Recursos virtuales – Probabilidad y Estadísitica

Autores: Andrés Miniguano Trujillo
ModeMat
Escuela Politécnica Nacional
Email: andres.miniguano@epn.edu.ec
Creación: 26 de septiembre de 2019
Publicación: 20 de octubre de 2019

Distribución de la suma de intervalos

En este documento aprenderás cómo determinar el número de formas en las cuales puedes encontrar un número sumando elementos extraídos de un intervalo de números enteros. Para ello, vas a determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria asociada a esta suma. Finalmente, verás dos aplicaciones de este ejercicio como es el caso de un dado o al determinar la complejidad de un ejercicio combinatorio.

Variables aleatorias discretas

Recuerda que una variable aleatoria X es una función de un espacio muestral Ω en un conjunto discreto E; es decir $X \in E^{\Omega}$. A esta variable se le asocia una función de probabilidad denominada como función de masa dada por la probabilidad de que X sea igual a un valor k al ser evaluada en los elementos de Ω:

$$m(k) := P(X = k) := P\Big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\Big).$$

Por ejemplo, si tenemos un dado legal de seis caras y construimos el espacio muestral

$$\Omega : \text{Resultados de lanzar el dado},$$

entonces obtenemos que hay seis eventos: obtener el número $1, 2, \cdots$, hasta el 6, por lo tanto

$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [\![1 : 6]\!],$$

donde notarás $[\![a : b]\!]$ como el intervalo cerrado de números enteros entre a y b. Luego, si defines la variable aleatoria X como la función identidad de Ω, entonces tendrás que para todo $\omega \in \Omega$ se cumple $X(\omega) = \omega$ y así $E := \Omega$. Ahora puedes definir una función de probabilidad mediante la regla de conteo también conocida como regla de Laplace: *la probabilidad de un evento discreto finito está dado por el cociente entre el número de elementos que forman el evento y el tamaño del espacio muestral*. Nota que sólo hay una forma de obtener un número del dado mediante X, por lo cual la función de masa asociada a X es

$$m(k) = P\Big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\Big) = P\Big(\{\omega \in \Omega : \omega = k\}\Big) = \frac{|\{\omega\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6},$$

para todo número k en Ω. Nota que si $k \notin \Omega$, entonces $m(k) = 0$.

Finalmente, recuerda que la esperanza de una variable aleatoria es la integral ponderada de la variable aleatoria respecto a su medida de probabilidad, lo que en este caso viene a ser la suma ponderada y acumulada de la función de masa:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_k m(k) \cdot k.$$

En el caso anterior, tendrías que la esperanza de X para el espacio probabilístico que definiste para el dado legal es

$$\mathrm{E}[X] = \sum_k m(k) \cdot k = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot k = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} 6(6+1)\right) = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Función generatriz de momentos

Si X es una variable aleatoria en el espacio probabilístico (Ω, P, E), entonces su función generatriz de momentos está dada por la esperanza de la variable e^{tX} para todo número real $t \in \mathbb{R}$:

$$M_X(t) := \mathrm{E}[e^{tX}].$$

Así, en el caso de una variable aleatoria discreta su función generatriz de momentos está dada por

$$M_X(t) := \mathrm{E}[e^{tX}] = \sum_k m(k) \cdot e^{tk}.$$

Nuevamente, regresando al caso del dado legal de seis caras, tienes la siguiente función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = \sum_k m(k) \cdot e^{tk} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot e^{tk} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} e^{tk} = \frac{1}{6}(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t})$$

En la figura 1 podrás observar parte de la gráfica de esta función:

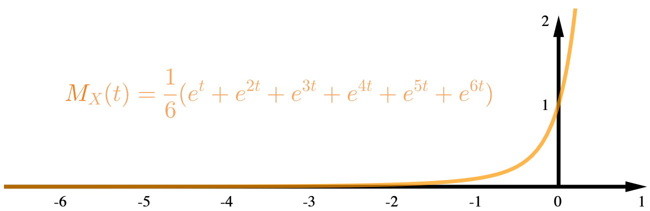

Figura 1: Función generatriz de momentos para un dado legal de seis caras.

La función generatriz de momentos tiene varias aplicaciones en la teoría de probabilidad, entre ellas es una herramienta para calcular momentos, ver [Singh et al., 2011]. Sin embargo, vas a utilizarla en otro contexto orientado a resolver un problema combinatorio.

