Prefacio

El presente documento es un texto guía en la resolución de ejercicios correspondiente a la materia de Cálculo en una Variable, en el mismo se encontrarán presentes múltiples dudas que los alumnos tienen al comenzar a resolver este tipo de ejercicios. Además, contiene un resúmen de definiciones, teoremas y propiedades básicas para la resolución de los mismos.

Este documento tiene el objetivo de que los alumnos aprendan como resolver todo tipo de ejercicios de esta materia, y además que tengan en consideración a esta materia pues el cálculo en una variable es algo simple y llamativo.

Definiciones previas

Definición

Dadas dos funciones f y g se definen las operaciones siguientes:

1. su **suma** como
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
2. su **diferencia** como
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
3. su **producto** como
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
4. su **cociente** como
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

Por ejemplo, demos dos funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Operemos un poco con estas dos funciones:

- Sumemos $f+g$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= x^2 + \frac{1}{x^2-1}\\ &= \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2-1}\end{aligned}$$

- Restemos $f-g$

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= x^2 - \frac{1}{x^2-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

- Multipliquemos ambas funciones

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= x^2 \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x^2}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

- Dividamos ambas funciones

$$\begin{aligned}(f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= x^2 \cdot (x^2 - 1) \\ &= x^4 - x^2\end{aligned}$$

Además, si quieren encontrar el domínio de la función obtenida solo deberían intersecar los dominios de las funciones con las que operaron. Por ejemplo sabemos que el domínio de la función $f(x) = x^2$ es $\mathbb{R}$ y de la función $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, ahora intersecando ambos dominios obtienen el domínio de la función $f \cdot g$ que es $\mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{-1, 1\}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Ejercicio 1

Determine el dominio de la función resultante

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $f \cdot g$
4. f/g
5. g/f

Ejemplo 1

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$. La función razíz cuadrada está definida de reales no negativos (reales positivos unión el cero) en reales no negativos, así de la función

f obtenemos una restricción que es $x \geq 0$, por ende el domínio de la función f es $[0;+\infty[$. Por otro lado, la función g es un polinómio, por lo cuál su domínio es todos los reales.

Ahora, para encontrar el domínio de la función $f+g$ debemos intersecar ambos domínios, es decir, que el domínio es $[0;+\infty[$.

Para la función $f-g$ es el mismo domínio, pues

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ &= f(x)-1*g(x).\end{aligned}$$

Al igual que para la suma y la diferencia, el domínio es el mismo pues

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= \sqrt{x}+(x^2-1)\\ &= x^2+\sqrt{x}-1\end{aligned}$$

Veamos que sucede en la multiplicación,

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= \sqrt{x}\left(x^2-1\right)\\ &= x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}\end{aligned}$$

como se puede apreciar el dominio es el mismo, pues la única condición que existe es la condición de la función Raíz Cuadrada.

Ahora, algo interesante pasa con la operación de cociente, notemos que $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2-1}$ y que su dominio no es $\mathbb{R}$ si no más bien $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

$$\begin{aligned}(f/g)(x) &= f(x)/g(x)\\ &= f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\\ &= \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\end{aligned}$$

Y su dominio es $(\mathbb{R}-\{-1,1\})\cap\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+-\{1\}$.

Como habeis observado generalmente, en la **suma, diferencia y multiplicación** para encontrar el dominio de la función resultante basta intersecar sus dominios. Por otro lado, en el **cociente** de funciones primero deben encontrar el dominio de la función $\frac{1}{g(x)}$ y luego proceder a intersecar sus dominios, pues como se vió en el ejemplo anterior, el cociente de funciones no es más que una multiplicación de funciones.

