Parcial 1

Derivación ejercicio 8

8 La aproximación de orden $O(h^2)$ para la derivada progresiva.

Para esto, se escribe el polinomio de interpolación de grado 2 para el conjunto soporte

$$\Omega = \{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$$

a) Calcular analíticamente el polinomio que interpola el conjunto soporte.

$$\Omega = \{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{L_i(x)}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Entonces tenemos:

$$- L_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right)$$

$$- L_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_0}\right)$$

$$- L_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Resumiendo tenemos:

$$P(x) = f(x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right) + f(x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)$$
$$+ f(x_2)\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)$$

b) Derivar el polinomio interpolador para encontrar la derivada en el punto x_0:

$$f'(x_0) \approx p'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)\right)$$

* Recordemos que la derivada progresiva de orden $2 \to O(h^2)$

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f'''(x)}{6} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \underbrace{\frac{h}{2} f''(x)}_{O(h)} - \underbrace{\frac{h^2 f'''(x)}{3!}}_{O(h^2)}$$

- Del enunciado $f'(x_0) \approx p'(x_0)$

$$p'(x) = f(x_0)\left[\left(\frac{1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_0-x_2}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\right] +$$
$$f(x_1)\left[\left(\frac{1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\right] +$$
$$f(x_2)\left[\left(\frac{1}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\right]$$

$/ \; p''(x_0) = \dfrac{p(x_0+h) - 2p(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$

$/ \; p'(x_0) = \dfrac{p(x_0+h) - p(x_0)}{h} - \dfrac{h}{2}\, p''(x_0)$

$$p'(x_0) = p(x_0+h) - p(x_0) - \frac{h}{2}\left(\frac{p(x_0+h) - 2p(x_0) + p(x_0-h)}{h^2}\right)$$

$x_0 - x_0 = 0$

$$\bullet\; p(x_0+h) = f(x_0)\left(\frac{x_0+h-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x_0+h-x_2}{x_0-x_2}\right) + f(x_1)\left(\frac{x_0+h-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x_1+h-x_2}{x_1-x_2}\right)$$

$=0$

$$+ f(x_2)\left(\frac{x_0+h-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x_0+h-x_1}{x_2-x_1}\right)$$

$$= f(x_0)\left(\frac{x_0+h-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x_0+h-x_2}{x_0-x_2}\right) + f(x_1)\left(\frac{h}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x_0+h-x_2}{x_1-x_2}\right)$$

$$+ f(x_2)\left(\frac{h}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x_0+h-x_1}{x_2-x_1}\right)$$

$$\bullet\; p(x_0-h) = f(x_0)\left(\frac{x_0-h-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x_0-h-x_2}{x_0-x_2}\right) + f(x_1)\left(\frac{-h}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x_1-h-x_2}{x_1-x_2}\right)$$

$$+ f(x_2)\left(\frac{-h}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x_0+h-x_1}{x_2-x_1}\right)$$

Entonces: $\quad p'(x_0) = \dfrac{p(x_0+h)}{h} - \dfrac{p(x_0)}{h} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p(x_0+h)}{h} - \dfrac{2p(x_0)}{h} + \dfrac{p(x_0-h)}{h}\right)$

c) Calcule analíticamente la derivada de la función $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\tan(x)}$$

Recordemos que se puede escribir $\sqrt{\ }$ como $\frac{1}{2}$

$(\tan x)^{1/2}$ con esto:

$$f'(x) = \frac{d(\tan x)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2}(\tan x)^{-1/2} \cdot \frac{d \tan x}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}(\tan x)^{-1/2} \cdot \sec^2 x$$

Dejemos $\sec^2$ en terminos de cos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \sec^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\frac{\cos(2x)+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{2}{\cos(2x)+1}$$