



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE MINAS

DEPARTAMENTO DE ENERGÍA ELÉCTRICA Y  
AUTOMÁTICA

Asignatura:  
Tópicos en Procesamiento Digital de Señales

LABORATORIO NÚMERO 3

5 de Mayo de 2024

## Compresión de imágenes: La transformada discreta del coseno (DCT)

La transformada discreta del coseno (*DCT*) representa una herramienta muy útil para la compresión de señales multimedia, ya que permite discriminar qué componentes poseen poca energía y pueden ser retirados de la señal original sin mayores distorsiones. La *DCT* es la base para muchos esquemas de compresión de imágenes y audio, incluyendo los formatos *jpg* y *mp3*. En el caso de señales unidimensionales, la *DCT* está definida por la siguiente expresión:

$$y(k) = DCT \{x(n)\} = w(k) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{2N} \cdot (2n+1) \cdot k \right];$$

Para  $0 \leq k < N$

$$\text{Donde: } w(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{Para } k = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{Para } 1 \leq k < N \end{cases} \quad (1)$$

La transformada coseno discreta de  $x(n)$  es llamada  $y(k)$  en la Ecuación (1). Una de las características clave de  $y(k)$ , es que la energía está muy concentrada en algunos de sus componentes, permitiendo eliminar los menos significativos sin pérdidas relevantes de información. A manera de ejemplo, considérese la Figura 1.

En el primer eje de la Figura 1 se encuentra la señal original, etiquetada como  $x(n)$ . El segundo gráfico muestra la magnitud de la transformada *DCT* de  $x(n)$ . En ese gráfico puede verse como la mayoría de componentes de la transformada ( $y(k)$ ) son despreciables, por lo que no se comete un gran error muy grande llevando todos estos componentes a cero. Tal y como se explica en la misma figura, para hacer la reconstrucción solo se tuvieron en cuenta el 3 % de los componentes (aquellos con las magnitudes más importantes). Esto es crítico en un proceso de compresión de la señal, ya que solo sería necesario almacenar esta cantidad reducida de componentes para reconstruir la señal posteriormente. El último eje de la figura muestra precisamente la señal reconstruida ( $x_r(n)$ ), con esa cantidad reducida de componentes. Se ha puesto como referencia la señal original en líneas punteadas. Como puede verse, la reconstrucción sigue conservando mucha similitud con la señal original, sin pérdidas relevantes de información.

Se propone entonces recrear el mismo procedimiento para señales de dos dimensiones (imágenes). Se debe investigar sobre los comandos de los que dispone Matlab para efectuar los procesos de análisis y síntesis (descomposición y reconstrucción) en dos dimensiones por medio de la *DCT*. Como siempre deben registrarse los resultados más relevantes y las conclusiones derivadas del trabajo de implementación.