Definición:

1. Una función f se dice par cuando para cada x en el dominio de f

$$f(-x) = f(x)$$

2. Una función f se dice impar cuando para cada x en el dominio de f

$$f(-x) = -f(x)$$

Vemos algunos ejemplos de esto:

- $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ es una función par, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} \\ &= \frac{x^2}{x^2 - 1} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

- $\cos(x)$ es una función par, pues

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

- $g(x) = x$ es una función impar, pues

$$\begin{aligned} g(-x) &= -x \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

- $\sin(x)$ es una función impar, pues

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

- $h(x) = 3x^2 + 2x$ no es una función par ni impar, pues

$$\begin{aligned} h(-x) &= 3(-x)^2 + 2(-x) \\ &= 3x^2 - 2x \\ &\neq h(x). \end{aligned}$$

Definición:

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Teorema 1

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\log(f(x) \cdot g(x)) = \log(f(x)) \cdot \log(g(x))$
2. $\log(f(x)/g(x)) = \log(f(x)) - \log(g(x))$, si $g(x) \neq 0$.
3. $\log(f(x))^{g(x)} = g(x) \cdot \log(f(x))$

Capítulo 1

Límites

Límite de sucesiones

Definición 1

L se dice que es el límite de una sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N en los naturales tal que

$$\text{si } n > N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Ejercicio 2

Hallar los límites de las sucesiones

1. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$
2. $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n+1}, \ldots$
3. $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

Ejemplo 2

1. Veamos la expresión $x_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ en dos casos.

(a) Si n es par tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0.$$

(b) Si n es impar, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Notemos como $x_n = \frac{2n}{2n+1}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = 1.$$

3. Para esta sucesión veamos como son uno a uno sus términos:

$$\begin{array}{lcllcl}
a_1 & = & \sqrt{2} & = 2^{\frac{1}{2}} & & \\
a_2 & = & \sqrt{2\sqrt{2}} & = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}} & = & 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \\
a_3 & = & \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} & = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}} & = & 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} \\
\vdots & & & & & \\
a_n & = & 2^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}})} & & &
\end{array}$$

en donde la expresión

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

es una progresión geométrica, con lo cuál obtenemos que

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2(1-\frac{1}{2^n})},$$

y así se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{2}\cdot 2(1-\frac{1}{2^n})} = 2.$$

Teorema: Teorema del Sanduche

Sean f, g y $h(x)$ dos funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a), y además

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Ejercicio 3

Halle los límites de:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$.

Comencemos recordando que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Además, conocemos que el recorrido de la función Seno y Coseno es $[-1;1]$.

Ejemplo 3

1. Notemos a $x_n=\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$, ahora

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Llamemos x_n a la expresión $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$. Calculemos el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{n+3}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Notemos como x_n a a expresión $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Arhora,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \frac{1}{+\infty}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. Notemos como $x_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$. Ahora, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$; además sabemos que $n^2+1>0$, así $\frac{n}{n^2+1}>0$.
   Con lo cual se obtiene que

$$-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1},$$

   ahora tome límites a la desigualdad anterior y obtiene

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} \leq 0,$$

   por lo cuál $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} = 0.$

Límites de funciones

Definición 2

Sea f una función definida en algún intervalo que contenga a a, excepto posiblemente en en a mismo. El límite se define como

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

Ejercicio 4

Demostrar por la definición de límite que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Demostración. Aquí la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida en el punto $x = 2$.

Es necesario demostrar que, tomando un $\varepsilon > 0$ arbitrario encontraremos un $\delta > 0$ que cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| < \varepsilon, \tag{1.1}$$

con la condición que $|x-2| < \delta$. Pero para $x \neq 2$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} \left| \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4 \right| &= |(x+2)-4| \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Así pues, siendo ε arbitrario, y tomando $\delta = \varepsilon$ se cumplen las desigualdades (1) y (2).

Esto significa que el límite de $f(x)$ es 4, cuando $x \to 2$.

□

Teorema 2

Sean f_1 y f_2 dos funciones, si existen $\lim_{n\to+\infty} f_1(x)$ y $\lim_{n\to+\infty} f_2(x)$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\lim_{n\to+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{n\to+\infty} f_1(x) + \lim_{n\to+\infty} f_2(x)$
2. $\lim_{n\to+\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{n\to+\infty} f_1(x) \cdot \lim_{n\to+\infty} f_2(x)$
3. $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right] = \frac{\lim_{n\to+\infty} f_1(x)}{\lim_{n\to+\infty} f_2(x)}$ si $\lim_{n\to+\infty} f_2(x) \neq 0$.

Definición 3

Sea f una función, se dice que L es el límite al infinito cuando

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists R > 0)(|x| > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Ejercicio 5: Límite al infinito

Demostremos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Demostración. Como se puede observar

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

por lo cual podemos utilizar esto en el límite.