Suma de intervalos enteros

Problema: Considera el experimento de sumar números en n intervalos de números enteros de la forma $[\![a : b]\!]$. SI X_i es la variable aleatoria discreta definida por el aporte del i–ésimo intervalo, para i en $[\![1 : n]\!]$, entonces determina la distribución de probabilidad de la variable S definida como la suma de las variables X_i.

Vas a resolver este problema con las herramientas previamente introducidas. Primero, nota que las variables aleatorias X_i son semejantes a la variable aleatoria discreta que construiste para el caso del dado legal. Así, si notas $\ell := b - a + 1$ como la longitud del intervalo $[\![a : b]\!]$, entonces la función de masa para la variable X_i está dada por

$$m_{X_i}(k) := \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } k \in [\![a : b]\!], \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

para todo $i \in [\![1 : n]\!]$.

Ahora, como el resultado de las variables aleatoria X_i no depende del resultado de la variable X_j, para $i \neq j$, entonces la variable $S := \sum_{i=1}^{n} X_i$ es la suma de variables discretas independientes e idénticamente distribuidas. Así, su función generatriz de momentos está dada por

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathrm{E}[e^{tS}] = \mathrm{E}\left[e^{t(X_1+\ldots+X_n)}\right] = \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}[e^{tX_i}] = \frac{1}{\ell^n}\left(e^{at} + e^{(a+1)t} + \ldots + e^{(b-1)t} + e^{bt}\right)^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora nota algo importante: el coeficiente de e^{kt} en la expansión en (1) determina el número de veces en las cuales puedes escribir k usando n números del intervalo $[\![a : b]\!]$. Así puedes obtener la distribución de probabilidad de S de forma sencilla.

Por ejemplo, si $a = 1$, $b = 6$ y $n = 2$, tendrás que S es la suma de dos dados legales. Para determinar su distribución primero calcula

$$\begin{aligned} (e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t})^2 = 1e^{2t} + 2e^{3t} + 3e^{4t} + 4e^{5t} + 5e^{6t} + 6e^{7t} \\ + 5e^{8t} + 4e^{9t} + 3e^{10t} + 2e^{11t} + 1e^{12t}. \end{aligned} \tag{2}$$

La expresión anterior te da la información necesaria para recuperar la información de la distribución de probabilidad de S utilizando la definición de la función generatriz de momentos. Por ejemplo, (2) te dice que hay solo una forma de sumar 2 entre los dos dados, así mismo hay 3 formas de sumar 4 y 6 formas de sumar 7. Las probabilidades respectivas a estas cantidades las puedes obtener mediante la regla de Laplace como consta en la Tabla 1.

Tabla 1: Función de masa de la suma de dos dados legales de seis caras

Suma k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Masa $m_S(k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Fórmula compacta

Notemos que la fórmula (1) tiene el inconveniente que cuando n o ℓ son grandes, el producto de polinomios es una operación costosa. Es por ello que ahora vas a encontrar otra representación para la función de masa asociada a S. Para ello, define $x := e^t$ y el polinomio

$$f(x) := \ell^n \cdot M_S(t) = \left(x^a + x^{a+1} + \cdots + x^{b-1} + x^b\right)^n.$$

Nota que la expresión anterior puede expresarse como una suma geométrica x:

$$f(x) = \left(\sum_{k=a}^{b} x^k\right)^n = \left(\frac{x^{b+1} - x^a}{x - 1}\right)^n = \left(x^a \frac{x^{b-a+1} - 1}{x - 1}\right)^n = x^{an}(1 - x^\ell)^n (1 - x)^{-n}.$$

Con esto puedes aplicar el teorema binomial para $(1-x^\ell)^n$ y la expansión en series de potencia de $(1-x)^{-n}$:

$$f(x) = x^{an}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{\ell k}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}x^j; \tag{3}$$

aquí llama c_p al coeficiente que acompaña a x^p en la expansión de (3). Esto lo puedes hacer en orden analizando aquellos coeficientes con $p = an + \ell k + j$, donde tendrás

$$c_p = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+j-1}{j} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{p-(a-1)n-\ell k-1}{p-an-\ell k},$$

pero el último coeficiente binomial sólo nos interesa si $p - an - \ell k > 0$, lo cual ocurre si $k < {}^{(p-an)}\!/_{\ell}$ así que los otros términos no contribuyen a la suma total y obtienes que

