# Recursos desarrollados en Tutoría en línea


**Editores:** Andrés Miniguano Trujillo, Eduardo Arias y Juan Carlos Trujillo
Proyecto CLAVEMAT
Escuela Politécnica Nacional
**Email:** andres.miniguano@epn.edu.ec, ddma1994@gmail.com
y jcto36@gmail.com
**Correcciones:** Ana Cristina Montoya Campuzano (anamontoya888@gmail.com)


**Creación:** 31 de enero de 2017
**Publicación:** 16 de marzo de 2017
**Pregunta:** 575678


## Integral de línea compleja con residuos

*En este documento aproximarás y calcularás una integral de línea compleja como aplicación de la teoría de residuos del análisis complejo.*

**Problema:** Calcular la integral de línea de la función compleja $f(z) = e^{-1/z} \operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$, sobre la curva $C = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\right\}$; es decir, calcular

$$\int_{\{|z|=1\}} e^{-1/z} \operatorname{sen} \frac{1}{z}\, dz.$$

Existen varios teoremas que te pueden ayudar en el cálculo de esta integral, sin embargo empezarás usando la definición, para ello, basta que tomes una parametrización apropiada de $C$, por ejemplo tienes

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Te preguntarás ¿ésta es una parametrización del círculo unitario? Para notarlo basta que tomes $t \in [0,1]$ y apliques la identidad de Euler:

$$e^{2\pi i t} = \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t.$$

Al buscar la norma de este número complejo, vas a usar la identidad pitagórica, por lo tanto, $\gamma$ sí representa al círculo unitario.

Con la parametrización anterior ya puedes intentar calcular la integral de línea de $f$ sobre $C$:

$$\int_{\{|z|=1\}} f(z)\, dz = 2\pi i \int_0^1 e^{2\pi i t - e^{-2\pi i t}} \operatorname{sen} e^{-2\pi i t}\, dt.$$

Puede que te tiente igualar lo anterior a cero, pero eso no es posible en este caso, dado que $f$ tiene una singularidad en 0. El tipo de singularidad influirá en el análisis posterior de la integral.

Una idea alternativa que se te puede ocurrir es tomar el cambio de variable $e^{-2\pi i t} \equiv u$, de donde $-2\pi i\, dt \equiv \frac{1}{u}\, du$ y así

$$2\pi i \int_0^1 e^{2\pi i t - e^{-2\pi i t}} \operatorname{sen} e^{-2\pi i t}\, dt = -\int_1^{e^{-2\pi i}} \frac{1}{u^2} \operatorname{sen} u\, du.$$

Lastimosamente esta última integral no tiene primitiva, pero la función a integrar es continua y bien definida en $[1, e^{-2\pi i}]$. Por lo tanto, debe existir un valor para la integral de $f$. ¿Cómo determinarlo? Una opción es proceder a aplicar técnicas de integración numéricas con las que aprendiste en tu curso de Cálculo en una variable.

A continuación, vas a aproximar la integral de $f$ sobre $C$ usando `Matlab`, R y `Mathematica`:

En `Matlab` debes definir la parametrización de la curva $C$ y su derivada, después harás uso de la función «integral».

*Código 1: Aproximación numérica con `Matlab`*

```
fun= @(z) exp(-1./z).*sin(1./z);
g = @(theta) cos(theta) + 1i*sin(theta);
gprime = @(theta) -sin(theta) + 1i*cos(theta);
q = integral(@(t) fun(g(t)).*gprime(t),0,2*pi)
```

En R tienes que separar a la integral en dos partes, su componente real y su componente imaginaria, donde luego puedes sumar ambas partes.

*Código 2: Aproximación numérica con R*

```
# Integral de línea aproximada de f sobre C.
f <- function(s) {
  z <- 2*pi*s*(0+1i)
  z <- (2*pi*(0+1i))*exp(z - exp(-z))*sin(exp(-z))
  z
}
a <- integrate( function(s) Re(f(s)), 0, 1)$value
b <- 1i * integrate( function(s) Im(f(s)), 0, 1)$value
a+b
```

Con las dos rutinas anteriores obtienes que la integral de línea es aproximadamente `0 + 6.283185i` ¿se te hace conocido este número? Si no es el caso, mira lo que sucede al integrar con `Mathematica`:

*Código 3: Aproximación numérica con `Mathematica`*

```
*Integral de línea exacta de f sobre C.*
Integrate[ 2*Pi*I* Exp[2*Pi*I*t] * Exp[-Exp[-2*Pi*I*t]] * Sin[Exp[-2*Pi*I*t ]], {t, 0, 1}]
```

En este caso, el resultado exacto es $2\pi i$, lo cual parece relacionarse de algún modo con el teorema del residuo. ¿Cómo?

**Teorema** (de Cauchy) Sean $f$ una función meromórfica en $D$ y $\gamma$ un camino en $D$ que es cerrado y estrellado, tales que $f$ no tenga polos en $\mathrm{Im}(\gamma)$ y que en la región de $D$ delimitada por $\mathrm{Im}(\gamma)$ existan un número finito de polos $\{\alpha_i\}_{i\in[1..n]}$; entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}(\gamma, \alpha_i)\mathrm{Res}(f, \alpha_i).$$

Aquí, Ind es el índice[1] del polo bajo la curva $\gamma$ y Res es el residuo de $f$ en el polo.

[1] También conocido como *winding number*.

Como ya comprobaste previamente, $f$ tiene una singularidad en 0, es más, esta singularidad es esencial, por lo que no es un polo ni evitable. Por ello, vas a usar el siguiente teorema [Estrada, 2002] que ya te permite calcular la integral:

**Teorema** (de Cauchy generalizado) Sean $f$ una función analítica en $D$, salvo en un conjunto finito, y $\gamma$ un camino en $D$ que es cerrado y simple, con $\{\alpha_i\}_{i\in[1\,..\,m]}$ las singularidades dentro de la región de $D$ delimitada por $\operatorname{Im}(\gamma)$ y $\{\beta_j\}_{j\in[1\,..\,n]}$ las singularidades en $\operatorname{Im}(\gamma)$; entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,\beta_j)+\pi i\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Res}(f,\alpha_i;\gamma).$$

Para aplicar este teorema, debes notar lo siguiente:

- $f$ es el producto de dos funciones.
- $f$ sólo tiene una singularidad al interior de la región limitada por $\operatorname{Im}(\gamma)$.
- $f$ no tiene singularidades en $\operatorname{Im}(\gamma)$.

La serie de Taylor alrededor de cero de las funciones que forman $f$ te dice que

$$f(z)=\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\frac{1}{7!\,z^7}+\cdots\right),$$

de donde tienes un único termino de la forma $\dfrac{\alpha}{z}$. Así puedes concluir que

$$\operatorname{Res}(f,0)=1$$

y por lo tanto:

La integral de línea de $f$ sobre el círculo unitario $C$ está dada por

$$\int_{\{|z|=1\}} e^{-1/z}\operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f,0)=2\pi i.$$

## Referencias

[Estrada, 2002] Estrada, R. (2002). A generalization of the residue formula. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 25:39–52.