Ahora, necesitamos demostrar que siendo $\varepsilon > 0$ se cumplirá la desigualdad

$$\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right| < \varepsilon, \tag{1.3}$$

siempre que $|x| > N$, donde $N > 0$ depende de nuestro ε.

Operando la desigualdad (3) obtenemos que

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon,$$

que es lo mismo que

$$\begin{aligned} |x| &> \frac{1}{\varepsilon} \\ &= N. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Esto significa que $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$ □

Ejercicio 6

Encuentre los límites al infinito de las siguientes funciones:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Para resolver ejercicios de la forma $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0}$, podemos utilizar este pequeño truquito. Multiplicamos la función por $\dfrac{\frac{1}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}$ y así obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_mx^{m-n} + b_{m-1}x^{m-n-1} + \cdots + b_0x^{-n}} \\
&= \frac{a_n + 0 + \cdots + 0}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(b_mx^{m-n} + b_{m-1}x^{m-n-1} + \cdots + b_0x^{-n}\right)} \\
&= \frac{a_n}{b_m \lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n} + b_{m-1} \lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n-1} + \cdots + b_0 \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4

1. Denominemos $f(x)$ a la expresión $\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$, calculemos el límite

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2}} \\
&= \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0} \\
&= +\infty.
\end{aligned}
$$

2. Sea $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$, procedamos a calcular su límite al infinito.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^4}}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2-0-0}{\sqrt{1+0}}$$

$$= 0.$$

3. Llamemos $f(x)$ a la expresión $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Teorema 3

Si f es una función polinomial o una función racional y además a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Ejercicio 7

Calcule los límites:

1. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

Ejemplo 5

1. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} f(x) &= \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} \\
&= \frac{5^2 - 5\cdot 5 + 10}{5^2 - 25} \\
&= \frac{10}{0} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

2. Denominemos a la expresión $\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$ como $f(x)$. Así

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
&= -\lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(1+x+x^2)} \\
&= -\frac{(1+2)}{(1+1+1^2)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Límites por cambio de variable

Ejercicio 8

Calcule los límites de estas expresiones racionales:

1. $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Esta clase de ejercicios generalmente se los resuelve con un cambio de variable, por ejemplo si calculásemos el límite de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ cuando $x \to 0$.

Tomando como cambio de variable $1+x=y^6$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Nótese que, cuando hacemos un cambio de variable debemos evaluar el mismo cambio de variable para saber el límite que vamos a calcular, es decir, en el ejercicio anterior buscábamos calcular el ímite de $f(x)$ cuando $x\to 1$, ahora $1+0=y^6$ será donde vamos a calcular el límite con el cambio de variable.

Ejemplo 6

1. Denominemos como $f(x)$ a la expresión $\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$. Sea $x=y^6$ el cambio de variable, nótese que

$$\sqrt{x}=y^3 \quad \wedge \quad \sqrt[3]{x}=y^2.$$

Ahora, cuando $x\to 64$, $y\to 2$, luego tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 64} f(x) &= \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} \\
&= \lim_{y\to 2} \frac{y^3-8}{y^2-4} \\
&= \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)} \\
&= \lim_{y\to 2} \frac{(y^2+2y+4)}{(y+2)} \\
&= \frac{4+4+4}{4} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

2. Note que

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2}.$$

Ahora, tomemos e cambio de variable $x=y^3$, así $\sqrt[3]{x}=y$ y además cuando $x\to 1$, $y\to 1$. Así tenemos

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)^2}{(y^3-1)^2}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{1}{(y^2+y+1)^2}$$
$$= \frac{1}{9}.$$

Otra manera de calcular esta clase de límites es de alguna manera trasladar la expresión irracional del numerador al denominador o viceversa.

Por ejemplo, calculemos el límite siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 9

Hallar los límites de las siguientes expresiones:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

Ejemplo 7

1. Calculemos el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. Calculemos el límite $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)\left(\sqrt{x(x+a)}+x\right)}{\sqrt{x(x+a)}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}\\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

3. Resolvamos el límite $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\right)}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\\
&= \frac{1}{\infty}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Límites de funciones compuestas

Teorema 4

Sea $n\in\mathbb{Z}^+-\{0\}$ y si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es L, entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n=L^n.$$

Ejercicio 10

Calcule los siguientes límites utilizando la fórmula

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to0} \cot(2x)\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin(x)}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$
10. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x}$

Nótese que el resultado de $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ es muy fuerte, pues nos sirve para desarrollar cualquier límite con relaciones trigonométricas.