$$c_p = \sum_{k=0}^{\lfloor (p-an)/\ell \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{p-(a-1)n-\ell k-1}{p-an-\ell k},$$

donde $\lfloor\cdot\rfloor$ es la función piso. Por otro lado, de la definición del coeficiente binomial tienes que

$$\binom{p-(a-1)n-\ell k-1}{p-an-\ell k} = \binom{p-(a-1)n-\ell k-1}{n-1},$$

y así lo anterior se reduce a

$$c_p = \sum_{k=0}^{\lfloor (p-an)/\ell \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{p-(a-1)n-\ell k-1}{n-1} \tag{4}$$

Así tienes una expresión compacta para calcular los coeficientes de f y por ende puedes también calcular la función de masa para la variable aleatoria S mediante

$$m_S(p) = \frac{c_p}{\ell^n} = \frac{1}{\ell^n}\sum_{k=0}^{\lfloor (p-an)/\ell \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{p-(a-1)n-\ell k-1}{n-1}.$$

Aplicaciones

Para corroborar la fórmula que acabas de encontrar, vuelve al caso de los dos dados legales, donde tenías que $a = 1$, $b = 6$, $n = 2$ y $\ell = 6$, por lo tanto el índice k está definido en el intervalo $[\![0 : \lfloor (p-2)/6 \rfloor]\!]$, donde

$$\lfloor (p-2)/6 \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in [\![2:7]\!], \\ 1 & \text{si } p \in [\![8:12]\!], \end{cases}$$

y p lo puedes determinar usando el rango $[\![an, bn]\!] = [\![2, 12]\!]$.

Para ejemplificar, calcula los casos $p = 2$ y $p = 12$. En el primero tienes que

$$c_2 = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{2}{k}\binom{2-6k-1}{2-1} = \binom{2}{0}\binom{2-1}{1} = 1\cdot 1 = 1,$$

mientras que para el segundo

$$c_{12} = \sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{2}{k}\binom{12-6k-1}{2-1} = \binom{2}{0}\binom{11}{1} - \binom{2}{1}\binom{11-6}{1} = 11 - 2\cdot\binom{5}{4} = 11 - 2(5) = 1.$$

¡Dividiendo para 36 ya has verificado dos de los 11 valores posibles de la Tabla 1!

Sin embargo, también puedes determinar el resto de valores observando lo siguiente:

$$m_S(p) = \frac{1}{6^2}\sum_{k=0}^{\lfloor (p-2)/6\rfloor}(-1)^k\binom{2}{k}\binom{p-6k-1}{2-1} = \frac{1}{6^2}\sum_{k=0}^{\lfloor (p-2)/6\rfloor}(-1)^k\frac{2!}{k!(2-k)!}(p-6k-1)$$

aquí nota que $(-1)^k\dfrac{2}{k!(2-k)!}$ es igual a $(1-2k)(k+1)$ en el rango $k \in [\![0 : \lfloor (p-2)/6\rfloor]\!]$, por lo cual

$$m_S(p) = \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{\lfloor (p-2)/6\rfloor}(1-2k)(k+1)(p-6k-1) = \frac{1}{36}\begin{cases} p-1 & \text{si } p \in [\![2:7]\!], \\ 13-p & \text{si } p \in [\![8:12]\!], \end{cases}$$

lo cual puede expresarse como una función triangular

$$m_S(p) = \frac{6-|p-7|}{36}, \qquad \text{para todo } p \in [\![2:12]\!].$$

Ahora puedes corroborar rápidamente lo que tenías en la Tabla 1.

Una segunda aplicación viene del siguiente problema:

Problema: ¿De cuántas formas puedes sumar el número 13 usando 5 valores, con repetición, del intervalo $[\![2:10]\!]$?

El problema consiste en determinar el coeficiente c_{13} en (4) para $a=2$, $b=10$, $\ell=7$ y $n=5$. Aquí nota que $13 \in [\![an : bn]\!] = [\![10 : 50]\!]$, por lo que el coeficiente c_{13} está bien definido y por ende $\lfloor (p-an)/\ell\rfloor = \lfloor (13-10)/7\rfloor = 0$. Consecuentemente

$$c_{13} = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{5}{k}\binom{13-(2-1)5-7k-1}{5-1} = \binom{5}{0}\binom{7}{4} = 1\cdot 35 = 35.$$

Así la respuesta al problema es: Existen 35 formas diferentes de sumar el valor 13 usando cinco valores con repetición del intervalo $[\![2:10]\!]$. Sin embargo, existe una probabilidad de $35/7^5 \approx 0{,}0021$ para obtener un 13; es decir, si sumas 5 números enteros aleatorios entre 2 y 10 y repites esta operación 1 000 veces, entonces solo en 2 oportunidades es posible que la suma tome el valor de 13.

