

# Modelado y simulación de un proceso de nivel

Carlos Gaviria

Febrero 14, 2007

## Introduction

El propósito de este sencillo ejercicio es el de familiarizar al estudiante con alguna terminología del control procesos, la obtención de modelos dinámicos y su simulación mediante MatLab.

Un *sistema* es una entidad material formada por partes organizadas (o sus "componentes") que interactúan entre sí de manera que las propiedades del conjunto, sin contradecirlas, no pueden deducirse por completo de las propiedades de las partes.

Los sistemas reales intercambian con su entorno energía, información y, en la mayor parte de los casos, también materia. Como un ejemplo de sistema, consideremos el proceso de nivel de un tanque de almacenamiento de fluido indicado en la 1.

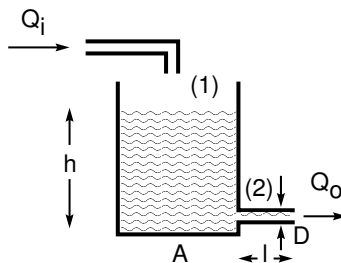


Figura 1: Proceso de Nivel de un tanque.

En el sistema de la figura 1 se distingue:

$q_i, q_o$ : Caudal o flujo volumétrico, que expresa el cambio de volumen del fluido por unidad de tiempo. Los subíndices  $i$  y  $o$  denotan entrada y salida respectivamente.  $q_i$  es conocido y  $q_o$  es desconocido.

$h$ : Es el nivel del líquido en el tanque.

$D$ : Es el diámetro del tubo de salida.

$S$ : Es el área de la sección del tubo de salida.

$\rho$ : Es la densidad del líquido.  
 $A$ : Es el área de la sección del tanque.  
 $l$ : Longitud del tubo en la salida.

En este proceso se desea obtener un *modelo dinámico* del nivel en el tanque. Un modelo dinámico expresa cómo es el cambio de una variable física (en este caso el nivel) en función del tiempo. Para ello es necesario acudir al conocimiento de las leyes físicas que gobiernan el proceso. El contenido del resto de este artículo es como sigue. En la sección 1 se describirá la obtención del modelo dinámico del sistema a partir de leyes físicas básicas. En la sección 2 se describirá el proceso de simulación de este sistema en MatLab.

## 1. Modelo dinámico del nivel

Dos de las leyes físicas más utilizadas en la obtención de un modelo dinámico de un sistema son las leyes de balance de masa y balance de la energía.

### 1.1. Balance de masa

Se puede expresar la ley de balance de masa como:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Velocidad de acumulación} \\ \text{de la masa en el sistema} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{entra al sistema} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{sale del sistema} \end{array} \right)$$

Lo anterior matemáticamente se describe como,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 q_i - \rho_2 q_o \quad (1)$$

Ya que no hay cambio de densidad del líquido durante el proceso,  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ . La masa acumulada en el tanque puede calcularse como  $m = \rho V$ , siendo  $V = A \cdot h(t)$  el volumen del líquido almacenado (note que  $h$  es función del tiempo). Luego,

$$\frac{dm}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt} = q_i - q_o \quad (2)$$

La ecuación (2) describe la dinámica del nivel  $h(t)$ . Ya que  $q_i$  es conocido y es la *entrada del sistema*, solo hace falta conocer una relación para  $q_o$ . Esta relación la podemos establecer mediante un balance de energía.

### 1.2. Balance de energía

Se puede expresar la ley de balance de energía como:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Velocidad de acumulación} \\ \text{energía en el sistema} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de energía} \\ \text{que entra al sistema} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de energía} \\ \text{que sale del sistema} \end{array} \right)$$

Lo anterior matemáticamente se describe como,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_1}{dt} - \frac{dE_2}{dt} \quad (3)$$

Donde el subíndice 1 y 2 indican los valores en los puntos (1) y (2) en la figura 1. La energía en este sistema particular está comprendida por la energía cinética  $K = \frac{1}{2}mv^2$  y  $\Phi = mgz$ , siendo  $z$  el nivel sobre la referencia.