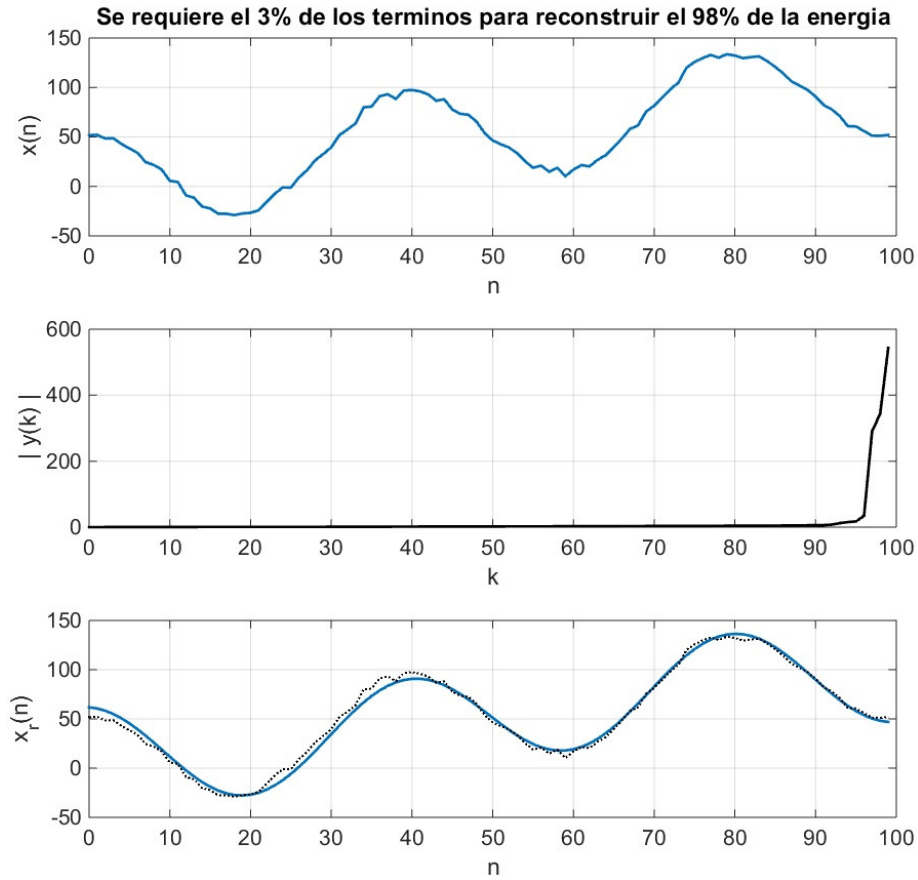


Figura 1: Proceso de compresión para una señal de una dimensión.

## Fase Desenvuelta

La representación de respuesta en frecuencia es una herramienta muy importante para el estudio de las señales y los sistemas LTI. Cuando se trata de la respuesta en frecuencia de un sistema, dicha representación permite inferir el comportamiento de ganancia (magnitud) y de desfase (ángulo) para cualquier valor de frecuencia de la señal de entrada. Dado que los valores en el dominio de la frecuencia de cualquier señal real son normalmente de naturaleza compleja, conviene dividir la representación en dos gráficos: Magnitud y Ángulo. A manera de ejemplo, la Figura 2 muestra la respuesta en frecuencia<sup>1</sup> obtenida en

<sup>1</sup>Comando `freqz`.

Matlab para un filtro paso–bajo Chebyshev tipo II.

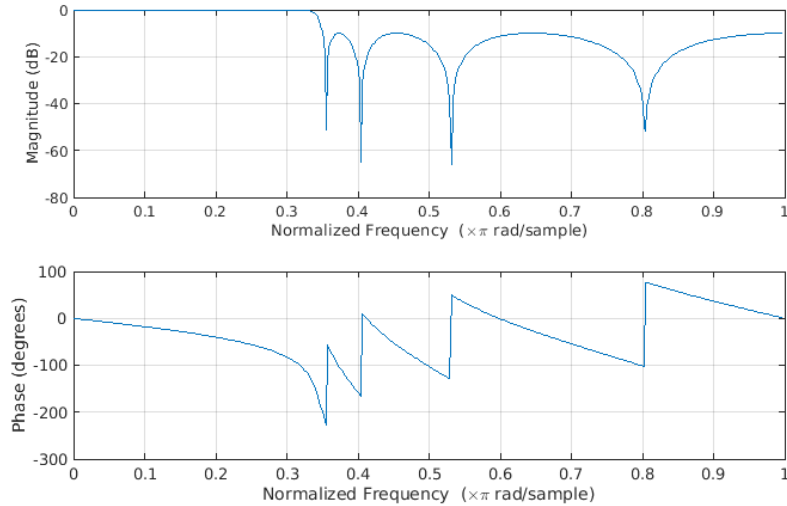


Figura 2: Respuesta en frecuencia de un filtro Chebyshev II.

Como puede verse en la figura, el gráfico de respuesta en frecuencia tiene varias características identificables:

- La magnitud de la respuesta está en escala logarítmica (decibeles).
- La frecuencia del gráfico está normalizada: Usualmente se esperaría ver un gráfico en el rango  $0 \leq f \leq 1/2$ , pero la herramienta visualiza la información en el rango  $0 \leq f_N \leq 1$ .
- El gráfico de ángulo exhibe unas discontinuidades que coinciden con los puntos de frecuencia en los que la ganancia tiende a cero. Dichas discontinuidades corresponden a saltos de ángulo, que en este caso son de  $\pm 180^\circ$  o  $\pm \pi \text{ rad}$ .

Con respecto a este último punto, debe entenderse que dichas discontinuidades *no son características del sistema*, sino meramente un problema de representación. También debe decirse que si bien para el ejemplo de la Figura 2 no aparecen, también pudieran haber discontinuidades de  $\pm 360^\circ$  en los gráficos de ángulo. Los gráficos como el de la Figura 2, en los que el ángulo tiene las discontinuidades descritas, son llamados genéricamente *Gráficos de Fase Envuelta*. El problema con la fase envuelta es que puede generar confusiones a la hora del estudio (por ejemplo) del desfase o del retardo de grupo que un sistema produce sobre las señales que procesa.

