# Percolación de nodos en redes cuadradas 2d

A. Rabinovich
*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.*
(Dated: April 28, 2017)

A partir de estudios computacionales hemos determinado el comportamiento crítico de una red de nodos bi-dimensional. Esta red percola siguiendo una transición de fase de 2° orden ....

**PACS numbers:** 45.70.Vn, 89.65.Lm

## I. INTRODUCCIÓN

Los primeros estudios en percolación se realizaron....

## II. EL MODELO

### A. Transición de fase

Cuando de varía la probabilidad de ocupación de los nodos de la red, se observa que ...

### B. Leyes de potencia y exponentes críticos

La Tabla I resume las principales leyes de potencia obtenidas en la literatura para redes percolantes...

TABLE I: Valores teóricos hallados en la literatura.

| Símbolo | Ley | Valor |
|---|---|---|
| $d$ | — | $d = 2$ |
| $D$ | $M \sim L^D$ | $D = 91/48$ |
| $\nu$ | $\xi \sim \vert p - p_c\vert^{-\nu}$ | $\nu = 4/3$ |
| $\tau$ | $n(p_c) \sim s^{-\tau}$ | $\tau = 1 + d/D$ |
| $\sigma$ | $z = s^\sigma (p - p_c)$ | $\sigma = (\nu D)^{-1}$ |
| $\alpha$ | $m_0(p) \sim \vert p - p_c\vert^{2-\alpha}$ | $\alpha = 2 - (\tau - 1)/\sigma$ |
| $\beta$ | $m_1(p) \sim (p - p_c)^\beta$ | $\beta = \nu(d - D)$ |
| $\gamma$ | $m_2(p) \sim \vert p - p_c\vert^{-\gamma}$ | $\gamma = (3 - \tau)/\sigma$ |

Observamos que los valores obtenidos en la Ref. [1] presentan...

### C. Efectos de red finita

El comportamiento de las redes de tamaño finito (redes cuadradas de lado $L$) se aparta de aquel esperado para sistemas infinitos. Esto se debe a que...

$$n_s(p) = q_0 \, s^{-\tau} \, f(z) \quad , \quad z = s^\sigma (p - p_c) \tag{1}$$

En la Ec. (1) ....

### D. Renormalización

Es posible explotar aún más el hecho de que cerca de la transición de fase el sistema se muestra libre de escalas. Si se *re-escala* el sistema, deben seguir siendo válidas las leyes de potencia anteriores. Entonces, mediante un proceso de *renormalización* observaremos que...

## III. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Se estudiaron redes cuadradas de tamaño $L = 4, 16, 32, 64, 128$ por medio del algoritmo de Hoshen-Kopelman [2].

$$M(L) = L^D \, m\left(\frac{L}{\xi}\right) \sim \begin{cases} L^D & \text{si} \;\; L < \xi \\ L^d & \text{si} \;\; L \gg \xi \end{cases} \tag{2}$$

## IV. RESULTADOS

### A. Determinación de $p_c$ por diferentes métodos

Se usaron distintos métodos para la determinación numérica del punto crítico...(*i.e.* búsqueda de $p_{\text{medio}}$, búsqueda de $p_{\text{mediana}}$, sintonizado de $n_s(p_c)$).

a)
b)
d)

Red cuadrada de 16x16: $P_c = 0.594 \pm 0.001$ Red cuadrada de 32x32: $P_c = 0.595 \pm 0.003$ Red cuadrada de 64x64: $P_c = 0.594 \pm 0.003$ Red cuadrada de 128x128: $P_c = 0.594 \pm 0.003$

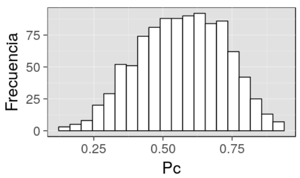
### B. Intensidad del cluster percolante $P_c$

