'(x) = \frac{1}{g(x)} \forall x \in J_2 \cap ]x_0, x_0 + \delta[$  y además  $a(t_0) \neq 0$ , entonces (VS) no verifica la propiedad de unicidad local.

*Demostración.* Comenzamos demostrando i). Distinguimos dos casos:

**Caso 1:**  $g(x_0) = 0$ . Entonces,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t) = x_0$  es una solución de (P).

**Caso 2:**  $g(x_0) \neq 0$ . Entonces, existe  $I_1$  abierto tal que  $x_0 \in I_1, g(x) \neq 0 \ \forall x \in I_1$ . Tomamos entonces la aplicación que asigna a  $x$  el valor  $\frac{1}{g(x)} \in \mathcal{C}(I_1)$ . Sea ahora la aplicación  $G : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $G(x_0) = 0, G'(x) = \frac{1}{g(x)}$ . Tenemos que  $G$  es estrictamente monótona. Tomamos  $I_2 = G(I_1)$  intervalo abierto. Entonces,  $\exists G^{-1} : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $G^{-1}(I_2) = I_1$ . Además, tenemos que  $G^{-1} \in \mathcal{C}(I_2)$ , con  $(G^{-1})'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(x))} = g(G^{-1}(x)) \forall x \in I_2$ . Sea ahora  $A = A(t)$  una primitiva de  $a(t)$  tal que  $A(t_0) = 0 \in I_2$ . Por continuidad,  $\exists I_3 \subset J_1$  abierto tal que  $t_0 \in I_3, A(I_3) \subset I_2$ . Definimos:

$$\begin{aligned} \varphi : I_3 &\rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I_3) \\ t &\rightarrow G^{-1}(A(t)) \end{aligned}$$

Tenemos que  $t_0 \in I_3, \varphi(t_0) = G^{-1}(A(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0$ . Tenemos que  $(t, \varphi(t)) \in J_1 \times J_2$  y  $\varphi'(t) = g(G^{-1}(A(t)))a(t) = a(t)g(\varphi(t)) \ \forall t \in I_3$

Pasamos ahora a demostrar ii). Sean  $\varphi_1 : H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_2 : H_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos soluciones de (P).  $\square$

## 2.2. Unicidad en el futuro y en el pasado. Teorema de unicidad de Peano

Si  $d = 1$ , en algunos casos podemos obtener “gratuitamente” la propiedad de unicidad a la derecha o a la izquierda de  $t_0$  mediante el Teorema de unicidad de Peano. Introducimos a continuación la nomenclatura pertinente.

**Definición 2.2.** Diremos que el PVI (P) verifica la propiedad de unicidad en el futuro si verifica la propiedad de unicidad en el intervalo  $[t_0, +\infty[$ . Análogamente, diremos que el PVI (P) verifica la propiedad de unicidad en el pasado si verifica la propiedad de unicidad en el intervalo  $] -\infty, t_0]$ .

**Teorema 2.2** (Teorema de unicidad de Peano). *Consideramos un PVI (P) con  $d = 1$ .*

- a) *Si para cada  $t \geq t_0$  la función  $g(x) = f(t, x)$  es decreciente, entonces (P) verifica la propiedad de unicidad en el futuro.*
- b) *Si para cada  $t \leq t_0$  la función  $g(x) = f(t, x)$  es creciente, entonces (P) verifica la propiedad de unicidad en el pasado.*

*Demostración.* Vamos a demostrar el apartado a) ya que el otro apartado se demuestra de forma análoga. Sean  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos la función  $h : I_1 \cap I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(t) = (\varphi_1(t) - \varphi_2(t))^2$ . La función  $h$  es derivable y su derivada viene dada por

$$h'(t) = 2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))(\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)) = 2(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))(f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))),$$

que es menor o igual que 0 para todo  $t \in I_1 \cap I_2 \cap [t_0, +\infty[$ . Por tanto,  $h$  es decreciente en  $I_1 \cap I_2 \cap [t_0, +\infty[$ . Nótese que  $h(t_0) = 0$  y  $h \geq 0$ . Por tanto,  $h$  es constantemente 0 en  $I_1 \cap I_2 \cap [t_0, +\infty[$ , esto es,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  coinciden en este intervalo como se quería.  $\square$

En este punto interesa introducir la ecuación dual en el tiempo, que nos servirá para trasladar los resultados que conciernen al intervalo  $[t_0, +\infty[$  al intervalo  $] -\infty, t_0]$ . Dado el PVI (P) y una solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de éste, nos preguntamos de qué PVI es solución la función  $y(t) = x(-t)$ , definida en el intervalo  $-I$ . Claramente tenemos que  $y(-t_0) = x_0$ . Además, para cada  $t \in -I$  se verifica

$$y'(t) = -x'(-t) = -f(-t, x(-t)) = -f(-t, y(t)).$$

En resumen,  $y$  es solución del PVI

$$\begin{cases} y' = f(-t, y); \\ y(-t_0) = x_0; \end{cases} \quad (\text{D})$$

que se conoce como *problema dual* o *ecuación dual en el tiempo*. Nótese que la aplicación  $\Lambda : \Sigma(\text{P}) \rightarrow \Sigma(\text{D})$  dada por  $\Lambda(\varphi(t)) = \varphi(-s)$  es biyectiva. La siguiente proposición, cuya demostración es sencilla y se deja para el lector muestra la relación existente entre un PVI y su dual.

**Proposición 2.3.** *El PVI (P) verifica la propiedad de unicidad en el intervalo  $I$  si, y solo si, el PVI dual (D) verifica la propiedad de unicidad en el intervalo  $-I$ . Como consecuencia se verifican las siguientes afirmaciones:*

- a) *El PVI (P) verifica la propiedad de unicidad local si, y solo si, el PVI dual (D) verifica la propiedad de unicidad local.*



- b) *El PVI (P) verifica la propiedad de unicidad global si, y solo si, el PVI dual (D) verifica la propiedad de unicidad global.*

Podemos utilizar la Proposición 2.3 para demostrar el apartado b) del Teorema 2.2 a partir del apartado a).

EJEMPLO 2.4: Estudia la unicidad de solución del PVI

$$\begin{cases} x' = -t\sqrt[3]{x}; \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Claramente la función  $x = 0$  es una solución de (1). Tenemos que  $f(t, x) = -t\sqrt[3]{x}$ . Para  $t \geq 0$  fijo la función  $\varphi(x) = f(t, x)$  es decreciente mientras que para  $t \leq 0$  fijo la función  $\varphi(x) = f(t, x)$  creciente. Por tanto, el Teorema de unicidad de Peano nos dice que (1) verifica la propiedad de unicidad en el futuro y en el pasado, esto es, verifica la propiedad de unicidad global. Por tanto, la única solución de (1) es la trivial.  $\triangle$

## 2.3. Teorema de Picard-Lindelöf

En esta sección estudiamos el Teorema de Picard-Lindelöf, que también se conoce como Teorema de Picard, Teorema de Cauchy - Lipschitz o Teorema de Existencia y Unicidad. Es el principal resultado de existencia y unicidad de solución para PVI's. Existen numerosas versiones del resultado y, además, múltiples demostraciones. Enunciamos el teorema a continuación.

**Teorema 2.5** (Teorema de Picard-Lindelöf). *Sean  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua y localmente lipschitziana respecto de la segunda variable. Dado  $(t_0, x_0) \in D$ , el PVI (P) tiene solución y verifica la propiedad de unicidad global.*

En primer lugar, tenemos que introducir el concepto de ser lipschitziana respecto de la segunda variable (Sección 2.3.1). Posteriormente desarrollaremos el denominado operador integral de Volterra (2.3.2), que es la herramienta que se utiliza para demostrar el Teorema de Picard-Lindelöf.

### 2.3.1. Funciones lipschitzianas

Se asume que el lector tiene una cierta familiaridad con el concepto de función lipschitziana. Por tanto, solo se enuncian los resultados que sean relevantes en lo que sigue, dejando las pruebas para el lector.

**Definición 2.3.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ . La función  $f$  es *localmente lipschitziana*, que abreviaremos LL, si para cada  $x \in D$  existe un entorno abierto  $U \subset D$  de  $x$  tal que  $f$  es lipschitziana en  $U$ .

**Proposición 2.6.** Sea  $f \in C^1(A, \mathbb{R}^k)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^d$  es abierto convexo. Si  $\frac{\partial}{\partial x} f$  está acotada en  $A$ , entonces  $f$  es lipschitziana.

**Corolario 2.7.** Sea  $f \in C^1(A, \mathbb{R}^k)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^d$  es abierto. Entonces  $f$  es localmente lipschitziana.

**Lema 2.8.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^d$  compacto y sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$  localmente lipschitziana. Entonces  $f$  es globalmente lipschitziana.

*Demostración.* Razonemos por reducción al absurdo. Encontramos dos sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset A$  tales que  $\|f(x_n) - f(y_n)\|/\|x_n - y_n\| \rightarrow +\infty$ . Como  $A$  es compacto, podemos obtener parciales

$x_{\sigma(n)}$  y  $y_{\sigma(n)}$  convergentes. Nótese que el límite de ambas sucesiones debe ser el mismo ya que  $\|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})\|/\|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\| \rightarrow +\infty$ , pero esto contradice que  $f$  sea localmente lipschitziana en  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\sigma(n)}$ .  $\square$

**Definición 2.4.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ . La función  $f(x, y)$  es *lipschitziana respecto de la variable  $x \in \mathbb{R}^d$*  si existe  $M \geq 0$  tal que para cada  $x, x' \in \mathbb{R}^d$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  con  $(x, y) \in D$  y  $(x', y) \in D$  se tiene

$$\|f(x, y) - f(x', y)\| \leq M\|x - x'\|.$$

**Definición 2.5.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ . La función  $f(x, y)$  es *localmente lipschitziana respecto de la variable  $x \in \mathbb{R}^d$*  o *LL respecto de la variable  $x \in \mathbb{R}^d$*  si para cada  $(p, q) \in D$  existe un entorno abierto  $U \subset D$  de  $(p, q)$  tal que  $f$  es lipschitziana respecto de la variable  $x$  en  $U$ .

**Proposición 2.9.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  continua y derivable respecto de la variable  $x \in \mathbb{R}^d$ . Si la función  $\frac{\partial}{\partial x} f: D \rightarrow \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$  es continua, entonces  $f$  es LL respecto de la variable  $x$ .

### 2.3.2. Operador integral de Volterra

Fijado una EIV (EV) queremos definir un operador  $V: E \rightarrow E$  tal que a la función  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  le asigne la función  $V(y): I \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por

$$V(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (2)$$

Nótese que  $y$  es solución de (EV) si, y solo si,  $V(y) = y$ . Queremos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach para asegurar la existencia y la unicidad de tal  $y$ . Para ello necesitamos encontrar un conjunto  $E \subset \{f: I \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f \text{ es continua}\}$  apropiado que sea un espacio métrico completo. Además,  $V$  debe ser una contracción en tal espacio. En tal caso, a  $V$  se le denomina *operador integral de Volterra*.

En este contexto introducimos la siguiente notación. Dados  $a, b > 0$  denotamos

$$R_{a,b}(t_0, x_0) = [t_0 + a, t_0 - a] \times \overline{B}(x_0, b).$$

Existen  $a, b > 0$  tales que  $R_{a,b}(t_0, x_0) \subset D$ . Consideramos el conjunto  $E = \overline{B}(x_0, b) \subset \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^d)$ , que es un espacio métrico completo con la norma infinito.

**Lema 2.10.** Sea  $\varphi \in E$  y  $M = \max\{\|f(t, x)\| \mid (t, x) \in R_{a,b}(t_0, x_0)\}$ . Si  $aM \leq b$ , entonces  $V(\varphi) \in E$ . *Demostración.* La comprobación es sencilla. Sea  $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ , tenemos que

$$\|V(\varphi)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \leq M(t - t_0) \leq Ma \leq b.$$

De la arbitrariedad de  $t$  se obtiene que  $\|V(\varphi) - x_0\| \leq b$ .  $\square$

**Comentario 2.11.** Si se verifican las hipótesis del Lema 2.10 y  $\varphi: [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^d$  es solución de (EV), entonces  $(t, \varphi(t)) \in R_{a,b}$  para todo  $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ .

**Lema 2.12.** Si la función  $f$  es lipschitziana respecto de la segunda variable en  $R_{a,b}(t_0, x_0)$  con constante de Lipschitz  $L \geq 0$ , entonces

$$\|V(\varphi) - V(\Psi)\|_{\infty} \leq L\|\varphi - \Psi\|_{\infty},$$

*Demostración.* Sea  $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ . Tenemos que

$$(V(\varphi) - V(\Psi))(t) = \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \Psi(s))] \, ds.$$

Tomamos normas y acotamos la integral

$$|(V(\varphi) - V(\Psi))(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \Psi(s))| \, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t L|\varphi(s) - \Psi(s)| \, ds \right| \leq La\|\varphi - \Psi\|_\infty.$$

De la arbitrariedad de  $t$  se obtiene el resultado.  $\square$

### 2.3.3. Demostración del Teorema de Picard-Lindelöf

Gracias al operador integral de Volterra podemos dar una demostración sencilla del Teorema de Picard-Lindelöf. Presentamos la demostración a continuación.

*Demostración.* Existe  $U \subset D$  entorno de  $(t_0, x_0)$  y  $L \geq 0$  tal que  $f$  es lipschitziana respecto de la segunda variable en  $U$  con constante de Lipschitz  $L \geq 0$ . Existen  $\bar{a}, b \in \mathbb{R}^+$  tal que  $R_{\bar{a}, b}(t_0, x_0) \subset U$ . Por el teorema de Weierstrass, existe  $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in R_{\bar{a}, b}(t_0, x_0)\}$ . Tomamos  $0 < a < \bar{a}$  tal que  $aM < b$  y  $aL < 1$ . En el nuevo recinto  $R_{a, b}(t_0, x_0)$  se cumplen todas las propiedades que se requieren para finalizar la demostración. Consideramos el espacio métrico completo

$$E = \{\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^d) : \|\varphi(t) - x_0\| \leq b \, \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]\}.$$

Por los lemas anteriores tenemos que  $V(E) \subset E$  y  $V$  es contractiva. La existencia de solución se deduce del Teorema del punto fijo de Banach.

Estudiemos ahora la unicidad local de (P). Consideremos dos soluciones  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Podemos tomar  $0 < a' < a$  tal que  $[t_0 - a', t_0 + a'] \subset I_1 \cap I_2$  y, además,  $\|\varphi_i(t) - x_0\| < b$  para todo  $t \in [t_0 - a', t_0 + a']$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Nótese que se sigue verificando  $a'M < b$  y  $a'L < 1$ . Tomamos el espacio métrico completo

$$E' = \{\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - a', t_0 + a'], \mathbb{R}^d) : \|\varphi(t) - x_0\| \leq b \, \forall t \in [t_0 - a', t_0 + a']\}.$$

Tenemos que  $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$  son puntos fijos del operador integral de Volterra definido sobre  $E'$ . Como consecuencia del Teorema del punto fijo de Banach,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  coinciden en  $[t_0 - a', t_0 + a']$ , lo que demuestra la unicidad local.

Por último, de la arbitrariedad de  $(t_0, x_0)$  deducimos que la EDO verifica la propiedad de unicidad local en cualquier punto  $(t_0, x_0) \in D$ . Podemos aplicar pues la Proposición 1.6 para completar la demostración.  $\square$

Recuérdese en este punto que el Teorema del punto fijo de Banach nos dice además que dado un elemento  $\varphi_0 \in E$ , la sucesión  $\varphi_n = V^n(\varphi)$  converge en norma a la solución de ???. Puesto que estamos usando la norma infinito, esta convergencia equivale a la convergencia uniforme. A la sucesión  $\varphi_n$  se le denomina iterantes de Picard.

**EJEMPLO 2.13** (Iterantes de Picard): Consideramos el PVI

$$\begin{cases} x' = x^2; \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Para este PVI obtenemos  $f(t, x) = x^2$ . En el entorno  $U = \mathbb{R} \times [0, 2]$  de  $(0, 1)$  tenemos que  $f$  es lipschitziana respecto de la segunda variable con constante de Lipschitz  $L = 4$  y está acotada por  $M = 4$ . Tomamos pues  $a = 1/8$ . Podemos definir en  $R_{a,b}(0, 1)$  las iterantes de Picard, que nos permiten encontrar una aproximación numérica de la solución en caso de no conocer ésta.  $\triangle$

## 2.4. Solución general

Como consecuencia del Teorema de Picard-Lindelöf y los resultados de la Sección 1.2 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.14.** *Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  un conjunto abierto y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua y localmente lipschitziana respecto de la segunda variable. Entonces, para cualquier  $(t_0, x_0) \in D$  el PVI (P) tiene una única solución maximal.*

**Definición 2.6.** Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua y localmente lipschitziana. Fijado  $(t_0, x_0) \in D$  denotaremos  $\alpha(t_0, x_0)$  y  $\omega(t_0, x_0)$  al extremo inferior y superior, respectivamente, de la solución maximal del PVI asociado a la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ . Definimos el conjunto

$$\Omega = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : (t_0, x_0) \in D, \alpha(t_0, x_0) < t < \omega(t_0, x_0)\}$$

y la llamada *solución general*  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  a partir del Teorema de Picard-Lindelöf como aquella función diferenciable en la primera variable que verifica  $X_t(t, t_0, x_0) = f(t, X(t, t_0, x_0))$  y  $X(t_0, t_0, x_0) = x_0$ . Esto es, la función  $\varphi(t) = X(t, t_0, x_0)$  es la solución maximal del PVI asociado a  $(t_0, x_0)$ .