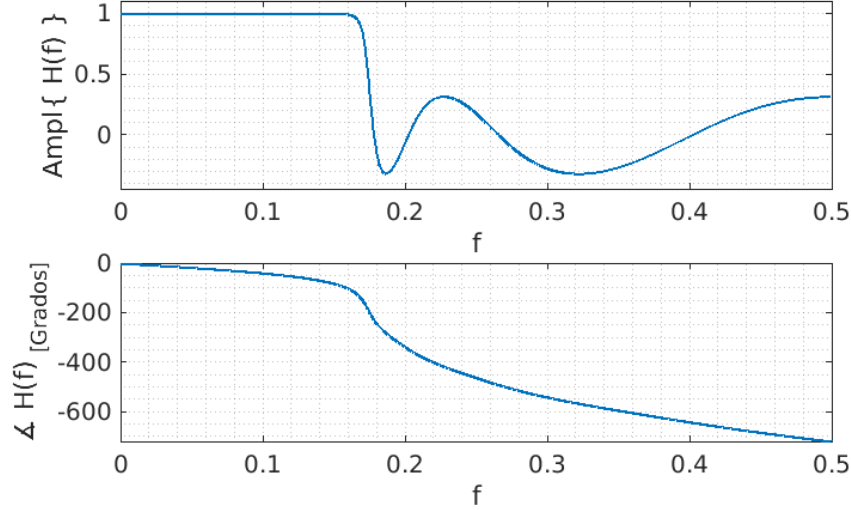


Figura 3: Gráfico de Fase Desenvuelta para el filtro de la Figura 2.

La Figura 3 muestra un gráfico de *Amplitud y Ángulo* para el mismo filtro Chebyshev II de la Figura 2, en el que la fase ha sido desenvuelta. En este caso, pueden notarse las siguientes diferencias con respecto al gráfico original de fase envuelta:

- Ya no se habla de *Magnitud* de la respuesta del filtro, sino de *Amplitud*. Dicha Amplitud puede tomar valores reales, incluso negativos, por lo que no se puede representar en una escala logarítmica.
- La frecuencia en los gráficos ya no aparece normalizada, sino en su rango real, es decir:  $0 \leq f \leq 1/2$ .
- Se han removido las discontinuidades del ángulo en el gráfico, de modo que la fase quede representada de forma desenvuelta. Para ello es necesario intervenir en la *Amplitud* de la respuesta, y que dicha Amplitud admita valores negativos, tal y como se explicó anteriormente.

Como se ha visto en clase, la función de transferencia de cierto sistema LTI ( $H(z)$ ), puede representarse de varias maneras alternativas, tal y como se ilustra en la Ecuación (2).

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}} = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \cdot z^{-1})} \quad (2)$$

Donde  $c_k$  y  $p_k$  corresponden a los ceros y a los polos del sistema, respectivamente. Hay una relación importante entre la ubicación de los ceros y los polos del sistema en el Plano  $z$ , y la respuesta en frecuencia de dicho sistema. Sin ir más lejos, la respuesta en frecuencia del sistema genérico de la Ecuación (2), se puede calcular como:

$$H(f) = H(z)|_{z=e^{j \cdot 2\pi \cdot f}} \quad (3)$$

A partir de un gráfico de fase desenvuelta como el de la Figura 3, es mucho más fácil interpretar el comportamiento del sistema, en relación (por ejemplo) al retardo de grupo. En este punto del laboratorio se pide implementar un programa genérico para poder representar la respuesta en frecuencia de un sistema arbitrario, con la fase desenvuelta, al estilo de lo mostrado en la Figura 3. El programa debe recibir como entrada el conjunto de coeficientes que representan la función de transferencia del sistema ( $b_k$  y  $a_k$  en la Ecuación (2)) y mostrar un gráfico de Amplitud y Ángulo con la fase desenvuelta.

Ensaye el programa para diferentes tipos de filtros<sup>2</sup>. Tome nota de los resultados obtenidos y enumere las conclusiones más importantes.

## Retardo de Grupo

El *Retardo de Grupo* es una medida derivada de la respuesta en frecuencia de un sistema, que permite estimar el retardo relativo entre las señales de entrada y de salida del mismo, para cada uno de los diferentes valores de frecuencia. Si  $\phi(f)$  representa el ángulo (dependiente de la frecuencia) en una respuesta como la mostrada en la Figura 3, el retardo de grupo se puede calcular, tal y como se ilustra en la Ecuación (4).

