

CUADERNOS DE MATEMÁTICA
DE LA ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GERMÁN ROJAS

CÁLCULO EN UNA VARIABLE

Cálculo Integral



Cuaderno de Matemática No. 2

CÁLCULO EN UNA VARIABLE: CÁLCULO INTEGRAL

GERMÁN ROJAS I.

Responsable de la Edición: Juan Carlos Trujillo

Revisión técnica: Alejandro Araujo y Rolando Sáenz

Asistentes: David Yánez, Maribel Montenegro

Portada: Byron Reascos

Registro de derecho autoral No. 34994

ISBN: 978-9978-383-02-5

Publicado por la Unidad de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Escuela
Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

© Escuela Politécnica Nacional 2010

Tabla de contenidos

1	La integral indefinida	1
1.1	Primitivas e integral indefinida	1
1.1.1	Ejercicios	4
1.2	La diferencial y la integral indefinida	4
1.2.1	Ejercicios	5
1.3	Cambios de variable en integrales indefinidas	5
1.4	Cálculo de integrales mediante el uso de tablas	7
1.4.1	Ejercicios	10
1.5	Integrales de potencias de sen y cos	10
1.5.1	Ejercicios	13
1.6	Integrales de potencias de sec y tan	13
1.6.1	Ejercicios	14
1.7	Integración por partes	14
1.7.1	Ejercicios	16
1.8	Integración de funciones racionales	16
1.8.1	Integración de fracciones simples	17
1.8.2	El método de las fracciones parciales	18
1.8.3	Ejercicios	23
1.9	El método de Ostrogradski mejorado	23
1.9.1	Ejercicios	27
2	La integral definida	29
2.1	El Palimpsesto de Arquímedes	29
2.2	Definición de integral definida	32
2.3	Sumatorias	36
2.3.1	Ejercicios	38
2.4	Propiedades de la integral definida	38
2.4.1	Ejercicios	40
2.5	Otra propiedad de las funciones continuas	41
2.6	El teorema fundamental del cálculo	42
2.6.1	Ejercicios	46
2.7	El cambio de variable para la integral definida	47
2.7.1	Ejercicios	51
2.8	La integración por partes para la integral definida	52
2.9	Integración de funciones racionales de seno y coseno	53
2.9.1	Ejercicios	54
2.10	Sustituciones trigonométricas	55
2.10.1	Ejercicios	60
2.11	Integrales impropias	60
2.11.1	Tipo I. Integrales impropias de dominios infinitos	60
2.11.2	Ejemplos	62

2.11.3	Tipo II. Integrales con integrandos no acotados	62
2.11.4	Ejemplos	63
2.11.5	Ejercicios	63
2.12	Integración aproximada	63
2.12.1	Método “natural”	64
2.12.2	Método de los trapecios	65
2.12.3	El método de Simpson	66
2.12.4	Ejercicios	68
3	Aplicaciones de la integral definida	71
3.1	La ofrenda de oro	71
3.2	Definición de longitud, área y volumen	71
3.3	El área de una figura plana	73
3.3.1	Ejercicios	75
3.4	Cálculo de volúmenes	75
3.4.1	Volumen de un cilindro	75
3.4.2	Cálculo de volúmenes por elementos de sección (rodajas)	78
3.4.3	Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por arandelas	80
3.4.4	Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por cortezas	81
3.5	Modelización y solución al problema de la ofrenda de oro	83
3.5.1	Identificación del modelo matemático a usarse	83
3.5.2	Solución del problema matemático del volumen de la cruz	84
3.5.3	Solución del problema de la ofrenda de oro	87
3.5.4	Epílogo	87
3.5.5	Ejercicios	87
3.6	Longitud de arco	88
3.6.1	Ejercicios	89
3.7	Área de superficies de revolución	89
3.7.1	Caso con giro alrededor del eje Ox	91
3.7.2	Caso con giro alrededor del eje Oy	92
3.7.3	Ejercicios	93
3.8	El valor medio de una función	93
3.8.1	Ejercicios	97
3.9	Masa y densidad	97
3.10	Posición, velocidad y aceleración de un punto	99
3.10.1	Ejercicios	101
3.11	Trabajo mecánico	102
3.11.1	Ejercicios	105
3.12	Presión hidrostática	105
3.12.1	Ejercicios	107
3.13	Momentos de masa y Centro de gravedad	108
3.13.1	Caso de sistemas en “línea recta”	108
3.13.2	Caso de sistemas “planos”	110
3.13.3	Ejercicios	114
3.14	Aplicaciones en economía	115
3.14.1	Ingreso de una empresa o un gobierno	115
3.14.2	Superávit del consumidor y del productor	116
3.14.3	Ejercicios	117

4	Función logaritmo y exponencial	119
4.1	Relaciones y funciones	119
4.2	Sentido de la expresión a^x para $x \in \mathbb{Q}$	120
4.3	La función logaritmo natural	121
4.3.1	Ejercicios	124
4.4	Función exponencial natural	124
4.4.1	Ejercicios	127
4.5	Definición de a^x , $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$	128
4.5.1	Generalización de la regla de la potencia	130
4.5.2	Ejercicios	130
4.6	Función \log_a	130
4.6.1	Ejercicios	132
4.7	Funciones hiperbólicas	133
4.8	Ejercicios adicionales de funciones exponenciales y logarítmicas	135
5	Sucesiones y series	137
5.1	Sucesiones numéricas	137
5.1.1	Las sucesiones numéricas vistas como elementos de \mathbb{R}^∞	137
5.1.2	Las sucesiones como funciones	138
5.1.3	Sucesiones acotadas	139
5.1.4	Sucesiones monótonas	140
5.1.5	Sucesiones convergentes	141
5.1.6	Convergencia de sucesiones monótonas y acotadas	142
5.1.7	Criterio de Cauchy. Sucesiones de Cauchy	143
5.2	Ejercicios	144
5.3	Series numéricas	145
5.3.1	Series telescópicas	148
5.3.2	Propiedades algebraicas de las series	151
5.4	Ejercicios	151
5.5	Series de términos no-negativos	152
5.6	Criterio integral	153
5.7	Criterios de comparación	155
5.7.1	Criterio de la razón	159
5.8	Ejercicios	161
5.9	Series alternantes	161
5.10	Ejercicios	164
5.11	Criterio general de la razón	164
5.12	Ejercicios	165
5.13	Error de aproximación del límite de una serie	166
5.14	Ejercicios	168
5.15	Convergencia puntual de sucesiones y series de funciones reales	168
5.16	Series de potencias	169
5.17	Ejercicios	173
5.18	Derivación e Integración de Series de Potencias	174
5.19	Ejercicios	177
5.20	Series de Taylor y de Maclaurin	177
5.21	Ejercicios	181
5.22	Serie Binomial	182
5.23	Ejercicios	183

A	Tablas de integración	185
A.1	Fórmulas básicas	185
A.2	Fórmulas en las que interviene $\sqrt{a^2 + u^2}$	185
A.3	Fórmulas en las que interviene $\sqrt{a^2 - u^2}$	186
A.4	Fórmulas en las que interviene $\sqrt{u^2 - a^2}$	187
A.5	Fórmulas con las funciones trigonométricas	187
A.6	Fórmulas con funciones exponenciales y logarítmicas	188
A.7	Fórmulas con funciones hiperbólicas	189

Capítulo 1

La integral indefinida

1.1 Primitivas e integral indefinida

Dada una función f derivable en un intervalo I , sabemos que la función derivada de f , f' es única. Ahora nos planteamos el problema inverso: hallar, para una función f definida en un intervalo I , una función F cuya derivada sea f . De existir una tal F , la llamaremos *primitiva* de f .

¿Cuántas primitivas podría tener una función f ? Para verlo, supongamos que F es una primitiva de f en un intervalo I . Entonces, la función G definida por

$$G(x) = F(x) + C,$$

donde C es una constante, también es una primitiva de f , pues

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$

para todo $x \in I$.

La recíproca de esta afirmación también es verdadera; es decir, cualquier otra primitiva de f tendrá una forma similar. Esto resulta del siguiente teorema.

Teorema 1.1

Sea $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I y derivable en int I . Entonces

$$h'(x) = 0$$

para todo $x \in \text{int } I$ si y solo existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = C$ para todo $x \in I$

Demostración. Si h es constante, entonces h' es igual a 0. Recíprocamente, sean x_1, x_2 en I , $x_1 < x_2$. Basta probar que $h(x_1) = h(x_2)$. Como h cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio para las derivadas en el intervalo $[x_1, x_2]$, tenemos que existe $x \in]x_1, x_2[$ tal que

$$h'(x) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $h'(x) = 0$ para todo $x \in I$ esto implica que $h(x_2) - h(x_1) = 0$ y, por ende, $h(x_1) = h(x_2)$. □

Corolario 1.2

Si F y G son dos primitivas de f definidas en un intervalo I , existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + C$$

para todo $x \in I$.

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior a la función $h = F - G$. □

Recordemos que si para una función f tomamos a x como la variable independiente, a la llamamos expresión $f(x)$ se la llama forma funcional de la función f . En la práctica se da la forma funcional para definir una función.

Definición 1.1 (Integral indefinida)

Dada una función f definida en un intervalo I , se llama *primitiva de f* a toda función F definida en I tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

A la forma funcional que permite definir el conjunto de todas las primitivas de f , se le llama *integral indefinida de f* y se nota así

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.1}$$

A x se le llama **variable de integración** y C es una constante arbitraria.

El corolario (1.2) garantiza que con esta forma funcional se están representando a todas las primitivas de f si la función F es una de ellas.

El símbolo \int (una *s* (ese) alargada) se lee “integral de” y puede considerarse la operación inversa del signo d que define la operación de hallar la diferencial de una forma funcional dada. Así, se puede ver que

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{y} \quad d \int f(x)dx = f(x).$$

Ejemplo 1.1

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \text{ con } a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}.$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
5. $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$
6. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$
7. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C.$

Solución. El cálculo de la derivada de la función expresada en el lado derecho de cada una de las igualdades muestra claramente que cada igualdad es verdadera.

Con el procedimiento utilizado en este ejemplo se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.3 (Integral indefinida de una suma algebraica)

Sean F y G las primitivas de las funciones f y g , respectivamente, definidas en un intervalo I . Sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$1. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C.$$

$$2. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx = k F(x) + C.$$

Ejemplo 1.2

Calcular la integral indefinida de un polinomio cualquiera P :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Solución. Aplicando el teorema (1.3) y el numeral (2) del ejemplo (1.1), se obtiene:

$$\int \sum_{k=0}^n a_k x^k dx = \sum_{k=0}^n a_k \int x^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C.$$

Ejemplo 1.3

Calcular $\int \sqrt{x} dx$.

Solución. De acuerdo con el numeral (2) del ejemplo (1.1) ($a = 1/2$) se obtiene:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ejemplo 1.4

Calcular $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^2} dx$.

Solución. Utilizando el numeral (1) del teorema (1.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^2} dx &= \int (3x^2 + 2 + (-1)x^{-2}) dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 2 \int dx + (-1) \int x^{-2} dx \\ &= x^3 + 2x + \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5

Calcular $\int (x+3)(x-3) dx$.

Solución. De acuerdo con el ejemplo (1.1), la integral indefinida de este polinomio es:

$$\begin{aligned}\int (x+3)(x-3) dx &= \int (x^2 - 9) dx \\ &= \int x^2 dx - 9 \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 9x + C\end{aligned}$$

1.1.1 Ejercicios

Con la ayuda del ejemplo 1.1 y del teorema 1.3, calcule:

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$
2. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x^4}) dx$
4. $\int (3 \cos x - \tan x) dx$
5. $\int (3 \sec x - \tan^2 x) dx$
6. $\int (x^2 + 11/x + 2 \exp x) dx$ | Recuerde que $(\exp x)' = \exp x$ y $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x} dx$
8. $\int (3x+2)(5x+1)^2 dx$
9. $\int (2 \sin x + \exp x) dx$
10. $\int (5x\sqrt{x} - 3 \cos x) dx$
11. $\int (\sqrt[3]{x} \sqrt[5]{x} \sqrt[7]{x}) dx$ |
|---|--|

1.2 La diferencial y la integral indefinida

Recordemos el concepto de diferencial: dada una función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la derivada de F en a , notada $F'(a)$, puede ser vista como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $(a, F(a))$. En el sistema de coordenadas xy , la ecuación de esta recta es

$$y - F(a) = F'(a)(x - a). \quad (1.2)$$

Si escogemos un sistema de coordenadas cuyo origen esté en $(a, F(a))$ y si llamamos dx y dy a las variables correspondientes a las abscisas y ordenadas, la ecuación (1.2) de la recta tangente mencionada, toma la forma

$$dy = F'(a) dx.$$

A las variables dx y dy se las llama *diferenciales* de x y de y , respectivamente. Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, con x como variable independiente, a una expresión de tipo $f(x) dx$ se la llama *forma diferencial*, mientras que a una expresión de tipo $F(x)$ le llamamos *forma funcional*.

Dada una función f , escogidas x e y como variables independiente y dependiente, respectivamente, a la diferencial d se le puede ver como un operador que transforma una forma funcional en una forma diferencial

$$d: F(x) \mapsto dF(x) \stackrel{\text{def}}{=} F'(x) dx.$$

En este caso la integral indefinida \int puede ser vista como una especie de operador inverso de d , aunque multivaluado porque, como acabamos de ver, si existe una primitiva de una función, existe en realidad una infinidad de ellas:

$$\int : f(x) dx \mapsto \int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + C,$$

con

$$F'(x) = f(x).$$

Tendremos entonces:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x) dx\right) = f(x)dx.$$

Para los lectores que sean aficionados al Álgebra Lineal, mencionaremos que si definimos la relación binaria $f \sim g$ cuando existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + C$, tendremos que \sim es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones

$$X = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Entonces $d : X \rightarrow X$ es lineal, inyectivo, y el operador $\int : X \rightarrow X|_{\sim}, f \mapsto \hat{F}$, es el operador lineal inverso de d . Aquí \hat{F} denota la clase de equivalencia con representante F y con $F' = f$.

Ejemplo 1.6

Calcular $\int d(3x^2 + \cos x)$ y $d\left(\int (5x^4 - \sec^2 x) dx\right)$.

Solución. $\int d(3x^2 + \cos x) = 3x^2 + \cos x + C$ y $d\left(\int (5x^4 - \sec^2 x) dx\right) = (5x^4 - \sec^2 x)dx$.

1.2.1 Ejercicios

Calcule:

1. $\int (5x + \cos x)' dx$

5. $d \int (\cos x + \exp x) dx$

2. $\int d[3 \exp x + \cos(2x^2 + 5)]$

6. $d \int (2\sqrt{x} - 3 \exp x) dx$

3. $\int (\cos x + 3x^2 - 5 \ln x)' dx$

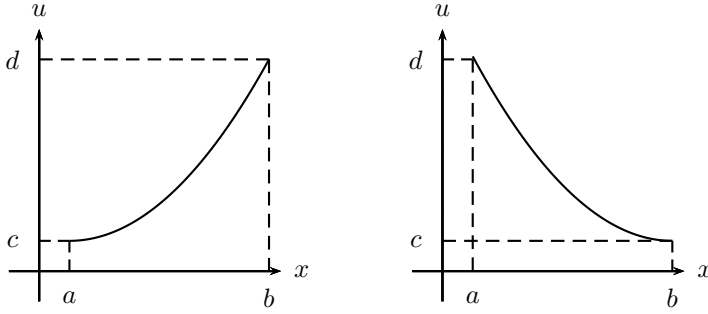
7. $\left(\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx\right)'$

4. $\left(\int (3x^2 - 2x + \exp x) dx\right)'$

8. $\left(\int [\cos x - 3 \sin x + \exp(5x + 4)] dx\right)'$

1.3 Cambios de variable en integrales indefinidas

Sean I y J dos intervalos. Sea $g : I \rightarrow J$ una función continua en I , derivable en el interior de I y biyectiva como se ilustra el siguiente dibujo, donde tomamos $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$, con $a > 0$ y $c > 0$.



Sea $F: J \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto F(u)$, y sea $H = F \circ g$. Entonces $H: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto H(x) = F(g(x))$. Si ponemos $u \equiv g(x)$ y como $x \equiv g^{-1}(u)$, tendremos

$$F(u) \equiv F(g(x)) = H(x) \equiv H(g^{-1}(u)).$$

Por ello, para todo $x \in I$ y para todo $u \in J$:

$$\begin{cases} F(u) \equiv F(g(x)) = H(x) \\ H(x) \equiv H(g^{-1}(u)) = F(u). \end{cases}$$

Se dice entonces que $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto F(u)$ se obtiene de $H: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto H(x)$ mediante el cambio de variable $u \equiv g(x)$. Se tiene también que H se obtiene de F mediante el cambio de variable inverso $x \equiv g^{-1}(u)$. Escribiremos entonces

$$F(u) \equiv H(x).$$

Notemos que las imágenes de F y de H coinciden. Por otra parte, como

$$H'(x) = [F(g(x))]' = F'(g(x)) g'(x),$$

el signo de $H'(x)$ será el mismo que el de $F'(g(x))$, si $g'(x) > 0$, y el signo contrario si $g'(x) < 0$. Así los intervalos de monotonía de F y H coinciden en el primer caso, y son contrarios en el segundo. La interrelación entre la convexidad o concavidad de F y G es más compleja debido a que

$$H''(x) = F''(g(x)) [g'(x)]^2 + F'(g(x)) g''(x).$$

En particular, si $g''(x) = 0$, es decir si el gráfico de g es una recta, ¡los intervalos de concavidad y los de convexidad de F y H coinciden!

Ilustremos lo dicho con un ejemplo:

$$I = [1, 2], \quad J = [2, 4], \quad u \equiv g(x) = 2 + 2(x - 1).$$

El cambio de variable significa que para $u \equiv g(x)$ o, lo que es lo mismo, $x \equiv g^{-1}(u)$, identificamos las formas funcionales $F(u)$ y $H(x)$:

$$F(u) \equiv H(x) \tag{1.3}$$

¿Qué pasa con las correspondientes formas diferenciales obtenidas aplicando d a las formas funcionales $F(u)$ y $H(x)$? De (1.3) se obtiene, aplicando d a ambos lados:

$$F'(u) du \equiv H'(x) dx = [F(g(x))]' dx = F'(g(x)) g'(x) dx.$$

Es decir que

$$F'(u) du \equiv F'(g(x)) g'(x) dx$$

En general, dada una forma diferencial $f(u) du$, con $u \in J$, tendremos, para $u \equiv g(x)$:

$$f(u) du \equiv f(g(x)) g'(x) dx.$$

Supongamos ahora que F es una primitiva de f , ambas funciones definidas en un intervalo J . Sea g una función como antes descrita. Entonces tenemos que:

1. $\int f(u) du = F(u) + C,$
2. $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int F'(g(x)) g'(x) dx = \int d(F(g(x))) = F(g(x)) + C.$

De donde podemos deducir el así llamado *método de sustitución o de cambio de variable para las integrales indefinidas*: si ponemos $u \equiv g(x)$, y en una integral de tipo

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

sustituimos $g(x)$ por u y $g'(x) dx$ por du se obtiene la integral

$$\int f(u) du$$

con u como variable de integración. Si se logra hallar un resultado para la integral así obtenida, digamos

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

podemos “regresar” a la variable original x y tendremos

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Para que la integral dada esté “lista” para un cambio de variable es necesario a veces ciertos cálculos previos, teniendo en cuenta las propiedades de la integral indefinida, identidades algebraicas, trigonométricas, logarítmicas, etc. Todo ello se ilustra en los siguientes ejemplos.

1.4 Cálculo de integrales mediante el uso de tablas

Una aplicación sencilla del método de sustitución o cambio de variable nos permite calcular integrales mediante el uso de tablas de integración como las que constan en el anexo.

Ejemplo 1.7

Calcular $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10}.$

Solución. Como

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 10 &= (4x^2 + 4x + 1) + 9 \\ &= (2x + 1)^2 + 3^2, \end{aligned}$$

si ponemos $u \equiv 2x + 1$, tenemos que $du \equiv 2dx$ y

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 3^2}.$$

Esta última integral puede ser calculada usando la fórmula siguiente (con $a = 3$):

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C.$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x+1}{3} + C.$$

Ejemplo 1.8

1. La integral

$$\int \cos(ax) dx = \int \cos(ax) \frac{a dx}{a}$$

con el cambio de variable

$$u \equiv ax, \quad du \equiv a dx, \quad dx \equiv \frac{1}{a} du$$

se convierte en

$$\int \cos u \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \cos u du = \frac{1}{a} \sin u + C$$

que, con el regreso a la variable original, resulta igual a:

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

2.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2} \right)^{\frac{3}{2}} (x+3) dx &\equiv \int u^{\frac{3}{2}} du \\ &= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + C \\ &\equiv \frac{2}{5} \left(\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2} \right)^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$

mediante el cambio de variable

$$u \equiv \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}, \quad du \equiv (x+3) dx.$$

En este ejemplo:

$$f(u) = u^{\frac{3}{2}}, \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}, \quad I = [1, \infty[, \quad J = [0, \infty[, \quad F(u) = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}}.$$

3.

$$\int \tan x dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \equiv - \int \frac{du}{u} = - \ln |u| + C = - \ln |\cos x| + C$$

considerando el cambio de variable

$$u \equiv \cos x, \quad du \equiv -\sin x dx.$$

4.

$$\begin{aligned} \int \sin(ax) dx &= \frac{1}{a} \int \sin(ax) a dx \\ &\equiv \frac{1}{a} \int \sin u du \\ &= -\frac{1}{a} \cos u + C \equiv -\frac{1}{a} \cos(ax) + C \end{aligned}$$

con el cambio de variable

$$u \equiv ax, \quad du \equiv a dx.$$

5. Mediante el cambio de variable $u \equiv 2x$, $du \equiv 2dx$ y usando la identidad $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos(2x) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] + C.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\int \sqrt[5]{\frac{1 - \sqrt[5]{x}}{x^4}} \, dx &= -5 \int \left(1 - x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right) \, dx \\ &\equiv -5 \int u^{\frac{1}{5}} \, du \\ &= -5 \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + C \\ &\equiv -\frac{25}{6} \left(1 - x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{6}{5}} + C\end{aligned}$$

con el cambio de variable

$$u \equiv 1 - x^{\frac{1}{5}}, \quad du \equiv -\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \, dx.$$

7. A veces es más sencillo realizar los cálculos utilizando las igualdades

$$x \equiv g^{-1}(u), \quad dx \equiv [g^{-1}(u)]' \, du,$$

como veremos en este ejemplo.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{25 - x^2}} &\equiv \int \frac{25 \sin^2 u}{5 \cos u} 5 \cos u \, du \\ &= 25 \int \sin^2 u \, du \\ &= 25 \left[\frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin(2u) \right] + C \\ &\equiv \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} - \frac{1}{2} x \sqrt{25 - x^2} + C\end{aligned}$$

con el cambio de variable

$$u \equiv \arcsin \frac{x}{5} = g(x), \quad x \equiv 5 \sin u = g^{-1}(u), \quad dx \equiv 5 \cos u \, du,$$

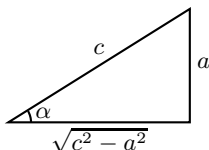
$$I =] -5, 5[, \quad J = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25 \sin^2 u} = 5 \sqrt{1 - \sin^2 u} = 5 \sqrt{\cos^2 u} = 5 |\cos u| = 5 \cos u,$$

ya que $u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Además, se usó la expresión

$$\begin{aligned}\sin(2u) &= 2 \sin u \cos u \equiv 2 \sin \left(\arcsin \frac{x}{5} \right) \cos \left(\arcsin \frac{x}{5} \right) \\ &= 2 \frac{x}{5} \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5} = \frac{2}{25} x \sqrt{25 - x^2}.\end{aligned}$$

En la expresión anterior ¿cómo se calcula $\cos \left(\arcsin \frac{a}{c} \right)$? Sean $0 < a < c$. Si ponemos α igual a $\arcsin \frac{a}{c}$, tenemos que $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, lo que se puede representar con un triángulo rectángulo en el cual c es la hipotenusa, α uno de los ángulos agudos, a el cateto opuesto a α , y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ su cateto adyacente, como se muestra en la siguiente figura:



Por ello

$$\cos\left(\arcsin \frac{a}{c}\right) = \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}.$$

1.4.1 Ejercicios

1. Use el cambio de variable $u \equiv g(x)$ para calcular:

- | | |
|---|---|
| (a) $\int x^2 \exp x^3 dx, u \equiv x^3$ | (h) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx, u = x^2+3$ |
| (b) $\int \cos^3 x \sen x dx, u \equiv \cos x$ | (i) $\int \frac{x^3}{\sqrt{25-x^4}} dx, u \equiv 25-x^4$ |
| (c) $\int \sen^n x \cos x dx, n \in \mathbb{N}, u \equiv \sen x$ | (j) $\int (3 \tan^2 x - \tan x + 3) \sec^2 x dx, u \equiv \tan x$ |
| (d) $\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx, u \equiv \ln x $ | (k) $\int \sec^4 x \tan^3 x dx, u \equiv \tan x$ |
| (e) $\int_x \sen(\exp x + x)(\exp x + 1) dx, u \equiv \exp x + x$ | (l) $\int \sec^5 x \tan^3 x dx, u \equiv \sec x$ |
| (f) $\int \cot x dx, u \equiv \sen x$ | (m) $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx, u \equiv x^2+a^2$ |
| (g) $\int \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt[3]{x}}{x^2}} dx, u \equiv 2+\sqrt[3]{x}$ | (n) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ |

2. Use el cambio de variable $x \equiv g^{-1}(u)$ para calcular:

- | | |
|--|--|
| (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}, x \equiv 6 \sen u$ | (f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x+3}} dx, x \equiv (u^2-3)/2,$
$u \equiv \sqrt{2x+3}$ |
| (b) $\int \frac{dx}{(x^2-9)^{3/2}}, x \equiv 3 \sec u$ | (g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}, x \equiv -1+2 \tan u$ |
| (c) $\int \frac{x}{(25-x^2)} dx, x \equiv 5 \sen u$ | (h) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x+3}} dx, x \equiv (u-3)/2, u \equiv 2x+3$ |
| (d) $\int \frac{x^3}{(x^2+16)^{3/2}} dx, x \equiv 4 \tan u$ | (i) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}, x \equiv a \tan u$ |
| (e) $\int \frac{\tan(x/2)}{\sen x + \cos x + 1} dx, x \equiv 2 \tan^{-1} u,$
$u \equiv \tan(x/2)$ | (j) $\int \frac{Ax+B}{x^2+2bx+c} dx, \text{ si } d = b^2 - c < 0,$
$x \equiv u - b$ |

1.5 Integrales de potencias de sen y cos

Son integrales del tipo

$$\int \cos^m x \sen^n x dx; \quad m, n \in \mathbb{Q}.$$

Veamos algunos casos.

(i) Si n impar: $n = 2k + 1$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $m \in \mathbb{Q}$.

Como $\sin^n x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x$, podemos escribir

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = - \int \cos^m x (1 - \cos^2 x)^k (-\sin x) dx = - \int u^m (1 - u^2)^k du,$$

usando el cambio de variable

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx,$$

obteniéndose la integral de un polinomio que siempre se puede resolver (aún si los exponentes no son enteros).

(ii) Si m impar: $m = 2k + 1$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $n \in \mathbb{Q}$.

Como $\cos^m x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x$, podemos escribir

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = \int (1 - \sin^2 x)^k \sin^n x \cos x dx = \int (1 - u^2)^k u^n du$$

con el cambio de variable

$$u = \sin x, \quad du = \cos x dx,$$

y llegamos nuevamente a la integración de un polinomio que siempre se puede resolver (aún en los casos en que los exponentes no sean enteros).

(iii) Si $n = 0$ y m es par: $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Como

$$\cos^m x = \cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^k, \quad (1.4)$$

se llega a integrales de tipo

$$\int \cos^j(2x) dx, \quad j = 1, \dots, k.$$

Para j impar, es similar al caso (ii). Para j par como $k = \frac{m}{2} < m$, utilizando (1.4) las veces que sea necesario se consigue el resultado.

(iv) Caso m y n pares: $m = 2k$, $n = 2j$, $k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como

$$\sin^n x = \sin^{2j} x = (\sin^2 x)^j = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^j,$$

y por (1.4) se llega a la misma situación que en el caso (iii).

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.9

1. Análogamente al caso descrito en (i), la integral:

$$\begin{aligned} \int \sin^5(ax) dx &= \int (\sin^2(ax))^2 \sin(ax) dx \\ &= -\frac{1}{a} \int (1 - \cos^2(ax))^2 (-a \sin(ax)) dx \\ &= -\frac{1}{a} \int (1 - u^2)^2 du \\ &\quad (\text{considerando el cambio de variable } u = \cos(ax), \quad du = -a \sin(ax) dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{a} \int (1 - u^2)^2 du \\
&= -\frac{1}{a} \int (1 - 2u^2 + u^4) du \\
&= -\frac{1}{a} \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right) + C \\
&= -\frac{1}{a} \left[\cos(ax) - \frac{2}{3} \cos^3(ax) + \frac{1}{5} \cos^5(ax) \right] + C.
\end{aligned}$$

2. La siguiente integral se calcula como en el caso (iv)

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(ax) \sin^2(ax) dx &= \int \frac{1 + \cos(2ax)}{2} \frac{1 - \cos(2ax)}{2} dx \\
&= \frac{1}{4} \int [1 - \cos^2(2ax)] dx \\
&= \frac{1}{4} \int \sin^2(2ax) dx \\
&= \frac{1}{8} \int [1 - \cos(4ax)] dx \\
&= \frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin(4ax)}{4a} \right] + C.
\end{aligned}$$

3. Aplicando el caso (ii) se calcula la integral indefinida:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(ax) \cos^3(ax) dx &= \int \sin^2(ax) \cos^2(ax) \cos(ax) dx \\
&= \int \sin^2(ax) (1 - \sin^2(ax)) \cos(ax) dx \\
&= \int [\sin^2(ax) - \sin^4(ax)] \cos(ax) dx \\
&= \frac{1}{a} \int (u^2 - u^4) du \\
&\quad (\text{con el cambio de variable } u = \sin(ax), \quad du = a \cos(ax) dx) \\
&= \frac{1}{a} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + C \\
&= \frac{1}{a} \left[\frac{\sin^3(ax)}{3} - \frac{\sin^5(ax)}{5} \right] + C.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int \sin^{\frac{9}{2}} \sqrt{x} \cos^3 \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2 \int \sin^{\frac{9}{2}} \theta \cos^3 \theta d\theta \\
&\quad (\text{con el cambio de variable del caso (ii)} \quad \theta = \sqrt{x}, \quad d\theta = \frac{dx}{2\sqrt{x}}) \\
&= 2 \int \sin^{\frac{9}{2}} \theta (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \\
&= 2 \int (u^{\frac{9}{2}} - u^{\frac{13}{2}}) du \\
&\quad (\text{con el cambio de variable } u = \sin \theta, \quad du = \cos \theta d\theta) \\
&= 2 \left(\frac{2}{11} u^{\frac{11}{2}} - \frac{2}{15} u^{\frac{15}{2}} \right) + C \\
&= 4 \left(\frac{\sin^{\frac{11}{2}} \sqrt{x}}{11} - \frac{\sin^{\frac{15}{2}} \sqrt{x}}{15} \right) + C.
\end{aligned}$$

1.5.1 Ejercicios

Calcule:

$$1. \int \sqrt[5]{\sec^4(5x)} \sin^3(5x) dx$$

$$5. \int \sin^5(ax) \cos^5(ax) dx$$

$$2. \int \cos^9(ax) \sin(ax) dx$$

$$6. \int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

$$3. \int \sin^3(bx) dx$$

$$7. \int \sin^2(2x) \cos^4(2x) dx$$

$$4. \int \cos^5(cx) dx$$

1.6 Integrales de potencias de sec y tan

Son integrales del tipo

$$\int \sec^m x \tan^n x dx; \quad m, n \in \mathbb{Q}.$$

Veamos algunos casos.

(i) En el caso en que m par: $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{Q}$, como

$$\sec^m x = \sec^{2k} x = \sec^{2k-2} x \sec^2 x = (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x = (\tan^2 x + 1)^{k-1} \sec^2 x,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \int \sec^m x \tan^n x dx &= \int (\tan^2 x + 1)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x dx \\ &= \int (u^2 + 1)^{k-1} u^n du \\ &\quad (\text{con el cambio de variable } u = \tan x, \quad du = \sec^2 x dx), \end{aligned}$$

con lo cual llegamos a la integral de un polinomio (con exponentes racionales en ciertos casos), que podemos integrar fácilmente.

(ii) En el caso de que n sea impar: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $m \in \mathbb{Q}$, como

$$\begin{aligned} \sec^m x \tan^n x &= \sec^m x \tan^{2k+1} x = \sec^{m-1} x (\tan^2 x)^k \sec x \tan x \\ &= \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x, \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\int \sec^m x \tan^n x dx = \int u^{m-1} (u^2 - 1)^k du.$$

Con el cambio de variable $u \equiv \sec x$, $du \equiv \sec x \tan x dx$, se llega también en este caso a la integral de polinomios con, tal vez, exponentes racionales no enteros, que podemos integrar fácilmente.

(iii) En el caso de que m sea impar y n par; $m \in \mathbb{N}$, $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, se escribe la función que vamos a integrar solo en términos de sec, ya que

$$\tan^n = \tan^{2k} = (\tan^2)^k = (\sec^2 - 1)^k,$$

obteniendo la suma de integrales de potencias de sec de tipo

$$I_j = \int \sec^j x dx$$

con $j \in \mathbb{N}$ y $j \geq 3$ para los cuales se puede usar la fórmula de recurrencia siguiente, que la obtendremos en la siguiente sección:

$$I_j = \frac{1}{j-1} [\sec^{j-2} x \tan x + (j-2)I_{j-2}]$$

con $j \geq 3$, con lo cual todo se reduce al cálculo de I_2 o I_1 ya conocido:

$$I_1 = \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad \text{y} \quad I_2 = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C.$$

1.6.1 Ejercicios

Calcule:

1. $\int \tan^2 x \, dx$
2. $\int (\tan x + \cot x)^2 \, dx$
3. $\int \tan^3(3x) \sec^4(3x) \, dx$
4. $\int \sec^4 x \, dx$
5. $\int \tan(2x) \sec(2x) \, dx$
6. $\int \tan^5(3x) \, dx$
7. $\int \cot^6(2x+1) \, dx$
8. $\int \tan^3 x \sqrt{\cos x} \, dx$
9. $\int (\tan(x/4) \sec(x/4))^3 \, dx$
10. $\int \tan^2(3x) \sec(3x) \, dx$
11. $\int \tan^4(5x) \, dx$
12. $\int \sec^4 x \cot^8 x \, dx$
13. $\int \frac{\sec x}{\cos^7 x} \, dx$

1.7 Integración por partes

Dadas las funciones derivables G y H , recordemos que:

$$d[G(x)H(x)] = G'(x)H(x) \, dx + G(x)H'(x) \, dx.$$

Si ponemos $u = G(x)$, $v = H(x)$, tendremos que:

$$d(uv) = d[G(x)H(x)], \quad du = G'(x) \, dx, \quad dv = H'(x) \, dx$$

y, por lo tanto,

$$d(uv) = u \, dv + v \, du.$$

Por ello, aplicando \int a ambos lados se obtiene:

$$\int d(uv) = \int u \, dv + \int v \, du,$$

de donde

$$uv = \int u \, dv + \int v \, du,$$

y, finalmente,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Esta fórmula, que también puede escribirse:

$$\int G(x)H'(x) \, dx = G(x)H(x) - \int H(x)G'(x) \, dx$$

se llama *fórmula de integración por partes*. Veamos cómo se aplica en algunos ejemplos.

Ejemplo 1.10

1.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

con $u = x$, $du = dx$, $dv = e^x dx$, $v = e^x$.

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

2.

$$\int x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

con $u = e^x$, $du = e^x dx$, $dv = \cos x dx$, $v = \sin x$.

$$\int x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right)$$

con $\bar{u} = e^x$, $d\bar{u} = e^x dx$, $d\bar{v} = \sin x dx$, $\bar{v} = -\cos x$.

La integral $\int e^x \cos x dx$ aparece otra vez en el miembro derecho pero puede ser despejada de la igualdad que hemos obtenido:

$$\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx.$$

Así, finalmente:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

3.

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$$

con $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x dx$, $dv = \sec^2 x dx$, $v = \tan x$. Como

$$\sec x \tan^2 x = \sec x (\sec^2 x - 1) = \sec^3 x - \sec x,$$

se tiene:

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx,$$

es decir

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \left(\sec x \tan x + \int \sec x dx \right),$$

y como

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C,$$

se tiene finalmente

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C.$$

4.

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \frac{dx}{x}$$

con $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = x^n$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x + \frac{1}{n+1} \right) + C.$$

5.

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = \int t \ln t dt$$

$$\text{con } t = \sin x, \quad dt = \cos x dx.$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \int t dt$$

$$\text{con } u = \ln t, \quad du = \frac{dt}{t}, \quad dv = t dt, \quad v = \frac{t^2}{2}.$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sin^2 x [2 \ln(\sin x) - 1] + C.$$

1.7.1 Ejercicios

Calcule, mediante integración por partes:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $\int x\sqrt{x+1} dx$ | 12. $\int x^2 \exp(ax) dx$ |
| 2. $\int x(3x+1)^{-1/2} dx$ | 13. $\int x^3 \exp(x^2) dx$ |
| 3. $\int \ln(ax) dx$ | 14. $\int \exp(ax) \cos(bx) dx$ |
| 4. $\int \ln(3x+2) dx$ | 15. $\int \exp(ax) \sin(bx) dx$ |
| 5. $\int x \ln(bx) dx$ | 16. $\int \sin(\ln x) dx$ |
| 6. $\int \sqrt{x} \ln x dx$ | 17. $\int x \cos^2 x dx$ |
| 7. $\int x^2 \ln(x^2) dx$ | 18. $\int \tan^{-1} \sqrt{x} dx$ |
| 8. $\int \tan^{-1} x dx$ | <i>Sugerencia:</i> use antes un cambio de variable apropiado. |
| 9. $\int \sin^{-1} x dx$ | 19. $\int \sin \sqrt{ax+b} dx$ |
| 10. $\int x^2 \tan^{-1} x dx$ | <i>Sugerencia:</i> use antes un cambio de variable apropiado. |
| 11. $\int x \exp(ax) dx$ | |

1.8 Integración de funciones racionales

La integración de funciones racionales se realiza generalmente por el método de reducción a “fracciones parciales”. Cuando el denominador tiene raíces múltiples, la fórmula de Ostrogradski permite simplificar el cálculo, reduciéndolo a integrales de fracciones con denominadores con solo raíces simples. Si combinamos los dos métodos, podemos escribir directamente el resultado con coeficientes por determinar mediante la solución de un sistema lineal de ecuaciones. Este procedimiento puede ser denominado el de Ostrogradski mejorado.

Una función $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios se denomina *función racional*. Obviamente:

$$\text{Dm}(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}: q(x) = 0\}.$$

En principio, se puede obtener la integral indefinida de cualquier función racional. Probaremos este aserto poco a poco.

1.8.1 Integración de fracciones simples

Integración de fracciones simples de primer grado

Caso 1 Dado $a \in \mathbb{R}$, a la expresión $\frac{1}{x-a}$ le llamaremos *fracción simple de primer grado* y tenemos que :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln |x-a| + C.$$

Integración de fracciones simples de segundo grado

Dado $k > 0$ llamaremos fracciones elementales de segundo grado a expresiones fraccionales de la forma

$$\frac{x}{x^2 + k^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^2 + k^2}.$$

Las podemos integrar de la siguiente manera.

Caso 2 Dado $k > 0$: Con el cambio de variable $u \equiv x^2 + k^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + k^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + k^2) + C, \end{aligned}$$

con el cambio de variable $u \equiv x^2 + k^2$.

Caso 3 Dado $k > 0$: Con el cambio de variable es $x \equiv k \tan t$ con $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, por lo tanto:

$$dx \equiv k \sec^2 t \, dt \quad \text{y} \quad x^2 + k^2 \equiv k^2(\tan^2 t + 1) = k^2 \sec^2 t;$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + k^2} &= \int \frac{k \sec^2 t}{k^2 \sec^2 t} \\ &= \frac{1}{k} \int dt \\ &= \frac{1}{k} t + C \\ &= \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k} + C. \end{aligned}$$

Ahora bien, un trinomio cuadrado de la forma $x^2 + 2bx + c$ no se puede descomponer en factores si el discriminante $d = (b^2 - c)$ es menor que 0. En este caso, podemos expresar este trinomio como la suma de dos cuadrados:

$$x^2 + 2bx + c = (x + b)^2 + k^2$$

con $k = \sqrt{c - b^2}$. Gracias a esto, el cambio de variable $u \equiv x + b$ nos permite transformar integrales de expresiones de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + 2bx + c},$$

que llamaremos fracciones simples de segundo grado, en integrales de fracciones elementales que acabamos de estudiar.

En efecto, puesto que

$$x^2 + 2bx + c \equiv u^2 + k^2, \quad x \equiv u - b, \quad dx \equiv du,$$

se obtiene:

Caso 4 Dados A, B, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $d = b^2 - c < 0$, poniendo $k = \sqrt{-d}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + 2bx + c} dx &\equiv \int \frac{A(u - b) + B}{u^2 + k^2} du \\ &= A \int \frac{u}{u^2 + k^2} du + (-Ab + B) \int \frac{du}{u^2 + k^2} \\ &= \frac{A}{2} \ln(u^2 + k^2) + \frac{-Ab + B}{k} \arctan \frac{u}{k} + F \\ &\equiv \frac{A}{2} \ln(x^2 + 2bx + c) + \frac{-Ab + B}{\sqrt{c - b^2}} \arctan \frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}} + F. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.11

Calcular $\int \frac{-5x + 8}{x^2 - 4x + 29} dx$.

Solución. Es un ejemplo del Caso 1.8.1 con

$$A = -5, B = 8, b = -2, c = 29,$$

puesto que

$$d = b^2 - c = 4 - 29 = -25 < 0.$$

En este caso tenemos la fórmula

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + 2bx + c} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + 2bx + c) + \frac{-Ab + B}{\sqrt{c - b^2}} \arctan \frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}} + C,$$

en nuestro ejemplo $\sqrt{c - b^2} = \sqrt{25} = 5$, y

$$\int \frac{-5x + 8}{x^2 - 4x + 29} dx = \frac{-5}{2} \ln(x^2 - 4x + 29) - \frac{2}{5} \arctan \frac{x - 2}{5} + C.$$

1.8.2 El método de las fracciones parciales

Sabemos que todo polinomio de grado mayor que 2 se puede expresar como el producto de factores de la forma

$$(x - a)^m, \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{y/o} \quad (x^2 + 2bx + c)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{con} \quad b^2 - c < 0.$$

Notemos primero que para la integración de funciones racionales basta considerar el caso en el que el grado del denominador es mayor que el del numerador. En efecto, si $f = \frac{p_M}{q_N}$, donde

p_M y q_N son polinomios de grado M y N , respectivamente, si $M > N$ podemos dividir p_M por q_N y obtendremos

$$f = \frac{p_M}{q_N} = C_{M-N} + \frac{r_K}{q_N},$$

donde el cociente C_{M-N} es un polinomio de grado $M - N$ y el residuo r_K es un polinomio de grado $K < N$. Para integrar f basta entonces saber cómo integrar fracciones racionales, el grado de cuyo denominador es mayor que el del numerador.

Se supone entonces que

$$f = \frac{p_M}{q_N}, \quad M < N.$$

Ahora bien, una función racional $f = \frac{p_M}{q_N}$ con $M < N$ puede siempre ser escrita como la suma de fracciones parciales de primero y segundo grado. Veamos algunos casos simples ($m = 1, n = 1$) porque para multiplicidades mayores que 1 es más conveniente usar el método de Ostrogradski que solo requiere el cálculo de integrales con fracciones simples de primero o de segundo grado.

Caso 5 Con fracciones simples de primer grado

El integrando

$$f(x) = \frac{p_M(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_N)}, \quad \text{con } N > M,$$

se puede escribir:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{A_N}{(x - a_N)}.$$

Se puede hallar A_1, A_2, \dots, A_N expresando la suma de la derecha como una fracción con denominador común

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_N)$$

y al ser igual a la fracción

$$\frac{p_M(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_N)},$$

los polinomios numeradores deben ser idénticos, por lo que se pueden igualar los N coeficientes de los dos polinomios, puesto que el grado de ambos será menor a N , los dos polinomios tendrán la forma

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{N-1}x^{N-1},$$

con N coeficientes. Se obtiene así un sistema lineal de N ecuaciones con las incógnitas

$$A_1, A_2, \dots, A_N.$$

Resuelto este sistema, para integrar $f(x)$ basta calcular integrales consideradas en el Caso 1.

Ejemplo 1.12

Calcular $\int \frac{4x^2 - 9x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx$.

Solución. Se tiene que el denominador es:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x + 1)(x - 2).$$

Al descomponer en suma de fracciones parciales:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 9x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{D}{x-2} \\
&= \frac{A(x^2-2x) + B(x^2-x-2) + D(x^2+x)}{x^3-x^2-2x} \\
&= \frac{(A+B+D)x^2 + (-2A-B+D)x - 2B}{x^3-x^2-2x}.
\end{aligned}$$

Como las dos fracciones son idénticas, se identifican los numeradores, es decir, los coeficientes de x^2 , x y x^0 deben ser iguales.

$$\text{Coeficientes de: } \begin{cases} x^2: & A+B+D=4 \\ x: & -2A-B+D=-9 \\ x^0: & -2B=-4 \end{cases}.$$

Este es un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas: A , B y D . Resolviéndolo se obtiene

$$A=3, \quad B=2, \quad D=-1.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int f(x) dx &= 3 \int \frac{dx}{x+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x} dx - \int \frac{dx}{x-2} dx \\
&= 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x| - \ln|x-2| + C.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{4x^2-9x-4}{x^3-x^2-2x} dx = \ln \left| \frac{x^2(x+1)^3}{x-2} \right| + C.$$

Caso 6 Con fracciones simples de segundo grado

El integrando

$$f(x) = \frac{p_M(x)}{(x^2+2b_1x+c_1)(x^2+2b_2x+c_2)\cdots(x^2+2b_Lx+c_L)}, \quad \text{con } N=2L>M,$$

se puede escribir:

$$f(x) = \frac{B_1x+D_1}{x^2+2b_1x+c_1} + \frac{B_2x+D_2}{x^2+2b_2x+c_2} + \cdots + \frac{B_Lx+D_L}{x^2+2b_Lx+c_L}.$$

Se calculan los coeficientes B_1, B_2, \dots, B_L y D_1, D_2, \dots, D_L de manera análoga al caso precedente. Hecho esto, integrar $f(x)$ se reduce al cálculo de integrales estudiadas en el Caso 4.

Ejemplo 1.13

$$\text{Calcular } \int f(x) dx \text{ si } f(x) = \frac{x^3+7x^2+40}{(x^2-2x+2)(x^2+6x+13)}.$$

Solución. Podemos expresar $f(x)$ como la siguiente suma de fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+6x+13} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+6x+13) + (Dx+E)(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)(x^2+6x+13)} \\
&= \frac{(A+D)x^3 + (6A+B-2D+E)x^2 + (13A+6B+2D-2E)x + (13B+2E)}{(x^2-2x+2)(x^2+6x+13)}.
\end{aligned}$$

Identificando los coeficientes de los numeradores de $f(x)$ y los de la última expresión, obtenemos el siguiente sistema lineal de 4 ecuaciones para calcular las 4 incógnitas A , B , D y E :

$$\text{Coeficientes de: } \begin{cases} x^3: & 1 = A + D \\ x^2: & 7 = 6A + B - 2D + E \\ x: & 0 = 13A + 6B + 2D - 2E \\ x^0: & 40 = 13B + 2E \end{cases}.$$

Al resolver este sistema obtenemos:

$$A = 0, \quad B = 2, \quad D = 1, \quad E = 7.$$

Entonces $\int f(x) dx$ es la suma de dos integrales estudiadas en el Caso 4:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{2}{x^2 - 2x + 2} dx + \int \frac{x + 7}{x^2 + 6x + 13} dx \\ &= 2 \arctan(x - 1) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 6x + 13) + 2 \arctan \frac{x + 3}{2} + C. \end{aligned}$$

Caso 7 Con fracciones simples de primero y de segundo grado

El integrando

$$f(x) = \frac{p_M(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_K)(x^2 + 2b_1x + c_1) \cdots (x^2 + 2b_Lx + c_L)}$$

con

$$M < K + 2L = N \quad \text{y} \quad b_k^2 - c_k < 0 \quad \text{para} \quad k \in \{1, \dots, L\},$$

se puede escribir:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_K}{x - a_K} + \frac{B_1x + D_1}{x^2 + 2b_1x + c_1} + \cdots + \frac{B_Lx + D_L}{x^2 + 2b_Lx + c_L}.$$

Calculados de manera análoga a los casos precedentes los coeficientes

$$A_1, \dots, A_K, B_1, \dots, B_L, C_1, \dots, C_L,$$

la integración de $f(x)$ se reduce al cálculo de integrales de tipo similar a las estudiadas en los Casos 1 y 4.