Cuando no haya ambigüedad en la solución maximal que estamos considerando utilizaremos  $] \alpha, \omega[$  para indicar su dominio. Algunos autores escriben  $] \omega_-, \omega_+[$  en lugar de  $] \alpha, \omega[$ . No obstante, la notación que hemos escogido nos facilita la escritura.

## 2.5. Teorema de Cauchy - Peano

Nos preguntamos en este punto si todo PVI tiene solución. De momento no nos hemos encontrado un PVI que no tenga solución. Sí hemos encontrado ejemplos donde las soluciones maximales no eran únicas y, por tanto, no podemos aspirar a demostrar un resultado como el Teorema de Picard-Lindelöf en un contexto general. El Teorema de Cauchy - Peano responde afirmativamente a nuestra pregunta.

**Teorema 2.15** (Teorema de Cauchy - Peano). *El PVI (P) tiene solución.*

*Demostración.* NO LA HEMOS DADO TODAVÍA... SE AÑADIRÁ EN UN FUTURO.  $\square$

### 3. EDOs autónomas escalares

La solución general de una EDO se simplifica enormemente cuando la función  $f$  no depende de la variable  $t$ . En tal caso, podemos obtener una gran cantidad de información acerca de las soluciones de la EDO solamente utilizando la unicidad del Teorema de Picard - Lindelöf.

**Definición 3.1.** Una *EDO autónoma escalar* es una EDO de la forma

$$x' = f(x), \quad x \in I, \quad (\text{AE})$$

donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo abierto y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función localmente lipschitziana. Para cada  $x_0 \in I$  denotamos por  $X(t; x_0)$  a la única solución maximal de (AE) que verifica  $x(0) = x_0$ .

Nótese que  $X(t; x_0)$  está bien definida gracias al Teorema de Picard-Lindelöf. De aquí en adelante nos referiremos a (AE) cuando utilicemos EDOs autónomas escalares en un contexto general.

**Definición 3.2.** La *órbita* de (AE) asociada a  $x_0$  es el conjunto imagen de  $X(t; x_0)$  y se denota  $\Theta(x_0)$ .

El siguiente lema, cuya demostración es una simple comprobación, nos proporciona a partir de una solución maximal de (AE) infinitas (no numerables) soluciones maximales con el mismo conjunto imagen. Esto quiere decir que las órbitas de (AE) se repiten un número no numerable de veces.

**Lema 3.1.** Sea  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\alpha, \omega)$  solución de (AE) y sea  $\tau \in \mathbb{R}$ . Entonces, la función  $\Psi: ]\alpha - \tau, \omega - \tau[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Psi(t) = \varphi(t + \tau)$  es solución de (AE).

Cabe preguntarse si, dadas dos soluciones maximales de (AE) con la misma órbita, puede obtenerse una de otra mediante el Lema 3.1. La respuesta es afirmativa y es consecuencia del Teorema de Picard-Lindelöf. A continuación la enunciamos de forma más general.

**Lema 3.2.** Consideremos la EDO (AE). Sean  $x_1, x_2 \in I$  tales que  $\Theta(x_1) \cap \Theta(x_2) \neq \emptyset$ . Denotemos  $\varphi_1(t) = X(t; x_1)$  y  $\varphi_2(t) = X(t; x_2)$ . Entonces, existe  $\tau > 0$  tal que  $\alpha(x_2) = \alpha(x_1) + \tau$ ,  $\omega(x_2) = \omega(x_1) + \tau$  y  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t + \tau)$  para todo  $t \in ]\alpha(x_1), \omega(x_1)[$ .

*Demostración.* Existen  $t_1$  y  $t_2$  tales que  $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$ . Definimos  $\phi(t) = \varphi_2(t + (t_2 - t_1))$  en el intervalo que corresponda. En virtud del Lema 3.1  $\phi$  es solución de (AE) y verifica  $\phi(t_1) = \varphi_2(t_2) = \varphi_1(t_1)$ . Por el Teorema de Picard-Lindelöf obtenemos que  $\phi = \varphi_1$ .  $\square$

Nótese que por el Teorema del valor intermedio la órbita asociada a  $x_0$  es un intervalo. Además, es claro que

$$I = \bigcup_{x_0 \in I} \Theta(x_0).$$

**Corolario 3.3.** Consideremos la EDO (AE). Para cualesquiera  $x_0, x'_0 \in I$  o bien  $\Theta(x_0) = \Theta(x'_0)$  o bien  $\Theta(x_0) \cap \Theta(x'_0) = \emptyset$ . Por tanto, Las órbitas de (AE) constituyen una partición de  $I$ .

*Demostración.* Sean  $x_0, x'_0 \in I$  tales que  $\Theta(x_0) \cap \Theta(x'_0) \neq \emptyset$ . Veamos que  $\Theta(x_0) = \Theta(x'_0)$ . Denotamos  $\varphi_1(t) = X(t; x_0)$  y  $\varphi_2(t) = X(t; x'_0)$ . Aplicamos el Lema 3.2 sobre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , obteniendo en particular que  $\Theta(x_0) = \Theta(x'_0)$ .  $\square$

Cabe preguntarse cuándo una órbita es trivial, esto es, tiene solamente un punto. El siguiente lema resuelve esta cuestión.

**Lema 3.4.** Consideremos la EDO (AE) y  $x_0 \in I$ . Equivalen:

- a) La órbita  $\Theta(x_0)$  es  $[x_0, x_0] = \{x_0\}$ .

b) La solución  $X(t; x_0)$  es constante.

c) La función  $f$  se anula en  $x_0$ .

*Demostración.* Nótese que  $\Theta(x_0) = \text{Im}(X(t; x_0)) = \{x_0\}$  si, y solo si, la solución  $X(t; x_0)$  es constantemente  $x_0$ . Veamos que esto equivale a que  $f$  se anula en  $x_0$ . En efecto, si  $X(t; x_0) = x_0$ , entonces evaluando la derivada en  $t = 0$  obtenemos  $0 = f(x_0)$ . Ahora, si  $f(x_0) = 0$ , la función constantemente  $x_0$  es una solución de (AE). Por el Teorema de Picard-Lindelöf, debe tenerse  $X(t; x_0) = x_0$  como se quería.  $\square$

**Definición 3.3.** Diremos que la EDO (AE) tiene un punto de equilibrio en  $x_0$  si  $f(x_0) = 0$ . Denotaremos por  $Z(f)$  al conjunto de los ceros de  $f$ , que es compacto por ser  $f$  continua.

**Corolario 3.5.** Si  $p$  es un punto de equilibrio de (AE) y  $x_0 \in I$  con  $x_0 \neq p$ , entonces  $X(t, x_0) \neq p$  para todo  $t \in ]\alpha(x_0), \omega(x_0)[$ . Por tanto, o bien  $\Theta(x_0) \subset ]-\infty, p[$  o bien  $\Theta(x_0) \subset ]p, +\infty[$ .

*Demostración.* Por la Proposición 3.3  $\Theta(x_0) \cap \Theta(p) = \emptyset$ , lo que prueba el resultado.  $\square$

**Lema 3.6.** Sean  $p_1, p_2$  dos puntos de equilibrio de (AE) con  $p_1 \leq p_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} ]p_1, p_2[ &= \bigcup_{x_0 \in ]p_1, p_2[} \Theta(x_0); \\ ]p_1, +\infty[ &= \bigcup_{x_0 \in ]p_1, +\infty[} \Theta(x_0); \\ ]-\infty, p_1[ &= \bigcup_{x_0 \in ]-\infty, p_1[} \Theta(x_0). \end{aligned}$$

*Demostración.* Demostramos solo la primera igualdad, pues las otras dos se deducen de forma análoga. Basta ver que para cada  $x_0 \in ]p_1, p_2[$  se tiene  $\Theta(x_0) \subset ]p_1, p_2[$ . En efecto, por el Corolario 3.5 tenemos que  $\Theta(x_0) \subset ]-\infty, p_2[ \cap ]p_1, +\infty[$ .

**Proposición 3.7.** Consideremos la EDO (AE). Si  $f(x_0) > 0$  (resp.  $f(x_0) < 0$ ), entonces la función  $X(t; x_0)$  es estrictamente creciente (resp. decreciente).

*Demostración.* Lo demostramos para el caso  $f(x_0) > 0$  pues el otro es análogo. Denotemos  $\varphi(t) = X(t; x_0)$ . Supongamos que existe  $t' \in ]\alpha, \omega[$  tal que  $0 = \varphi'(t') = f(\varphi(t'))$ . Denotemos  $x'_0 = \varphi(t')$ . Este hecho contradice que  $\Theta(x_0)$  sea disjunta con  $\Theta(x'_0) = \{x'_0\}$ . Tenemos pues que  $\varphi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in ]\alpha, \omega[$ . Por tanto,  $\varphi$  es estrictamente monótona y su monotonía viene determinada por el signo de  $\varphi'(t_0) = f(x_0)$ .  $\square$

**Corolario 3.8.** Las órbitas de (AE) son conjuntos unitarios o intervalos abiertos.

*Demostración.* Sea  $x_0 \in I$ . Si  $X(t; x_0)$  no es constante, entonces es estrictamente monótona, luego su imagen es un intervalo abierto.  $\square$

Ya disponemos de las herramientas para encontrar las órbitas de (AE) a partir de sus puntos de equilibrio.

**Proposición 3.9.** Consideremos la EDO (AE) y  $x_0 \in I$ . Se verifican las siguientes afirmaciones.

- Si  $f$  no se anula, entonces  $\Theta(x_0) = I$ .
- Si  $x_0 \in Z(f)$ , entonces  $\Theta(x_0) = \{x_0\}$  y  $X(t; x_0) = x_0$ .
- Si  $p_1, p_2$  son dos ceros consecutivos de  $f$  con  $p_1 < x_0 < p_2$ , entonces  $\Theta(x_0) = ]p_1, p_2[$ .
- Si  $x_0 > p = \max Z(f)$ , entonces  $\Theta(x_0) = ]p, \sup I[$ .

e) Si  $x_0 < p = \min Z(f)$ , entonces  $\Theta(x_0) = ]p, \inf I[$ .

*Demostración.* Demostramos cada apartado por separado.

- a) Recordemos que  $I$  es unión disjunta de sus órbitas, que como  $f$  no se anulan son intervalos abiertos. Nótese que una unión disjunta de más de un abierto no es conexa. Por tanto,  $f$  solo tiene una órbita distinta. Esto es,  $\Theta(x_0) = I$ .
- b) Este apartado se demostró en el Lema 3.4.
- c) Razonamos como en a) sobre  $]p_1, p_2[$  utilizando el Lema 3.6.
- d) Razonamos como en a) sobre  $]p, +\infty[$  utilizando el Lema 3.6.
- e) Razonamos como en a) sobre  $] - \infty, p[$  utilizando el Lema 3.6. □

**Definición 3.4.** Una representación en la recta real de las órbitas de (AE) recibe el nombre de *diagrama de fases*. Habitualmente utilizamos flechas en lugar de segmentos para unir los puntos equilibrio de (AE). El sentido de la flecha indica la monotonía de las soluciones que tienen ese segmento como órbita (derecha = creciente, izquierda = decreciente).

En vista de la Proposición 3.9 el diagrama de fases viene determinado por el diagrama de signos de  $f$ . Además, utilizando la proposición 3.7, un signo positivo indica que la solución asociada a esa órbita es estrictamente creciente mientras que un signo negativo indica que dicha solución es estrictamente decreciente.

EJEMPLO 3.10 (Ecuación logística): Sean  $\lambda, L > 0$ . Consideramos la EDO autónoma escalar

$$x' = \lambda x(L - x) \tag{4}$$

La función  $f(x) = \lambda x(x - L)$  definida en  $\mathbb{R}$  es de clase 1 y, por tanto, localmente lipschitziana. Tenemos que  $Z_f = \{0, L\}$ . El diagrama de fases de la ecuación es

$$-\infty \rightarrow 0 \leftarrow L \rightarrow +\infty. \tag{\triangle}$$

**Corolario 3.11.** Sea  $\varphi \in C^1([\alpha, \omega[)$  solución maximal de (AE).

- a) Si  $\lim_{t \rightarrow \omega} \varphi(t) = p \in I$ , entonces  $p \in Z_f$  y  $\omega = +\infty$ .
- b) Si  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = p \in I$ , entonces  $p \in Z_f$  y  $\alpha = -\infty$ .

*Demostración.* Demostramos a) pues b) es análogo. En virtud de la Proposición 3.9 y la Proposición 3.9 obtenemos que  $p \in Z_f$ . Además,  $\lim_{t \rightarrow \omega} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow \omega} f(\varphi(t)) = 0$ . Si se tuviese  $\omega < +\infty$ , entonces podemos utilizar el Lema 1.10 para obtener una nueva solución a partir de  $\varphi$  y la solución constantemente  $p$ , lo que contradice la maximalidad de  $\varphi$ . □

**Corolario 3.12.** Sean  $p_1$  y  $p_2$  dos puntos de equilibrio consecutivos de (AE) con  $p_1 < p_2$ . Sea  $\varphi$  solución maximal de (AE) tal que su imagen es  $]p_1, p_2[$ . Entonces, el dominio de  $\varphi$  es  $\mathbb{R}$ . A la solución  $\varphi$  se le llama *sigmoide*.

EJEMPLO 3.13 (Ecuación logística - 2): Recuperamos el Ejemplo 3.10, donde se estudiaba la ecuación logística. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- a) Si  $x_0 \in \{0, L\}$ , entonces  $]\alpha(x_0), \omega(x_0)[ = \mathbb{R}$ .
- b) Si  $x_0 < 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t, x_0) = 0$  y, por tanto,  $\omega(x_0) = +\infty$ .
- c) Si  $0 < x_0 < L$ , entonces  $\alpha(x_0) = -\infty$  y  $\omega(x_0) = +\infty$ . Además,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} X(t, x_0) = L$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t, x_0) = 0$ .

d) Si  $x_0 > L$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow -\infty} X(t, x_0) = L$  y, por tanto,  $\alpha(x_0) = -\infty$ .  $\triangle$

Hemos demostrado la Proposición 3.9 mediante un argumento de conexión, obteniendo varios corolarios en consecuencia. Parte de estos resultados también se podían haber deducido a partir del siguiente lema.

**Lema 3.14** (Barbalet, versión débil). *Sea  $\varphi \in D([\alpha, +\infty[)$  tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = L \in \mathbb{R}$ . Entonces, existe  $\{t_n\} \subset [\alpha, +\infty[$  estrictamente creciente con  $\{t_n\} \rightarrow +\infty$  tal que  $\{\varphi'(t_n)\} \rightarrow 0$ .*

*Demostración.* Es una consecuencia sencilla del teorema del valor medio.  $\square$

**Definición 3.5.** Sea  $p \in I$  un punto de equilibrio de la ecuación (AE). Se define la *región de atracción* de  $p$  como

$$\mathcal{R}(p) = \{x_0 \in I : \omega(x_0) = +\infty \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t; x_0) = p\}.$$

Claramente tenemos que  $p \in \mathcal{R}(x_0)$ .

**Definición 3.6.** En el contexto de la Definición 3.5:

- Si  $p \in \text{int}(\mathcal{R}(p))$ , entonces diremos que  $p$  es un *atractor* o *sumidero*. Esto equivale a que el diagrama de fases sea de la forma  $\rightarrow p \leftarrow$  en un entorno de  $p$ .
- Si  $\mathcal{R}(p) = I$ , entonces diremos que  $p$  es un *atractor global*. Esto equivale a que el diagrama de fases sea exactamente  $\rightarrow p \leftarrow$ .
- Si  $\mathcal{R}(p) = \{p\}$  y  $p$  es un cero aislado de  $f$ , entonces diremos que  $p$  es una *fuerza* o un *repulsor*. Esto equivale a que el diagrama de fases sea de la forma  $\leftarrow p \rightarrow$  en un entorno de  $p$ .
- Si  $\text{int}(\mathcal{R}(p)) \neq \emptyset$  y  $p \in \partial\mathcal{R}(p)$ , entonces diremos que  $p$  es un *semiatractor*. Esto equivale a que el diagrama de fases sea de la forma  $\rightarrow p$  algo o bien algo  $p \leftarrow$  en un entorno de  $p$ .

Utilizando herramientas de un curso básico de cálculo fácilmente obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.15** (Test de la derivada primera). *Sea  $p \in I$  un punto de equilibrio de la ecuación (AE) tal que  $f$  es de clase 1 en un entorno de  $p$ . Se verifican las siguientes afirmaciones.*

- a) Si  $f'(p) < 0$ , entonces  $p$  es un *atractor* de  $x' = f(x)$ .
- b) Si  $f'(p) > 0$ , entonces  $p$  es un *repulsor* de  $x' = f(x)$ .

**EJEMPLO 3.16** (Ecuación logística - 3): Recuperamos el Ejemplo 3.10. Tenemos que  $f(x) = \lambda x(L - x)$  y sus puntos críticos son  $\{0, L\}$ . Deducimos que 0 es un atractor mientras que  $L$  es un repulsor.  $\triangle$



## 4. Prolongación y acotación de soluciones

En la Sección 3 hemos calculado los conjuntos imagen de las soluciones maximales de EDOs autónomas escalares. Este hecho se ha conseguido gracias al Teorema de Picard-Lindelöf. En esta sección intentamos generalizar algunos de estos argumentos para EDOs arbitrarias.

Si  $x_0$  se encuentra entre dos puntos críticos de una EDO autónoma escalar, entonces la solución maximal del PVI determinado por  $(t_0, x_0)$  está acotada. En el siguiente resultado generalizamos este hecho para ecuaciones en varias variables.