### C. Determinación de la dimensión fractal $D$

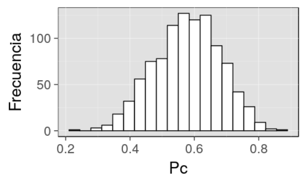
tau = 1.840750 +- 0.001758 R-squared: 0.9999

### D. Determinación de la dimensión fractal $D$

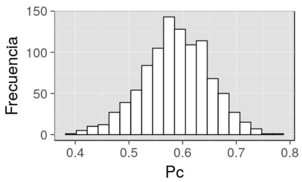
Según la Ec. 2 es posible hallar $D$ en el caso en que ....



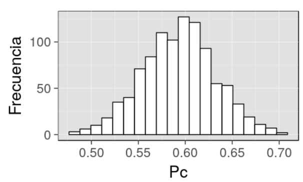

(a) Red cuadrada de 4x4: $\mu = 0.5669$ $\sigma = 0.1554$



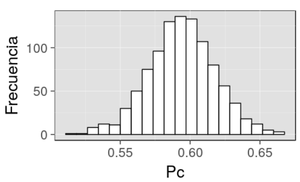

(b) Red cuadrada de 8x8: $\mu = 0.5779$ $\sigma = 0.1018$



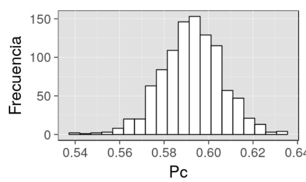

(c) Red cuadrada de 16x16: $\mu = 0.5876$ $\sigma = 0.0620$




(d) Red cuadrada de 32x32: $\mu = 0.5932$ $\sigma = 0.0390$

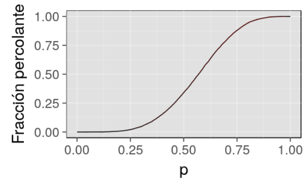



(e) Red cuadrada de 64x64: $\mu = 0.5940$ $\sigma = 0.0239$

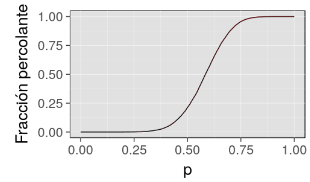



(f) Red cuadrada de 128x128: $\mu = 0.5924$ $\sigma = 0.0137$

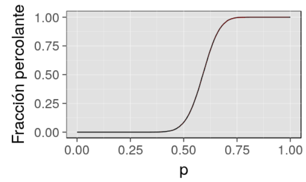
FIG. 1: Histogramas de probabilidades críticas en función del tamaño de la red cuadrada para 1000 realizaciones de la red.



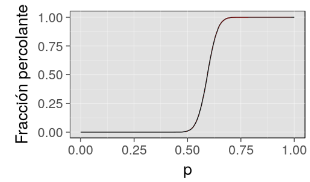

(a) Red cuadrada de 4x4: $P_c = 0.569 \pm 0.003$



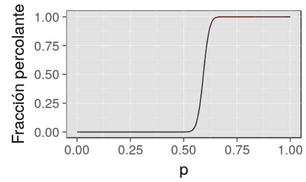

(b) Red cuadrada de 8x8: $P_c = 0.584 \pm 0.003$



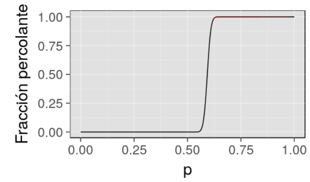

(c) Red cuadrada de 16x16: $P_c = 0.590 \pm 0.003$




(d) Red cuadrada de 32x32: $P_c = 0.593 \pm 0.003$




(e) Red cuadrada de 64x64: $P_c = 0.592 \pm 0.003$




(f) Red cuadrada de 128x128: $P_c = 0.593 \pm 0.003$

FIG. 2: Histogramas de probabilidades críticas en función del tamaño de la red cuadrada para 1000 realizaciones de la red.

