Recursos desarrollados en Tutoría en línea

Editores: Andrés Miniguano Trujillo y Juan Carlos Trujillo
Proyecto CLAVEMAT
Escuela Politécnica Nacional
Email: andres.miniguano@epn.edu.ec y jcto36@gmail.com
Correcciones: Eduardo Arias (ddma1994@gmail.com)
Creación: 9 de febrero de 2017
Publicación: 7 de marzo de 2017
Pregunta: 576249

Mínimos y máximos relativos de una función

En este documento vas a aprender dos métodos para calcular máximos o mínimos de un campo escalar restringido a un conjunto.

Problema: Determine los extremos absolutos y relativos de la función $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$, dada por

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2,$$

en el conjunto $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x-2 \leq y \leq 4-x^2\right\}$; es decir, la región limitada por la recta de ecuación $y = x-2$ y la parábola de ecuación $y = 4-x^2$.

Existen dos métodos para optimizar una función escalar multivariable, el primero es mediante reducción de variables y segundo es mediante el uso de multiplicadores de Lagrange.

Método de reducción de variables

¿Recuerdas cómo era el análisis de puntos críticos para funciones de una variable? Si $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, analizabas primero la derivada buscando los $x \in [a, b]$ tales que $f'(x) = 0$ y analizabas $f(a)$, $f(b)$ y posibles puntos de discontinuidad o donde no esté definida la derivada; finalmente, analizabas la naturaleza de todos los puntos con la segunda derivada y comparando valores. Lo mismo sucede en el caso de campos escalares.

La derivada de f viene dada por $\nabla f(x, y) = (8x-4y, -4x+2y)^\top$, tienes que $\nabla f(x, y) = 0$ (fíjate que se determina un sistema linealmente dependiente) si y sólo si $y = 2x$. ¿Hay algún punto de esta recta en D? La verdad que sí. Te recomiendo graficar la región D, aquí ya puedes hasta graficar la recta.

Según la figura (1), todos los puntos dentro de las dos marcas están en D, por lo tanto son puntos críticos. ¿Cómo determinarlos? Inicia igualando en los extremos:

$$x-2 = 2x \qquad \text{y} \qquad 4-x^2 = 2x,$$

los dos puntos marcados son $A = (-2, -4)^\top$ y $B = (\sqrt{5}-1, 2\sqrt{5}-2)^\top$; notarás que estos puntos están en el borde de D (pues es justo donde se da la igualdad) y el segmento abierto que los conecta viene dado por nada más que por el intervalo:

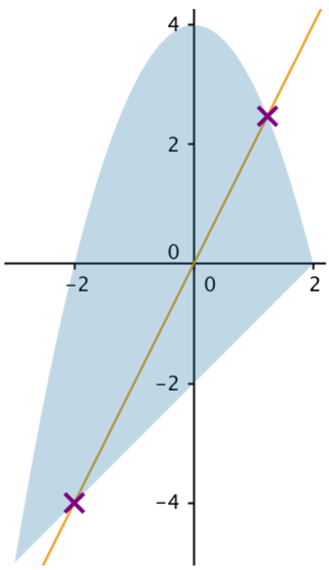

Figura 1: Representación de la región D y recta de minimzación.

$$(A, B) = \left\{ \lambda A + (1-\lambda)B : \lambda \in (0,1) \right\} = \left\{ A + \lambda(B - A) : \lambda \in (0,1) \right\}.$$

Analiza la naturaleza de estos puntos, para ello necesitas la hessiana de f que está dada por:

$$H[f](x, y) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

¿Qué te dice la segunda derivada?

¡Fíjate que esta función es constante y es semidefinida positiva! ¿Cómo lo sé? Analiza sus menores principales:

$$M_1 = 8 \qquad \text{y} \qquad M_2 = \det H[f](x, y) = 0.$$

Esto te dice que f es convexa, por lo tanto todo punto crítico en el sentido de la derivada es un mínimo. Así, tienes que tanto (A, B) como $\{A\} \cup (A, B) \cup \{B\}$, consiste en mínimos locales. Es más:

$$f\Big(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}\Big) = 4x^2 - 4x(2x) + (2x)^2 = 4x^2 - 8x^2 + 4x^2 = 0,$$

por lo que en particular $f\Big([A, B]\Big) = 0$, que es el valor de mínimo argumento.

¿Existen puntos donde f no es diferenciable? La respuesta es no.

Ahora te preguntarás, ¿qué pasa en el borde? El borde de D se divide en dos partes: La parte superior que es dominada por la parábola y la parte inferior que es trazada por la recta.

