Punto 5:

Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

Cuando tomamos $Ax=b$, obtenemos:

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{matrix}$$

La matriz $[A|b]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] = [A|b]$$

Por lo que $R_i = (a_{i1} \; a_{i2} \cdots a_{in} \; | b_n)$ donde $i = [0, n]$

si hacemos $i \in [2, n]$ y $j \in [1, i-1]$ obtenemos que

la operación $\frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i - R_j - R'_j$ hace $\forall j \neq i \quad a_{ji} = 0$

Con esto

$$[A|b]' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Donde $[A|b]'$ es una matriz triangular superior

Con esto podemos despejar x como:

$$a_{11} x_1 = b_1 \implies x_1 \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \implies x_2 = \frac{b_2 - a_{21} x_1}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + b_n \Rightarrow \frac{b_n - a_{n(n-1)} x_{n-1} - \dots - a_{n1} x_1}{a_{nn}}$$

Veamos que al generalizarla

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad \forall_j \in [2, n]$$