Recursos desarrollados en Tutoría en línea

Editores: Andrés Miniguano Trujillo y Juan Carlos Trujillo
Proyecto CLAVEMAT
Escuela Politécnica Nacional
Email: andres.miniguano@epn.edu.ec y jcto36@gmail.com
Tutor: Miguel Aguilar (migol1394@gmail.com)
Correcciones: Ana Cristina Montoya Campuzano (anamontoya888@gmail.com)
Creación: 1 de febrero de 2017
Publicación: 14 de febrero de 2017
Pregunta: 575689

Monotonía en funciones con radicales y polinomios

En este documento analizarás la monotonía de una función general de variable real que resulta de la composición entre un polinomio y un radical.

Problema: Analizar la monotonía de la función f definida sobre todo $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

sea un número real, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Podría resultar complicado resolver esta pregunta mediante la definición de función creciente o decreciente puesto que tienes dos retos:

1. Desconoces el dominio de f.
2. Desconoces si existen intervalos donde la función sea creciente o decreciente.

Por lo tanto, para superar estos problemas, vas a iniciar determinando el dominio de f, en el cual deben constar todos los números reales x tales que

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

Tienes dos casos a analizar: uno cuando la parábola determinada por el polinomio es cóncava; es decir cuando $a < 0$; y otro cuando es convexa, esto es $a > 0$. Analizarás ambos casos.

Caso $a < 0$: Recuerda que una parábola se dice *cóncava* si $a < 0$, lo cual implica que la parábola se abre hacia abajo y tiene un máximo. Por otro lado, gracias al discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, sabes si la parábola tiene dos, una o ninguna intersección con el eje horizontal. Cada caso es importante:

Si $\Delta < 0$ tienes que la parábola $ax^2 + bx + c$ siempre es negativa y por lo tanto no existe x tal que $f(x)$ esté definida; si $\Delta = 0$, la parábola topa al

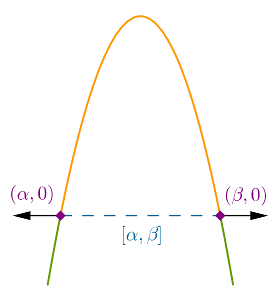

Figura 1: Párabola cóncava con discriminante positivo.

eje horizontal en su máximo que está dado por el punto $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, por lo tanto existe un único valor donde f está definida y no es relevante conocer la monotonía de un punto.

El último caso es especial, si $\Delta > 0$, entonces la parábola cruza al eje horizontal en dos puntos:

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Como a es negativa, entonces $\alpha < \beta$ y así puedes concluir que el dominio de f consiste en el intervalo $[\alpha, \beta]$; es más, el máximo de la parábola está en este intervalo puesto que

$$\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta.$$

¿Qué significa que x_v sea un máximo para la parábola? Significa que si evalúas bajo la ecuación ax^2+bx+c a todos los puntos antes de x_v y después de este, su imagen será menor que la imagen de $ax_v^2+bx_v+c$. Esperarías que esto suceda también bajo la raíz cuadrada; verás que sí es el caso, para ello dividirás al dominio de f en dos intervalos: $[\alpha, x_v]$ y $[x_v, \beta]$.

Aquí es importante que consideres la siguiente propiedad:

Propiedad: Toda parábola de la forma ax^2+bx+c se puede escribir en su forma canónica como sigue:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Esta identidad te será bastante útil a continuación, puesto que para el análisis de monotonía debes tomar dos puntos del intervalo de interés, compararlos y construir sus respectivas imágenes bajo f.