**Proposición 4.1.** *Consieremos una EDO de la forma  $x' = f(x)$ , donde  $f$  está definida en  $D$  y es localmente lipschitziana. Sea  $\Omega \subset D$  abierto acotado tal que  $f$  se anula en  $\partial\Omega$ . Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal del PVI asociado a  $(t_0, x_0)$ . Si  $x_0 \in \Omega$ , entonces  $\varphi(t) \in \Omega$  para todo  $t \in ]\alpha, \omega[$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $\varphi(t) \notin \partial\Omega$  para todo  $t \in ]\alpha, \omega[$ . En efecto, si  $\varphi(t_1) \in \partial\Omega$ , entonces  $\varphi$  es solución del PVI cuya condición inicial es  $(t_1, \varphi(t_1))$ . No obstante, la única solución de este PVI es la constantemente  $\varphi(t_1)$  por el Teorema de Picard-Lindelöf, contradicción. La prueba finaliza al darse cuenta de que si  $\varphi$  no está acotada, entonces debe existir  $t_1$  con  $\varphi(t_1) \in \partial\Omega$ .  $\square$

EJEMPLO 4.2: Demuestra que la solución maximal del siguiente PVI está acotada.

$$\begin{cases} x' = (1 - x^2 - y^2)(x + y); \\ y' = (1 - x^2 - y^2)(x - y); \\ x(0) = 1/3, y(0) = -2/3. \end{cases} \quad (5)$$

En este caso  $f(x, y) = ((1 - x^2 - y^2)(x + y), (1 - x^2 - y^2)(x - y))$ . Nótese que  $Z(f) = S(0, 1) \cup \{(0, 0)\}$ . Puesto que  $x_0 \in B(0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  por la Proposición 4.1 obtenemos que la solución de (5) se queda en  $B(0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$ .  $\triangle$

En lo que sigue todos los resultados se enuncian y se prueban para el extremo superior del dominio de una solución. No obstante, también se pueden establecer de forma análoga para el extremo inferior, hecho que se deja al lector como ejercicio.

### 4.1. Prolongación de soluciones

En este apartado estudiamos cómo prolongar soluciones de un PVI arbitrario. Encontraremos prolongaciones bajo ciertas hipótesis sobre la solución y / o el problema. En consecuencia, para las soluciones maximales fallará alguna de estas hipótesis, obteniendo información sobre el dominio u acotación éstas.

**Lema 4.3.** *Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución de (P) tal que  $\lim_{t \rightarrow \omega} \varphi(t) = \xi \in \mathbb{R}^d$ . Si  $(\omega, \xi) \in D$ , entonces la solución es prolongable.*

*Demostración.* Consideramos el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x); \\ x(\omega) = \xi. \end{cases}$$

Por el Teorema de Cauchy existe  $a > 0$  tal que  $\tilde{\varphi}: ]\omega - a, \omega + a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  es solución del nuevo PVI. La función  $\Psi: ]\alpha, \omega + a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por

$$\Psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \leq \omega; \\ \tilde{\varphi}(t) & \text{si } t > \omega; \end{cases}$$

es una solución de (P) gracias al Lemma 1.10 y, por tanto, es una prolongación de  $\varphi$ .  $\square$

El Lemma 4.3 se puede ampliar, obteniendo el siguiente resultado.

**Lema 4.4.** *Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución de (P) tal que existe una sucesión  $\{t_n\} \subset ]\alpha, \omega[$  con  $\{t_n\} \rightarrow \omega$  y  $\{\varphi(t_n)\} \rightarrow \xi \in \mathbb{R}^d$ . Si  $(\omega, \xi) \in D$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \omega} \varphi(t) = \xi$  y, además, la solución es prolongable.*

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\{t_n\}$  es creciente. Sea  $U \subset D$  entorno compacto de  $(\omega, \xi)$ . Existe  $M > \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in U\}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Encontramos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $(t_n, \varphi(t_n)) \in U$ ,  $\|\varphi(t_n) - \xi\| < \varepsilon/2$  y  $\omega - t_n < \varepsilon/(2M)$  para todo  $n \geq m$ . Vamos a demostrar que para todo  $t \in [t_m, \omega[$  se tiene  $\|\varphi(t) - \xi\| < \varepsilon$ . Nótese que para cada  $t \in [t_m, \omega[$  se verifica

$$\varphi(t) = \varphi(t_m) + \int_{t_m}^t \varphi'(s) ds = \varphi(t_m) + \int_{t_m}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Por tanto, deducimos que

$$\|\varphi(t) - \varphi(t_m)\| = \left\| \int_{t_m}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq \int_{t_m}^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \leq M|t - t_m| < M|\omega - t_m| < \varepsilon/2.$$

Por último, hemos demostrado que  $\|\varphi(t) - \xi\| \leq \|\varphi(t_m) - \xi\| + \|\varphi(t) - \varphi(t_m)\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$  como se quería. De la arbitrariedad de  $\varepsilon$  se deduce que  $\lim_{t \rightarrow \omega} \varphi(t) = \xi$ . En vista del Lema 4.3 la solución es prolongable.  $\square$

Aplicando el Lema 4.4 a soluciones maximales obtenemos el siguiente teorema, que es uno de los principales resultados de la sección.

**Teorema 4.5** (Comportamiento de las soluciones maximales en el extremo superior). *Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución maximal de (P). Si  $\omega < +\infty$ , entonces se ha de cumplir una de las siguientes alternativas:*

- a)  $\lim_{t \rightarrow \omega} \|\varphi(t)\| = +\infty$ ;
- b) *Existe  $\xi \in \mathbb{R}^d$  con  $(\omega, \xi) \in \partial D$  y existe  $\{t_n\} \subset ]\alpha, \omega[$  tal que  $\{t_n\} \rightarrow \omega$  y  $\{\varphi(t_n)\} \rightarrow \xi$ .*

*Demostración.* Supongamos que no se cumple a). En tal caso encontramos una sucesión  $\{t_n\}$  convergente a  $\omega$  tal que  $\{\varphi(t_n)\}$  está acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass obtenemos una parcial  $\{\varphi(t_{\sigma(n)})\}$  convergente a  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Nótese que  $(\omega, \xi) \notin D$  ya que en caso contrario la solución sería prolongable por el Lema 4.4. Puesto que  $\{(t_{\sigma(n)}, \varphi(t_{\sigma(n)}))\} \rightarrow (\omega, \xi)$  tenemos que  $(\omega, \xi) \in \partial D$ .  $\square$

**Definición 4.1.** Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua. El conjunto  $\omega$ -límite de (P) se define como

$$L_\omega(\varphi) = \{q \in \mathbb{R}^d \mid \exists \{t_n\} \subset ]\alpha, \omega[, \{t_n\} \rightarrow \omega, \{\varphi(t_n)\} \rightarrow q\}.$$

**Comentario 4.6.** *Nótese que en el Teorema 4.5 la alternativa a) equivale a  $L_\omega(\varphi) = \emptyset$  mientras que la alternativa b) equivale a  $\{\omega\} \times L_\omega(\varphi) \cap \partial D \neq \emptyset$ .*

**Corolario 4.7.** *Si el conjunto  $D$  es acotado y  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal de (P), entonces  $\omega < +\infty$  y además existe  $\xi \in \mathbb{R}^d$  con  $(\omega, \xi) \in \partial D$  y  $\{t_n\} \subset ]\alpha, \omega[$  tal que  $\{t_n\} \rightarrow \omega$  y  $\{\varphi(t_n)\} \rightarrow \xi$ .*

**Definición 4.2.** Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución maximal de (P). La solución  $\varphi$  *explota en tiempo finito* si  $\omega < +\infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \omega} \|\varphi(t)\| = +\infty$ .

**Corolario 4.8.** Sean  $D = ]a, b[ \times \mathbb{R}^d$  con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  y sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal de (P). Si  $\omega < b$ , entonces la solución *explota en tiempo finito*.

EJEMPLO 4.9: Consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = x^2 + t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  solución maximal. Puesto que  $f$  está definida en  $\mathbb{R}^2$  deducimos que si  $\omega < +\infty$ , entonces la solución *explota en tiempo finito*.  $\triangle$

EJEMPLO 4.10: Sea  $]\alpha, \omega[$  el intervalo de definición de la solución maximal de

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{x} + \frac{\sin(t)}{x^2}, & x > 0; \\ x(0) = 2. \end{cases} \quad (6)$$

Demuestra que  $\omega = +\infty$ .

Denotemos  $\varphi(t) = X(t; 0, 2)$ . Vamos a demostrar que  $1 < \varphi(t) \leq 2 + 3t$  para todo  $t \geq 0$ . Razonemos por reducción al absurdo. Si  $1 > \varphi(t')$  para cierto  $t' > 0$ , podemos encontrar  $\tau = \inf\{t > 0 : \varphi(t) < 1\} > 0$ . Nótese que como  $\varphi(t)$  es continua debe tenerse  $\varphi(\tau) = 1$  y  $\varphi(t) > 1$  para todo  $0 < t < \tau$ . Como consecuencia, deducimos que  $\varphi'(\tau) \leq 0$ . Sin embargo, usando que  $\varphi$  es solución de (6) se tiene que  $\varphi'(\tau) = 2 + \sin(\tau) > 0$ , contradicción. Análogamente demostramos que  $\varphi(t) \geq 1$  para todo  $t \leq t_0$ . Utilizando esta información y (6) deducimos que

$$\varphi'(t) \leq \varphi'(t)\varphi(t) = 2 + \frac{\sin(t)}{\varphi(t)} \leq 3.$$

Por tanto, obtenemos

$$\varphi(t) = 2 + \int_0^t \varphi'(s) ds \leq 2 + 3t.$$

Por último, las cotas que hemos encontrado impiden que la solución explote en tiempo finito y, por tanto, no se cumple la alternativa a) del Teorema 4.5. La segunda alternativa tampoco es factible. En efecto tenemos que  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  y, por tanto,  $\partial D = \mathbb{R} \times \{0\}$ . Si  $\omega < +\infty$  y  $\{t_n\} \rightarrow \omega$  con  $\varphi(t_n) \rightarrow \xi$  y  $(\omega, \xi) \in \partial D$ , entonces  $\xi = 0$ . Sin embargo, hemos demostrado que  $\varphi(t) \geq 1$  para todo  $t \in ]\alpha, \omega[$ , contradicción. Los mismos razonamientos se pueden aplicar al extremo inferior  $\alpha$ . Por tanto, debe tenerse  $\alpha = -\infty$  y  $\omega = +\infty$ .  $\triangle$

El ejemplo anterior motiva la obtención del siguiente corolario.

**Corolario 4.11.** Sean  $D = ]a, b[ \times \mathbb{R}^d$  con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  y sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal de (P) tal que  $\|\varphi'(t)\| \leq g(t)$  para todo  $t \in ]\alpha, \omega[$ , donde  $g$  es una función continua. Entonces,  $\alpha = a$  y  $\omega = b$ . En particular, si existe una función  $g \in \mathcal{C}(R)$  tal que  $f(t, x) \leq g(t)$  para todo  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , entonces  $\alpha = a$  y  $\omega = b$ .

*Demostración.* Realizamos la prueba para  $\omega$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $\omega < b$ . Sea  $M = \max g([t_0, \omega])$ . Para cada  $t \in [t_0, \omega]$  tenemos que

$$\|\varphi(t)\| = \|\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds\| \leq \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|\varphi'(s)\| ds = \|\varphi(t_0)\| + M(t - t_0) \leq \|\varphi(t_0)\| + M(\omega - t_0),$$

lo que contradice la tesis del Corolario 4.8.  $\square$

EJEMPLO 4.12: Consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = g(x) + h(t), & x \in ]a, b[; \\ x(0) = 0; \end{cases}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ ,  $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  y  $g \in \mathcal{C}(]a, b[)$  acotada por  $M > 0$ . Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  solución maximal. Tenemos que  $D = ]a, b[ \times \mathbb{R}$ . Puesto que  $f(t, x)$  está acotada por  $|h(t)| + M$ , deducimos que  $\omega = b$  y  $\alpha = a$  por el Corolario 4.11. En particular, podemos aplicar este resultado a  $g(x) = \sin(x)$  y  $h(t) = t^2$ .  $\triangle$

**Lema 4.13.** Sea  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que existen  $m, p, r \in \mathbb{R}^+$  con  $p > 1$  verificando que  $f(t, x) \geq mx^p$  para todo  $t \geq t_0, x > r$ . Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  una solución maximal de (P). Si  $x_0 > r$  entonces,  $\omega < +\infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \omega} \varphi(t) = +\infty$ .

*Demostración.* Vamos a encontrar una función que es cota inferior de  $\varphi$  y tiene una asíntota vertical. Supongamos que existe  $t_1 \in [t_0, \omega[$  con  $\varphi(t_1) = r$  y  $\varphi(t) > r$  para todo  $t \in [t_0, t_1[$ . Para  $t \in ]t_0, t_1[$  se tiene

$$\frac{\varphi(t_0)^{-p-1}}{p+1} - \frac{\varphi(t)^{-p-1}}{p+1} = \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)^{p+1}} ds \geq m(t - t_0).$$

Como consecuencia obtenemos que

$$\varphi(t) \geq \left( \frac{1/((p+1)m)}{\varphi(t_0)^{-p-1}/((p+1)m) + t_0 - t} \right)^{1/(p+1)} = h(t),$$

que es una función estrictamente creciente, con una asíntota vertical en  $t_1 + \varphi(t_1)^{-p-1}/((p+1)m)$  y  $h(t_1) = \varphi(t_0)$ . Deducimos que  $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ . Obtenemos que  $\varphi(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \varphi(t) \geq \varphi(t_0) > r$ , contradicción. Por tanto,  $\varphi(t) > r$  para todo  $t \geq t_0$ . Mediante el mismo argumento obtenemos que  $\varphi(t) \geq h(t)$  para todo  $t \geq t_0$ , lo que termina la demostración.  $\square$

**Comentario 4.14.** Si la cota del Lema 4.13 se cambia por  $f(t, x) \leq -m|x|^p$  para todo  $t \geq t_0, x < -r$  y  $x_0 < -r$ , entonces se cumple que  $\omega < +\infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \omega} \varphi(t) = -\infty$ .

## 4.2. Crecimiento a lo sumo lineal

En esta sección intentamos generalizar el Corolario 4.11.

**Definición 4.3.** Sea  $D = ]a, b[ \times \mathbb{R}^d$  y  $f: ]a, b[ \times \mathbb{R}^d$ . Diremos que  $f$  tiene a lo sumo crecimiento lineal en la variable  $x$  si existen dos funciones continuas  $m, n: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tales que para cada  $(t, x) \in D$  se tiene

$$\|f(t, x)\| \leq m(t)\|x\| + n(t).$$

En tal caso escribiremos que  $f$  es CSL.

**Comentario 4.15.** Todas las funciones definidas en  $D$  que sean globalmente lipschitzianas respecto de la variable  $x$  son CSL.

**Comentario 4.16.** Sea  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  continua tal que existen  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x$ . Entonces  $f$  tiene crecimiento a lo sumo lineal.

Necesitaremos el siguiente lema que tiene interés en sí mismo y será aplicado más veces a lo largo del curso.

**Lema 4.17** (Lema de Gronwall). *Sea  $y: [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que existe una función continua  $u: [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  con  $u \geq 0$  y una constante  $C \in \mathbb{R}$  tales que para cada  $t \in [t_0, \omega[$  se verifica*

$$y(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)y(s) \, ds.$$

*Entonces para todo  $t \in [t_0, \omega[$  se tiene*

$$y(t) \leq C \exp \left( \int_{t_0}^t u(s) \, ds \right).$$

*Demostración.* Definimos las funciones  $f, h: [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f(t) = C + \int_{t_0}^t u(s)y(s) \, ds, \quad h(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t u(s) \, ds \right).$$

Supongamos que  $C \neq 0$ . En tal caso  $h(t) \neq 0$  para todo  $t \in [t_0, \omega[$  y podemos definir la función  $\gamma: [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\gamma(t) = f(t)/h(t)$ . Nótese que la función  $\gamma$  es derivable y su derivada viene dada por

$$\gamma'(t) = \frac{u(t)(y(t) - f(t))}{h(t)} \leq 0.$$

Consecuentemente,  $\gamma$  es decreciente y  $\gamma(t_0) = C$ . Por tanto,  $\gamma(t) \leq C$  para todo  $t \in [t_0, \omega[$  como se quería.

