

Percolación de nodos en redes cuadradas 2d

A. Rabinovich

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires,
Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.*

(Dated: May 2, 2017)

A partir de simulaciones numéricas con redes finitas fue posible reconstruir el comportamiento de las propiedades de una red de nodos bidimensional. Ésta red percola siguiendo una transición de fase de 2° orden y sus propiedades son gobernadas por leyes de potencias y exponentes críticos. Se observó un cambio de fase para p cercano al p_c tabulado y fue posible además obtener valores de los exponentes críticos en coincidencia con los teóricos. Finalmente, se estudió el proceso de renormalización basado en la universalidad de las leyes de potencias en redes de tamaño finito en un entorno de la transición.

I. INTRODUCCIÓN

La teoría de percolación es una teoría de transporte y conectividad en sistemas geométricos complejos. Desde hace varios años ésta teoría ha sido utilizada para modelar sistemas desordenados, como propagación de incendios forestales, pozos petrolíferos y difusión en medios desordenados, con resultados que pueden ser obtenidos por medio de relaciones algebraicas simples.

Una transición de percolación está caracterizada por un conjunto de exponentes críticos que describen las propiedades de percolación del medio, teniendo en cuenta únicamente el modelo de percolación y la dimensión del espacio, sin que éstas propiedades dependan de detalles microscópicos de las estructuras consideradas. [1][2][3]

II. EL MODELO

El modelo teórico de percolación se formula de la siguiente manera. Sea una red periódica infinita, donde cada uno de sus sitios puede estar ocupado con probabilidad p o vacío con probabilidad $1 - p$. Dos sitios se consideran conectados si son primeros vecinos. Todos los sitios conectados ya sea directamente o a través de una cadena de sitios conectados, pertenecen al mismo grupo o cluster.

La teoría de percolación entonces analiza el número y las propiedades de los clusters de una red.[1][2][3]

A. Transición de fase

El problema de percolación requiere encontrar el valor de probabilidad de ocupación crítico p_c para el cual se forma un cluster infinito, o dicho de otra forma, el valor de p_c para el cual el sistema comienza a percolar. Éste es un ejemplo de una transición de fase (o de fenómeno crítico) de segundo orden y mucha de las propiedades del sistema pueden ser descritas de forma sencilla cerca de la transición.

B. Leyes de potencia y exponentes críticos

Se puede demostrar que para $p = p_c$, se verifica la siguiente relación:

$$n_s(p_c) \sim s^{-\tau} \quad (1)$$

Con n_s la cantidad por sitio de un cluster de tamaño s . El exponente τ se conoce como exponente de Fisher y es un ejemplo de los llamados exponentes críticos, que controlan las propiedades del sistema cerca de la transición de fase, a través de una ley de potencias.

Otras propiedades del sistema que pueden expresarse como leyes de potencias para valores de p cerca de la transición, es decir, tales que $0 < |p - p_c| \ll 1$, son:

$$P \sim (p - p_c)^\beta \quad (2)$$

Con P la fracción de sitios pertenecientes al cluster percolante.

$$S(p) \sim (p - p_c)^{-\gamma} \quad (3)$$

Con S el tamaño medio de los clusters.

$$\xi \sim (p - p_c)^{-\nu} \quad (4)$$

Con ξ la longitud de correlación y se define como la distancia promedio de dos sitios que pertenecen al mismo cluster. Ésta longitud es entonces el radio de los clusters que contribuyen principalmente a las divergencias de las propiedades del sistema cercano a la transición.

Para valores de p cercanos a p_c , la ecuación 1 puede reescribirse como:

$$n_s(p) = q_0 s^{-\tau} f(z) \quad , \quad z = s^\sigma (p - p_c) \quad (5)$$

Donde σ es un nuevo exponente crítico que puede relacionarse con los otros mediante:

$$\sigma = \frac{(\tau - 2)}{\beta} \quad (6)$$

Estas relaciones que permiten obtener un exponente crítico como función de otros exponentes críticos se conocen como leyes de escala y son fundamentales en la teoría de fenómenos críticos.

La Tabla I resume las principales leyes de potencia obtenidas en la literatura para redes percolantes.[1][2][3][4]

TABLE I: Valores teóricos hallados en la literatura.