Ejemplo 8

1. Sabemos que para cualquier x en los reales

   $$-1 \leq \sin(x) \leq 1,$$

   como buscamos el límite cuando $x \to +\infty$, x debe ser un real positivo, así

   $$\frac{1}{x} > 0.$$

   Con lo cual obtenemos que

   $$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x},$$

   tomando límites a ambos lados

   $$0 = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

   así obtenemos que

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

2. Tomemos el cambio de variable $y = 3x$, así cuando $x \to 0$, $y \to 0$.

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{x} &= \lim_{y\to0} \frac{3\sin(y)}{y} \\ &= 3\lim_{y\to0} \frac{\sin(y)}{y} \\ &= 3\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x}{5\cdot 2x}\cdot\\ &= \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)}\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

4. Sea $n=\frac{\pi}{x}$ un cambio de variable, cuando $n\to+\infty$, $x\to 0$ con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin(x)}{x}\\ &= \pi\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos(x))}\\ &= 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. Tomando en cuenta que

$$\cot\left(\frac{\pi}{x}-x\right)=-\tan(x)\Rightarrow\cot(2x)=\frac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cot(2x)\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)}\cdot(-\tan(x))\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\cot^2(x)-1\right)\tan^2(x)\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(1-\tan^2(x)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x^3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\,(1-\cos(x))}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\,(1-\cos(x))}{x^3}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos^2(x))}{x^3\,(1-\cos^2(x))}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right]^3\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

8. Sea $y=\arcsin(x)$, así $x=\sin(y)$ ya demás cuando $x\to 0$, $y\to 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{y}{\sin(y)}\\
&= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y}}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x-1\to 0}\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-x}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\left(1+\sqrt{y+1}\right)\cos\dfrac{\pi}{2}(y+1)}{-y}\\
&= -\lim_{y\to 0}\frac{\left(1+\sqrt{y+1}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}{y}\\
&= -\lim_{y\to 0}\frac{\left(1+\sqrt{y+1}\right)\left(0-\sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)\right)}{y}\\
&= -\lim_{y\to 0}\left(1+\sqrt{y+1}\right)\left(\frac{-\sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)}{y}\right)\\
&= -\lim_{y\to 0}\left(1+\sqrt{y+1}\right)\left(\frac{-\sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)}{y}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= (1+\sqrt{0+1})\left(\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \pi.$$

10.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)}{x\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Teorema 5

Cuando deseen hallar límites de la forma

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\Psi(x)} = C, \tag{1.5}$$

deben tener en cuenta que:

1. Si existen límites finitos

   $$\lim_{x\to a}\varphi(x) = A \text{ y } \lim_{x\to a}\Psi(x) = B,$$

   se tiene que $C = A^B$.

2. Si $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ y $\lim\limits_{x\to a}\Psi(x) = \pm\infty$, el límite (1.5) se resuelve diréctamente.

3. Si $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A = 1$ y $\lim\limits_{x\to a}\Psi(x) = \infty$, se supone que $\varphi(x) = 1+\alpha(x)$, donde $\alpha(x)\to 0$, cuando $x\to a$ y por consiguiente,

   $$C = \lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\Psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\Psi(x)}.$$

Veamos un ejemplo de cada item:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x}$, es fácil ver que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \text{ y } \lim_{x\to 0}(1+x) = 1;$$

por consiguiente

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x} = 2^1 = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$, aquí tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \frac{1}{2} \text{ y } \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty,$$

así obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Ahora, como se indica en el teorema anterior hacemos una transformación al límite de la manera siguiente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{1-x}{1+x}-1\right)\right]^{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{1+x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}}\\ &= e^{-2}.\end{aligned}$$

Del teorema anterior podemos concluir que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}.$$

Ejercicio 11

Calcule los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{x^2}$

Ejemplo 9

1. Tomen en cuenta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{3-x}=\frac{2}{3}\ \text{y}\ \lim_{x\to 0}x=0,$$

sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}&=\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\\&=0.\end{aligned}$$

2. Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0\ \text{y}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=2,$$

tienen que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}&=(0)^2\\&=0.\end{aligned}$$

3. Tomen cuenta que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{2x^2+1}=\frac{1}{2}\ \text{y}\ \lim_{x\to\infty}x^2=+\infty,$$

tienen que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}$$
$$= 0.$$

4. Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+3} = 1 \text{ y } \lim_{x\to\infty} (x+2) = +\infty,$$

tienen que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x-1}{x+3} - 1\right)^{x+2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left\{\left[1 + \frac{-4}{x+3}\right]^{\frac{x+3}{-4}}\right\}^{\frac{-4(x+2)}{x+3}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} \\
&= e^{-4}.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} \left[(1+\sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}\right]^{\frac{\sin(x)}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}} \\
&= e.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{x^2} &= \lim_{x\to 0} (1+\cos(x)-1)^{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[1 + (\cos(x)-1)^{\frac{1}{\cos(x)-1}}\right]^{\frac{\cos(x)-1}{x^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Teorema 6

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y además es positivo, se tiene que

$$\lim_{x \to a} [\ln f(x)] = \ln\left[\lim_{x \to a} f(x)\right].$$

Por ejemplo, calculen que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Con propiedades de la función Logarítmica tienen que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \\
&= \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \\
&= \ln e \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 12

Halle los límites de:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)]$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ con $a > 0$.
5. $\lim\limits_{x \to \infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$ con $a > 0$.
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x}$

Para continuar con la resolución de esta clase de ejercicios necesitan revisar las propiedades de la función Logaritmo.

Ejemplo 10

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)] &= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\\ &= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right)\\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]\\ &= \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{e}{e^{-1}}\right]\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(e^2\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\\ &= \ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right], \quad \text{por el item 6 del ejercicio 11 obtenemos}\\ &= \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Tomando el cambio de variable $y = a^x - 1$ tienen que $x = \frac{\ln(y+1)}{a}$, y además cuando $x \to 0$, $y \to 0$.

Así

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\\
&= \frac{\ln a}{\ln e}\\
&= \ln a.
\end{aligned}$$

5. Tomando el cambio de variable $y=\frac{1}{n}$ se tiene que $n=\frac{1}{y}$ y además cuando $n\to\infty$, $y\to 0$.

Así

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(a^y-1\right)\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}, \qquad \text{por el problema anterior se tiene que}\\
&= \ln a.
\end{aligned}$$

6. Conocen que

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

así

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xe^x}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^2\right)^x-1}{x}\cdot e^{-x}, \qquad \text{por el problema 4 se tiene que}\\
&= \frac{1}{2}\ln 2^2\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Infinitésimos e infinitos

Definición 4: Infinitésimos

Si
$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,$$
que por definición de límite es lo mismo decir que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |f(x)| < \varepsilon, \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta,$$

se dice que la función es infinitamente pequeña o infinitésima cuando $x \to a$. De forma análoga se determina la función infinitésima $f(x)$, cuando $x \to \infty$.

La suma y el producto de un número finito de infinitésimos, cuando $x \to a$, es también un infinitésimo cuando $x \to a$.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos cuando $x \to a$ y
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C,$$
donde C es real diferente de cero, llamamos a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ infinitésimas de un mismo orden o del mismo orden; si $C = 0$, se dice que $f(x)$ es infinitésima de orden superior con respecto a $g(x)$. La función $f(x)$ se denomina infinitésima de orden n con respecto a $g(x)$, si
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = C,$$
en donde $0 < |C| < +\infty$.

Si
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$
a $f(x)$ y $g(x)$ se las llama funciones equivalentes cuando $x \to a$;

$$f(x) \sim g(x).$$

Por ejemplo, si $x \to 0$ tenemos que:

$$\sin x \sim x,$$
$$\tan x \sim x,$$
$$\log x \sim x.$$

Teorema 7

La suma de dos infinitésimos de orden distinto, equivale al sumando cuyo orden es inferior.

El límite de la razón de dos infinitésimos no se altera, si los términos de la misma se sustituyen por otros cuyos valores respectivos son equivalentes.