Por último, si  $C = 0$ , podemos aplicar lo anterior para  $C' > 0$ , pues  $y(t) \leq C' + f(t)$  para todo  $t \in [t_0, \omega[$ . Fijado  $t \in [t_0, \omega[$ , obtenemos que  $y(t) \leq C'h(t)$  y tomando límite cuando  $C' \rightarrow 0$  deducimos que  $y(t) \leq 0$ , lo que finaliza la prueba.  $\square$

**Corolario 4.18** (Lema de Gronwall, versión básica). *Sea  $y: [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que existen dos constantes  $C, R \in \mathbb{R}$  con  $R \geq 0$  tales que para cada  $t \in [t_0, \omega[$  se verifica*

$$y(t) \leq C + R \int_{t_0}^t y(s) \, ds.$$

*Entonces  $y(t) \leq Ce^{R(t-t_0)}$  par todo  $t \in [t_0, \omega[$ .*

*Demostración.* Se obtiene al aplicar el Lema de Gronwall para la función  $u(t) = R(t - t_0)$ .  $\square$

**Teorema 4.19** (Teorema de crecimiento a lo sumo lineal). *Sea  $D = ]a, b[ \times \mathbb{R}^d$  con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Si  $f$  tiene crecimiento a lo sumo lineal, entonces todas las soluciones maximales de (P) verifican que  $] \alpha, \omega[ = ]a, b[$ .*

*Demostración.* Sean  $m, n: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  continuas de la definición de crecimiento a lo sumo lineal. Sea  $\varphi: ] \alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal de (P). Veamos que  $\omega = b$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $\omega < b$ . Tenemos que  $[t_0, \omega] \subset ]a, b[$ . Por el teorema de Weierstrass existe  $M = \max\{m(t) \mid t \in [t_0, \omega]\}$  y  $N = \max\{n(t) \mid t \in [t_0, \omega]\}$ . Por tanto, se cumple que

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s))\| \, ds \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t M\|\varphi(s)\| + N \, ds \leq \|x_0\| + N(\omega - t_0) + M \int_{t_0}^t \|\varphi(s)\| \, ds.$$

Podemos aplicar pues el Lema de Gronwall, obteniendo que

$$\|\varphi(t)\| \leq (\|x_0\| + N(\omega - t_0)) \exp(M(t - t_0)) \leq (\|x_0\| + N(\omega - t_0)) \exp(M(\omega - t_0)),$$

y, por tanto,  $\varphi$  está acotada, lo que contradice el Corolario 4.8. Para demostrar que  $\alpha = a$  basta aplicar el argumento anterior sobre el PVI dual, que también es CSL.  $\square$

EJEMPLO 4.20: Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = \frac{x^3}{x^2+1} & x \in \mathbb{R}; \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Es autónoma escalar y su diagrama de fases se corresponde con  $\leftarrow 0 \rightarrow$ . Consecuentemente,  $\alpha(0, x_0) = -\infty$ . Por el Teorema previo obtenemos que  $\omega(0, x_0) = +\infty$ .  $\triangle$

**Comentario 4.21.** Las EDOs lineales son CSL. En efecto, éstas son de la forma

$$x' = A(t)x + b(t),$$

con  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$  y  $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ . En efecto, tenemos que

$$\|A(t)x + b(t)\| \leq \|A(t)x\| + \|b(t)\| \leq \|A(t)\| \|x\| + \|b(t)\|.$$

Si  $d = 1$ , el Lemma 4.13 demuestra bajo ciertas hipótesis que algunas de las soluciones maximales de (P) explotan en tiempo finito cuando  $f(t, x)$  está acotada inferiormente por  $mx^p$  para  $x$  lo suficientemente grande. No obstante, existen PVIs que se escapan de ambos resultados. En efecto, hay funciones con crecimiento super lineal tales que las soluciones de las EDOs asociadas no explotan en tiempo finito. Esto queda reflejado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.22: Consideramos el PVI

$$\begin{cases} x' = x \log(x), & x > 0; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Nótese que  $\varphi(t) = X(t, 2) = \exp(\log(2)e^t)$  y  $\alpha = -\infty$  y  $\omega = +\infty$ .  $\triangle$

**Comentario 4.23.** La hipótesis del Teorema de CSL se pueden debilitar. En lugar de exigir que  $f$  sea CSL en todo su dominio podemos exigir las siguientes hipótesis:

- a) Existe  $A \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $\varphi(t) \in A$  para todo  $t \in ]\alpha, \omega[$ .
- b) Existen  $m, n : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  continuas tales que  $\|f(t, x)\| \leq m(t)\|x\| + n(t)$  para todo  $t \in ]a, b[$  y  $x \in A$ .

### 4.3. Acotación de soluciones. Funciones guía

**Definición 4.4.** Sea  $\varphi : ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución maximal de (P). Diremos que la solución  $\varphi$  está acotada en el futuro si  $\omega = +\infty$  y  $\sup\{\|\varphi(t)\| : t \in [t_0, +\infty[ \} < +\infty$ . Análogamente, diremos que la solución  $\varphi$  está acotada en el pasado si  $\alpha = -\infty$  y  $\sup\{\|\varphi(t)\| : t \in ]-\infty, t_0] \} < +\infty$ .

Sean  $D = ]a, +\infty[ \times \mathbb{R}^d$ , con  $-\infty \leq a$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua y  $(t_0, x_0) \in D$ . Buscamos condiciones suficientes que nos permitan asegurar que el PVI (P) está acotado.

**Proposición 4.24.** Sea  $D = ]a, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , con  $-\infty \leq a$ . Sea  $\varphi : ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  una solución maximal de (P). Si existen  $p_1 < p_2$  tales que  $x_0 \in ]p_1, p_2[$  y para todo  $t \in ]a, +\infty[$  se tiene  $f(t, p_1) > 0$  y  $f(t, p_2) < 0$ , entonces  $\varphi(t) \in ]p_1, p_2[$  para todo  $t \geq t_0$  y, por tanto, la solución está acotada en el futuro.

*Demostración.* Veamos que  $\varphi(t) > p_1$  para todo  $t \geq t_0$ . En efecto,  $\varphi(t_0) = x_0 > p_1$ . Supongamos que el resultado es falso. Existe  $\tau > t_0$  tal que  $\varphi(t) > p_1$  para todo  $t \in [t_0, \tau[$  y  $\varphi(\tau) = p_1$ . Por tanto,  $\varphi'(\tau) \leq 0$ . Sin embargo,  $\varphi'(\tau) = f(\tau, p_1) > 0$ , contradicción. Análogamente se prueba la segunda afirmación.  $\square$

Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución maximal de (P). Sea  $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ . Nótese que la función  $V(\varphi(t))$  es derivable y su derivada viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} V(\varphi(t)) = \langle \nabla V(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \dot{V}(t, \varphi(t)).$$

Queremos estudiar la acotación de  $\varphi$  mediante  $V \circ \varphi$ . Para ello interes que cuando  $\varphi$  diverja, entonces  $V$  diverja positivamente. Esta propiedad se formaliza en la siguiente definición.

**Definición 4.5.** Sea  $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $r \in \mathbb{R}$ , se definen el conjunto de nivel  $r$

$$C_r = V^{-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) = r\}$$

y el conjunto de subnivel  $r$

$$\Omega_r = \bigcup_{s \leq r} C_r(s) = V^{-1}(]-\infty, r]).$$

Diremos que  $V$  es una función coerciva si todos sus conjuntos de subnivel son compactos.

**Proposición 4.25.** Sea  $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Equivalen:

a) La función  $V$  es coerciva.

b) Para cualquier sucesión  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  con  $\{\|x_n\|\} \rightarrow +\infty$  se tiene  $\{V(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Supongamos que  $V$  es coerciva y consideremos  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  con  $\{\|x_n\|\} \rightarrow +\infty$ . Sea  $K > 0$ . Tenemos que  $V^{-1}(]-\infty, K])$  es compacto, luego está acotado y existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \notin V^{-1}(]-\infty, K])$  para todo  $n \geq m$ . Esto es,  $V(x_n) > K$  para todo  $n \geq m$  como se quería.

Supongamos ahora que se da b). Sea  $r \in \mathbb{R}$ . Veamos que  $V^{-1}(]-\infty, r])$  es compacto. Nótese que es cerrado por la continuidad de  $V$ . Por tanto, basta ver que es acotado. Esto equivale a que no existe una sucesión de elementos de  $V^{-1}(]-\infty, r])$  divergente. En efecto, si  $\{x_n\} \subset V^{-1}(]-\infty, r])$  con  $\{\|x_n\|\} \rightarrow +\infty$ , entonces  $\{V(x_n)\} \rightarrow +\infty$  por hipótesis. Pero  $\{V(x_n)\} \subset ]-\infty, r]$ , contradicción.  $\square$

La siguiente proposición permite comprobar si una función es coerciva. La demostración es sencilla (salvo el último apartado) y se deja como ejercicio.

**Proposición 4.26.** Sean  $V, W: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  y  $V_1, \dots, V_d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas. Se verifican las siguientes afirmaciones:

- Si  $d = 1$ , entonces  $V$  es coerciva si, y solo si,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$ .
- Si  $V(x_1, \dots, x_d) = V_1(x_1) + \dots + V_d(x_d)$ , entonces  $V$  es coerciva si, y solo si, las funciones  $V_1, \dots, V_d$  son coercivas.
- Si  $V(x) \geq W(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $W$  es coerciva, entonces  $V$  es coerciva.
- Si  $V$  es una función cuadrática (polinómica de grado 2), entonces es coerciva si, y solo si,  $\text{Hess}V$  es una matriz definida o semidefinida positiva.
- Si  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$  es una función convexa y tiene un único punto crítico, entonces  $V$  es coerciva.

Nótese que si  $V \circ \varphi$  es decreciente y  $V$  es coerciva, entonces  $\varphi$  estará acotada en el futuro. Este hecho da lugar al Teorema 4.27. Antes introducimos la siguiente definición.

**Definición 4.6.** Sea  $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  con  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ . Se define  $\dot{V}: D \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\dot{V}(t, x) = \langle \nabla V(x), f(t, x) \rangle$ . Decimos que  $V$  es una función guía de (E) si  $\dot{V}$  tiene signo constante (para valores  $x$  suficientemente grandes).

**Teorema 4.27.** *Si existe  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$  coerciva tal que  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  (resp.  $\dot{V}(t, x) \geq 0$ ) para todo  $(t, x) \in D$ , entonces las soluciones maximales de (P) están acotadas en el futuro (resp. pasado).*

*Demostración.* Demostramos el teorema para el caso  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  pues el otro es análogo. Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución maximal de (P). Definimos  $y = V \circ \varphi$ . Tenemos que  $y'(t) = \dot{V}(t, \varphi(t)) \leq 0$ , luego  $y$  es decreciente. Por tanto,  $V(\varphi(t)) \leq V(\varphi(t_0)) = r_0$  para todo  $t \geq t_0$ . Por tanto,  $\varphi([t_0, \omega[) \subset \Omega_{r_0}$ , que es compacto por ser  $V$  coerciva. Consecuentemente, la función  $\varphi$  está acotada en  $[t_0, \omega[$ .  $\square$

**Corolario 4.28.** *Si existe  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$  coerciva tal que  $\dot{V}(t, x) = 0$  para todo  $(t, x) \in D$ , entonces las soluciones maximales de (P) están acotadas. Además,  $\varphi(t) \in C_{V(x_0)}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Comentario 4.29.** *Las hipótesis del Teorema 4.27 se pueden debilitar. Concretamente, la afirmación  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  para todo  $(t, x) \in D$  puede substituirse por  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  para todo  $t \in ]t_0, +\infty[$ ,  $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(p, r)$  para ciertos  $p \in \mathbb{R}^d$  y  $r > 0$ . Además, en lugar de suponer que  $V$  es coerciva basta suponer que las componentes conexas de los conjuntos de subnivel son acotadas. El siguiente resultado generaliza al Teorema 4.27 de otra forma.*

**Teorema 4.30.** *Si existe  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$  continua y existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que el conjunto  $\Omega_r$  tiene componentes conexas acotadas y  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  para todo  $t \geq t_0$ ,  $x \in \Omega_r$ , entonces para cualquier  $(t_0, x_0) \in ]a, +\infty[ \times \Omega_r$  las soluciones maximales de (P) están acotadas en el futuro.*

EJEMPLO 4.31 (Relación de ejercicios 3, ejercicio 8): Busca funciones guía que nos permitan asegurar que las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales están acotadas en el futuro:

a)  $x' = \sin(t) - x^3$ . Es fácil ver que  $V(x) = x^2$  es una función guía.

b) Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2; \\ x'_2 = -\sin(x_1) - x_1. \end{cases}$$

Buscamos una función guía de la forma  $V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$ . En tal caso se tendría  $\dot{V}(x_1, x_2) = \langle (V'_1(x_1), V'_2(x_2)), (x_2, -\sin(x_1) - x_1) \rangle = V'_1(x_1)x_2 - V'_2(x_2)(\sin(x_1) + x_1)$ . Bastaría que  $V'_1(x_1) = \sin(x_1) + x_1$  y que  $V'_2(x_2) = x_2$ . Esto sucede para  $V_1(x_1) = -\cos(x_1) + x_1^2/2$  y  $V_2(x_2) = x_2^2/2$ . Nótese que estas funciones son coercivas. Por tanto,  $V$  es una función guía.

c) Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + x_2; \\ x'_2 = -x_2. \end{cases}$$

Vamos a comprobar que  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  es una función guía. Tenemos que  $\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(-x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)^2 \leq 0$ , que es una forma definida negativa.  $\triangle$

#### 4.3.1. Aplicación a EDOs de segundo orden

Cualquier ecuación diferencial explícita de orden superior se puede transformar en una ecuación diferencial de primer orden explícito. Existe un procedimiento estándar para hacerlo, aunque no es el único. Sea  $D \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n$  abierto y  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua. La ecuación

$$x^{(n+1)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n)}) \quad (7)$$



equivale al sistema

$$\begin{cases} x'_1 &= x_2; \\ x'_{n-1} &= x_n; \\ &\vdots \\ x'_n &= g(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (8)$$

**Lema 4.32.** Sea  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  tal que  $f$  y  $f''$  están acotadas. Entonces  $f'$  está acotada.

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f$  y  $f''$  están acotadas por 1. Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Por el Teorema del valor medio encontramos  $\xi \in ]x-1, x[$  tal que  $|f'(\xi)| = |f(x) - f(x-1)| \leq 2$ . Volvemos a aplicar el teorema del valor medio para obtener  $\zeta \in ]x-1, x[$  tal que  $f'(x) - f'(\xi) = f''(\zeta)(x - \xi)$ . Consecuentemente,  $|f'(x)| \leq |f'(\xi)| + 1 \leq 3$ .  $\square$

EJEMPLO 4.33: En la física Newtoniana es habitual encontrar ecuaciones del tipo

$$mx'' + g(x) = 0, \quad (9)$$

donde  $m$  es una constante positiva y  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$  es localmente lipschitziana. Supongamos que  $d = 1$ . Aplicando el procedimiento anterior obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 &= x_2; \\ x'_2 &= -g(x_1)/m. \end{cases} \quad (10)$$

Por el Teorema de Picard-Lindelöf, el sistema (10) tiene solución maximal única para cada condición inicial. Este hecho se denomina *determinismo físico*. Un caso particular es el oscilador armónico, en cuyo caso se deducen las condiciones  $g(-x) = -g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y  $xg(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^*$ . Por ejemplo, podemos considerar  $g(x) = ax$  (oscilador armónico) o  $g(x) = ax + bx^3$  (modelo de Duffing) para  $a, b > 0$ .

Interesa saber si las soluciones de (9) están acotadas. Por ejemplo, podemos estar modelando la oscilación de un puente. Si las soluciones no están acotadas en el futuro, entonces el puente se terminará rompiendo. Para ello buscamos una función guía apropiada. Tomamos  $V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$ . Podemos tomar  $V_2(x_2) = x_2^2/2$  y  $V_1(x_1) = G(x_1)/m$ , donde  $G$  es una primitiva de  $g(x_1)$ . Obtenemos por ejemplo la función guía

$$V(x_1, x_2) = G(x_1) + mx_2^2/2.$$

A la función  $V(x_1, x_2)$  se le denomina energía del sistema, correspondiéndose el segundo sumando  $mx_2^2/2$  con la energía cinética y  $G$  con la energía potencial. Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  una solución de (9). Tenemos que la función  $E(t) = V(\varphi(t), \varphi'(t)) = G(\varphi(t)) + m\varphi'(t)^2/2$  es constante. A este hecho se le llama *conservación de la energía*.

Si  $G$  es coerciva, entonces por el Teorema 4.27 las soluciones de (10) están acotadas. Nótese que si  $x$  es solución de (9), entonces  $x'' = -g(x)/m$  está acotada. Por el Lema 4.32,  $x'$  está acotada. Por tanto, estudiar la acotación de las soluciones de (10) equivale a estudiar la acotación de las soluciones de (9).