Símbolo	Ley	Valor
d	—	$d = 2$
D	$M \sim L^D$	$D = 91/48$
ν	$\xi \sim p - p_c ^{-\nu}$	$\nu = 4/3$
τ	$n(p_c) \sim s^{-\tau}$	$\tau = 1 + d/D$
σ	$z = s^\sigma (p - p_c)$	$\sigma = (\nu D)^{-1}$
α	$m_0(p) \sim p - p_c ^{2-\alpha}$	$\alpha = 2 - (\tau - 1)/\sigma$
β	$m_1(p) \sim (p - p_c)^\beta$	$\beta = \nu(d - D)$
γ	$m_2(p) \sim p - p_c ^{-\gamma}$	$\gamma = (3 - \tau)/\sigma$

C. Efectos de red finita

El comportamiento de las redes de tamaño finito (redes cuadradas de lado L) se aparta de aquel esperado para sistemas infinitos. Para escalas de longitud mucho menores a ξ , es posible ignorar la existencia de ξ finito y el comportamiento del sistema es por lo tanto similar al que se obtendría para ξ infinito. Es decir, en ausencia de una "longitud de referencia", las propiedades relevantes del sistema se comportan como leyes de potencias. Si una cantidad X escala como $|p - p_c|^{-x}$ para $L \gg \xi$, entonces obedece una ley general dada por:

$$X(L, \xi) \propto \xi^{\frac{x}{\nu}} \quad \text{si } L \gg \xi \quad (7)$$

$$X(L, \xi) \propto L^{\frac{x}{\nu}} \quad \text{si } L \ll \xi \quad (8)$$

Por ejemplo, la masa M del cluster percolante escala como:

$$M \propto L^D \quad \text{si } L \ll \xi \quad (9)$$

Donde D es una dimensión fractal.

D. Renormalización

Es posible explotar aún más el hecho de que cerca de la transición de fase el sistema se muestra libre de escalas. Todos los clusters o redes cuya longitud lineal sea menor que ξ son similares entre si en promedio. Por lo tanto, cerca de la transición, donde ξ se hace infinito, todas las redes o clusters son similares entre si. Se toma la mitad de un sistema cerca de la transición, ambos siguen siendo menores que ξ y se parecen en promedio. Si se

re-escala el sistema, deben seguir siendo válidas las leyes de potencia anteriores. Entonces, mediante un proceso de *renormalización* observaremos que la concentración p' de sitios ocupados en el sistema renormalizado será diferente a la concentración p de la red original. Solo para $p = p_c$ se tiene que $p' = p$. Para una red reescalada con constante b , se obtiene entonces que:

$$\xi' = \frac{\xi}{b} \quad (10)$$

y por lo tanto:

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu} \quad (11)$$

que es la ecuación básica de renormalización.

III. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Se desarrolló un programa en base al algoritmo de Hoshen-Kopelman para estudiar de forma numérica la teoría de percolación en redes bidimensionales.[5] Se estudiaron redes cuadradas bidimensionales de tamaño $L = 4, 16, 32, 64, 128, 256$. Los resultados de los distintos exponentes críticos obtenidos y los valores tabulados se observan en la tabla V.

IV. RESULTADOS

A. Determinación de p_c por diferentes métodos

Para determinar la probabilidad crítica P_c a partir de la cual el sistema comienza a percolar, se utilizaron diferentes métodos expuestos a continuación:

1. Método de bisección

Comenzando con $p = 0.5$ y una red aleatoria, se verifica si la red percola. En caso de que el sistema percole, se repuebla la red utilizando la misma semilla aleatoria con probabilidad $p = p - \frac{1}{4}$. En caso contrario, se repuebla la red con probabilidad $p = p + \frac{1}{4}$. Ésta operación se repite una cantidad n de veces sumando o restando $\frac{1}{2^k}$ con k el paso actual hasta obtener la precisión deseada. Para cada L estudiado se generaron 30000 realizaciones de redes aleatorias y se confeccionó un histograma, figura 1, de los valores P_c obtenidos en cada una de ellas. El valor de P_c se obtuvo entonces como el promedio de los P_c obtenidos en todas las realizaciones, como se observa en la tabla II.

2. Método de la mediana

Se tomaron 1000 intervalos de tamaño $\frac{1}{1000}$ para p , con $p \in [0, 1]$, y para cada p se calculó la fracción de sistemas

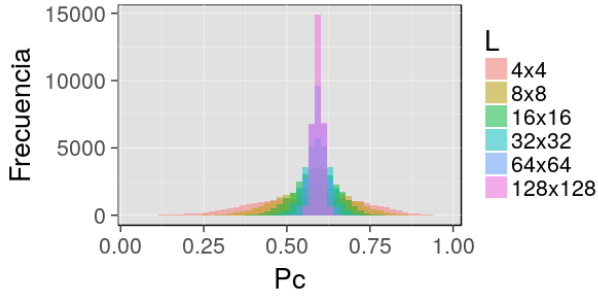


FIG. 1: Histogramas de probabilidades críticas en función del tamaño de la red cuadrada para 30000 realizaciones de la red.