Análisis del intervalo $[\alpha, x_v]$: Toma dos elementos x_1 y x_2 dentro del intervalo; es decir

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \leq x_1 \leq x_2 \leq -\frac{b}{2a}.$$

Suma $\dfrac{b}{2a}$ a la anterior expresión

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \leq x_1+\frac{b}{2a} \leq x_2+\frac{b}{2a} \leq 0$$

y eleva la expresión anterior al cuadrado (recuerda que el signo cambia en números negativos)

$$\frac{\Delta}{4a^2} \geq \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

multiplica lo anterior por a (el cual es un número negativo) y también suma $c-\dfrac{b^2}{4a}$, teniendo en cuenta el valor del discriminante y así

$$0 \leq a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \leq a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \leq c - \frac{b^2}{4a};$$

todo lo anterior es no negativo y por lo tanto puedes proceder a obtener su raíz cuadrada:

$$0 \leq \sqrt{a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}} \leq \sqrt{a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}} \leq \sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}$$

lo anterior es equivalente a decir que

$$0 \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_v).$$

Así puedes concluir lo siguiente:

si $a < 0$ y $\Delta > 0$ entonces f es creciente en $[\alpha, x_v]$.

Análisis del intervalo $[x_v, \beta]$: Nuevamente toma dos elementos x_1 y x_2 dentro del intervalo

$$-\frac{b}{2a} \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Al igual que antes, si sumas $\frac{b}{2a}$ vas a tener

$$0 \leq x_1 + \frac{b}{2a} \leq x_2 + \frac{b}{2a} \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2a};$$

ahora, si elevas al cuadrado, ya no se invierte el sentido de la desigualdad, pero al multiplicar por a esto sí ocurre

$$0 \geq a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq \frac{\Delta}{4a}.$$

Finalmente, sumas $c - \frac{b^2}{4a}$ y obtendrás que

$$f(x_v) \geq f(x_1) \geq f(x_2) \geq 0.$$

Entonces concluyes que

si $a < 0$ y $\Delta > 0$ entonces f es decreciente en $[x_v, \beta]$.

Caso $a > 0$: En este caso la parábola se dice *convexa*; por lo tanto se abre hacia arriba y tiene un mínimo en x_v. El análisis del discriminante es similar:

Si $\Delta < 0$, entonces la parábola es positiva y nunca topa el eje horizontal; en cambio si $\Delta = 0$, la parábola es positiva salvo en x_v que es el único punto donde topa con el eje horizontal. En ambos casos el dominio viene a ser $\mathbb{R}$ y al igual que antes tendrás dos intervalos de monotonía que son separados por x_v, que son $(-\infty, x_v]$ y $[x_v, +\infty)$. Como x_v es un mínimo, se cumple algo semejante a lo que tuviste en el caso $a < 0$: La parábola crece hacia arriba y entonces debe ser decreciente antes de su vértice y creciente después del vértice; y esto se conserva con la raíz cuadrada (eso es lo que probaste en el caso $a < 0$).

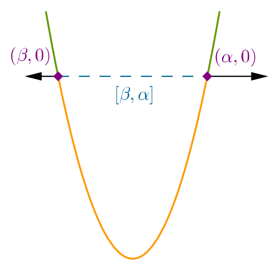

Figura 2: Párabola convexa con discriminante positivo.

De este modo puedes concluir lo siguiente:

si $a > 0$ y $\Delta \leq 0$ entonces f es decreciente en $(-\infty, x_v]$ y creciente en $[x_v, +\infty)$.

Nuevamente tienes un caso especial y es $\Delta > 0$. Aquí la parábola corta al eje horizontal en dos puntos:

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Como $a > 0$, tienes que $\beta < \alpha$ y dado que la parábola crece hacia arriba entonces tienes dos intervalos donde es no negativa:

$$(-\infty, \beta] \qquad \text{y} \qquad [\alpha, +\infty).$$

Como $x_v \in [\beta, \alpha]$, vas a tener que x_v no forma parte del dominio de f, pero los dos intervalos anteriores sí. Además, el resultado anterior sigue cumpliéndose:

si $a > 0$ y $\Delta > 0$ entonces f es decreciente en $(-\infty, \beta]$ y creciente en $[\alpha, +\infty)$.

De esta forma, ya has analizado la monotonía de la función f.