En el caso de las ecuaciones de tipo oscilador armónico o tipo Duffing, la función  $G$  es coerciva.  $\triangle$

EJEMPLO 4.34: Si introducimos una fuerza de rozamiento en los problemas que se reducen en ecuaciones de tipo (9), entonces obtenemos ecuaciones de la forma

$$mx'' + cx' + g(x) = 0, \quad (11)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $m$  y  $c$  son constantes positivas y  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$  es localmente lipschitziana. Aplicando el procedimiento anterior obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= -cx_2/m - g(x_1)/m. \end{cases} \quad (12)$$

Una función guía vuelve a ser  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $V(x_1, x_2) = G(x_1) + mx_2^2/2$ , donde  $G$  es una primitiva de  $g$ . Es fácil verificar que  $\dot{V}(x_1, x_2) = -cx_2^2$ . Sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  una solución de (11). Tenemos que la función energía  $E(t) = V(\varphi(t), \varphi'(t)) = G(\varphi(t)) + m\varphi'(t)^2/2$  es decreciente. A este hecho se le llama *disipación de la energía*; el rozamiento provoca que la energía se reduzca.  $\triangle$

EJEMPLO 4.35 (Ecuaciones forzadas): En la física Newtoniana también aparecen ecuaciones de la forma

$$mx'' + cx' + g(x) = p(t), \quad (13)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $m$  y  $c$  son constantes ( $m > 0$  y  $c \geq 0$ ),  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$  es localmente lipschitziana y  $p \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ . Estas ecuaciones surgen cuando se introduce en el modelo una fuerza externa que varía en el tiempo (función  $p$ ). Aplicando el procedimiento anterior obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= p(t)/m - cx_2/m - g(x_1)/m. \end{cases} \quad (14)$$

La energía ya no sirve como función guía. Vamos a suponer que  $m = c = 1$ ,  $g(x) = x^3$  y  $p(t) = \sin(t)$ . Buscamos una función guía de la forma  $V(x_1, x_2) = x_1^4/4 + x_2^2/2 + \gamma x_1 x_2$ . Nótese que

$$\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{\gamma}{2}x_1^2 + \frac{1-\gamma}{2}x_2^2 \leq V(x_1, x_2).$$

Por tanto, para  $\gamma \in ]0, 1[$  la función  $V$  es mayor o igual que una función coerciva, luego también es coerciva. Tenemos que

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\gamma x_1^4 - (1-\gamma)x_2^2 - \gamma x_1 x_2 + \sin(t)x_2 + \gamma \sin(t)x_1.$$

Vamos a ver que  $\dot{V}$  es anticoerciva, esto es,  $-\dot{V}$  es coerciva. Esto prueba que  $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$  para  $(x_1, x_2)$  lo suficientemente alejado del origen. En efecto,

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -\gamma x_1^4 - (1-\gamma)x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + |x_2| + \gamma|x_1|.$$

Nótese que para  $\gamma < 2/3$  la función de la derecha es anticoerciva. En tal caso  $\dot{V}$  es mejor o igual que una función anticoerciva, luego también es anticoerciva. Obtenemos pues que para  $\gamma \in ]0, 2/3[$  la función  $V$  es guía y coerciva. Por el Teorema 4.27 obtenemos que las soluciones de (14) para las constantes y funciones escogidas están acotadas en el futuro.  $\triangle$

EJEMPLO 4.36 (Ecuación de Liénard): Otra ecuación de segundo orden bien conocida es

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \quad (15)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}$  y  $g, f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  son localmente lipschitzianas. La ecuación es equivalente al sistema plano de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 - F(x_1); \\ x_2' &= -g(x_1); \end{cases} \quad (16)$$

donde  $F$  es una primitiva de  $f$  con  $F(0) = 0$ .  $\triangle$

## 5. Continuidad y diferenciabilidad de la solución respecto de condiciones iniciales y parámetros

En esta sección estudiamos la función solución general de (E) bajo hipótesis de unicidad global. Recordemos que el concepto de solución general se introdujo en la Sección 2.4. Concretamente, probaremos que la solución general  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  está definida sobre un abierto y es una función de clase 1. Estudiaremos además sus derivadas parciales de segundo orden. Por último, introduciremos parámetros en la EDO, obteniendo una solución general que depende de éstos y también resulta ser de clase 1.

### 5.1. Preliminares

Antes de demostrar los resultados que ya se han avanzado necesitaremos nuevas herramientas que se proporcionan en este apartado.

#### 5.1.1. Entornos tubulares

**Definición 5.1.** Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo,  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua y  $\rho > 0$ . El conjunto

$$T_\rho = T_\rho(J, \varphi) = \{(t, x) \in J \times \mathbb{R}^d : \|x - \varphi(t)\| \leq \rho\}$$

es un *entorno tubular* de  $\varphi$ .

Nótese que si  $\varphi: ]t_0 - a, t_0 + a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  es constantemente  $x_0$ , entonces  $T_\rho(J, \varphi) = R_{a, \rho}(t_0, x_0)$

**Lema 5.1.** Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo,  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua y  $\rho > 0$ . El conjunto  $T_\rho(J, \varphi)$  es homeomorfo a  $J \times \overline{B}(0, \rho)$ .

*Demostración.* La función  $H: T_\rho(J, \varphi) \rightarrow J \times \overline{B}(0, \rho)$  dada por  $H(t, x) = (t, x - \varphi(t))$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Lema 5.2.** Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua. Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto tal que  $(t, \varphi(t)) \in D$  para todo  $t \in J$ . Si  $J$  es compacto, entonces existe  $\rho > 0$  tal que  $T_\rho(J, \varphi) \subset D$ .

*Demostración.* Razonamos por reducción al absurdo. Para cada  $\rho > 0$  tenemos que  $T_\rho(J, \varphi) \not\subset D$ . En particular, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $(t_n, x_n) \in T_{1/n}(J, \varphi) \setminus D$ . Nótese que la sucesión  $\{(t_n, x_n)\}$  está en el compacto  $T_1(J, \varphi)$ , luego admite una parcial convergente a un elemento de  $T_1(J, \varphi)$ . Además, el límite de esta parcial debe ser de la forma  $(t_0, \varphi(t_0))$ . Pero esto implica que una cola de la sucesión está contenida en  $D$  puesto que es un conjunto abierto, contradicción.  $\square$

**Proposición 5.3.** Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua. Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto tal que  $(t, \varphi(t)) \in D$  para todo  $t \in J$  y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  localmente lipschitziana respecto de la variable  $x \in \mathbb{R}^d$ . Si  $J$  es compacto y  $T_\rho(J, \varphi) \subset D$ , entonces  $f$  es lipschitziana en  $T_\rho(J, \varphi)$ .

*Demostración.* El conjunto  $T_\rho(J, \varphi)$  es compacto. En efecto, es homeomorfo a  $J \times \overline{B}(0, \rho)$ , que es compacto por ser producto de compactos. La prueba finaliza al aplicar el Lema 2.8.  $\square$

### 5.1.2. Convergencia uniforme en compactos

**Definición 5.2.** Una sucesión de funciones  $f_n: I_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  converge uniformemente en compactos hacia una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  si para todo  $K \subset I$  compacto existe una cola de  $f_n$  definida en  $K$  que converge uniformemente en  $K$  a  $f$ .

Es claro que la convergencia uniforme implica la convergencia uniforme en compactos, que denotaremos c.u.c. El recíproco no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.4: Consideramos la sucesión  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(t) = t/n$ . Tenemos que  $f_n$  converge uniformemente a 0 en compactos pero no converge uniformemente.  $\triangle$

Recuérdese que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua. Utilizando este hecho probamos y el carácter local de la continuidad demostramos fácilmente el siguiente resultado más general.

**Proposición 5.5.** Sea  $f_n: I_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  una sucesión de funciones convergente uniformemente en compactos a una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Si las funciones  $f_n$  son continuas, entonces  $f$  es continua.

La convergencia en compactos implica la convergencia puntual. El recíproco tampoco es cierto.

EJEMPLO 5.6: Consideramos la sucesión  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(t) = t^n$ . Tenemos que  $f_n$  converge puntualmente a la función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(t) = 0$  para  $t \neq 1$  y  $f(1) = 1$ . Sin embargo, la convergencia no es uniforme en  $[0, 1]$  pues  $f$  no es continua. Por tanto, la convergencia no puede ser uniforme en compactos.  $\triangle$

**Lema 5.7.** Sea  $f_n: I_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua en  $t_0 \in I$ . Si la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en compactos a  $f$ , entonces para cada sucesión  $\{t_n\}$  convergente a  $t_0$  con  $t_n \in I_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que  $\{f_n(t_n)\}$  converge a  $f(t_0)$ .

*Demostración.* Nótese que  $\|f_n(t_n) - f(t_0)\| \leq \|f_n(t_n) - f(t_n)\| + \|f(t_n) - f(t_0)\|$ . La sucesión  $\{f(t_n) - f(t_0)\}$  converge a 0 por la continuidad de  $f$  en  $t_0$ . Por otro lado, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\{t_{n+m}\} \subset I$ . La sucesión  $\{f_{n+m}(t_{n+m}) - f(t_{n+m})\}$  converge a 0 que pues  $\{t_{n+m}\}$  es compacto.  $\square$

**Proposición 5.8.** Sea  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua. La sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en compactos a  $f$  si, y solo si, para cada sucesión  $\{t_n\}$  con  $t_n \in I$  convergente hacia  $t_0 \in I$  se verifica que  $\{f_n(t_n)\}$  converge a  $f(t_0)$ .

*Demostración.* La primera implicación es consecuencia del lema previo. Veamos que el recíproco es cierto. Consideramos la sucesión  $\{\|f_n - f\|\}$  definida en  $I$ . Para cada compacto  $K \subset I$ , existe  $t_n \in K$  con  $\|f_n(t_n) - f(t_n)\| = \max\{\|f_n(t) - f(t)\| : t \in K\}$ . Toda parcial de  $\{\|f_n(t_n) - f(t_n)\|\}$  admite una subparcial convergente a 0. En efecto, basta tomar una parcial de  $t_{\sigma(n)}$  convergente, que existe por el teorema de Bolzano-Weierstrass, y aplicar la hipótesis. Como consecuencia,  $\{\|f_n(t_n) - f(t_n)\|\}$  converge a 0, esto es,  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  en  $K$ .  $\square$

## 5.2. Continuidad de la solución general

En este apartado aplicamos los conceptos estudiados en la Sección 5.1 para probar que la solución general es continua. Para ello será esencial el siguiente resultado.

**Lema 5.9** (Desigualdad fundamental). Sean  $\varphi_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}^d$  para  $i \in \{1, 2\}$  dos soluciones de (E) tales que existe  $L > 0$  con

$$\|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq L\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$$

para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ . Entonces, fijado  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  se tiene

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| e^{L|t-t_0|}$$

para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ .

*Demostración.* Por la ecuación integral de Volterra deducimos que para cada  $t \in I_1 \cap I_2$  se tiene

$$\begin{aligned} \|\varphi'_1(t) - \varphi'_2(t)\| &\leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| ds \\ &\leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| + L \int_{t_0}^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds. \end{aligned}$$

Podemos aplicar pues el Lema de Gronwall, obteniendo el resultado.  $\square$

**Lema 5.10.** Consideremos la EDO (E) y  $(t_0, x_0) \in D$ . Sean  $a, b > 0$  tales que  $R_{a,b}(t_0, x_0) \subset D$  y sea  $M = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in R_{a,b}(t_0, x_0)\}$ . Existe  $\mu_0 > 0$  tal que para cualquier  $\mu \in ]0, \mu_0[$  se cumple que si  $(t_1, x_1) \in R_{\mu,\mu}(t_0, x_0)$  y  $\varphi$  solución maximal del PVI asociado a  $(t_1, x_1)$  se tiene que para cada  $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leq \|x_1 - x_0\| + M|t - t_1| \leq \mu(1 + 2M) < b$$

y  $(t, \varphi(t)) \in R_{a,b}(t_0, x_0)$ . En particular, se verifica  $\|\varphi(t_0) - x_0\| < \mu(1 + M)$ .

*Demostración.* Fijamos  $0 < \mu_0 < \min\{a, b\}$  con  $\mu_0(1 + 2M) < b$ . Sea  $\mu \in ]0, \mu_0[$ . Consideramos  $(t_1, x_1) \in R_{\mu,\mu}(t_0, x_0)$ . Sea  $\varphi$  la solución maximal del PVI asociado a  $(t_1, x_1)$ . Veamos que  $[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \subset ]\alpha(t_1, x_1), \omega(t_1, x_1)[ = I$  y que  $(t, \varphi(t)) \in R_{a,b}(t_0, x_0)$  para todo  $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ . En efecto, para cada  $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \cap I \neq \emptyset$  se tiene que

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leq \|\varphi(t_1) - x_0\| + \left| \int_{t_1}^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \right| \leq \|x_1 - x_0\| + M|t - t_1| \leq \mu(1 + 2M) < b.$$

Por tanto, si se tuviese  $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \cap I$  con  $\|\varphi(t) - x_0\| \geq b$  se obtendría una contradicción. Consecuentemente,  $\varphi$  no explota en  $R_{\mu,b}(t_0, x_0)$  y, por el Teorema de comportamiento en el extremo superior, se deduce que  $[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \subset I$  y que  $(t, \varphi(t)) \in R_{a,b}(t_0, x_0)$  para todo  $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ .  $\square$

**Proposición 5.11.** Consideremos la EDO (E) y supongamos que  $f$  es localmente lipschitziana respecto de la variable  $x \in \mathbb{R}^d$ . Sea  $(t_0, x_0) \in D$  y  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución de (P). Dado un intervalo  $[a, b] \subset I$  tal que  $a < t_0 < b$ , tomamos  $\rho > 0$  con  $T_\rho([a, b], \varphi) \subset D$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier  $(t_1, x_1) \in R_{\delta,\delta}(t_0, x_0)$  y  $\varphi_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal del PVI asociado a  $(t_1, x_1)$  se tiene  $[a, b] \subset I_1$  y  $(t, \varphi_1(t)) \in T_\rho([a, b], \varphi)$  para todo  $t \in [a, b]$ .

*Demostración.* En primer lugar, nótese que  $f$  es Lipschitziana en  $T_\rho = T_\rho([a, b], \varphi)$ , pues éste es un conjunto compacto. Sea  $L$  la constante de Lipschitz asociada. Obtenemos  $\mu_0$  del lema anterior para  $R_{r,s}(t_0, x_0) \subset T_\rho$ . Para todo  $0 < \mu < \mu_0$  se tiene que, para cualquier  $(t_1, x_1) \in R_{\delta,\delta}(t_0, x_0)$  y  $\varphi_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal del PVI asociado a  $(t_1, x_1)$ ,

$$\|\varphi_1(t) - \varphi(t)\| \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi(t_0)\| e^{L|t-t_0|} \leq \mu(1 + M)e^{L|b-a|} \quad \forall t \in [a, b] \cap I_1,$$

donde se ha aplicado la desigualdad fundamental. Tomamos  $0 < \delta < \mu_0$  tal que  $\mu(1 + M)e^{L|b-a|} < \rho$ . Veamos que se cumple el resultado para este  $\delta$ . Sea  $(t_1, x_1) \in R_{\delta,\delta}(t_0, x_0)$  y  $\varphi_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  solución maximal del PVI asociado a  $(t_1, x_1)$ . Tenemos que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi(t)\| \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi(t_0)\| e^{L|t-t_0|} < \rho \quad \forall t \in [a, b] \cap I_1,$$

Por el teorema de comportamiento en el extremo superior aplicado a el conjunto  $T_\rho$  deducimos que  $[a, b] \subset I_1$  pues  $\|\varphi_1(t) - \varphi(t)\|$  no alcanza a  $\rho$  en  $[a, b] \cap I_1$ .  $\square$

**Teorema 5.12.** Sea  $f \rightarrow \mathbb{R}^d$  localmente lipschitziana respecto de la variable  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dado  $(t_0, x_0) \in D$  y sea  $\varphi: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  la solución maximal de (P). Sea  $\{(t_n, x_n)\}$  una sucesión de condiciones iniciales tales que  $\{t_n\} \rightarrow t_0$  y  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ . Denotemos por  $\varphi_n: ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  la solución maximal del PVI asociado a la condición inicial  $(t_n, x_n)$ . Entonces para todo compacto  $[a, b] \subset ]\alpha, \omega[$  tal que  $a < t_0 < b$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq m$  se tiene  $[a, b] \subset ]\alpha_n, \omega_n[$  y además  $\{\varphi_{n+m}\}$  converge uniformemente a  $\varphi$  en  $[a, b]$ . Esto es,  $\{\varphi_n\}$  converge a  $\varphi$  en compactos.

*Demostración.* Sea  $\rho > 0$  tal que  $T_\rho = T_\rho([a, b], \varphi) \subset D$ . Sean  $r, s > 0$  tales que  $R_{r,s}(t_0, x_0) \subset T_\rho$ . Aplicamos la proposición y el lema previo encontrando  $\delta$  y  $\mu_0$  respectivamente. Sea  $0 < \mu < \min\{\delta, \mu_0\}$  con . Puesto que  $\{(t_n, x_n)\} \rightarrow (t_0, x_0)$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq m$  se tiene que  $(t_n, x_n) \in R_{\mu,\mu}(t_0, x_0)$ . Por tanto,  $[a, b] \subset ]\alpha_n, \omega_n[$  y  $\|\varphi_n(t_0) - \varphi(t_0)\| \leq (1 + M)\mu$ . Aplicamos la desigualdad fundamental, obteniendo que

$$\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \leq \|\varphi_n(t_0) - \varphi(t_0)\| e^{L|t-t_0|} \leq (1 + M)\mu e^{L(b-a)}$$

para todo  $n \geq m$  y  $t \in [a, b]$ .

Por último, aplicando lo anterior deducimos que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N \geq m$  tal que para cada  $n \geq N$  se tiene  $\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \leq (1 + M)\mu e^{L(b-a)} < \varepsilon$  en  $[a, b]$ , donde se ha tomado  $0 < \mu < \min\{\delta, \mu_0\}$  lo suficientemente pequeño.  $\square$

**EJEMPLO 5.13:** Consideramos la EDO  $x' = e^{x^2} - 1$ . Tiene una solución constante  $x(t) = 0$ . El diagrama de fases es de la forma  $\rightarrow 0 \rightarrow$ . Por tanto, para  $x_n > 0$  se tiene que  $\alpha(x_n) = -\infty$  y  $\omega(x_n) < +\infty$ . No obstante, si la sucesión  $\{x_n\}$  converge a  $x_0$ , entonces por el teorema anterior la sucesión  $\{X(t; x_n)\}$  converge uniformemente a 0 en cualquier entorno compacto de 0. Como consecuencia  $\{\omega(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .  $\triangle$

**EJEMPLO 5.14:** Sea  $\varphi_n: ]\alpha_n, \omega_n[ \rightarrow \mathbb{R}$  la solución maximal del PVI

$$\begin{cases} x' = (x - t^2)^2 + 2t; \\ x(1/n) = \sin(1/n^2). \end{cases}$$

Justifica que para  $n$  suficientemente grande  $1/n + 4 \in ]\alpha_n, \omega_n[$  y calcula  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(4 + 1/n)$ .