TABLE II: Valores de P_c promedio para redes de tamaño L .

P_c	L
0.5 ± 0.1	4
0.5 ± 0.1	8
0.58 ± 0.06	16
0.59 ± 0.03	32
0.59 ± 0.02	64
0.59 ± 0.01	128

que percolaban para 10000 realizaciones de la red. La figura 2 muestra la fracción de sistemas percolantes en función de p para las distintas redes analizadas. El P_c se

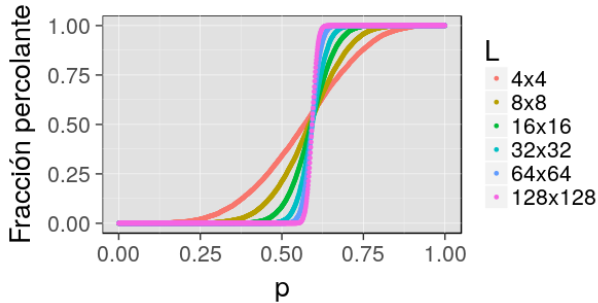


FIG. 2: Probabilidad acumulada en función del tamaño de la red cuadrada para 10000 realizaciones de la red para cada p .

calculó como la probabilidad p tal que al menos la mitad de los clusters percolan. Los resultados se observan en la tabla III.

En comparación con el método de la bisección, éste método permite obtener mayor precisión en la determinación del P_c .

3. Determinación de ν

Para obtener el exponente crítico ν , partiendo de la ecuación 4, se ajustó en un gráfico log-log de $(\langle P_c \rangle_l - \langle P_c \rangle_\infty) / \langle P_c \rangle_\infty$

TABLE III: Valores de P_c para redes de tamaño L .

P_c	L
0.569 ± 0.005	4
0.584 ± 0.004	8
0.590 ± 0.004	16
0.593 ± 0.004	32
0.592 ± 0.004	64
0.593 ± 0.004	128

en función del lado L de la red, donde $\langle P_c \rangle_\infty$ es el valor tabulado en [2] y $\langle P_c \rangle_l$ es el P_c obtenido con el método de bisección. La inversa de la pendiente de ésta recta es el exponente ν . La figura 3 muestra el ajuste realizado para redes de tamaño $L = 40, 50, 64, 70, 80, 90, 100, 128, 200$. Se encontró mediante

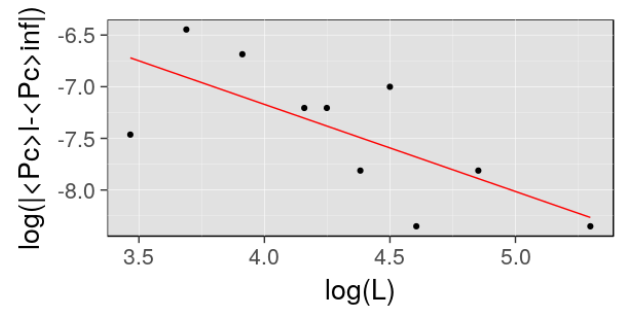


FIG. 3: Gráfico log-log de $(\langle P_c \rangle_l - \langle P_c \rangle_\infty) / \langle P_c \rangle_\infty$ en función del lado L de la red. En rojo el ajuste lineal.

éste método $\nu = 1.18 \pm 0.04$ en buena coincidencia con el valor tabulado de $\nu = 1.33 \pm 0.05$.

4. Determinación de P_c a partir del ajuste de la distribución de fragmentos

Para las redes de $L = 16, 32, 64, 128$ se calculó la distribución de fragmentos n_s en función de s para $p \in [0.5, 0.6]$ con intervalos $\Delta p = \frac{1}{4000}$. A partir de la ecuación 1, para cada uno de los p se realizaron 1000 redes y en un gráfico log-log se ajustó por medio de una función lineal la distribución. Para cada red se obtuvo el p con máximo valor de R^2 y se promediaron luego para todas las redes. La tabla IV muestra los valores obtenidos.

TABLE IV: Valores de P_c para redes de tamaño L .