Terminemos esta sección con un último problema:

Problema: Sean J un conjunto finito de 120 elementos y $p \in \mathbb{R}^J$ un vector de probabilidad. Si X es una variable aleatoria asociada a p, queremos optimizar su conjunto de valores mediante el problema de optimización lineal ($\mathcal{P}$):

$$\begin{aligned} \text{mín } \mathrm{E}[X] = \sum_{j\in J} p_j x_j \\ \text{sujeta a} \quad & \\ \sum_{j\in J} x_j = 250, & \\ 0 \le x_j \le 50 & \qquad \forall j \in J, \\ x_j \in \mathbb{Z} & \qquad \forall j \in J. \end{aligned} \tag{$\mathcal{P}$}$$

Determina el tamaño del conjunto factible para el problema (4).

Recuerda que el conjunto factible de un programa lineal está dado por todos los puntos que satisfacen las restricciones del problema:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} := \left\{ x \in \mathbb{Z}^J : \sum_{j \in J} x_j = 250 \quad \text{y} \quad 0 \leq x_j \leq 50, \forall j \in J \right\}.$$

El problema consiste en determinar el tamaño de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, lo cual se traduce en determinar la cardinalidad de este conjunto o en otras palabras:

> ¿De cuántas maneras puedes sumar el número 250 mediante 120 valores, con repetición, extraídos del intervalo $[\![0:50]\!]$?

Nuevamente, tienes que determinar el coeficiente c_{250} en (4) para $a = 0$, $b = 50$, $\ell = 51$ y $n = 120$. Primero nota que $250 \in [\![an:bn]\!] = [\![0:6\,000]\!]$, por lo cual $c_{250} > 0$ con $\lfloor (p-an)/\ell \rfloor = \lfloor (250-0)/51 \rfloor = 4$. Así tienes que

$$\begin{aligned} c_{250} &= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{120}{k} \binom{250-(0-1)120-51k-1}{120-1} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{120}{k} \binom{369-51k}{119} \\ &= \binom{120}{0}\binom{369}{119} - \binom{120}{1}\binom{318}{119} + \binom{120}{2}\binom{267}{119} - \binom{120}{3}\binom{216}{119} + \binom{120}{4}\binom{165}{119} \\ &= 2\,540\,782\,390\,657\,245\,906\,240\,942\,801\,307\,092\,875\,012\,644\,059\,537 \\ &\qquad 980\,017\,048\,502\,220\,343\,086\,901\,841\,666\,822\,047\,275\,569\,251\,714\,176 \\ &\approx 2{,}5408 \times 10^{99}. \end{aligned}$$

Entonces hay 2,54 *duotrigentillones* de elementos en el conjunto $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, ¡un número bastante grande! Es más, la probabilidad de encontrar uno de ellos es de $c_{250}/51^{120} \approx 3{,}1372 \times 10^{-106}$. Lo cual te dice que es prácticamente imposible encontrar uno de los elementos de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ al azar, en términos de probabilidad.

Referencias

[Euler, 2005] Euler, L. (2005). On the expansion of the power of any polynomial $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$. Disponible en http://arxiv.org/abs/math/0505425v1.

[Khalighi, 2011] Khalighi, V. (2011). How to express $(1 + x + xk \cdots + x^m)^n$ as a power series? Disponible en https://math.stackexchange.com/questions/28802/how-to-express-1xx2-cdotsxmn-as-a-power-series/.

[Singh et al., 2011] Singh, A., Dalpatadu, R., and Lucas, A. (2011). The Probability Distribution of the Sum of Several Dice: Slot Applications. *UNLV Gaming Research & Review Journal*, 15(2):109–118. Descargado de https://digitalscholarship.unlv.edu/grrj/vol15/iss2/10.

[Weisstein, sf] Weisstein, E. (s./f.). Dice. De MathWorld–A Wolfram Web Resource. Disponible en http://mathworld.wolfram.com/Dice.html.