Análisis en la parábola: Reemplaza $y = 4 - x^2$ en f

$$f(x, 4 - x^2) = 4x^2 - 4x(4 - x^2) + (4 - x^2)^2 = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x + 16 =: g(x).$$

La función g es un polinomio diferenciable con dos raíces, dos de ellas las puedes determinar a partir de la derivada:

$$g'(x) = -4(x - \sqrt{5} + 1)(x + \sqrt{5} + 1)(x + 1).$$

Si analizas $g''(x)$ en los puntos $x \in \left\{-1, \sqrt{5}-1, -\sqrt{5}-1\right\}$, vas a obtener que g se maximiza en -1 y se minimiza en los términos con raíces cuadradas, de este modo obtienes los siguientes puntos críticos según la parábola:

$$C = (-1, 3)^\top, \qquad B = (\sqrt{5}-1, 2\sqrt{5}-2)^\top \qquad \text{y} \qquad D = (-\sqrt{5}-1, -2\sqrt{5}-2)^\top.$$

donde C es máximo, ya conocías que B es mínimo y D casualmente no satisface la ecuación $y \geq x-2$; por lo tanto no es un punto crítico.

Análisis en la recta: En este caso debes reemplazar $y = x - 2$ en f

$$f(x, x-2) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

Obtienes un único punto crítico dado por $x = -2$ y es un mínimo que genera el punto $A = (-2, -4)^\top$.

Así, obtienes los siguientes puntos críticos en el borde:

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 2\sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde los dos primeros son mínimos y el último es máximo. Así, ya puedes determinar todos los puntos críticos de f sobre D:

Mínimos globales: El segmento $[A, B]$.

Máximo global: El punto C.

Método de multiplicadores de Lagrange

Este método analiza únicamente a una función sobre el borde de su dominio de definición, por lo tanto el interior de su dominio queda completamente olvidado; para considerar a ambos de forma simultánea es necesario generalizar el método mediante el método de Karush-Khun-Tucker, pero eso está fuera del alcance de tu curso de vectorial. Por ahora, basta que dividas tu exploración en dos:

1. analiza los puntos críticos según la derivada de f tales que estén contenidos en D y
2. resuelve un problema de optimización con multiplicadores de Lagrange para el borde.

El primer literal ya lo analizaste en el método anterior, de donde obtuviste un segmento abierto de mínimos globales. Ahora, el problema para el borde viene a ser:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \vee \text{máx}\, f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 \\ &\text{sujeta a} \\ &\qquad x - 2 - y = 0, \qquad \vee \\ &\qquad 4 - x^2 - y = 0. \end{aligned}$$

El símbolo mín $\vee$ máx sólo sirve para que notes que es útil tanto para minimizar la función objetivo como para maximizarla, pero como ya conoces hasta un segmento con puntos en el borde que son mínimos globales, no es necesario que lo resuelvas. Así mismo, la conjunción en las restricciones te dicen que debes optimizar la función en cada trozo del borde; es decir, debes resolver dos problemas:

$$
\begin{aligned}
&\text{mín} \vee \text{máx}\, f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2\\
&\quad \text{sujeta a}\\
&\qquad x - 2 - y = 0.
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\text{mín} \vee \text{máx}\, f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2\\
&\quad \text{sujeta a}\\
&\qquad 4 - x^2 - y = 0.
\end{aligned}
$$

Te mostraré la resolución del primer problema, pues la solución para el segundo problema la puedes realizar de similar manera. Así, vas a definir $h(x,y) := x - 2 - y$.

El método de los multiplicadores de Lagrange consiste en lo siguiente:

1. Determina el lagrangeano, donde cada restricción indica una variable adicional:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda h(x,y).$$

2. Obtén el gradiente del lagrangiano:

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) - \lambda h_x(x,y) \\ f_y(x,y) - \lambda h_y(x,y) \\ -h(x,y) \end{pmatrix}.$$

   El lagrangiano determina una función sin restricciones, entonces sus puntos críticos sólo vienen dados por la derivada, de donde buscarás $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$.

   Así obtienes el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 8x - 4y - \lambda \\ -4x + 2y + \lambda \\ x - 2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Resuelve el sistema lineal anterior. Así obtendrás que la solución está dada por el vector

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

   punto que ya viste que es mínimo global (esto lo puedes comprobar con la hessiana del lagrangiano).

Por otro lado, para la función s, obtienes tres soluciones, donde sólo una es útil:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde este punto es justamente el máximo que buscabas.

Así, acabas de mostrar de dos formas diferentes cómo determinar los puntos críticos de una función escalar. Realiza el mismo procedimiento con los otros literales, vas a ver que todo es exactamente igual.