Actividad 6

Andrés Ignacio Rodríguez Mendoza

Introducción

La ecuación diferencial que describe el movimiento de un péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

se facilita considerando ángulos más pequeños que un radián, es decir, $\theta \ll 1$, por lo cual, $\sin\theta \approx \theta$. Reemplazando esto en la ecuación diferencial, queda,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Dadas las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $d\theta/dt(0) = 0$, la solución es,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

El movimiento es armónico simple, donde θ_0 es la semiamplitud de oscilación. El periodo del movimiento es,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Para amplitudes más grandes que la aproximación a ángulos pequeños, se puede calcular el periodo invirtiendo la ecuación de la velocidad angular,

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{l}{2g}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

e integrando sobre un ciclo completo,

$$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0),$$

o dos veces un medio ciclo,

$$T = 2t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0),$$

o cuatro veces un cuarto de ciclo,

$$T = 2t(\theta_0 \to 0),$$

que nos lleva a

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta.$$

Nótese que esta integral diverge como θ_0 se aproxime a la vertical. Así, con la energía adecuada, un péndulo en su máximo podría tomar un tiempo arbitrariamente largo para caer.

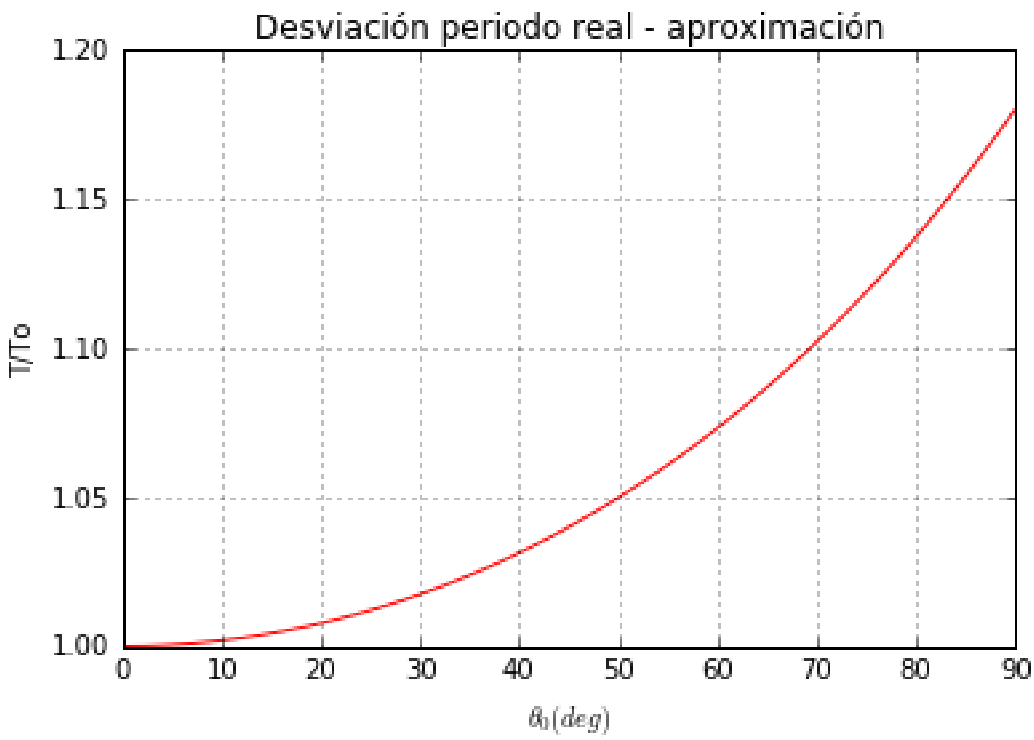
Para resolver numericamente esta integral se utiliza *Scipy.integrate.quad* para integrales definidas de la biblioteca de funciones *Scipy.integrate* en Python. Para mostrar que la integral diverge cuando el ángulo inicial tiene a π se resuelve la integral desde cero hasta π. Los resultados se comparan con el periodo de la aproximación a ángulos pequeños.