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{d\phi}{df} \quad (4)$$

En la Ecuación (4),  $\tau_g(f)$  representa el retardo de grupo del sistema, en función de la frecuencia ( $f$ ), y  $\phi$  representa la fase o ángulo de la respuesta en frecuencia de dicho sistema en radianes. A manera de ilustración, la Figura 4 muestra el retardo de grupo para el sistema cuya respuesta en frecuencia se muestra en la Figura 3.

La Figura 4 muestra una situación bastante común: Los retardos de grupo para el filtro son mayores (mayor desfase entre la entrada y la salida del filtro), en las inmediaciones de la frecuencia de corte, y tienden a ser pequeños en puntos de frecuencia lejanos a la frecuencia de corte. Como puede verse, la información del retardo de grupo puede ayudar a anticipar comportamientos dinámicos del sistema para diferentes frecuencias. También debe ser claro que, de presentarse discontinuidades en el gráfico de fase (como se mostraba en la

---

<sup>2</sup>Los más propensos a generar discontinuidades en la fase son los filtros Chebyshev y los Elípticos.

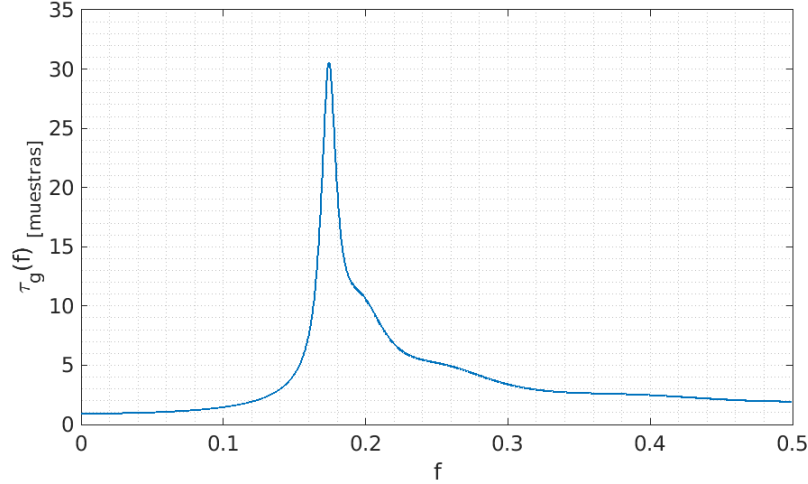


Figura 4: Retardo de grupo para el filtro de la Figura 3.

Figura 2), la información del retardo de grupo queda distorsionada y puede llevar a interpretaciones erróneas.

De acuerdo a lo anterior, queda claro que los retardos de grupo deben calcularse sobre la respuesta en frecuencia del sistema con *fase desenvuelta*, y que en caso que existan discontinuidades generadas artificialmente en la fase de dicha respuesta, el cálculo mostrado en la Ecuación (4) llevará a resultados erróneos. Para este punto se propone la implementación de un programa que calcule y genere un gráfico de Retardo de Grupo para un sistema arbitrario, al estilo de lo mostrado en la Figura 4. Queda prohibido el uso de comandos o métodos que resuelvan el problema directamente<sup>3</sup>. Ensaye el programa para diferentes tipos de filtro, tome nota de los resultados y enumere las conclusiones más importantes.

## Transformada de Fourier de tiempo corto (STFT)

La transformada de Fourier no brinda información en lo referente al tiempo en que ocurren los eventos en la señal. En algunos casos esto puede ser una desventaja, ya que aparte de conocer el contenido armónico de una señal, se puede estar interesado en los momentos específicos en los que la señal experimenta cambios. A manera de ejemplo, considérese la siguiente secuencia de código:

---

<sup>3</sup>Como el `grpdelay` de Matlab

```

1 - clear all; close all; clc;
2
3
4 - t = 0:500;
5
6 - x1 = 2.*sin(2*pi*(1/4).*t);
7 - x2 = 0.5.*sin(2*pi*(1/10).*t);
8 - x3 = sin(2*pi*(1/3).*t);
9
10 - x = [x1 x2 x3];
11

```

Figura 5: Combinación de tres tonos en una única señal.

Como puede verse, la señal  $x$  está compuesta por tres tonos distintos, con diferentes frecuencias ( $1/4$ ,  $1/10$  y  $1/3$ ). Cada uno de esos tonos aparece en diferentes momentos en la señal. Sin embargo, una transformada de Fourier tradicional (*fft*) arroja los resultados mostrados en la figura 6.