P_c	L
0.594 ± 0.004	16
0.595 ± 0.003	32
0.594 ± 0.003	64
0.594 ± 0.003	128

Se observa que coinciden con los valores obtenidos mediante los métodos anteriores dentro del error.

B. Intensidad del cluster percolante P_c

Se tomaron 1000 intervalos de tamaño $\frac{1}{1000}$ para p , con $p \in [0, 1]$, y para cada p se calculó la intensidad del cluster percolante P para 1000 realizaciones de la red. La figura 4 muestra la intensidad P para redes de distinto L . A partir de la ecuación 2 se ajustó un gráfico log-log P en función de $\epsilon = (p - (p_c)_\infty)/(p_c)_\infty$ por medio de una función lineal para la red $L = 128$ y se obtuvo un coeficiente $\beta = 0.14 \pm 0.02$ en concordancia con los valores tabulados.

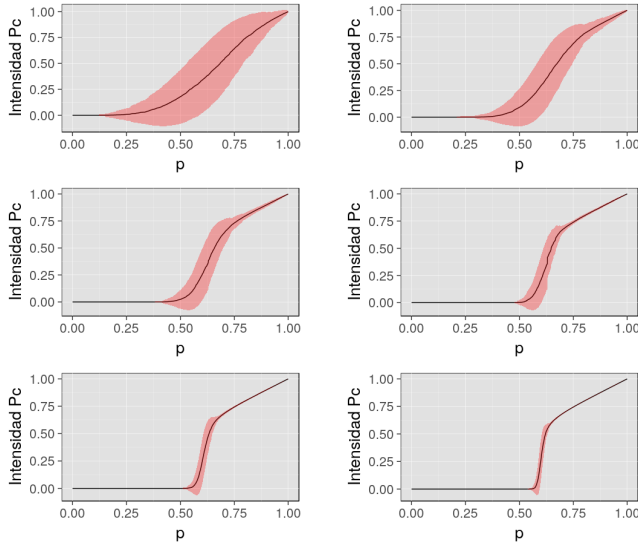


FIG. 4: Intensidad del cluster percolante en función de p y del tamaño de la red cuadrada para 1000 realizaciones de la red.

C. Determinación de la dimensión fractal D

Para determinar la dimensión fractal se tomó $p = (p_c)_\infty$ y se midió la masa M del cluster percolante en función de $L = 4, \dots, 128$. La figura 5 muestra en escala logarítmica la masa del cluster percolante como función de L . La recta de ajuste permitió obtener un valor de $D = 1.840 \pm 0.001$ con un valor de $R^2 = 0.9999$, similar al valor tabulado de $D = 1.89$.

D. Hipótesis de scaling

Para encontrar la forma cualitativa de la función de scaling $f(z)$, se obtuvo n_s en función de $p \in [0, 1]$ para una red de $L = 64$. Utilizando $\tau = 1.74$ y $q_0 = \exp(-4)$ encontrados en la sección IV A 4, se obtuvo $(n_s)_c$. Para

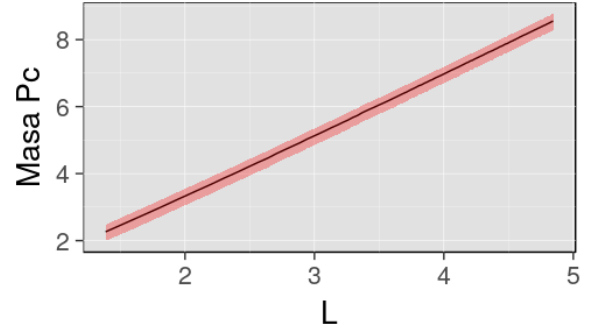


FIG. 5: Masa del cluster percolante P_c en función del tamaño de la red cuadrada en escala logarítmica para 10000 realizaciones de la red y recta de ajuste.

el cálculo de $z = s^\sigma \epsilon$, se utilizó $\sigma_\infty = 36/91$. A partir de la ecuación 5, se graficó entonces $\frac{n_s}{(n_s)_c}$ en función de z para aquellos fragmentos que cumplieran que $0.01 < \frac{s}{s_0} < 0.12$ con s_0 el tamaño del cluster percolante. La

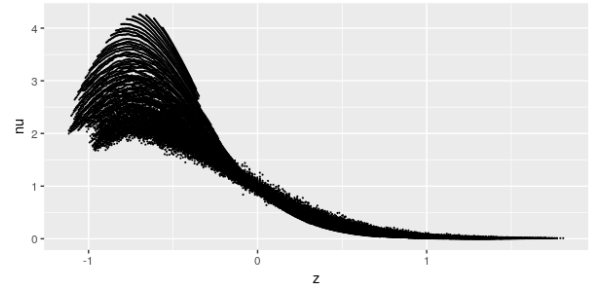


FIG. 6: Función de scaling $f(z)$

figura 6 muestra la forma cualitativa de la función de scaling.