La ecuación de balance de energía (3) en el sistema de nivel del tanque entonces es:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1)}{dt} - \frac{d(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2)}{dt} \quad (4)$$

En el sistema en régimen permanente se debe cumplir  $\frac{dE}{dt} = 0$ , y teniendo en cuenta que en este caso  $v_1 = 0$  con lo que la ecuación 4 se convierte en:

$$\frac{1}{2}v_2^2 = g(z_2 - z_1); \mapsto v_2 = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

Es fácil ver que,

$$q_o = \frac{dV_2}{dt} = \frac{S \cdot dl}{dt} = Sv_2. \quad (6)$$

Reemplazando (2) en (6) se obtiene que la ecuación dinámica del sistema es:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q_i - \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh(t)} \quad (7)$$

La variable  $h(t)$  es una *variable de estado*, ya que no es posible conocer  $h(t)$  a partir de  $q_i$  sin saber algo acerca de la *historia* del sistema, es decir, es necesario saber a partir de qué nivel inicial  $h(0)$  se inicia a estudiar el comportamiento de  $h(t)$ . Matemáticamente, la solución para  $h(t)$  se obtiene a partir de la ecuación diferencial 7, y como se sabe, ésta solución es dependiente de la condición inicial en  $h(0)$ .

## 2. Simulación del modelo

El modelo en la ecuación (7) es no lineal debido a la presencia de operaciones no lineales sobre la variable de estado  $h(t)$  (en este caso la raíz cuadrada de  $h(t)$ ). En estos casos no es posible hacer uso de la transformada de Laplace directamente sobre la ecuación diferencial. MatLab es un software de cálculo numérico que posee herramientas variadas que facilitan la simulación de sistemas dinámicos. Sobre MatLab se puede ejecutar Simulink, un software que permite construir modelos matemáticos en un entorno gráfico.

En este ejercicio simularemos el proceso de nivel del tanque mediante Simulink. La figura 2 muestra la ubicación de Simulink dentro del entorno de MatLab y la figura 3 muestra cómo abrir una hoja para elaborar un modelo en Simulink.

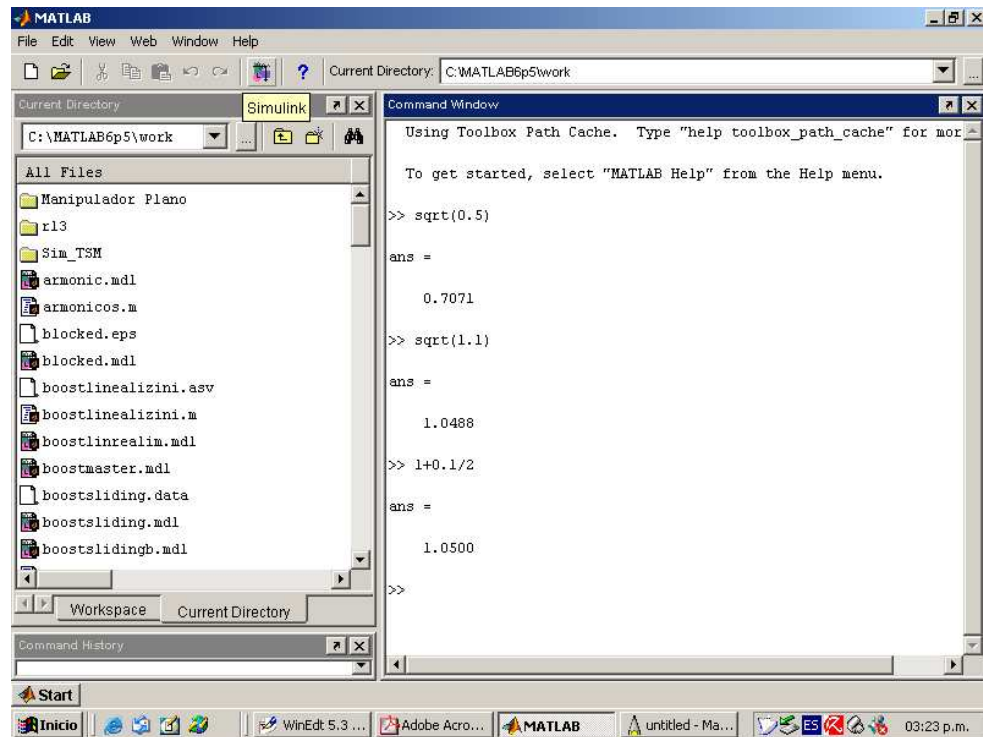


Figura 2: Ubicación de Simulink.