Nótese que  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = t^2$  es solución de  $x' = (x - t^2)^2 + 2t$ , que verifica la propiedad de unicidad global en cualquier par  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ . Además,  $\varphi(0) = 0$ . Tenemos que  $\{(1/n, \sin(1/n^2))\}$  converge a  $(0, 0)$ . Por tanto, por el teorema anterior existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $[-10, 10] \subset ]\alpha_n, \omega_n[$  para todo  $n \geq m$ . Además,  $\{\varphi_{n+m}\}$  converge uniformemente a  $\varphi$  en  $[-10, 10]$ . Deducimos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(4 + 1/n) = \varphi(4) = 16$ .  $\triangle$

**Teorema 5.15** (Continuidad de la solución general). *El conjunto  $\Omega$  es abierto y la función  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  es continua.*

*Demostración.* Es una consecuencia directa del Teorema 5.12 y los resultados previos. En primer lugar, sea  $(t, t_0, x_0) \in \Omega$ , tomamos  $a < b$  con  $[a, b] \subset ]\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)[$ . Encontramos  $0 < \mu < \min\{a, b\}$  tal que  $[a, b] \subset ]\alpha(t_1, x_1), \omega(t_1, x_1)[$  para todo  $(t_1, x_1) \in R_{\mu,\mu}(t_0, x_0)$ . Esto es,  $[a, b] \times R_{\mu,\mu}(t_0, x_0) \subset \Omega$ . Ahora, tenemos que  $\lim_{(s, s_0, x) \rightarrow (t, t_0, x_0)} X(s, s_0, x) = X(t, t_0, x_0)$  por el Teorema 5.12.5.12  $\square$

### 5.3. Dependencia continua respecto de parámetros

Sean  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  y  $P \subset \mathbb{R}^k$  dos abiertos y sea  $f: D \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua y localmente lipschitziana respecto de la variable  $x$  y  $\lambda$ . Para cada  $\lambda$  podemos considerar el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda); \\ x(t_0) = x_0; \end{cases} \quad (\text{PP})$$

que tiene una única solución a la que denotamos  $X(t; t_0, x_0, \lambda)$ . Podemos ver  $X$  como una función de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$ , donde  $\Omega = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : \alpha(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega(t_0, x_0, \lambda)\}$ .

**Teorema 5.16** (Continuidad de la solución general con parámetros). *En el contexto actual, el conjunto  $\Omega$  es abierto y  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  es continua.*

Además, si  $\{(t_n, x_n, \lambda_n)\} \subset D \times P$  una sucesión convergente a  $(t_0, x_0, \lambda)$  y  $K \subset ]\alpha(t_0, x_0, \lambda), \omega(t_0, x_0, \lambda)[$  es un conjunto compacto, entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq m$  se tiene que  $K \subset ]\alpha(t_n, x_n, \lambda_n), \omega(t_n, x_n, \lambda_n)[$  y  $\{X(t; t_{n+m}, x_{n+m}, \lambda_{n+m})\}$  converge uniformemente a  $X(t; t_0, x_0, \lambda)$  en  $K$ .

EJEMPLO 5.17: Consideramos el PVI

$$\begin{cases} x'' + \lambda \sin(x) = 0; \\ x(0) = \pi/4; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Este PVI está asociado al movimiento de un péndulo cuando se suelta con ángulo  $s_0$  y longitud  $\lambda$ . Estudiamos el caso  $\lambda = 0$ , que se corresponde con un péndulo de longitud infinita. La única solución de la ecuación es  $\varphi(t) = t^2 + \pi/4$ . Dado  $\varepsilon = 1$  y  $R = 100$ , existe  $\lambda_0 > 0$  tal que para  $|\lambda| < \lambda_0$  se tiene  $[-R, R] \subset ]\alpha(t_0, x_0, \lambda), \omega(t_0, x_0, \lambda)[$ .  $\triangle$

### 5.4. Dependencia diferenciable respecto de condiciones iniciales y parámetros

**Teorema 5.18.** *Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  de clase 1. Consideramos la EDO asociada, que denotamos (E). Entonces la solución general  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  es de clase 1. Además, existen las derivadas de segundo orden*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_0} X, \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_0} X$$

y son continuas.

Si conocemos la solución  $X(t, t_0, x_0)$  entonces podemos calcular las parciales de  $X$  respecto de  $t_0$  y  $x_0$  en  $(t, t_0, x_0)$  como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.19: Consideramos la EDO  $x' = (x - \sin(t))^2 + \cos(t)$ . Nótese que  $X(t, 0, 0) = \sin(t)$ . Queremos calcular  $\frac{\partial}{\partial x_0} X$ . Sabemos que  $X(t_0, t_0, x_0) = x_0$  y que para cada  $(t, t_0, x_0) \in \Omega$  se cumple

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t, t_0, x_0) = (X(t, t_0, x_0) - \sin(t))^2 + \cos(t) \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \Omega.$$

Por tanto, tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial t} X(t, t_0, x_0) = 2(X(t, t_0, x_0) - \sin(t)) \frac{\partial}{\partial x_0} X(t, t_0, x_0) \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \Omega.$$



Aplicando el Lema de Schwartz y evaluando en  $t_0 = 0$  y  $x_0 = 0$  obtenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x_0} X(t, 0, 0) = 2(X(t, 0, 0) - \sin(t)) \frac{\partial}{\partial x_0} X(t, t_0, x_0) = 0.$$

Además, como  $X(t_0, t_0, x_0) = x_0$ , derivando respecto de  $x_0$  obtenmos que  $\frac{\partial}{\partial x_0} X(t_0, t_0, x_0) = 1$ . Por tanto,  $\frac{\partial}{\partial x_0} X(t, 0, 0)$  es solución de la ecuación diferencial  $y' = 0$  con condición inicial que  $y(0) = 1$ . Esto es,  $\frac{\partial}{\partial x_0} X(t, 0, 0) = 1$  par todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para calcular la parcial de  $X$  respecto de  $t_0$  se procede de forma análoga, obteniendo que  $\frac{\partial}{\partial t_0} X(t, 0, 0) = -1$ .  $\triangle$

**Definición 5.3.** Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  de clase 1. Consideramos la EDO asociada, que denotamos (E). Definimos la función matricial  $A(t; t_0, x_0) = \frac{\partial}{\partial x}(t, X(t; t_0, x_0))$ . La ecuación

$$y' = A(t; t_0, x_0)y \quad (17)$$

recibe el nombre de *ecuación variacional*.

**Teorema 5.20** (Derivada respecto de condiciones inicales y parámetros). *Supongamos que las funciones matriciales  $\frac{\partial}{\partial x} f: D \times P \rightarrow \mathcal{M}_d$  y  $\frac{\partial}{\partial \lambda} f: D \times P \rightarrow \mathcal{M}_{d \times k}$  están bien definidas y son continuas. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

- a) *La función  $X: \rightarrow \mathbb{R}^d$  es  $C^1(\Omega)$ .*
- b) *Existen las derivadas de segundo orden*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_0} X, \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_0} X, \frac{\partial^2}{\partial t \partial \lambda} X$$

*y son continuas.*

- c) *Existen las derivadas de segundo orden*

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t} X, \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial t} X, \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} X$$

*y son continuas.*

EJEMPLO 5.21: Consideremos el PVI con parámetros

$$\begin{cases} x' = x^2 - e^{\lambda x}; \\ x(2) = 1. \end{cases}$$

Calcula  $\frac{\partial}{\partial x_0}(t, 2, 1, 0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t_0}(t, 2, 1, 0)$  y  $\frac{\partial}{\partial \lambda}(t, 2, 1, 0)$ .

En primer lugar calculamos  $X(t; 2, 1, 0)$ . Esta solución es la constantemente 1. Posteriormente, calculamos las parciales de  $f$  que vienen dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x} f = 2x - \lambda e^{\lambda x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f = -x e^{\lambda x}.$$

Por consiguiente, tenemos que  $A(t) = A(t; 2, 1, 0) = 2$  y  $b(t) = b(t; 2, 1, 0) = -1$ . Tenemos que  $\frac{\partial}{\partial x_0}(t; 2, 1, 0)$  es solución de

$$\begin{cases} y' = 2y; \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Obtenemos que  $\frac{\partial}{\partial x_0}(t; 2, 1, 0) = \exp(2(t - 2))$ . Por otro lado,  $\frac{\partial}{\partial t_0}X(t; 2, 1, 0)$  es solución de

$$\begin{cases} y' = -2y; \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Deducimos que  $\frac{\partial}{\partial t_0}X(t; 2, 1, 0) = 0$ . Por último, sabemos que  $\frac{\partial}{\partial \lambda}X(t; 2, 1, 0)$  es solución de

$$\begin{cases} y' = 2y - 1; \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Por el método de los coeficientes indeterminados sabemos que  $\frac{\partial}{\partial \lambda}X(t; 2, 1, 0)$  es de la forma  $K \exp(2(t - 2)) + 1/2$ . La condición inicial implica que  $K = -1/2$ .  $\triangle$

## 5.5. Linealización de ecuaciones y aproximación de soluciones en entornos de puntos de equilibrio

En una ecuación escalar autónoma podemos aproximar  $f$  mediante sus polinomios de Taylor con la esperanza de que las soluciones de la nueva EDO se parezcan a las soluciones de la anterior. En particular, podemos utilizar el polinomio de Taylor de grado uno con centro  $p \in D$ , obteniendo una ecuación lineal. Si  $p$  es un punto de equilibrio de la ecuación original, entonces la nueva ecuación es homogénea y, por tanto, sabemos calcular fácilmente sus soluciones.

**Definición 5.4.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  abierto,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua y  $p \in A$  con  $f(p) = 0$ . La *ecuación linealizada* de (AE) en  $p$  es la EDO

$$y' = J_f(p)(y - p). \quad (\text{L})$$

En esta sección estudiamos las propiedades de (AE) a partir de su ecuación linealizada. A veces por conveniencia usaremos la notación  $J_f(p) = f'(p)$ .

EJEMPLO 5.22: Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2; \\ x'_2 = -cx_2 - \sin(x_1). \end{cases} \quad (18)$$

Nótese que  $p = (\pi, 0)$  es un punto de equilibrio. La ecuación linealizada de (18) es

$$\begin{cases} y'_1 = y_2; \\ y'_2 = y_1 - cy_2 - \pi. \end{cases} \quad \triangle$$

Sabemos resolver las ecuaciones linealizadas mediante la exponencial de la matriz  $J_f$ . En efecto, la solución de (L) que verifica  $y(t_0) = x_0$  es  $\exp(J_f(p)(t - t_0))(x_0 - p) + p$ . Podemos escribir  $f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + R(x)$ . Usando el teorema de Taylor de orden 1 en la variable  $x_0$  de la solución general deducimos que

$$X(t; t_0, x_0) = X(t; t_0, x_0) + \frac{\partial}{\partial x_0}X(t; t_0, x_0)(x_0 - p) + R(t; t_0, x_0) = p + \exp(f'(p)(t - t_0))(x_0 - p) + R(t; t_0, x_0).$$

Sabemos que  $R(t; t_0, x_0)$  converge uniformemente a 0 en compactos cuanto  $x_0$  tiende a  $p$ . De ello deducimos que  $X(\cdot; t_0, x_0) - Y(\cdot; t_0, x_0)$  converge uniformemente a 0 cuando  $x_0$  converge a  $p$ .

## 6. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Estudiamos el principal concepto de estabilidad en teoría de ecuaciones diferenciales, aunque existen otros conceptos.

**Definición 6.1.** Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  localmente lipschitziana respecto de la segunda variable. Sea  $\varphi: ]\alpha, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución maximal de  $x' = f(t, x)$ . Diremos que  $\varphi$  es una solución estable de (E) en el sentido de Liapunov si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $(t_0, x_0) \in D$  y  $\|x_0 - \varphi(t_0)\| \leq \delta$ , entonces  $\omega(t_0, x_0) = +\infty$  y  $\|X(t, t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Comentario 6.1.** Aunque parece que  $t_0$  juega un papel esencial en la definición en la realidad no lo hace por el Teorema de dependencia continua respecto de condiciones iniciales.

EJEMPLO 6.2: Veamos ejemplos de soluciones estables y no estables.

- a)  $x' = 0$ .
- b) Consideramos la EDO  $x' = -x$ . Es estable...
- c) Consideramos la EDO  $x' = -x^2$ . Es estable...
- d) Consideramos la EDO  $x' = x$ . Su solución general es  $X(t, 0, x_0) = e^t x_0$ . Tenemos que  $\omega(t_0, x_0) = +\infty$  pero no es estable.

△

**Definición 6.2.** Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  localmente lipschitziana respecto de la segunda variable. Sea  $\varphi: ]\alpha, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  una solución maximal de  $x' = f(t, x)$ . Diremos que  $\varphi$  es una solución asintóticamente estable (AE) de (E) si existe  $\mu > 0$  tal que si  $(t_0, x_0) \in D$  verifica  $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \mu$ , entonces  $\omega(t_0, x_0) = +\infty$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t, t_0, x_0) - \varphi(t)\| = 0$ .

### 6.1. Estabilidad de EDOs lineales

En esta sección estudiamos la estabilidad de EDOs lineales, en las que estas propiedades tendrán su contraparte en términos de matrices fundamentales. Recordemos en este punto el concepto de EDO lineal. Sean  $I \subset \mathbb{R}$  abierto,  $A: I \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  y  $b: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuas. Una *EDO lineal* es una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$x' = A(t)x + b(t). \quad (\text{EL})$$

Toda EDO lineal tiene asociada su *ecuación homogénea*

$$x' = A(t)x. \quad (\text{ELH})$$

**Proposición 6.3.** Sean  $I = ]\alpha, +\infty[ \subset \mathbb{R}$ ,  $A: I \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  y  $b: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- a) Todas las soluciones de (EL) son estables.
- b) Existe una solución estable de (EL).
- c) Todas las soluciones de (ELH) son acotadas en el futuro.
- d) Existe una matriz fundamental de (ELH) acotada en el futuro.

*Demostración.* Veamos que b) implica c). Supongamos que  $\varphi: ]\alpha, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución estable de (EL). Sea  $\Psi: ]\alpha, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  solución de (ELH). Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $(t_0, x_0) \in D$  con  $\alpha < t_0$  y  $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$  se tiene  $\omega(t_0, x_0) = +\infty$  y  $\|X(t, t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ . Sea  $t_0 > \alpha$ . Existe  $\lambda > 0$  tal que  $\|\lambda\Psi(t_0)\| < \delta$ . Por tanto, la solución  $\varphi_1 = \varphi + \lambda\Psi$  está definida en  $]t_0, +\infty[$  y verifica  $\|\Psi(t)\| \leq \|\varphi_1(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t > t_0$ .

Veamos que d) implica a). Sea  $\Psi: ]\alpha, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una matriz fundamental de (ELH) acotada en el futuro. Sea  $\varphi: ]\alpha, +\infty[$  una solución de (EL). Tenemos que

$$X(t, x_0) = \varphi(t) + \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}(x_0 - \varphi(t_0)).$$

Sea  $M > 0$  cota de  $\Psi$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  tomamos  $0 < \delta < \varepsilon/(M\|\Psi(t_0)^{-1}\|)$ . Nótese que  $\omega(t_0, x_0) = +\infty$  por el teorema de crecimiento a lo sumo lineal. Además, tenemos que  $\|X(t, x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .  $\square$

Análogamente podemos demostrar el siguiente resultado referente a la estabilidad asintótica.

**Proposición 6.4.** Sean  $I = ]\alpha, +\infty[ \subset \mathbb{R}$ ,  $A: I \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  y  $b: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- a) Todas las soluciones de (EL) son asintóticamente estables.
- b) Existe una solución asintóticamente estable de (EL).
- c) Todas las soluciones de (ELH) tienden a 0 cuando  $t \rightarrow +\infty$ .
- d) Existe una matriz fundamental de (ELH) que tiende a 0 cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Como consecuencia de estos resultados, el estudio de la estabilidad en ecuaciones lineales se reduce en estudiar una matriz fundamental en  $[t_0, +\infty[$ .

EJEMPLO 6.5: Sean  $a, b \in \mathcal{C}(] \alpha, +\infty[, \mathbb{R})$ . Consideramos una EDO lineal de una variable

$$x' = a(t)x + b(t). \quad (19)$$

Sea  $A$  una primitiva de  $a$ . Una matriz fundamental de la ecuación homogénea es  $\Psi(t) = \exp(A(t))$ . Nótese que la matriz fundamental está acotada si, y solo si,  $A$  está acotada superiormente, en cuyo caso existe  $\{t_n\}$  tal que  $\{a(t_n)\} \rightarrow 0$ . Es más,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi(t) = 0$  si, y solo si,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = -\infty$ .  $\triangle$

Nos ocupamos a continuación del caso más simple, las ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Sea  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ . Consideramos la ecuación

$$x' = Ax, \quad t_0 = 0. \quad (\text{LHC})$$

La matriz fundamental principal en  $t = 0$  es  $\Phi(t) = \exp(At)$ . Para su cálculo tenemos que recurrir a la forma canónica de Jordan. Sea  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  el conjunto de los valores propios de  $A$ . Denotamos por  $m(\lambda_j)$  a la multiplicidad geométrica del valor propio  $\lambda_j \in \sigma(A)$  y denotamos por  $\nu(\lambda_j)$  al número número de 1 de la caja de Jordan asociada a  $\lambda_j$ . El teorema de Jordan dice que existen  $P, J \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  con  $P$  invertible y  $J$  diagonal por bloques, esto es,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix}, \quad (20)$$

donde  $J_i \in \mathcal{M}_{\nu(\lambda_i)+1}(\mathbb{C})$  es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad (21)$$

tales que  $A = PJP^{-1}$ . Este resultado nos permite calcular la exponencial de  $A$  con facilidad pues  $\exp(At) = P \exp(Jt) P^{-1}$  y sabemos calcular la exponencial de  $J$ . En efecto,  $J_i = \lambda_i I + N$ , donde  $N$  tiene unos en la primera diagonal a la derecha de la diagonal principal. Tenemos que  $I \cdot N = N \cdot I$ , luego  $\exp(J_i t) = \exp(t\lambda_i I) \exp(tN)$  y, fijado  $k = \nu(\lambda_i)$ , se cumple

$$\exp(J_i t) = e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & \frac{t^k}{k!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

En lo que sigue usaremos la notación  $\sigma_0(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re}(\lambda) = 0\}$ .