E. Exponente σ

Para cada valor de s tal que $1 < s < 16$, graficamos n_s en función de $\epsilon = \frac{(p - p_c)}{p_c}$, figura 7, obteniendo la $p_{max}(s)$ que maximiza la producción de fragmentos de tamaño s . Ajustando luego el gráfico log-log de $p_{max} - p_c$ en función de s por una recta, como se observa en la figura 8, se obtuvo un valor de $\sigma = 0.386 \pm 0.005$, cercano al valor tabulado de $\sigma = 0.395$.

F. γ -matching

Para una red de $L = 256$ y valores de $p \in [0.4, 0.7]$ se obtuvo el segundo momento de la distribución M_2 en función de ϵ , cómo se observa en la figura 9. Luego se encontró el máximo y a partir de ese punto se realizó un ajuste lineal hacia la derecha y hacia la izquierda de la curva, tomando distinta cantidad de puntos, en escala

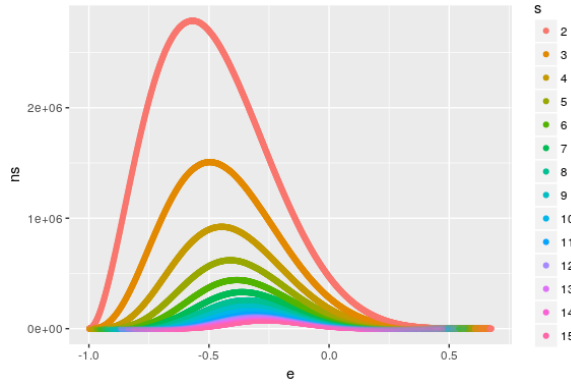


FIG. 7: n_s en función de $\epsilon = (p - p_c)/p_c$

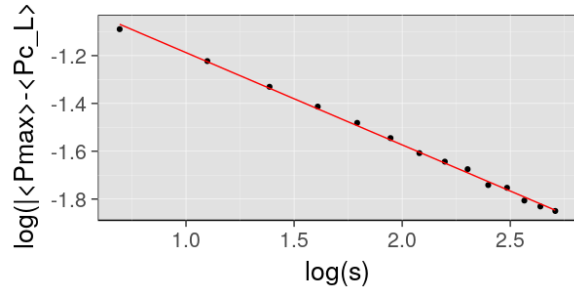


FIG. 8: $p_{max} - p_c$ en función de s en escala logarítmica y ajuste lineal

log-log. La pendiente de cada curva es un posible exponente γ , y aquel donde se intersecan los exponentes de los ϵ positivos y negativos puede ser considerado como γ . La figura 10 muestra los distintos valores de γ para los distintos ϵ , siendo $\gamma = 1.85$ donde se cruzan. Éste valor obtenido está lejos del tabulado, $\gamma_t = 2.38$. Se observó además que dependiendo del máximo que se utilice, se pueden obtener distintos valores de γ , por lo que éste método no serviría para calcular γ . Es posible que esto se deba a efectos de red finita, ya que el ϵ del máximo que se encuentra no es necesariamente el valor para el cual $M2$ diverge.