### E. Obtención de $\beta$ a partir de la intensidad $P_\infty$

A partir de la información en el gráfico de $P_\infty(p)$ podemos hallar $\beta$ ...

### F. Espectro de fragmentos y verficación de la hipótesis de *scaling*

La hipótesis de *scaling* se presenta en la Ec. 1 en donde se observa que para distintos valores de $s$ y $p - p_c$, el espectro de fragmentos debe colapsar en una única curva $f(z) = n_s(p)/n_s(p_c)$, donde $z = s^\sigma(p - p_c)$....

En la Fig. 5 se observa que ...

En consecuencia, verificamos la hipótesis de *scaling* graficando $f(z)$ y determinando el punto $f_{\max} = f(z_{\max})$. Este valor se corresponde con una probabilidad $p_{\max}$ para un cada tamaño $s$ fijo. La ley de potencia con exponente $\sigma$ será entonces

$$\ln(p_{\max} - p_c) = -\sigma \ \ln(s) + \ln(z_{\max}) + C \qquad (3)$$

## V. VERIFICACIÓN DE RESULTADOS POR RENORMALIZACIÓN

Podemos verificar, al menos de manera aproximada, los resulados del las secciones realizando un proceso de renormalzación de *celda pequeña*. Consideramos un porción de red de lado $b = 2$ y la llamamos un *super-nodo*....

## VI. CONCLUSIONES

La Tabla.... resume los resulatados obtenidos. El sistema ....

## ACKNOWLEDGMENTS

A. Rabinovich es becario doctoral del CONICET.

[1] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to percolation theory* (Taylor & Francis Inc, 2003) pp. 57–87.

[2] J. Hoshen and R. Kopelman, Physical Review B **14**, 3438 (1976).

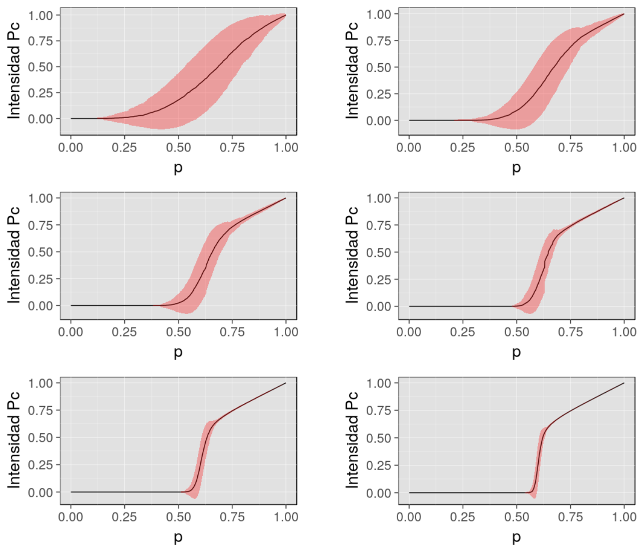



FIG. 3: Intensidad del cluster percolante en función de p y del tamaño de la red cuadrada para 1000 realizaciones de la red.

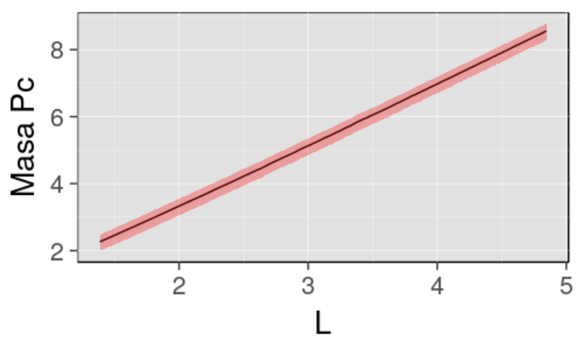



FIG. 4: Masa del cluster percolante $P_c$ en función del tamaño de la red cuadrada para 10000 realizaciones de la red.

FIG. 5: Distribución de fragmentos....