**Teorema 6.6.** Sean  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  y  $\mu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ .

- a) Si  $\mu < 0$ , entonces las soluciones de (LHC) son asintóticamente estables.
- b) Si  $\mu = 0$  y  $\nu(\lambda) = 0$  para todo  $\lambda \in \sigma_0(A)$ , entonces las soluciones de (LHC) son estables pero no asintóticamente estables.
- c) Si  $\mu = 0$  y existe  $\lambda \in \sigma_0(A)$  tal que  $\nu(\lambda) \geq 1$ , entonces (LHC) es inestable.
- d) Si  $\mu > 0$ , entonces (LHC) es inestable.

*Demostración.* Sean  $J, P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  con  $P$  invertible y  $J$  matriz de Jordan tales que  $A = PJP^{-1}$ . Nótese que la acotación en el futuro y la existencia de límite en  $+\infty$  de  $\exp(At)$  equivalen a la acotación en el futuro y la existencia de límite en  $+\infty$  de  $\exp(Jt)$ . La disyuntiva expuesta en el teorema es una consecuencia directa de (22).  $\square$

El Teorema 6.6 es particularmente fácil de aplicar en el caso  $d = 2$ . En tal caso, la discusión se simplifica enormemente como muestra la Tabla 1. Como consecuencia obtenemos el siguiente corolario.

Valores propios reales				
$\lambda_1$	$\lambda_2$	Traza	Determinante	Clasificación
-	-	-	+	A.E.
+	+	+	+	Inestable
-	+	?	-	Inestable
-	0	-	0	Estable, no A.E.
0	+	+	0	Inestable
0	0	0	0	Inestable
Valores propios complejos				
$\text{Re}(\lambda_1)$	Traza		Determinante	Clasificación
-	-		+	A.E.
+	+		+	Inestable
0	0		+	Estable, no A.E.

Tabla 1: Estudio de la estabilidad el sistema (LHC) en términos de los valores propios de  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ .

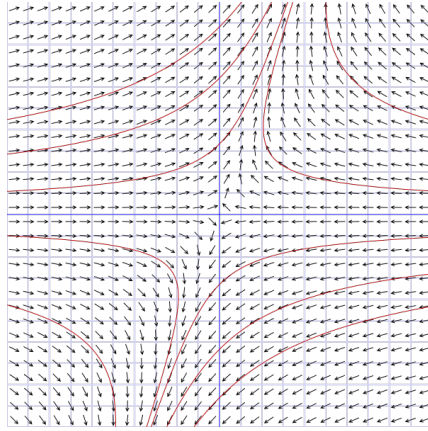
**Corolario 6.7.** Sea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  con  $A \neq 0$ . Consideramos el sistema (LHC).

- Si  $\det(A) < 0$ , entonces las soluciones son inestables.
- Si  $\det(A) = 0$  y
  - $\text{traza}(A) < 0$ , entonces las soluciones son estables pero no asintóticamente estables.
  - $\text{traza}(A) \geq 0$ , entonces las soluciones son inestables.
- Si  $\det(A) > 0$  y
  - $\text{traza}(A) < 0$ , entonces las soluciones son asintóticamente estables.
  - $\text{traza}(A) = 0$ , entonces las soluciones son estables pero no asintóticamente estables.
  - $\text{traza}(A) > 0$ , entonces las soluciones son inestables.

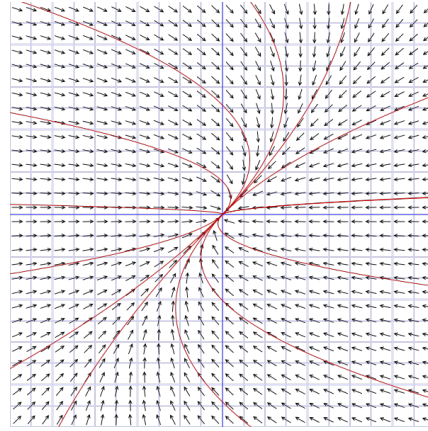
Para terminar la sección estudiamos los diagramas de fases de estos sistemas en algunos casos. Sea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sus valores propios. Vamos a visualizar el diagrama de fases del sistema (LHC) en los diferentes casos que han aparecido en el resultado previo. Las imágenes se han obtenido de <http://comp.uark.edu/~aeb019/ppplane.html>. Distinguimos los siguientes casos.

- Los valores propios son reales. Si éstos son distintos, entonces la solución general es de la forma  $\exp(\lambda_1 t)v_1 + \exp(\lambda_2 t)v_2$ . Vamos a estudiar 4 subcasos:
  - Si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , entonces 0 es un punto de equilibrio hiperbólico, nombre que viene dado por el diagrama de fases correspondiente (Figura 1a). Las soluciones divergen tanto en  $-\infty$  como en  $+\infty$ .
  - Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , entonces el punto de equilibrio 0 se denomina sumidero. En efecto, todas las soluciones divergen en  $t = -\infty$  y tienden a 0 en  $t = +\infty$  (Figura 1b). Por tanto, se puede decir que 0 atrae a las soluciones.
  - Si  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , entonces las soluciones tienen límite 0 en  $t = -\infty$  y divergen en  $t = +\infty$ . El punto de equilibrio 0 se denomina foco debido a que las soluciones se alejan de éste.

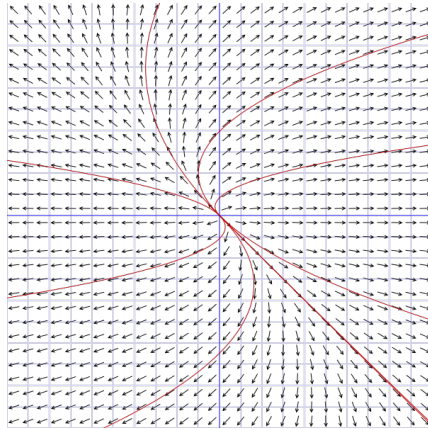
4. Si  $\lambda_1 = \lambda_2$  y  $\nu(\lambda_1) = 1$ , entonces la solución general es de la forma  $\exp(\lambda_1 t)v_1 + t \exp(\lambda_1 t)v_2$ . Obtenemos que las soluciones divergen en  $t = -\infty$  y tienden a 0 en  $t = +\infty$  con un comportamiento ligeramente distinto al segundo caso.



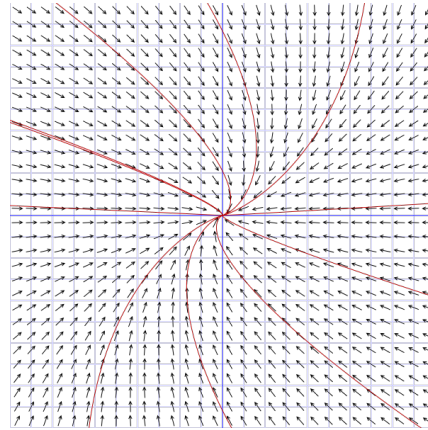
(a)  $(x', y') = (-2x + y, y)$ .



(b)  $(x', y') = (-2x + y, y)$ .



(c)  $(x', y') = (2x + y, y)$ .



(d)  $(x', y') = (-2x + y, -2y)$ .

Figura 1: Diagramas de fases del sistema (LHC) cuando los valores propios son reales.

- b) Los valores propios son complejos. En tal caso, estos son de la forma  $\lambda_1 = a + ib$  y  $\lambda_2 = a - ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Obtenemos que las soluciones se escriben como  $\exp(at)(\cos(bt)v_1 + \sin(bt)v_2)$ . En vista de este hecho, obtenemos los siguientes comportamientos.
1. Si  $a = 0$ , entonces las componentes de las soluciones son combinaciones lineales de senos y cosenos y, por tanto, las soluciones son periódicas y su imagen es una elipse (Figura 2a).
  2. Si  $a > 0$ , entonces las soluciones tienen a 0 cuando  $t = -\infty$  y divergen cuando  $t = +\infty$ . La imagen de las soluciones forma una espiral en el plano (Figura 2b).
  3. Si  $a < 0$ , entonces las soluciones tienen a 0 cuando  $t = +\infty$  y divergen cuando  $t = -\infty$ . La imagen de las soluciones forma una espiral en el plano (Figura 2c).

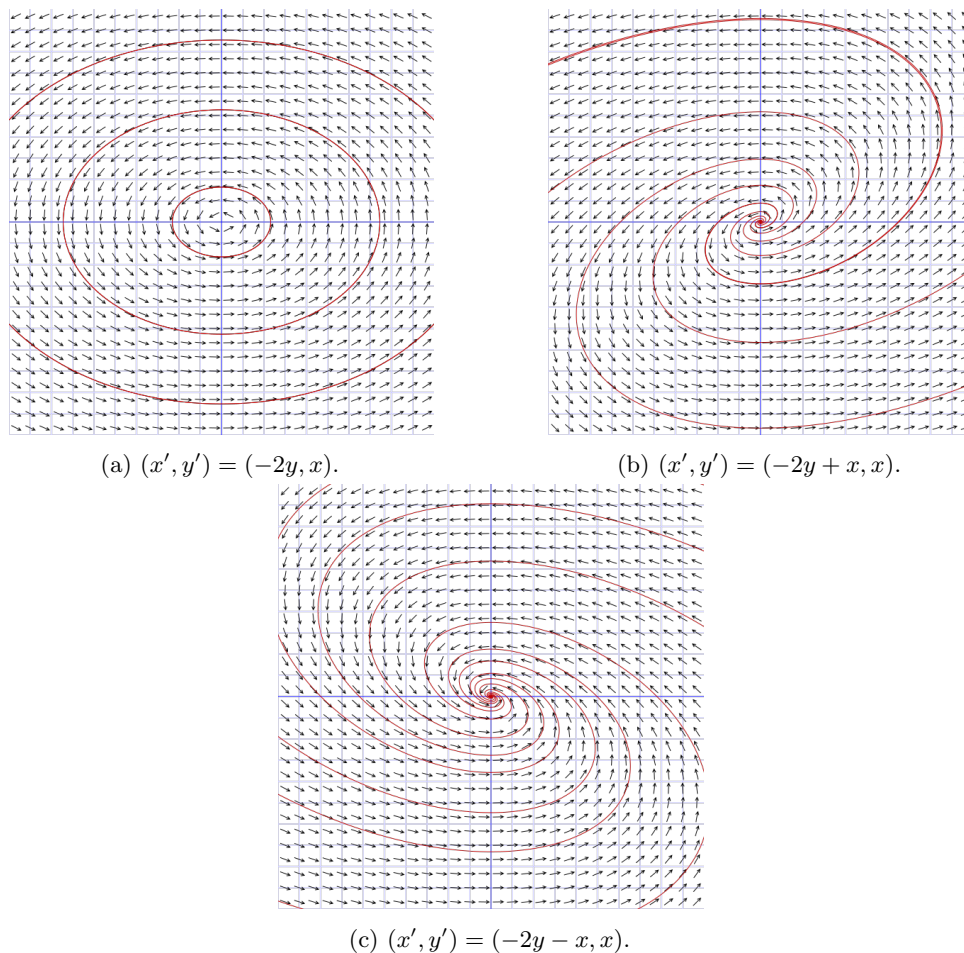


Figura 2: Diagramas de fases del sistema (LHC) cuando los valores propios son complejos.

## 6.2. El primer método de Lyapunov

Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  abierto y  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ . Sea  $p \in D$  tal que  $f(p) = 0$ . La ecuación (AE) puede escribirse de la forma

$$x' = f'(p)x - f'(p)p + R(x), \quad (23)$$

con  $\|R(x)\|/\|x - p\| \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ .

**Teorema 6.8** (Primer método de Liapunov). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  abierto y  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ . Consideramos la ecuación (AE). Sea  $p \in D$  con  $f(p) = 0$ . Sea  $\mu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(f'(p))\}$ .*

a) *Si  $\mu < 0$ , entonces  $p$  es asintóticamente estable.*

b) *Si  $\mu > 0$ , entonces  $p$  es inestable.*

*Demostración.* Este resultado se puede demostrar a partir del segundo método de Lyapunov, que se estudiará más adelante. No se incluye la demostración por falta de tiempo en el curso.  $\square$

**EJEMPLO 6.9:** Veamos que, en el contexto del teorema anterior, si  $\mu = 0$ , entonces no tenemos ninguna información acerca de la estabilidad del punto  $p$ .



- a) Consideramos la EDO  $x' = -x^3$ . El único punto de equilibrio es  $p = 0$ , que es un atractor global. Nótese que  $\mu = 0$  pero 0 es asintóticamente estable.
- b) Consideramos la EDO  $x' = x^3$ . El único punto de equilibrio es  $p = 0$ , que es un repulsor global. Nótese que  $\mu = 0$  pero 0 es inestable.
- c) Consideramos la EDO (AE) asociada a  $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ . Nótese que  $\mu = 0$ . Existe una sucesión  $\{p_n\}$  de puntos de equilibrios convergentes a 0. Por tanto, 0 es estable pero no asintóticamente estable.  $\triangle$

**Corolario 6.10.** *Supongamos que  $d = 2$ . En el contexto del Teorema 6.8 se verifican las siguientes afirmaciones.*

- a) *Si  $\det(f'(p)) > 0$  y  $\text{traza}(f'(p)) < 0$ , entonces  $p$  es asintóticamente estable para  $x' = f(x)$ .*
- b) *Si  $\det(f'(p)) < 0$  o  $\text{traza}(f'(p)) > 0$ , entonces  $p$  es inestable.*

EJEMPLO 6.11 (Examen final, 2017): Dado el sistema cooperativo

$$\begin{cases} x' = (100 - 20x + 10y)x; \\ y' = (300 + 10x - 30y)y. \end{cases} \quad (24)$$

- a) **Calcula los puntos de equilibrio.** Tenemos que  $f(x, y) = ((100 - 20x + 10y)x, (300 + 10x - 30y)y)$ . Es fácil ver que los únicos ceros de  $f$  son  $\{(0, 0), (0, 10), (5, 0), (12, 14)\}$ .
- b) **Estudia las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.** Nótese que la matriz jacobiana de  $f$  viene dada por

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 100 - 40x + 10y & 10x \\ 10x & 300 + 10x - 60y \end{pmatrix}.$$

- En  $(0, 0)$  tenemos  $\text{traza}(f'(0, 0)) > 0$ , luego es inestable.
- En  $(0, 10)$  se cumple  $\det(f'(0, 10)) > 0$ , luego es inestable.
- En  $(5, 0)$  obtenemos  $\det(f'(5, 0)) < 0$ , luego es inestable.
- En  $(12, 14)$  se tiene  $\det(f'(12, 14)) > 0$  y  $\text{traza}(f'(12, 14)) < 0$ , por lo que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.  $\triangle$

El primer método de Lyapunov puede interpretarse como que el diagrama de fases cerca del punto de equilibrio es similar para la ecuación de partida y la ecuación linealizada. En este punto introducimos nomenclatura para las órbitas o soluciones de diagramas de fase dos dimensionales.

- Una órbita es *heteroclina* si tiene límite en  $\pm\infty$  y estos límites son puntos de equilibrio distintos.
- Una órbita es *homoclina* si tiene límite en  $\pm\infty$  y estos límites son el mismo punto de equilibrio.
- Un *ciclo límite* es una órbita cerrada tal que otras órbitas se enrollan en torno a ella.

El problema 16 de Hilbert se enmarca en este ámbito de las ecuaciones diferenciales. Todavía no está resuelto. Sean  $p, q \in \mathbb{P}_n[x, y]$ . Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = p(x, y); \\ y' = q(x, y). \end{cases} \quad (25)$$

Sea  $Z_n$  el número máximo de ciclos límite que puede tener esa familia. El problema 16 de Hilbert consiste en encontrar una cota superior para  $Z_n$ .

**EJEMPLO 6.12** (Estabilidad en la ecuación del péndulo): Sea  $c \geq 0$ . Consideramos la ecuación del péndulo

$$x'' + cx' + \sin(x) = 0, \quad (26)$$

que equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = -cx_2 - \sin(x_1). \end{cases} \quad (27)$$

Los puntos de equilibrio del sistema son  $\{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Calculamos la matriz jacobiana de  $f$ , obteniendo

$$f'(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(k\pi) & -c \end{pmatrix}.$$

Distinguimos dos casos.

a) El entero  $k$  es par. Deducimos que

$$f'(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

y, por tanto,  $\det(f'(k\pi, 0)) = 1 > 0$  y  $\text{traza}(f'(k\pi, 0)) = -c$ . Si  $c > 0$ , entonces el sistema es asintóticamente estable. No obstante, si  $c = 0$ , entonces no podemos aplicar el primer método de Lyapunov. Para estos casos existe el segundo método de Liapunov, que introduciremos en la siguiente sección.

b) El entero  $k$  es impar. Deducimos que

$$f'(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

y, por tanto,  $\det(f'(k\pi, 0)) = -1 < 0$  y  $\text{traza}(f'(k\pi, 0)) = -c$ . Por tanto, el sistema es inestable.  $\triangle$

### 6.3. El segundo método de Lyapunov

En este apartado vamos a introducir el segundo método de Lyapunov, que nos permitirá estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio de una ecuación autónoma cuando falle el primer método. Tiene la desventaja de que no es algorítmico pues se basa en la misma idea que la acotación por funciones guía.