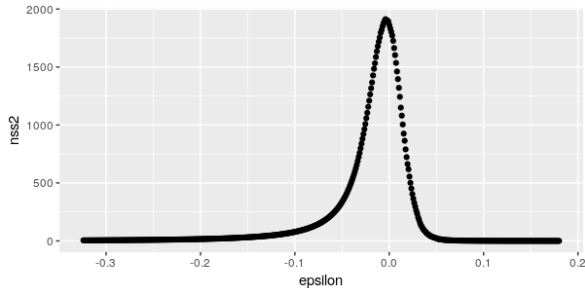


FIG. 9: n_s en función de $\epsilon = (p - p_c)/p_c$

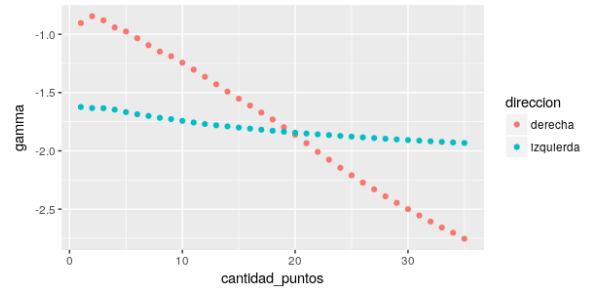


FIG. 10: $p_{max} - p_c$ en función de s en escala logarítmica y ajuste lineal

V. VERIFICACIÓN DE RESULTADOS POR RENORMALIZACIÓN

Podemos verificar, al menos de manera aproximada, los resultados de las secciones realizando un proceso de renormalización de *celda pequeña*. Consideramos una porción de red de lado $b = 2$ y la llamamos un *super-nodo*. Luego, se debe elegir una regla para renormalizar. Por ejemplo, utilizando mayoría simple. Si tres o cuatro de los cuatro nodos del super nodo está ocupado, diremos que el super nodo está ocupado. Si por el contrario, menos de tres nodos del super nodo están vacantes, diremos que el super nodo está vacante. Entonces, la probabilidad de ocupación p' del super nodo será:

$$4p^3(1 - p) + p^4 = p' \quad (12)$$

porque la probabilidad de encontrar tres nodos ocupados y uno vacío es $p^3(1 - p)$ y hay cuatro configuraciones posibles de tres nodos ocupados, mientras que la probabilidad de encontrar todos ocupados es p^4 .

Para $p = p_c$, vale que $p' = p$ y es por lo tanto un punto fijo (su valor no cambia frente a la renormalización). Las soluciones del polinomio son $p_1 = 1$ y $p_2 = 0.76$, ambas lejos del valor de $p_c = 0.5927$ tabulado. Sin embargo, un valor de $p > p_c$ era esperable, ya que los nuevos clusters serán más gruesos que los anteriores.

De ésta forma, a partir de reglas de renormalización y puntos fijos, es posible construirse nuevas redes cuyos exponentes críticos, en principio, serían similares a los originales.

VI. CONCLUSIONES

La Tabla V resume los resultados obtenidos para redes cuadradas de distinto tamaño y los compara con los valores tabulados hallados en la bibliografía. Se observa que en la mayor parte de los casos los resultados obtenidos se encuentran en concordancia con los tabulados, con excepción del valor de γ .

A partir de simulaciones numéricas con redes finitas fue posible reconstruir el comportamiento de las propiedades del sistema percolante gobernadas por leyes de potencias

TABLE V: Valores obtenidos mediante simulación y los correspondientes teóricos hallados en la literatura.

Símbolo	Ley	Valor Tabulado	Valor obtenido
d	—	$d = 2$	$d = 2$
D	$M \sim L^D$	$D = 1.89$	$D = 1.840 \pm 0.001$
ν	$\xi \sim p - p_c ^{-\nu}$	$\nu = 1.33$	$\nu = 1.18 \pm 0.04$
τ	$n(p_c) \sim s^{-\tau}$	$\tau = 2.05$	$\tau = 2.08 \pm 0.0005$
σ	$z = s^\sigma(p - p_c)$	$\sigma = 0.395$	$\sigma = 0.386 \pm 0.005$
β	$m_1(p) \sim (p - p_c)^\beta$	$\beta = 0.14$	$\beta = 0.14 \pm 0.02$
γ	$m_2(p) \sim p - p_c ^{-\gamma}$	$\gamma = 2.38$	$\gamma = 1.85$

y exponentes críticos. Se observó un cambio de fase para p cercano al p_c tabulado y fue posible además obtener valores de los exponentes críticos en coincidencia con los teóricos. Finalmente, se estudió el proceso de renormalización basado en la universalidad de las leyes de potencias en redes de tamaño finito en un entorno de la transición.

ACKNOWLEDGMENTS

A. Rabinovich es becario doctoral del CONICET. Los códigos fuentes en lenguaje C y el análisis de resultados en lenguaje R pueden encontrarse para su descarga en https://github.com/andresrabinovich/fisica_computacional

-
- [1] M. Levinshtein and B. Shklovskil, American Institute of Physics **42** (1976).
 - [2] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to percolation theory* (Taylor & Francis Inc, 2003) pp. 57–87.
 - [3] P.King and S.Havlin, .
 - [4] H. Nakanishi and H. Stanley, Physical Review B **22**, 2466 (1980).
 - [5] J. Hoshen and R. Kopelman, Physical Review B **14**, 3438 (1976).