Ejemplo 1.14

$$\text{Calcular } \int f(x) dx; \text{ con: } f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 4x - 8}{x^4 - 8x}.$$

Solución. Puesto que

$$x^4 - 8x = x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$f(x)$ se puede escribir como la siguiente suma de fracciones parciales:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{A(x^3 - 8) + Bx(x^2 + 2x + 4) + (Dx + E)(x^2 - 2x)}{x^4 - 8x} \\ &= \frac{(A + B + D)x^3 + (2B - 2D + E)x^2 + (4B - 2E)x + (-8A)}{x^4 - 8x}. \end{aligned}$$

Identificando los numeradores de esta última fracción y de $f(x)$ obtenemos el siguiente sistema lineal de 4 ecuaciones para hallar las 4 incógnitas A , B , D y E :

$$\text{Coeficientes de: } \begin{cases} x^3: & 2 = A + B + D \\ x^2: & -6 = 2B - 2D + E \\ x: & -4 = 4B - 2E \\ x^0: & -8 = -8A \end{cases}.$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$A = 1, \quad B = -1, \quad D = 2, \quad E = 0.$$

Entonces $\int f(x) dx$ se calcula como la suma de integrales estudiadas en los Casos 1 y 4:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{x}{x^2+2x+4} dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-2| + \ln(x^2+2x+4) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \ln \left| \frac{x(x^2+2x+4)}{x-2} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Caso 8 El Método de Ostrogradski

Se usa para calcular $\int \frac{P_M}{Q_N} dx$, donde P y Q son polinomios de grado M y N , respectivamente, con $M < N$, cuando Q tiene raíces múltiples reales o complejas, es decir factores de tipo

$$(x+a)^m \quad \text{con } m \geq 2, \quad \text{o} \quad (x^2+2bx+c)^n \quad \text{con } b^2-c < 0 \quad \text{y} \quad n \geq 2.$$

En este caso si Q_1 es el máximo común divisor de Q y Q' , es decir el producto de factores de tipo $(x+a)^{m-1}$ o $(x^2+2bx+c)^{n-1}$, respectivamente, y si $Q_2 = \frac{Q}{Q_1}$ (o sea el producto de factores tipo $(x+a)$ o $(x^2+2bx+c)$, respectivamente), según Ostrogradski se tiene que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (1.5)$$

donde X e Y son polinomios de un grado menor al de Q_1 y Q_2 , respectivamente.

Los coeficientes de X e Y se determinan derivando (1.5), escribiendo el segundo miembro con denominador común (que es Q obviamente), e identificando los numeradores.

Ejemplo 1.15

$$\int \frac{x^8 + x^5 + 1}{(x^3 + 1)^3} dx = \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^3 + 1)^2} + \int \frac{Gx^2 + Hx + I}{x^3 + 1} dx.$$

Solución. Derivando y luego de escribir el miembro de la derecha con su denominador común, se tiene

$$\frac{x^8 + x^5 + 1}{(x^3 + 1)^3} = \frac{(5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E)(x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^3}$$

$$- \frac{6x^2(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F)}{(x^3 + 1)^3} + \frac{(Gx^2 + Hx + I)(x^3 + 1)^2}{(x^3 + 1)^3}.$$

Igualando los coeficientes de los numeradores se obtiene un sistema de 9 ecuaciones y 9 incógnitas para calcular los coeficientes A, B, \dots, I .

La integral de la derecha se resuelve luego por los métodos antes descritos de fracciones parciales.

1.8.3 Ejercicios

Calcule usando, de ser necesario, el método de fracciones parciales o la fórmula de Ostrogradski.

1. $\int \frac{dx}{2x+1}$
2. $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$
3. $\int \frac{dx}{(2x+1)(2x+3)}$
4. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x-2)}$
5. $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+2x+5)} dx$
6. $\int \frac{x^5}{(x-1)(x^2+4x+8)} dx$
7. $\int \frac{x^6}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} dx$
8. $\int \frac{dx}{x^3(x+1)^2}$
9. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-2x+10)}$
10. $\int \frac{x+2}{x^3(x^2+1)} dx$
11. $\int \frac{2x^5+x^4+16x^3+8x^2+34x+17}{(x^2+4)^3} dx$
12. $\int \frac{dx}{x^4+8x^2+16}$
13. $\int \frac{x+1}{x^5+4x^4+5x^3} dx$
14. $\int \frac{x^3}{x^4-81} dx$
15. $\int \frac{x^4}{x^3+1} dx$
16. $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx$

1.9 El método de Ostrogradski mejorado

Se aplica en los mismos casos que el método de Ostrogradski, es decir cuando una o más raíces, reales o complejas del denominador $Q(x)$ es o son múltiples. Notemos que en la fórmula de Ostrogradski (1.5) el denominador $Q_2(x)$ solo puede tener factores simples de tipo $(x+a)$ o $(x^2+2bx+c)$ con $b^2-c < 0$, por lo que el cálculo de

$$\int \frac{Y(x)}{Q_2(x)} dx$$

conduce a integrales de tipo

$$\int \frac{dx}{x+a} \quad \text{y/o} \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+2bx+c} dx$$

que han sido ya estudiados en las Casos 1 y 4, luego de tener que aplicar a $\int \frac{Y(x)}{Q_2(x)} dx$ el método de fracciones parciales. Esto exige el cálculo de nuevos coeficientes en un número igual al del grado de $Q_2(x)$.

En vez de eso proponemos escribir de inmediato, usando las fórmulas dadas en los Casos 1 y 4 a las integrales obtenidas de las fracciones parciales de $\frac{Y(x)}{Q_2(x)}$, con coeficientes que se calcularían simultáneamente a los del polinomio $X(x)$.

Veámoslo en algunos ejemplos.

Ejemplo 1.16

Según la fórmula de Ostrogradski, con

$$X(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_{n-2}x^{n-2}$$

se tiene:

$$\int \frac{P_{n-1}(x)}{(x-a)^n} dx = \frac{A_0 + A_1x + \cdots + A_{n-2}x^{n-2}}{(x-a)^{n-1}} + \int \frac{A_{n-1}}{x-a} dx.$$

Pero podemos escribir directamente

$$\begin{aligned} \int \frac{P_{n-1}(x)}{(x-a)^n} dx &= \frac{A_0 + A_1x + \cdots + A_{n-2}x^{n-2}}{(x-a)^{n-1}} + A_{n-1} \ln |x-a| + C \\ &= \frac{X(x)}{(x-a)^{n-1}} + A_{n-1} \ln |x-a| + C. \end{aligned}$$

Derivando y escribiendo todo con el mismo denominador común $(x-a)^n$ se obtiene la identidad

$$P_{n-1}(x) \equiv (x-a)X'(x) - (n-1)X(x) + A_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

que nos permitirá hallar los n coeficientes A_0, A_1, \dots, A_{n-1} .

Ejemplo 1.17

En vez de

$$\int \frac{P_{2n-1}(x)}{(x^2+k^2)^n} dx = \frac{X(x)}{(x^2+k^2)^{n-1}} + \int \frac{Ax+B}{x^2+k^2} dx,$$

con

$$X(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_{2n-3}x^{2n-3}$$

podemos escribir directamente

$$\int \frac{P_{2n-1}(x)}{(x^2+k^2)^n} dx = \frac{X(x)}{(x^2+k^2)^{n-1}} + A_{2n-2} \ln(x^2+k^2) + A_{2n-1} \arctan\left(\frac{x}{k}\right) + C.$$

Derivando y escribiendo todo con el mismo denominador común $(x^2+k^2)^n$, se obtiene la identidad

$$P_{2n-1}(x) = (x^2+k^2)X'(x) - 2(n-1)xX'(x) + 2A_{2n-2}x(x^2+k^2)^{n-1} + kA_{2n-1}(x^2+k^2)^{n-1},$$

que nos permitirá calcular directamente $A_0, A_1, \dots, A_{2n-1}$ y escribir la respuesta!

Ejemplo 1.18

Teniendo en cuenta que $(x^4-1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^4-1)^3} &= \frac{Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^4-1)^2} \\ &\quad + I \ln |x+1| + J \ln |x-1| + K \ln |x^2+1| + L \arctan x + M, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (x^4-1)(7Ax^6+6Bx^5+5Cx^4+4Dx^3+3Ex^2+2Fx+G) \\ &\quad + (-2)(4x^3)(Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H) \\ &\quad + I(x-1)(x^2+1)(x^4-1)^2 + J(x+1)(x^2+1)(x^4-1)^2 \\ &\quad + 2Kx(x^2-1)(x^4-1)^2 + L(x^2-1)(x^4-1)^2. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal de ecuaciones correspondientes se obtienen los coeficientes

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \frac{7}{32}, \quad D = E = F = 0,$$

$$G = -\frac{11}{32}, \quad H = 0, \quad -I = J = \frac{21}{128}, \quad K = 0, \quad L = -\frac{21}{64},$$

por lo que

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^3} = \frac{7x^5 - 11x}{32(x^4 - 1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \arctan x + \tilde{C}.$$

Podemos aplicar el método de Ostrogradski mejorado (MOM) desde el inicio, esto es, sin usar fracciones parciales para las fracciones cuyos denominadores tienen solo factores simples sean estos de primer grado, de segundo grado o ambos. Así tenemos los siguientes casos.

1. Denominadores con factores simples de primer grado

Sean $K \geq 1$, $a_1, \dots, a_K \in \mathbb{R}$, P_{K-1} un polinomio de grado menor que K .

$$\int \frac{P_{K-1}(x) dx}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)} = \sum_{k=1}^K C_k \ln |x+a_k| + C,$$

donde C_1, \dots, C_K se determinarán derivando la expresión anterior y escribiendo la ecuación obtenida con el mismo denominador común $\prod_{k=1}^K (x+a_k)$ en ambos miembros e identificando los numeradores.

2. Denominadores con factores simples de segundo grado

Sean $N \geq 2$, $b_n, c_n \in \mathbb{R}$, $1 \leq n \leq N$ tales que $b_n^2 - c_n < 0$ para todo n , P_{2N-1} un polinomio de grado menor que $2N$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{P_{2N-1}(x) dx}{(x^2+2b_1x+c_1)(x^2+2b_2x+c_2)\cdots(x^2+2b_Nx+c_N)} &= \sum_{n=1}^N A_n \ln(x^2+2b_nx+c_n) \\ &+ \sum_{n=1}^N B_n \arctan \frac{x+b_n}{\sqrt{c_n-b_n^2}} \\ &+ C. \end{aligned}$$

3. Denominadores con factores simples de primero y segundo grado

Sean $K \geq 1$, $N \geq 1$, $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq K$, $1 \leq n \leq N$ tales que $b_n^2 - c_n < 0$ para todo $n \in \{1, \dots, N\}$ y sea P un polinomio de grado menor que $K+2N$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x) dx}{\prod_{k=1}^K (x+a_k) \prod_{n=1}^N (x^2+2b_nx+c_n)} &= \sum_{k=1}^K C_k \ln |x+a_k| + \sum_{n=1}^N B_n \arctan \frac{x+b_n}{\sqrt{c_n-b_n^2}} \\ &+ \sum_{n=1}^N A_n \ln |x^2+2b_nx+c_n| + C, \end{aligned}$$

donde el cálculo de C_k , $1 \leq k \leq K$ y de A_n y B_n , $1 \leq n \leq N$, es análogo.

4. Caso general

Si el caso precedente lo modificamos admitiendo factores múltiples, digamos de multiplicidad $M_k \geq 1$ para los factores $(x+a_k)$ y N_n para los factores cuadráticos de la forma $(x^2+2b_nx+c_n)$, se tendría, si P es un polinomio de grado menor que

$\sum_{k=1}^K M_k + 2 \sum_{n=1}^N N_n$ y Q_1 es el máximo común divisor de Q y Q' , donde la función a integrar es $f = \frac{P}{Q}$, lo que quiere decir que

$$Q_1(x) = \prod_{k=1}^K (x + a_k)^{M_k-1} \prod_{n=1}^N (x^2 + 2b_n x + c_n)^{N_n-1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{P(x) dx}{\prod_{k=1}^K (x + a_k)^{M_k} \prod_{n=1}^N (x^2 + 2b_n x + c_n)^{N_n}} \\ &= \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \sum_{n=1}^N A_n \ln(x^2 + 2b_n x + c_n) + \sum_{n=1}^N B_n \arctan \frac{x + b_n}{\sqrt{c_n - b_n^2}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^K C_k \ln |x + a_k| + C, \end{aligned}$$

donde X es un polinomio de grado igual al grado de Q_1 menos 1, cuyos coeficientes, al igual que los A_n, B_n y C_k se calcularán derivando la última igualdad y escribiendo la obtenida con mismo denominador común Q en ambos miembros, para luego identificar los numeradores de estos dos quebrados.

Ejemplo 1.19

Volvamos a calcular $\int f(x) dx$ con

$$f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 4x - 8}{x^4 - 8x}$$

del Ejemplo del Caso 7 donde aplicamos el método de fracciones parciales. Esta vez calculemos la integral con el método de Ostrogradski mejorado.

Buscamos el resultado de la forma:

$$\int f(x) dx = A \ln |x| + B \ln |x - 2| + D \ln(x^2 + 2x + 4) + E \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Derivando ambos miembros de esta igualdad obtenemos la identidad

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{(2x+2)D}{x^2+2x+4} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}E}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Como $x^4 - 8x$ es el denominador común de la última expresión obtenemos

$$f(x) = \frac{A(x^3 - 8) + Bx(x^2 + 2x + 4) + [2D(x+1) + \sqrt{3}E](x^2 - 2x)}{x^4 - 8x}.$$

Identificando los coeficientes de los numeradores de estas fracciones obtenemos el siguiente sistema lineal de 4 ecuaciones para el cálculo de A, B, D y E :

$$\text{Coeficientes de: } \begin{cases} x^3: & 2 = A + B + 2D \\ x^2: & -6 = 2B - 2D + \sqrt{3}E \\ x: & -4 = 4B - 4D - 2\sqrt{3}E \\ x^0: & -8 = -8A \end{cases}.$$

Resolvemos este sistema y obtenemos que

$$A = 1, \quad B = -1, \quad D = 1, \quad E = \frac{-2}{\sqrt{3}},$$

por lo cual

$$\int f(x) dx = \ln |x| - \ln |x - 2| + \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ejemplo 1.20

Calculemos $\int f(x) dx$ con

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+2x+5)}.$$

Solución. En primer lugar, si tenemos que:

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + B \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + C \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2},$$

entonces:

$$f(x) = \frac{A(x^2+2x+5) + (x+1)[B(2x+2) + 2C]}{(x+1)(x^2+2x+5)}.$$

Obtenemos, entonces, el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones para el cálculo de A , B y C :

$$\text{Coeficientes de: } \begin{cases} x^2: & 0 = A + 2B \\ x: & 0 = 2B - 2D \\ x^0: & 4 = 5A + 2B + 2C \end{cases}.$$

Resolvemos este sistema y obtenemos que

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{-1}{8}, \quad C = 0,$$

de donde resulta que:

$$\int f(x) dx = A \ln |x| + B \ln |x^2 + 2x + 5| + C \arctan \frac{x+1}{2} + D.$$

1.9.1 Ejercicios

1. Use el método de Ostrogradski mejorado para calcular:

(a) $\int \frac{ax+b}{x(x+1)^3} dx$

(g) $\int \frac{dx}{x^4-16}$

(b) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x-3)}$

(h) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

(c) $\int \frac{dx}{x^4-27x}$

(i) $\int \frac{(x+1)}{x^4+8x} dx$

(d) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

(j) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(e) $\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

(k) $\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} dx$

(f) $\int \frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+9)} dx$

(l) $\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)} dx$

2. Dados $N \geq 1$ y $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dos polinomios de N variables, $R: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$, se dice que R es una función racional de N variables.

(a) Pruebe que con el cambio de variable $x \equiv \tan^{-1} t$, una integral de la forma

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx,$$

donde R es una función racional de 2 variables, se transforma en la integral de una función racional. Use este resultado para calcular

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

(b) Sean $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ para $N \geq 1$. Sea $k = \text{MCM}\{k_1, \dots, k_n\}$. Pruebe que el cambio de variable $x \equiv t^k$ transforma una integral de la forma

$$\int R(x, x^{1/k_1}, x^{1/k_2}, \dots, x^{1/k_n}) dx,$$

donde R es una función racional de $N + 1$ variables, en la integral de una función racional. Use este resultado para calcular

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx.$$

(c) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad \neq cb$, y sea $m \in \mathbb{N}$. Pruebe que el cambio de variable $x \equiv (-dt^m + b)/(ct^m - a)$ (lo que da $t^m \equiv (ax + b)/(cx + d)$), transforma una integral de la forma

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

donde R es una función racional de 2 variables, en la integral de una función racional. Use este resultado para calcular

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx.$$

(d) Sean $a, b \in]0, \infty[$. Pruebe que el cambio de variable $x \equiv (a/b) \tan t$, con $x \in]-a/b, a/b[$ y $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, transforma una integral de la forma

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - b^2 x^2}) dx$$

en la integral de la forma

$$\int R_1(\cos t, \sin t) dt,$$

donde R_1 es otra función racional de dos variables, y que una integral de este tipo se puede transformar en la integral de una función racional con el cambio de variable $u \equiv \tan(t/2)$ (use las identidades $\sin t \equiv 2u/(1+u^2)$, $\cos t \equiv (1-u^2)/(1+u^2)$, $t \equiv 2 \tan^{-1} u$; $dt = 2du/(1+u^2)$). Aplique estos resultados para calcular

$$\int \sqrt{3 - 5x^2} dx.$$

3. Para las integrales siguientes escriba la forma de una primitiva, sin calcular los coeficientes, dada por el método de Ostrogradski mejorado:

(a) $\int \frac{dx}{(x+2)^3(x+1)(x-1)^2}$

(c) $\int \frac{dx}{(x+4)^2(x+1)^3(x^2-8x+17)^3}$

(b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+6x+18)^3}$

(d) $\int \frac{x}{(x^3+1)^3(x^4+1)^2} dx$

Capítulo 2

La integral definida

2.1 El Palimpsesto de Arquímedes

En 212 a. C., un soldado romano decapitó a uno de los más extraordinarios seres humanos que ha existido: Arquímedes. Él fue sorprendido dibujando figuras geométricas en la arena y solo alcanzó a decir: “no dañes mis círculos”.

El legado de Arquímedes se conoce a partir de tres obras suyas: el código A, transcrito al griego; el código B, al latín, ambos en el siglo IX; y el enigmático código C, copiado en el siglo X en Constantinopla (Estambul). De alguna manera fue llevado a Palestina, donde cayó en manos del presbítero IOANNES MYRONAS quien, en abril de 1229, borró el texto con zumo de limón y piedra pómez para transcribir en él oraciones religiosas. Para ello, dividió las hojas en dos y escribió perpendicularmente a las desaparecidas líneas de la obra de Arquímedes, que se convirtió así en un *Palimpsesto*.

En 1880 un estudioso griego descubrió la existencia del texto borrado, del cual se adivinaban apenas algunos trazos detrás de las oraciones, y pudo copiar algún fragmento de las palabras de Arquímedes.

Este fragmento llamó la atención, en 1906, del filósofo danés Johan Ludvig Heiberg, quien con la ayuda de una lupa, tradujo lo que logró leer y lo publicó en 1910, el que contenía un 80 % del texto original.

El Palimpsesto desapareció hasta que, en 1998, una familia francesa de apellido Guersan lo puso a la venta. Un comprador anónimo pagó dos millones de dólares por la obra y la depositó en el Walters Art Museum para que lo conserven.

Debemos anotar que en el siglo XX alguien destruyó para siempre cuatro páginas del libro, al pintar sobre ellas los retratos de los cuatro apóstoles, copiados de una obra medieval. Con esto se intentó subir el precio del antiguo libro de oraciones. ¡El arte antiguo falsificado era más cotizado que el legado científico de Arquímedes!

Con técnicas modernas, en el año 2000, el especialista Roger Easton del Rochester Institute empezó a trabajar en el libro y logró recuperar un 15 % adicional del texto.

En 2002 el físico Uwe Bergman de Stanford, usando nuevas tecnologías de rayos X, logró precisar anteriores hallazgos de Arquímedes relativos al cálculo del centro de gravedad de objetos y revelar una sección entera de “El Método” que había estado escondida en las secciones cosidas de algunas páginas del libro: “. . . contiene parte de la discusión sobre cómo calcular el área dentro de una parábola, usando una nueva forma de razonar sobre el infinito. . .”, según dijo Netz, profesor de Ciencias Clásicas, luego de mirar las imágenes de rayos X obtenidas. Y añadió: “Parece ser una temprana incursión al Cálculo (Infinitesimal) casi 2000 años antes de que Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz lo inventaran”.

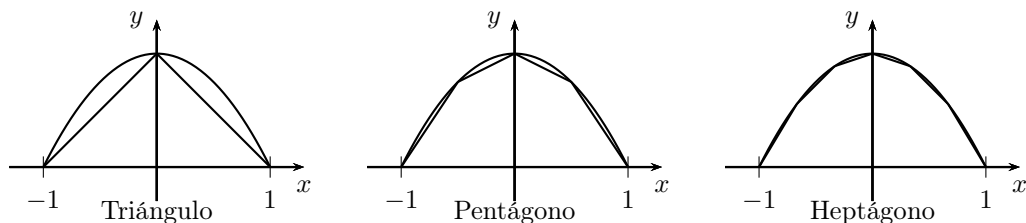
La obra de Arquímedes contiene sus resultados en otros temas que muestran lo increíblemente avanzado que estuvo respecto a su tiempo. Invitamos al lector a estudiarlos. Tratare-

mos aquí en adelante de reproducir los resultados de Arquímedes relativas al “área dentro de una parábola”.

Solo indicamos que numerosos científicos de varias disciplinas y de diversos orígenes se hallan estudiando el Palimpsesto de Arquímedes, y tratan de descubrir el 100 % del contenido de la obra.

Uno de los problemas que resolvió Arquímedes, y se lo puede hallar en el Palimpsesto del Códice C, es el de la cuadratura de la parábola; es decir, el problema de hallar el área de la región plana comprendida entre una parábola y una recta.

Tomaremos, por ejemplo, la parábola de ecuación $y = f(x) = 1 - x^2$ y el eje de las abscisas, o sea la recta de ecuación $y = 0$. Arquímedes aproximaba el área buscada A con el área de los polígonos de $(n + 1)$ lados inscritos en la figura, según se muestra en la figura.



Es decir, para todo $n \geq 2$ se verifica que $P_n < A$. Mientras mayor sea el número de lados del polígono, es decir, mientras mayor sea n , mejor es la aproximación. Los vértices del polígono de $n + 1$ lados serán

$$P_k(x_k, y_k), \quad 0 \leq k \leq n,$$

con

$$y_k = f(x_k) \quad \text{y} \quad x_k = -1 + k\Delta x_k, \quad \text{donde} \quad \Delta x_k = \frac{2}{n},$$

de donde

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}.$$

Por ejemplo, si $n = 4$, tendremos el pentágono de vértices

$$P_0(-1, 0), \quad P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \quad P_2(0, 1), \quad P_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \quad P_4(1, 0).$$

¿Qué resultados habría obtenido Arquímedes al tomar n cada vez más grandes?

Notemos que el área P_n del polígono de $n + 1$ lados inscrito en la figura que usaba Arquímedes es la suma de las áreas T_k de los trapecios de vértices

$$(x_{k-1}, 0), \quad (x_{k-1}, y_{k-1}), \quad (x_k, 0), \quad (x_k, y_k),$$

con

$$\begin{aligned} y_k &= f(x_k) = 1 - x_k^2, & 1 \leq k \leq n. \\ &= 1 - \left(-1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \\ &= 1 - \left(-1 + \frac{4k}{n} + \frac{4k^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2} \\ &= \frac{4}{n \left(k - \frac{k^2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Como área $T_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta x_k$ y como $\Delta x_k = \frac{2}{n}$, tendremos

$$T_k = \frac{1}{n}(y_{k-1} + y_k).$$

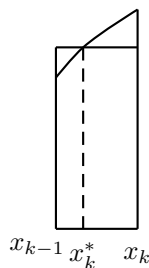
Entonces

$$\begin{aligned} A \approx P_n &= \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n y_{k-1} + \sum_{k=1}^n y_k \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(y_0 + 2 \sum_{k=1}^n y_k - y_n \right) \\ &= \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k - \frac{k^2}{n} \right) \\ &= \frac{4(n^2 - 1)}{3n^2} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

¿A qué valor se acerca P_n cuando n es cada vez más grande? Ese valor no es otro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{4}{3}.$$

Veamos ahora cómo se puede resolver el problema aproximando el área A con la de una figura formada por rectángulos en vez de los trapezios que utilizamos para calcular el área del polígono de Arquímedes: si trazamos las rectas verticales de ecuación $x = x_k$, $0 \leq k \leq n$, nuestra figura se divide en n fajitas.



La k -ésima fajita se puede aproximar con un rectángulo del mismo ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y de altura $f(x_k^*)$, donde x_k^* es un valor cualquiera comprendido entre x_{k-1} y x_k .

Podemos escribir

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = A_n.$$

En este caso, para todo k , $\Delta x_k = \frac{2}{n}$, pero nada impide que los Δx_k sean distintos. Lo que hace falta es que

$$-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$$

y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Se puede intuir que mientras el grosor de las fajitas sea más pequeño, mejor será la aproximación de A con la suma de las áreas de los rectángulos. En el caso de las fajas de igual grosor $h = \Delta x_k = \frac{2}{n}$, esto es equivalente a decir que mientras mayor sea n , mejor será

la aproximación. En el ejemplo tomemos $x_k^* = x_k = -1 + \frac{2k}{n}$. El lector puede repetir los cálculos con otros valores x_k^* y obtendrá un resultado igual. Entonces

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[1 - \left(-1 + \frac{2k}{n} \right)^2 \right] \frac{2}{n} \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{n} k - \frac{4}{n^2} k^2 \right) \\
 &= 8 \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
 &= 8 \left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \right) \\
 &= 8 \left(\frac{(n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right).
 \end{aligned}$$

Vemos que si n es cada vez más grande A_n se acerca a un valor que puede calcularse tomando el límite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

¡Se obtiene pues el mismo resultado que Arquímedes!

2.2 Definición de integral definida

La suma de la forma

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

fue usada por los creadores del cálculo integral Newton y Leibniz, para aproximar el valor del área A y sirvió a Riemann¹ para obtener una generalización que tiene múltiples aplicaciones. Esta es la integral definida que se nota

$$\int_a^b f(x) dx$$

y es igual al límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$, si los valores Δx_k se aproximan a cero.

Formalicemos la definición de la integral definida.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se llama a todo conjunto $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, partición de $[a, b]$, si $n \geq 1$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, porque al intervalo $[a, b]$ lo partimos en n subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$.

Se llama *grosor (amplitud o norma) de la partición \mathcal{P}* al número

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k.$$

Es decir $\|\mathcal{P}\|$ es la longitud del más grande de los subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. En cada intervalo I_k escogemos un valor x_k^* . A la partición \mathcal{P} asociamos entonces un vector \mathcal{P}^* igual a (x_1^*, \dots, x_n^*) que llamaremos *vector o partición asociada a \mathcal{P}* .

¹George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Llamaremos, entonces, *suma de Riemann* al número

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

Diremos que f es integrable según Riemann en $[a, b]$ si existe el límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ cuando el grosor de la partición $\|\mathcal{P}\|$ tiende a cero. A este límite se lo llama integral definida de f en $[a, b]$ y se lo denomina $\int_a^b f(x) dx$ o $\int_{[a,b]} f$ o simplemente $\int f$.

Notemos que la existencia del límite está condicionada solamente al hecho de que $\|\mathcal{P}\|$ tienda a cero sin importar los valores x_k y x_k^* elegidos. Basta entonces que para la pareja $(\mathcal{P}, \mathcal{P}^*)$, $\|\mathcal{P}\|$ tienda a cero.

Tendremos entonces, por definición, que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Pero, ¿qué significa ésto? Recordemos la definición de

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = L,$$

donde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida para valores de h cercanos a 0 y $L \in \mathbb{R}$.

En este caso

L puede ser aproximado por $F(h)$ con la precisión que se desee, para lo cual basta tomar $|h|$ suficientemente pequeño,

es decir:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} F(h) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall h : 0 < |h| < \delta \Rightarrow |F(h) - L| < \epsilon.$$

Análogamente:

$\int_a^b f(x) dx$ puede ser aproximado con la precisión que se desee por las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$, para lo cual basta tomar $\|\mathcal{P}\|$ suficientemente pequeño.

Esto se puede escribir

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall \mathcal{P} \forall \mathcal{P}^* : \\ \|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon.$$

En este caso f es Riemann-integrable en $[a, b]$.

En el ejemplo introductorio, que resuelve el problema de Arquímedes de la cuadratura de la parábola, $\int_{-1}^1 f(x) dx$, con $f(x) = 1 - x^2$, es el área buscada, en este caso $\frac{4}{3}$.

Usaremos el concepto de integral definida para resolver múltiples problemas de geometría, física, economía, etc.

En el ejemplo introductorio tendremos entonces que el área buscada A es

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

Es decir que si ponemos $f(x) = 1 - x^2$, f es integrable en $[-1, 1]$ y su integral es $\frac{4}{3}$.

La función f es un polinomio de segundo grado. Se puede probar que todo polinomio es Riemann-integrable en cualquier intervalo $[a, b]$. Es más, aunque no lo podemos demostrar en este libro, vamos a tener en cuenta el siguiente resultado:

Teorema 2.1

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en un intervalo $[a, b]$. Entonces f es Riemann-integrable en $[a, b]$ si se cumple una de las siguientes propiedades:

1. f es continua en $[a, b]$.
2. f es monótona en $[a, b]$.
3. f es acotada en $[a, b]$ y es continua en $[a, b]$, salvo en un número finito de puntos.

Nota: Hemos definido antes lo que es una función monótona y una función acotada; pero recordemos estas definiciones.

1. f es *monótona* en $[a, b]$ si f :

o es no decreciente: para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

o es no creciente: para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

2. f es *acotada* en $[a, b]$ si

existe $R > 0$ tal que: para todo $x \in [a, b]$, $|f(x)| < R$.

O, lo que es lo mismo, si

existen $c_1 < c_2$ tales que: para todo $x \in [a, b]$, $c_1 < f(x) < c_2$.

Nota: Si se tiene una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y se quiere averiguar si es Riemann-integrable en $[a, b]$, el uso de la definición es en extremo complejo. Si por el contrario, ya se conoce que f es integrable, por cumplir alguna de las conocidas propiedades que son condiciones suficientes para ello, el cálculo de $\int_a^b f(x) dx$ se lo puede hacer tomando una sucesión de particiones \mathcal{P}_n , $n \geq 1$, donde los subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ son de igual longitud. Tales particiones se llaman particiones homogéneas y, en este caso,

$$x_k = a + kh, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \Delta x_k = h = \frac{b-a}{n},$$

y

$$\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0 \quad \text{si y solo si} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Los valores x_k^* se pueden tomar de modo que los cálculos sean más simples. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 2.21

Cálculo de $\int_0^1 x^2 dx$.

Solución. Aquí, para $n \geq 1$,

$$h = \Delta x_k = \frac{1}{n}, \quad x_k = k \frac{1}{n}, \quad 0 < k < n.$$

Si ponemos $f(x) = x^2$, f es creciente en el intervalo $[0, 1]$ considerado, por lo que

$$\min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_{k-1}) = \frac{(k-1)^2}{n^2} \quad \text{y} \quad \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_k) = \frac{k^2}{n^2}.$$

tomando para $1 \leq k \leq n$, $x_k^* = x_{k-1}$, se tendrá entonces que las sumas de Riemann tendrán el mínimo valor posible, mientras que si $x_k^* = x_k$, su valor será el máximo posible. Realicemos los cálculos siguientes. Pongamos :

$$\underline{S}_n = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x_k = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2,$$

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Tendremos que para todo $\mathcal{P}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$,

$$\underline{S}_n \leq \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \leq \overline{S}_n.$$

Sabemos que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

por lo cual

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Con las dos sumas anteriores hallamos que

$$\underline{S}_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}, \quad \overline{S}_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Como para todo $\mathcal{P}^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$

$$\underline{S}_n \leq \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \leq \overline{S}_n,$$

y para las particiones homogéneas

$$\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \rightarrow \infty,$$

como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n = \frac{1}{3},$$

tendremos:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

La utilización de este procedimiento ilustra el hecho de que no importan los valores de x_k^* que se tomen, pero también vemos que hacen falta fórmulas que simplifiquen el cálculo de sumas de la forma

$$\sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Si f es un polinomio de grado m , los cálculos exigen conocer el valor de sumas de tipo $\sum_{k=1}^n k^m$. Se conocen fórmulas para $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ pero no mayores que 13.

El método indicado es pues interesante pero no muy útil para polinomios de grado mayor y peor para funciones f arbitrarias, aún en el caso de funciones muy conocidas y estudiadas, como son las funciones trigonométricas, exponenciales, etc.

La utilidad práctica del concepto de integral definida sería limitada sin el descubrimiento de un método de cálculo admirable por su simplicidad y amplitud que, no en vano, se lo conoce como el *teorema fundamental del cálculo*.

Antes de abordarlo, establezcamos algunas propiedades importantes de la integral definida. Previamente recordemos algo más sobre la notación de sumatorias y sus propiedades.

2.3 Sumatorias

Si están dados, para $n \geq 1$, n números a_1, a_2, \dots, a_n , en vez de escribir

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

se suele escribir

$$\sum_{k=1}^n a_k,$$

que se lee *sumatoria de a_k , para k entre 1 y n* . En general, si $1 \leq m \leq n$

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Las conocidas propiedades de la suma pueden entonces escribirse así:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (\text{definición})$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k; \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{distributiva})$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{aditiva})$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{lineal})$$

$$(5) \quad \text{Si para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\}, a_k \geq 0, \text{ entonces } \sum_{k=1}^n a_k \geq 0.$$

$$(6) \quad \text{Si para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\}, a_k \leq b_k, \text{ entonces } \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k.$$

$$(7) \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

$$(8) \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k.$$

$$(9) \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p} \quad (\text{cambio de variable})$$

Ejemplo 2.22

1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (2k-1) &= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) + (2 \cdot 5 - 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. \end{aligned}$$

$$2. \sum_{k=1}^6 \alpha = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 6\alpha. \text{ En general } \sum_{k=1}^n \alpha = n\alpha.$$

$$3. S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En efecto: $S_n^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$. O también: $S_n^{(1)} = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$. Sumando los respectivos miembros de las dos igualdades anteriores se obtiene:

$$2S_n^{(1)} = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1),$$

lo que conduce al resultado. Éste también se puede probar mediante el método inducción matemática.

$$4. \text{ Probemos por inducción que } S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = F(n) \text{ para } n \geq 1,$$

donde $F(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En efecto, probemos que la igualdad es válida para $n = 1$:

$$S_1^{(2)} = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1. \text{ Por otro lado, } F(1) = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1.$$

Probemos ahora que para todo $n \geq 1$ si la igualdad es verdadera para n , también es verdadera para $n+1$:

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = F(n) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$F(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Por lo tanto, concluimos que $F(n+1) = S_{n+1}^{(2)}$.

5. Análogamente se prueba que: $S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, y que

$$S_n^{(4)} = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

2.3.1 Ejercicios

1. Calcule los siguientes sumatorios:

(a) $\sum_{k=23}^{58} (5k + 2k^2)$

(b) $\sum_{k=3}^{17} (1 + 2k + 4k^3 + 3k^4)$

(c) $\sum_{k=-10}^{15} (k^2 + k^4)$

(d) $\sum_{n=5}^{25} (1 + 2n + 6n^2)$

(e) $\sum_{k=1}^N (k^2 + k + 1)^2$

(f) $\sum_{m=1}^{100} \frac{1}{m(m+1)(m+2)}$

Sugerencia: descomponer cada binomio en sus fracciones parciales:

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{\frac{1}{2}}{m+2}.$$

2. Escriba con la notación de sumatoria las siguientes expresiones:

(a) $4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + \dots + 20^2$

(c) $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 101$

(b) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 251$

(d) $1 - 2! + 3! - 4! + \dots + 99! - 100!$

2.4 Propiedades de la integral definida

Hemos definido, para $a < b$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k,$$

si el límite existe, donde $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ son particiones de $[a, b]$; es decir, se verifica que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, y $\mathcal{P}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ son particiones asociadas a \mathcal{P} , es decir que para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$.

En el caso de que $a = b$, se define

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

y, también, se define:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Las propiedades se resumen en los siguientes dos teoremas:

Teorema 2.2

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones Riemann-integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$1. \int_a^b \alpha \, dx = \alpha(b - a).$$

2. αf es Riemann-integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f)(x) \, dx = \int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx. \quad (\text{homogeneidad})$$

3. $f + g$ es Riemann-integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

(aditividad respecto a funciones)

4. $\alpha f + \beta g$ es Riemann-integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

(linealidad de la integral definida)

Teorema 2.3

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones Riemann-integrables en $[a, b]$, $a_1, b_1, c_1 \in [a, b]$. Entonces

1. f es integrable en cualquier intervalo de extremos en $\{a_1, b_1, c_1\}$. Además

$$\int_{a_1}^{c_1} f(x) \, dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x) \, dx + \int_{b_1}^{c_1} f(x) \, dx. \quad (\text{aditividad respecto a intervalos})$$

2. Si para todo $x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$. (monotonía de la integral)

3. Si $|f|$ es integrable, entonces f también lo es y $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$.

Teorema 2.4 (Integral nula)

Se tiene que:

1. Si $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función nula, es decir si $\theta(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b \theta(x) \, dx = 0.$$

2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y si para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = \theta.$$

Demostración.

1. Es obvio porque las sumas de Riemann serán todas nulas.
2. Supongamos que $\int_a^b f(x) dx = 0$. Basta probar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Por el absurdo. Supongamos que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$. Hay tres casos: (i) $x_0 \in]a, b[$, (ii) $x_0 = a$, (iii) $x_0 = b$.

Caso (i) Como f es continua en x_0 ,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a, b[\quad \text{y} \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Tomando $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, se tiene que

$$a < x_0 - \delta < x < x_0 + \delta < b \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < 3\frac{f(x_0)}{2}.$$

Si ponemos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{si } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ 0 & \text{si } x \notin]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\end{cases}$$

se tiene entonces que para todo $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$. Entonces

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

pero

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^{x_0 - \delta} 0 dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{f(x_0)}{2} dx + \int_{x_0 + \delta}^b 0 dx = \delta f(x_0)$$

y por hipótesis $\int_a^b f(x) dx = 0$, por lo que

$$0 < \delta f(x_0) \leq 0,$$

lo cual es absurdo.

Casos (ii) y (iii): Para estos dos casos se obtiene análogamente $0 < \frac{1}{2}\delta f(x_0) \leq 0$. \square

2.4.1 Ejercicios

1. Use la definición de integral definida y la integrabilidad de las funciones continuas para calcular:

(a) $\int_0^2 5 dx$

(g) $\int_0^2 (2x^3 - 1) dx$

(b) $\int_{-1}^6 (-3) dx$

(h) $\int_a^b x dx$

(c) $\int_{-2}^5 3x dx$

(i) $\int_a^b x^2 dx$

(d) $\int_{-1}^3 (2x + 1) dx$

(j) $\int_a^b x^3 dx$

(e) $\int_0^2 (x^2 + x + 1) dx$

(k) $\int_a^b x^4 dx$

(f) $\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 + x + 1) dx$

2. Calcule la suma de Riemann $\sum_{k=1}^N f(x_k^*) \Delta x_k$ para el intervalo I , si:

(a) $f(x) = x + 2$, $I = [0, 4]$, $N = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 3$

(b) $f(x) = x^2 + 3$, $I = [0, 1]$, $N = 100$, $x_k = x_k^* = k/100$

3. Pruebe que $\lim_{N \rightarrow \infty} S(N) = \int_a^b f(x) dx$ para:

$$(a) \quad S(N) = \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{N^2 \sqrt[3]{N^3 + k^3}}, \quad f(x) = x^2 / \sqrt{1 + x^3}, \quad [a, b] = [0, 1]$$

$$(b) \quad S(N) = \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N \left(-2 + \frac{3k}{N} \right)^3, \quad f(x) = x^3, \quad [a, b] = [-2, 1]$$

4. Use los resultados del primer ejercicio, literales (h)–(k) y las propiedades de la integral definida para calcular:

$$(a) \quad \int_{-1}^2 (x^2 - x + 1) dx$$

$$(d) \quad \int_{-5}^{-2} (-3x^2 + x + 2) dx$$

$$(b) \quad \int_0^3 (x^4 + 9) dx$$

$$(e) \quad \int_1^3 (x^4 - 3x + 1) dx$$

$$(c) \quad \int_{-1}^3 (-x^3 + 1) dx$$

$$(f) \quad \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx + \int_2^3 (x^2 + 1) dx$$

2.5 Otra propiedad de las funciones continuas

Lema 2.1

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $x_0 \in [a, b[$. Para $h \in]0, b - x_0]$ sea

$$f_m(h) = \min_{x_0 \leq x \leq x_0+h} f(x), \quad f_M(h) = \max_{x_0 \leq x \leq x_0+h} f(x).$$

Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f_m(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f_M(h) = f(x_0)$$

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, entonces f es continua en x_0 y, por lo tanto, f es continua en x_0 por la derecha. Entonces,

$$\forall \epsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \text{tal que} \quad x_0 < x < x_0 + \delta_0(\epsilon_0) \leq b \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon_0.$$

Es decir:

$$x_0 < x < x_0 + \delta_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) - \epsilon_0 < f(x) < f(x_0) + \epsilon_0.$$

Probemos que

$$(i) \quad f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f_m(h),$$

$$(ii) \quad f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f_M(h).$$

(i) Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $\delta > 0$ tal que

$$0 < h < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_m(h) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Basta tomar $\delta = \delta_0(\epsilon)$. En efecto, si $0 < h < \delta_0(\epsilon)$, como f es continua en $[x_0, x_0 + h]$, existe $x_m \in [x_0, x_0 + h]$ tal que

$$f(x_m) = \min_{x_0 \leq x \leq x_0+h} f(x) = f_m(h).$$

Pero entonces $|x_m - x_0| < h < \delta_0(\epsilon)$, por lo que

$$|f_m(h) - f(x_0)| = |f(x_m) - f(x_0)| < \epsilon.$$

(ii) Es idéntica la demostración. \square

Nota: Análogamente se demuestra que si f es continua en $[a, b]$ y si $x_0 \in]a, b]$ y para $h \in]0, x_0 - a]$ ponemos

$$f_m(h) = \min_{x_0-h \leq x \leq x_0} f(x), \quad f_M(h) = \max_{x_0-h \leq x \leq x_0} f(x),$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} f_m(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f_M(h) = f(x_0).$$

Con ayuda de esta propiedad de las funciones continuas demostraremos el Teorema Fundamental del Cálculo para estas funciones.

2.6 El teorema fundamental del cálculo

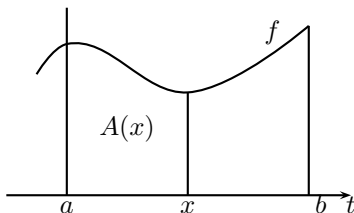
Hemos mencionado ya que calcular la integral definida de una función dada, salvo en el caso de los polinomios de grado no muy elevado, es prácticamente imposible si solo se utiliza la definición.

El Teorema Fundamental del Cálculo que presentaremos ahora nos provee de una herramienta maravillosa para dicho cálculo.

Consideramos una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos definir $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Para visualizar esta función, tengamos en cuenta que cuando para todo $t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$, $A(x)$ es el área comprendida entre la gráfica de f y las rectas $t = a$, $t = x$ y el eje de las abscisas.



El Teorema Fundamental del Cálculo afirma que ¡ A es una primitiva de f ! Es decir que $A' = f$.

Teorema 2.5 (Teorema Fundamental del Cálculo I (TFC1))

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y si $A(x) = \int_a^x f(t) dt$, entonces $A' = f$. Es decir:

$$A'_+(a) = f(a), \quad A'_-(b) = f(b)$$

y para todo $x \in]a, b[$

$$A'(x) = f(x).$$

Demostración. Basta probar que:

1. para todo $x \in [a, b]$, $A'_+(x) = f(x)$, y
2. para todo $x \in]a, b]$, $A'_-(x) = f(x)$,

donde $A'_+(x)$ es la derivada de A en x por la derecha y $A'_-(x)$ es la derivada de A en x por la izquierda. Hagamos las demostraciones.

1. Sea $x \in [a, b[$. Debemos probar que

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Sea $h \in]0, b-x]$.

$$\begin{aligned} A(x+h) &= \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= A(x) + \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Sean

$$f_m(h) = \min_{x \leq t \leq x+h} f(t), \quad f_M(h) = \max_{x \leq t \leq x+h} f(t)$$

(existen porque f es continua en $[x, x+h]$).

Evidentemente

$$f_m(h) \leq f(t) \leq f_M(h) \quad \text{para todo } t \in [x, x+h].$$

Integrando en $[x, x+h]$ se obtiene

$$\int_x^{x+h} f_m(h) dt \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \int_x^{x+h} f_M(h) dt,$$

de donde

$$hf_m(h) \leq A(x+h) - A(x) \leq hf_M(h).$$

Dividiendo para h :

$$f_m(h) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f_M(h).$$

Estas desigualdades son válidas para todo $h \in]0, b-x]$. Tomamos $\lim_{h \rightarrow 0^+}$ y gracias al lema 2.1 de la página 41, tenemos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f_m(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f_M(h) = f(x),$$

de donde

$$A'_+(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in [a, b[.$$

2. Análogamente probamos que

$$A'_-(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in]a, b],$$

de donde $A'_+(a) = f(a)$, $A'_-(b) = f(b)$ y

$$A'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in]a, b[. \quad \square$$

El teorema anterior también suele escribirse: si f es continua en un intervalo I , entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

El siguiente, equivalente, provee un método de cálculo de la integral definida.

Teorema 2.6 (Teorema Fundamental del Cálculo II (TFC2))

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f (es decir, $F' = f$), entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Como ya probamos el TFC1, basta probar el siguiente teorema. □

Teorema 2.7 (Equivalencia de los Teoremas Fundamentales del Cálculo)

$$\text{TFC1} \Leftrightarrow \text{TFC2}.$$

Demostración. Supongamos que TFC1 es verdadero. Vamos a probar que TFC2 también lo es.

Por el TFC1 sabemos que, si $A(x) = \int_a^x f(t) dt$, $A'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, tomando en a y en b las correspondientes derivadas laterales. Como también $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, por el teorema de la unicidad de las primitivas salvo una constante, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in [a, b]$, $A(x) = F(x) + C$. Con $x = a$ tendremos entonces $A(a) = F(a) + C$ y, como $A(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, se obtiene que $C = -F(a)$. Con $x = b$ se obtiene entonces $A(b) = F(b) + C$, por lo que

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Ahora supongamos válido el TFC2. Probemos que lo es también TFC1; es decir, si $F' = f$ y si $a, x \in I$, $a < x$, se tiene

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Derivando obtenemos

$$A'(x) = F'(x) - 0 = f(x).$$

□

Se suele escribir, si $F' = f$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Teorema 2.8

Si $\mathcal{F}[a, b] = \{F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$, el conjunto de funciones, dotado de la suma y multiplicación por un número, las aplicaciones

$$I : \mathcal{F}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto I(f) = \int_a^b f(t) dt,$$

y

$$J : \mathcal{F}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F \mapsto J(F) = F(b) - F(a)$$

son lineales.

Demostración. Tenemos que:

1. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$.
2. $J(\alpha F + \beta G) = \alpha J(F) + \beta J(G)$.

□

En la introducción del concepto de integral definida logramos calcular, no sin esfuerzo,

$$I_1 = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3},$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Si ponemos

$$f_1(x) = 1 - x^2, \quad f_2(x) = x^2,$$

$$F_1(x) = x - \frac{x^3}{3}, \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3},$$

por el TFC2 tendremos

$$I_1 = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left((-1) - \frac{-1}{3} \right) = \frac{4}{3},$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Como $(\sin x)' = \cos x$, tendremos, por ejemplo,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Utilizando la definición con particiones homogéneas del intervalo $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ se tendría que

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{n} \right) \right].$$

Estos cálculos son, en la práctica, imposibles de realizar!

Vemos entonces que la necesidad de sistematizar el cálculo de primitivas o antiderivadas proviene de esta imposibilidad.

Ejemplo 2.23

Calcular:

1. $\int_3^{2+\sqrt{3}} f(x) dx$ con $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 5}$.
2. $\int_2^4 f(x) dx$ con $f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$.

Solución.

