Punto 6

Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ji}\, x_j}{A_{ii}}$$

donde $i = n, n-1, \dots, 0$. La diagonal de la matriz triangular superior puede tener cualquier valor

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución hacia atrás, llevamos dicho sistema a la forma triangular superior.

Así, entonces nuestro sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{array}{rcl}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} + \cdots a_{1n} & = & b_1 \\
+ a_{22} x_2 + a_{23} + \cdots a_{2n} & = & b_2 \\
+ a_{33} + \cdots a_{3n} & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{mn} & = & b_m
\end{array}$$

Como una matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{1n} \\
a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} \\
a_{33} + \cdots + a_{3n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matríz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & 0 & \cdots\ a_{33} & \cdots & a_{3n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Si tomamos $n, m = 5$ para hallar, tendremos entonces

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \end{array}\right)$$

Despejando entonces

$$a_{55} x_5 = b_5 \Rightarrow x_5 = \frac{b_5}{a_{55}}$$

$$a_{44} x_4 + a_{45} x_5 = b_4 \Rightarrow x_4 = \frac{b_4 - a_{45} x_5}{a_{44}}$$

$$a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + a_{35} x_5 = b_3 \Rightarrow x_3 = \frac{b_3 - (a_{34} x_4 + a_{35} x_5)}{a_{33}}$$

$$a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + a_{25} x_5 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - (a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + a_{25} x_5)}{a_{22}}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5)}{a_{11}}$$

De forma general tenemos que:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$