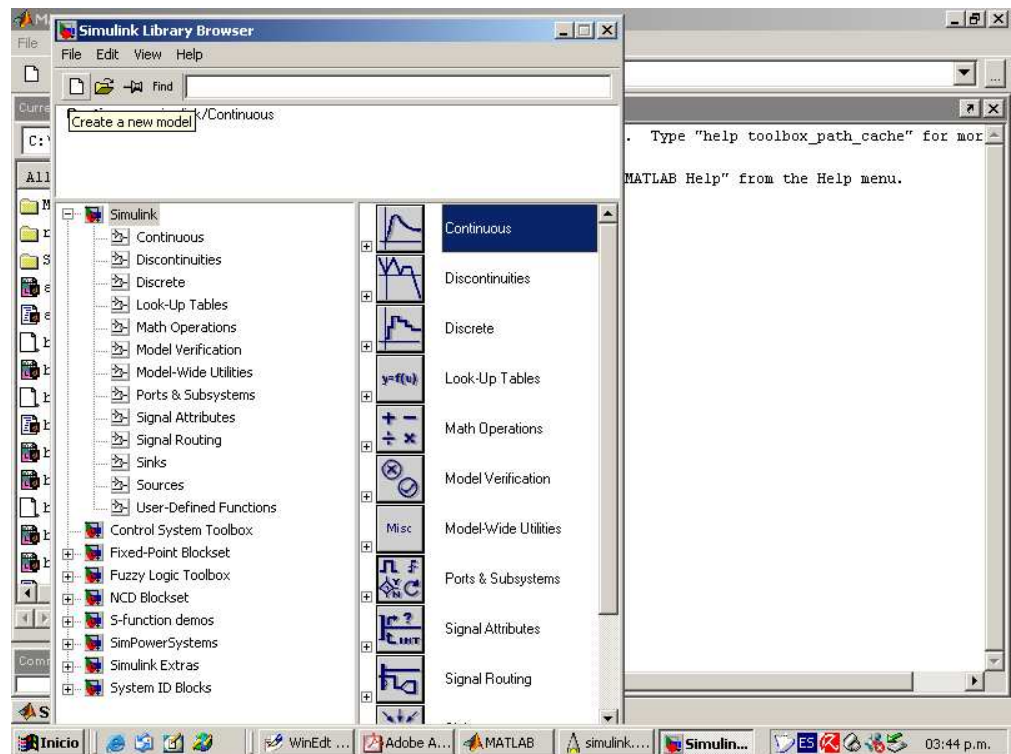


Figura 3: Creación de un nuevo modelo en Simulink.

La gráfica 5 muestra el esquema para una validación del modelo linealizado al rededor de régimen permanente obtenida mediante un modelo de espacio de estados de esa linealización.