1.

$$\begin{aligned} \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{x dx}{x^2 - 4x + 5} &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) \Big|_3^{2+\sqrt{3}} + 2 \arctan(x - 2) \Big|_3^{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{4}{2} + 2 \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan 1 \right) \\ &= \ln \sqrt{2} + 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

2. Si $u = x$, $du = dx$, $dv = e^{\frac{-x}{2}}$ y $v = -2e^{\frac{-x}{2}}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\int_2^4 x e^{-x/2} dx &= -2x e^{\frac{-x}{2}} \Big|_2^4 + 2 \int_2^4 e^{\frac{-x}{2}} dx \\ &= -2(4e^{-2} - 2e^{-1}) - 4e^{\frac{-x}{2}} \Big|_2^4 \\ &= -8e^{-2} + 4e^{-1} + 4(e^{-2} - e^{-1}) = -12e^{-2} + 8e^{-1}.\end{aligned}$$

2.6.1 Ejercicios

1. Usando la notación $G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a)$, pruebe que

$$(a) \quad [\alpha F(x) + \beta G(x) + \gamma H(x)] \Big|_a^b = \alpha F(x) \Big|_a^b + \beta G(x) \Big|_a^b + \gamma H(x) \Big|_a^b$$

$$(b) \quad [F(x) + C] \Big|_a^b = F(x) \Big|_a^b$$

2. Calcule usando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$(a) \quad \int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} dx$$

$$(f) \quad \left(\int_x^1 \sqrt{(y^2 + 1) \sin y} dy \right)'$$

$$(b) \quad \int_a^b (3x^2 - 5x + 2) dx$$

$$(g) \quad \int_1^{32} \sqrt[5]{t^2} dt$$

$$(c) \quad \int_a^b (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N) dx$$

$$(h) \quad \int_0^{27} \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$(d) \quad \int_{\pi/4}^{\pi/3} (2 \cos x - 3 \sin x) dx$$

$$(i) \quad \int_{-\pi/6}^{\pi/3} (\sec x + \tan x) dx$$

$$(e) \quad \left(\int_3^x (5t^2 + \cos t) dt \right)'$$

$$(j) \quad \int_0^1 (3 \exp x + \cos(\pi x/2)) dx$$

3. Comparando los resultados de

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad \text{y de} \quad \int_a^b f(g(x))g'(x) dx,$$

para el caso en que se conoce una primitiva F de f , justifique las fórmulas de cambio de variable $u \equiv g(x)$ para la integral definida por:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du;$$

$$\int_{g^{-1}(A)}^{g^{-1}(B)} f(g(x))g'(x) dx = \int_A^B f(u) du.$$

4. Deduzca la fórmula de integración por partes para la integral definida:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

5. Use cuando sea pertinente los ejercicios 3 y 4 para calcular:

$$(a) \int_4^9 \frac{\cos(\sqrt{x}/4)}{\sqrt{x}} dx$$

$$(b) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1 + \cos x}{(x + \sin x)^3} dx$$

$$(c) \int_{\pi/4}^{\pi/6} \sin x \cos x dx$$

$$(d) \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{3x+4}} dx$$

$$(e) \int_1^4 \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(f) \int_0^1 x \exp x dx$$

$$(g) \int_0^3 t^2 \sqrt{t^3+1} dt$$

$$(h) \int_1^2 x \ln x dx$$

$$(i) \int_{-3}^1 (|x| + x) dx$$

$$(j) \int_0^3 |(x-1)(x-2)| dx$$

$$(k) \int_0^4 \frac{\tan^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(l) \int_0^1 (x^2 + x) \exp(-x) dx$$

6. Calcule, si $F(x) = \int_1^x f(t) dt$:

$$(a) F'(7)$$

$$(b) F(x^2)$$

$$(c) F'(x^2)$$

$$(d) F(x^2 + x + 1)$$

$$(e) [F(x^2 + x + 1)]'$$

7. Calcule $f'(x)$ si:

$$(a) f(x) = \int_2^{5x} \sqrt{t+1} dt$$

$$(b) f(x) = \int_{3x}^{x^2} (3t + 2t^2) dt$$

$$(c) f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} (t^2 + t) dt$$

$$(d) f(x) = \int_x^{\exp x} (t + 1/t) dt$$

8. Calcule:

$$(a) \max_{a \leq x \leq b} \int_a^x (1 + t + t^2) dt$$

$$(b) \min_{a \leq x \leq b} \int_a^x (1 + t + t^2) dt$$

$$(c) \max_{0 \leq x \leq 4} \int_0^x (t^2 - 4t + 3) dt$$

$$(d) \min_{0 \leq x \leq 3} \int_0^x (t^2 - 4t + 3) dt$$

2.7 El cambio de variable para la integral definida

Para calcular integrales indefinidas son muy útiles los métodos de cambio de variable o sustitución y la integración por partes. Veamos, en ésta sección y en la siguiente, cómo se aplican en el caso de la integral definida.

Si $g: J \rightarrow I$ tal que $x \mapsto u = g(x)$ es una función biyectiva entre dos intervalos J e I se tiene que para $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, con el cambio de variable $u \equiv g(x)$ o su equivalente $x \equiv g^{-1}(u)$:

$$1. \int f(g(x))g'(x) dx \equiv \int f(u) du = F(u) + C \equiv F(g(x)) + C, \text{ si } F' = f.$$

$$2. \int h(x) dx \equiv \int h(g^{-1}(u))(g^{-1})'(u) du = F(u) + C \equiv F(g(x)) + C, \text{ si } h: J \rightarrow \mathbb{R} \text{ y si ponemos } f(u) = h(g^{-1}(u))(g^{-1})'(u) \text{ y } F' = f.$$

Combinando estos resultados con el TFC, se tiene que si $g: J = [a, b] \rightarrow I$ es biyectiva, siendo I el intervalo cerrado de extremos A y B , con $A = g(a)$ y $B = g(b)$, entonces:

Como

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(B) - F(A),$$

y como

$$\int_A^B f(u) du = F(u) \Big|_A^B = F(B) - F(A),$$

tenemos que:

1. $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$, y
2. $\int_a^b h(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(g^{-1}(u))(g^{-1})'(u) du$.

No hay entonces necesidad de “regresar a la variable original”, como en el caso de la integral indefinida. En la práctica a veces es más fácil hallar un cambio de variable apropiado de la forma $x = \varphi(u)$ con $\varphi: J \longrightarrow I$, $u \mapsto x = \varphi(u)$ biyectiva (es decir, φ hace el papel de g^{-1} en la notación precedente), por lo cual se tiene:

Para la integral indefinida:

$$\int h(x) dx \equiv \int h(\varphi(u))\varphi'(u) = \int f(u) du = F(u) + C \equiv F(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

con $f(u) = h(\varphi(u))\varphi'(u)$ y $F' = f$; y para la integral definida:

$$\int_a^b h(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} h(\varphi(u))\varphi'(u) du = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(u) du = F(u) \Big|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}.$$

Notemos que si $\varphi'(u) \leq 0$, φ es decreciente y φ^{-1} también, por lo cual $\varphi^{-1}(a) \geq \varphi^{-1}(b)$ y entonces

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} h(\varphi(u))\varphi'(u) du = - \int_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} h(\varphi(u))\varphi'(u) du = \int_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} h(\varphi(u))|\varphi'(u)| du.$$

Es decir que si $J = [a, b]$, e I es el intervalo cerrado de extremos $\varphi^{-1}(a)$ y $\varphi^{-1}(b)$, se puede poner

$$\int_J h(x) dx = \int_I h(\varphi(u))|\varphi'(u)| du.$$

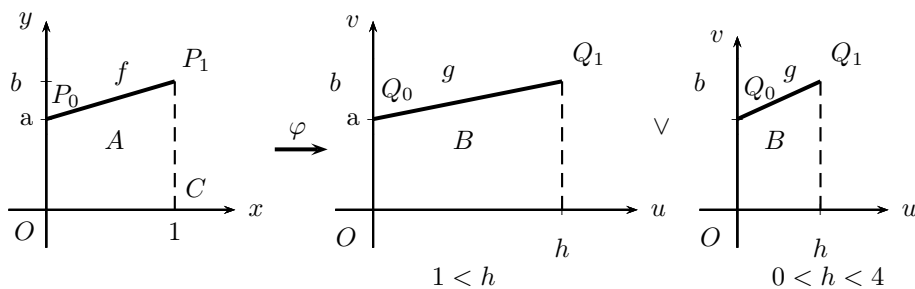
El factor $|\varphi'(u)|$ se llama *Jacobiano* de la transformación del intervalo J en el intervalo I debido al cambio de variable $x = \varphi(u)$. Para entender mejor “lo que pasa”, desde el punto de vista geométrico, veamos un caso simple:

Consideremos $A = \int_0^1 f(x) dx$, donde $y = f(x) = (b-a)x + a$ tiene como gráfica a la recta que pasa por $P_0(0, a)$ y $P_1(1, b)$.

Si C es el punto de coordenadas $(1, 0)$, A es evidentemente el área del trapecio OP_0P_1C :

$$A = \int_0^1 [(b-a)x + a] dx = \frac{a+b}{2}.$$

Queremos valernos de este ejemplo simple para entender qué sucede cuando se hace un cambio de variable $x \equiv \varphi(u)$.



Tomemos para empezar

$$x \equiv \varphi(u) = \frac{1}{h}u \quad \text{con} \quad u = hx.$$

Con este cambio de variable cambian también los límites de integración:

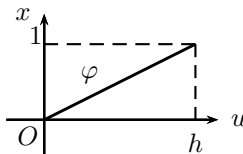
x	u
1	h
0	0

El intervalo de integración $[0, 1]$ se transforma en $[0, h]$. Si $h > 1$ el intervalo $[0, 1]$ se “estira” y si $h < 1$, se “encoge”. Por otro lado, al hacer el cambio de variable tenemos una nueva función $g(u)$:

$$y = f(x) = f(\varphi(u)) = (b - a)\frac{u}{h} + a =: g(u).$$

Esto significa que la recta que es el gráfico de f se transforma en una recta que pasa por $Q_0(0, a)$ y $Q_1(h, b)$, cuya ecuación es

$$y = g(u).$$



El área $A = \frac{a+b}{2}$ se transforma en $B = \frac{a+b}{2}h$, y se “agrandar” o “achica” según que $h > 1$ o $0 < h < 1$, respectivamente. Por eso no se podría escribir simplemente

$$A = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{“igual a”} \quad \int_0^h g(u) du = B,$$

ya que el área bajo la curva f se modifica con el cambio de variable.

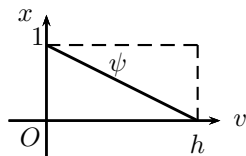
Pero sabemos que

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^h f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_0^h f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du,$$

donde $\varphi'(u) = \frac{1}{h} > 0$. Este factor, $\frac{1}{h}$, es el que “compensa” el cambio de área producido al “estirarse” o “encogerse” el intervalo $[0, 1]$ que se convirtió en el intervalo $[0, h]$.

Un cambio de variable $x \equiv \psi(v) = 1 - \frac{1}{h}v$ produce un resultado similar, pero en este caso como $\psi'(v) = -\frac{1}{h} < 0$, se tiene

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^h f(\psi(v)) [-\psi'(v)] dv = \int_0^h f(\psi(v)) |\psi'(v)| dv.$$



El “factor corrector” $|\varphi'(u)|$ y $|\psi'(v)|$ se llama *Jacobiano* y recoge la información de los “estiramientos” o “encogimientos” de cada punto del intervalo de integración producidos por el cambio de variable.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.24

Calcular $\int_1^4 \frac{(1 + 2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx =: M$.

Solución. Con el cambio de variable $x \equiv j(u) = u^2$ y como $j'(u) = 2u$, y el intervalo $j = [1, 4]$ se transforma en el intervalo $I = [1, 2]$, puesto que $j^{-1}(x) = \sqrt{x}$, tenemos:

$$M = \int_1^4 \frac{(1 + 2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{(1 + 2u)^3}{u} 2u du = \int_1^2 (1 + 2u)^3 2 du.$$

Podemos usar un nuevo cambio de variable: $v \equiv 1 + 2u$, $dv \equiv 2du$, y $[1, 2]$ se transforma en $[3, 5]$, por lo cual

$$M = \int_1^2 (1 + 2u)^3 2 du = \int_3^5 v^3 dv = \frac{v^4}{4} \Big|_3^5 = \frac{1}{4}(5^4 - 3^4) = 136.$$

Algo notable es que en la fórmula del cambio de variable para la integral definida

$$\int_a^b h(x) dx = \int_A^B h(\varphi(u)) \varphi'(u) du, \quad (2.1)$$

con $A = \varphi^{-1}(a)$, $B = \varphi^{-1}(b)$, la función φ puede no ser biyectiva entre $J = [a, b]$ e $I = [A, B]$ o $[B, A]$, según el caso.

Puede suceder que $[a, b] \subsetneq \text{Im}(\varphi) = [A_1, B_1]$, por ejemplo. Para la integral $\int_a^b h(x) dx$ basta conocer $h(x)$ para $x \in [a, b]$, mientras que para calcular $\int_A^B h(\varphi(u)) \varphi'(u) du$, se requiere conocer $h(x)$ para $x \in \text{Im}(\varphi)$.

La fórmula (2.1) sigue siendo válida, pero en este caso basta que $\varphi(A) = a$ y $\varphi(B) = b$ y naturalmente que φ sea derivable en $[A, B]$ o $[B, A]$ según el caso. ¡Verifíquelo! Compruebe antes la validez de (2.1) con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.25

Sean $A, B \in [-1, 1]$, $\varphi(u) = \sin u$ y $h(x) = x^2$. Además:

$$a \in \{\sin^{-1} A + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\sin^{-1} A + (2m+1)\pi | m \in \mathbb{Z}\},$$

$$b \in \{\sin^{-1} B + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\sin^{-1} B + (2m+1)\pi | m \in \mathbb{Z}\},$$

entonces

$$\int_a^b \sin^2 u \cos u du = \int_A^B x^2 dx.$$

2.7.1 Ejercicios

1. Calcular:

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\int_0^8 \frac{\exp(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx$ | (j) $\int_8^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$ | (s) $\int_3^{11} \frac{\sqrt{2x+3}}{x} dx$ |
| (b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sen x}{1+\cos x+\tan^2 x} dx$ | (k) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos x+\sen x} dx$ | (t) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sen^3 x \cos x}{1+\sen^2 x} dx$ |
| (c) $\int_0^1 \exp(-2x) \sen(2\pi x) dx$ | (l) $\int_6^{25} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+1} dx$ | (u) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$ |
| (d) $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$ | (m) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^5 x \sen x dx$ | (v) $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$ |
| (e) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x+8}} dx$ | (n) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sen^4 x} dx$ | (w) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4}}$ |
| (f) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4)^3}$ | (o) $\int_1^e \frac{x^2 \ln x}{(x^3+1)^3} dx$ | (x) $\int_0^1 \sqrt{3x^3+x^4} dx$ |
| (g) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sen x}{1+\sen x} dx$ | (p) $\int_0^5 x \sqrt{\frac{5-x}{4+x}} dx$ | (y) $\int_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$ |
| (h) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sen^2 x \cos(2x) dx$ | (q) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ | |
| (i) $\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x(8-x)}}$ | (r) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} dx$ | |

2. Calcular:

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\int_0^4 \frac{4-x^2}{(1+x^2)^2} dx$ | (g) $\int_0^1 \frac{x^6}{(x+1)(x^3+1)} dx$ | (m) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1+2\sen x} dx$ |
| (b) $\int_3^4 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2} dx$ | (h) $\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(4+x^2)^3} dx$ | (n) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2+\cos x}$ |
| (c) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^3-1)^2}$ | (i) $\int_1^2 \frac{dx}{x^4+1}$ | (o) $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{1+\sen^2 x} dx$ |
| (d) $\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+8} dx$ | (j) $\int_0^{\pi/4} \sen^4 x dx$ | (p) $\int_0^{\pi/6} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx$ |
| (e) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1} dx$ | (k) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sen^5 x dx$ | (q) $\int_0^{1/\sqrt{2}} (\sen^{-1} x)^2 dx$ |
| (f) $\int_0^1 \frac{x^6}{x^4+1} dx$ | (l) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sen^2 x \cos^2 x}$ | (r) $\int_0^{\sqrt{2}} \tan^{-1} x dx$ |

3. Sea $f:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1-2t \sen x + t^2} dt.$$

Pruebe que f es constante.

4. Use una integral definida apropiada para calcular:

$$(a) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N+k}$$

$$(b) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{N^2 \sqrt{N^2 + k^2}}$$

5. Sea $a > 0$ y $f:]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que:

$$(a) \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{si } f \text{ es par.}$$

$$(b) \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{si } f \text{ es impar.}$$

6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y T -periódica (es decir, para cierto $T > 0$, $f(x) = f(x+T)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Pruebe que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

7. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que si ponemos

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

la función F es periódica. Pruebe que f es periódica. ¿La recíproca es verdadera? (Tomar $f(x) = 1 + \cos x$).

8. Halle los extremos absolutos de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_x^{x+\pi/2} (1 + \cos^2 t) dt.$$

9. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \exp(-x) \int_0^{x^2} \exp(-t - t^2) dt$$

(a) Calcule $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$.

(b) ¿Alcanza f un extremo local en 0?

2.8 La integración por partes para la integral definida

De igual manera, en el caso de la integración por partes, se puede aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo a "la parte integrada", puesto que $\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b$; y,

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b u'(x)v(x) dx, \text{ se tiene que:}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx,$$

que es la fórmula de integración por partes para la integral definida.

Ejemplo 2.26

Calcular: $\int_0^1 xe^x dx$ y $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

Solución.

1. Si $u = x$, $dv = e^x dx$, $du = dx$ y $v = e^x$ tenemos:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (e - 0) - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

2. Esta vez, si $u = x^2$, $dv = e^x dx$, $du = 2x dx$ y $v = e^x$ se obtiene, utilizando además el resultado precedente:

$$\int_0^1 x^2 e^x = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = (e - 0) - 2(1) = e - 2.$$

2.9 Integración de funciones racionales de seno y coseno

Una función de dos variables reales

$$\begin{aligned} P: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto P(x, y) \end{aligned}$$

es un polinomio de dos variables si:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, la función $y \mapsto P(x, y)$ es un polinomio de una variable; y
2. Para todo $y \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto P(x, y)$ también es un polinomio de una variable.

Una función de dos variables reales $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función racional de dos variables si

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \forall x, y$$

donde P y Q son polinomios de dos variables.

Para una tal función R , la integral de la forma

$$\int R(\cos x, \sin x) dx \tag{2.2}$$

puede transformarse en la integral de una función racional con el cambio de variable dado por:

$$u \equiv \tan \frac{x}{2}, \quad x \equiv 2 \arctan u \tag{2.3}$$

$$\sin x \equiv \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x \equiv \frac{1-u^2}{1+u^2} \tag{2.4}$$

$$dx \equiv \frac{2 du}{1+u^2} \tag{2.5}$$

puesto que el nuevo integrando es la composición de funciones racionales. Para obtener (2.4), con la ayuda del triángulo de la figura obtenemos

$$\sin \frac{x}{2} \equiv \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos \frac{x}{2} \equiv \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

y tenemos en cuenta las identidades

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Ejemplo 2.27

Calcule $I = \int \frac{dx}{\sqrt{11} + \sin x + \cos x}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{\sqrt{11} + \sin x + \cos x} \equiv \int \frac{\frac{2 du}{1+u^2}}{\sqrt{11} + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \\
 &= 2 \int \frac{du}{(\sqrt{11}-1)u^2 + 2u + \sqrt{11}+1} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{11}-1} \int \frac{du}{u^2 + 2\frac{1}{\sqrt{11}-1}u + \frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{11}-1}}.
 \end{aligned}$$

Con $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{11}-1}$, $c = \frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{11}-1}$, vemos que el discriminante es

$$d = b^2 - ac = \left(\frac{1}{\sqrt{11}-1}\right)^2 - \frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{11}-1} = \frac{1-(11-1)}{(\sqrt{11}-1)^2} = -\left(\frac{3}{\sqrt{11}-1}\right)^2.$$

Se puede aplicar la siguiente fórmula, válida si $d = b^2 - ac < 0$:

$$\int \frac{du}{u^2 + 2bu + c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \frac{u+b}{\sqrt{c-b^2}} + C.$$

Como $c - b^2 = -d = \left(\frac{3}{\sqrt{11}-1}\right)^2 = \frac{9}{2(6-\sqrt{11})}$, tendremos entonces:

$$I \equiv \frac{2}{\sqrt{11}-1} \frac{\sqrt{11}-1}{3} \arctan \frac{u + \frac{1}{\sqrt{11}-1}}{\frac{3}{\sqrt{11}-1}} + C = \frac{2}{3} \arctan \frac{(\sqrt{11}-1)u + 1}{3} + C.$$

Finalmente como $u \equiv \tan \frac{x}{2}$, tendremos que

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{11} + \sin x + \cos x} = \frac{2}{3} \arctan \frac{(\sqrt{11}-1) \tan \frac{x}{2} + 1}{3} + C.$$

2.9.1 Ejercicios

1. Calcule las siguientes integrales usando la sustitución $t \equiv \tan(x/2)$.

(a) $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$

(f) $\int \frac{dx}{\cot x + 2 \cos x}$

(b) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \cos x}$

(g) $\int \frac{\sec x}{2 + \cos x} dx$

(c) $\int \frac{dx}{2 + \cos x - 3 \sin x}$

(h) $\int \frac{\csc x}{1 + 2 \sin x} dx$

(d) $\int \frac{1 + \tan(x/2)}{3 + 2 \cos x + \sin x} dx$

(i) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{4 + 2 \cos x + \sin x}$

(e) $\int \frac{dx}{2 \tan x + \sin x}$

(j) $\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} dx$

2.10 Sustituciones trigonométricas

Teniendo en cuenta las conocidas identidades trigonométricas

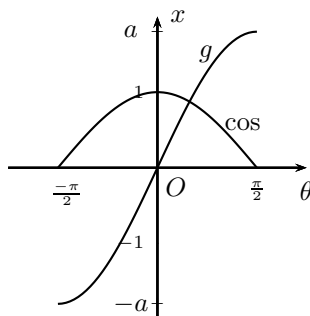
$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta, \\ \sec^2 \theta &= 1 + \tan^2 \theta \quad \text{o} \quad \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1,\end{aligned}$$

cuando en el integrando se encuentran expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$, con $a > 0$, se puede a veces facilitar el cálculo de una integral con una conveniente sustitución trigonométrica. Consideremos tres casos.

Caso 1. Integrandos que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$, con $a > 0$. Notemos que necesariamente $x \in [-a, a]$. Hacemos la sustitución

$$x \equiv a \sin \theta := g(\theta), \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

En este caso tenemos:



$$\begin{aligned}dx &\equiv a \cos \theta \, d\theta, \\ \sqrt{a^2 - x^2} &\equiv \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a |\cos \theta| \\ &= a \cos \theta \\ \text{porque } \theta &\in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \cos \theta \geq 0.\end{aligned}$$

Notemos que $\theta = \arcsen \frac{x}{a}$ es una fórmula útil para “regresar” a la variable original x luego de calcular una integral indefinida, o para calcular los límites de integración con la nueva variable θ .

Ejemplo 2.28

Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} dx$.

Solución.

Sustitución:

$$x \equiv 5 \sin \theta, \quad \theta \equiv \arcsen \frac{x}{5},$$

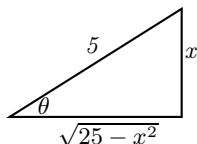
$$dx \equiv 5 \cos \theta \, d\theta,$$

$$\sqrt{25 - x^2} \equiv 5 \cos \theta.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} dx &\equiv \int \frac{25 \sin^2 \theta}{5 \cos \theta} 5 \cos \theta \, d\theta \\ &= 25 \int \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{25}{2} \int [1 - \cos(2\theta)] \, d\theta \\ &= \frac{25}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] + C \\ &= \frac{25}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) + C \\ &\equiv \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} - \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Para regresar a la variable original x nos hemos guiado por el triángulo de la figura donde vemos que $\cos \theta = \frac{1}{5} \sqrt{25 - x^2}$.



En el caso de integrales definidas se hace el cambio de los límites de integración como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.29

Calcular $\int_3^4 \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} dx$.

Solución. El integrando es el mismo del ejemplo anterior, razón por lo cual utilizamos el mismo cambio de variable. Los nuevos límites de integración son:

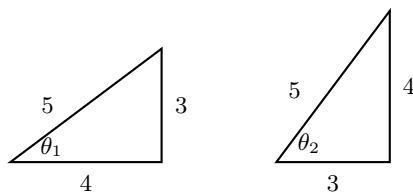
x	θ
3	$\theta_1 = \arcsin 3/5$
4	$\theta_2 = \arcsin 4/5$

Ahora podemos calcular la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} dx &= \frac{25}{2} \int_{\arcsin 3/5}^{\arcsin 4/5} \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{25}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \Big|_{\arcsin 3/5}^{\arcsin 4/5} \\ &= \frac{25}{2} \left(\arcsin \frac{4}{5} - \arcsin \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \frac{4}{5} \right) \\ &= \frac{25}{2} \left(\arcsin \frac{4}{5} - \arcsin \frac{3}{5} \right). \end{aligned}$$

Guiándonos por los triángulos de la figura hemos calculado:

$$\sin \theta_1 = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta_1 = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta_2 = \frac{4}{5}, \quad \cos \theta_2 = \frac{3}{5}.$$

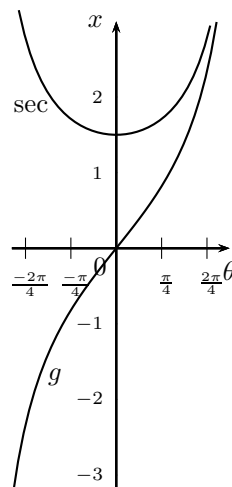


Caso 2. Integrandos que contienen $\sqrt{a^2 + x^2}$, con $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

El gráfico que se presenta a la derecha se dibujó con $a = 1.5$.

Sustitución:

$$\begin{aligned}
 x &\equiv a \tan \theta := g(\theta), \quad \theta \in]-\pi/2, \pi/2[, \\
 dx &\equiv a \sec^2 \theta d\theta, \\
 \sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \tan^2 \theta} \\
 &= \sqrt{a^2(1 - \tan^2 \theta)} \\
 &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} \\
 &= a |\sec \theta| \\
 &= a \sec \theta \\
 &\text{porque } \theta \in]-\pi/2, \pi/2[, \text{ y por ende } \sec \theta \geq 0, \\
 \theta &\equiv \arctan \frac{x}{a}.
 \end{aligned}$$



Ejemplo 2.30

Calcule $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$ y $\int_0^4 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

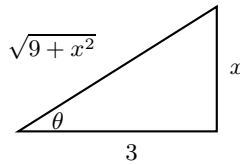
Solución. Sustitución:

$$\begin{aligned}
 x &\equiv 3 \tan \theta, \quad \theta \equiv \arctan \frac{x}{3}, \\
 dx &\equiv 3 \sec^2 \theta d\theta, \\
 \sqrt{9+x^2} &\equiv 3 \sec \theta.
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}} &\equiv \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(3 \sec \theta)^3} d\theta, \\
 &= \frac{1}{9} \int \cos \theta d\theta, \\
 &= \frac{1}{9} \sin \theta + C \\
 &\equiv \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de $\sin \theta$ en función de x nos hemos guiado por el triángulo de la figura.



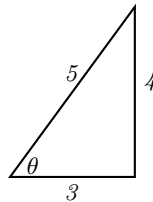
Hallemos los nuevos límites de integración:

x	θ
0	0
4	$\arctan 4/3$

Calculemos la integral definida:

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}} &= \frac{1}{9} \int_0^{\arctan 4/3} \cos \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{9} \sin \theta \Big|_0^{\arctan 4/3} \\
 &= \frac{1}{9} \left[\sin \left(\arctan \frac{4}{3} \right) - 0 \right] \\
 &= \frac{1}{9} \frac{4}{5} \\
 &= \frac{4}{45}
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de $\sin \left(\arctan \frac{4}{3} \right)$ nos hemos servido del dibujo.



Caso 3. Integrandos que contienen $\sqrt{x^2 - a^2}$, con $a > 0$. Notemos que necesariamente $x \leq -a$ o $x \geq a$.

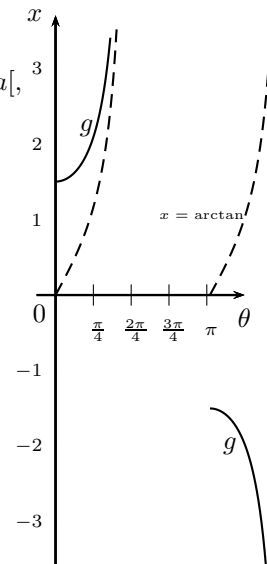
El gráfico que se presenta a la derecha se dibujó con $a = 1.5$.

Sustitución:

$$\begin{aligned}
 x &\equiv a \sec \theta := g(\theta), \\
 \theta &\in [0, \pi/2[\text{ si } x \in [a, \infty[, \theta \in [\pi, 3\pi/2[\text{ si } x \in [-\infty, -a], \\
 dx &\equiv a \sec \theta \tan \theta \, d\theta, \\
 \sqrt{x^2 - a^2} &\equiv \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} \\
 &= \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} \\
 &= \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} \\
 &= a |\tan \theta| \\
 &= a \tan \theta
 \end{aligned}$$

$$\text{puesto que } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\theta \equiv \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}.$$



Ejemplo 2.31

Calcular $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$ y $\int_{\sqrt{10}}^5 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$.

Solución. Sustitución:

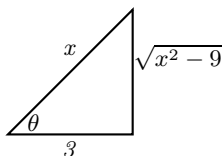
$$x \equiv 3 \sec \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2[\cup]\pi, 3\pi/2],$$

$$dx \equiv 3 \sec \theta \tan \theta d\theta,$$

$$\sqrt{x^2 - 9} \equiv 3 \tan \theta.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx &\equiv \int \frac{3 \tan \theta}{(3 \sec \theta)^4} 3 \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{9} \int \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{27} \sin^3 \theta + C. \end{aligned}$$



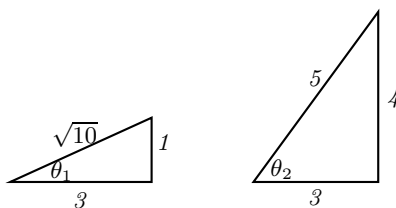
Hallemos los nuevos límites de integración:

x	θ
$\sqrt{10}$	$\theta_1 = \operatorname{arcsec} \frac{\sqrt{10}}{3}$
5	$\theta_2 = \operatorname{arcsec} \frac{5}{3}$

Por otro lado, con la misma sustitución:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx &= \frac{1}{9} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{27} \sin^3 \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &= \frac{1}{27} (\sin^3 \theta_2 - \sin^3 \theta_1) \\ &= \frac{1}{27} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right] \\ &= \frac{256 - 5\sqrt{10}}{13500}. \end{aligned}$$

Para el cálculo de $\sin(\operatorname{arcsec} \frac{5}{3})$ y de $\sin(\operatorname{arcsec} \frac{\sqrt{10}}{3})$ nos hemos servido de los triángulos del dibujo.



2.10.1 Ejercicios

Calcule, usando una sustitución trigonométrica adecuada, de ser el caso:

- | | | |
|---------------------------------------|--|---|
| 1. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$ | 7. $\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx$ | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+17}}$ |
| 2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx$ | 8. $\int x^3 \sqrt{x^2-4} dx$ | 14. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)^{3/2}}$ |
| 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$ | 9. $\int \frac{dx}{(x^2-9)^{3/2}}$ | 15. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$ |
| 4. $\int \sqrt{5-x^2} dx$ | 10. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$ | 16. $\int_{-3}^4 \sqrt{25-x^2} dx$ |
| 5. $\int \sqrt{2+x^2} dx$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ | 17. $\int_3^4 \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dt$ |
| 6. $\int (2-x^2)^{3/2} dx$ | 12. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^4} dx$ | |

2.11 Integrales impropias

Hemos definido la integral definida de funciones de tipo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Dicha integral es un número que se nota y define como sigue:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k,$$

donde P es una partición del intervalo $[a, b]$. Cuando existe este límite se dice que f es Riemann-integrable en $[a, b]$. Se conoce que son integrables funciones que cumplen, por ejemplo, una de las siguientes propiedades:

1. f es continua en $[a, b]$,
2. f es monótona en $[a, b]$,
3. f es acotada en $[a, b]$ y continua en $[a, b]$ con excepción de un número finito de puntos.

La práctica exige, sin embargo, crear o extender el concepto de integral definida cuando, por ejemplo:

1. f está definida en un intervalo infinito $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, b[$ o $]a, +\infty[$.
2. f no es acotada.
3. f está definida en un intervalo finito de tipo $]a, b[$, $]a, b]$ o $[a, b[$.

Las integrales que se obtienen se llaman *impropias*. Definiremos dos tipos de tales integrales.

2.11.1 Tipo I. Integrales impropias de dominios infinitos

Definición 2.1

1. Si $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $]-\infty, b]$, se dice que f es *Riemann-integrable en $] - \infty, b]$* si existe el número $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ definido por

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Si $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, +\infty[$, se dice que f es *Riemann-integrable en* $[a, +\infty[$ si existe el número $\int_a^\infty f(x) dx$ definido por

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

3. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R} y si para cierto $c \in \mathbb{R}$, f es Riemann-integrable tanto en $] -\infty, c]$ como en $[c, +\infty[$, se dice que f es *Riemann-integrable en* $] -\infty, \infty[$, o en \mathbb{R} y se pone, en este caso,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx.$$

Si una de las integrales de la derecha no existe para cierta f , se dice que *diverge* la integral de la izquierda.

Observemos lo siguiente.

1. La continuidad garantiza la existencia de $\int_a^b f(x) dx$, requerida en la definición.
2. En el caso de $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ deben existir $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ y $\int_c^\infty f(x) dx$. Si una de las dos, o las dos no existen, f no será integrable en \mathbb{R} .
3. Es erróneo confundir $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ con

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx.$$

Este último límite, si existe, se llama *valor principal de* $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ y su existencia no garantiza la de $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$.

4. Si f tiene una primitiva F , aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo se puede escribir, por ejemplo:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [F(t) - F(a)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - F(a).$$

Por ello, por comodidad se escribe

$$\int_a^\infty f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)|_a^{+\infty}.$$

Análogamente se pondrá:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x) dx &= F(b) - F(-\infty) = F(x)|_{-\infty}^b, \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)|_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Insistimos en que debe entenderse:

$$\begin{aligned} F(+\infty) &:= \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t), \\ F(-\infty) &:= \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t). \end{aligned}$$

2.11.2 Ejemplos

1.

$$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x-3)^2} = \left. \frac{-1}{x-3} \right|_{-\infty}^1 = \frac{-1}{1-3} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x-3} = \frac{1}{2}.$$

Notemos que si ponemos $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, f es continua en $] -\infty, 1]$, como lo exige la definición. Para esta función no podríamos calcular $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$ porque f es discontinua en 3.

2. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = -2\sqrt{3-x} \Big|_{-\infty}^1$ no existe porque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-x} = +\infty$; es decir, diverge.3. $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$ diverge porque $\int_0^{\infty} x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$. Nótese que

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} x \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t x \, dx = 0.$$

4. $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} \, dx = \left. \frac{-1}{2} e^{-x^2} \right|_{-\infty}^0 = \frac{-1}{2} \left(1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{2}.$

2.11.3 Tipo II. Integrales con integrandos no acotados

Definición 2.2

1. Si $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $]a, b]$, se dice que f es *Riemann-integrable en $]a, b]$* si existe el número $\int_{a^+}^b f(x) \, dx$ definido por

$$\int_{a^+}^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) \, dx.$$

2. Si $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b[$, se dice que f es *Riemann-integrable en $[a, b[$* si existe el número $\int_a^{b^-} f(x) \, dx$ definido por

$$\int_a^{b^-} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) \, dx.$$

3. Si $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $]a, b[$ y si para cierto $c \in]a, b[$, f es Riemann-integrable tanto en $]a, c]$ como en $[c, b[$, se dice que f es *Riemann-integrable en $]a, b[$* y se pone en este caso

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x) \, dx = \int_{a^+}^c f(x) \, dx + \int_c^{b^-} f(x) \, dx.$$

Si uno de los límites no existe se dice que la integral correspondiente diverge.

Tienen lugar observaciones análogas a las que siguen a la definición de integrales en intervalos infinitos. En particular, por ejemplo, si $F' = f$ se tiene

$$\int_{a^+}^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_{a^+}^b = F(b) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t) =: F(b) - F(a^+).$$

2.11.4 Ejemplos

1. $\int_{1+}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} \Big|_{1+}^2 = 2 \left(\sqrt{2-1} - \lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{x-1} \right) = 2.$
2. $\int_{1+}^2 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_{1+}^2 = \ln|2-1| - \lim_{x \rightarrow 1+} \ln|x-1|$, por lo que la integral diverge.
3. $\int_2^{3-} \frac{dx}{(x-3)^{1/5}} = \frac{5}{4}(x-3)^{4/5} \Big|_2^{3-} = \frac{5}{4} \left[\lim_{x \rightarrow 3-} (x-3) - (2-3)^{4/5} \right] = -\frac{5}{4}.$

Al calcular una integral impropia de tipo I se puede llegar a otra de tipo II o viceversa. Veamos un ejemplo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = - \int_1^{0+} \frac{du}{u^2 \frac{1}{u^2}} = \int_{0+}^1 du$$

con el cambio de variable $u = \frac{1}{x}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$ y el cambio de límites

x	u
1	1
$+\infty$	$0+$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &= u \Big|_{0+}^1 \\ &= 1 - \lim_{u \rightarrow 0+} u \\ &= 1. \end{aligned}$$

2.11.5 Ejercicios

Calcule la integral dada o pruebe que es divergente:

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ | 8. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ | 14. $\int_{0+}^1 \ln x dx$ |
| 2. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ | 9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ | 15. $\int_1^{2-} \frac{dx}{(x-2)^{1/5}}$ |
| 3. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{4/5}}$ | 10. $\int_{-\infty}^1 \frac{x}{(x^2+4)} dx$ | 16. $\int_{2+}^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/5}}$ |
| 4. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{5/4}}$ | 11. $\int_3^{\infty} x \exp(-x) dx$ | 17. $\int_2^{\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$ |
| 5. $\int_{-\infty}^3 \exp(3x) dx$ | 12. $\int_{-\infty}^1 \frac{x^3}{x^4+4} dx$ | 18. $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2+1} \right) dx$ |
| 6. $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^3) dx$ | 13. $\int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | 19. $\int_{-2}^{0-} \frac{dx}{x^2}$ |
| 7. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ | | |

2.12 Integración aproximada

Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Riemann-integrable en $[a, b]$, para calcular $\int_a^b f(x) dx$ de manera exacta conocemos por ahora el teorema fundamental del cálculo, que exige hallar una

primitiva F de f y la definición

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

El cálculo de este límite, salvo para polinomios de grado no muy grande, es demasiado engorroso y prácticamente irrealizable. Por eso es necesario disponer de métodos que permitan el cálculo aproximado de la integral. Veamos algunos métodos.

2.12.1 Método “natural”

Si se conoce que la función f es Riemann-integrable en $[a, b]$, al conocerse que el límite existe, independientemente de los x_k^* tomados, se pueden tomar particiones homogéneas P_n que consisten en dividir $[a, b]$ en n segmentos iguales. Es decir que para $n \geq 1$, P_n es igual a $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, donde $x_0 = a$ y $x_k = a + kh$, con $h = \frac{b-a}{n} = \Delta x_k$ para todo k , por lo que $\|P\| = \frac{b-a}{n}$. Esto significa que $\|P\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Además, $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ para todo $k \geq 1$.

Así, cualquier suma de Riemann es una aproximación de la integral, puesto que $E_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde

$$E_n = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \right| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \right|$$

es el error de aproximar la integral con la suma de Riemann. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0,$$

E_n será menor mientras más grande sea n . Lamentablemente no se puede estimar a priori este error, por lo que no sabemos, en general, qué valor de n se debe tomar para que dicho error sea menor que un valor dado previamente.

Se requiere en todo caso escoger los valores x_k^* de modo que se facilite el cálculo de la suma de Riemann correspondiente. Se puede, por ejemplo, usar una de las opciones siguientes.

1. Cada x_k^* es el punto intermedio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ correspondiente:

$$x_k^* = x_{k-1} + \frac{h}{2} = a + \frac{2k-1}{2n}(b-a).$$

2. Cada x_k^* es el extremo izquierdo $[x_{k-1}, x_k]$, es decir $x_k^* = x_{k-1}$. Si ponemos $y_k = f(x_k)$ se tendrá entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_{k-1} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

3. Cada x_k^* es el extremo derecho $[x_{k-1}, x_k]$, es decir $x_k^* = x_k$, por lo que :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$

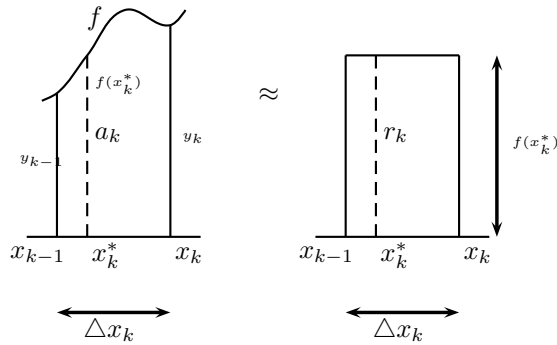
4. Se aproxima la integral con el promedio de los resultados obtenidos en las dos opciones precedentes:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right) = \frac{b-a}{n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

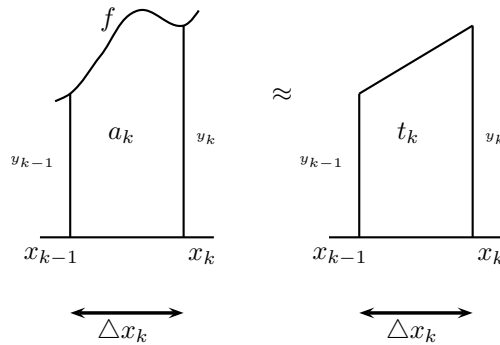
Este último resultado es idéntico al que se obtiene con el así llamado método de los trapecios que describimos a continuación.

2.12.2 Método de los trapecios

En el método natural en cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$ la integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$ se aproxima con el producto $f(x_k^*) \Delta x_k$, que geométricamente, si $f(x) \geq 0$, significa que el área de la figura a_k , situada bajo el gráfico de f y sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se aproxima con el área del rectángulo r_k cuya base es dicho intervalo y su altura es $f(x_k^*)$.



La idea de este método consiste en reemplazar el rectángulo r_k con un trapecio t_k cuyas bases son y_{k-1} e y_k y cuya altura es Δx_k .



Así

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta x_k = \frac{b-a}{2n} (y_{k-1} + y_k).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \\ &\approx \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{2n} (y_{k-1} + y_k) \\ &= \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n). \end{aligned}$$

Si ponemos

$$T_n := \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n),$$

entonces

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Algo notable es que el error $E_T(n)$ que se comete al aproximar la integral con T_n puede ser estimado a priori, es decir previo a cualquier cálculo, con lo cual se puede conocer el valor de n que nos permita que el error $E_T(n)$ sea menor a un cierto número dado previamente. En efecto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.9

Si para $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existe su segunda derivada en $[a, b]$ y $M \geq 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$, $|f''(x)| \leq M$, entonces, si $E_T(n) = \left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right|$, $E_T(n) \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.

Ejemplo 2.32

Calcule $\ln 2$ con dos cifras decimales exactas, utilizando el método de los trapecios.

Solución. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces $\ln 2 = \int_1^2 f(x) dx$. Como $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, tenemos que

$$|f''(x)| \leq 2 \quad \forall x \in [1, 2].$$

Podemos usar el teorema con $a = 1$, $b = 2$, $M = 2$, y entonces, como T_n aproximaré $\ln 2$ con dos cifras decimales exactas si $E_T(n) < 0.005$, exigiremos que

$$E_T(n) \leq \frac{2(2-1)^3}{12n^2} < 0.005,$$

de donde $n > \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5.7$ nos garantiza que T_n y $\ln 2$ serán iguales hasta la segunda cifra decimal. Basta tomar entonces $n = 6$. En la siguiente tabla resumimos los cálculos que se realizan.

k	x_k	y_k
0	1	1
1	7/6	6/7
2	4/3	3/4
2	3/2	2/3
4	5/3	3/5
5	11/6	6/11
6	2	1/2

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx T_6 = \frac{b-a}{12} (y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_5 + y_6) \\ &= \frac{1}{12} \left[1 + 2 \left(\frac{6}{7} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{6}{11} \right) + \frac{1}{2} \right] \\ &\approx 0.6949. \end{aligned}$$

2.12.3 El método de Simpson

En el método natural, en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ reemplazábamos el gráfico de f con un segmento de recta horizontal, es decir f se reemplaza por un polinomio p de grado 0, pues para $x \in [x_{k-1}, x_k]$ se reemplazaba $f(x)$ con la constante $f(x_k^*) := p(x)$.

En el método de los trapecios el gráfico de f se reemplaza con la recta que pasa por los puntos $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ y $P_k(x_k, y_k)$. Es decir que f se reemplazaba con un polinomio de grado menor o igual que 1, es decir que $f(x)$ se reemplaza con

$$p(x) = y_{k-1} + \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}).$$

Se puede esperar que si en vez de un polinomio de grado 0 o 1 se toma uno de grado mayor, el método será mejor. Esta idea se recoge en el método de Simpson que utiliza segmentos de parábola o recta que pasa por $P_k(x_k, y_k)$, $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ y $P_{k+2}(x_{k+2}, y_{k+2})$, para reemplazar al gráfico de f en los intervalos $[x_k, x_{k+2}]$, con k par y $k \in \{0, 2, \dots, n-2\}$. Es decir se reemplaza f con un polinomio de grado menor o igual que 2. Veamos los detalles.

Calculemos el área entre el polinomio de grado menor o igual que 2 que pase por tres puntos de la forma $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$ y $(a+2h, f(a+2h))$. No cambia el resultado si al punto intermedio lo ubicamos en el eje de las ordenadas. Consideremos entonces los tres puntos siguientes: $P(-h, y_-)$, $Q(0, y_0)$, $R(h, y_+)$. Si p es el polinomio de grado menor o igual que 2 que pasa por ellos, con a , b y c adecuados tendremos que $p(x) = ax^2 + bx + c$. Para el cálculo de a , b y c se tienen las tres ecuaciones siguientes:

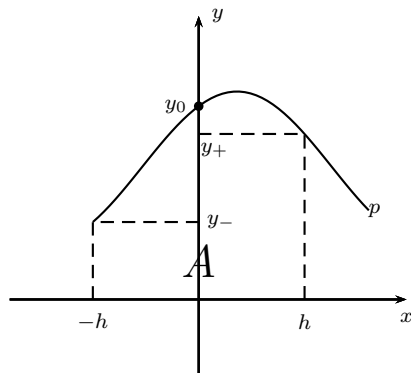
$$P \in p \quad \Rightarrow \quad y_- = ah^2 - bh + c, \quad (2.6)$$

$$Q \in p \quad \Rightarrow \quad y_0 = c, \quad (2.7)$$

$$R \in p \quad \Rightarrow \quad y_+ = ah^2 + bh + c. \quad (2.8)$$

El área que nos interesa (ver el dibujo de la derecha) se calcula mediante:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^h p(x) dx \\ &= \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx \\ &= \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right) \Big|_{-h}^h \\ &= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c). \end{aligned}$$



De (2.7) tenemos que $c = y_0$, y sumando (2.6) y (2.8) obtenemos $y_- + y_+ = 2ah^2 + 2c$, por lo que

$$A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 2c + 4c) = \frac{h}{3}(y_- + y_+ + 4y_0).$$

Es decir que

$$A = \frac{h}{3}(y_- + 4y_0 + y_+).$$

Si $n = 2K$ es par y tendremos que, con las notaciones que usamos en los métodos anteriores:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^K \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^K \frac{b-a}{3n} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Si

$$S_n := \sum_{k=1}^K \frac{b-a}{3n} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}),$$

entonces

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{b-a}{3n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Algo muy importante es que se dispone de una estimación a priori del error de aproximar la integral con la suma de Simpson S_n . El siguiente teorema da cuenta de dicho error de aproximación.

Teorema 2.10

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene su cuarta derivada continua en $[a, b]$ y si $M \geq 0$ es tal que $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, el error de aproximar $\int_a^b f(x) dx$ con la suma de Simpson S_n , que lo notaremos $E_S(n) = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right|$, satisface la desigualdad

$$E_S(n) \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

Si en la estimación del error por el método de los trapecios se tiene

$$E_T(n) \leq \frac{\text{cte}}{n^2},$$

en este caso tenemos

$$E_S(n) \leq \frac{\text{cte}}{n^4},$$

lo que indica que la suma de Simpson converge más rápidamente hacia la integral que la suma T_n del método de los trapecios.

Ejemplo 2.33

Calcule $\ln 2$ con dos cifras decimales exactas, utilizando el método de Simpson.

Solución. Para calcular $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, con los mismos cálculos hechos al aplicar el método de los trapecios, y como $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ nos da que $|f^{(4)}(x)| \leq 24$ para todo $x \in [1, 2]$, tendremos que:

$$E_S(n) \leq \frac{24(2-1)^5}{180n^4} < 0.005,$$

de donde $n > \sqrt[4]{\frac{80}{3}} \approx 2.27$. Basta entonces tomar $n = 4$ (no $n = 3$ puesto que n debe ser par).

Entonces $\ln 2 \approx S_4 = \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$. Construimos una tabla de los valores que necesitamos:

k	x_k	y_k
0	1	1
1	5/4	4/5
2	3/2	2/3
3	7/4	4/7
4	2	1/2

Finalmente, $\ln 2 \approx S_4 = \frac{1}{12} \left(1 + 4\frac{4}{5} + 2\frac{2}{3} + 4\frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) \approx 0.6933$.

2.12.4 Ejercicios

1. Compare el valor exacto y la aproximación según los métodos de los trapecios y de Simpson, con el valor de M dado, de:

(a) $\int_0^2 (x^2 + 1) dx, M = 4$

(b) $\int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx, M = 6$

2. Compare los resultados obtenidos con los métodos de Simpson y de los trapecios:

(a) $\int_1^7 \frac{dx}{x}, M = 6$ (b) $\int_0^2 \frac{dx}{2x+3}, M = 4$ (c) $\int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx, M = 8$

3. Determine el mínimo valor de n necesario para calcular una aproximación de 3 cifras decimales exactas, con los métodos de Simpson y de los trapecios:

(a) $\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$ (b) $\int_0^2 \frac{4}{1+x^2} dx$ (c) $\int_0^2 \frac{dx}{2x+3}$ (d) $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$

4. Calcule el error cometido para calcular con los métodos de los trapecios y de Simpson y compárelos con las estimaciones a priori $E_T(n)$ y $E_S(n)$ del error (tenga en cuenta el valor exacto):

(a) $\int_0^4 x^2 dx, M = 4$ (b) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{4}{1+x^2} dx, M = 8$

5. Teniendo en cuenta que $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$, utilice los métodos de los trapecios y de Simpson para aproximar π . Observe cómo el segundo método converge más rápidamente.

Capítulo 3

Aplicaciones de la integral definida

3.1 La ofrenda de oro

El custodia que se exhibía en el Museo de Arte Religioso de las hermanas de la Concepción, en Riobamba, fue robado el 13 de octubre de 2007. La preciosa joya elaborada en la época colonial estaba confeccionada con varios kilogramos de oro y decenas de diamantes, rubíes, perlas y otras piedras preciosas, y medía 1.87 metros de altura.

Los ladrones la fundieron casi en su totalidad por lo que la policía pudo recuperar apenas una sección de su parte superior. La comunidad católica no pudo recuperarse de su consternación y decidió compensar la pérdida.

Para ello se realizó una colecta entre los feligreses y se ordenó la elaboración de una gran cruz de oro macizo en cuya cúspide se soldaría la parte recuperada del sagrario. La cruz mediría 80 centímetros de alto, 50 centímetros de ancho y el diámetro del larguero y del travesaño, ambos cilíndricos, sería de 8 centímetros.

Se llamó al más reconocido joyero del lugar y se le pidió que elaborara un presupuesto para saber si se podría pagar la obra con el dinero recaudado, o habría necesidad de más. El joyero sabe que cada centímetro cúbico de oro pesa 19.30 gramos y que, dada la cantidad de metal, lo podría comprar a razón de 31.60 dólares cada gramo. Pero el artesano encuentra difícil calcular el volumen de metal necesario para poder determinar la cantidad de oro y, por ende, su costo. ¿Cómo podemos calcular ese volumen?

Para hacerlo, veamos algunos conceptos básicos.

3.2 Definición de longitud, área y volumen

Para definir la longitud de un segmento de recta, el área de una figura plana y el volumen de un sólido, se necesita, en cada caso, una unidad de medida. La unidad de longitud será un segmento de recta que llamaremos u_L . La unidad de área será un cuadrado, cada lado del cual será un segmento igual a $1 u_L$, al que llamaremos u_A . Simbólicamente $u_A = (u_L)^2$. La unidad de volumen será un cubo, cada arista del cual será un segmento igual a $1 u_L$ al que llamaremos u_V . Simbólicamente, $u_V = (u_L)^3$.

La longitud de un segmento γ se expresa

$$\text{longitud}(\gamma) = l u_L,$$

donde $l \in [0, \infty[$ es el número de veces que “cabe” el segmento u_L en γ .

El área de una figura plana Ω se escribe

$$\text{área}(\Omega) = a u_A,$$

donde $a \in [0, \infty[$ es el número de cuadrados u_A que “cabén” en la figura Ω .

El volumen de un sólido Ψ se escribe

$$\text{volumen}(\Psi) = v u_V,$$

donde $v \in [0, \infty[$ es el número de cubos u_V que “cabén” en el sólido Ψ .

Probamos ya que si Ω es un rectángulo para el cual

$$\begin{aligned} \text{longitud}(\text{base}) &= b u_L, & b \in]0, \infty[, \\ \text{longitud}(\text{altura}) &= h u_L, & h \in]0, \infty[\quad \text{y} \\ \text{área}(\Omega) &= a u_A, & a \in]0, \infty[, \end{aligned}$$

tendremos que

$$a = b \cdot h$$

o también

$$\text{área}(\Omega) = \text{longitud}(\text{base}) \cdot \text{longitud}(\text{altura}).$$

Análogamente, si Ψ es un paralelepípedo con aristas longitudinal A , transversal B y vertical C , y si

$$\begin{aligned} [A] = \text{longitud}(A) &= a u_L, & a \in]0, \infty[, \\ [B] = \text{longitud}(B) &= b u_L, & b \in]0, \infty[, \\ [C] = \text{longitud}(C) &= c u_L, & c \in]0, \infty[, \quad \text{y} \\ [\Psi] = \text{volumen}(\Psi) &= v u_V, & v \in]0, \infty[, \end{aligned}$$

tendremos que

$$v = a \cdot b \cdot c.$$

Sea ahora un sólido cilíndrico C , cuya base es una figura plana B y su generatriz perpendicular a la base es un segmento H , llamado altura. Si se conoce que

$$\begin{aligned} [B] = \text{medida (superficial) de } B &= \text{área}(B) = b u_A, & b \in]0, \infty[, \\ [H] = \text{medida (longitudinal) de } H &= \text{longitud}(H) = h[u_L], & h \in]0, \infty[, \\ [C] = \text{medida (volumétrica) de } C &= \text{volumen}(C) = v[u], & v \in]0, \infty[, \end{aligned}$$

se puede probar que

$$v = b \cdot h.$$

O también si asumimos que $u_A = u_L^2$, $u_V = u_A \cdot u_L = u_L^3$, es decir si hemos tomado para la longitud, área y volumen unidades compatibles, podemos probar que

$$\text{volumen}(\text{cilindro}) = \text{área}(\text{base}) \times \text{longitud}(\text{altura}).$$

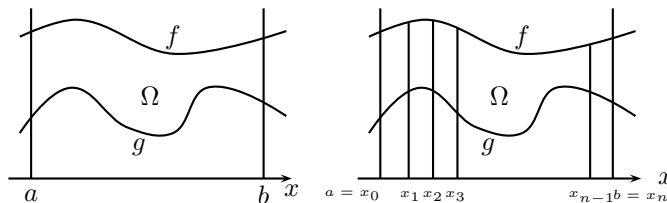
Esta fórmula sigue siendo válida si tomamos unidades diferentes a las compatibles para longitud, área y volumen, pero no consideramos esta posibilidad aquí. Más bien asumiremos que las unidades de longitud, área y volumen son compatibles y, como no habrá lugar a errores, por simplicidad pondremos, por ejemplo para el sólido cilíndrico C :

$$\begin{aligned} \text{longitud}(H) &= h, \text{ en vez de } h u_L, \\ \text{área}(B) &= b, \text{ en vez de } b u_A, \\ \text{volumen}(C) &= v, \text{ en vez de } v u_V, \text{ etcétera.} \end{aligned}$$

3.3 El área de una figura plana

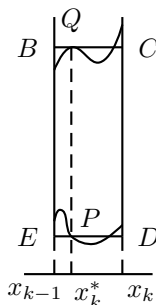
Sean $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas.

Consideremos la figura Ω comprendida entre las gráficas de f y g y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$. En el dibujo, por comodidad, se considera que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, pero esta restricción no es indispensable.



Como ya hicimos en el problema introductorio de la integral definida, tomemos una partición $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ y una partición asociada $\mathcal{P}^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$. Consideremos la franjita vertical Ω_k de Ω limitada por las gráficas de f y g y por las rectas $x = x_{k-1}$, $x = x_k$, $1 \leq k \leq n$. Si aproximamos el área de la franjita Ω_k con un rectángulo R_k de vértices $E(x_{k-1}, g(x_k^*))$, $B(x_{k-1}, f(x_k^*))$, $C(x_k, f(x_k^*))$ y $D(x_k, g(x_k^*))$:

$$\text{área}(\Omega_k) = a_k \approx \text{área}(EB CD) = \text{longitud}(ED) \cdot \text{longitud}(PQ).$$



Como

$$\text{longitud}(ED) = (x_k - x_{k-1}) = \Delta x_k,$$

y

$$\text{longitud}(PQ) = |f(x_k^*) - g(x_k^*)|,$$

tendremos que

$$\text{área}(\Omega_k) = a_k \approx \text{área}(EB CD) = |f(x_k^*) - g(x_k^*)| \Delta x_k.$$

Si $\text{área}(\Omega) = A$, como

$$\text{área}(\Omega) = \sum_{k=1}^n \text{área}(\Omega_k)$$

tendremos que

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \approx \sum_{k=1}^n |f(x_k^*) - g(x_k^*)| \Delta x_k.$$

La última sumatoria es una suma de Riemann para la función dada por

$$x \mapsto |f(x) - g(x)|$$

y como se observa que para figuras sencillas la aproximación es mejor si se toma $\|\mathcal{P}\|$ cada vez más pequeño, podemos definir

$$\text{área}(\Omega) = A; \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Naturalmente, si para todo $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$, se tendrá

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ejemplo 3.34

Hallar el área de la figura limitada por las gráficas de $y = 4 - x^2$ y de $2y = x + 5$.

Solución. Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ 2y = x + 5 \end{cases}$$

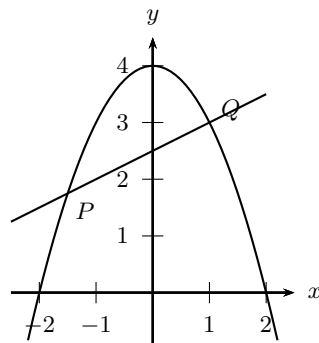
se obtienen dos puntos de intersección $P(-\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$ y $Q(1, 3)$ (los que se observan en la figura siguiente).

Para $-\frac{3}{2} \leq x \leq 1$ se tiene que

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \leq 4 - x^2 = f(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left[(4 - x^2) - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \right) \right] dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} - x^2 \right) dx \\ &= \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-\frac{3}{2}}^1 \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{9}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{27}{8} \right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{16} - \frac{1}{24} \cdot 35 \\ &= \frac{5}{48} (36 + 3 - 14) \\ &= \frac{125}{48}. \end{aligned}$$



El área de la figura es pues $\frac{125}{48}$.

A figuras que, como Ω , son el gráfico de conjuntos de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

se les llama **figuras de tipo I**.

Si son conjuntos de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

con $\varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi(y) \leq \psi(y)$ para todo $y \in [c, d]$ se les llama **figuras de tipo II**. En este caso, se obtiene análogamente que

$$A = \int_c^d [\psi(y) - \varphi(y)] dy.$$

3.3.1 Ejercicios

1. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones o funciones dadas:

- | | |
|---|--|
| (a) $y = 0, y = 1 - x^2$ | (m) $y = 2(4 - x^2), y = 4 - x^2$ |
| (b) $y = 0, y = 1 - x^2, x = -1/2, x = 1/2$ | (n) $y = 1/x^2, y = x, x = 2$ |
| (c) $y = \sin x, y = 0, x = \pi/2, x = \pi$ | (o) $y = 1 - x^{2/3}, y = x^{2/3} - 1$ |
| (d) $y = 0, y = \sin x, x = \pi/3, x = \pi/2$ | (p) $y = x^2 - 2x - 3, y = 2x + 2, x = -1,$
$x = 6$ |
| (e) $y = 1 + \sqrt{x}, y = 0, x = 4$ | (q) $y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 1$ |
| (f) $y = (x^2 - 1)/x^2, y = 0, x = 1, x = 3$ | (r) $y = x, y = x^2, x = 0, x = 1$ |
| (g) $y = x, y = -3x, x = 2$ | (s) $x = y^2 - 6y + 1, x = -y^2 + 2y + 1$ |
| (h) $y = x^4, y = 16$ | (t) $x = y^3 - y, x = y + 4, y = -1,$
$y = 1$ |
| (i) $y = x^3, y = 27, x \geq -1$ | (u) $x = y^3 - y, x = 0$ |
| (j) $y = \sqrt{x}, y = x^2$ | |
| (k) $y = \sqrt[n]{x}, y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ | |
| (l) $y = \sqrt[n]{x}, y = x^n, n \text{ impar}, x \geq 0$ | |

2. Halle el área de la representación geométrica del conjunto Ω :

- (a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3}x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$
 (b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq (1/2)\sqrt{4 - x^2}\}$
 (c) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}, a, b > 0$
 (d) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}, a > 0$

3. Calcule el área de la región indicada integrando respecto a x y luego respecto a y (es decir, viéndola como región o unión de regiones tipo I y luego de tipo II):

- (a) Limitadas por las gráficas de $y^2 = -x - 2, y = 2, y = -2, y = 2(x - 1)$
 (b) Triángulo de vértices $P(1, 1), Q(3, 0), R(2, 5)$

3.4 Cálculo de volúmenes

3.4.1 Volumen de un cilindro

Un subconjunto Ω del espacio geométrico de 3 dimensiones E^3 se llama cilindro recto si existen una figura plana $B \subset E^3$ y un segmento $l \subset E^3$ perpendicular a B , tales que al cortar Ω con una recta paralela al segmento l , se obtiene un segmento de la misma longitud que l y al cortarlo con un plano paralelo a B se obtiene una figura de la misma forma y área que B .

Si $A u_A$ = área de B y $H u_L$ = longitud de l , entonces, si el volumen de $\Omega = V u_V$, se tiene que

$$V = AH, \quad (3.1)$$

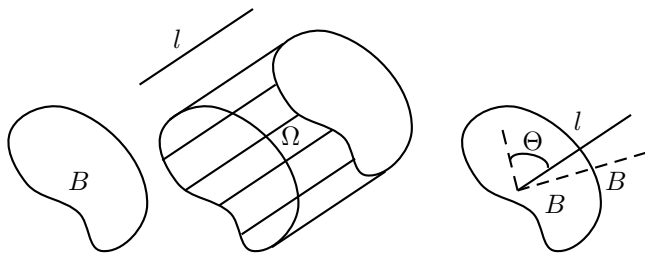
cuando las unidades de longitud, área y volumen son compatibles. Es decir, si se puede escribir simbólicamente

$$\begin{aligned} u_A &= u_L^2, \\ u_V &= u_A u_L = u_L^3, \end{aligned}$$

lo que hacemos cuando u_A es un cuadrado cuyo lado mide $1 u_L$ y si u_V es un cubo cuya arista mide $1 u_L$ y, por ende, sus lados miden $1 u_A$.

Si B y l no son perpendiculares se dice que el cilindro es oblicuo. En este caso, si θ es el ángulo entre B y l , se tiene que

$$V = AH \sin \theta. \quad (3.2)$$



Recordemos que el ángulo entre una recta l y un plano B es el complementario del ángulo entre la recta l y la recta n normal al plano B .

Para probar (3.1) recordemos que como aplicación de la integral definida aprendimos a calcular el área de figuras planas que son la unión finita de figuras simples de tipo I y de tipo II, a las que definimos así:

Definición 3.1

Sea $B \subset E^2$. Se dice que:

1. B es una *figura de tipo I* si es la representación gráfica de un conjunto de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}, \quad (3.3)$$

donde $a < b$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

2. B es una *figura de tipo II* si es la representación gráfica de un conjunto de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}, \quad (3.4)$$

donde $a < b$, $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $\varphi(y) \leq \psi(y)$ para todo $y \in [a, b]$.

En estos casos, si $A u_A = \text{área de } B$, con la unidad de área u_A compatible con la unidad de longitud u_L , vimos que

$$A = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx \quad (3.5)$$

si B es de tipo I y

$$A = \int_a^b [\psi(y) - \varphi(y)] dy \quad (3.6)$$

si B es de tipo II.

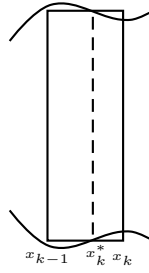
Para demostrar (3.5), para una partición arbitraria $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y para $P^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, donde $x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, aproximamos cada banda B_k , que es la representación del conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

con el rectángulo R_k que representa a

$$[x_{k-1}, x_k] \times [g(x_k^*), h(x_k^*)]$$

cuya base mide $\Delta x_k u_L$, con $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, y cuya altura mide $[h(x_k^*) - g(x_k^*)] u_L$.



Por ello, si

$$\text{área}(B_k) = \Delta A_k u_A,$$

se tiene que

$$\Delta A_k \approx [h(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k,$$

y por ende,

$$A = \sum_{k=1}^n \Delta A_k \approx \sum_{k=1}^n [h(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k.$$

Esta última expresión es una suma de Riemann y, como g y h y con ellas $h - g$ son continuas, existe su límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$ sin importar los valores $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ tomados, por lo que definimos

$$A = \text{área}(B) = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx$$

y de manera análoga obtuvimos (3.6).

Finalmente, antes de demostrar (3.1), recordemos que si Ω es un paralelepípedo cuyas aristas miden $a u_L$, $b u_L$ y $c u_L$, respectivamente, y si su volumen es $V u_V$, donde u_V es compatible con u_L , tenemos

$$V = abc. \quad (3.7)$$

Como sus caras son rectángulos, el área de los mismos será $ab u_A$, $bc u_A$ y $ca u_A$, respectivamente, por lo que la fórmula (3.1) generaliza a (3.7) que puede escribirse

$$V = A_{abc} = A_{bca} = A_{cab}, \quad (3.8)$$

donde $A_{ab} = ab$, $A_{bc} = bc$, $A_{ca} = ca$.

Demostración de (3.1) cuando la base es de tipo I. Si ubicamos el cilindro Ω en el espacio de modo que sea la representación gráfica del conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), 0 \leq z \leq H\}$$

y tomamos como en líneas atrás, una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y $P^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, donde $x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k$ con $1 \leq k \leq n$, el cilindro Ω se “partirá” en “rodajas” Ω_k que son la representación de los conjuntos

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, g(x) \leq y \leq h(x), 0 \leq z \leq H\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Cada rodaja Ω_k puede ser aproximada por el paralelepípedo P_k , que es la representación gráfica del conjunto

$$[x_{k-1}, x_k] \times [g(x_k^*), h(x_k^*)] \times [0, H].$$

Como los lados de P_k miden, respectivamente

$$\Delta x_k u_L, \quad [h(x_k^*) - g(x_k^*)] u_L, \quad \text{y} \quad H u_L,$$

el volumen de P_k será

$$\text{volumen } P_k = \Delta x_k [h(x_k^*) - g(x_k^*)] H \text{ u}_V.$$

Podemos entonces aproximar

$$\Delta V_k \text{ u}_V = \text{volumen}(\Omega_k) \approx \text{volumen}(P_k) = H[h(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k \text{ u}_V$$

lo que nos da

$$\Delta V_k \approx H[h(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k.$$

Entonces

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx H \sum_{k=1}^n [h(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k.$$

Esta última sumatoria es la misma suma de Riemann que obtuvimos para el cálculo del área, multiplicada por H . Por ello existe su límite si $\|P\| \rightarrow 0$, por lo que

$$V = H \int_a^b [h(x) - g(x)] dx = H \cdot A, \quad (3.9)$$

donde $A \text{ u}_A$ es el área de la base B del cilindro, y por ello

$$A = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx.$$

La expresión (3.9) es la misma que (3.1) en este caso.

Análogamente, puede demostrarse el caso cuando la base B es de tipo II y, combinando estos resultados, probar que (3.1) tiene lugar si la base B es la unión finita de figuras de tipo I y o II.

En lo que sigue, por simplificar la escritura escribiremos, por ejemplo, si $B \subset E^2$ es una figura plana de tipo I, que

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

donde “=” significará “es la representación gráfica de”. Igualmente, para el cilindro Ω escribiremos, por ejemplo, si su base es B y su altura mide $H \text{ u}_L$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, z \in [0, H]\}.$$

3.4.2 Cálculo de volúmenes por elementos de sección (rodajas)

Sea $K \subset E^3$ es un sólido de la forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, (y, z) \in B_x\},$$

donde $a < b$, B_x es una figura plana cuya área $A(x) \text{ u}_A$ es conocido para $x \in [a, b]$. Probemos que, en este caso, si $V \text{ u}_V = \text{volumen}(K)$, se tiene, en caso de que $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua en $[a, b]$, que

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (3.10)$$

Se tiene lo mismo, naturalmente, si vemos a K como

$$K = \bigcup_{a \leq x \leq b} B_x,$$

donde B_x son figuras planas de área conocida $A(x)$ u_A y perpendiculares al eje Ox .

Como en los casos anteriores, tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y $P^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, con $x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k$, $1 \leq k \leq n$.

En este caso K se “divide” en “rodajas” K_k de la forma

$$K_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, (y, z) \in B_x \right\},$$

cuyo volumen ΔV_k u_V puede aproximarse con el volumen del cilindro Ω_k

$$\Omega_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, (y, z) \in B_{x_k^*} \right\}.$$

Como volumen $(\Omega_k) = A(x_k^*)\Delta x_k$ u_V, tendremos que

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^n A(x_k^*)\Delta x_k.$$

Esta última es la suma de Riemann cuyo límite si $\|P\| \rightarrow 0$ existe, puesto que supusimos que $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$. Se tiene entonces que

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Ejemplo 3.35

Probemos que si K es un cono circular recto tal que el radio de su base mide R u_L y la altura del cono es H u_L, se tiene que

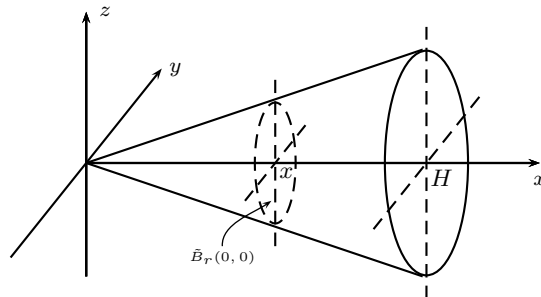
$$V = \frac{\pi}{3} R^2 H.$$

Solución.

Podemos ver que

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq H, (x, y, z) \in \tilde{B}_r(0, 0), r = \frac{R}{H}x \right\},$$

donde $\tilde{B}_r(0, 0)$ es el círculo de radio r , centrado en $(x, 0, 0)$ y perpendicular al eje Ox .



Aquí

$$A(x) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{H}x \right)^2,$$

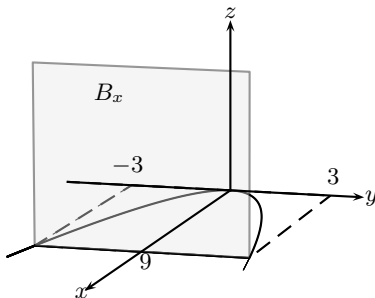
de donde

$$V = \int_0^H \pi \left(\frac{R}{H}x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{\pi}{3} R^2 H.$$

Ejemplo 3.36

Calcular el volumen del sólido K cuya base está en el plano xy y es limitada por las gráficas de las ecuaciones $x = y^2$, $x = 9$, y sus secciones transversales B_x son perpendiculares al eje Ox y tienen la forma de un rectángulo cuya altura es el doble de su base.

Solución.



En la curva de ecuación $x = y^2$, si $y \geq 0$, se tiene $y = \sqrt{x}$. La base B_x mide $2y \text{ u}_L = 2\sqrt{x} \text{ u}_L$. La altura de B_x medirá $4\sqrt{x} \text{ u}_L$. Si $\text{área}(B_x) = A(x) \text{ u}_A$, tendremos que

$$A(x) = 2\sqrt{x}4\sqrt{x} = 8x, \quad x \in [0, 9]$$

y si $V \text{ u}_V = \text{volumen}(K)$, tendremos

$$V = \int_0^9 A(x) dx = \int_0^9 8x dx = 4x^2 \Big|_0^9 = 324.$$

Finalmente,

$$\text{volumen}(K) = 324 \text{ u}_V.$$

3.4.3 Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por arandelas

Un caso particular, similar al del ejemplo del cono, es el de los sólidos obtenidos haciendo girar una figura plana de tipo I dada, alrededor del eje Ox .

Sea D la figura de tipo I de la forma

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq g(x) \leq y \leq h(x) \right\},$$

con $a < b$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$, no negativas y tales que $g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Sea K el sólido obtenido al girar D alrededor del eje Ox . O sea que

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq g(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq h(x) \right\}.$$

A K se lo llama sólido de revolución.

Evidentemente es un caso particular del anterior con

$$K = \bigcup_{a \leq x \leq b} B_x,$$

donde B_x es la corona que queda entre los círculos de radios $g(x)$ y $h(x)$, respectivamente.

Por ello, si $\text{área}(B_x) = A(x) \text{ u}_A$, tendremos que

$$A(x) = \pi [h(x)]^2 - \pi [g(x)]^2 = \pi ([h(x)]^2 - [g(x)]^2),$$

de donde

$$V = \pi \int_a^b ([h(x)]^2 - [g(x)]^2) dx. \quad (3.11)$$

A manera de ejercicio, escriba la fórmula correspondiente con los ajustes necesarios a las hipótesis para el caso cuando el eje de rotación es paralelo a Ox .

Si D es de tipo II, es decir,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, 0 \leq \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

y K se obtiene al rotar alrededor del eje Oy , obtendremos, análogamente, que:

$$V = \pi \int_a^b ([\psi(y)]^2 - [\varphi(y)]^2) dy. \quad (3.12)$$

El nombre de método de cálculo “por arandelas” obedece a la forma de las secciones transversales al eje de rotación.

3.4.4 Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por cortezas

Sea un sólido K que se obtiene haciendo girar una figura plana D de tipo I alrededor del eje Oy o un eje paralelo a Oy . (Similar resultado se tiene si D es de tipo II y se la hace rotar alrededor de Ox o de un eje paralelo a Ox .)

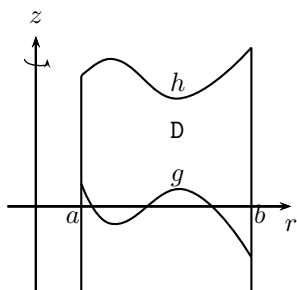
Se tiene entonces, si cambiamos por comodidad x por r e y por z :

$$D = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq r \leq b, g(r) \leq z \leq h(r)\},$$

con $0 \leq a < b$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y $g(r) \leq h(r)$ para todo $r \in [a, b]$.

Entonces, al hacer girar D alrededor de Oz se obtiene el sólido

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b, g(\sqrt{x^2 + y^2}) \leq z \leq h(\sqrt{x^2 + y^2})\}.$$



Notemos antes que si T es un tubo cuyos radios interior, exterior y altura miden r_{UL} , R_{UL} y H_{UL} , respectivamente, y si V_T es el volumen del tubo, entonces

$$V_T = \pi R^2 H - \pi r^2 H = \pi [R^2 - r^2] H. \quad (3.13)$$

Consideraremos, como en los casos anteriores, una partición $P = \{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y para $P^* = \{r_1^*, r_2^*, \dots, r_n^*\}$. En este caso tomaremos, para $k = \{1, 2, \dots, n\}$, $r_k^* = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$ el valor medio de r_k y r_{k-1} .

Al rotar

$$D_k = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r_{k-1} \leq r \leq r_k, g(r) \leq z \leq h(r)\}$$

alrededor de Oz , se obtienen “cortezas” K_k del sólido K , de la forma

$$K_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_{k-1} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_k, g(\sqrt{x^2 + y^2}) \leq z \leq h(\sqrt{x^2 + y^2})\}.$$

A estas cortezas las aproximamos con “tubitos” T_k de la forma

$$T_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_{k-1} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_k, \quad g(r_k^*) \leq z \leq h(r_k^*) \right\}$$

Si $\Delta V_k \text{ uV} = \text{volumen}(T_k)$ y, teniendo en cuenta (7.13), tenemos

$$\begin{aligned} \text{volumen}(T_k) &= \pi(r_k^2 - r_{k-1}^2) [h(r_k^*) - g(r_k^*)] \text{ uV} \\ &= \pi(2r_k^*) [h(r_k^*) - g(r_k^*)] \Delta r_k \text{ uV}, \end{aligned}$$

puesto que $r_k^2 - r_{k-1}^2 = (r_k + r_{k-1})(r_k - r_{k-1}) = 2 \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \Delta r_k = 2r_k^* \Delta r_k$.

Podemos entonces aproximar V así:

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx 2\pi \sum_{k=1}^n r_k^* [h(r_k^*) - g(r_k^*)] \Delta r_k.$$

La última es una suma de Riemann para la función f que es continua en $[a, b]$ y está definida por $f(r) = 2\pi r [h(r) - g(r)]$. Existe por lo tanto su límite si $\|P\| \rightarrow 0$, independientemente de los r_k^* tomados, en particular para los que nos sirvieron en nuestro razonamiento.

Se tiene entonces que

$$V = 2\pi \int_a^b r [h(r) - g(r)] dr. \quad (3.14)$$

Volviendo a las variables tradicionales x e y , si

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x) \right\}$$

gira alrededor del eje Oy , y si $V \text{ uV}$ es el volumen del sólido K así obtenido

$$V = 2\pi \int_a^b x [h(x) - g(x)] dx. \quad (3.15)$$

Análogamente si $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq y \leq b, \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \right\}$ gira alrededor del eje Ox , tendremos que

$$V = 2\pi \int_a^b y [\psi(y) - \varphi(y)] dy. \quad (3.16)$$

donde $V \text{ uV}$ es el volumen del sólido de revolución K así obtenido.

A manera de ejercicio, obtenga las fórmulas correspondientes indicando los cambios necesarios a las hipótesis, si se cambia el eje de rotación tomando en vez de Oy un eje paralelo a él en el primer caso y a Ox en el segundo caso.

Ejemplo 3.37

Calcular el volumen $V \text{ uV}$ de una bola de radio $R \text{ uL}$ por los métodos de rodajas y de cortezas.

Solución.

- (a) *Por rodajas:* La bola $\tilde{B}_R(0,0,0)$ de radio R y centrada en el origen es generada al girar alrededor del eje Ox el semicírculo

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}.$$

Podemos aplicar (11) con $a = -R$, $b = R$, $g(x) = 0$, $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Tendremos entonces que

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-R}^R \left[\left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 - 0^2 \right] dx \\
 &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx \\
 &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R \\
 &= \pi \left[R^2 (R - (-R)) - \frac{1}{3} (R^3 - (-R)^3) \right] \\
 &= \pi R^3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{volumen} \left(\tilde{B}_R(0, 0, 0) \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ u.v.}$$

- (b) *Por cortezas*: La misma bola se genera al girar alrededor del eje Ox el mismo semicírculo que lo veremos esta vez, como de tipo II, porque también tenemos:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq R, -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2} \right\}.$$

Podemos entonces aplicar (16) con $a = 0$, $b = R$, $\varphi(y) = -\sqrt{R^2 - y^2}$, $\psi(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$. Tendremos por ello que

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^R y \left[\sqrt{R^2 - y^2} - \left(-\sqrt{R^2 - y^2} \right) \right] dy \\
 &= 4\pi \int_0^R y \sqrt{R^2 - y^2} dy \\
 &= \frac{4\pi}{-2} \int_{R^2}^0 u^{1/2} du
 \end{aligned}$$

con el cambio de variable $u = R^2 - y^2$, $du = -2y dy$ y de límites de integración

y	u
R	0
0	R^2

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \left. \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{R^2} \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3
 \end{aligned}$$

el resultado, naturalmente, es el mismo.

3.5 Modelización y solución al problema de la ofrenda de oro

3.5.1 Identificación del modelo matemático a usarse

Debemos determinar el precio P dólares de la cruz de oro. Conocemos que este metal se puede comprar a un precio unitario de 31.60 dólares por gramo. Bastaría, entonces, conocer el peso w gramos de la cruz. Tendríamos, entonces, que:

$$P = 31.60w. \quad (3.17)$$

No conocemos w , pero sí el peso específico del oro que es de 19.3 gramos por centímetro cúbico. Si conociéramos el volumen V centímetros cúbicos de la cruz podríamos calcular w con la fórmula

$$w = 19.3V. \quad (3.18)$$

Todavía no conocemos V , pero dada la forma y las dimensiones de la cruz, podemos usar como modelo el siguiente problema matemático:

PROBLEMA MATEMÁTICO

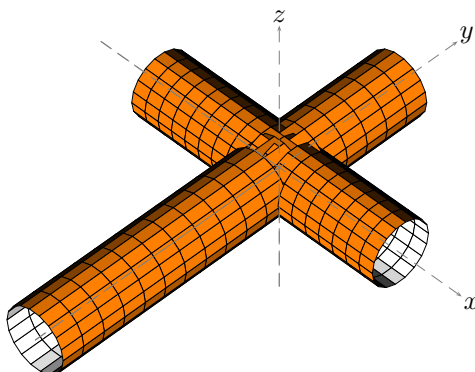
Si V_{uL}^3 es el volumen de un sólido en forma de cruz, de altura H_{uL} y envergadura L_{uL} , formada por dos cilindros circulares, ambos de radio R_{uL} . Hallar V en función de L , H y R .

En efecto, resolver este problema matemático nos es indispensable teniendo en cuenta de que, en nuestro problema, $u_L = \text{cm}$, $H = 80$, $L = 50$ y $R = 4$.

3.5.2 Solución del problema matemático del volumen de la cruz

PROBLEMA MATEMÁTICO (El volumen de la cruz)

Hallar el volumen V_{uL}^3 de un sólido en forma de cruz de altura H_{uL} y envergadura L_{uL} , formada por dos cilindros circulares de radio R_{uL} :



Para resolver el problema, “coloquemos” la cruz en posición horizontal y tomemos como sistema de coordenadas el eje x como el eje de los brazos de la cruz, el eje y como el eje del otro cilindro y el eje z , perpendicularmente al plano que contiene al cruce de los dos ejes anteriores que, en ese plano, también se cortan perpendicularmente.

Calcularemos el volumen de la cruz utilizando secciones horizontales, que son los cortes del sólido con los planos de ecuaciones $z = \text{constante}$. Esas secciones tienen forma de una cruz plana de altura H_{uL} , envergadura L_{uL} y $2r_{\text{uL}}$ será el ancho de los dos rectángulos que al cortarse forman la mencionada cruz. Sea A_{uL}^2 el área de tal cruz. Evidentemente:

$$A = 2rL + 2rH - (2r)^2 = 2r(L + H) - 4r^2. \quad (3.19)$$

Se ve que el área de la cruz plana es la suma de las áreas de los rectángulos menos el área de la intersección de los dos rectángulos, que es un cuadrado (ver la figura 3.1).

En la figura 3.2, se muestran las vistas de frente, lateral y desde arriba del sólido y su sección con un plano horizontal. Con la ayuda de este dibujo, podemos hallar la relación entre las variables r y z .

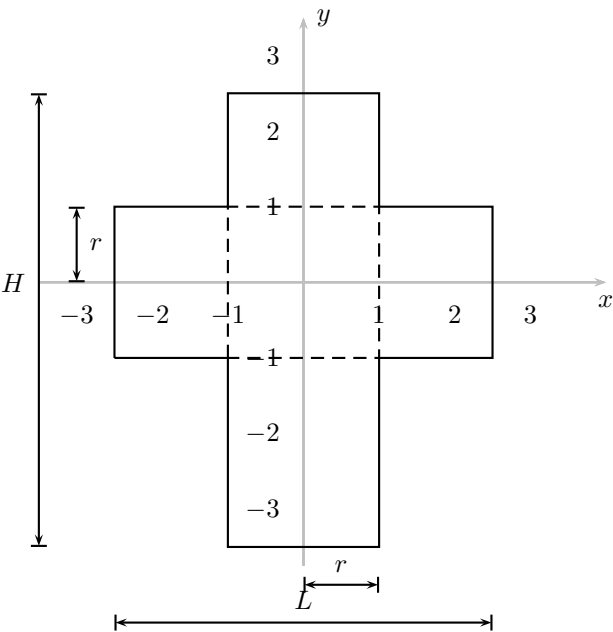


Figura 3.1: Secciones horizontales

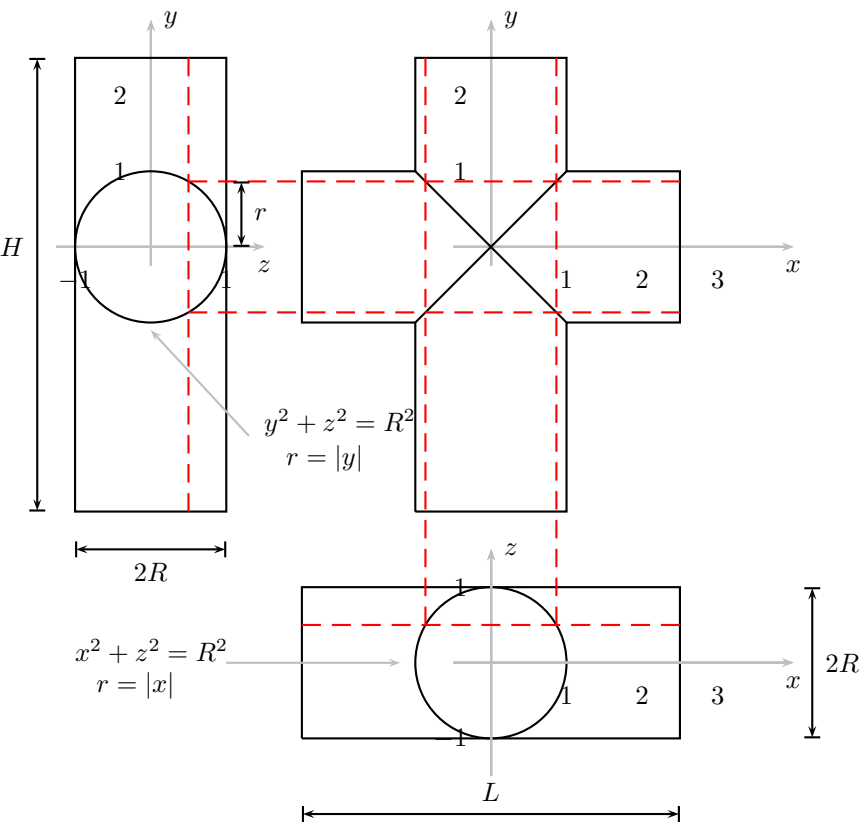


Figura 3.2: Vistas y sección horizontal de la cruz

En efecto, en la vista frontal, vemos que $r = |x|$ y, como

$$x^2 + z^2 = R^2,$$

deducimos que:

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}, \quad (3.20)$$

con $z \in [-R, R]$.

Reemplazando esta expresión en (3.19), obtenemos A en función de z :

$$A = a(z) = 2(L + H)\sqrt{R^2 - z^2} - 4(R^2 - z^2), \quad (3.21)$$

con $z \in [-R, R]$.

Para calcular V , usemos la fórmula del *volumen por secciones* (ver el teorema 3.1 más adelante). Obtendremos que:

$$V = \int_{-R}^R a(z) dz = 2 \int_0^R a(z) dz,$$

puesto que a es una función par. Por lo tanto:

$$V = 4(L + H) \int_0^R \sqrt{R^2 - z^2} dz - 8 \int_0^R (R^2 - z^2) dz.$$

Como

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - z^2} dz = \left(\frac{z}{2} \sqrt{R^2 - z^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{z}{R} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R^2}{4}$$

y

$$\int_0^R (R^2 - z^2) dz = \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_0^R = \frac{2}{3} R^3,$$

tendremos que

$$V = 4(L + H) \frac{\pi R^2}{4} - 8 \frac{2}{3} R^3 = \pi R^2(L + H) - \frac{16}{3} R^3.$$

El volumen de la cruz será, entonces

$$\left[\pi R^2(L + H) - \frac{16}{3} R^3 \right] u_L^3. \quad (3.22)$$

Como, evidentemente, el volumen de los dos cilindros que forman la cruz es

$$\pi R^2(L + H) u_L^3,$$

el volumen de su intersección será

$$\frac{16}{3} R^3 u_L^3.$$

Teorema 3.1 (Fórmula del volumen por secciones)

Si un objeto sólido Ω representado en el espacio cartesiano es la unión de sus secciones transversales, digamos al eje z , para $z \in [c, d]$, y si las áreas de dichas secciones son $a(z) u_L^2$, donde a es una función real con dominio $[c, d]$ y continua en dicho intervalo, entonces el volumen $V u_L^3$ del sólido se puede calcular mediante la fórmula:

$$V = \int_c^d a(z) dz.$$

Ahora vamos a dar uso de la solución del problema matemático del volumen de la cruz para resolver el problema de la ofrenda de oro (que no es un problema matemático).

3.5.3 Solución del problema de la ofrenda de oro

Recordemos que $H = 80$, $L = 50$ y $R = 4$ en nuestro problema, por lo que, usando la fórmula (3.22), obtenemos:

$$V = \pi(4)^2(50 + 80) - \frac{16}{3}(4)^3 = 2080\pi - \frac{1024}{3} \approx 6193.18.$$

Reemplacemos este valor en la ecuación (3.18) para obtener que

$$w = 19.3V \approx 119528.25.$$

Este valor, al ser reemplazado, a su vez, en la igualdad (3.17), produce que $P \approx 3777092.70$. El precio del oro necesario para elaborar la ofrenda será, entonces, de aproximadamente 3777092.70 dólares. ¡Cerca de 4 millones de dólares!

3.5.4 Epílogo

El valor que habían recaudado los feligreses era insuficiente para comprar el oro necesario. Se conoce que han iniciado una campaña de recolección de fondos y que han logrado ya el apoyo de organismos nacionales y extranjeros para su empresa. Por otra parte, se halla en ejecución un proyecto para reforzar las seguridades del Museo de Arte Religioso de las Hermanas de la Concepción, con los más modernos sistemas electrónicos para la custodia de los locales y para el acceso de personal y de los visitantes. Será el mismo museo, naturalmente, el que, a más de las magníficas obras de arte existentes, albergará la Ofrenda de Oro cuando ésta esté terminada.

3.5.5 Ejercicios

- Un poste en forma de pirámide truncada de secciones cuadradas tiene 10 m de altura, el cuadrado de la base es de 20 cm de lado y la superior tiene 10 cm de lado. Calcule su volumen. De igual manera, si las secciones son triángulos equiláteros o hexágonos equiláteros, calcule su volumen.
- Un sólido tiene como base un círculo de radio R m y sus secciones transversales verticales, paralelas entre sí, son cuadradas. Halle su volumen. De igual manera si las secciones son triángulos equiláteros.
- La base de un sólido es la región limitada por las gráficas $y = 4 - x^2$ e $y = 0$. Las secciones transversales son cuadrados. Halle su volumen. Proceder de la misma manera si las secciones son triángulos equiláteros o trapecios que pueden ser vistos como la mitad de un hexágono regular (es decir, la base mayor es el diámetro del hexágono, y los otros tres lados son iguales).
- La base de un sólido es un triángulo equilátero y las secciones transversales, paralelas a uno de los lados de la base, son semicírculos. Halle su volumen.
- Halle el volumen de una bola de radio R m y luego el del sólido que queda perforando la bola a lo largo de un diámetro mediante un orificio cilíndrico de diámetro r m ($0 < r < R$).
- Se hace una cruz con dos cilindros de radio R m y de largo 1 m. Halle el volumen de la cruz y la del material que debió desecharse para elaborarla.
- Halle el volumen del sólido de revolución formado al rotar la región limitada por los gráficos de las ecuaciones dadas, alrededor de la(s) recta(s) indicada(s). Use el método de rodajas o el de cortezas, ó las dos.
 - $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$; rectas $y = 0$, $x = 0$, $y = 1$
 - $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$; rectas $y = 1$, $x = 1$, $x = 0$
 - $y = 4 - x^2$, $y = 0$; rectas $x = 2$, $y = 0$, $x = -3$
 - $y = 9 - x^2$, $y = 1 - x^2/9$; rectas $y = 0$, $x = -3$
 - $y = \sqrt{x+1}$, $x = 3$, $y = 0$; rectas $x = 3$, $y = 0$
 - $y = |\sin x|$, $y = 0$; rectas $y = 0$, $y = -1$
 - $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; recta $y = 0$

- (h) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; rectas $x = 3$, $x = 1$ 8. Halle el volumen de una bola de radio R m.
- (i) $y = x^{1/3} + 1$, $y = -x + 1$, $x = 1$; rectas $x = 1$, $x = 2$ 9. Halle el volumen de un cono circular recto de altura H m y radio de la base R m.
- (j) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{1-x}$, $y = 0$, recta $y = 0$
- (k) $x^2 - y^2 = 1$, $x = \sqrt{10}$, $y \geq 0$; recta $y = 0$ 10. Pruebe que una pirámide recta, cuya base es un polígono de área B y su altura es H m, tiene un volumen de $(1/3)BH$.
- (l) $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, $y \geq a$, $a > b > 0$; recta $y = 0$

3.6 Longitud de arco

Dada una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, nos planteamos el problema de hallar la longitud de su gráfica. Supondremos que f es derivable en $]a, b[$. Se dice entonces que dicha gráfica es una *curva lisa*.

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y = f(x)\}.$$

Consideremos una partición P de $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Se divide entonces f en segmentos f_k de la forma

$$f_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, y = f(x)\},$$

con $1 \leq k \leq n$. Cada segmento lo aproximaremos con la cuerda C_k que une los puntos $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ y $P_k(x_k, y_k)$, donde $y_j = f(x_j)$ con $0 \leq j \leq n$.

Es decir

$$\Delta s_k u_L = \text{longitud}(f_k) \approx \text{longitud}(C_k).$$

Si $\Delta s_k u_L = \text{longitud}(f_k)$, tenemos que

$$\Delta s_k \approx \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \quad (3.23)$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Si aplicamos el teorema del valor medio para f en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ obtenemos que existe $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x_k} = f'(x_k^*),$$

de donde

$$\Delta y_k = f'(x_k^*) \Delta x_k.$$

Reemplazando esta expresión en (3.23) obtenemos

$$\Delta s_k \approx \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(x_k^*) \Delta x_k]^2} = \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k,$$

de donde

$$s = \sum_{k=1}^n \Delta s_k \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k.$$

La última es una suma de Riemann en $[a, b]$ para la función $x \mapsto \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Si esta función es integrable, por ejemplo si es continua en $[a, b]$, tendremos entonces la posibilidad de definir a la longitud s_{u_L} de la gráfica de f mediante

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.24)$$

Ejemplo 3.38

Calcular la longitudes s_{UL} de la gráfica de la ecuación $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$ si $x \in [2, 4]$.

Solución. Ponemos $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$, de donde:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{6}(3x^2 - 3x^{-2}) = \frac{1}{2}(x^2 - x^{-2}), \\ [f'(x)]^2 &= \frac{1}{4}(x^4 - 2 + x^{-4}) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{x^{-4}}{4}, \\ 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{x^{-4}}{4} \right) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x^{-4}}{4} = \left[\frac{1}{2}(x^2 + x^{-2}) \right]^2, \\ \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= \frac{1}{2}(x^2 + x^{-2}) \\ &\text{puesto que } x > 0. \end{aligned}$$

Fácilmente se ve que la función

$$x \mapsto \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{1}{2}(x^2 + x^{-2})$$

es continua y, por lo tanto, integrable, razón por la cual finalmente podemos escribir

$$\begin{aligned} s &= \int_2^4 \frac{1}{2}(x^2 + x^{-2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - x^{-1} \right) \Big|_2^4 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(4^3 - 2^3) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(64 - 8) + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{24}(224 + 3) \\ &= \frac{227}{24}. \end{aligned}$$

3.6.1 Ejercicios

1. Halle la longitud del gráfico de la ecuación dada en el intervalo J que se indica.

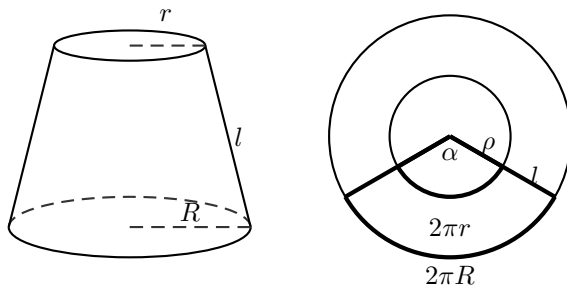
- | | |
|---|--|
| (a) $y = 3x + 1$, $J = [1, 3]$ | (f) $y = (1/5)x^5 + (1/12)x^{-3}$, $J = [1, 2]$ |
| (b) $y = x^{3/2} + 1$, $J = [0, 9]$ | (g) $y = x^2$, $J = [1, 2]$ |
| (c) $y = (2/3)(x^2 + 1)^{3/2}$, $J = [0, 1]$ | (h) $y = \sin x$, $J = [\pi/6, \pi/3]$ |
| (d) $y = (1/3)x^{3/2} - x^{1/2}$, $J = [1, 4]$ | (i) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$ |
| (e) $y = (1/4)x^4 + (1/8)x^{-2}$, $J = [2, 3]$ | |

2. Verifique la conocida fórmula para la longitud de una circunferencia de radio R m.

3.7 Área de superficies de revolución

Al girar una curva C alrededor de un eje, se genera una superficie S llamada superficie de revolución. Cuando la curva es el gráfico de una función f que gira alrededor de uno de los ejes coordenados o un eje paralelo a uno de ellos, se puede, en ciertos casos, calcular el área de dicha superficie. Antes de hacerlo veamos dos resultados previos.

1. Calculemos el área de la superficie lateral S de un cono recto truncado cuya generatriz L tiene longitud l u_L, y sus bases tienen radios que miden r u_L y R u_L, respectivamente. Pondremos $\text{área}(S) = A$ u_A. Dicha superficie lateral es parte de una corona circular como se indica en el dibujo.



El radio del círculo “grande” mide $(\rho + l)$ u_L, el del círculo interior ρ u_L. Sea α el ángulo central. Conocemos que el área de un sector circular de ángulo central α y radio ρ u_L es $a(\rho)$ u_A, con

$$a(\rho) = \frac{\alpha}{2} \rho^2.$$

Si $\text{área}(s) = A$ u_A, entonces

$$A = a(\rho + l) - a(\rho) \quad (3.25)$$

$$= \frac{\alpha}{2} (\rho + l)^2 - \frac{\alpha}{2} \rho^2 \quad (3.26)$$

$$= \frac{\alpha l}{2} (2\rho + l). \quad (3.27)$$

Calculemos α y ρ . Como $\alpha = \frac{2\pi r}{\rho} = \frac{2\pi R}{\rho + l}$, de la segunda igualdad obtenemos

$$\rho = \frac{rl}{R - r}, \quad (3.28)$$

por lo que

$$\alpha = \frac{2\pi r}{\rho} = \frac{2\pi r}{\frac{rl}{R-r}} = 2\pi \frac{R - r}{l}. \quad (3.29)$$

Reemplazamos (3.28) y (3.29) en (3.27) y obtenemos

$$A = 2\pi \frac{R - r}{l} \frac{l}{2} \left(\frac{2rl}{R - r} + l \right) = \pi l (R + r).$$

Tenemos entonces que

$$A = \pi l (R + r). \quad (3.30)$$

Notemos que (3.30) se parece mucho a la fórmula para el área de un trapecio de bases $2\pi R$ u_L y $2\pi r$ u_L y de altura l u_L.

2. Conocemos que si una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable. Es decir existe

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \quad (3.31)$$

sin importar los x_k^* , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tomados.

Si f está dado por $f(x) = g(x)h(x)$, donde $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas, evidentemente f es continua y existe el límite escrito en (3.31) para la correspondiente suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n g(x_k^*) h(x_k^*) \Delta x_k.$$

Se puede probar que si en vez de $g(x_k^*)$ tomamos $g(s_k)$ con $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y en vez de $h(x_k^*)$ tomamos $h(t_k)$ con $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, el límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$ sigue existiendo y es el mismo, sin importar los valores de s_k y t_k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, que se hayan tomado. Entonces

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(s_k) h(t_k) \Delta x_k = \int_a^b g(x) h(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.32)$$

Lo mismo sucede si f es el producto no de dos sino de tres o más funciones continuas. Por ejemplo, si

$$f(x) = g(x) h(x) j(x),$$

donde g , h y j son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) h(x) j(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(s_k) h(t_k) j(u_k) \Delta x_k, \quad (3.33)$$

donde para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $s_k, t_k, u_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Podemos ahora calcular el área de una superficie de revolución.

3.7.1 Caso con giro alrededor del eje Ox .

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa cuya derivada existe y es continua en $[a, b]$. Consideremos la superficie S generada al girar el gráfico de f alrededor del eje Ox . Con las mismas notaciones del cálculo de la longitud del arco del gráfico de f , luego de realizar en $[a, b]$ la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, recordemos que si aproximamos los segmentos f_k con las cuerdas C_k que unen los puntos $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ y $P_k(x_k, y_k)$ y si $\text{longitud}(f_k) = \Delta s_k$ uL, obtuvimos que

$$\Delta s_k \approx \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k,$$

con $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

La superficie S_k generada al girar el segmento f_k del gráfico de f alrededor del eje Ox , lo aproximaremos con la superficie generada al girar la cuerda C_k alrededor del mismo eje Ox . Pero esta última es la superficie lateral K_k del cono truncado de radios y_{k-1} e y_k . Por lo tanto

$$\text{área}(K_k) = \pi(y_{k-1} + y_k) \Delta s_k \text{ u}_A = \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k \text{ u}_A. \quad (3.34)$$

Si

$$\begin{aligned} A \text{ u}_A &= \text{área}(S), \\ \Delta A_k \text{ u}_A &= \text{área}(S_k) \approx \text{área}(K_k), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

entonces, por (3.34)

$$A = \sum_{k=1}^n A_k \approx \pi \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

$$= \pi \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k + \pi \sum_{k=1}^n f(x_k) \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

La última expresión es la suma de dos sumatorias semejantes a las estudiadas en la sección anterior por lo que la continuidad de las funciones involucradas nos indica que ambas sumatorias convergen, si $\|P\| \rightarrow 0$ hacia

$$\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Podemos entonces escribir

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (3.35)$$

3.7.2 Caso con giro alrededor del eje Oy .

Si el gráfico de la misma función f , con $a \geq 0$, lo hacemos girar alrededor del eje Oy (ya no se requiere que f sea no negativa), podemos repetir los mismos razonamientos.

El cono truncado, en este caso, tendrá como radios a x_{k-1} y x_k , en vez de y_{k-1} e y_k , respectivamente, por lo que

$$A \approx \pi \sum_{k=1}^n (x_{k-1} + x_k) \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k. \quad (3.36)$$

Con similares argumentos obtendremos que

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.37)$$

A manera de ejercicio, obtenga resultados análogos si se reemplazan los ejes de giro Ox y Oy por ejes paralelos a ellos, indicando las modificaciones necesarias a las hipótesis.

Ejemplo 3.39

Calcular el área A_{UA} de la esfera cuyo radio mide R_{UL} , utilizando (3.35) y (3.37).

Solución.

(a) Giro alrededor del eje Ox .

Con $a = -R$, $b = R$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, y como $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, por lo que

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

podemos aplicar (3.35):

$$A = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2.$$

Es decir que $A = 4\pi R^2$. El área de la esfera es pues el cuádruple del área del círculo máximo que corta la bola correspondiente, es decir es igual a $4\pi R^2_{\text{UA}}$.

(b) Giro alrededor del eje Oy .

Por simetría podemos tomar el doble del área del hemisferio “norte” generado al girar alrededor del eje Oy el cuarto de circunferencia de radio R y centro en el origen, ubicado en el primer cuadrante.

Con $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a = 0$, $b = R$, por (3.37) tendremos

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot 2\pi \int_0^R x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 4\pi \int_0^R x \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi R \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= \frac{4\pi R}{-2} \int_{R^2}^0 u^{-1/2} du \end{aligned}$$

con el cambio de variable $u = R^2 - x^2$, $du = -2x dx$ y de límites de integración

x	u
R	0
0	R^2

$$\begin{aligned} A &= 2\pi R \left. \frac{u^{1/2}}{1/2} \right|_0^{R^2} \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

El resultado es el mismo, obviamente.

3.7.3 Ejercicios

1. Halle el área de la superficie de revolución engendrada al girar el gráfico de la ecuación dada, alrededor del eje o ejes indicados, para $x \in I$.
 - (a) $y = \sqrt{x}$, $I = [1, 4]$; ejes x e y
 - (b) $y = \sqrt{x+2}$, $I = [2, 7]$; eje x
 - (c) $y = x^3$, $I = [0, 1]$; ejes x e y
 - (d) $y = 4 - x^2$, $I = [-2, 2]$; eje x
 - (e) $y = 4 - x^2$, $I = [0, 2]$; eje y
 - (f) $y = (1/6)x^3 + (1/2)x^{-1}$, $I = [2, 4]$; eje x
 - (g) $y = (1/3)x^{3/2} - x^{1/2}$, $I = [1, 4]$; eje x
 - (h) $y = (1/4)x^4 + (1/8)x^{-1/2}$, $I = [1, 2]$; eje y
 - (i) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, $y \geq 0$; eje x
2. Halle el área de la superficie lateral de un cono de revolución de altura H m y radio R m.
3. Halle el área de una esfera de radio R m.
4. Halle el área de la superficie lateral de un cono truncado de revolución de altura H m y cuyas bases tienen r m y R m de radio.

3.8 El valor medio de una función

Un estudiante tomó 5 materias en un semestre y las aprobó con las siguientes notas, sobre 40 cada una: Matemáticas 26, Física 24, Biología 24, Economía 30, Ciencias Sociales 28. Si se desea conocer el promedio de calificación del semestre se lo obtiene sumando estas notas y dividiendo para 5, el número de asignaturas. Así, su promedio será

$$\frac{26 + 24 + 24 + 30 + 28}{5} = \frac{132}{5} = 26.4.$$

Esto es lo que se llama un *promedio simple*, porque todos los datos tienen la misma *importancia* o *peso*. Pero no siempre es este el caso. Por ejemplo, si en una universidad la aprobación

se la hace por semestre y no por materias, se da un peso a cada asignatura dependiendo de la carrera que cursa el alumno. Por ejemplo, para las carreras de Ingeniería y de Derecho se pueden tener los siguientes pesos o ponderaciones:

	INGENIERÍA	DERECHO
Materia	Peso	Peso
Matemáticas	10	8
Física	10	6
Biología	8	6
Economía	6	10
CC SS	6	10
TOTAL	40	40

Para la promoción se considera el así llamado *promedio ponderado* de las calificaciones, que es el resultado de dividir la suma de las calificaciones previamente multiplicadas por su respectivo peso, para el peso total de todas las asignaturas. Se aprueba el semestre, por ejemplo, si el promedio ponderado es mayor que 28. Para los cálculos nos ayudan las siguientes tablas.

CARRERA DE INGENIERÍA

Materia	Peso	Nota	Peso \times Nota
Matemáticas	10	26	260
Física	10	24	240
Biología	8	24	192
Economía	6	30	180
CC SS	6	28	168
TOTAL	40	132	1040

El promedio ponderado para la carrera de Ingeniería es $\frac{1040}{40} = 26$.

CARRERA DE DERECHO

Materia	Peso	Nota	Peso \times Nota
Matemáticas	8	26	208
Física	6	24	144
Biología	6	24	144
Economía	10	30	300
CC SS	10	28	280
TOTAL	40	132	1076

El promedio ponderado para la carrera de Derecho es $\frac{1076}{40} = 26.9$.

Recordemos que el promedio simple es $\frac{132}{5} = 26.4$.

Vemos que un estudiante con esas calificaciones reprobaría el semestre en cualquiera de las dos carreras.

En general, si se tienen para $n \geq 2$, n datos numéricos, digamos $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, y si el k -ésimo dato tiene un peso o ponderación $p_k > 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, el promedio ponderado P de esos datos es:

$$P = \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

En Teoría de Probabilidades, para un $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ dado, el peso o ponderación p_k es la probabilidad del k -ésimo resultado de un evento dado que tiene n resultados posibles mutuamente excluyentes, y a_k es el valor numérico que se asigna a dicho resultado. En este

caso $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ y al promedio ponderado que en este caso es $P = \sum_{k=1}^n p_k a_k$, se le llama *esperanza matemática* o *media del valor numérico* de dicho experimento.

Ejemplo 3.40

En un juego de dados en el que se apuesta \$10 en cada lanzamiento del dado y solo se gana \$4 si sale 1 o 2, \$16 si sale 6, y se devuelven los \$10 en los demás casos. Calcule la esperanza matemática de ganancia del casino (EC) y del jugador (EJ).

Hay tres resultados posibles: $r_1 = \{1, 2\}$, $r_2 = \{3, 4, 5\}$ y $r_3 = \{6\}$ con las siguientes probabilidades $1/3, 1/2$ y $1/6$, respectivamente, y con ganancias $a_1 = -6, a_2 = 0$ y $a_3 = +6$ para el jugador, $b_1 = +6, b_2 = 0$ y $b_3 = -6$ para el casino. De donde:

$$EJ = \sum_{k=1}^3 p_k a_k = \frac{1}{3}(-6) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{6}(+6) = -1,$$

$$EC = \sum_{k=1}^3 p_k b_k = \frac{1}{3}(+6) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{6}(-6) = +1.$$

Como siempre, ¡el casino tiene ventaja sobre el jugador!

Pero no siempre se tiene solo una cantidad finita de datos de los cuales se quiere conocer el promedio. Digamos que dada una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se quiere conocer el promedio de los valores $f(x)$ posibles para esta función, teniendo en cuenta que $x \in [a, b]$.

Si la función fuera constante, el promedio sería el valor de la función en cualquier x . Sea una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y en cada intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, aproximaremos los $f(x)$, $x \in I_k$, con un valor $f(x_k^*)$, donde $x_k^* \in I_k$ es un valor arbitrario. Si \bar{y} es el valor promedio de $f(x)$ para $x \in [a, b]$, podemos aproximar a \bar{y} con el promedio ponderado de los valores $f(x_k^*)$, $1 \leq k \leq n$, tomando como pesos las longitudes Δx_k de los intervalos I_k . Así

$$\bar{y} \approx \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k}{\sum_{k=1}^n \Delta x_k} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Esta última es una suma de Riemann y como es de esperar que la aproximación sea mejor mientras más “fina” sea la partición, es decir, mientras más pequeño sea $\|P\|$, el grosor de la partición, y como al ser continua f en $[a, b]$, existe el límite de la suma si $\|P\| \rightarrow 0$, tendremos que se puede dar la siguiente definición.

Definición 3.2

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\bar{y} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (3.38)$$

es el *valor medio* de f en $[a, b]$.

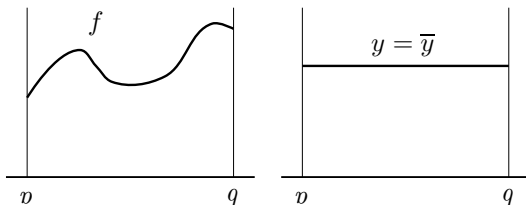
Si se toman particiones homogéneas, \bar{y} coincide con el límite si $n \rightarrow \infty$, de los promedios simples de los valores $f(x_k^*)$, puesto que $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ para todo k .

Otra manera de llegar a la fórmula (3.38) es la siguiente.

Imaginemos un recipiente (piscina) con agua. Si queremos establecer la profundidad promedio \bar{y} del agua cuando ésta está agitada no lo podremos hacer tomando una medida en

un punto cualquiera. Sin embargo, si tenemos la paciencia y el tiempo suficiente, bastará esperar que el agua se calme y podremos medir la profundidad del agua en cualquier punto.

Análogamente, si queremos establecer la cota promedio \bar{y} de todos los valores $y = f(x)$ que toma la función f , cuando x “recorre” el intervalo $[a, b]$, ¿que significaría en este caso “que las aguas se calmen”? Pues que la figura del dibujo, limitada por la gráfica de f y por las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ tendrá un área igual a la del rectángulo limitado por esas tres rectas y por la recta $y = \bar{y}$.



Es decir que

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{y}(b - a)$$

puesto que $(b - a)$ es la base y \bar{y} es la altura del rectángulo. Por lo tanto, si $f(x) \geq 0$ para todo x tendremos que

$$\bar{y} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Se tiene la siguiente propiedad:

Teorema 3.2

Si

$$f(x_m) = \min_{a \leq x \leq b} f(x), \quad f(x_M) = \max_{a \leq x \leq b} f(x),$$

entonces

$$f(x_m) \leq \bar{y} \leq f(x_M). \quad (3.39)$$

Demostración. Para todo $x \in [a, b]$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$. Si integramos en $[a, b]$, por la propiedad de monotonía de la integral definida tendremos que

$$\int_a^b f(x_m) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x_M) dx,$$

por lo que

$$f(x_m) x|_a^b \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(x_M) x|_a^b.$$

Es decir

$$(b - a)f(x_m) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)f(x_M).$$

Dividiendo todo para $(b - a)$ se tiene finalmente

$$f(x_m) \leq \bar{y} \leq f(x_M).$$

□

Teorema 3.3 (del valor medio para la integral definida)

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y si \bar{y} es su valor medio en $[a, b]$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\bar{y} = f(c). \quad (3.40)$$

Es decir

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c). \quad (3.41)$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema precedente y del teorema del valor intermedio para las funciones continuas. \square

Este cololario no es otra cosa que el Teorema del Valor Medio para la Integral Definida.

Si $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx$ nos da el área bajo la gráfica de f , por lo que (3.41) nos dice que existe un rectángulo de base $(b - a)$ y altura \bar{y} con la misma área.

3.8.1 Ejercicios

1. Halle el valor medio \bar{y} de $y = f(x)$, para $x \in I$.
 - (a) $f(x) = 3x + 2$, $I = [1, 5]$
 - (b) $f(x) = 2x^2 + 3$, $I = [1, 4]$
 - (c) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$, $I = [0, 1]$
 - (d) $f(x) = \sin x$, $I = [0, \pi]$
2. Halle $c \in I$ tal que $f(c) = \bar{y}$, el valor medio de $y = f(x)$ en I .
 - (a) $f(x) = 3x^2 + 2$, $I = [1, 5]$
 - (b) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $I = [1, 2]$
3. La temperatura $T^\circ\text{C}$ de una ciudad t horas luego del medio día está dada por
4. Pruebe que si $s(t)$ describe la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, entonces la velocidad media, $v_m[t_0, t_1]$, de la partícula en un lapso $[t_0, t_1]$ coincide con el valor medio \bar{v} de la velocidad instantánea $v(t)$, si $t \in [t_0, t_1]$. Recuerde que

hasta las 18 horas. ¿Cuál es la temperatura promedio entre las 12 horas y 18 horas?

$$v_m[t_0, t_1] = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

y

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

$$T = 30 + t - \frac{1}{2}t^2,$$

3.9 Masa y densidad

Si una barra de longitud L_{uL} está hecha de un material homogéneo y si su masa es M_{uM} , se dice que la *densidad (longitudinal)* de la barra es δ_{uD} , donde, simbólicamente

$$[\text{uD}] = \frac{[\text{uM}]}{[\text{uL}]} = \left[\frac{\text{uM}}{\text{uL}} \right]$$

indica que las unidades tomadas son compatibles entre sí y, en este caso:

$$\delta := \frac{M}{L}, \quad (3.42)$$

de donde

$$M = \delta L. \quad (3.43)$$

Ejemplo 3.41

Si $u_L = m$ y $u_M = kg$, entonces $u_D = kg/m$. Así, si una barra de densidad $2.8kg/m$ mide $3m$, entonces tendrá una masa de $8.4 = kg$.

Si una placa de área A u_A está hecha de un material homogéneo y si su masa es de M u_M , la densidad (de área) de la placa es δ u_D , donde

$$[u_D] = \frac{[u_M]}{[u_A]} = \left[\frac{u_M}{u_A} \right]. \quad (3.44)$$

Entonces

$$\delta := \frac{M}{A}. \quad (3.45)$$

Ejemplo 3.42

Si $u_A = m^2$, $u_D = kg/m^2$.

Análogamente para un sólido de volumen V u_V , su densidad (volumétrica) estará dada por

$$\delta := \frac{M}{V}, \quad (3.46)$$

si

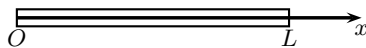
$$[u_D] = \frac{[u_M]}{[u_V]} = \left[\frac{u_M}{u_V} \right]. \quad (3.47)$$

Ejemplo 3.43

Si $u_V = m^3$, $u_D = kg/m^3$.

¿Qué sucede si el material no es homogéneo?

1. Veamos el caso de la barra. Supongamos que cada punto de la barra es de un material distinto para el cual se conoce su densidad.



Digamos que $\delta(x)$ u_D es la densidad del punto $x \in [0, L]$. Ver dibujo. Esto quiere decir que una barra de longitud 1 u_L , hecha del mismo material que el punto x , tendrá una masa de $\delta(x)$ u_M porque, por (35), $M = \delta(x) 1 = \delta(x)$ y

$$\text{masa de la barra} = M \text{ } u_M = \delta(x) u_M.$$

Para calcular la masa de la barra, asumiendo que $\delta: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \delta(x)$ es continua, tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[0, L]$. En cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$ podemos aproximar la masa del segmento suponiendo que ese pedacito de barra es homogéneo, hecho del material idéntico al de un punto $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$. Es decir, si ΔM_k u_M es la masa de ese segmento, como su longitud es de Δx_k u_L , entonces

$$\Delta M_k \approx \delta(x_k^*) \Delta x_k.$$

Es decir

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n \delta(x_k^*) \Delta x_k.$$

La última es una suma de Riemann que converge hacia $\int_0^L \delta(x) dx$, puesto que δ es continua. Como se puede esperar que la aproximación es mejor mientras más fina sea la partición, es decir mientras más pequeño sea $\|P\|$, el grosor de ésta, podemos calcular M con la fórmula

$$M = \int_0^L \delta(x) dx. \quad (3.48)$$

2. Para una placa, cuya forma es la de una figura de tipo I; es decir, es de la forma

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

con $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, $a < b$, $g(x) < h(x)$ para todo $x \in]a, b[$, si la densidad de área solo depende de x , es decir

$$\delta(x, y) = \delta(x) \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega$$

con $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, realizando la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ al intervalo $[a, b]$, la placa se divide en “franjas” verticales cuya masa ΔM_k u_M puede aproximarse asumiendo que es homogénea y del mismo material que los puntos de abscisa $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$. El área de la franja se aproxima con la de un rectángulo de base Δx_k u_L y altura $[h(x_k^*) - g(x_k^*)]$ u_L. Entonces, por (3.45),

$$\Delta M_k \approx \delta(x_k^*)[h(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k$$

por lo que

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n \delta(x_k^*)[h(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k.$$

Con los supuestos hechos

$$M = \int_a^b \delta(x)[h(x) - g(x)] dx \quad (3.49)$$

3. Para un sólido cuya forma puede escribirse como

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, (y, z) \in \Omega_x\},$$

donde los Ω_x son secciones transversales al eje Ox , para las cuales se conoce su área $A(x)$ y si se asume que el material de cada sección transversal es homogéneo, de densidad de volumen $\delta(x)$, luego de realizar la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ al intervalo $[a, b]$, si la masa de cada “ k -rodajita”,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, (y, z) \in \Omega_x\},$$

que es ΔM_k u_M, se aproxima con la de un “ k -cilindrito”

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, (x, y) \in \Omega_{x_k^*}\},$$

con $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, se tendrá

$$\Delta M_k \approx \delta(x_k^*)A(x_k^*)\Delta x_k,$$

puesto que el volumen del cilindrito será $A(x_k^*)\Delta x_k$ u_V, y por (38).

Tendremos entonces que

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n \delta(x_k^*)A(x_k^*)\Delta x_k.$$

Con los supuestos hechos tendremos entonces que

$$M = \int_a^b \delta(x)A(x) dx. \quad (3.50)$$

3.10 Posición, velocidad y aceleración de un punto

Vimos, al definir la derivada, que si $s(t)$ describe la posición de un punto en un instante t , si $v(t)$ es la velocidad instantánea y $a(t)$ la aceleración instantánea en el instante t , se tiene que

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \quad (3.51)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}. \quad (3.52)$$

Es decir que v es la derivada de s y a es la derivada de v . Esto significa que s es una primitiva de v y v es una primitiva de a . Por el Teorema Fundamental del Cálculo, para t_0 dado $\int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$ nos da otra primitiva de v , por lo que existe C tal que

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + C \quad \forall t. \quad (3.53)$$

En particular si se conoce, para t_0 dado, el valor $s_0 := s(t_0)$, se tendrá, por (3.53), que

$$s_0 = s(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} v(\tau) d\tau + C = C.$$

Finalmente

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau. \quad (3.54)$$

Análogamente, dado $v_0 = v(t_0)$ se tiene

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau. \quad (3.55)$$

Se debe distinguir el “desplazamiento” y el “recorrido” de un punto en un lapso $[t_0, t_1]$. En efecto

$$\text{desplazamiento en } [t_0, t_1] = [s(t_1) - s(t_0)] \text{ u}_L = \int_{t_0}^{t_1} v(\tau) d\tau \text{ u}_L. \quad (3.56)$$

Mientras que

$$\text{recorrido en } [t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} |v(\tau)| d\tau \text{ u}_L. \quad (3.57)$$

Este último nos da la longitud de todo el camino recorrido por el punto al ir de $s(t_0)$ a $s(t_1)$, teniendo en cuenta posibles “idas y venidas”.

Ejemplo 3.44

Se lanza un objeto hacia arriba con velocidad de 19.6 m/s. Calcule el tiempo que tarda en regresar al punto de partida y el recorrido realizado.

Solución. Tomamos -9.8 m/s^2 como la aceleración debida a la gravedad.

$$\begin{aligned} y &= s(t) = \text{posición del objeto en el instante } t, \\ t_0 &= 0 = \text{instante del lanzamiento,} \\ T \text{ s} &= \text{tiempo que tarda en regresar el objeto,} \\ s_0 &= 0 = s(t_0), \\ v_0 &= v(t_0) = 19.6, \\ a(t) &= -9.8, \end{aligned}$$

Por (3.55)

$$v(t) = 19.6 + \int_0^t (-9.8) d\tau = 19.6 - 9.8t.$$

Por (3.54)

$$s(t) = 0 + \int_0^t (19.6 - 9.8\tau) d\tau = 19.6t - 4.9t^2.$$

T es tal que $s(T) = 0$. Entonces

$$s(T) = 19.6T - 4.9T^2 = 0.$$

Por lo que $T \in \{0, 4\}$. El valor $T = 0$ se descarta pues corresponde de hecho al instante del lanzamiento, por lo que se puede concluir que el objeto tarda 4 s en regresar al punto de lanzamiento.

Para calcular el recorrido tomemos, usando (3.57),

$$\int_0^T |v(\tau)| d\tau = \int_0^4 |19.6 - 9.8\tau| d\tau.$$

Como

$$|19.6 - 9.8\tau| = \begin{cases} 19.6 - 9.8\tau & \text{si } 0 \leq \tau \leq 2 \\ 9.8\tau - 19.6 & \text{si } 2 \leq \tau \leq 4, \end{cases}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \int_0^T |v(\tau)| d\tau &= \int_0^2 (19.6 - 9.8\tau) d\tau + \int_2^4 (9.8\tau - 19.6) d\tau \\ &= (19.6\tau - 4.9\tau^2) \Big|_0^2 + (4.9\tau^2 - 19.6\tau) \Big|_2^4 \\ &= 19.6(2 - 0) - 4.9(4 - 0) + 4.9(16 - 4) - 19.6(4 - 2) \\ &= 39.2 - 19.6 + 58.8 - 39.2 = 39.2. \end{aligned}$$

El objeto habrá recorrido 39.2 m antes de regresar al suelo.

El punto más alto al que llega se puede establecer calculando

$$\max_{0 \leq t \leq 4} s(t) = \max_{0 \leq t \leq 4} (19.6t - 4.9t^2).$$

El punto crítico t_1 de s en $[0, 4]$ se da si $s'(t_1) = v(t_1) = 0$, es decir si

$$v(t_1) = 19.6 - 9.8t_1 = 0.$$

Tenemos pues $t_1 = 2$ y

$$s(t_1) = s(2) = 19.6(2) - 4.9(2^2) = 19.6.$$

Vemos que la altura máxima alcanzada es 19.6 m, que coincide, obviamente, con la mitad del recorrido total de ida y vuelta del objeto hasta regresar al punto de partida. En este caso, naturalmente, ¡el desplazamiento es cero!

3.10.1 Ejercicios

1. Halle la posición $s(t)$ de una partícula en el instante t .
 - (a) $v(t) = t^2 - 4t$, $s(2) = 1$
 - (b) $v(t) = 2 \cos(\pi t/2)$, $s(1) = 10$
 - (c) $a(t) = 2t$, $s(1) = 1$, $v(1) = 0$
 - (d) $a(t) = \sqrt[3]{t} + 1$, $s(0) = 0$, $v(0) = 0$
2. Si asumimos un valor aproximado de 9.8 m/s^2 para la aceleración de la gravedad y despreciamos la resistencia del aire:
 - (a) ¿Cuánto tiempo tarda una piedra que se deja caer desde la terraza de un edificio de 100 m de alto? ¿Qué distancia recorre en el último segundo?
 - (b) ¿A qué altura llega un proyectil lanzado verticalmente con una velocidad de 10 m/s? ¿A qué altura llegaría en Marte, donde la gravedad es de 3.74 m/s^2 ? ¿A qué velocidad llega de regreso en los dos casos?

3.11 Trabajo mecánico

Recordemos que si un cuerpo sólido se desplaza en línea recta una distancia D u_L debido a la acción de una fuerza constante de F u_F aplicada en la misma dirección y sentido del movimiento se dice que el trabajo W u_T realizado por la fuerza sobre el objeto está dado por:

$$W = FD \quad (3.58)$$

si las unidades son compatibles. En este caso se escribe simbólicamente que

$$[u_T] = [u_F][u_L] = [u_F \cdot u_L].$$

Ejemplos de unidades compatibles se dan en la siguiente tabla.

Magnitud	Sistema Inglés	Sistema MKS (Sistema Internacional)	Sistema CGS
Distancia	pie (pie)	metro (m)	centímetro (cm)
Fuerza	libra (lb)	newton (N)	dina (dina)
Trabajo	pie-libra (pie·lb)	joule (J)	ergio (erg)

Si la fuerza es variable e igual a $F(x)$ u_F, si x u_L nos da la posición del objeto a lo largo de un intervalo $[a, b]$, y si la función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, para calcular el trabajo realizado al desplazar el objeto desde $A(a)$ hasta $B(b)$, podemos hacer una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y aproximar el trabajo ΔW_k u_T realizado al desplazar el objeto a lo largo del intervalo $J_k = [x_{k-1}, x_k]$, con el trabajo realizado por una fuerza constante de magnitud $F(x_k^*)$ u_F, con $x_k^* \in J_k$. Es decir, como Δx_k es el desplazamiento a lo largo de J_k , por (3.58) tendremos

$$\Delta W_k \approx F(x_k^*) \Delta x_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Entonces

$$W = \sum_{k=1}^n \Delta W_k \approx \sum_{k=1}^n F(x_k^*) \Delta x_k. \quad (3.59)$$

La última es una suma de Riemann que converge hacia $\int_a^b F(x) dx$, cuando el grosor de la partición tiende a 0, puesto que hemos supuesto que F es continua. Teniendo en cuenta que la aproximación dada por (3.59) es mejor si la partición es cada vez más fina, podemos, entonces, definir el trabajo realizado por la fuerza F mediante:

$$W := \int_a^b F(x) dx. \quad (3.60)$$

Ejemplo 3.45

Calcule el trabajo necesario para alargar o comprimir un resorte de constante k una distancia x .

Solución. Según la ley de Hooke¹, al alargar un resorte, éste ejerce una fuerza directamente proporcional a la elongación del resorte en el sentido contrario a la elongación. Si ubicamos el resorte en un sistema de coordenadas de modo que 0 corresponde a la posición del extremo del resorte en reposo y x a la posición de este extremo si lo hemos estirado (elongado) x u_L, para dicho resorte se tendrá, según la ley de Hooke antes mencionada, una constante $k > 0$, tal que

$$F(x) = kx,$$

¹Robert Hooke (1635-1703).

donde F_{UF} es la fuerza necesaria para tener estirado el resorte en la posición x . Si se estira el resorte hasta una posición L_{UL} , el trabajo necesario para lograr este estiramiento será entonces de W_{UT} , donde

$$W = \int_0^L F(x) dx = \int_0^L kx dx = \frac{k}{2} x^2 \Big|_0^L = \frac{kL^2}{2}.$$

Ejemplo 3.46

Gravitación universal. Según Newton, si 2 cuerpos celestes de masas M_{UM} y m_{UM} están situados a una distancia D_{UL} el uno del otro, cada uno de ellos es afectado por una fuerza que lo atrae al otro, cuya magnitud es de F_{UF} . En este caso

$$F = k \frac{Mm}{D^2},$$

donde k es la constante de gravitación universal. En el Sistema Internacional, si $u_F = \text{N}$, $u_L = \text{m}$ y $u_M = \text{kg}$, se tiene que $k = 6.67 \times 10^{-11}$. Si el cuerpo de masa M_{UM} es un planeta, y el de masa m_{UM} es un satélite artificial, ¿qué trabajo se requiere para llevarlo a una altitud de H_{UL} sobre la superficie del planeta cuyo radio es R_{UL} ?

Solución. Si ubicamos un sistema de referencia con el origen en el centro del planeta y en dirección vertical, se desea llevar el satélite desde la posición R hasta la posición $R + H$. La fuerza que hay que hacer para vencer la gravedad será $F(x)_{\text{UF}}$, donde

$$F(x) = k \frac{mM}{x^2}.$$

El trabajo necesario será entonces de W_{UT} , con

$$W = \int_R^{R+H} k \frac{mM}{x^2} dx = -kmM \frac{1}{x} \Big|_R^{R+H} = -kmM \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = \frac{kmMH}{R(R+H)}.$$

Es decir que el trabajo será de $\frac{kmMH}{R(R+H)} u_T$.

Para los ejercicios prácticos, se tienen los siguientes datos aproximados de la masa M kg y el diámetro D km, de algunos astros.

Objeto	M kg	D km
Sol	1.99×10^{30}	1392000
Mercurio	3.12×10^{23}	4880
Venus	4.87×10^{24}	12104
Tierra	5.98×10^{24}	12756
Marte	6.46×10^{23}	6787
Jupiter	1.90×10^{27}	142800
Saturno	5.69×10^{26}	120000
Urano	8.67×10^{25}	51800
Neptuno	1.03×10^{26}	49500
Pluton	$\approx 5 \times 10^{24}$	≈ 6000
Luna	7.35×10^{22}	3476

Ejemplo 3.47

Bombas hidráulicas. Se trata de calcular el trabajo necesario para “bombear” un líquido a un nivel superior.

Solución. Para los cálculos, a más de lo expuesto, se usan los siguientes conceptos.

Si un volumen V u_V de un líquido tiene una masa M u_M su densidad δ u_D está dada por

$$\delta = \frac{M}{V} \quad \text{o} \quad M = \delta V,$$

si las unidades son compatibles. Por ejemplo, en el Sistema Internacional (SI):

$$u_M = \text{kg}, \quad u_V = \text{m}^3, \quad u_D = \text{kg/m}^3.$$

También se define el peso P u_P del líquido, que es la fuerza con que la Tierra atrae al líquido. Siguiendo la ley de Newton², será de magnitud

$$P = Mg$$

donde g u_A es la aceleración debida a la gravedad. Al ser $u_A = \text{m/s}^2$ en el SI, $g = 9.80665 \approx 9.8$, y en el sistema inglés $g \approx 32$ porque $u_A = \text{pie/s}^2$.

Se define el peso específico del líquido ρ u_{PE} , por

$$\rho = \frac{P}{V}.$$

Obviamente $\rho = \delta \cdot g$.

En el SI, $u_{PE} = \text{N/m}^3$. En el sistema inglés, $u_{PE} = \text{lb/pie}^3$. Además, $1 \text{ N} = 0.2248 \text{ lb}$ o, lo que es lo mismo, $1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$. Por ejemplo, para el agua se tiene que

$$\begin{aligned} \rho &= 9800 \quad \text{en el SI,} \\ \rho &= 62.4 \quad \text{en el sistema inglés.} \end{aligned}$$

Si para un recipiente se conoce el área de las secciones transversales horizontales, podemos calcular el trabajo necesario, por ejemplo, para extraer de él el líquido contenido.

Tomemos un recipiente hemisférico de radio R m. Si inicialmente está lleno de agua, ¿qué trabajo se requiere para vaciarlo?

Ubicamos el eje x hacia abajo y el origen en el centro de la esfera. Partimos con $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ al intervalo $[0, R]$. La sección transversal horizontal del nivel x será un círculo de radio

$$r = \sqrt{R^2 - x^2} := f(x).$$

La k -ésima “capa” de líquido para $x \in J_k = [x_{k-1}, x_k]$ la aproximamos con un cilindro de radio

$$f(x_k^*) = \sqrt{R^2 - (x_k^*)^2},$$

donde $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, $1 \leq k \leq n$, es el “desplazamiento promedio” que debe hacer cada partícula de agua para salir del recipiente subiendo hacia el borde del mismo. Como el volumen V_k m^3 de la capita de agua es aproximadamente $\pi[f(x_k^*)]^2 \Delta x_k$ m^3 , que es el volumen del correspondiente cilindrito, el peso de la capita será de aproximadamente

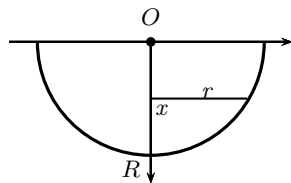
$$\rho \text{ N/m}^3 \cdot \pi[f(x_k^*)]^2 \Delta x_k \text{ m}^3 = 9800\pi (R^2 - (x_k^*)^2) \Delta x_k \text{ N}.$$

El trabajo que se debe hacer para llevar la capita al borde del recipiente será ΔW_k N·m, por lo que

$$\Delta W_k \approx 9800\pi (R^2 - (x_k^*)^2) x_k^* \Delta x_k.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^n \Delta W_k = 9800\pi \int_0^R (R^2 x - x^3) dx \\ &= 9800\pi \left(\frac{R^2}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^R \\ &= 4900\pi R^4. \end{aligned}$$



El trabajo necesario para vaciar el recipiente será entonces de $4900\pi R^4$ N·m.

²Isaac Newton (1642-1727).

3.11.1 Ejercicios

- Un resorte tiene una longitud de 40 cm. Si se le tira con una fuerza de 10 N, alcanza los 50 cm.
 - ¿Qué fuerza se requiere para que su longitud sea de x cm?
 - ¿Qué trabajo se realiza al estirarle hasta 60 cm?
 - ¿Qué trabajo se realiza para estirarlo 10 cm más?
- Una fuerza de 50 N acorta en 6 cm a un resorte de 20 cm de longitud. ¿Qué trabajo se requiere para que tenga 15 cm?
- Halle el trabajo necesario para elevar en Marte una masa de 5 000 kg desde una superficie hasta una órbita de 7 000 km de diámetro.
- Un depósito en forma de cono circular invertido de 15 m de altura y 7 m de diámetro en su base, está lleno de agua. ¿Qué trabajo se requiere para vaciarlo?:
 - por arriba,
 - si el depósito estaba a mitad lleno, y
 - si el depósito es cilíndrico de iguales dimensiones.
- Un cable de acero de 50 m de longitud y 2 cm de diámetro pesa 10 kg/m y pende desde lo alto de un rascacielos. ¿Qué trabajo se requiere para levantarlo hasta la terraza?
- Un cohete que está cargado de combustible pesa 2×10^6 kg y lleva un módulo habitable que pesa 10^5 kg hacia una estación orbital, situada a una altitud de 300 km. Al subir consume 150 kg/m de combustible.
 - Expresa el peso total del sistema en función de su altitud.
 - Calcule el trabajo requerido para llegar a la estación espacial.

3.12 Presión hidrostática

Cada punto de la sección horizontal de un líquido en reposo sufre una presión del líquido que está sobre dicha sección. Si el área de la sección es A_{u_A} y está a una profundidad de H_{u_L} , el volumen de líquido será de $V_{u_V} = A_{u_A} \cdot H_{u_L} = AH_{u_V}$. El peso P_{u_F} de este volumen, si ρ_{u_E} es el peso específico del líquido, será entonces dada por

$$P = \rho V = \rho AH. \quad (3.61)$$

Si la presión es p_{u_P} , tendremos entonces que

$$p = \frac{P}{A} = \frac{\rho AH}{A} = \rho H, \quad (3.62)$$

si u_P es compatible con las demás unidades. Por ejemplo, en el SI

$$u_L = \text{m}, \quad u_A = \text{m}^2, \quad u_V = \text{m}^3, \quad u_F = \text{N}, \quad u_E = \text{N/m}^3, \quad u_P = \text{N/m}^2.$$

La placa horizontal soportará, debido a la presión, una fuerza F_{u_F} y entonces

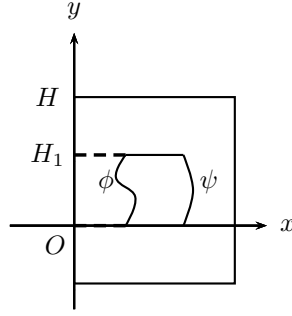
$$F = P = \rho AH, \quad (3.63)$$

A Blaise Pascal (1623-1662) se le debe el descubrimiento del Principio que lleva su nombre: "La presión ejercida por un líquido a una profundidad dada es la misma en todas las direcciones".

Calculemos la fuerza total ejercida por un líquido, debido a la presión hidrostática, si el peso específico del líquido es ρ_{u_E} , sobre una placa vertical cuya forma es de tipo II y está dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq H_1, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

con $0 < H_1$, $\varphi(y) < \psi(y)$ para todo $y \in]0, H_1[$, φ y ψ continuas en $[0, H_1]$. H_{u_L} es la profundidad del punto más bajo de la placa.



Calculemos la fuerza F_{UF} ejercida sobre la placa. Aproximémosla dividiendo el intervalo $[0, H_1]$ mediante una partición $P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$. La “ k -fajita” horizontal de la placa, dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_{k-1} \leq y \leq y_k, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

aproximémosla con el k -rectángulo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_{k-1} \leq y \leq y_k, \varphi(y_k^*) \leq x \leq \psi(y_k^*)\},$$

donde $y_k^* \in J_k = [x_{k-1}, x_k]$. Asumimos que todos los puntos de la fajita sufren, aproximadamente, la misma presión que los puntos situados a la misma profundidad que los puntos de ordenada y_k^* , que es de $(H - y_k^*) u_L$. Por (3.63) tendremos, entonces, teniendo también en cuenta el Principio de Pascal que si ΔF_k es la fuerza que soporta la k -fajita, entonces

$$\Delta F_k \approx \rho[\psi(y_k^*) - \varphi(y_k^*)](H - y_k^*) \Delta y_k$$

puesto que el área de la fajita es, aproximadamente,

$$[\psi(y_k^*) - \varphi(y_k^*)] \Delta y_k u_A.$$

Entonces

$$F = \sum_{k=1}^n \Delta F_k \approx \rho \sum_{k=1}^n [\psi(y_k^*) - \varphi(y_k^*)](H - y_k^*) \Delta y_k. \quad (3.64)$$

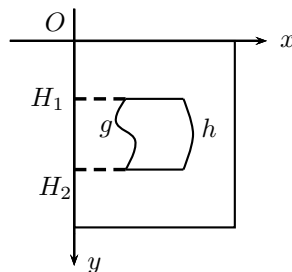
Pero la última es una suma de Riemann, que por la continuidad de la función definida por $y \mapsto [\psi(y) - \varphi(y)](H - y)$ en $[0, H_1]$, converge hacia

$$\rho \int_0^{H_1} [\psi(y) - \varphi(y)](H - y) dy$$

si $\|P\| \rightarrow 0$. Este valor nos servirá para el cálculo de F , puesto que es de suponer que F está mejor aproximada por (3.64) mientras más fina es la partición P de $[0, H_1]$. Es decir

$$F = \rho \int_0^{H_1} [\psi(y) - \varphi(y)](H - y) dy. \quad (3.65)$$

Si se ubica el origen de coordenadas como en el dibujo, la forma de la placa será de tipo I.



Con el eje Oy coincidiendo con el nivel del líquido se tendrá

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H_1 \leq x \leq H_2, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

con $H_1 u_L$ = profundidad del borde superior de la placa y $H_2 u_L$ = profundidad del borde inferior de la placa.

En este caso

$$F = \rho \int_{H_1}^{H_2} [h(x) - g(x)] x dx. \quad (3.66)$$

3.12.1 Ejercicios

1. Halle la presión y la fuerza ejercida sobre el fondo plano de una piscina llena de agua hasta 10 cm del borde, si la piscina mide $2\text{ m} \times 8\text{ m} \times 15\text{ m}$.
2. Una placa triangular (ver Figura 3.3) está sumergida en agua. Halle la fuerza que se ejerce sobre ella (distancias en metros).

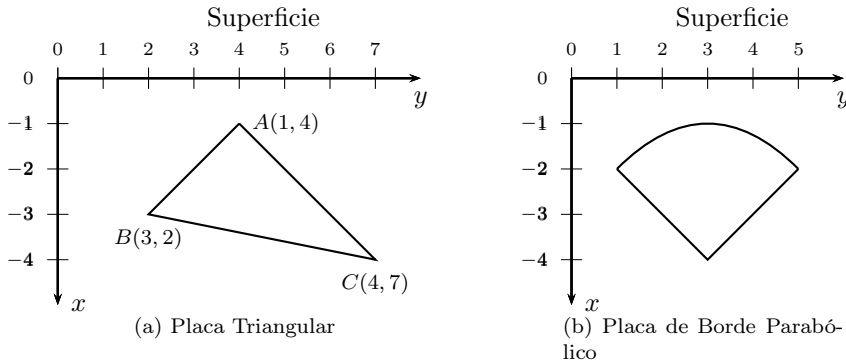


Figura 3.3: Placas para los ejercicios 2 y 3.

3. Repetir el ejercicio anterior si la placa tiene la forma dada en la Figura 3.3, donde la curva tiene ecuación

$$x = \frac{1}{4}(y - 3)^2.$$

4. Halle la fuerza ejercida por el agua sobre el fondo de la piscina del dibujo (Figura 3.4).

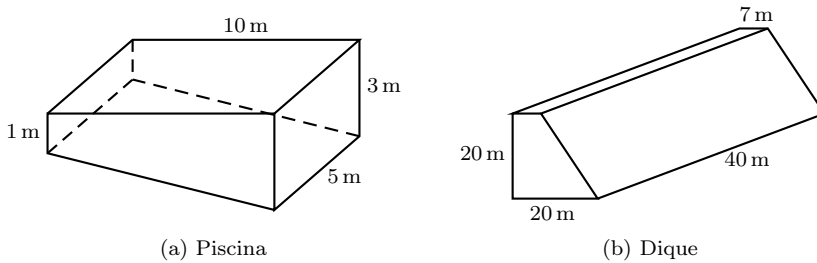


Figura 3.4: Gráficos para los ejercicios 4 y 5.

5. Se usa un dique como el de la Figura 3.4 en un reservorio de agua. ¿Qué fuerza se ejerce sobre la pared inclinada cuando el reservorio está lleno?

3.13 Momentos de masa y Centro de gravedad

3.13.1 Caso de sistemas en “línea recta”

Dada una masa “puntual” $m \text{ u}_m$, que se supone “concentrada” en un punto P del espacio E^1 , E^2 o E^3 , si $d \text{ u}_L$ es la distancia de P a otro punto fijo dado Q , se llama *momento de la masa respecto a Q* a la magnitud $M \text{ u}_M$, dada por

$$M = md. \quad (3.67)$$

En este caso u_M es compatible con las unidades de masa y de longitud u_m y u_L , y se escribe simbólicamente

$$[\text{u}_M] = [\text{u}_m] \cdot [\text{u}_L] = [\text{u}_m \cdot \text{u}_L].$$

Las unidades usadas usualmente se resumen a continuación.

Magnitud	Sistema inglés	Sistema MKS Sistema internacional	Sistema CGS
Longitud	pie	m	cm
Masa	slug	kg	g
Momento de masa	slug·pie	kg·m	g·cm

Si imaginamos la masa $m \text{ u}_m$ unida por una “barra sin masa” al punto Q fijo, si ubicamos este “aparato” en un campo gravitacional, la masa m tiende a girar alrededor de Q . El momento $M \text{ u}_M$ mide la magnitud de esta “tendencia” a girar.

Si realizamos nuestro estudio en E^2 , con Q y P sobre el eje Ox , el posible giro puede tener uno de dos sentidos, si imaginamos el campo gravitacional atrayendo a la masa hacia abajo. Si en vez de la distancia d utilizamos la “distancia dirigida” $x - \bar{x}$ de P respecto a Q , donde \bar{x} y x son las coordenadas de Q y P , respectivamente, el momento estará dado por

$$M = m(x - \bar{x}) \quad (3.68)$$

y el signo de M nos indica que el posible giro sería en el sentido de las manecillas del reloj si $x - \bar{x} > 0$, y por ende $M > 0$, y el sentido contrario si $M < 0$.

En particular si $Q = O$, donde $O(0)$ es el origen del sistema de coordenadas el momento será

$$M_O = mx. \quad (3.69)$$

Imaginemos ahora, para $n \geq 2$, un sistema de n masas $m_1 \text{ u}_m, m_2 \text{ u}_m, \dots, m_n \text{ u}_m$, situadas sobre el eje Ox en los puntos P_1, P_2, \dots, P_n de abscisas x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente, tales que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, unidos por una “barra sin masa”, diremos que la masa total del sistema es $m \text{ u}_m$, si

$$m = \sum_{k=1}^n m_k \quad (3.70)$$

y que el *momento de masa del sistema* $M \text{ u}_M$, respecto de un punto $Q(\bar{x})$, situado también en el eje Ox , está dado por

$$M = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - \bar{x}). \quad (3.71)$$

En particular el momento respecto al origen $O(0)$ será

$$M_O = \sum_{k=1}^n m_k x_k. \quad (3.72)$$

Si vemos a nuestro sistema como un “sube y baja” cuyo punto de apoyo es Q o como un “móvil”, que se suspende sobre las cunas de los bebés, el sistema tenderá a girar en uno u

otro sentido según el signo de M . Pero siempre se podrá hallar un punto $Q(\bar{x})$, de modo que el sistema esté “en equilibrio”. Esto sucede si $M = 0$. En efecto, como

$$0 = M = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - \bar{x}) = \sum_{k=1}^n m_k x_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n m_k = M_O - \bar{x}m.$$

Entonces

$$0 = M_O - \bar{x}m, \quad (3.73)$$

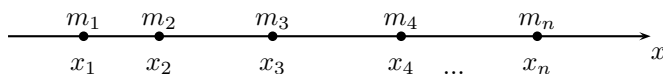
por lo que

$$\bar{x} = \frac{M_O}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (3.74)$$

Al punto $Q(\bar{x})$ se le llama *centro de masa del sistema* (o *centro de gravedad*). La igualdad (3.73) puede también escribirse

$$M_O = \bar{x}m. \quad (3.75)$$

La coincidencia entre (3.69) y (3.75) nos sugiere una interpretación: ¡el sistema es “equivalente” a una sola masa puntual m u_m, ubicada en el centro de gravedad del sistema $Q(\bar{x})$!



Si el sistema de masas puntuales es reemplazado por una barra de longitud l u_L, cuya densidad longitudinal δ u_D está dada por una función continua

$$\begin{aligned} \delta: [0, l] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \delta(x) \end{aligned}$$

para calcular el momento M u_M, respecto de un punto $Q(\bar{x}, 0)$, dividimos $[0, l]$ mediante una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y aproximamos el cálculo asumiendo que el “ k -trocito” de barra correspondiente al intervalo $J_k = [x_{k-1}, x_k]$, es homogéneo de densidad $\delta(x_k^*)$, con $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, y que la masa

$$\Delta m_k \text{ u}_m \approx \delta(x_k^*) \Delta x_k \text{ u}_m$$

de cada trocito está “concentrada” en el punto $P_k^*(x_k^*)$, $1 \leq k \leq n$. Entonces, utilizando con los cambios adecuados (3.71) tendremos que

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n \delta(x_k^*) (x_k^* - \bar{x}) \Delta x_k.$$

La última es una suma de Riemann, que al ser continua la correspondiente función, converge hacia $\int_0^l \delta(x) (x - \bar{x}) dx$, si $\|P\| \rightarrow 0$. Como es de esperar que la aproximación es mejor al ser más fina la partición P , podemos asumir que

$$M := \int_0^l \delta(x) (x - \bar{x}) dx. \quad (3.76)$$

En el caso particular cuando $Q = O$, el origen del sistema, tendremos que el momento será M_O u_M, con

$$M_O = \int_0^l \delta(x) x dx. \quad (3.77)$$

Si buscamos $Q(\bar{x})$ de modo que la barra esté en equilibrio, es decir de modo que $M = 0$, teniendo además en cuenta que m u_m es la masa de la barra, como

$$m = \int_0^l \delta(x) dx,$$

de (3.76) obtenemos:

$$0 = \int_0^l \delta(x) dx - \bar{x} \int_0^l \delta(x) dx = M_O - \bar{x}m. \quad (3.78)$$

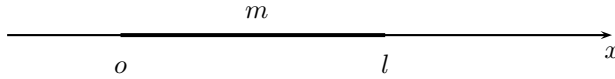
Esta expresión, idéntica a la obtenida en (3.73) nos permite definir como *centro de gravedad* (o de masa) de la barra, al punto $Q(\bar{x})$, si

$$\bar{x} = \frac{M_O}{m} = \frac{\int_0^l \delta(x)x dx}{\int_0^l \delta(x) dx}. \quad (3.79)$$

La barra, que como en el caso del sistema de masas puntuales, se la suspende con una cuerda amarrada al punto Q , se mantendrá horizontal, ¡es “equivalente” a una masa puntual m ubicada en $Q(\bar{x})$!

Si la barra es homogénea, es decir si $\delta = \delta(x) = \text{constante}$, $\bar{x} = l/2$, porque

$$\bar{x} = \frac{\delta \int_0^l x dx}{\delta \int_0^l dx} = \frac{\frac{l^2}{2}}{l} = \frac{l}{2}. \quad (3.80)$$



3.13.2 Caso de sistemas “planos”

Dada una recta l y un punto P exterior a ella, la distancia del punto P a l es la longitud $|\overrightarrow{PQ}|_{\text{uL}}$ del segmento \overrightarrow{PQ} , donde $Q \in l$ es tal que \overrightarrow{PQ} es perpendicular a la recta l . Si $P \in l$, se dice que la distancia de P a l es cero. Si se tiene una recta l en E^2 o E^3 y una masa puntual m u_m concentrada en un punto P , se llama *momento de la masa respecto a l* a M u_M, donde

$$M = md, \quad (3.81)$$

y d es la distancia de P a l (es decir $d = 0$ si $P \in l$ o $d = |\overrightarrow{PQ}|$, $\overrightarrow{PQ} \perp l$, si $P \notin l$).

Si imaginamos, cuando $P \notin l$, que la masa se une a Q mediante un alambre rígido sin masa y si sometemos este sistema a un campo gravitacional perpendicular al plano definido por la recta l y por P , el sistema “tenderá a girar” alrededor del eje l . El momento M u_M mide la magnitud de esta “tendencia a girar” del sistema. Para representar adecuadamente uno de los dos posibles sentidos de giro alrededor del eje l , consideraremos $M > 0$ para el un sentido y $M < 0$ para el sentido contrario. Por ejemplo, si tomamos un sistema de coordenadas bidimensional, de modo que el eje $l = l_y$ sea paralelo al eje Oy y esté situado en el plano xy , al igual que la masa m u_m, ubicada, digamos, en el punto $P(x_1, y_1)$, entonces el eje l_y estará descrito por el conjunto

$$\{(\bar{x}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \quad (3.82)$$

con $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fijo. En este caso $Q(\bar{x}, y_1) \in l$ es el punto del eje l más cercano a $P(x_1, y_1)$.

En la fórmula (3.81) la distancia $d = |\overrightarrow{PQ}|$ la reemplazamos por la *distancia dirigida de Q a P* , dada por

$$d = x_1 - \bar{x}. \quad (3.83)$$

Vemos que según el signo de d , si ponemos

$$M_{l_y} = m(x_1 - \bar{x}), \quad (3.84)$$

el signo de M_{l_y} determinará el sentido del “giro de P ” alrededor de l .

En el caso particular cuando l es el eje Oy , tendremos $\bar{x} = 0$ y el momento será M_y u_M, con

$$M_y = mx_1. \quad (3.85)$$

Si el eje $l = l_x$ es paralelo al eje Ox , descrito digamos por

$$\{(x, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad (3.86)$$

con $\bar{y} \in \mathbb{R}$ fijo, y si $P(x_1, y_1) \notin l$, el punto $Q(x_1, \bar{y}) \in l$ será el punto del eje l más cercano a $P(x_1, y_1)$. En este caso se reemplaza $d = |\overrightarrow{PQ}|$ de (3.81) por la correspondiente distancia dirigida de Q a P dada por

$$d = y_1 - \bar{y}, \quad (3.87)$$

y el momento M_{l_x} u_M estará dado por

$$M_{l_x} = m(y_1 - \bar{y}). \quad (3.88)$$

En el caso particular cuando $l = Ox$, tendremos $\bar{y} = 0$ y el momento será M_x u_M, con

$$M_x = my_1. \quad (3.89)$$

Consideremos ahora, para $n \geq 2$, un sistema de n masas puntuales m_1 u_m, m_2 u_m, ..., m_n u_m, situadas en el plano xy horizontal en los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$, respectivamente, unidos entre sí por “alambres rígidos sin masa”, como en un móvil de cuna. Como antes, la masa m u_m del sistema estará dada por

$$m = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (3.90)$$

El momento de masa del sistema respecto a un eje l_y paralelo al eje Oy como el descrito por (3.82) será M_{l_y} u_M, con

$$M_{l_y} = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - \bar{x}), \quad (3.91)$$

y, en particular, si el eje coincide con el eje Oy , como $\bar{x} = 0$, el momento estará dado por

$$M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k. \quad (3.92)$$

Análogamente, si el eje l es paralelo al eje Ox , como el descrito por (3.86), el momento M_{l_x} u_M será dado por

$$M_{l_x} = \sum_{k=1}^n m_k(y_k - \bar{y}). \quad (3.93)$$

En particular, si el eje $l_x = Ox$, es decir si $\bar{y} = 0$, el momento será M_x u_M, con

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k. \quad (3.94)$$

Observemos que análogamente al caso de masas en línea, tenemos que

$$M_{l_y} = M_y - \bar{x}m, \quad (3.95)$$

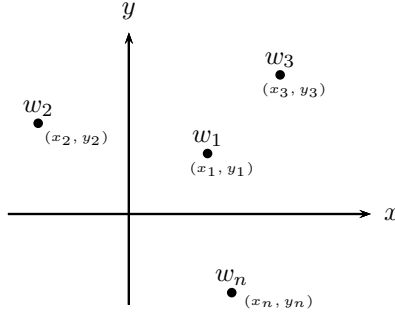
$$M_{l_x} = M_x - \bar{y}m. \quad (3.96)$$

Diremos que el *sistema está en equilibrio* si $M_{l_x} = M_{l_y} = 0$. Esto sucede si escogemos los ejes l_x y l_y que se cortan en el punto $Q(\bar{x}, \bar{y})$, llamado *centro de masa o centro de gravedad del sistema*, y en este caso:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad (3.97)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad (3.98)$$

Si suspendiéramos el “móvil” de una cuerda atada al punto Q , éste se mantendría horizontal! ¡El sistema es “equivalente” a una masa puntual m_{u} , ubicada en $Q(\bar{x}, \bar{y})$!



En vez del sistema de masas puntuales consideremos ahora una placa cuya forma, de tipo I, está dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}, \quad (3.99)$$

con $a < b$, $g(x) < h(x)$ para todo $x \in [a, b]$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$. Supongamos que la densidad de área de la placa δ_{u} , depende solo de x y está dada por una función $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$.

Dado un eje l_y paralelo al eje Oy , como está descrito por (3.82), para calcular el momento M_{l_y} de la placa respecto al eje l_y , partimos $[a, b]$ mediante $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Cada “ k -franquita” de la placa descrita por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

la aproximaremos con una placa homogénea con la forma del rectángulo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, g(x_k^*) \leq y \leq h(x_k^*)\}.$$

El material de esta plaquita rectangular lo supondremos homogéneo del mismo tipo que el punto de coordenadas (x_k^*, y_k^*) , es decir de densidad $\delta(x_k^*)$, donde

$$x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad y_k^* = \frac{g(x_k^*) + h(x_k^*)}{2}. \quad (3.100)$$

Teniendo en cuenta (3.80), (x_k^*, y_k^*) es el centro de gravedad de la plaquita rectangular que puede ser reemplazada por una masa puntual situada en este punto y de magnitud

$$\delta(x_k^*) [h(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k \text{ u}_{\text{m}}. \quad (3.101)$$

Por ello, y teniendo en cuenta (79), tendremos que

$$M_{l_y} \approx \sum_{k=1}^n \delta(x_k^*) [h(x_k^*) - g(x_k^*)] (x_k^* - \bar{x}) \Delta x_k \quad (3.102)$$

Por la continuidad de la función $x \mapsto \delta(x) [h(x) - g(x)] (x - \bar{x})$, existe la integral que nos permite definir:

$$M_{l_y} := \int_a^b \delta(x) [h(x) - g(x)] (x - \bar{x}) dx. \quad (3.103)$$

En particular, si $l_y = Oy$, es decir si $\bar{x} = 0$, el momento será dado por

$$M_y = \int_a^b \delta(x) [h(x) - g(x)] x dx. \quad (3.104)$$

Análogamente calculemos M_{l_x} y M_x . En este caso, en (3.102) la distancia dirigida $(x_k^* - \bar{x})$ se reemplaza, dado (3.100), por

$$(y_k^* - \bar{y}) = \frac{g(x_k^*) + h(x_k^*)}{2} - \bar{y}, \quad (3.105)$$

por lo que

$$M_{l_x} = \int_a^b \delta(x) [h(x) - g(x)] \left(\frac{h(x) + g(x)}{2} - \bar{y} \right) dx, \quad (3.106)$$

y si $l_x = Ox$ el momento estará dado por

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \delta(x) ([h(x)]^2 - [g(x)]^2) dx, \quad (3.107)$$

puesto que $\bar{y} = 0$.

Como en este caso la masa m u_m de la placa está dada por

$$m = \int_a^b \delta(x) [h(x) - g(x)] dx, \quad (3.108)$$

de (3.103), (3.104), (3.105), (3.106) y (3.108) obtenemos las mismas expresiones

$$M_{l_y} = M_y - \bar{x}m, \quad (3.109)$$

$$M_{l_x} = M_x - \bar{y}m, \quad (3.110)$$

obtenidas en (3.95) y (3.96). Por ello, el centro de gravedad $Q(\bar{x}, \bar{y})$ de la placa estará dado por

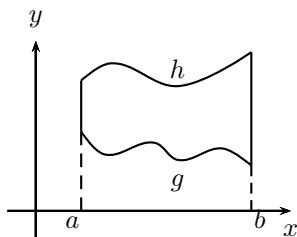
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \delta(x) [h(x) - g(x)] x dx}{\int_a^b \delta(x) [h(x) - g(x)] dx}, \quad (3.111)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \delta(x) ([h(x)]^2 - [g(x)]^2) dx}{\int_a^b \delta(x) [h(x) - g(x)] dx}. \quad (3.112)$$

Si la placa es homogénea, es decir si la densidad es constante, $\delta(x)$ “sale” de las integrales de (3.111) y (3.112) y se simplifica. En este caso, el centro de gravedad $Q(\bar{x}, \bar{y})$ se llama *centroide* de la figura dada por (3.99). Tendremos entonces:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b [h(x) - g(x)] x dx}{\int_a^b [h(x) - g(x)] dx}, \quad (3.113)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b ([h(x)]^2 - [g(x)]^2) dx}{\int_a^b [h(x) - g(x)] dx}. \quad (3.114)$$



Ejemplo 3.48

Calcule el centroide de la figura limitada por los gráficos de $y = \sqrt{9 - x^2}$ e $y = 0$, es decir de un semicírculo de radio 3 uL.

Solución. Aquí $a = -3$, $b = 3$, $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = 0$. La integral $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ uL² es el área del semicírculo de radio 3 uL, por lo que

$$\int_a^b [h(x) - g(x)] dx = \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{1}{2} (\pi(3)^2) = \frac{9\pi}{2}.$$

La integral

$$\int_a^b [h(x) - g(x)]x dx = \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} x dx = 0$$

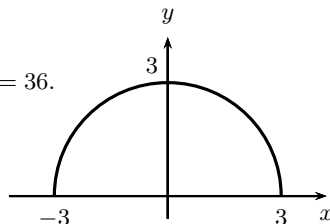
por ser impar la función y simétrico el intervalo $[-3, 3]$.

Además

$$\begin{aligned} \int_a^b ([h(x)]^2 - [g(x)]^2) dx &= \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx \\ &= \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 \\ &= 9[3 - (-3)] - \frac{1}{3}[27 - (-27)] = 54 - 18 = 36. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}(36)}{\frac{9\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$



El centroide estará dado por

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{4}{\pi} \right).$$

3.13.3 Ejercicios

- Una barra rígida uniforme de 2m de largo y de masa M , soporta 3 objetos M_1 , M_2 y M_3 de masa m_1 , m_2 y m_3 , respectivamente, como se muestra en la Figura 3.5. Halle el punto P del cual se debe suspender la barra con los objetos para que quede horizontal.
- Repita el ejercicio anterior con una barra de densidad lineal $\delta(x)$ si:

(a) $\delta(x) = 10 - 3x$

(b) $\delta(x) = 4 + 3x$

- Repita el primer ejercicio pero esta vez quitando los objetos. La densidad lineal está dada por:

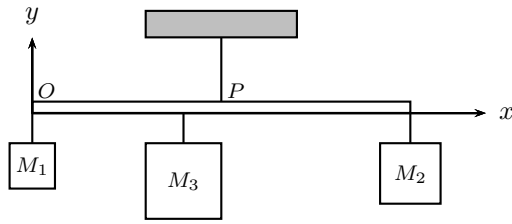


Figura 3.5: Masas suspendidas.

(a) $\delta(x) = 4 + x^2$

(b) $\delta(x) = 5 + 2\sqrt{2x}$

4. Halle el centroide de la figura limitada por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = 4 - x^2, x = 0, y = 0$

(e) $y = x^2, y = \sqrt{x}$

(b) $y = 4 - x^2, y = 0$

(f) $y = 3 - x^2, y = (x - 1)^2 - 2$

(c) $y = 1 + \sqrt{x}, y = 0, x = 4$

(g) $y = x^4, y = \sqrt[4]{x}$

(d) $y = x^3, y = 27, x \geq -1$

(h) $x^2 + y = 1, x + y = -1$

3.14 Aplicaciones en economía

3.14.1 Ingreso de una empresa o un gobierno

La administración de un cantón recauda, entre otros, un impuesto predial. Si, por ejemplo, en 5 años recaudó 200 millones de dólares, como la recaudación anual de este impuesto no varía mayormente si la tasa impositiva se mantiene constante, un buen indicador de la recaudación es la tasa anual de recaudación $TR_{u_{TR}}$, dada por

$$\frac{200 \text{ millones de dólares}}{5 \text{ años}} = 40 \frac{\text{millones de dólares}}{\text{año}}.$$

Para un ingreso de I_{u_I} en un lapso de T_{u_t} , la tasa de recaudación será $TR_{u_{TR}}$, donde

$$TR = \frac{I}{T}. \quad (3.115)$$

Evidentemente, $I = TRT$.

En general, para una gran empresa o un gobierno local o nacional que tiene un ingreso permanente I_{u_I} , aunque variable en magnitud, a lo largo del tiempo t_{u_t} la tasa de recaudación del ingreso $TR(t)_{u_{TR}}$ en el instante t indica el ingreso que se tendría en 1_{u_t} si el flujo de ingresos a lo largo de 1_{u_t} sería similar al del instante t .

Si u_{TR} es compatible con u_I y u_t se escribe analíticamente

$$[u_{TR}] = \frac{[u_I]}{[u_t]} = \left[\frac{u_I}{u_t} \right].$$

Dado $TR(t)$, digamos para $t \in [0, T]$, si se desea conocer los ingresos generados en este lapso, se puede aproximarlos de la siguiente manera.

Realizamos una partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo $[0, T]$ y aproximamos el ingreso $\Delta I_k u_I$ en el lapso dado por el intervalo $J_k = [t_{k-1}, t_k]$, como si el flujo de ingreso en este

intervalo fuera constante, digamos igual a $TR(t_k^*)$, con $t_k^* \in J_k$. Es decir, teniendo en cuenta (3.115),

$$\Delta I_k \approx TR(t_k^*) \Delta t_k,$$

de donde

$$I = \sum_{k=1}^n \Delta I_k \approx \sum_{k=1}^n TR(t_k^*) \Delta t_k.$$

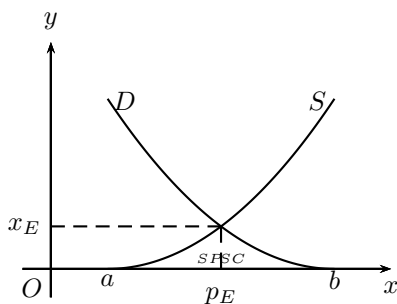
La última es una suma de Riemann que si, por ejemplo, la función $t \mapsto TR(t)$ es continua en $[0, T]$, converge hacia $\int_0^T TR(t) dt$, si $\|P\| \rightarrow 0$. Podemos entonces calcular el ingreso I en el lapso dado por el intervalo $[0, T]$, mediante la fórmula

$$I = \int_0^T TR(t) dt. \quad (3.116)$$

3.14.2 Superávit del consumidor y del productor

Según los economistas que estudian las leyes del mercado, si se llega al precio de equilibrio de un bien se produce una ganancia tanto para un sector de los consumidores como para parte de los productores, la que se mide por los así llamados “superávit del consumidor” y “superávit del productor”. Veamos cómo los calculan.

Sea x el número de unidades u de un bien (por ejemplo un auto, un galón de gasolina, un kg de arroz, etc.) que se compren y venden en un mercado dado si el precio unitario del bien es de p unidades monetarias u_M (miles de dólares, un dólar, etc.). Este precio en la práctica oscila entre un precio mínimo $a u_M$, normalmente representado por el costo de producción, y un precio máximo $b u_M$, que resultaría prohibitivo para todos los consumidores. Se supone que para cada $p \in [a, b]$, existiría una demanda de $D(p) u$ y una oferta de $S(p) u$. Naturalmente $D: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función decreciente, que supondremos continua al igual que la función $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que, por su parte, será creciente. Obviamente $S(a) = 0$ y $D(b) = 0$.



Los gráficos de las dos funciones se cortan en el punto (p_E, x_E) llamado *punto de equilibrio del mercado*, y $p_E u_M$ es el *precio de equilibrio del mercado*.

Ahora bien, si se alcanza este precio de equilibrio, los productores que estaban dispuestos a vender aún a precios inferiores a $p_E u_M$, salen beneficiados. Análogamente, los consumidores que hubieran adquirido el bien aún si su precio hubiera sido superior a $p_E u_M$ también salen beneficiados. El *superávit del productor* $SP u_M$ es la cantidad total de dinero que ese sector de productores reciben por encima del precio al que estaban dispuestos a vender, mientras que el *superávit del consumidor* $SC u_M$ es la cantidad de dinero que se ahorra en total el sector de consumidores que estaban dispuestos a pagar por el bien un precio superior al precio de equilibrio.

Se tiene que

$$SP = \int_a^{p_E} S(p) dp, \quad (3.117)$$

$$SC = \int_{p_E}^b D(p) dp. \quad (3.118)$$

Para probar (3.117) y (3.118), notemos que al ser continuas y monótonas las funciones S y D son invertibles, y $S: [a, p_E] \rightarrow [0, x_E]$ y $D: [p_E, b] \rightarrow [0, x_E]$ son biyectivas. Obviamente,

$$\int_a^{p_E} S(p) dp = \int_0^{x_E} [p_E - S^{-1}(x)] dx, \quad (3.119)$$

$$\int_{p_E}^b D(p) dp = \int_0^{x_E} [D^{-1}(x) - p_E] dx. \quad (3.120)$$

Probemos, por ejemplo, que

$$SC = \int_0^{x_E} [D^{-1}(x) - p_E] dx. \quad (3.121)$$

Dividimos el intervalo $[0, x_E]$ con una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Como x_E es el número de bienes que se venderían y comprarían al precio de equilibrio p_E y, puesto que $x_E = \sum_{k=1}^n \Delta x_k$, la cantidad de bienes Δx_k se comprarían por parte de consumidores que estaban dispuestos a pagar un precio entre p_k uM y p_{k-1} uM, que lo podemos aproximar, digamos, con un precio p_k^* uM comprendido entre los dos anteriores. Hemos puesto p_k igual a $D^{-1}(x_k)$, $0 \leq k \leq n$. Por la monotonía de D existe entonces $x_k^* \in J_k = [x_{k-1}, x_k]$ tal que $p_k^* = D^{-1}(x_k^*)$. Al comprar entonces esas Δx_k u del bien, al precio de equilibrio p_E uM, los consumidores que lo hacen se ahorrarían aproximadamente $(p_k^* - p_E)$ uM por cada unidad comprada. En total el ahorro ΔSC_k uM por esas Δx_k u sería de aproximadamente

$$(p_k^* - p_E) \Delta x_k \text{ uM} = [S^{-1}(x_k^*) - p_E] \Delta x_k \text{ uM}.$$

Sumando todo este ahorro, tendremos que

$$SC = \sum_{k=1}^n \Delta SC_k \approx \sum_{k=1}^n [S^{-1}(x_k^*) - p_E] \Delta x_k.$$

La última es una suma de Riemann que converge hacia $\int_0^{x_E} [S^{-1}(x) - p_E] dx$ si $\|P\| \rightarrow 0$, si la integral existe, lo que sucede, por ejemplo, si S^{-1} es continua. Vemos que (3.121) tiene entonces sentido, pues es de esperar que en el cálculo realizado la aproximación es mejor si el grosor de la partición es pequeño.

Tomando en cuenta (3.120), es pues razonable calcular SC mediante la fórmula (3.118). Análogamente se llega a (3.117).

3.14.3 Ejercicios

- Si los ingresos de una empresa tiene una tasa de recaudación de $TR(t)$ millones de dólares por año, calcule el total de ingresos obtenidos en T años:

(a) $TR(t) = 0.5(t - 2)^2 + 1$, $T = 4$

(b) $0.2\sqrt{1+t}$, $T = 8$

- En el ejercicio precedente calcule el ingreso anual promedio en los últimos 2 años.
- Halle el superávit del consumidor y el del productor si la oferta y la demanda están dadas por las ecuaciones $x = S(p)$ y $x = D(p)$, respectivamente, con $p \in I$:

(a) $S(p) = 3p/2 - 150$, $D(p) = 3000 - 2p$, $I = [100, 1500]$

(b) $S(p) = p^2 - 4$, $D(p) = 10 - p$, $I = [2, 10]$

(c) $S(p) = p^2 + 2p$, $D(p) = 100 - p^2$, $I = [0, 10]$

(d) $S(p) = p^2 + p$, $D(p) = (p - 10)^2$, $I = [0, 10]$

Capítulo 4

Función logaritmo y exponencial

4.1 Relaciones y funciones

Por su importancia para la comprensión del contenido de este capítulo recordemos algunos conceptos básicos. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de X e Y es el conjunto

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

$X \times Y$ es pues el conjunto de parejas ordenadas (x, y) , donde $x \in X$ e $y \in Y$.

Cualquier subconjunto R de $X \times Y$ se llama relación entre los elementos de $X \times Y$. Relación inversa de R es la relación

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}.$$

Se llama *dominio de R* o proyección de R sobre X al conjunto

$$D(R) = \{x \in X \mid \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

Se llama *imagen de R* o proyección de R sobre Y al conjunto

$$\text{Im}(R) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, (x, y) \in R\}.$$

Una relación $f \subset X \times Y$ se llama función de X e Y , y se nota $f : X \rightarrow Y$, si

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in X \times Y, [(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2] \quad (4.1)$$

Por tradición, si f es una función, se escribe $y = f(x)$ en vez de $(x, y) \in f$. La condición (4.1) se puede escribir entonces

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in X \times Y, [y_1 = f(x), y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2].$$

O también

$$\forall x \in D(f) \quad \exists! y \in \text{Im}(f) \quad \text{tal que} \quad y = f(x).$$

Definición 4.1

Si $f \subset X \times Y$ es una función, se dice que f es invertible si f^{-1} también es una función.

Observemos que:

1.

$$\begin{aligned}
f^{-1} \text{ es función} &\Leftrightarrow \forall (y, x_1), (y, x_2) \in X \times Y, \quad [(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2] \\
&\Leftrightarrow \forall (x_1, y), (x_2, y) \in X \times Y, \quad [(x_1, y), (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2] \\
&\Leftrightarrow \forall (x_1, y), (x_2, y) \in X \times Y, \quad [y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2] \\
&\Leftrightarrow \forall y \in \text{Im}(f) \quad \exists! x \in \text{D}(f) \text{ tal que } y = f(x) \\
&\Leftrightarrow f \text{ es inyectiva.}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
f \text{ es inyectiva} &\Leftrightarrow f^{-1} \text{ es la función inversa de } f \\
&\Rightarrow \forall t \in \text{D}(f^{-1}) = \text{Im}(f), \quad \exists! s \in \text{Im}(f^{-1}) = \text{D}(f) \text{ t.q. } f^{-1}(t) = s \\
&\quad (\text{esto es } t = f(s)).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f \text{ es inyectiva} &\Leftrightarrow f^{-1} \text{ es la función inversa de } f \\
&\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \text{Im}(f) \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \text{D}(f).
\end{aligned}$$

4.2 Sentido de la expresión a^x para $x \in \mathbb{Q}$

El objetivo de esta sección es dar un sentido a la expresión a^x , cuando $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

En la escuela primaria aprendimos ya que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = aa \cdots a \quad (n \text{ veces}).$$

O sea que, definiendo por inducción:

$$\begin{aligned}
a^1 &= a \\
a^n &= a^{n-1} \cdot a \quad \forall n \geq 2.
\end{aligned}$$

Se observa de inmediato algunas propiedades interesantes de esta escritura abreviada de un producto de n veces el mismo factor a :

$$\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \quad \forall n > m \geq 1, \\
(a^n)^m &= a^{nm} \quad \forall n, m \geq 1.
\end{aligned}$$

Pronto se nos hizo notar que si definimos

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

las propiedades anteriores siguen siendo válidas para n, m en \mathbb{Z} .

La expresión a^n es pues válida y tiene “buenas” propiedades si $n \in \mathbb{Z}$.

Posteriormente se extendió la validez de la escritura indicada para $x \in \mathbb{Q}$. En efecto, si $x \in \mathbb{Q}$, existen $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $x = \frac{m}{n}$. Se define, para $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} = b \quad \text{tal que} \quad b^n = a.$$

La “raíz n -ésima de a ”, $\sqrt[n]{a}$ siempre existe ya que la función

$$f_n : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto f_n(x) = x^n$$

es estrictamente creciente, por lo tanto es inyectiva. De hecho es biyectiva. Por lo tanto $\sqrt[n]{a} = f_n^{-1}(a)$.

Si se pone, para $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

se ha dado ya sentido a la expresión a^x para $x \in \mathbb{Q}$.

Por otra parte se tienen también las propiedades para todo $p, q \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} a^p \cdot a^q &= a^{p+q}, \\ \frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q}, \\ (a^p)^q &= a^{pq}. \end{aligned}$$

4.3 La función logaritmo natural

Consideremos la función $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Tenemos que f es continua en $]0, \infty[$ y derivable en ese intervalo todas las veces que se desee:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} \quad \forall n \geq 0, \quad \forall x > 0.$$

Sea

$$\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Para la función así definida:

$$\begin{aligned} D(\ln) &=]0, \infty[, \\ (\ln x)' &= f(x) = \frac{1}{x}, \\ (\ln x)^{(n)} &= (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n}, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Como $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ para todo x , \ln es creciente en $]0, \infty[$, y como $(\ln x)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo x , \ln es cóncava en $]0, \infty[$.

Además se tienen las siguientes propiedades.

Teorema 4.1 (Propiedades de la función \ln)

Sean $a, b > 0$, $q \in \mathbb{Q}$:

1. $\ln 1 = 0$,
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$,
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
4. $\ln(a^q) = q \ln a$.

Demostración.

$$1. \quad \ln 1 = \int_1^1 \frac{ds}{s} = 0.$$

2. Sean $F(x) = \ln(ax)$, $G(x) = \ln x$, para $x > 0$. Derivando se obtiene para todo $x > 0$

$$F'(x) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x} = f(x); \quad G'(x) = \frac{1}{x} = f(x).$$

Al ser F y G primitivas de la misma función f , existe una constante C tal que para todo $x > 0$

$$F(x) = G(x) + C.$$

Para $x = 1$, $F(1) = G(1) + C$, de donde

$$\ln a = \ln 1 + C,$$

y como $\ln 1 = 0$, $C = \ln a$.

Entonces para todo $x > 0$

$$F(x) = \ln(ax) = \ln x + \ln a.$$

Con $x = b$ se obtiene el resultado.

3.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a \cdot b^{-1}) \\ &= \ln a + \ln(b^{-1}), \quad \text{por 2.} \\ &= \ln a + (-1) \ln b, \quad \text{por 4.} \\ &= \ln a - \ln b. \end{aligned}$$

4. Sean $F(x) = \ln(x^q)$ y $G(x) = q \ln x$. Derivando se tiene:

$$F'(x) = \frac{1}{x^q} q x^{q-1} = q \frac{1}{x}; \quad G'(x) = q \frac{1}{x}.$$

Análogamente, tenemos que existe C tal que

$$F(x) = G(x) + C, \quad \forall x > 0,$$

Con $x = 1$:

$$F(1) = G(1) + C,$$

de donde $C = 0$, puesto que $F(1) = G(1) = 0$. Se tiene entonces que

$$\ln(x^q) = q \ln x, \quad \forall x > 0.$$

Poniendo $x = a$ se obtiene el resultado. □

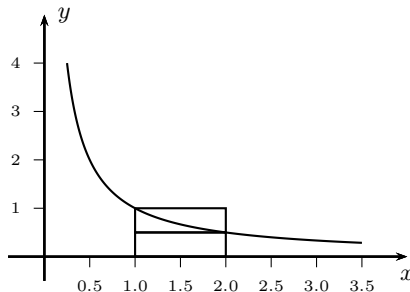
Teorema 4.2 (Otras propiedades de \ln)

1. $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$; $\ln 2 \approx 0.69314718$.
2. $\forall n \geq 1 \quad \ln(2^n) > \frac{n}{2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.
5. La recta $x = 0$ es asíntota vertical de la gráfica de \ln si $x \rightarrow 0^+$.
6. \ln es creciente y cóncava en $]0, \infty[$.
7. \ln es biyectiva.

$$8. (\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0, \quad \int \frac{1}{x} = \ln |x| + C \quad \forall x \neq 0.$$

Demostración.

1. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{ds}{s} \approx 0.69314718$, utilizando, por ejemplo, el método de Simpson.



Las desigualdades se observan gráficamente: $\ln 2$ es el área bajo la curva de ecuación $y = \frac{1}{x}$ entre las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$ y sobre el eje x , la cual es menor al área del cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ y $(1, 1)$, y es mayor al área del rectángulo de vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, \frac{1}{2})$ y $(1, \frac{1}{2})$.

Pero también se las puede probar analíticamente: Tenemos para todo $s \in]1, 2[$ $\frac{1}{2} < \frac{1}{s} < 1$, de donde

$$\int_1^2 \frac{1}{2} ds < \int_1^2 \frac{ds}{s} < \int_1^2 1 ds,$$

es decir

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

2. Sea $n \geq 1$:

$$\ln(2^n) = n \ln 2 > n \frac{1}{2}, \quad \text{por 1.}$$

3. Sea $R > 0$. Debemos hallar A tal que

$$x > A \quad \Rightarrow \quad \ln x > R.$$

Sea $x > 2^n$. Como \ln es creciente

$$\ln x > \ln 2^n > \frac{n}{2} > R \quad \text{siempre que } n > 2R.$$

Basta tomar $A = 2^n$ con $n > 2R$.

4. Probemos ahora que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. Si ponemos $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{y} = y^{-1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y^{-1} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} [(-1) \ln y] \\ &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

5. Resulta de 4. y de la monotonía de \ln .

- 6.

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0, \\ (\ln x)'' &= -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

Y como

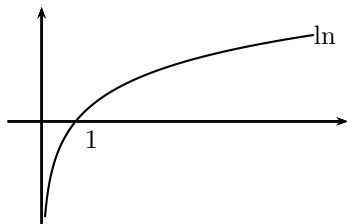
$$|x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

se tiene que

$$(\ln |x|)' = \frac{|x|'}{|x|} = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0.$$

7. Resulta de que \ln es creciente. □

Con estas propiedades podemos graficar \ln :



4.3.1 Ejercicios

1. Halle $D(f)$, el dominio de la función f , si:

(a) $f(x) = \ln(x+2)$

(d) $f(x) = \ln|x^2 - 5x + 4|$

(b) $f(x) = \ln(x^4)$

(c) $f(x) = \ln|x^2 + x + 1|$

(e) $f(x) = \ln\sqrt{x+2}$

2. Halle $f'(x)$ si:

(a) $f(x) = x \ln x$

(e) $f(x) = \ln \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)}$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + x + 2)$

(c) $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{\ln(x+2)}$

(f) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

(d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

3. Analice y grafique la función f :

(a) $f(x) = x \ln x$

(c) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

(d) $f(x) = \ln|x+2|$

4. Calcule:

(a) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

(b) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

(c) $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$

(d) $\int \frac{dx}{x \ln \sqrt{x}}$

4.4 Función exponencial natural

Hemos visto que $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva. Existe por lo tanto su inversa \ln^{-1} , a la que llamaremos función exponencial natural y notaremos \exp :

$$\exp = \ln^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[, \quad x \mapsto \exp(x) = y \quad \text{tal que} \quad \ln y = x.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\exp(x) = y &\Leftrightarrow x = \ln y, \\ \exp(\ln x) = x &\quad \forall x > 0, \\ \ln(\exp(x)) = x &\quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Derivando la última igualdad:

$$[\ln(\exp(x))]' = \frac{(\exp(x))'}{(\exp(x))} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de donde

$$(\exp(x))' = \exp(x).$$

Es decir que \exp es derivable y su derivada es la misma función exponencial.

Recordemos que nuestro objetivo es dar sentido a la expresión a^x , con $a > 0$. Hagámoslo primero tomando $a = e$, donde

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1).$$

Por lo tanto e es tal que $\ln e = 1$. De las desigualdades

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1,$$

y

$$\frac{1}{2}n < \ln(2^n) \quad \forall n \geq 1$$

con $n = 2$ se obtiene

$$\ln 2 < 1 < \ln 4,$$

de donde

$$2 < e < 4.$$

Se puede probar, y lo haremos más tarde, que

$$e \approx 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352$$

Queremos pues definir e^x para $x \in \mathbb{R}$. Observemos que e^q está definido para todo $q \in \mathbb{Q}$ y que

$$\ln(e^q) = q \ln e = q \quad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Por lo tanto, al ser $\exp = \ln^{-1}$,

$$\ln(e^q) = q \Leftrightarrow \exp(q) = e^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Esta notable identidad sugiere la siguiente definición

$$\text{Para } x \in \mathbb{R} : \quad e^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x).$$

que es coherente con la definición de e^x que conocíamos para $x \in \mathbb{Q}$. En otras palabras, si

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x)$$

y

$$g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto g(q) = e^q$$

entonces si se restringe el dominio de \exp a \mathbb{Q} se tiene la función g :

$$\exp|_{\mathbb{Q}} = g.$$

Por lo tanto,

$$e^x = y, \quad \text{donde } y \text{ es tal que } \ln y = x.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \quad \forall x > 0, \\ \ln(e^x) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se tienen además las siguientes propiedades.

Teorema 4.3 (Propiedades de la exponencial natural)

Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$, Entonces

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $e^0 = 1$. | 5. $(e^r)^q = e^{qr}$. |
| 2. $e^1 = e$. | 6. $e^{-r} = \frac{1}{e^r}$. |
| 3. $e^r \cdot e^s = e^{r+s}$. | 7. $(e^x)' = e^x$, y $(e^x)^{(n)} = e^x \quad \forall n \geq 1$. |
| 4. $\frac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$. | 8. $\int e^x dx = e^x + C$. |

Demostración.

1. Resulta de que $\ln 1 = 0$.
2. $\ln e = 1 \Rightarrow e^1 = e$.
3. Sean $R = e^r$, $S = e^s$. Entonces $\ln R = r$ y $\ln S = s$. Además

$$\ln(RS) = \ln R + \ln S = r + s.$$

Como $e^{r+s} = \exp(r+s) = \ln^{-1}(r+s)$, se tiene entonces que

$$e^{r+s} = RS = e^r \cdot e^s.$$

4. Es análogo.
5. Sea $R = e^r$. Entonces $\ln R = r$, y como $\ln(R^q) = q \ln R$, por la propiedad correspondiente del \ln , se tiene entonces que $\ln(R^q) = q \ln R = qr$.
Por la definición de $e^{qr} = \ln^{-1}(qr)$ se tiene entonces que $e^{qr} = R^q = (e^r)^q$.
6. $e^{-r} = e^{(-1)r} = (e^r)^{-1} = \frac{1}{e^r}$.
7. $(e^x)' = (\exp(x))' = \exp(x) = e^x$.
8. Resulta de 7. □

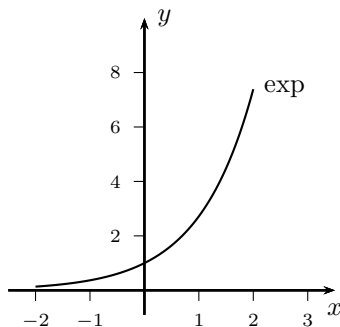
Corolario 4.4

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de donde $\exp : x \mapsto e^x$ es positiva, creciente y convexa.

Con esta información podemos graficar la función \exp :



4.4.1 Ejercicios

1. Derive las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \exp(\sqrt{x})$

(d) $f(x) = \frac{\ln x}{\exp x + 1}$

(b) $f(x) = \frac{2 \exp x + 1}{2 \exp x - 1}$

(e) $f(x) = \ln \left| \frac{\exp x + 1}{\exp x - 1} \right|$

(c) $f(x) = \frac{\exp x + \exp(-x)}{\exp x - \exp(-x)}$

(f) $f(x) = 2 \exp(-x) + \exp(x + x^2)$

2. Analice y grafique f si:

(a) $f(x) = -\exp(2x)$

(d) $f(x) = x + \exp(-x)$

(b) $f(x) = \exp x + \exp(-x)$

(e) $f(x) = 1 - \exp(-x^2)$

(c) $f(x) = \exp x - \exp(-x)$

(f) $f(x) = x \exp(-x)$

3. Una función $P: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $t \mapsto P(t)$ puede servir de modelo de la población de personas de un país, bacterias en una probeta, ardillas de un parque, etc. Si t (años, segundos, meses, etc.) es un instante dado ($t \leq 0$), $P(t)$ es la población en ese instante. Si $P_0 = P(0)$:

(a) $P(t) = P_0 \exp(kt)$, $k > 0$, es el modelo “exponencial”. Pruebe que P satisface la ecuación $P'(t) = kP(t)$.

(b) $P(t) = \frac{\alpha\gamma}{\beta\alpha + \exp(-\alpha t)}$, con $\alpha, \beta, \gamma > 0$, es el modelo “logístico”. Pruebe que P satisface la ecuación logística $P'(t) = P(t)[\alpha - \beta P(t)]$.

(c) Ilustre los modelos con ejemplos.

(d) Analice y grafique la función logística dada por

$$P(t) = \frac{2}{1 + \exp(-2t)}.$$

4. Una función $R: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $t \mapsto R(t) = R_0 \exp(-kt)$, $k > 0$ sirve de modelo para medir la presencia de una sustancia radioactiva en determinado objeto. Por ejemplo $R(t)$ mg de Carbono 14 contenidos en un fósil.

(a) Pruebe que para todo $a, b > 0$, la sucesión de números

$$R(a), R(a+b), R(a+2b), \dots, R(a+nb), \dots,$$

con $n \in \mathbb{N}$, es una progresión geométrica.

(b) Si b es tal que $R(a+b) = R(a)/2$, se dice que b es la “semivida” de la sustancia radioactiva. Calcule esta semivida si se conoce que en 10 años la cantidad de la sustancia radioactiva en cierto objeto disminuye en un 5%.

5. Calcule las siguientes integrales.

$$(a) \int \frac{\exp \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(d) \int_{-1}^1 x \exp(-x^2) dx$$

$$(b) \int \exp\{2x^2 - 5x + 1\}(x - 5/4) dx$$

$$(e) \int_{-1}^0 \frac{1 + \exp x}{\exp x} dx$$

$$(c) \int \frac{\exp x}{(1 + \exp x)^2} dx$$

$$(f) \int_0^1 \frac{\exp(2x) - \exp(-x)}{\exp x + 1} dx$$

4.5 Definición de a^x , $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Observemos que si $a > 0$, $a = e^{\ln a}$. Sabemos que si $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Pero entonces, puesto que

$$a^q = (e^{\ln a})^q = e^{q \ln a}$$

tenemos la notable identidad

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{Q},$$

en la cual el miembro de la izquierda, a^x , tiene para nosotros validez si $x \in \mathbb{Q}$ mientras que el miembro de la derecha, $e^{x \ln a}$, tiene sentido para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto nos sugiere la siguiente definición

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que será coherente con la definición de a^x para $x \in \mathbb{Q}$.

Ejemplo:

$$\pi^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln \pi}.$$

Si

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = e^{x \ln a} & \text{y} & q \longmapsto h(q) = a^q, \end{array}$$

entonces h es la restricción de f sobre \mathbb{Q} :

$$f|_{\mathbb{Q}} = h.$$

Para todo $r \in \mathbb{R}$ y para todo $a > 0$, $\ln(a^r) = r \ln a$. En efecto, como $a^r \stackrel{\text{def}}{=} e^{r \ln a}$, entonces $\ln(a^r) = r \ln a$.

Si ponemos

$$\begin{array}{ccc} \exp_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} a^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{(\ln a)x}. \end{array}$$

la función \exp_a tendrá las siguientes propiedades.

Teorema 4.5 (Propiedades de \exp_a)

Sean $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
4. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

5. $(a^r)^s = a^{rs}$.
6. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.
7. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $(a^x)' = (\ln a)a^x$, $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$ para todo $n \geq 1$.
8. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, si $a \neq 1$.

Demostración.

1. $a^0 = e^{(\ln a)0} = e^0 = 1$.
2. $a^1 = e^{(\ln a)1} = e^{\ln a} = a$.
3. $a^r \cdot a^s = e^{(\ln a)r} e^{(\ln a)s} = e^{(\ln a)r + (\ln a)s} = e^{(\ln a)(r+s)} = a^{r+s}$.
4. $\frac{a^r}{a^s} = \frac{e^{(\ln a)r}}{e^{(\ln a)s}} = e^{(\ln a)r - (\ln a)s} = e^{(\ln a)(r-s)} = a^{r-s}$.
5. $(a^r)^s = (e^{(\ln a)r})^s = e^{s((\ln a)r)} = e^{(\ln a)(rs)} = a^{rs}$.
6. $a^{-r} = a^{r(-1)} = (a^r)^{-1} = \frac{1}{a^r}$.
7. Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$(a^x)' = (e^{(\ln a)x})' = [(\ln a)x]' e^{(\ln a)x} = (\ln a)a^x.$$

8. Suponemos $a \neq 1$. Como $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$, entonces

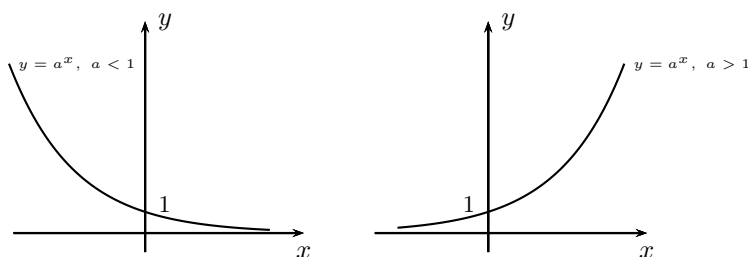
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

□

Corolario 4.6

1. Si $0 < a < 1$, como $\ln a < 0$ y $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp'_a(x) = (a^x)' = (\ln a)a^x < 0$ para todo x esto implica que \exp_a es decreciente, lo cual a su vez implica que \exp_a es inyectiva.
2. Si $1 < a$, como $\ln a > 0$ y $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp'_a(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ esto implica que \exp_a es creciente en $x \in \mathbb{R}$, lo cual a su vez implica que \exp_a es inyectiva.
3. Para todo $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$, $\exp''_a(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ esto implica que \exp_a es convexa en \mathbb{R} .

Con esto podemos graficar $y = a^x$:



4.5.1 Generalización de la regla de la potencia

Por inducción probamos que para todo $a \in \mathbb{N}$, $(x^a)' = ax^{a-1}$.

$(x^0)' = (1)' = 0$ y $(x^{-a})' = (\frac{1}{x^a})' = \frac{-ax^{a-1}}{(x^a)^2} = -ax^{-a-1}$, por lo que esta fórmula de derivación también es válida si $a \in \mathbb{Z}$. Veamos que también lo es si $a \in \mathbb{Q}$. En efecto, si $a \in \mathbb{Q}$ podemos escribir $a = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, y si ponemos

$$y = x^a = x^{\frac{m}{n}},$$

de la definición de $x^{\frac{m}{n}}$, obtenemos

$$y^n = x^m.$$

Derivando los dos miembros se tiene

$$ny^{n-1} \cdot y' = mx^{m-1},$$

de donde

$$y' = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{(x^{\frac{m}{n}})^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Es decir

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{Q} \text{ y para todo } x > 0.$$

Veamos que la fórmula sigue siendo válida para todo $a \in \mathbb{R}$ y $x > 0$. En efecto:

$$(x^a)' = (e^{(\ln x)a})' = [(\ln x)a]' e^{(\ln x)a} = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}.$$

4.5.2 Ejercicios

1. Derive las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 5^x$

(c) $f(x) = x^x$

(e) $f(x) = x^\pi$

(b) $f(x) = 3^{x+2}$

(d) $f(x) = 2^x x^2$

(f) $f(x) = \pi^x + x^2$

2. Calcule las siguientes integrales.

(a) $\int \frac{2^x}{1+2^x} dx$

(c) $\int (2+3t+3^t)^2 dt$

(e) $\int_0^1 \frac{2^t}{1+4^t} dt$

(b) $\int_1^2 3^{-x} dx$

(d) $\int_{-1}^1 \exp(t) 3^{\exp t} dt$

(f) $\int_0^\pi 3^{-\sin(3t)} \cos(3t) dt$

4.6 Función \log_a

Hemos visto que $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva para todo $a > 0$ y $a \neq 1$. Existe entonces la inversa de \exp_a .

Definición 4.2

Sea $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$. A la inversa de $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ se le llama logaritmo en base a y se nota $\log_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a x$.

Observemos que:

1. $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$

2. $D(\log_a) = \text{Im}(\exp_a) =]0, \infty[$.
3. $\text{Im}(\log_a) = D(\exp_a) = \mathbb{R}$.
4. $\log_a(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
5. $a^{\log_a x} = x$ para todo $x \in]0, \infty[$.
6. $\log_e = \ln$.

La función \log_a tiene las siguientes propiedades.

Teorema 4.7 (Propiedades de \log_a)

Sea $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$. Sean $b, c > 0$, $r \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.
3. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
4. $\log_a(b^c) = c \log_a b$.
5. Si $b > 0$ y $a, c \in]0, \infty[\setminus \{1\}$, entonces $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$. En particular $\log_c b = \frac{\ln b}{\ln c}$.
6. Para todo $x > 0$ y para todo $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$
 - 6.1 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,
 - 6.n $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n \ln a}$ para todo $n \geq 1$.
7. 7.1 Si $0 < a < 1$ se tiene que
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.
 - \log_a es decreciente y convexa en $]0, \infty[$.
- 7.2 Si $1 < a$ se tiene que
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.
 - \log_a es creciente y cóncava en $]0, \infty[$.

Demostración.

1. $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$.
2. $a^{(\log_a b + \log_a c)} = a^{\log_a b} a^{\log_a c} = bc$. Entonces $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.
3. Idem.
4. $a^{r \log_a b} = (a^{\log_a b})^r = b^r$. Entonces $\log_a(b^r) = r \log_a b$.
5. Sean $b > 0$ y $a, c \in]0, \infty[\setminus \{1\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \log_c b \log_a c &= \log_a (c^{\log_c b}) \quad \text{por 4. con } r = \log_c b \\ &= \log_a b \end{aligned}$$

Entonces

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}.$$

6. Sea $x > 0$ y $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' \quad \text{por 5.} \\ &= \frac{1}{(\ln a)x}. \end{aligned}$$

Por inducción, puesto que acabamos de ver que 6.1 es válida, supondremos que 6. n es válida. Demostremos 6. $(n+1)$.

$$\begin{aligned} (\log_a x)^{(n+1)} &= \left((\log_a x)^{(n)} \right)' \\ &= \left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{\ln a} x^{-n} \right)', \quad \text{por hipótesis de inducción} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{\ln a} (-n) x^{-n-1} \\ &= \frac{(-1)^{n+2}n!}{(\ln a)} x^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

7. Como por 5. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, y como

$$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \ln a < 0$$

y

$$1 < a \quad \Rightarrow \quad \ln a > 0,$$

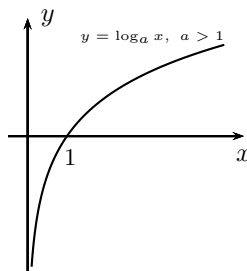
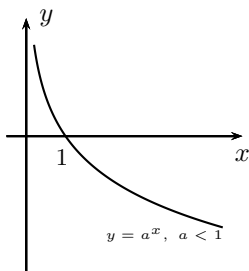
las propiedades resultan de que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{para todo } x > 0,$$

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{para todo } x > 0. \quad \square$$

Ahora podemos graficar \log_a :



4.6.1 Ejercicios

1. Derive las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \log_2 x$

(b) $f(x) = x \log_3 |x^2 + 1|$

(c) $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x-1}$

(d) $f(x) = 2^x \log_2 |x+1|$

(e) $f(x) = [\log_2(2x+3)]^5$

2. Calcule las siguientes integrales.

$$(a) \int_0^1 \frac{[\log_3 |x+1|]^3}{x+1} dx$$

$$(b) \int_0^1 \log_2(x+3) dx$$

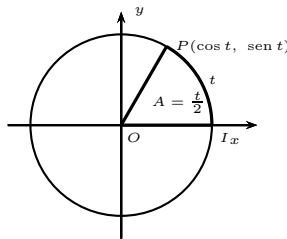
$$(c) \int \log(ax) dx$$

4.7 Funciones hiperbólicas

Recordemos la definición de las funciones trigonométricas. Dada la circunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio 1, es decir la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = 1,$$

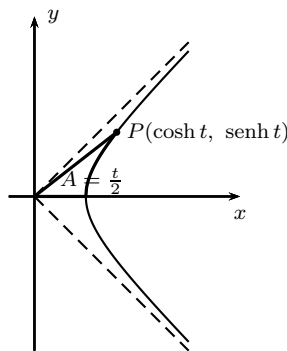
si $t \in \mathbb{R}$ es la longitud del arco medido desde el punto $I(1,0)$, en el sentido horario si $t > 0$ y en el sentido antihorario si $t < 0$, hasta el punto P de la circunferencia, por definición las coordenadas de P son $(\cos t, \sin t)$.



Si calculamos el área A del sector OIP , para $t \in [0, 2\pi]$, mediante una regla de tres simple: si al ángulo 2π le corresponde una área $\pi 1^2 = \pi$, entonces al ángulo t le corresponde un área $A = \frac{t}{2}$, de donde $t = 2A$, o sea que t es numéricamente el doble del área del sector OIP . Las funciones \cos y \sin son pues funciones del doble del área del sector OIP . Como P es un punto de la circunferencia, sus coordenadas $(\cos t, \sin t)$ deben satisfacer la ecuación de ésta. Por lo tanto

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

que es la conocida identidad trigonométrica.



Consideremos ahora la rama derecha de la hipérbola de ecuación

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x > 0$$

Definamos las funciones

$$\begin{aligned} \cosh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \cosh t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sinh t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).\end{aligned}$$

Observemos que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cosh^2 t - \sinh^2 t &= 1, \\ \cosh t &> 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier punto $P(\cosh t, \sinh t)$ pertenece a la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Por esta razón a \cosh y \sinh se las llama coseno hiperbólico y seno hiperbólico, respectivamente.

Si tomamos $t > 0$ y calculamos el área A del sector OIP , se puede constatar (¡hacerlo!) que $A = \frac{t}{2}$, o sea que

$$t = 2A.$$

Tenemos que, análogamente a lo que sucede con las funciones trigonométricas \cos y \sin , las funciones \cosh y \sinh son funciones del doble del área del sector OIP .

Siguiendo con las analogías se definen

$$\begin{aligned}\tanh: t &\mapsto \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} && \text{tangente hiperbólica de } t, \\ \coth: t &\mapsto \coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t} && \text{cotangente hiperbólica de } t, \\ \operatorname{sech}: t &\mapsto \operatorname{sech} t = \frac{1}{\cosh t} && \text{secante hiperbólica de } t, \\ \operatorname{csch}: t &\mapsto \operatorname{csch} t = \frac{1}{\sinh t} && \text{cosecante hiperbólica de } t.\end{aligned}$$

Notemos que se tienen identidades análogas a las trigonométricas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\tanh^2 t + \operatorname{sech}^2 t &= 1, \\ \coth^2 t - \operatorname{csch}^2 t &= 1.\end{aligned}$$

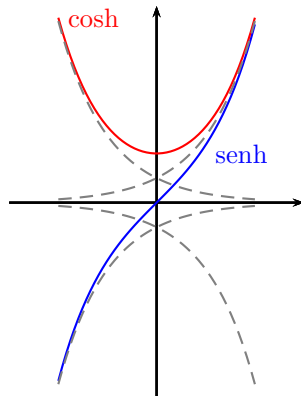
Si notamos que \cosh es par, $\sinh t$ es impar y que $\cosh t = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$ y $\sinh t = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$, las gráficas de $g(t) = \frac{1}{2}e^t$ y de $h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$ pueden servir de guía para graficar \cosh y \sinh . En efecto, si notamos, además, que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = +\infty$$

y que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0,$$

podemos ver que g es asíntota de \cosh y \sinh si $t \rightarrow +\infty$, y que g es asíntota de \cosh si $t \rightarrow -\infty$ mientras que $-h$ es asíntota de \sinh si $t \rightarrow -\infty$.



Se deja como ejercicio de aplicación de la derivada el hacer las gráficas de las seis funciones hiperbólicas.

A partir de las respectivas definiciones, y como ejercicio de derivación de la función exponencial, se puede hallar fácilmente las derivadas de las funciones hiperbólicas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x, \\ \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x, \\ \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x, \\ \frac{d}{dx}(\coth x) &= -\operatorname{csch}^2 x, \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) &= -\operatorname{sech} x \tanh x, \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) &= -\operatorname{csch} x \coth x.\end{aligned}$$

De las dos primeras derivadas se obtienen las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}\int \sinh x \, dx &= \cosh x + C, \\ \int \cosh x \, dx &= \sinh x + C.\end{aligned}$$

4.8 Ejercicios adicionales de funciones exponenciales y logarítmicas

1. Calcular la siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{2 \cosh x + \sinh x + 1} & \text{(e)} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x \, dx \\ \text{(b)} \int_1^2 (x^2 + 1) \ln x \, dx & \text{(f)} \int_1^e \operatorname{sen}(\ln x) \, dx \\ \text{(c)} \int_1^2 (\ln x)^2 \, dx & \text{(g)} \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} \, dx \\ \text{(d)} \int_0^1 \frac{\cosh x}{\exp x + 1} \, dx & \end{array}$$

2. Calcule:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \exp(-t/x)^2 \, dt & \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{t}{(\sinh t + \cosh t)^n} \, dt \\ \text{(b)} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \exp\{\sqrt{x+1}\} \cos(tx) \, dx & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+nx^2 \ln n} \, dx \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{2x} \frac{\exp t}{t} \, dt & \end{array}$$

3. Si una función f tiene, por ejemplo, la forma

$$f(x) = \frac{[g(x)]^a [h(x)]^b}{[k(x)]^c},$$

con $a, b, c > 0$ y g, y y k funciones derivables dadas, como

$$\ln f = a \ln g + b \ln h - c \ln k \quad (4.2)$$

y, como

$$(\ln[f(x)])' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

se tiene que $f'(x) = f(x)(\ln[f(x)])'$, que es fácil de calcular gracias a la ecuación (4.2). El uso de esta última fórmula se llama “derivación logarítmica”. Úsela para calcular $f'(x)$ si:

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(2x+3)}{5x-1}}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{(x-1)^2(x+2)^3}$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{x^{2/3}}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x+2}}$$

$$(d) \quad f(x) = (x^2+1)^{25}(x+1)^{-10}(x+2)^7$$

$$(e) \quad f(x) = x^x \exp x$$

$$(f) \quad f(x) = \frac{(x^2+4)^x}{x^3}$$

$$(g) \quad f(x) = x^{x^x}$$

$$(h) \quad f(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$$

Capítulo 5

Sucesiones y series

5.1 Sucesiones numéricas

5.1.1 Las sucesiones numéricas vistas como elementos de \mathbb{R}^∞

Recordemos que \mathbb{R}^2 es el conjunto de pares ordenados de números reales; es decir, que sus elementos tienen la forma (a_1, a_2) donde $a_1 \in \mathbb{R}$ y $a_2 \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $(2, -3)$, $(-\pi, 1)$, $(3, 3)$ son elementos de \mathbb{R}^2 .

Análogamente, \mathbb{R}^3 es el conjunto de las tripletas ordenadas de números reales, por lo que sus elementos tienen la forma (a_1, a_2, a_3) donde $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}$ y $a_3 \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $(2, -1, -1)$ y $(-\frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{91})$ son elementos de \mathbb{R}^3 .

El conjunto \mathbb{R}^4 será el conjunto de cuádruples ordenados de la forma

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), \quad \text{donde } a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{R} \text{ y } a_4 \in \mathbb{R};$$

\mathbb{R}^5 es el conjunto de quíntuples ordenados de la forma

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), \quad \text{donde } a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{R}, a_4 \in \mathbb{R} \text{ y } a_5 \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, $(1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$, $(1, 1, 2, 2, 3) \in \mathbb{R}^5$, $(-\pi, 1, \sqrt{2}, 1, 5, -7) \in \mathbb{R}^6$.

En general, \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, tiene como elementos n -uples ordenados de números reales, que tendrán la forma

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \text{con } a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, $(2, 4, 6, \dots, 2n) \in \mathbb{R}^n$, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}) \in \mathbb{R}^n$.

Generalizando este concepto de n -uples, podemos considerar elementos formados por una infinidad de números reales ordenados que se los puede escribir

$$(a_1, a_2, a_3, \dots), \quad \text{donde } a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{R} \dots$$

En vez de llamarlos ∞ -uples de números se les denomina *sucesiones numéricas* y al conjunto de ellos lo notaremos \mathbb{R}^∞ .

Por simplicidad de escritura se escribe

$$(a_n) \quad \text{o} \quad (a_n)_{n \geq 1} \quad \text{en vez de} \quad (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

A manera de ejemplos, tenemos:

$$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right) \in \mathbb{R}^\infty; \quad (3n) = (3, 6, 9, 12, \dots) \in \mathbb{R}^\infty.$$

5.1.2 Las sucesiones como funciones

Si $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, se puede considerar la función

$$\begin{aligned} a: \{1, 2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n), \end{aligned}$$

donde $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$. Análogamente, a $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ esta asociada la función

$$\begin{aligned} a: \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) =: a_n, \end{aligned}$$

y a $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ asociamos la función

$$\begin{aligned} a: \{1, 2, \dots, n\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) =: a_n. \end{aligned}$$

De manera similar a toda sucesión $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ asociamos la función

$$\begin{aligned} a: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n. \end{aligned}$$

Algunos autores definen por ello a una sucesión numérica, digamos (x_m) , como la función

$$\begin{aligned} x: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\longmapsto x_m. \end{aligned}$$

Si $I \subset \mathbb{R}$, $a_n \in I$ para todo $n \geq 1$, a pesar de ser incorrecto, se acostumbra escribir $(a_n) \subset I$, en lugar de $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$. Lo que se quiere decir es que la imagen de la sucesión (a_n) , que es $\{a_n : n \geq 1\}$, es un subconjunto de I .

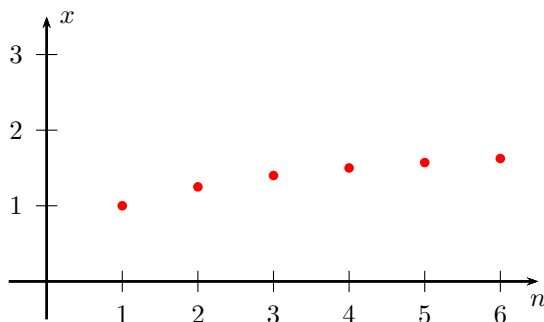
Notemos que para definir una función $f: A \rightarrow B$, es irrelevante el símbolo que se use para representar a las variables independiente y dependiente. Las fórmulas $y = f(x)$ o $t = f(s)$ definen a la misma función f . Por ello da lo mismo escribir (x_n) o (x_m) o (x_k) .

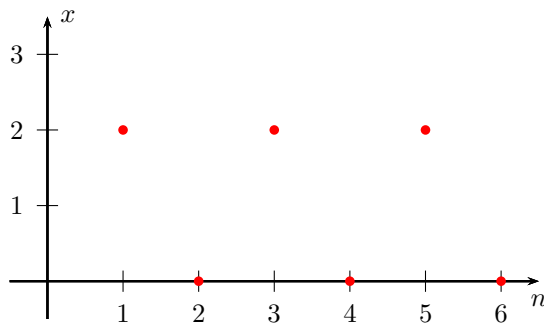
Una sucesión $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, al ser interpretada como una función $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_n$, es un caso particular de funciones reales de la forma $f: D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es la función

$$x: D(x) = \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Como tal puede ser graficada en el plano cartesiano como cualquier función. Abajo constan las gráficas de

$$(x_n) = \left(\frac{2n+1}{n+2} \right) = \left(1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \dots \right) \quad \text{y} \quad (y_m) = (\cos((m+1)\pi) + 1) = (2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots).$$





5.1.3 Sucesiones acotadas

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definimos ya lo que significa A es acotado por arriba (o por abajo), A es acotado, $\sup A$, $\inf A$, $\text{máx } A$, $\text{mín } A$. Con estos conceptos claros, dada una función $f: D(f) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \neq \emptyset$, puesto que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, se dice que:

1. f es acotada por arriba (por abajo) si $\text{Im}(f)$ lo es.
2. f es acotada si $\text{Im}(f)$ lo es.
3. $\sup_{x \in \Omega} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \text{Im}(f)$, $\inf_{x \in \Omega} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \text{Im}(f)$.
4. $\text{máx}_{x \in \Omega} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{máx } \text{Im}(f)$ si este existe,
 $\text{mín}_{x \in \Omega} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{mín } \text{Im}(f)$ si este existe.

Se puede notar que

1. $f: D(f) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada por arriba si existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tal para todo $x \in D(f)$, $f(x) \leq C_2$.
2. $f: D(f) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada por abajo si existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal para todo $x \in D(f)$, $C_1 \leq f(x)$.
3. $f: D(f) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada \Leftrightarrow existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que para todo $x \in D(f)$, $C_1 \leq f(x) \leq C_2$,
 $f: D(f) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada \Leftrightarrow existe $R > 0$ tal que para todo $x \in D(f)$, $|f(x)| \leq R$.

Como las sucesiones son funciones con valores en \mathbb{R} , estos conceptos son aplicables de manera natural. Así tendremos:

1. $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es acotada por arriba si existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \geq 1$, $x_n \leq C_2$.
2. $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es acotada por abajo si existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \geq 1$, $C_1 \leq x_n$.
3. $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es acotada \Leftrightarrow existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que para todo $n \geq 1$, $C_1 \leq x_n \leq C_2$,
 $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es acotada \Leftrightarrow existe $R > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $|x_n| \leq R$.
4. $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. $\text{máx}_{n \in \mathbb{N}} x_n = \text{máx} \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ si éste existe.
6. $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = \inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
7. $\text{mín}_{n \in \mathbb{N}} x_n = \text{mín} \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ si existe.

5.1.4 Sucesiones monótonas

Dada una función $f: D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, definimos que:

- (i) f es creciente en I si para todo $x_1, x_2 \in I \cap D(f)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- (ii) f es no decreciente en I si para todo $x_1, x_2 \in I \cap D(f)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (iii) f es decreciente en I si para todo $x_1, x_2 \in I \cap D(f)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- (iv) f es no creciente en I si para todo $x_1, x_2 \in I \cap D(f)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Si f tiene una de estas cuatro propiedades decimos que f es *monótona en el intervalo I* .

Estos conceptos son aplicables a una sucesión numérica $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$, puesto que puede ser vista como la función $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tomando $D(x) = \mathbb{N}$, $I = [1, \infty[$, por lo que podemos hablar de sucesiones monótonas.

Así, por ejemplo, diremos que

$$(x_n) \text{ es creciente si para todo } m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n \Rightarrow x_m < x_n.$$

Sin embargo, es fácil ver que la condición anterior puede ser simplificada así:

- (i) (x_n) es creciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$ ($\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n > 0$).

Análogamente:

- (ii) (x_n) es no decreciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$ ($\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \geq 0$).
- (iii) (x_n) es decreciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$ ($\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n < 0$).
- (iv) (x_n) es no creciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n+1}$ ($\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0$).

La última propiedad, en cada caso, nos sugiere analizar el signo de $x_{n+1} - x_n$ para estudiar la posible monotonía de una sucesión.

Ejemplo 5.49

Sea $(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$. Pruebe que (x_n) es monótona.

Solución. Sea $n \geq 1$. Tenemos que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0,$$

por lo que (x_n) es creciente.

Si los términos de una sucesión (x_n) son positivos, es decir si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$, podemos observar que:

- (i) (x_n) es creciente \Leftrightarrow para todo $n \in \mathbb{N}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$.
- (ii) (x_n) es no decreciente \Leftrightarrow para todo $n \in \mathbb{N}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$.
- (iii) (x_n) es decreciente \Leftrightarrow para todo $n \in \mathbb{N}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.
- (iv) (x_n) es no creciente \Leftrightarrow para todo $n \in \mathbb{N}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$.

Por lo cual, para analizar la posible monotonía de una sucesión $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ de términos positivos, es conveniente averiguar la relación de orden entre los cocientes $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ y 1, para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 5.50

Averigüe si es monótona la sucesión $(x_n) = \left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$.

Solución. Sea $n \geq 1$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot (n+1)!}{(n+2)(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+2} < 1,$$

puesto que $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ y $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$. Por lo tanto, (x_n) es decreciente. En este caso, esto significa que para todo $n \geq 1$, $x_{n+1} < x_n$, o sea que para todo $n \geq 1$, $\frac{2^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{2^n}{(n+1)!}$.

También se puede probar el resultado analizando el signo de $x_{n+1} - x_n$. En efecto, sea $n \geq 1$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} - \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1} - (n+2)2^n}{(n+2)!} = -\frac{n2^n}{(n+2)!} < 0.$$

5.1.5 Sucesiones convergentes

Dada una función $f: D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si $D(f)$ no es acotado por arriba (es decir que para todo $R > 0$ existe $x_R \in D(f)$ y $x_R > R$), en determinados casos existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

que es un número $l \in \mathbb{R}$ que puede ser aproximado por los valores $f(x)$ con la precisión que se desee, si se toman valores de $x \in D(f)$ suficientemente grandes. Es decir que

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists R > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall x \in D(f), \quad x \geq R \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Este concepto es aplicable a una sucesión numérica (x_n) puesto que su dominio \mathbb{N} no es acotado por arriba.

Diremos entonces que la sucesión (x_n) es *convergente* y que su límite es l , lo que escribiremos

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{o} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_n - l| < \epsilon.$$

Si (x_n) no converge se dice que es *divergente*.

En las definiciones precedentes, si se cambian las desigualdades

$$x \geq R \quad \text{y} \quad n \geq N$$

por las desigualdades

$$x > R \quad \text{y} \quad n > N,$$

respectivamente, se obtienen definiciones equivalentes (¡verifíquelo!).

Ejemplo 5.51

Probemos que si $(x_n) = \left(\frac{2n-3}{n+1}\right)$, entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Solución.

Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon$.
Sea $n \geq 1$.

$$|x_n - 2| = \left| \frac{2n-3}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n-3-2(n+1)}{n+1} \right| = \frac{5}{n+1} < \frac{5}{n} < \epsilon$$

siempre que $n > \frac{5}{\epsilon}$. Como

$$n > \left\lceil \frac{5}{\epsilon} \right\rceil + 1 \Rightarrow n > \frac{5}{\epsilon} \Rightarrow \frac{5}{n} < \epsilon,$$

basta entonces tomar $N = \left\lceil \frac{5}{\epsilon} \right\rceil + 1$.

El ejemplo ilustra cómo demostrar que un valor dado, en este caso, el número 2, es el límite de una sucesión (x_n) si n tiende a infinito. Pero, en la práctica, se plantea frecuentemente el problema de determinar si una sucesión es convergente o no, sin necesidad de calcular su límite. Veamos a continuación un par de criterios que nos permiten resolver este problema.

5.1.6 Convergencia de sucesiones monótonas y acotadas

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1

1. Si una sucesión numérica $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es acotada por arriba y es monótona creciente o no decreciente, entonces es convergente y su límite es

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

2. Análogamente, si $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es acotada por abajo y es monótona decreciente o no creciente, se tiene que (x_n) converge y su límite es

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Demostración.

1. Sea $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon.$$

Recordemos que si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado por arriba,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists a_\epsilon \in A \cap]\sup A - \epsilon, \sup A].$$

Aplicando este resultado al conjunto $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, como $a_\epsilon \in A$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_\epsilon = x_N$.

Tenemos entonces que $x_N \in]l - \epsilon, l]$.

Por otra parte, como (x_n) es monótona creciente o no decreciente,

$$\forall n > N, \quad x_n \geq x_N$$

y por definición de supremo

$$\forall n > N, \quad x_n \leq l.$$

En resumen, para todo $n > N$,

$$l - \epsilon < x_n \leq x_N \leq l + \epsilon,$$

por lo que para todo $n > N$,

$$-\epsilon < x_n - l < \epsilon,$$

o, lo que es lo mismo,

$$n > N \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon.$$

N es entonces el valor buscado.

2. La demostración es análoga a la del primer numeral. \square

Ejemplo 5.52

Pruebe que la sucesión $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es convergente

Solución. Es fácil si se prueba que (x_n) es creciente y que para todo $n \geq 1$, $x_n < 3$.

El límite de esta sucesión es el famoso número e , que tomando valores de n suficientemente grandes, se puede ver que

$$e \approx 2.718\ 281\ 828\ 459.$$

5.1.7 Criterio de Cauchy. Sucesiones de Cauchy

Augustin Cauchy observó que si una sucesión (x_n) converge, los términos x_n se acercan entre ellos cada vez más para valores grandes de n . De hecho probó que si (x_n) converge, entonces (x_n) cumple la siguiente propiedad:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon. \quad (5.1)$$

(la desigualdad $n, m \geq N$ puede ser reemplazada por $n, m > N$, y se tiene el mismo resultado); es decir, que puede lograrse que la distancia entre dos elementos x_n y x_m de la sucesión sea tan pequeña como se desee, si se toman los índices n y m suficientemente grandes. A las sucesiones numéricas que tienen esta propiedad (5.1) las llamaremos *sucesiones de Cauchy*. La observación de Cauchy se puede explicar en el siguiente teorema.

Teorema 5.2

Si $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ converge entonces es de Cauchy.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Como (x_n) converge, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall \epsilon_1 > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n > N_1(\epsilon_1) \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon_1.$$

Sea $n, m \geq 1$:

$$|x_n - x_m| = |x_n - l + l - x_m| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \epsilon$$

siempre que

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |x_m - l| < \frac{\epsilon}{2},$$

lo cual, a su vez, es verdadero siempre que

$$n > N_1\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad \text{y} \quad m > N_1\left(\frac{\epsilon}{2}\right),$$

respectivamente. Basta, entonces, tomar $N = N_1\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. \square

Lo notable de la propiedad descubierta por Cauchy para las sucesiones convergentes, es que es no solo necesaria sino también suficiente para la convergencia de una sucesión numérica. No demostraremos aquí este extraordinario resultado pero lo tendremos siempre presente como el siguiente teorema.

Teorema 5.3 (Criterio de Cauchy)

Una sucesión numérica $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es convergente si y solo si (x_n) es de Cauchy.

Es fácil demostrar que toda sucesión de Cauchy, y por ende toda sucesión convergente, es acotada y también es fácil probar que la recíproca no tiene lugar. Tenemos pues el siguiente teorema.

Teorema 5.4

Sea $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$. Entonces

1. Si (x_n) es de Cauchy, entonces (x_n) es acotada.
2. La recíproca no tiene lugar.

Demostración.

1. Supongamos que (x_n) es de Cauchy. Debemos probar que (x_n) es acotada. Para ello es necesario hallar $R > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $|x_n| < R$.

Como (x_n) es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$, $|x_n - x_m| < 1$. Tomamos $m = N$ y $a = x_N$ y tendremos que para todo $n > N$, $|x_n - a| < 1$. Como

$$\begin{aligned} |x_n - a| < 1 &\Rightarrow -1 < x_n - a < 1 \\ &\Rightarrow a - 1 < x_n < a + 1 \\ &\Rightarrow |x_n| < \max\{|a - 1|, |a + 1|\}. \end{aligned}$$

Basta poner

$$R = \max\{|a - 1|, |a + 1|\} + \max_{1 \leq n \leq N} |x_n|,$$

y tendremos que para todo $n \geq 1$, $|x_n| < R$.

2. Basta considerar $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Vemos que para todo $n \geq 1$, $|x_n - x_{n+1}| = 1$, por lo que (x_n) no es de Cauchy, aunque obviamente es acotada. \square

5.2 Ejercicios

1. Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión dada.

(a) $(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right).$

(b) $(y_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$

(c) $(z_n) = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right).$

(d) $(x_m) = \left(\sum_{k=1}^m \frac{4}{3^k}\right).$

(e) $(e_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$

(f) $(a_k) = \left((-1/3)^k\right).$

2. Pruebe que la sucesión dada es monótona o que no lo es.

(a) $\left(\frac{2n}{3n+2}\right).$

(b) $\left(\frac{5+m}{m^2}\right).$

(c) $\left(\sin \frac{\phi k}{4}\right)$, con $\phi \neq 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- (d) $((m+2)(m+3))$.
- (e) $\left(\frac{3^k}{k!}\right)$.
- (f) $\left(\frac{3^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right)$.
- (g) $\left(\frac{n^2+2}{n}\right)$.
- (h) $(2n^2 + (-1)^n n)$.
- (i) $\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)$.
- (j) $\left(\frac{1+2^k}{2^k}\right)$.
- (k) $(m3^{-m})$.
- (l) $\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.
- (m) $\left(\frac{m!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2m-1)}\right)$.
- (n) $(\tan^{-1} n^2)$.
- (o) $(\sinh n^2)$.
- (p) $\left(5 \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.
- (q) $\left(\frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}\right)$.
3. Pruebe que la sucesión dada es acotada.
- (a) $\left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)$.
- (b) $\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)$.
- (c) $\left(\frac{m!}{m^m}\right)$.
- (d) $(\tan^{-1}(m+2))$.
4. Use la definición para probar que la sucesión dada es de Cauchy.
- (a) $\left(\frac{n^2}{1+3n^2}\right)$.
- (b) $\left(7 \left(\frac{2}{5}\right)^k\right)$.
- (c) $\left(\frac{3^n+2}{3^n}\right)$.
- (d) $(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$.
5. Pruebe la convergencia de la sucesión dada, teniendo en cuenta que una sucesión monótona y acotada converge.
- (a) $\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)$.
- (b) $\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right)$.
- (c) $\left(\frac{k!}{k^k}\right)$.
- (d) $\left(\frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}\right)$.
- (e) $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln \frac{1}{n}\right)$.
6. Halle el límite de la sucesión dada, si éste existe.
- (a) $\left(\frac{3n+2}{5n+4}\right)$.
- (b) $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
- (c) $\left(\frac{3^n}{3^n+2}\right)$.
- (d) $\left(\ln \frac{5n+2}{2n-1}\right)$.
- (e) $(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$.
- (f) $(\sqrt{k}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k}))$.
- (g) $\left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)$.

5.3 Series numéricas

Sea $(a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ una sucesión numérica. Pongamos

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3,$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_3 + a_4,$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = s_{n-1} + a_n.$$

Si queremos dar sentido a la expresión $s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, que se puede notar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, podemos hacerlo usando el concepto de límite de una sucesión, aplicado a $(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$, llamada sucesión de sumas parciales. Entonces, por definición

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

A esta expresión $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se le llama *serie numérica de término general* a_k .

Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge* si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existe. En este caso, si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, s es su *suma* y se escribe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Si el límite no existe se dice que la serie *diverge*.

Nótese que las sumas parciales pueden empezar desde cualquier índice. Por ejemplo:

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n a_k.$$

Ejemplo 5.53

Sea $(a_k) = (0.2, 0.02, 0.002, 0.0002, \dots) = (2 \times 10^{-k})$. Veamos si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y de hacerlo hallemos su límite o suma.

Como $a_k = 2 \times 10^{-k}$ para todo $k \geq 1$, tenemos que si $n \geq 1$:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 2 \times 10^{-k} = 2 \sum_{k=1}^n 10^{-k} = 2 \left(10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-(n-1)} + 10^{-n} \right).$$

Multiplicando ambos miembros por 10^{-1} se obtiene:

$$\begin{aligned} s_n \times 10^{-1} &= 2 \left(10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-(n-1)} + 10^{-n} \right) \times 10^{-1} \\ &= 2 \left(10^{-2} + 10^{-3} + \cdots + 10^{-n} + 10^{-(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Si restamos la última ecuación de la anterior obtenemos:

$$s_n \left(1 - 10^{-1} \right) = 2 \left(10^{-1} - 10^{-(n+1)} \right),$$

de donde

$$\frac{9}{10} s_n = \frac{2}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right),$$

o también

$$s_n = \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Finalmente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \right] = \frac{2}{9}.$$

La serie converge y su suma es $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{2}{9}$.

El ejemplo precedente es la suma de los términos de la progresión geométrica de término inicial $a_1 = \frac{1}{10}$ y con razón $r = \frac{1}{10}$. En efecto

$$(a_k) = \left(\frac{2}{10}, \frac{2}{10}r, \frac{2}{10}r^2, \frac{2}{10}r^3, \dots \right).$$

La forma en que obtuvimos su suma se puede usar para toda progresión geométrica con $|r| < 1$. Para otros valores de r , si el término inicial no es nulo, la serie diverge. En efecto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.5 (Suma de una progresión geométrica)

Sean $a \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$, $(a_k)_{k \geq 0} = (a, ar, ar^2, \dots)$. Entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ converge si y solo si $|r| < 1$.

Demostración. Supongamos que $r = 1$. Entonces $s_n = \sum_{k=0}^n ar^k = (n+1)a$ y $\sum_0^{\infty} a_k$ diverge.

Sea $r \neq 1$. Sea

$$s_n = \sum_{k=0}^n ar^k = a + ar + \dots + ar^n.$$

Multiplicando por r los dos miembros se obtiene

$$rs_n = r(a + ar + \dots + ar^n) = ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1}.$$

Restando esta igualdad de la anterior tendremos

$$(1-r)s_n = a - ar^{n+1} = a(1 - r^{n+1}).$$

Entonces

$$s_n = \frac{a}{1-r} (1 - r^{n+1}).$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } |r| > 1 \text{ o } r = -1, \end{cases}$$

tendremos finalmente que

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } |r| \geq 1. \end{cases} \quad \square$$

Una observación interesante es que si una serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge su término general a_k tiende a 0. La recíproca no es siempre cierta. Ejemplo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, mientras que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, como veremos más adelante, aunque en ambos casos el término general tiende a 0 ($\frac{1}{k} \rightarrow 0$, $\frac{1}{k^2} \rightarrow 0$).

Teorema 5.6

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Demostración. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

de donde

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}.$$

Por otro lado, $s_{n+1} = s_n + a_n$ para todo $n \geq 1$, de donde

$$a_n = s_{n+1} - s_n \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Tomando el $\lim_{n \rightarrow \infty}$ a la última expresión, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0. \quad \square$$

Este resultado es muy útil para, en ciertos casos, demostrar que una serie diverge.

Ejemplo 5.54

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ diverge porque no existe $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{3k+2}$ diverge porque $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{3k+2} = \frac{1}{3} \neq 0$.

5.3.1 Series telescópicas

Definición 5.1

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se llama *telescópica* o *desplegable* si existe $(b_n) \in \mathbb{R}^{\infty}$ tal que $a_k = b_k - b_{k+1}$ para todo $k \geq 1$.

Teorema 5.7

Una serie telescópica converge si $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ existe. En este caso $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Demostración. En efecto, para todo $n \geq 1$: $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$. Por consiguiente: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n+1}. \quad \square$

Ejemplo 5.55

Estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+m)(k+m+1)}$ para $m \in \mathbb{N}$. Utilizando el método de “coeficientes por determinar” o “coeficientes indeterminados”, se puede expresar cada término de la serie como la suma de fracciones parciales. Sea $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+m)(k+m+1)} &= \frac{A}{k+m} + \frac{B}{k+m+1} \\ &= \frac{A(k+m+1) + B(k+m)}{(k+m)(k+m+1)} \\ &= \frac{(A+B)k + A(m+1) + Bm}{(k+m)(k+m+1)}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ (m+1)A + mB = 1, \end{cases}$$

el cual se resuelve fácilmente para encontrar $A = 1$ y $B = -1$, con lo cual se obtiene finalmente que

$$\frac{1}{(k+m)(k+m+1)} = \frac{1}{k+m} - \frac{1}{k+m+1}.$$

Si ponemos $a_k = \frac{1}{(k+m)(k+m+1)}$, $b_k = \frac{1}{k+m}$, tenemos que $a_k = b_k - b_{k+1}$ para todo $k \geq 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ y $b_1 = \frac{1}{m+1}$. Por consiguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+m)(k+m+1)} = \frac{1}{m+1}.$$

Podemos generalizar el teorema de las series telescópicas de la siguiente manera.

Teorema 5.8 (de las series telescópicas generalizado)

Sea $(b_n) \in \mathbb{R}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Sea $M \geq 2$ y $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1} \in \mathbb{R}$ tales

que $\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m = 0$. Sea $(a_n) \in \mathbb{R}^{\infty}$ definida por $a_k = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m b_{k+m}$. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{m=1}^{M-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \right) b_m.$$

Demostración. Se propone como ejercicio al lector. □

Note que el teorema 9.7 es un caso particular del teorema 9.8, con $M = 2$, $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_1 = -1$.

Ejemplo 5.56

Si converge, calcule el límite de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^3 + 3k^2 + 2k}.$$

Solución. Si ponemos $a_k = \frac{k+4}{k^3+3k^2+2k}$, como $k^3 + 3k^2 + 2k = k(k+1)(k+2)$, descomponemos a_k en fracciones parciales:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k+4}{k^3+3k^2+2k} \\ &= \frac{\alpha_0}{k} + \frac{\alpha_1}{k+1} + \frac{\alpha_2}{k+2} \\ &= \frac{\alpha_0(k^2+3k+2) + \alpha_1(k^2+2k) + \alpha_2(k^2+k)}{k^3+3k^2+2k}. \end{aligned}$$

Identificando los numeradores tenemos que:

$$0k^2 + k + 4 \equiv (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)k^2 + (3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2)k + 2\alpha_0,$$

por lo que

$$\begin{cases} 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 = 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 4 = 2\alpha_0. \end{cases}$$

Resolvemos este sistema lineal de ecuaciones obtenemos

$$\alpha_0 = 2, \quad \alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = 1.$$

Si ponemos $b_k = \frac{1}{k}$, tenemos que

$$a_k = \alpha_0 b_k + \alpha_1 b_{k+1} + \alpha_2 b_{k+2}.$$

La primera de las ecuaciones nos muestra que se cumple la hipótesis del teorema, $\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m = 0$, con

$M = 3$, y obviamente $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Por consiguiente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y como

$$\alpha_0 b_1 + (\alpha_0 + \alpha_1) b_2 = 2 \frac{1}{1} + (2 - 3) \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

tenemos entonces que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^3+3k^2+2k} = \frac{3}{2}.$$

Se puede generalizar este resultado tomando $r \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_N(k)}{(k+r)(k+r+1)(k+r+2) \cdots (k+r+M-1)},$$

donde P_N es un polinomio de grado menor o igual que $M-2$.

En efecto:

$$a_k = \frac{P_N(k)}{\prod_{m=0}^{M-1} (k+r+m)} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\alpha_m}{(k+r+m)}.$$

Al obtener el denominador común en el miembro de la derecha, que es $\prod_{m=0}^{M-1} (k+r+m)$, el numerador que se obtiene, que debe ser idéntico a $P_N(k)$, tendrá grado menor o igual que $M-1$ y el coeficiente de k^{M-1} será $\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m = 0$, porque el coeficiente de k^{M-1} en el miembro izquierdo es $P_N(k)$, que es 0 porque $N \leq M-2$. Se cumplen así las hipótesis del teorema porque poniendo $b_k = \frac{1}{k+r}$, se tiene que $a_k = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m b_m$.

5.3.2 Propiedades algebraicas de las series

Como una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y es igual al límite de la sucesión de sumas parciales $(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)$, existe, o diverge si ésta diverge, las propiedades algébricas de los límites de sucesiones se pueden escribir para las series de la siguiente manera.

Teorema 5.9

Sean $(a_n) \in \mathbb{R}^{\infty}$, $(b_n) \in \mathbb{R}^{\infty}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

1. Si existe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces existe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ diverge.
3. Si existe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, entonces existe $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha A$. Si $\alpha \neq 0$ la recíproca también tiene lugar, es decir que si $\alpha \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) \text{ converge.}$$

Dada $(a_n)_{n \geq M} \in \mathbb{R}^{\infty}$, con $M \in \mathbb{Z}$, es decir $(a_n)_{n \geq M} = (a_M, a_{M+1}, a_{M+2}, \dots)$ tiene sentido considerar

$$\sum_{n=M}^{\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=M}^n a_n.$$

Se tiene entonces que si $N > M$: $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge.

El resultado anterior es evidente si tomamos la relación entre las sumas parciales de las dos series:

$$\sum_{k=M}^n a_k = A + \sum_{k=N}^n a_k \text{ para todo } n \geq N$$

donde $A = \sum_{k=M}^{N-1} a_k$ es constante. Entonces $\left(\sum_{k=N}^n a_k\right)_{n \geq N}$ cv $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=M}^n a_k\right)_{n \geq M}$ cv.

5.4 Ejercicios

1. Escriba los cuatro primeros términos de la siguiente serie.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}.$

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{k-1}.$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k!}.$

$$(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi m}{4}}{m}.$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

2. Si la serie converge, halle su límite.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{2^{k+1}}.$$

$$(g) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^k} + \frac{2}{5^k} \right).$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}.$$

$$(h) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 1}{9^k}.$$

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi} \right)^k.$$

3. Halle la fracción a la que corresponde el número decimal periódico dado.

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}.$$

$$(a) 2.8\widehat{2}.$$

$$(e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2 + 11k + 30}.$$

$$(b) 23.4\widehat{9}.$$

$$(c) 21.82\widehat{3}.$$

$$(d) 0.99\widehat{1}.$$

5.5 Series de términos no-negativos

Si $(a_n) \subset [0, \infty[$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se denomina serie de términos no negativos, lo que sucede, en particular si para todo $n \geq 1$, $a_n > 0$.

En este caso, la sucesión de sumas parciales (s_n) , con $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, es monótona no decreciente si $a_n \geq 0$ o monótona creciente si $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Tendremos entonces el siguiente lema.

Lema 5.1

Si $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow (s_n) \text{ es acotada.}$$

Ejemplo 5.57

La serie armónica. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ se denomina serie armónica, la cual diverge porque la sucesión de sumas parciales correspondiente,

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right),$$

no es acotada.

Solución. Lo demostraremos en tres etapas:

1. **Primera.** Se tiene que para todo $n \geq 1$,

$$s_{2n} \geq s_n + \frac{1}{2} \quad (5.2)$$

Sea $n = 1$:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= s_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &\geq s_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} \quad \left(\text{puesto que para todo } k \in \{1, \dots, n\}, \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}\right) \\ &= s_n + n \left(\frac{1}{2n}\right) \\ &= s_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. **Segunda.** Por (5.2) tenemos que para todo $m \geq 1$

$$s_{2^m} \geq \frac{m+2}{2}. \quad (5.3)$$

En efecto:

$$m = 1: \quad s_{2^1} = s_2 \geq s_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{1+2}{2}.$$

Supongamos que (5.3) es válido para $m \geq 1$. Probemos que (5.3) es verdadera para $m+1$.

Lo que debemos demostrar es $s_{2^{m+1}} \geq \frac{m+3}{2}$. Como $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$, aplicando (5.2), con $n = 2^m$, y (5.3) para m , tenemos:

$$s_{2^{m+1}} = s_{2 \cdot 2^m} \geq s_{2^m} + \frac{1}{2} \geq \frac{m+2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m+3}{2}.$$

3. **Tercera.** Probemos que (s_n) no es acotada.

Por definición:

$$(s_n) \text{ es acotada} \Leftrightarrow \exists R > 0 \text{ tal que } \forall n \geq 1 \quad |s_n| < R.$$

Por consiguiente

$$(s_n) \text{ no es acotada} \Leftrightarrow \forall R > 0 \quad \exists n \geq 1 \text{ tal que } |s_n| \geq R.$$

Probemos esto último. Sea $R > 0$. Debemos hallar $n \geq 1$ tal que $|s_n| \geq R$. Por la segunda etapa tenemos que

$$\forall m \geq 1 \quad s_{2^m} \geq \frac{m+2}{2},$$

basta tomar $n = 2^m$, con m tal que

$$s_n = s_{2^m} \geq \frac{m+2}{2} \geq R.$$

Eso se logra con $m \geq 2R - 2$.

5.6 Criterio integral

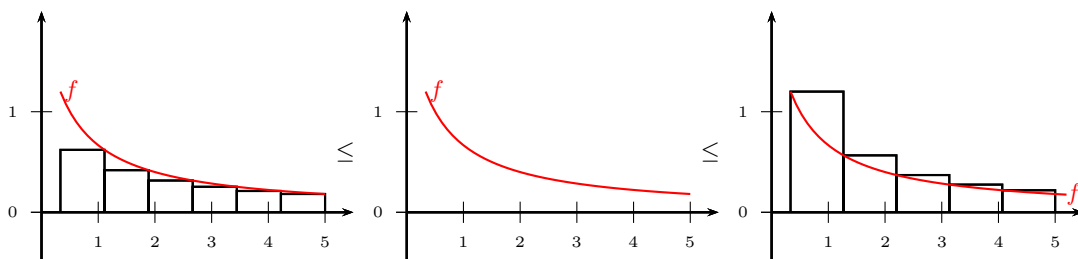
Si $(a_k) \in \mathbb{R}^\infty$ está dada como la restricción a \mathbb{N} de una función $f: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ continua y monótona no-creciente, es decir si $\forall k \geq 1 \quad a_k = f(k)$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge. Se tiene, en efecto, el siguiente teorema.

Teorema 5.10 (Criterio integral)

Si $f: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ continua y monótona no-creciente y si ponemos para $k \in \mathbb{N}$, $a_k = f(k)$, entonces

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Demostración. En la figura:



es fácil observar que:

$$\sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n a_k \quad \forall n \geq 2, \quad (5.4)$$

puesto que las sumas parciales totalizan el área de rectángulos de base 1 y altura a_k y la integral entre 1 y n es el área bajo la curva que es la gráfica de f sobre el intervalo $[1, n]$. Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (5.4), se obtiene el resultado. \square

Ejemplo 5.58

1. Probemos que si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Ponemos $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ y $a_k = f(k)$. Como

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \\ &= \int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx \\ &= \begin{cases} \ln |x| \Big|_1^{\infty} = +\infty & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1, \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1, \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

el criterio integral nos da el resultado. En particular tenemos que:

- (a) la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge,
- (b) la serie cuadrática $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

2. Pruebe que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(\ln n)^2}$ converge.

Ponemos $f(x) = \frac{2}{x(\ln x)^2}$, $a_k = f(k)$.

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} f(x) dx &= 2 \int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \\ &= 2 \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{du}{u^2} \end{aligned}$$

con el cambio de variable $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$, $\frac{x}{3} \left| \frac{u}{\ln 3} \right.$
 $\infty \quad \infty$

$$\begin{aligned} &= -2u^{-1} \Big|_{\ln 3}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\ln 3} \end{aligned}$$

Por el criterio integral tenemos que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(\ln n)^2}$ converge.

5.7 Criterios de comparación

Comparando dos series, digamos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

cuyos términos se relacionan de manera conveniente, se puede a veces obtener resultados sobre la convergencia o divergencia de una de ellas, a partir de lo que se conozca de la otra.

Teorema 5.11 (Criterio de Comparación)

Sean $(a_k), (b_k) \in \mathbb{R}^{\infty}$ tales que para todo $k \geq 1$, se tiene que $0 \leq a_k \leq b_k$. Entonces,

1. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
 2. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.
-

Demostración. Sean

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Se tiene entonces que

$$0 \leq s_n \leq t_n \quad \text{para todo } n \geq 1, \tag{5.5}$$

y las sucesiones (s_n) y (t_n) son monótonas no decrecientes.

1. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, entonces (t_n) converge, digamos hacia T y para todo $n \geq 1$ $s_n \leq t_n \leq T$.
 Al ser (s_n) monótona no decreciente y acotada por arriba por T , esta sucesión converge y por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

2. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, (s_n) diverge y al ser no decreciente esto significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$.

Por (5.5) se tiene entonces que también $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, lo que significa que $\sum_{k=1}^n b_k$ diverge. \square

Ejemplo 5.59

1. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 - 1}{2k^4 + 3k^2 + 5}$ converge.

En efecto, si ponemos

$$a_k = \frac{3k^2 - 1}{2k^4 + 3k^2 + 5} \quad \text{y} \quad b_k = \frac{3}{2k^2},$$

vemos que $0 < a_k < b_k$ para todo $k \geq 1$.

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

y esta última serie converge, el criterio de comparación nos da el resultado.

2. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)\ln(k+3)}{2k^2 - 1}$ diverge.

En efecto, si ponemos

$$a_k = \frac{1}{2k} \quad \text{y} \quad b_k = \frac{(k+2)\ln(k+3)}{2k^2 - 1},$$

vemos que $0 < a_k < b_k$ para todo $k \geq 1$.

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

por el criterio de comparación podemos concluir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.

En el criterio de comparación, la condición “ $0 \leq a_k \leq b_k$ para todo $k \geq 1$ ” puede reemplazarse por “existe $M \geq 1$ tal que $0 \leq a_k \leq b_k$ para todo $k \geq M$ ”, porque al cambiar un número finito de términos la convergencia o no de la serie no se altera.

Teorema 5.12 (Criterio de Comparación en el límite)

Sean $(a_k), (b_k) \in \mathbb{R}^n$ tales que para todo $k \geq 1$ $a_k \geq 0$ $b_k > 0$ y supongamos que $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}$.

Entonces:

1. Si $L > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge.
2. Si $L = 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
3. Si $L = +\infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Demostración. Si existe $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ tal que

$$k \geq N \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{a_k}{b_k} - L \right| < \epsilon.$$

1. Si $L > 0$, tomando $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$ y $M = N(\frac{L}{2})$ se tiene entonces que

$$\forall k \geq M, \quad \left| \frac{a_k}{b_k} - L \right| < \frac{L}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_k}{b_k} - L \right| < \frac{L}{2} &\Leftrightarrow -\frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} - L < \frac{L}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3L}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{L}{2} b_k < a_k < \frac{3L}{2} b_k, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\forall k \geq M \quad Lb_k < 2a_k < 3Lb_k.$$

Se puede aplicar el criterio de comparación a las series $\sum_{k=M}^{\infty} Lb_k$ y $\sum_{k=M}^{\infty} 2a_k$ y luego a las series

$\sum_{k=1}^{\infty} 2a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} 3Lb_k$. Recordemos que si $(c_n) \in \mathbb{R}^{\infty}$ y $\alpha > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge si y solo si

$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha c_n)$ converge. Entonces:

(a)

$$\begin{aligned} \sum a_k \text{ converge} &\Rightarrow \sum 2a_k \text{ converge} \\ &\Rightarrow \sum Lb_k \text{ converge} \\ &\Rightarrow \sum b_k \text{ converge} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum b_k \text{ converge} &\Rightarrow \sum 3Lb_k \text{ converge} \\ &\Rightarrow \sum 2a_k \text{ converge} \\ &\Rightarrow \sum a_k \text{ converge} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$\sum a_k \text{ converge} \Leftrightarrow \sum b_k \text{ converge}.$$

2. Si $L = 0$, tomando $\epsilon = 1$ y $M = N(1)$ se tiene entonces que

$$\forall k \geq M, \quad \left| \frac{a_k}{b_k} - 0 \right| < 1.$$

Como

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - 0 \right| < 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq 1,$$

se tiene que para todo $k \geq M$ $a_k \leq b_k$.

Por el criterio de comparación,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge}.$$

3. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = +\infty$, existe M tal que

$$k \geq M \quad \Rightarrow \quad \frac{a_k}{b_k} > 1,$$

por lo que para todo $k \geq M$ $a_k > b_k$.

Por el criterio de comparación

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge.}$$

□

Ejemplo 5.60

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3+\cos(3k^2+1)}{\sqrt[3]{k^7+k^5+3}}$ converge.

En efecto, si ponemos

$$a_k = \frac{2k+3+\cos(3k^2+1)}{\sqrt[3]{k^7+k^5+3}}, \quad b_k = \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}, \quad \forall k \geq 1,$$

se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 2 > 0,$$

por lo que la primera parte del teorema precedente nos da el resultado.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge.

En efecto, si ponemos

$$a_k = \frac{1}{k!}, \quad b_k = \frac{1}{k^2}, \quad \forall k \geq 1,$$

tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k!} = 0,$$

puesto que para todo $k \geq 3$

$$\frac{k^2}{k!} = \frac{k}{k} \cdot \frac{k}{(k-1)} \cdot \frac{1}{(k-2)!} \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{(k-1)} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k-2)!} = 0.$$

La parte 2) del teorema nos da entonces el resultado.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$ diverge.

Si ponemos

$$a_k = \frac{1}{1+\sqrt{k}}, \quad b_k = \frac{1}{k^{\frac{3}{4}}}, \quad \forall k \geq 1,$$

tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{k}}}{\frac{1}{k^{\frac{3}{4}}}} = +\infty.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{4}}}$ diverge, la parte 3) del teorema anterior nos da el resultado.

5.7.1 Criterio de la razón

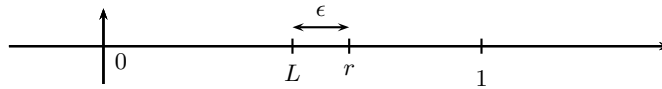
Teorema 5.13 (Criterio de la Razón)

Sea $(a_k) \subset]0, \infty[$. Sea $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Entonces

1. Si $L < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
2. Si $L > 1$ o $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = +\infty$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.
3. Si $L = 1$ el criterio no es concluyente.

Demostración. Si existe $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $k \geq N$, $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - L \right| < \epsilon$.