Lo que nos quiere decir el teorema anterior es que, cuando deseen calcular el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

si $f(x)\to 0$ y $g(x)\to 0$, cuando $x\to a$. Pueden restarle o sumarle al denominador y numerador infinitésimos de orden superior, elegidos de tal forma, que las funciones obtenidas tanto en el numerador como en el denominador sean equivalentes a las anteriores.

Ejemplo 11

Calculen el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}.$$

Noten que, cuando $x\to 0$ se tiene que

$$\sqrt[3]{x^3+2x^4}\sim\sqrt[3]{x^3}$$

y

$$\ln(1+2x)\sim 2x.$$

Así tienen que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 13

Determine el orden infinitesimal, cuando $x \to 0$ de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{2x}{1+x}$,
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$,
3. $f(x) = \tan(x) - \sin(x)$.

Ejemplo 12

1. Sea $f(x) = \frac{2x}{1+x}$, se tiene que

$$\frac{\frac{2x}{1+x}}{x^n} = \frac{2x}{(1+x)x^n} = 2,$$

cuando $x \to 0$ $1 + x \to 1$, entonces

$$\frac{2x}{x^n} = 2,$$

lo que implica que

$$x = x^n$$

y obtenemos que $n = 1$.

2. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$, obtienen que

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}}}{x^n} = 1 \Rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}\left(1 - x^{\frac{5}{6}}\right)}{x^n} = 1,$$

cuando $x \to 0,\ 1 - x^{\frac{5}{6}} \to 1$. Entonces tienen que

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^n} = 1 \Rightarrow n = \frac{2}{3}.$$

3. Tienen que

$$\frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^n} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2(x)}}{x^n} = 1.$$

Cuando $x \to 0$, $\sqrt{1-\sin^2(x)} \to 1-\sin^2(x)$, así

$$\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^n} = \frac{\tan(x)\cdot\sin^2(x)}{x^n} = \frac{\sin^3(x)}{x^n\cos(x)}.$$

Ahora, cuando $x \to 0$, $\sin(x) \to 0$ y $\cos(x) \to 1$, lo que implica que

$$n = 3.$$

Definición 5: Infinitos

Si para un número real positivo grande M, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x-a| < \delta$ se verifica que

$$|f(x)| > M,$$

a la función $f(x)$ se la llama infinita cuando $x \to a$. De manera análoga, $f(x)$ se dice que es infinita cuando $x \to \infty$.

El teorema planteado para los infinitésimos también se cumple para los infinitos.

Ejercicio 14

Demostrar que la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ es infinitamente pequeña, cuando $x \to \infty$. Si $\varepsilon > 0$, ¿para qué valores de x se cumple la desigualdad $|f(x)| < \varepsilon$?

Demostración. Debemos demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

pero conocen que

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0,$$

además que

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

de lo que podemos concluir que

$$-\frac{1}{x} \leq \sin x \leq \frac{1}{x}.$$

Ahora por el Teorema del Sanduche obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

lo que implica que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ es infinitamente pequeña cuando $x \to \infty$.

Veamos para que valores se cumple la desigualdad

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, como

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon,$$

de donde

$$|x| > \frac{1}{x}.$$

□

Ejercicio 15

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\cdot\sin(5x)}{(x-x^3)^2}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$.

Tenga en cuenta que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1;$$

y cuando $x \to 0$, $\ln x \to x$.

Ejemplo 13

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\cdot\sin(5x)}{(x-x^3)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\cdot\sin(5x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5\sin(5x)}{5x}\end{aligned}$$

$$= 15.$$

2. Cuando $x \to 1$, $1 - x \to x$. Tienen que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} &= \lim_{x\to 1} \frac{x}{-x} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Ahora, vamos a demostrar la equivalencia de algunas funciones.

Ejercicio 16

Demuestre que cuando $x \to 0$, las siguientes expresiones sone quivalentes:

1. $\frac{x}{2} \approx \sqrt{1+x} - 1$.
2. $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.
3. $(1+x)^n \approx 1 + nx$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 14

1. Para que ambas funciones sean equivalentes se debe probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x}-1} = 1,$$

es decir, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = 2.$$

Ambas funciones son equivalentes pues

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x} \\ &= 2.\end{aligned}$$

También pueden observar que lo demostrado anteriormente implica que

$$1 + \frac{x}{2} \approx \sqrt{1+x}.$$

2. Para probar que son equivalentes deben probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1-x} = 1.$$

   Pero, el límite anterior es lo mismo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x^2} = 1.$$

3. De manera similar, para probar que son equivalentes se debe probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n}{1+nx} = 1,$$

   pero es fácil ver que se sigue el resultado.