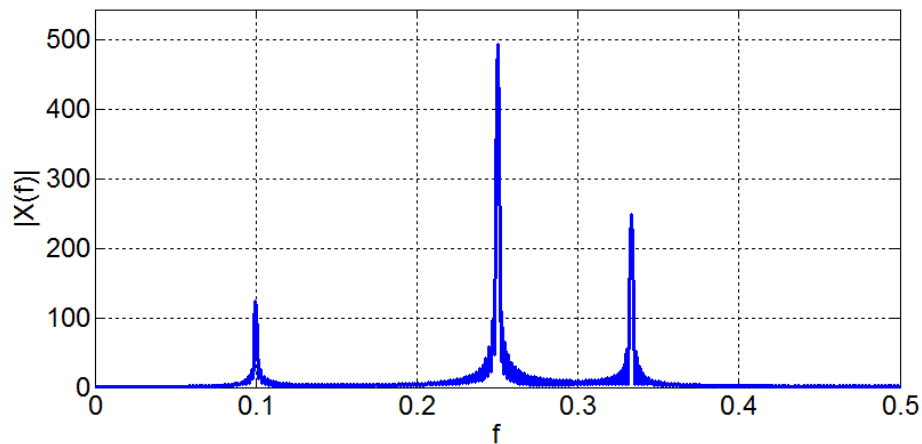


Figura 6: Espectro de Magnitud de la señal  $x$ .

En algunos casos se requiere de una herramienta que muestre no solo el contenido espectral, sino el momento en que cada uno de los armónicos aparece. Dicha herramienta es referida comúnmente como *STFT* y la representación de los resultados obtenidos se conoce como *Espectrograma*. Un espectrograma es un gráfico que en un eje muestra la variable de tiempo, en el otro eje se muestra la frecuencia, y la amplitud de la señal se representa por medio de color o de profundidad (gráfico en tres dimensiones).

La Figura 7 muestra una representación del espectrograma en tres dimensiones para la señal  $x$  que se generó con el código de la Figura 5. Como puede



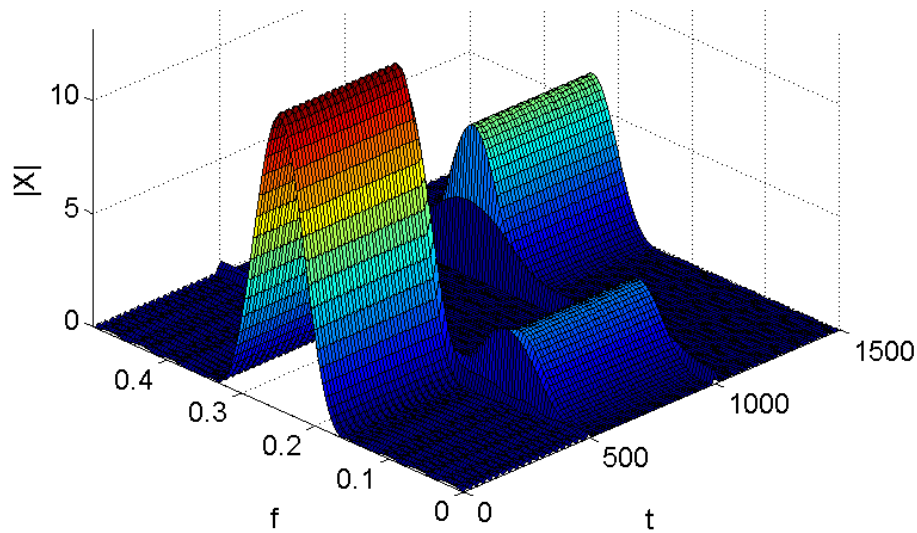


Figura 7: Espectrograma de la señal  $x$ .

verse, el espectrograma condensa la información de contenido espectral, amplitud relativa de los componentes y tiempos de aparición de cada armónico en un solo gráfico.

Investigue sobre la forma de crear espectrogramas en Matlab. Escriba un programa que represente de forma gráfica dichos espectrogramas y ensáyelo con diferentes señales (una de dichas señales puede ser la  $x$  creada en la Figura 5). Tome nota de ls resultados y enumere las conclusiones más relevantes. Investigue sobre la transformada *Wavelet* ( $WDT$ ) y enumere las principales diferencias con respecto a la  $STFT$ .

Fecha de entrega: