Definiciones previas

Definición 1

Dadas dos funciones f y g se definen las operaciones siguientes:

1. su **suma** como
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
2. su **diferencia** como
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
3. su **producto** como
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
4. su **cociente** como
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

Por ejemplo, demos dos funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Operemos un poco con estas dos funciones:

- Sumemos $f+g$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= x^2 + \frac{1}{x^2-1}\\ &= \frac{x^4-x^2+1}{x^2-1}\end{aligned}$$

- Restemos $f-g$

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= x^2 - \frac{1}{x^2-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

- Multipliquemos ambas funciones

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= x^2 \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x^2}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

- Dividamos ambas funciones

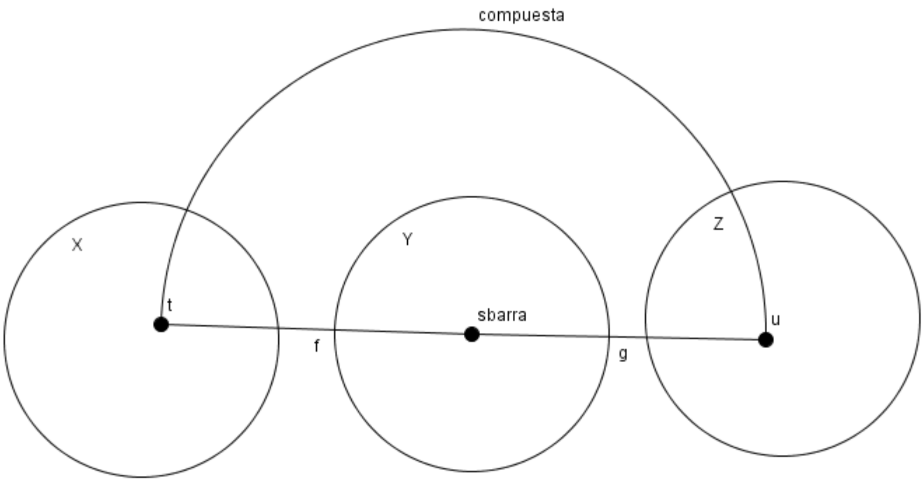
$$\begin{aligned}(f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= x^2 \cdot (x^2 - 1) \\ &= x^4 - x^2\end{aligned}$$

Además, si quieren encontrar el domínio de la función obtenida solo deberían intersecar los dominios de las funciones con las que operaron. Por ejemplo sabemos que el domínio de la función $f(x) = x^2$ es $\mathbb{R}$ y de la función $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, ahora intersecando ambos dominios obtienen el domínio de la función $f \cdot g$ que es $\mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{-1, 1\}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Definición 2

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$



Ejercicio 1

Determine el dominio de la función resultante

1. $f+g$
2. $f-g$
3. $f\cdot g$
4. f/g
5. g/f

si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2+1$.

Ejemplo 1

La función Razíz Cuadrada está definida de reales no negativos (reales positivos unión el cero) en reales no negativos, así de la función f obtenemos una restricción que es $x\geq 0$, por ende el domínio de la función f es $[0;+\infty[$. Por otro lado, la función g es un polinómio, por lo cuál su domínio es todos los reales.

Ahora, para encontrar el domínio de la función $f+g$ debemos intersecar ambos domínios, es decir, que el domínio es $[0;+\infty[$.

Para la función $f-g$ es el mismo domínio, pues

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ &= -1*g(x).\end{aligned}$$

Al igual que para la suma y la diferencia, el domínio es el mismo pues

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= \sqrt{x}\,(x^2+1)\\ &= x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}\end{aligned}$$

Ahora, para

Definición: Función par e impar

1. Una función f se dice par cuando para cada x en el dominio de f

$$f(-x) = f(x)$$

2. Una función f se dice impar cuando para cada x en el dominio de f

$$f(-x) = -f(x)$$

Sección 1

Límites

Definición 3

L se dice que es el límite de una sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ si, para todo $\epsilon > 0$ existe un número N en los naturales tal que

$$|x_n - L| < \epsilon \quad \text{para} \quad n > N.$$

Definición 4

Sea f una función definida en algún intervalo que contenga a a, excepto posiblemente en en a mismo. El límite se define como

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Teorema 1

Sean f_1 y f_2 dos funciones, si existen $\lim\limits_{n\to+\infty} f_1(x)$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} f_2(x)$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim\limits_{n\to+\infty} f_1(x) + \lim\limits_{n\to+\infty} f_2(x)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim\limits_{n\to+\infty} f_1(x) \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} f_2(x)$

3. $\lim_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} f_1(x)}{\lim_{n\to+\infty} f_2(x)}$ si $\lim_{n\to+\infty} f_2(x) \neq 0$.

Teorema 2

Sea f una función,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{sí y solo si} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Teorema: Teorema del Sanduche

Sean f, g y $h(x)$ dos funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a), y además

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Ejercicio 2

Demostrar por la definición de límite que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Ejemplo 2

Aquí la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida en el punto $x = 2$.

Es necesario demostrar que, tomando un $\varepsilon > 0$ arbitrario encontraremos un $\delta > 0$ que cumpla la desigualdad

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}\right| < \varepsilon,$$

con la condición que $|x-2| < \delta$. Pero para $x \neq 2$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right| = |(x+2)-4|$$
$$< \varepsilon.$$

Así pues, siendo ε arbitrario, y tomando $\delta = \varepsilon$ se cumplen las desigualdades anteriores.

Esto significa que el límite de $f(x)$ es 4, cuando $x \longrightarrow 2$.

Ejercicio 3: Límite al infinito

Demostremos que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Ejemplo 3

Como se puede observar

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

por lo cual podemos utilizar esto en el límite.

Ahora, necesitamos demostrar que siendo $\varepsilon > 0$ se cumplirá la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right| < \varepsilon, \tag{1.1}$$

siempre que $|x| > N$, donde $N > 0$ depende de nuestro ε.
Operando la desigualdad (1.3) obtenemos que

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon, \tag{1.2}$$

que es lo mismo que

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N. \tag{1.3}$$

Esto significa que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1.$

Ejercicio 4

Hallar los límites de las sucesiones

1. $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ldots$
2. $\frac{2}{1},\frac{4}{3},\frac{6}{5},\ldots,\frac{2n}{2n+1},\ldots$
3. $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ldots$

Ejemplo 4

1. Veamos la expresión $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ en dos casos, si n es par tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0.$$

Ahora veamos el caso en que n es impar, así se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

2. Notemos como $x_n=\frac{2n}{2n+1}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}=1.$$

3. Para esta sucesión veamos como son uno a uno sus términos:

$$\begin{array}{lllll} a_1 & = & \sqrt{2} & = 2^{\frac{1}{2}} & \\ a_2 & = & \sqrt{2\sqrt{2}} & = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}} & = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \\ a_3 & = & \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} & = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}} & = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} \\ \vdots & & & & \\ a_n & = & 2^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)} & & \end{array}$$

en donde la expresión

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

es una prograsión geométrica, con lo cuál obtenemos que

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2(1-\frac{1}{2^n})},$$

y así, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{2}\cdot 2(1-\frac{1}{2^n})} = 2.$$

Ejercicio 5

Halle los límites de:

1. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}.$
3. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}.$

Comencemos recordando que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Además, conocemos que el recorrido de la función Seno y Coseno es $[-1;1]$.

Ejemplo 5

1. Notemos a $x_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$, ahora

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n}{2n^2}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Llamemos x_n a la expresión $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$. Calculemos el límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{n+3}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

3. Notemos como x_n a a expresión $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Arhora,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{+\infty}\\ &= 0.\end{aligned}$$

4. Notemos como $x_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$. Ahora, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$; además sabemos que $n^2+1>0$, así $\frac{n}{n^2+1}>0$.
   Con lo cual se obtiene que

$$-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1},$$

   ahora tome límites a la desigualdad anterior y obtiene

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1} \leq 0,$$

   por lo cuál $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1} = 0.$

Definición 5

Sea f una función, se dice que L es el límite al infinito cuando

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists R>0)(|x|>R \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon).$$

Ejercicio 6

Encuentre los límites al infinito de las siguientes funciones:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Para resolver ejercicios de la forma $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0}$, podemos utilizar este pequeño truquito. Multiplicamos la función por $\dfrac{\frac{1}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}$ y así obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_mx^{m-n} + b_{m-1}x^{m-n-1} + \cdots + b_0x^{-n}} \\
&= \frac{a_n + 0 + \cdots + 0}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(b_mx^{m-n} + b_{m-1}x^{m-n-1} + \cdots + b_0x^{-n}\right)} \\
&= \frac{a_n}{b_m \lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n} + b_{m-1} \lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n-1} + \cdots + b_0 \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6

1. Denominemos $f(x)$ a la expresión $\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$, calculemos el límite

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2}} \\
&= \frac{1-0+0}{0+0} \\
&= +\infty.
\end{aligned}
$$

2. Sea $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$, procedamos a calcular su límite al infinito.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} \\
&= \frac{2-0-0}{\sqrt{1+0}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

3. Llamemos $f(x)$ a la expresión $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Teorema 3

Si f es una función polinomial o una función racional y además a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Ejercicio 7

Calcule los límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$

2. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

Ejemplo 7

1. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5} f(x) &= \lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}\\ &= \frac{5^2-5\cdot 5+10}{5^2-25}\\ &= \frac{10}{0}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

2. Denominemos a la expresión $\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ como $f(x)$. Así

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}\\ &= -\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(1+x+x^2)}\\ &= -\frac{(1+2)}{(1+1+1^2)}\\ &= -1.\end{aligned}$$

Ejercicio 8

Calcule los límites de estas expresiones racionales:

1. $\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Esta clase de ejercicios generalmente se los resuelve con un cambio de variable, por ejemplo si calculásemos el límite de $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ cuando $x\to 0$.

Tomando como cambio de variable $1+x=y^6$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Nótese que, cuando hacemos un cambio de variable debemos evaluar el mismo cambio de variable para saber el límite que vamos a calcular, es decir, en el ejercicio anterior buscábamos calcular el ímite de $f(x)$ cuando $x\to 1$, ahora $1+0=y^6$ será donde vamos a calcular el límite con el cambio de variable.

Ejemplo 8

1. Denominemos como $f(x)$ a la expresión $\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$. Sea $x=y^6$ el cambio de variable, nótese que
$$\sqrt{x}=y^3 \quad \wedge \quad \sqrt[3]{x}=y^2.$$
Ahora, cuando $x\to 64$, $y\to 2$, luego tenemos:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 64} f(x) &= \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}\\ &= \lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y^2-4}\\ &= \lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)}\\ &= \lim_{y\to 2}\frac{(y^2+2y+4)}{(y+2)}\\ &= \frac{4+4+4}{4}\\ &= 3.\end{aligned}$$

2. Note que
$$\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2}.$$
Ahora, tomemos e cambio de variable $x=y^3$, así $\sqrt[3]{x}=y$ y además cuando

$x \to 1$, $y \to 1$. Así tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2} &= \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)^2}{(y^3-1)^2}\\ &= \lim_{y\to 1} \frac{1}{(y^2+y+1)^2}\\ &= \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Ejercicio 9

Hallar los límites de las siguientes expresiones:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

Otra manera de calcular esta clase de límites es de alguna manera trasladar la expresión irracional del numerador al denominador o viceversa.

Por ejemplo, calculemos el límite siguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 9

1. Calculemos el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= 1.$$

2. Calculemos el límite $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x(x+a)}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)\left(\sqrt{x(x+a)}+x\right)}{\sqrt{x(x+a)}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}$$

$$= \frac{a}{2}.$$

3. Resolvamos el límite $\lim_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\right)}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$= \frac{1}{\infty}$$

$$= 0.$$

Ejercicio 10

Calcule los siguientes límites utilizando la fórmula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{x}$
3. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$
4. $\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$
5. $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$
6. $\lim_{x\to0} \cot(2x)\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
7. $\lim_{x\to0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$
8. $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin(x)}{x}$
9. $\lim_{x\to1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$
10. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x}$

Nótese que el resultado de $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ es muy fuerte, pues nos sirve para desarrollar cualquier límite con relaciones trigonométricas.

Ejemplo 10

1. Sabemos que para cualquier x en los reales
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1,$$
como buscamos el límite cuando $x \to +\infty$, x debe ser un real positivo, así
$$\frac{1}{x} > 0.$$
Con lo cual obtenemos que
$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x},$$
tomando límites a ambos lados
$$0 = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
así obtenemos que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$
2. Tomemos el cambio de variable $y = 3x$, así cuando $x \to 0$, $y \to 0$.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{x} &= \lim_{y\to0} \frac{3\sin(y)}{y} \\ &= 3\lim_{y\to0} \frac{\sin(y)}{y} \\ &= 3\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{5\cdot 2x}{5\cdot 2x}\cdot \\
&= \frac{5}{2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

4. Sea $n = \frac{\pi}{x}$ un cambio de variable, cuando $n \to +\infty$, $x \to 0$ con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to +\infty} \left(n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\pi \sin(x)}{x} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\cos(x))} \\
&= 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6. Tomando en cuenta que

$$\cot\left(\frac{\pi}{x} - x\right) = -\tan(x) \Rightarrow \cot(2x) = \frac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \cot(2x)\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)} \cdot (-\tan(x)) \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\cot^2(x)-1\right)\tan^2(x) \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(1-\tan^2(x)\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(x)}{x^3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\,(1-\cos(x))}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\,(1-\cos(x))}{x^3}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos^2(x))}{x^3\,(1-\cos^2(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} \\
&= \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right]^3 \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

8. Sea $y=\arcsin(x)$, así $x=\sin(y)$ ya demás cuando $x\to 0$, $y\to 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{y}{\sin(y)} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \\
&=
\end{aligned}
$$