En el siguiente ejercicio van a demostrar un resultado importante para límites de polinomios cuando $x \to \infty$.

Ejercicio 17

Demuestre que, cuando $x \to \infty$, el polinomio entero

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad \text{con } a_n \neq 0$$

es una magnitud infinitésima, y equivale al término superior $a_n x^n$.

Demostración. Para demostrar que son equivalentes debemos probar que se cumple el límite siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{a_n x^n} = 1.$$

Así, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{a_n x^n} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) \\
&= 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado el resultado. $\square$

Continuidad

Definición 6

f se dice continua en $x = a$ si

1. La función f está determinada en $x = a$
2. existe, y es finito el límite
$$\lim_{x\to a} f(x),$$
3. y
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f es continua en A, si y solo si para f es continua en todo a elemento de A.

Ejercicio 18

Demostrar que la función $y = \sin(x)$ es continua en todos los reales.

Recuerden que, tanto la función Seno como Coseno tiene su recorrido en el itnervalo $[-1;1]$.

Demostración. Veamos a que equivale un incremento infinitésimo en la función, es decir, supongamos que $\Delta x \to 0$ y veamos que sucede con Δy.

Así, tienen que

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin(x+\Delta x) - \sin(x)\\ &= 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x.$$

Aplicando límites obtienen que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

pues

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1.$$

De lo cual podemos concluir que la función $y = \sin(x)$ es continua en cualquier $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Definición 7

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, se dice que x_0 es un punto de discontinuidad si los números $f(x_0)$, $f(x_o^-)$ y $f(x_o^+)$ son diferentes.

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$, calculen los límites por la izquierda y por la derecha en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ahora, noten que $f(0)$ no existe, con lo cual $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

Teorema 8

Sean $f_1, f_2 : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $a \in A$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $f_1 + f_2$ es continua en a.
2. $f_1 \cdot f_2$ es continua en a.
3. f_1/f_2 es continua en a si $f_2(a) \neq 0$.

Este resultado se puede ampliar a un número finito de funciones continuas.

Teorema 9

La composición de funciones continua dá como resultado una función continua.

Ejercicio 19

Prueben si las siguientes funciones son continuas o no:

1. $f(x)\frac{\sin x}{|x|}$
2. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$
3. ¿Qué debe valer a para que el siguiente función sea continua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , \text{si } x \neg 2 \\ a & , \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Recuerden que

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ejemplo 15

1. Noten que $f(0)$ no existe. Ahora calculen los límites por la izquierda y por la derecha de $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \\ &= 1 \\ &\neq -1 \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} \end{aligned}$$

Que no es igual a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Por lo cual la función $f(x)$ es discontinua en $x = 0$.

2. Noten que el domínio de la función f es $[-1;1]$.

   Sea $a \in [-1;1]$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} 1 - \sqrt{1-x^2} &= 1 - \lim_{x\to a} \sqrt{1-x^2} \\ &= 1 - \sqrt{\lim_{x\to a} 1 - x^2} \\ &= 1 - \sqrt{1-a^2} \\ &= f(a).\end{aligned}$$

   Por lo cual la función es continua en $[-1;1]$.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} (x+2) \\ &= 4\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} (x+2) \\ &= 4\end{aligned}$$

   Ahora,

$$f(2^+) = f(2^-) = f(2) = a,$$

   con lo cual para que f sea continua, $a = 4$.

panel

Diferenciación y derivación

Definición 8

La derivada $f'(x)$ se encuentra definida por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si el límite anterior existe. El número $f'(x)$ es llamado la derivada de f en X.

Comencemos probando las derivadas de algunas funciones ya conocidas.

Ejercicio 20

Calcule las derivadas de las funciones:

1. $f(x) = x^n$
2. $f(x) = \sin(x)$
3. $f(x) = |x|$

Recordemos que, para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sin(y) - \sin(x) = \cos\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right).$$

Tambien recordemos que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ejemplo 16

1.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\right) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

3.
$$f(x) = \sin(x).$$