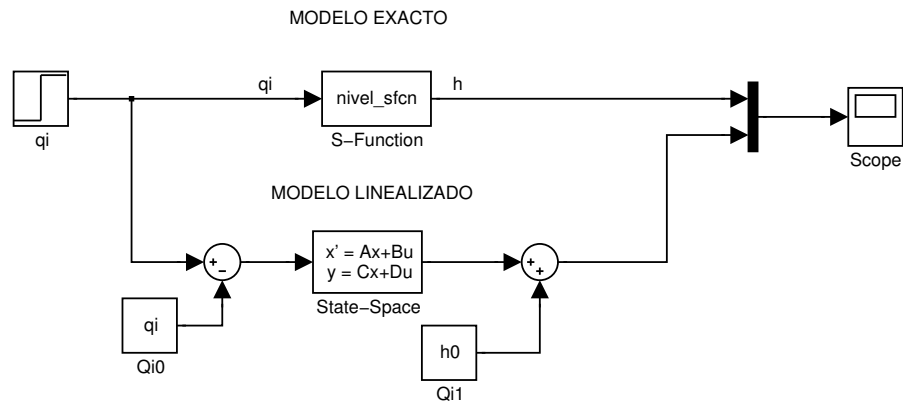


Figura 4: Comparación modelo tanque en Simulink.

En este modelo se hace uso de un script en MatLab para iniciar los datos del proceso. Los datos del script son:

```
% Modelo dinamico del nivel de un Tanque.
% Parametros del sistema
A = pi*(0.5)^2;      % Area de seccion del tanque asumiendo
                    % que es cilindrico de radio 0.5m.
g = 9.8;            % Aceleracion de la gravedad, 9.8 m/s^2
D = 0.1;            % Diametro del tubo = 10 cm
S = pi*D^2/4;       % Area de seccion del tubo de salida

% Caudal de entrada

qi = 0.139;          % Caudal de entrada en m^3/s

% Modelo espacio de estados (Linealizado)

h0 = 1/2/g*(qi/S)^2; % h en regimen permante para qi = 0.139
mA = -S/A*sqrt(g/2/h0); mB = 1/A; mC = 1; mD = 0;

% Modelo discretizado

T = 1; % Periodo de muestreo = 1 s
sysd = c2d(ss(mA,mB,mC,mD),T); mAd = sysd.a; mBd = sysd.b; mCd =
sysd.c; mDd = sysd.d;
```

La gráfica muestra la comparación del nivel según los modelos no lineal y linealizado.

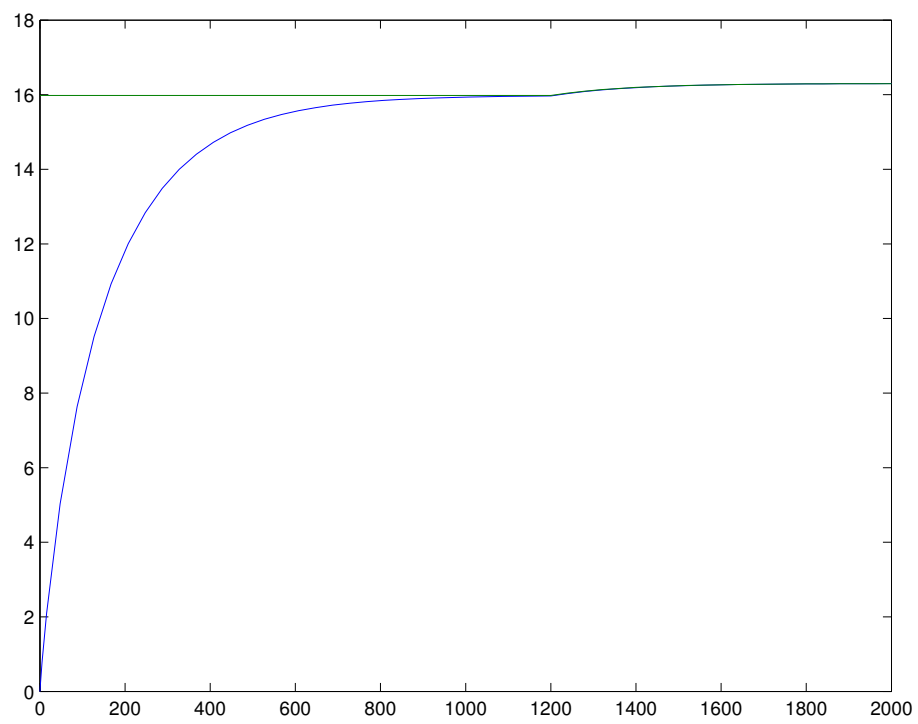


Figura 5: Comparación de la respuesta no lineal vs lineal.