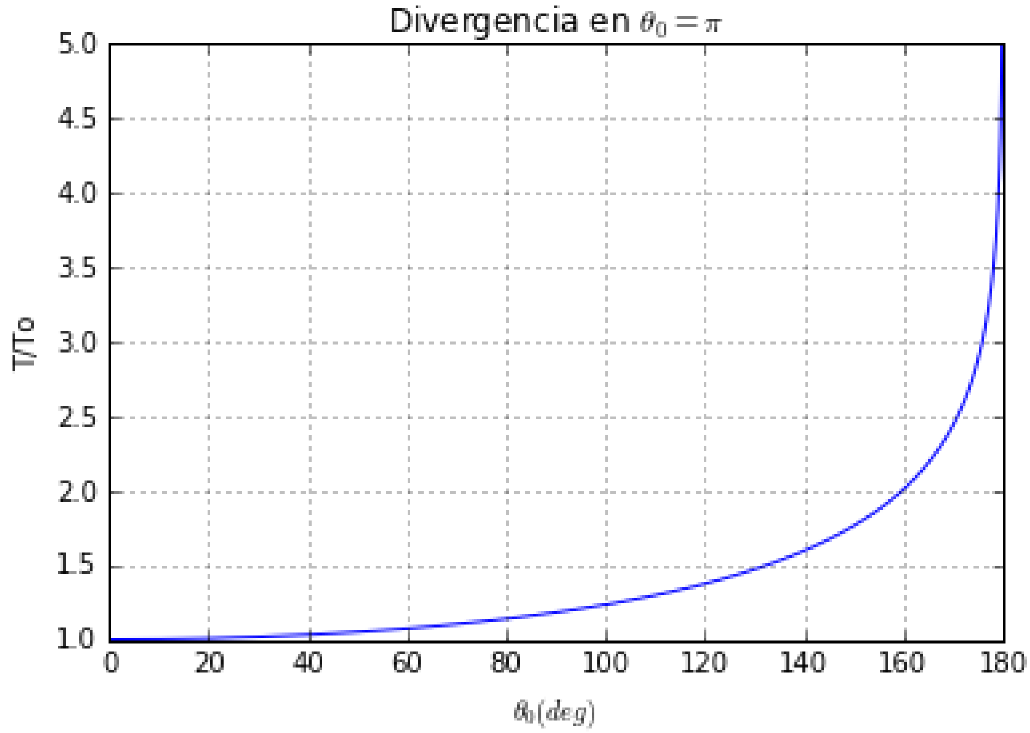
Código

```
import numpy as np
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt


n=1000

# Arreglos
x=[]
TT0=[]
x_0=np.linspace(0.001,np.pi + 0.001, n)



#   el integrando
I = lambda x,a: 1/np.sqrt(np.cos(x) - np.cos(a))


for i in range(n):
#   la integral
    theta_0=x_0[i]
    T , err= integrate.quad(I, 0, theta_0, args=(theta_0,))


#   el error
    TT0.append(np.sqrt(2)/np.pi * T)



#   Gráfica desviación
plt.figure(1)
plt.plot(x_0 * 180 / np.pi, TT0 , "r" )
plt.title('Desviación␣periodo␣real␣−␣aproximación')
plt.xlabel(r'$␣\theta␣_0␣(deg)$')
plt.ylabel("T/To")
plt.xlim(0,90)
plt.ylim(1,1.2)
plt.grid()


plt.show()


#   Gráfica divergencia
plt.figure(1)
```

```
plt.plot(x_0 * 180 / np.pi, TT0 , "b" )
plt.title('Divergencia en ' r'$\theta_0 = \pi$')
plt.xlabel(r'$ \theta _0 (deg)$')
plt.ylabel("T/To")
plt.xlim(0,180)
plt.ylim(1,5)
plt.grid()


plt.show()
```

Gráficas





Divergencia en $\theta_0 = \pi$
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
T/To
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
$\theta_0(deg)$