Caso 1. Sea $r \in]L, 1[$. Ponemos $\epsilon = r - L > 0$:



Tendremos

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - L \right| < \epsilon = r - L, \quad \forall k \geq N.$$

Pero

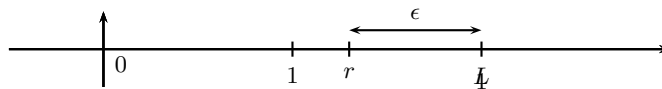
$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - L \right| < \epsilon = r - L &\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} - L < r - L \quad \forall k \geq N \\ &\Rightarrow a_{k+1} < r a_k \quad \forall k \geq N \\ &\Rightarrow a_{N+1} < r a_N, \\ &\quad a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N, \\ &\quad a_{N+3} < r a_{N+2} < r^3 a_N, \quad \text{etcétera.} \end{aligned}$$

Por inducción tendremos que

$$a_{N+n} < r^n a_N \quad \forall n \geq 1.$$

Por el criterio de comparación, aplicado a las series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_N$, puesto que esta última es una serie geométrica que converge, dado que $0 < r < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n}$ converge y, por ende, $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_N$.

Caso 2. Sea $r \in]1, L[$. Ponemos $\epsilon = L - r > 0$:



Tendremos

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - L \right| < \epsilon = L - r, \quad \forall k \geq N.$$

Pero

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - L \right| < \epsilon = L - r \Rightarrow -(L - r) < \frac{a_{k+1}}{a_k} - L \quad \forall k \geq N$$

$$\Rightarrow \quad r a_k < a_{k+1} \quad \forall k \geq N.$$

Análogamente al Caso 1, obtenemos:

$$r^n a_N < a_{N+n} \quad \forall n \geq 1.$$

Comparando las mismas series que en el Caso 1, pero ahora con $r > 1$ para la serie geométrica, que será entonces divergente, se tiene finalmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge.}$$

Caso 3. Veamos dos ejemplos en los que $L = 1$:

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \text{ con } a_k = \frac{1}{k}. \text{ Entonces } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge.}$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \text{ con } a_k = \frac{1}{k^2}. \text{ Entonces } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge.} \quad \square$$

Ejemplo 5.61

$$1. \text{ Pruebe que } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)!} \text{ converge.}$$

Si ponemos $a_k = \frac{3^k}{(k+1)!}$, tendremos

$$a_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{(k+2)(k+1)!},$$

de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{k+2} = 0 < 1.$$

Estamos en el Caso 1 del teorema, por lo que la serie converge.

$$2. \text{ Pruebe que } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{(k-1)!} \text{ diverge.}$$

Ponemos $a_k = \frac{(k+1)^k}{(k-1)!}$, por lo que

$$a_{k+1} = \frac{(k+2)^{k+1}}{k!} = \frac{(k+2)[(k+1)+1]^k}{k(k-1)!}.$$

Entonces

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{k} \left[\frac{(k+1)+1}{k+1} \right]^k = \frac{k+2}{k} \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^{k+1} \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^{-1}.$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{k} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 2 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^{-1} = 1,$$

tendremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = e > 2,$$

por lo que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

5.8 Ejercicios

Aplique un criterio apropiado para determinar si la serie dada converge o diverge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}.$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k+2}.$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3+\sqrt{k}}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}.$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n+1)}{n^{3/2}+1}.$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+\sqrt{k}}.$
9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+3}}.$
12. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/3m)}{m^{3/2}+1}.$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+3^k}{5+4^k}.$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{7k2^k}.$
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k!}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{5}{7}\right)^k.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}.$
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k)!}{k!(3k)^k}.$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-1+\operatorname{sen}(k^2+k)}{(k^{11}+k^7+k^5)^{1/5}}.$

5.9 Series alternantes

En una suma como $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, las sumas parciales de las series $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ o $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$, los signos de los términos se alternan $+, -, +, -, \dots$ o $-, +, -, +, \dots$, respectivamente. Este hecho justifica la siguiente definición.

Definición 5.2

Sea $(a_k) \subset [0, \infty[$. Las series de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

se llaman *series alternantes*.

Como cualquiera de estas dos formas se obtiene multiplicando por (-1) los términos de la otra, basta estudiar la convergencia de una de ellas.

Teorema 5.14 (Criterio de las series alternantes)

Sea $(a_k) \subset [0, \infty[$ una sucesión monótona no creciente (esto es, para todo $k \geq 1$, $a_{k+1} \leq a_k$).

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ converge.

Para la demostración del teorema, haremos uso del siguiente lema que proponemos como ejercicio al lector.

Lema 5.2

Dada $(b_n) \subset \mathbb{R}$, si existe $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1} = L$, entonces existe $\lim_{k \rightarrow \infty} b_n = L$.

Demostración del teorema. Sea $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ para todo $n \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} s_{2k} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \\ &= \sum_{j=1, j-\text{impar}}^k (a_j - a_{j+1}) \quad \text{para todo } k \geq 1. \end{aligned}$$

Como para todo $j \geq 1$, $a_j - a_{j+1} \geq 0$ (puesto que (a_k) es monótona decreciente), entonces $(s_{2k})_{k \geq 1}$ es una sucesión monótona no decreciente.

Por otra parte, para todo $k \geq 1$

$$\begin{aligned} s_{2k} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k} \\ &= a_1 - (a_2 + a_3) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}; \end{aligned}$$

es decir, para todo $k \geq 1$

$$s_{2k} = a_1 - \sum_{j=2, j-\text{par}}^{2k-2} (a_j - a_{j+1}) - a_{2k} \leq a_1,$$

puesto que para todo $j > 1$, $a_j - a_{j+1} \geq 0$. La sucesión $(s_{2k})_{k \geq 1}$ es entonces acotada por arriba por a_1 . Por lo tanto (s_{2k}) converge, digamos hacia S .

Por otra parte, para todo $k \geq 1$, $s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1}$. Tomamos $\lim_{k \rightarrow \infty}$ y obtenemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k} + a_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} + \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = S.$$

Tenemos entonces que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = S$, por lo que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_n = S$, y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ converge. □

Ejemplo 5.62

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2^k}$ es convergente.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^p}$ converge para todo $p > 0$.

En particular, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$, llamada *serie armónica alternada*, es convergente lo que contrasta con la divergencia de la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

De una serie que tiene esta propiedad se dice que converge relativamente o condicionalmente. En general tenemos la siguiente definición.

Definición 5.3

Sea $a_n \subset \mathbb{R}$.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *absolutamente*.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *condicionalmente o relativamente*.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 5.15 (Convergencia absoluta)

Sea $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. La recíproca no siempre tiene lugar.

Demostración. Supongamos que la serie converge absolutamente. Probemos que es convergente. Recordemos que por el criterio de Cauchy, una sucesión numérica (b_n) converge si y solo si (b_n) es una sucesión de Cauchy; es decir, si

$$\forall \epsilon_0 > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\epsilon_0) \quad \text{tal que} \quad \forall n, m > N_0, |b_n - b_m| < \epsilon_0.$$

Sean $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ y $t_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ para todo $n \geq 1$.

Debemos probar que la sucesión (s_n) es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar N tal que si $m, n > N$, entonces $|s_m - s_n| < \epsilon$. Como $\sum_{k=1}^n |a_k|$ converge, la correspondiente sucesión de sumas parciales (t_n) converge. Pero esto significa que (t_n) es de Cauchy, por lo que

$$\exists N_1 \quad \text{tal que} \quad m, n > N_1(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |t_m - t_n| < \epsilon.$$

Como para $m > n \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + a_m) - (a_1 + \cdots + a_n)| \\ &= |a_{n+1} + \cdots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \\ &= (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|) - (|a_1| + \cdots + |a_n|) \\ &= |t_m - t_n|, \end{aligned}$$

repetiendo los mismos cálculos si $n > m \geq 1$, vemos que para todo $n, m \geq 1$,

$$|s_m - s_n| \leq |t_m - t_n| < \epsilon, \quad \text{si} \quad m, n > N_1(\epsilon).$$

Basta entonces tomar $N = N_1(\epsilon)$.

Otra demostración es la siguiente.

Sea

$$b_k = |a_k| + a_k \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (5.6)$$

Entonces

$$0 \leq b_k \leq 2|a_k| \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (5.7)$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$ también converge. Por (5.7), aplicando el criterio de comparación, tendremos entonces que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge.

Como de (5.6) se tiene que $a_k = b_k - |a_k|$ para todo $k \geq 1$, la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ y de $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

implica entonces la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Finalmente, la serie armónica alternada es un ejemplo de que la recíproca no siempre tiene lugar. \square

5.10 Ejercicios

- Determine si converge la serie alternante dada.
- Diga si la serie dada converge absolutamente o relativamente o diverge.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3}.$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2k-1}.$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^{3/2}+1}.$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k^2+3}{k^3}.$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k}}{5k+3}.$

(f) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+2}{2 \ln(k+1)}.$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt[3]{k^2+3}}{k+1}.$

(h) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3 \ln k}{k+1}.$

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{2k+3}.$

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k}{k^2+3}.$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3k+1}{\sqrt{k^5+k^3+1}}.$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{4}{5}\right)^k.$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3^k}.$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{k}{3^k}\right)^3.$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k!}{3^k}.$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k!)^3}{(3k)!}.$

(h) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!}.$

5.11 Criterio general de la razón

Antes vimos, para las series de términos no negativos, el criterio de la razón. Por otra parte, sabemos que una serie absolutamente convergente es convergente. Combinando estos resultados tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.16 (Criterio general de la razón para la convergencia de una serie)

Sea $(a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ una sucesión de términos no nulos. Sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Entonces:

1. Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
2. Si $L > 1$ o si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Si $L = 1$ el criterio no es concluyente.

Para las series de términos no negativos tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 5.17 (Criterio de la raíz)

Sea $(a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ una sucesión de términos no negativos y sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Entonces:

1. Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si $L > 1$ o si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$, la serie diverge.
3. Si $L = 1$ el criterio no es concluyente.

La demostración, análoga a la del criterio de la razón, se basa en el criterio de comparación de una progresión geométrica. Se tiene, además, como corolario, el siguiente teorema.

Teorema 5.18 (Criterio general de la raíz)

Sea $(a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ y sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces:

1. Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
2. Si $L > 1$ o si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, la serie diverge.
3. Si $L = 1$ el criterio no es concluyente.

5.12 Ejercicios

1. Halle los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales converge la serie dada.

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{3}{a} \right)^k.$$

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} k a^k.$$

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{k!}.$$

$$(d) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k^a}.$$

$$(b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}.$$

2. Use el criterio de la raíz para saber si converge o no la serie dada.

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{k^2}.$$

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{3k+2}}{k^k}.$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{k} \right)^k.$$

5.13 Error de aproximación del límite de una serie

Dada una sucesión convergente $(b_n) \in \mathbb{R}^\infty$, si $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} |L - b_n| = 0$, por lo que b_n es una aproximación de L y $|L - b_n|$ es el error que se comete al hacer esta aproximación.

Si una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, digamos hacia S , es decir si ponemos $S = \sum_{k=1}^{\infty}$, por definición

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad \text{con} \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Las sumas parciales s_n son entonces aproximaciones de S y el error que se comete al aproximar S con s_n es

$$E_n = |S - s_n|. \quad (5.8)$$

Tomamos en (5.8) $\lim_{n \rightarrow \infty}$ y vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0.$$

Esto quiere decir que el error que se comete al aproximar el límite S de una serie con sus sumas parciales s_n , puede ser tan pequeño como se quiera, para lo cual basta tomar n suficientemente grande.

Para las series alternantes se tiene un resultado notable, que permite conocer el valor que debe tener n para que el error de aproximación sea menor que un valor dado de antemano.

Teorema 5.19 (Error para las series alternantes)

Si $(a_k) \subset \mathbb{R}$, es tal que $0 \leq a_{k+1} \leq a_k$ para todo $k \geq 1$ y si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, entonces

$$0 \leq S \leq a_1 \quad \text{y} \quad |S - s_n| < a_{n+1} \quad \text{para todo} \quad n \geq 1,$$

$$\text{donde } s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k \quad \text{y} \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k.$$

Demostración. La serie converge, obviamente, por el criterio de las series alternantes. Converge entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} a_k$ y, por ende, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N (-1)^{k+1} a_k$ para todo $n \geq 1$.

Como se vio en la demostración del criterio de las series alternantes,

$$s_{2j} \leq a_1 \quad \text{y} \quad 0 \leq s_{2j-1} \quad (5.9)$$

para todo $j \geq 1$. Como

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_{2j} = \lim_{j \rightarrow \infty} s_{2j-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S,$$

tomando el $\lim_{j \rightarrow \infty}$ en (5.9) se obtiene que

$$0 \leq S \leq a_1. \quad (5.10)$$

Evidentemente, como $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, si converge $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k := S$, tendremos simultáneamente la convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -S.$$

Ahora bien, sea $n \geq 1$. Entonces

$$S - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$$

por lo que

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \\ &= (-1)^{n+2} a_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \\ &= (-1)^n a_{n+1} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{n+j} a_{n+1+j}, \end{aligned}$$

donde hemos puesto $k = n + 1 + j$ y $j = k - (n + 1)$, y hemos tenido en cuenta que si $k = n + 2$, $j = 1$.

Si n es par, $(-1)^n = 1$ y $(-1)^{n+j} = (-1)^j$, por lo que

$$S_n - s_n = a_{n+1} - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_{n+1+j}. \quad (5.11)$$

Análogamente a (5.10) tenemos que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_{n+1+j} \leq a_{n+2}, \quad (5.12)$$

y como $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ tendremos que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_{n+1+j} \leq a_{n+1}. \quad (5.13)$$

Por lo que de (5.11), (5.12) y (5.13), se obtiene que

$$0 \leq S - s_n \leq a_{n+1}; \quad (5.14)$$

es decir,

$$|S - s_n| \leq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \text{ par}. \quad (5.15)$$

Si n es impar, análogamente a (5.11) se obtiene

$$S - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = -a_{n+1} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_{n+1+j},$$

y por (5.12), similarmente a lo hecho en (5.13), tendremos que

$$-a_{n+1} + 0 \leq S - s_n \leq -a_{n+1} + a_{n+2} \leq 0;$$

es decir,

$$|S - s_n| \leq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \text{ impar}. \quad (5.16)$$

Las desigualdades (5.15) y (5.16) nos dan el resultado:

$$|S - s_n| \leq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

5.14 Ejercicios

1. ¿Cuántos términos debe tener la suma parcial de la serie dada que permita aproximar al límite de ésta con tres cifras decimales exactas?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(3k+1)!}.$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k^{3/2}+1}.$$

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

$$(e) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$$

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^3+1}.$$

$$(f) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)3^k}.$$

5.15 Convergencia puntual de sucesiones y series de funciones reales

Hemos definido lo que son sucesiones y series numéricas, y hemos estudiado su convergencia. Pero podemos concebir sucesiones de elementos de otros conjuntos. Por ejemplo, si notamos con M el conjunto de matrices 2×3 , y si está dada una función $A: \mathbb{N} \rightarrow M$, tal que a cada n le corresponde la matriz A_n . Tendremos, entonces, una sucesión (A_n) de matrices de orden 2×3 .

Veamos otro ejemplo. Sea $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera y sea $\Phi = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ el conjunto de las funciones reales definidas en Ω . Si está dada una función

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{N} &\rightarrow \Phi \\ n &\mapsto a_n, \end{aligned}$$

tendremos, de hecho, una sucesión (a_n) de funciones reales definidas en Ω .

Observemos que, dado que para todo $n \geq 1$, se tiene que $a_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, a cada $x \in \Omega$, se tiene que $a_n(x) \in \mathbb{R}$. Por ello, si tomamos un valor $x \in \Omega$ cualquiera, para este valor de x está definida la *sucesión numérica* $(a_n(x))$, la cual, para ciertos valores de x , puede ser convergente, digamos hacia un número real $a(x)$, y para otros valores de x , puede ser divergente. Se puede, entonces, definir, la función

$$\begin{aligned} a: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \end{aligned}$$

Como, dada una sucesión numérica, inmediatamente se le puede asociar la respectiva sucesión de sumas parciales, en este caso podemos considerar la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x) := s(x),$$

el límite de

$$(s_n(x)) = \left(\sum_{k=1}^n a_k(x) \right).$$

Podemos, entonces, hablar de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De hecho, quedan definidas las funciones numéricas:

$$\begin{aligned} a: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} & s: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) & x &\mapsto s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \end{aligned}$$

los dominios de las cuales son:

$$D(a) = \{x \in \Omega : (a_n(x)) \text{ converge}\} \quad \text{y} \quad D(s) = \{x \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ converge}\},$$

llamados *conjuntos de convergencia de la sucesión y de la serie*, respectivamente. Diremos, en este caso, que la sucesión de funciones numéricas (a_n) *converge puntualmente* hacia a y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge puntualmente* hacia s .

5.16 Series de potencias

Un caso interesante de series de funciones son las llamadas *series de potencias*.

Definición 5.4

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $(c_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\infty}$, si ponemos, para $n \geq 0$:

$$a_n(x) = c_n(x - a)^n,$$

la correspondiente serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se llama *serie de potencias*.

El dominio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es, como veremos, un intervalo finito o todo el conjunto \mathbb{R} , y por eso se lo llama *intervalo de convergencia*, y lo notaremos con I . El conjunto I nunca es vacío, puesto que $a \in I$. Se puede tener, de hecho, tres tipos de intervalo de convergencia:

1. $I = \{a\}$.
2. Existe $R > 0$ tal que I es un intervalo centrado en a y de radio R . Puede ser:
 - (a) $]a - R, a + R[$;
 - (b) $]a - R, a + R]$;
 - (c) $[a - R, a + R[$; o
 - (d) $[a - R, a + R]$;

Al número R se lo llama *radio de convergencia*.

3. $I = \mathbb{R}$. Se dice que en este caso I es el intervalo centrado en a y de “radio infinito”.

Estos resultados se resumen en el teorema de “Convergencia de las series de potencias” que lo veremos más adelante, y para cuya demostración precisaremos del siguiente lema.

Lema 5.3

Sean $a \in \mathbb{R}$ y una sucesión numérica $(c_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\infty}$. Sean x_1, x_2 elementos de $\mathbb{R} - \{a\}$. Entonces:

1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1 - a)^n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - a| < |x_1 - a|$.

2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_2 - a)^n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ también diverge para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - a| > |x_2 - a|$.

Demostración.

1. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x - a| < |x_1 - a|. \quad (5.17)$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1 - a)^n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x_1 - a)^n = 0$. Por la definición de este último límite, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se verifica que

$$|c_n(x_1 - a)^n| < 1. \quad (5.18)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |c_n(x - a)^n| &= \left| c_n(x_1 - a)^n \frac{(x - a)^n}{(x_1 - a)^n} \right| \\ &= |c_n(x_1 - a)^n| \left| \frac{x - a}{x_1 - a} \right|^n. \end{aligned}$$

Aplicando (5.18) tendremos, entonces, que: $|c_n(x - a)^n| < \left| \frac{x - a}{x_1 - a} \right|^n$ para todo $n \geq N$.

Como la serie $\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x - a}{x_1 - a} \right|^n$ es una progresión geométrica cuya razón, por (5.17), es

$$\left| \frac{x - a}{x_1 - a} \right| < 1,$$

utilizando el criterio de comparación para las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x - a}{x_1 - a} \right|^n$$

se tiene la convergencia de la primera de ellas, lo que implica la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n.$$

2. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x - a| > |x_2 - a|.$$

Razones por reducción al absurdo. Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ converge. Pero, entonces, aplicando la primera parte de este teorema, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_2 - a)^n$ debe converger absolutamente, lo que es contrario a la hipótesis que enunciamos. \square

Podemos ahora demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.20 (Convergencia de series de potencias)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y una sucesión numérica $(c_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\infty}$. Entonces una sola de las tres propiedades siguientes tiene lugar:

- (I) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ converge si y solo si $x = a$.

- (II) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, y se dice que el radio de convergencia de la serie es infinito.
- (III) Existe $R > 0$, llamado *radio de convergencia* de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, tal que la serie converge absolutamente si $|x-a| < R$, y diverge si $|x-a| > R$. Para $x \in \{a-R, a+R\}$, la serie puede ser convergente o divergente.

Demostración. Si $x = a$, la serie converge obviamente. Hay dos casos excluyentes mutuamente: o bien para todo $x \neq a$, la serie diverge, y tiene lugar la propiedad (I); o bien existe $x_1 \neq a$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge y, por el lema, la serie convergerá para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < |x_1-a|$. En este caso hay, a su vez, dos opciones excluyentes mutuamente.

1. **Primera opción.** No existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ diverge. En este caso, se cumpliría la propiedad (II), porque para todo $x \in \mathbb{R}$ se aplicaría la primera parte del lema con un x_1 adecuado.
2. **Segunda opción.** Existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ diverge. Por la segunda parte del lema, se tiene, poniendo $\rho = |x_2 - a| > 0$, que:

$$\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ converge}\} \subset [a-\rho, a+\rho],$$

y por la primera parte del lema, ρ es una cota superior del conjunto

$$\Omega = \{|x-a| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ converge absolutamente}\}.$$

Si tomamos $R = \sup \Omega$, con este valor R , la serie cumple, entonces, la propiedad (III). Nótese que $R < \infty$, porque Ω está acotado por arriba y $R > 0$, porque $|x_1 - a| \in \Omega$, y, obviamente, $0 < |x_1 - a| \leq R$. \square

Para el cálculo del intervalo de convergencia, se puede usar el siguiente lema.

Lema 5.4 (Fórmula de la razón para el radio de convergencia)

Si $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ existe o es $+\infty$, éste es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

Demostración.

1. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = R < \infty$, con $R > 0$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < R$.

Aplicamos el criterio general de la razón a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n = c_n(x-a)^n$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x - a| \\
&= \frac{|x - a|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|} \\
&= \frac{|x - a|}{R} < 1,
\end{aligned}$$

por lo que la serie converge absolutamente.

2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$, al calcular L se obtiene

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x - a|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|} = 0 < 1,$$

por lo que la serie converge absolutamente.

3. Si $R = 0$ y $|x - a| > 0$, el mismo criterio de la razón, puesto que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x - a|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|} = +\infty,$$

nos indica que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ diverge. □

De manera similar, del Criterio General de la Raíz se obtiene que si $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$

existe o es $+\infty$, éste es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$.

Ejemplo 5.63

1. Halle el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x + 5)^k}{3^k(k + 2)^2}$.

Como

$$\frac{(2x + 5)^k}{3^k(k + 2)^2} = \frac{2^k}{3^k(k + 2)^2} \left(x - \left(-\frac{5}{2}\right) \right)^k,$$

poniendo $c_k = \frac{2^k}{3^k(k + 2)^2}$ y $a = -\frac{5}{2}$, vemos que se trata de una serie de potencias.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^k}{3^k(k+2)^2}}{\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}(k+3)^2}} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+3}{k+2} \right)^2 \\
&= \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

por lo que la serie converge absolutamente en el intervalo $]-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}[=] - 4, -1[$.

Queda por determinar la convergencia para $x = -4$ y $x = -1$.

Para $x = -4$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x + 5)^k}{3^k(k + 2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k + 2)^2},$$

que converge por el criterio de las series alternantes.

Para $x = -1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^k}{3^k(k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2}.$$

Esta serie converge, porque se la puede comparar en el límite con la serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

En síntesis, el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^k}{3^k(k+2)^2}$ es $[-4, -1]$.

2. Halle el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Aquí, $a = 0$, $c_k = \frac{1}{k!}$ y

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty,$$

por lo que la serie converge absolutamente para todo x . A su límite se le nota $\exp(x)$. Es decir

$$\exp: x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

es una función definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Aplicando a esta serie el lema (condición necesaria de convergencia de una serie), se tiene, puesto que converge absolutamente, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^k}{k!} = 0.$$

5.17 Ejercicios

1. Halle el intervalo de convergencia de la serie dada.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (x+1)^k.$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^2}.$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k}.$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+3)^k}{k^3}.$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+2)^k}{\sqrt{k+1}}.$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} (x+1)^k.$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+2)^2} (x+3)^k.$

(h) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(3x+2)^k}{k!}.$

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{\ln(k+1)}.$

(j) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x+2)^k}{k \ln k}.$

(k) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(4-x)^k}{2^{3k}}.$

(l) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3x+2)^k}{k(k+2)}.$

(m) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k+1)} \left(\frac{2x+3}{5} \right)^k.$

2. Halle los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie dada converge.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x3)^k}.$$

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^k.$$

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^k.$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(kx)^k}.$$

$$(e) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kx}.$$

$$(f) \sum_{k=1}^{\infty} k! e^{-kx^2}.$$

5.18 Derivación e Integración de Series de Potencias

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $(c_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\infty}$, si ponemos $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, la función $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida en el intervalo de convergencia de la serie. Resulta que si $R \in]0, \infty[$ o $R = +\infty$ es el radio de convergencia de la serie, la función s es derivable en $]a-R, a+R[$ o en \mathbb{R} , respectivamente, y su derivada se puede obtener como el límite de la serie obtenida derivando término por término la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

Para la integración de s se tiene un resultado análogo.

Teorema 5.21 (Derivación de una Serie de Potencias)

Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es $R \in]0, \infty[$ o $+\infty$, y si

$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, la función s es derivable, y por ende continua, en $] -R, +R[$ o en \mathbb{R} ,

respectivamente y $s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(x-a)^{k-1}$.

Y también el siguiente corolario.

Corolario 5.22

La función s tiene derivadas de todos los órdenes en $]a-R, a+R[$.

En vez de una demostración formal de este teorema, notemos que si, por ejemplo, hemos podido calcular el radio de convergencia R de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ mediante la fórmula

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

como

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k(x-a)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1}(x-a)^n$$

(con el cambio de variable $n = k-1$) podemos calcular el radio de convergencia R' de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k(x-a)^{k-1}$ como:

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)c_{n+1}}{(n+2)c_{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_{n+2}} \right| = R.$$

¡Los radios de convergencia de las dos series coinciden!

Análogamente, y utilizando el teorema precedente, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5.23 (Integración de Series de Potencias)

Si $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, entonces

$$\int s(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + C,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(\beta-a)^{k+1} - (\alpha-a)^{k+1}}{k+1},$$

donde $[\alpha, \beta]$ es subconjunto del intervalo de convergencia.

Ejemplo 5.64

Utilizando los teoremas precedentes halle series de potencias que converjan hacia:

(a) $\frac{1}{(1+x)^2},$

(b) $\ln(1+x),$

(c) $\arctan x,$

para $x \in]-1, 1[$.

Conocemos que si $|r| < 1$ se tiene la convergencia de la serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Poniendo $a = 1$, $r = -x$, con $x \in]-1, 1[$, tenemos

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(-x)^k,$$

por lo que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (5.19)$$

para todo $x \in]-1, 1[$.

Como entonces $x^2 \in [0, 1[$, se puede sustituir x por x^2 y obtenemos

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad (5.20)$$

para todo $x \in]-1, 1[$.

1. Derivando (5.19) obtenemos, gracias al teorema de derivación de series de potencias, que

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n \quad (5.21)$$

(donde hicimos el cambio de variable $n = k - 1$).

Cambiando de signo en (5.21) se obtiene finalmente

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad (5.22)$$

para todo $x \in]-1, 1[$.

Derivando (5.22) las veces que sea necesario, se obtienen series que convergen hacia $\frac{1}{(1+x)^n}$ para todo $n \geq 3$.

2. Integrando cada lado de (5.19), pero con t en lugar de x , entre 0 y x para $x \in]-1, 1[$ se obtiene

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Como con el cambio de variable $n = k + 1$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

y como

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x),$$

se tiene que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (5.23)$$

para todo $x \in]-1, 1[$.

3. Integrando la igualdad (5.20), pero con t en lugar de x , entre 0 y x para $x \in]-1, 1[$ se obtiene:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

de donde, puesto que

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x,$$

se obtiene:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (5.24)$$

para todo $x \in]-1, 1[$.

Las series que obtuvimos en estos ejemplos son series alternantes para las cuales se conoce el error de aproximar el límite de la serie con sus sumas parciales (véase el teorema del error para las series alternantes). Gracias a ello se pueden obtener aproximaciones, con la precisión que se desee, de las expresiones indicadas para $x \in]-1, 1[$.

Ejemplo 5.65

Obtener una aproximación de $\arctan(0.2)$ con tres cifras decimales exactas.

Por (5.24) con $x = 0.2$, tenemos que

$$\arctan(0.2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} (0.2)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad \text{con } a_k = \frac{(0.2)^{2k+1}}{2k+1}.$$

Sabemos que

$$\left| \arctan(0.2) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} (0.2)^{2k+1} \right| < \frac{(0.2)^{2n+3}}{2n+3} = a_{n+1}.$$

Calculemos algunos valores de a_{n+1} :

n	a_{n+1}
0	$\frac{(0.2)^3}{3} \approx 0.002666$
1	$\frac{(0.2)^5}{5} \approx 0.000064$
2	$\frac{(0.2)^7}{7} \approx 0.000001$

Vemos que con $n = 1$ se tiene la precisión deseada, por lo que aproximamos $\arctan(0.2)$ con

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^k a_k = 0.2 - \frac{(0.2)^3}{3} \approx 0.1973.$$

Así:

$$\arctan(0.2) \approx 0.1973.$$

5.19 Ejercicios

1. Escriba la $f(x)$ dada como una serie de potencias y halle el correspondiente intervalo de convergencia.

(a) $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

(b) $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

(c) $f(x) = \frac{7}{5-2x}$.

(d) $f(x) = \frac{3}{4+5x}$.

(e) $f(x) = \ln(1+3x)$.

(f) $f(x) = \arctan \frac{x}{2}$.

(g) $f(x) = \ln(1+x^2)$.

(h) $f(x) = \int_0^x \ln(1+2t^2) dt$.

(i) $f(x) = \int_0^2 \arctan t dt$.

2. Halle el dominio de la función f para $f(x)$ dada.

(a) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+2)^k}{k2^{k+1}}$.

(b) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^k}{(k+1)!}$.

3. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

(a) Pruebe que $f' = f$ y que $f(0) = 1$.

(b) Deduzca de ello la relación de f con la función $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(c) Represente como serie de potencias las funciones g y h , si $g(x) = e^{-x+1}$ y $h(x) = e^{x/2}$.

(d) Aproxime los números siguientes con tres cifras decimales exactas: $1/e$, $1/\sqrt{e}$, $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$ y $\arctan 0.1$.

5.20 Series de Taylor y de Maclaurin

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $(c_n) \in \mathbb{R}^{\infty}$, hemos visto que se puede definir una función

$$s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k,$$

cuyo dominio de definición es el intervalo de convergencia de la serie. En los ejemplos precedentes vimos que esta función puede ser dada por expresiones algebraicas, trigonométricas, logarítmicas, etc. conocidas. En estos casos se dice que $s(x)$ *está representada por la serie*

de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, o que *la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ *representa a* $s(x)$. Así,

por ejemplo, $\ln x$ *está representada por la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Notemos que si

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \quad (5.25)$$

por el teorema de la derivación de series de potencias obtenemos derivando (5.25) varias veces:

$$\begin{aligned} s'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x-a)^{k-1}, \\ s''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) (x-a)^{k-2}, \\ s'''(x) &= \sum_{k=3}^{\infty} c_k k(k-1)(k-2) (x-a)^{k-3}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Evalutando estas expresiones para $x = a$, se obtiene

$$s(a) = c_0, \quad s'(a) = c_1, \quad s''(a) = 2c_2, \quad s'''(a) = 3 \cdot 2c_3, \quad \text{etc.}$$

y, en general,

$$s^{(n)}(a) = n!c_n, \quad \forall n \geq 0,$$

de donde

$$c_n = \frac{s^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n \geq 0 \quad (5.26)$$

donde hemos notado $s^{(0)}(x) = s(x)$.

Hemos obtenido así una expresión para los coeficientes c_k en función de las derivadas de la función s , evaluados en a ! Podemos entonces escribir que

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (5.27)$$

la cual es válida en el intervalo $]a-R, a+R[$, donde R es el radio de convergencia de la serie de potencias, o en \mathbb{R} si este radio es $+\infty$. La serie de (3) se llama *serie de Taylor de s en a* , y cuando $a = 0$, es decir, si

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (5.28)$$

se llama *serie de Maclaurin de s* .

Es importante observar que en (5.27) y (5.28) la función s está definida como el límite de una serie de potencias previamente dada, por lo cual la función s es infinitamente derivable en $]a-R, a+R[$ o en \mathbb{R} , según sea el caso.

Se plantea naturalmente el problema inverso: dada una función $f: I \mapsto \mathbb{R}$, infinitamente derivable en un intervalo abierto I que contenga un número $a \in \mathbb{R}$, se puede obtener análogamente a (5.27) la *serie de Taylor de f en a* siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (5.29)$$

con

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (5.30)$$

Esta serie, como cualquier otra, tendrá su correspondiente intervalo de convergencia de la forma $]a - R, a + R[$ o \mathbb{R} , en el cual estará definida la función $s: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dada por:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k, \quad (5.31)$$

Como

$$c_k = \frac{s^{(k)}(a)}{k!} \quad \forall k \geq 0, \quad (5.32)$$

surge la obvia pregunta ¿qué relación hay entre $s(x)$ y $f(x)$, para los valores de x en que ambas expresiones tienen sentido? Es decir,

$$¿s(x) = f(x)? \quad (5.33)$$

Curiosamente, la respuesta *no siempre* es afirmativa! a pesar de que por (5.30) y (5.32)

$$s^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \forall k \geq 0, \quad (5.34)$$

¿no siempre se tiene la identidad (5.33)! Veámoslo con un ejemplo. Sea $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Se puede ver que para todo $k \geq 0$, $f^{(k)}(0) = 0$, por lo tanto

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Obviamente, para todo $x > 0$: $0 = s(x) \neq f(x) \neq 0$. Es decir que $f(x)$ *no está representada por su serie de Taylor*, en este caso.

Sin embargo en muchos casos, para funciones que usualmente se presentan en la práctica, la correspondiente serie de Taylor o de Maclaurin *¡sí las representa!*

Veamos un resultado que nos permite hallar una condición suficiente para que una función sea representada por una serie de Taylor.

Teorema 5.24 (de Taylor)

Sean $a \in \mathbb{R}$, $R > 0$, $n \geq 0$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n + 1$ veces derivable en $]a - R, a + R[$. Entonces

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \forall x \in]a - R, a + R[,$$

donde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k, \quad (5.35)$$

es el *polinomio de Taylor de grado n de f en a* , y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}, \quad (5.36)$$

donde c_x es un número comprendido entre a y x .

A $R_n(x)$ se le llama residuo y (5.36) es la *forma de Lagrange* de este residuo.

Omitiremos la demostración aquí, pero hacemos notar que los $P_n(x)$ son justamente las sumas parciales de la serie de Taylor de f en a , si f es infinitamente derivable. Como

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = P_n(x) = f(x) - R_n(x) \quad \forall n \geq 0 \quad (5.37)$$

tomando el $\lim_{n \rightarrow \infty}$ se tiene que

$$s(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x). \quad (5.38)$$

Vemos que f será representada por su serie de Taylor si el límite de (5.38) es 0! Tenemos, pues, el siguiente teorema.

Teorema 5.25 (de la representación de una función por su serie de Taylor)

Sean $a \in \mathbb{R}$, $R > 0$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable en $]a - R, a + R[$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in]a - R, a + R[$, entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (5.39)$$

En ejercicios prácticos para probar la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in]a - R, a + R[\quad (5.40)$$

es muy útil saber que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^k}{k!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (5.41)$$

resultado que obtuvimos como la condición necesaria de la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ cuyo intervalo de convergencia es todo \mathbb{R} .

Ejemplo 5.66

¿Representa a $\ln x$ su serie de Taylor en 1? Sea $f(x) = \ln x$. Entonces

$$f'(x) = x^{-1}, f''(x) = -1x^{-2}, f'''(x) = 1 \cdot 2x^{-3}, \dots, f^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!x^{-k} \quad \forall k \geq 1.$$

Por lo que

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 1 \cdot 2, \dots, f^{(k)}(1) = (-1)^{(k-1)}(k-1)! \quad \forall k \geq 1.$$

La serie de Taylor de $\ln x$ en 1 es

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k, \quad \text{con } c_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \forall k \geq 1.$$

Se puede ver (por ejemplo, con la fórmula de la razón) que $R = 1$ y que el intervalo de convergencia es $]0, 2[$.

Para $x \in [1, 2]$ probemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$.

Como $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$,

$$|R_n(x)| = \left| (-1)^n n! c_x^{-n-1} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{c_x} \right|^{n+1}, \quad \text{con } c_x \in]1, x[.$$

Por otra parte:

$$x \in [1, 2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x-1 \leq 1 < c_x < x \Rightarrow 0 \leq \frac{x-1}{c_x} < 1.$$

Entonces

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{c_x} \right| \quad \forall n \geq 1, \quad \text{con } \left| \frac{x-1}{c_x} \right| < 1.$$

Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$, el teorema del “sandwich” nos da entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0.$$

En el caso $x \in]0, 1[$ se prueba también esta última igualdad por lo que la serie de Taylor en 1 realmente representa a $\ln x$ en $]0, 2[$. Es decir

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k.$$

La siguiente es una lista de algunas funciones cuyas series de Maclaurin las representan en los intervalos dados:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{sen} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \ln(x+1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \quad x \in]-1, 1]. \end{aligned}$$

A manera de ejercicio, pruebe que en estos ejemplos las series de Maclaurin representan a las funciones dadas en los intervalos indicados.

5.21 Ejercicios

1. Halle la serie de Maclaurin de la $f(x)$ dada.
 - (a) $f(x) = \frac{1}{3-x}$.
 - (b) $f(x) = \frac{1}{1+3x}$.
 - (c) $f(x) = \ln(1+3x)$.
 - (d) $f(x) = \cos x$.
 - (e) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$.
 - (f) $f(x) = e^x$.
 - (g) $f(x) = e^{-x}$.
 - (h) $f(x) = e^x + e^{-x}$.
 - (i) $f(x) = e^x - e^{-x}$.
2. Halle la serie de Taylor de la $f(x)$ dada en el a dado.
 - (a) $f(x) = \frac{1}{1+2x}$, $a = 2$.
 - (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$.
 - (c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/6$.
 - (d) $f(x) = \cos x$, $a = \pi/4$.
 - (e) $f(x) = \ln(x-1)$, $a = 3$.
 - (f) $f(x) = \ln(x+1)$, $a = 1$.
 - (g) $f(x) = e^x$, $a = 2$.
 - (h) $f(x) = e^{-3x}$, $a = 1$.
3. Halle tres términos no nulos de la serie de Maclaurin de la $f(x)$ dada.
 - (a) $f(x) = \arctan x$.
 - (b) $f(x) = \cos x$.
 - (c) $f(x) = \ln(1+2x)$.
4. Halle la serie de Maclaurin de la $f(x)$ dada teniendo en cuenta las series conocidas de las funciones elementales.
 - (a) $f(x) = e^{-x^3}$.
 - (b) $f(x) = x^3 e^{-2x}$.
 - (c) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$.
 - (d) $f(x) = \ln(1-x^2)$.
 - (e) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + 1)$.
 - (f) $f(x) = \operatorname{sen} x + \sec^2 x$.
 - (g) $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

5. Usando series indique cómo se pueden aproximar los números dados.

(a) $\sin 44^\circ$.

(b) $\cos 59^\circ$.

(c) $e^{0.1}$.

(d) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

5.22 Serie Binomial

Definición 5.5

Dado un número $r \in \mathbb{R}$ a la serie de potencias

$$s_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(r)}{n!} x^n, \quad (5.42)$$

donde $b_0(r) = 1$, $b_1(r) = r$, $b_2(r) = r(r-1)$, y para todo $k \geq 2$, $b_k(r) = r(r-1)(r-2) \cdots (r-k+1)$, se llama *serie binomial*.

El nombre viene dado teniendo en cuenta que, por la fórmula del binomio de Newton, se tiene

$$(1+x)^j = 1 + jx + \frac{j(j-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{j(j-1) \cdots (j-k+1)}{k!} x^k + \cdots = 1 + jx + \sum_{k=2}^j \frac{b_k(j)}{k!} x^k.$$

Esta suma tiene $j+1$ términos y lo mismo sucede con la serie binomial si $r = j \in \mathbb{N}$.

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.26 (de la serie binomial)

Para todo número real r la serie binomial converge si $|x| < 1$, diverge si $|x| > 1$ y representa a la función f dada por $f(x) = (1+x)^r$. Es decir:

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad (1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(r)}{k!} x^k, \quad (5.43)$$

donde

$$b_0(r) = 1, b_1(r) = r \quad \text{y} \quad \forall k \geq 2 \quad b_k(r) = r(r-1)(r-2) \cdots (r-k+1). \quad (5.44)$$

Demostración. Se calcula el radio de convergencia R con la fórmula de la razón y se obtiene $R = 1$. Dejamos al lector, como ejercicio, probar que la serie realmente representa a f en $] -1, 1[$. \square

Ejemplo 5.67

Hallar una representación como serie de potencias para $\sqrt[3]{1+x}$, si $|x| < 1$. Aplicamos (5.43) con $r = 1/3$:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} x^3 + \\ &+ \cdots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2) \cdots (\frac{1}{3}-k+1)}{k!} x^k + \cdots \end{aligned}$$

5.23 Ejercicios

1. Halle tres términos de una serie de potencias para la $f(x)$ dada.
 - (a) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$.
 - (b) $f(x) = \sqrt{4-x}$.
 - (c) $f(x) = \sqrt{3-x^2}$.
 - (d) $f(x) = (2+x)^{3/2}$.
 - (e) $f(x) = \frac{x}{(3+x)^2}$.
 - (f) $f(x) = \frac{x^3}{(2-x^2)^3}$.
2. Aproximar los números dados con tres cifras decimales exactas.
 - (a) $\sqrt[3]{1.02}$.
 - (b) $\frac{1}{\sqrt{1.1}}$.
 - (c) $\arcsen(0.2)$. Use el hecho de que $\arcsen x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.
 - (d) $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^2} dx$.
 - (e) $\int_0^{1/4} \sqrt[3]{1+x^2} dx$.

Apéndice A

Tablas de integración

A.1 Fórmulas básicas

1. $\int u \, dv = uv - \int v \, du$
2. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$
4. $\int e^u \, du = e^u + C$
5. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$
7. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
8. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
10. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$
12. $\int \cot u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$
13. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
14. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$
16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$
19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
20. $\int \frac{Au + B}{u^2 + 2bu + c} = \frac{A}{2} \ln(u^2 + 2bu + c) + \frac{B - Ab}{\sqrt{c - b^2}} \tan^{-1} \frac{u + b}{\sqrt{c - b^2}} + C, \text{ si } c > b^2.$

A.2 Fórmulas en las que interviene $\sqrt{a^2 + u^2}$

1. $\int \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$
2. $\int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{8} (a^2 + 2u^2) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$

$$3. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

$$4. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$5. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$6. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$7. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$$

$$8. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

$$9. \int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

A.3 Fórmulas en las que interviene $\sqrt{a^2 - u^2}$

$$1. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$2. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$3. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$4. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$5. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$6. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$7. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$8. \int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$9. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

A.4 Fórmulas en las que interviene $\sqrt{u^2 - a^2}$

1. $\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$
2. $\int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$
3. $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$
4. $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$
5. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$
6. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$
7. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$
8. $\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$

A.5 Fórmulas con las funciones trigonométricas

1. $\int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$
2. $\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$
3. $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$
4. $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
5. $\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u) \cos u + C$
6. $\int \cos^3 u du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u) \sin u + C$
7. $\int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln |\cos u| + C$
8. $\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln |\sin u| + C$
9. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$
10. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$

11. $\int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$
12. $\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$
13. $\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du$
14. $\int \cot^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du$
15. $\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$
16. $\int \csc^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du$
17. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu \, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$
18. $\int \cos au \cos bu \, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$
19. $\int \operatorname{sen} au \cos bu \, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$
20. $\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$
21. $\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$
22. $\int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$
23. $\int u^n \cos u \, du = -u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$
24. $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u \, du$
 $= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u \, du$
25. $\int \frac{du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C$
26. $\int \frac{du}{1 + \operatorname{sen} au} = -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C$
27. $\int \frac{u \, du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{u}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)\right| + C$

A.6 Fórmulas con funciones exponenciales y logarítmicas

1. $\int u e^{au} \, du = \frac{1}{a^2} (au - 1) e^{au} + C$
2. $\int u^n e^{au} \, du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du$

3. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$
4. $\int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$
5. $\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$
6. $\int \frac{1}{u \ln u} \, du = \ln |\ln u| + C$
7. $\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} \{(n+1) \ln u - 1\} + C$
8. $\int u^m \ln^n u \, du = \frac{u^{m+1} \ln^n u}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int u^m \ln^{n-1} u \, du, m \neq -1$
9. $\int \ln(u^2 + a^2) \, du = u \ln(u^2 + a^2) - 2u + 2a \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$
10. $\int \ln |u^2 - a^2| \, du = u \ln |u^2 - a^2| - 2u + a \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$
11. $\int \frac{du}{a + be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a} \ln |a + be^u| + C$

A.7 Fórmulas con funciones hiperbólicas

1. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$
2. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$
3. $\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$
4. $\int \coth u \, du = \ln |\operatorname{senh} u| + C$
5. $\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1} |\operatorname{senh} u| + C$
6. $\int \operatorname{csch} u \, du = \ln \left| \tanh \frac{1}{2} u \right| + C$
7. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$
8. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$
9. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$
10. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$

Bibliografía

- [1] T. Apostol. *Cálculus*. Reverté, 1990.
- [2] B. Demidovich. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Mir Moscú, 1967.
- [3] L. Leithold. *El Cálculo*. Oxford University Press, 2007.
- [4] D. Zill. *Cálculo Con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.

Índice alfabético

- área, 71
 - de superficies de revolución, 89
 - de una figura plana, 73
- aceleración de un punto, 99
- Arquímedes, 29
- Cálculo de volúmenes, 75
 - de sólidos de revolución
 - por arandelas, 80
 - por cortezas, 81
 - por elementos de sección, 78
 - por rodajas, 78
- centro de gravedad, 108
- centroide, 113
- cilindro recto, 75
- criterio
 - de Cauchy, 143
 - de comparación, 155
 - de comparación en el límite, 156
 - de la raíz, 165
 - de las series alternantes, 162
 - integral, 153
- densidad
 - de área, 98
 - longitudinal, 97
 - volumétrica, 98
- diferencial, 4
- distancia dirigida, 110
- error de aproximación, 166
- esperanza matemática, 95
- fórmula
 - integración por partes, 14
- figura
 - tipo I, 74, 76
 - tipo II, 74, 76
- forma
 - de Lagrange, 179
 - diferencial, 4
 - funcional, 2, 4
- fracción
 - elemental de segundo grado, 17
 - simple de primer grado, 17
 - simple de segundo grado, 18
- función, 119
 - \log_a , 130
 - acotada, 34
 - exponencial natural, 124
 - hiperbólica, 133
 - logística, 127
 - logaritmo natural, 121
 - monótona, 34
 - no creciente, 34
 - no decreciente, 34
 - polinomio de dos variables, 53
 - racional, 17
 - racional de dos variables, 53
 - Riemann integrable, 33, 38
- funciones hiperbólicas
 - cosecante hiperbólica, 134
 - coseno hiperbólico, 134
 - cotangente hiperbólica, 134
 - secante hiperbólica, 134
 - seno hiperbólico, 134
 - tangente hiperbólica, 134
- integración aproximada, 63
 - método de los trapecios, 65
 - método de Simpson, 66
- integral
 - definida
 - método de cambio de variable, 47
 - funciones racionales, 16
 - de sen y cos, 53
 - fracciones simples, 17
 - método de las fracciones parciales, 18
 - impropia, 60
 - indefinida, 2
 - método de cambio de variable, 7
 - método de sustitución, 7
 - nula, 39
 - potencias de sec y tan, 13
 - potencias de sen y cos, 10
- Jacobiano, 48

- longitud, 71
 - de arco, 88
 - curva lisa, 88
- método
 - de Ostrogradski, 22
 - de Ostrogradski mejorado, 23
- media del valor numérico, 95
- medida
 - longitudinal, 72
 - superficial, 72
 - volumétrica, 72
- modelo de la población, 127
 - modelo exponencial, 127
 - modelo logístico, 127
- momento de masa, 108
- número e , 125
- partició
 - nhomogénea, 34
- partición \mathcal{P} , 32
 - amplitud, 32
 - grosor, 32
 - norma, 32
 - partición asociada, 32
 - vector asociado, 32
- polinomio de Taylor, 179
- posición de un punto, 99
- precio de equilibrio del mercado, 116
- presión hidrostática, 105
- primitiva, 1
- progresión geométrica, 147
- punto de equilibrio del mercado, 116
- relación, 119
 - dominio, 119
 - imagen, 119
 - inversa, 119
- Riemann, 32
- semivida de la substancia radioactiva, 127
- serie de funciones
 - convergencia puntual, 169
- serie de Maclaurin, 177, 178
- serie de potencias, 169
 - derivación, 174
 - integración, 175
 - intervalo de convergencia, 169
 - radio de convergencia, 171
- serie numérica, 145
 - alternantes, 161
 - armónica, 152
 - convergencia absoluta, 163
 - convergencia condicional, 163
 - convergencia relativa, 163
 - término general, 146
 - telescópica, 148
- series de Taylor, 177, 178
- sistemas en línea
 - centro de gravedad, 109
 - de la barra, 110
 - centro de masa
 - de la barra, 110
 - del sistema, 109
 - momento de masa
 - del sistema, 108
 - respecto a un punto, 108
- sistemas planos
 - centro de gravedad
 - del sistema, 112
 - centro de masa
 - del sistema, 112
- sucesión de funciones
 - convergencia puntual, 169
- sucesión numérica, 137
 - acotada, 139
 - convergente, 141
 - de Cauchy, 143
 - monótona, 140
- suma de Riemann, 32, 33
- sumatorias, 36
- superávit del consumidor, 116
- superávit del productor, 116
- Sustituciones trigonométricas, 55
- teorema
 - teorema fundamental del cálculo, 42
- trabajo mecánico, 102
- valor medio de una función, 93
- valor principal, 61
- variable de integración, 2
- velocidad de un punto, 99
- volumen, 71