**Teorema 6.13** (Estabilidad de Lyapunov). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^d)$  localmente lipschitziana. Sea  $p \in D$  un cero de  $f$ . Sea una función  $V \in \mathcal{C}^1(D)$  tal que*

- a)  $V$  alcanza un mínimo local estricto en  $p$ ;
- b)  $\dot{V}$  alcanza un máximo local en  $p$ .

*Entonces  $p$  es un punto de equilibrio estable de (AE).*

*Demostración.* Por hipótesis existe  $0 < R$  tal que  $V(x) > V(p)$  y  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \overline{B}(p, R) \setminus \{p\}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . No es restrictivo suponer que  $\varepsilon \leq R$ . Sea  $m = \min\{V(x) \mid x \in \partial B(p, \varepsilon)\}$ . Por continuidad de  $V$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in B(p, \delta)$  se cumple  $V(x) < m$ . Sea  $x_0 \in B(p, \delta)$ . Vamos a probar que la solución  $X(t, 0, x_0) = X(t, x_0)$  verifica  $X(t, x_0) \in B(p, \varepsilon)$  para todo  $t \geq 0$ . Razonamos por reducción

al absurdo. Existe  $\tau > 0$  tal que  $X(t, x_0) \in B(p, \varepsilon)$  para todo  $t \in [0, \tau[$  y  $X(\tau, x_0) \in \partial B(p, \varepsilon)$ . La función  $y(t) = V(X(t, x_0))$  es decreciente pues  $y'(t) = \dot{V}(X(t, x_0)) \leq 0$ . Sin embargo,  $y(\tau) \geq m > V(x_0) = y(0)$ , contradicción. Por tanto, por el teorema de comportamiento en el extremo superior  $\omega(0, x_0) = +\infty$  y  $\|X(t, x_0) - p\| \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [0, +\infty[$ ,  $x_0 \in B(p, \delta)$ .  $\square$

**Comentario 6.14.** Puesto que  $\dot{V}(p) = \langle \nabla V(p), f(p) \rangle = 0$ , la segunda hipótesis del teorema previo puede remplazarse por que exista un entorno  $U \subset D$  de  $p$  tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in U$ .

**Corolario 6.15.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^d)$  localmente lipschitziana. Sea  $p \in D$  un cero de  $f$ . Sea una función  $V \in \mathcal{C}^1(D)$  tal que

- a)  $V$  alcanza un mínimo local estricto en  $p$ ;
- b)  $\dot{V}$  se anula en un entorno de  $p$ .

Entonces  $p$  es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable de (AE).

*Demostración.* Supongamos que para cierto  $x_0 \in D \setminus \{p\}$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \omega} X(t, x_0) = p$ . En tal caso, la función  $y(t) = V(X(t, x_0))$  tiene derivada constantemente cero para  $t \geq t_1$  con  $t_1 \in \mathbb{R}$  y, por tanto, es constantemente  $V(p)$  a partir de  $t_1$ . Sin embargo,  $X(t, x_0) \neq p$  para todo  $t \in ]\alpha(x_0), \omega(x_0)[$ , lo que contradice que  $V$  tenga un mínimo local estricto en  $p$ .  $\square$

**EJEMPLO 6.16** (Estabilidad en la ecuación del péndulo, 2): Recuperamos la ecuación del péndulo (26) y su versión en sistema (27). Recordemos que los puntos de equilibrio son  $\{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Habíamos estudiado la estabilidad en todos los casos salvo cuando  $k$  es par y  $c = 0$ . En el último caso la ecuación a estudiar es la siguiente

$$\begin{cases} x'_1 = x_2; \\ x'_2 = -\sin(x_1). \end{cases} \quad (28)$$

Definimos  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $V(x, y) = y^2/2 - \cos(x)$ . Tenemos que  $\dot{V}(x, y) = 0$ . Además,  $V$  alcanza un mínimo local estricto en  $(0, 0)$ . Por tanto, el segundo método de Lyapunov nos asegura que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable de (28).  $\triangle$

El problema del Teorema de Estabilidad de Lyapunov es encontrar una función  $V$  apropiada. En el caso de los sistemas del tipo lineal (LHC) podemos encontrar una forma cuadrática que verifique estas condiciones. Sea  $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  simétrica. La forma cuadrática asociada es  $V(x) = \langle Bx, x \rangle$ . La función  $V$  tiene un mínimo estricto en 0 si, y solo si, es definida positiva. Recordemos que  $\nabla V(x) = 2Bx$ . Por tanto, tenemos que

$$\dot{V}(x) = \langle 2Bx, Ax \rangle = 2 \langle A^t Bx, x \rangle = \left\langle \frac{A^t B + BA}{2} x, x \right\rangle.$$

El hecho de que  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x$  equivale a que la matriz  $A^t B + BA$  (parte simétrica de  $BA$ ) sea semidefinida negativa. Definimos  $F_A: S_d^+ \rightarrow S_d(\mathbb{R})$  dada por  $F_A(B) = A^t B + BA$ . Esta aplicación es lineal. Interesa conocer las propiedades de  $F_A$  de manera que dada una matriz definida negativa podamos calcular su imagen inversa por  $F_A$ . Esta cuestión se estudia en la literatura especializada, aunque no la podemos abordar en este momento por la longitud del curso.

El siguiente lema cuya demostración se deja como ejercicio nos permitirá demostrar el Teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov.

**Lema 6.17.** Sea  $\varphi: ]\alpha, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua. Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis.

- a) Existe  $R > 0$  y  $t_0 > \alpha$  tal que  $\varphi(t) \in \overline{B}(p, R)$  para todo  $t \geq t_0$ .

b) Existe  $V \in \mathcal{C}(\overline{B}(p, R))$  tal que  $V(x) > V(p)$  para todo  $x \in \overline{B}(p, R) \setminus \{p\}$ .

c)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = V(p)$ .

Entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = p$ .

**Teorema 6.18** (Estabilidad asintótica de Liapunov). Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^d)$  localmente lipschitziana. Sea  $p \in D$  un cero de  $f$ . Sea  $V \in \mathcal{C}^1(D)$  tal que

a)  $V$  alcanza un mínimo local estricto en  $p$ ;

b)  $\dot{V}$  alcanza un máximo local estricto en  $p$ .

Entonces  $p$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (AE).

*Demostración.* Por el Teorema 6.13 tenemos que  $p$  es un punto de equilibrio estable de (AE). Sea  $R > 0$  tal que  $V$  tiene un mínimo global estricto y  $\dot{V}$  tiene un máximo global estricto en  $B(p, R)$ . Por la estabilidad existe un  $\mu > 0$  tal que para todo  $x_0 \in B(p, \mu)$  se tiene  $\omega(x_0) = +\infty$  y  $X(t, x_0) \in B(p, R)$  para todo  $t \geq 0$ . Sea  $x_0 \in B(p, \mu)$ ,  $\varphi(t) = X(t, x_0)$  e  $y(t) = V(\varphi(t))$ . Nótese que  $y'(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Por tanto,  $y$  es decreciente y está acotada inferiormente por  $V(p)$ . Deducimos que existe  $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq V(p)$ . Veamos que  $L = V(p)$ . Por el teorema del valor medio obtenemos una sucesión de números no negativos  $\{t_n\} \rightarrow +\infty$  tal que  $\{\dot{V}(\varphi(t_n))\} = \{y'(t_n)\} \rightarrow 0$ . Pero  $\dot{V}$  tiene un máximo estricto en  $p$  y  $\varphi(t_n) \in B(p, R)$ , luego  $\{\varphi(t_n)\} \rightarrow p$  y, por tanto,  $\{V(\varphi(t_n))\} \rightarrow V(p)$ . La unicidad del límite prueba que  $L = V(p)$ . La demostración finaliza al aplicar el lema previo.  $\square$

El teorema previo se suele aplicar utilizando las conocidas condiciones suficientes de mínimo y máximos estrictos en funciones de clase 1. No obstante, las hipótesis son muy restrictivas y no cubren todos los casos, como muestra el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 6.19:** Consideramos la EDO  $x'' + x' + x^3 = 0$ . Esta se denomina ecuación de Duffing. El sistema asociado viene dado por

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = -x_1^3 - x_2. \end{cases}$$

El único punto de equilibrio es el  $(0, 0)$ . Nótese que  $\text{traza}(f'(0, 0)) < 0$  y  $\det(f'(0, 0)) = 0$ , por lo que el primer método de Liapunov no da información acerca de la estabilidad en  $(0, 0)$ . Buscamos pues aplicar el segundo método. Consideramos la función energía  $V(x_1, x_2) = x_1^4/4 + x_2^2/2$ , que tiene un mínimo global estricto en  $(0, 0)$ . Tenemos que  $\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$ , que tiene un máximo en  $(0, 0)$ , pero no es estricto en ningún entorno. Deducimos que el punto de equilibrio es estable por el Teorema 6.13, pero no sabemos si es asintóticamente estable o no. No obstante, sí se puede demostrar que el equilibrio es asintóticamente estable. En efecto, basta considerar una nueva función  $V(x_1, x_2) = x_1^4/4 + x_2^2/2 + ax_1^3x_2$ . Se deja como ejercicio encontrar un valor de  $a$  para el cual se pueda aplicar el Teorema 6.18.  $\triangle$

**Teorema 6.20** (Inestabilidad de Lyapunov). Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^d)$  localmente lipschitziana. Sea  $p \in D$  un cero de  $f$ . Sea  $V \in \mathcal{C}^1(D)$  tal que

a) existe una sucesión  $\{x_n\} \subset D$  convergente a  $p$  tal que  $V(x_n) > V(p)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;

b)  $\dot{V}$  alcanza un mínimo local estricto en  $p$ .

Entonces  $p$  es un punto de equilibrio inestable de (AE).

*Demostración.* Sea  $R > 0$  tal que  $V$  y  $\dot{V}$  tienen un máximo global estricto en  $p$  en  $B(p, R)$ . Supongamos que  $p$  es estable y lleguemos a una contradicción. En tal caso existe  $\mu > 0$  tal que para todo  $x_0 \in B(p, \mu)$  se tiene que  $\omega(x_0) = +\infty$  y  $X(t; x_0) \in \overline{B}(p, R)$  para todo  $t \geq 0$ . Sea  $x_m \in B(p, \mu) \setminus \{p\}$  y  $\varphi(t) = X(t, x_m)$ . Se tiene que  $\varphi(t) \neq p$  para todo  $t \in ]\alpha(x_0), +\infty[$ . Definimos la función  $y(t) = V(\varphi(t))$ . Tenemos que

$y'(t) = \dot{V}(\varphi(t)) > 0$  para todo  $t \geq 0$ , luego la función  $y$  es estrictamente creciente. Consecuentemente, existe  $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) > V(x_m) > V(p)$ , de donde encontramos una sucesión de números no negativos  $\{t_n\}$  tal que  $\{\dot{V}(\varphi(t_n))\} = \{y'(t_n)\} \rightarrow 0$ . Como  $p$  es un máximo global estricto de  $\dot{V}$  en  $\bar{B}(p, R)$  deducimos que  $\varphi(t_n)$  converge a  $p$ , lo que contradice que  $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) > V(p)$ .  $\square$

**Corolario 6.21.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^d)$  localmente lipschitziana. Sea  $p \in D$  un cero de  $f$ . Sea  $V \in \mathcal{C}^1(D)$  tal que

- a)  $V$  alcanza en  $p \in D$  un mínimo local estricto.
- b)  $\dot{V}$  alcanza un mínimo local estricto en  $p$ .

Entonces  $p$  es un punto de equilibrio inestable de (AE).

Un teorema complementario al Teorema 6.20 es el siguiente resultado.

**Teorema 6.22** (Inestabilidad de Chetaev). Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^d)$  localmente lipschitziana. Sea  $p \in D$  un cero de  $f$ . Sea  $V \in \mathcal{C}^1(D)$  tal que

- a) existe una sucesión  $\{x_n\} \subset D$  convergente a  $p$  tal que  $V(x_n) > V(p)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- b)  $\dot{V}(x) > 0$  para todo  $x \in \mathcal{U}_+ = \{x \in D : V(x) > V(p)\}$ .

Entonces  $p$  es un punto de equilibrio inestable de (AE).

*Demostración.* La demostración es análoga a la del teorema anterior.  $\square$

Las funciones  $V$  de estos teoremas reciben el nombre de funciones de Lyapunov.

EJEMPLO 6.23: Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x(1 + |y|); \\ y' = x + y(1 + |y|). \end{cases} \quad (29)$$

Estudiar la estabilidad de (29) en los puntos de equilibrio.

El único punto de equilibrio es  $p = (0, 0)$ . La función  $V(x, y) = xy$  verifica las hipótesis del Teorema 6.20, luego  $p$  es inestable.  $\triangle$

## 6.4. Sistemas gradientes

### 6.4.1. Sistemas gradientes de primer orden

Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $G \in \mathcal{C}^1(D)$ . Sea  $p \in D$  tal que  $\nabla G(p) = 0$ . Consideramos el sistema

$$x' + \nabla G(x) = 0. \quad (G1)$$

**Proposición 6.24.** En el contexto actual suponemos que  $p$  es un punto crítico aislado de  $f(x) = -\nabla G(x)$ .

- a) Si  $G$  alcanza en  $p$  un mínimo local estricto, entonces  $p$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (G1).
- b) Si  $G$  alcanza en  $p$  un máximo local estricto, entonces  $p$  es un punto de equilibrio inestable de (G1).
- c) Si  $G$  alcanza en  $p$  un punto de silla, entonces  $p$  es un punto de equilibrio inestable de (G1).

*Demostración.* La idea es aplicar los resultados de Lyapunov para funciones basadas en  $G$ .

- a) Basta considerar  $V(x) = G(x)$  y aplicar el Teorema 6.13 pues  $\dot{V}(x) = \langle \nabla G(x), -\nabla G(x) \rangle = -\|\nabla G(x)\|^2$ .
- b) Consideramos en este caso  $V(x) = -G(x)$  y aplicamos el Teorema 6.18.
- c) Consideramos de nuevo  $V(x) = -G(x)$  y aplicamos el Teorema 6.22.  $\square$

La dificultad de utilizar este resultado reside en saber si el sistema con el que estamos trabajando es un sistema gradiente. Para ello utilizamos el lema de Schwarz como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.25: Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = 28x - 6x^2 + 4y; \\ y' = 4y + 4x. \end{cases} \quad (30)$$

¿Es un sistema gradiente? Sea  $f_1(x, y) = 28x - 6x^2 + 4y$  y  $f_2(x, y) = 4y + 4x$ . En caso de ser un sistema gradiente se tendrá  $\frac{\partial}{\partial y} f_1 = \frac{\partial}{\partial x} f_2$  por el lema de Schwarz. Es fácil comprobar que esto se verifica en el sistema. Ahora podemos proceder como sigue. Tomamos  $-G(x, y) = 14x^2 - 2x^3 + 4xy + \varphi(y)$ , primitiva de  $f_1$  fijando  $y$ . Calculamos ahora  $\varphi(y)$ . Para ello derivamos respecto de  $y$  obteniendo que  $4x + \varphi'(y) = 4x + 4y = f_2(x, y)$ . Deducimos que  $\varphi(y) = 2y^2 + k$ . Nótese que las  $x$  se han cancelado al calcular  $\varphi'$  gracias a que se verifica la tesis del lema de Schwarz. Podemos tomar  $G(x, y) = -(14x^2 - 2x) + 4xy + 2y^2$ .  $\triangle$

#### 6.4.2. Sistemas gradientes de segundo orden

Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y  $G \in \mathcal{C}^1(D)$ . Sea  $p \in D$  tal que  $\nabla G(p) = 0$ . Un sistema gradiente de segundo orden es una EDO de la forma

$$x'' + \nabla G(x) = 0. \quad (\text{G2})$$

Equivalentemente, podemos considerar el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2; \\ x'_2 = -\nabla G(x_1). \end{cases} \quad (\text{G2S})$$

**Teorema 6.26.** *En el contexto actual, si  $G$  alcanza en  $p$  un mínimo local estricto, entonces  $(p, 0)$  es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable de (G2S).*

*Demostración.* Consideramos la función  $V(x_1, x_2) = G(x_1) + \|x_2\|_2^2/2$ . Es fácil ver que es una función de Lyapunov para el corolario del Teorema 6.13. En efecto, se tiene

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \langle (\nabla G(x_1), x_2), (x_2, -\nabla G(x_1)) \rangle = 0.$$

Además,  $(p, 0)$  es un mínimo local estricto de  $V$ .  $\square$

## 7. Generalización de la teoría cualitativa

### 7.1. Teorema de Arzelá - Ascoli

**Definición 7.1.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Diremos que una sucesión  $f_n: I \times \mathbb{R}^d$  es equicontinua si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f_n(t) - f_n(s)\| \leq \varepsilon$  para todo  $t, s \in I$  con  $|t - s| < \delta$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Nótese que las funciones de una sucesión equicontinua son uniformemente continuas. El recíproco no es cierto.

**Lema 7.1.** *Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones continuas en  $I$ . Si  $f_n \in \mathcal{C}^1(I)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $f'_n$  está uniformemente acotada, entonces  $f_n$  es equicontinua.*

**Teorema 7.2** (Teorema de Arzelá-Ascoli). *Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una sucesión de funciones continuas que está uniformemente acotada y es equicontinua. Entonces existe  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $f_n$  converge puntualmente a  $f$ .*