Recursos desarrollados en Tutoría en línea

Editores: Andrés Miniguano Trujillo y Juan Carlos Trujillo
Proyecto CLAVEMAT
Escuela Politécnica Nacional
Email: andres.miniguano@epn.edu.ec y jcto36@gmail.com
Correcciones: Ana Cristina Montoya Campuzano (anamontoya888@gmail.com)
Creación: 2 de febrero de 2017
Publicación: 4 de febrero de 2017
Pregunta: 575694

Monotonía en composición de funciones

En este documento analizarás la monotonía de una función de variable real que resulta de la composición de varias funciones comunes. Aprenderás a aplicar una proposición importante sobre la monotonía de funciones reales que surgen de la operación de composición.

La proposición principal que trabajarás en este documento es la siguiente:

Proposición: Sean s y t dos funciones reales y monótonas, entonces

- Si s y t son crecientes, entonces su composición es creciente.
- Si s y t son decrecientes, entonces su composición es creciente.
- Si s es creciente y t es decreciente, entonces su composición es decreciente.

Vas a aprender a manejar esta proposición al resolver el siguiente ejercicio:

Problema: Determinar la monotonía de la función f definida sobre todo $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \sqrt{\log_x^2 2 + \log_x 2}.$$

Resolver esta pregunta mediante la definición de función creciente o decreciente es complicado puesto que tienes dos retos:

1. Desconoces el dominio de definición de f.
2. Desconoces si existen intervalos donde la función sea creciente o decreciente.

Para superar estos problemas, vas a empezar por determinar el dominio de f; pero antes, fíjate que la fórmula de f puede reescribirse como

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln^2 2}{\ln^2 x} + \frac{\ln 2}{\ln x}},$$

esto es gracias a la propiedad de cambio de base para los logaritmos. Esta expresión de f te permite analizar a la función en términos de otras funciones más conocidas, y esto es justamente lo que requieres, puesto que en base a estas funciones vas a determinar intervalos donde podrás analizar la monotonía.

Lo primero que debes analizar son los valores de x en las expresiones logarítmicas, donde conoces que la función logaritmo en base e, dada por $\ln x$, determina un número real definido para todo $x \in (0, +\infty)$; además, esta función es creciente con $\ln 1 = 0$, siendo negativa a la izquierda de 1 y positiva a su derecha. De este modo, tienes que la fracción

$$\frac{1}{\ln x}$$

existe si y solamente si $x \neq 1$; de donde obtienes el primer candidato al dominio de f:

$$D_f \subseteq (0,1) \cup (1, +\infty).$$

Asimismo, requieres que los valores de x, tales que $\ln x < 0$, no generen conflicto con la raíz cuadrada (puesto que necesitas argumentos no negativos). Con ello, la primera idea que puedes tener es:

¿si la suma $\dfrac{\ln^2 2}{\ln x} + \dfrac{\ln 2}{\ln x}$ es negativa, entonces para qué valores de x sucede esto?

Un punto de partida es buscar dónde la suma se anula, para lo cual tienes que resolver la ecuación

$$\frac{\ln^2 2}{\ln x} + \frac{\ln 2}{\ln x} = 0,$$

esta es una ecuación de la forma $a^2 + a = 0$, donde tienes la factorización $a(a+1) = 0$, y como el numerador es constante puedes concluir que $a \neq 0$, así tienes sólo la opción de buscar x tal que

$$\frac{\ln 2}{\ln x} = -1.$$

No te será difícil concluir que la igualdad sucede cuando $x = 2^{-1} = 1/2$. Este número es fundamental, pues determina que la función f está definida en $[1/2, 1) \cup (1, +\infty)$, ¿por qué?

La respuesta es simple: Mira que la expresión de la suma la puedes reescribir como

$$\frac{\ln^2 2}{\ln^2 x} + \frac{\ln 2}{\ln x} = \frac{\ln 2 \cdot \ln 2x}{\ln^2 x}.$$

Por un lado, aquí el denominador y el factor $\ln 2$ siempre son positivos. Por otro lado, esto no sucede siempre para $\ln 2x$, donde si $x > 1/2$, entonces $2x > 1$ y así $\ln 2x > 0$, mientras que si $x > 1/2$ vas a tener que $\ln 2x < 0$.

Con lo anterior ya puedes concluir que el dominio de f es

$$\mathrm{Dom}(f) = [1/2, 1) \cup (1, +\infty).$$

Ahora que ya conoces el dominio de f, te falta conocer si existen intervalos donde esta función sea creciente o decreciente; esto lo harás a continuación.

La función que determina el inverso multiplicativo de un número real $\mathrm{inv}(x) = \dfrac{1}{x}$ es decreciente en todo su dominio, que es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y en particular lo es en $\mathrm{Dom}(f)$, ¿qué te puede decir esto sobre la composición con $\ln x$?

De la proposición presentada al inicio de este documento, sabes que si compones una función creciente con una decreciente el resultado es una función decreciente. En dicho caso, como $\ln x$ es creciente, entonces la función

$$\mathrm{inv} \circ \ln x = \frac{1}{\ln x}$$

es decreciente. Adicionalmente, como $\ln 2 > 0$, tienes que a su vez la función

$$g(x) := \ln 2 \cdot \mathrm{inv} \circ \ln x = \frac{\ln 2}{\ln x}$$

también es decreciente.

Así, puedes expresar a f como la composición de tres funciones

$$f(x) = \sqrt{\cdot} \circ h \circ g(x),$$

donde la función raíz cuadrada es creciente y h es el polinomio dado por

$$h(a) := a^2 + a.$$

Este polinomio ya lo habías analizado parcialmente, ahora vas a ampliar dicho análisis.

El polinomio h tiene un coeficiente positivo en su término de mayor grado, que es 2, y por lo tanto determina una parábola convexa, cuyo mínimo viene dado por la ecuación del vértice. Previamente habías comprobado que h tiene dos ceros y por convexidad, sabes lo siguiente:

- h es decreciente si $a < -1/2$, en particular si $a < -1$.
- h es creciente si $a > -1/2$, en particular si $a > 0$.
- h es positiva siempre y cuando $a \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

¿De qué te sirve esto? Al determinar el dominio de f buscaste un conjunto donde $h\big(g(x)\big) = g^2(x) + g(x)$ era una función no negativa, pero no revisaste si g era o no negativa en dicho conjunto. Por lo tanto, desconoces la monotonía de $h \circ g$. Así, puedes preguntarte

¿existe algún valor de x tal que $g(x) \leq -1$ o $g(x) \geq 0$?

La respuesta es **afirmativa** en ambos casos: Como $g(x) = \dfrac{\ln 2}{\ln x}$, tienes que si $x < 1$ entonces g es negativa; en particular si $x = 2^{-1}$ vas a tener que $g(x) = -1$ y como g es decreciente entonces $g(x) \leq -1$ para todo $x \in [1/2, 1)$. Por otro lado, si $x > 1$ vas a tener que siempre $g(x) > 0$.

Así, del análisis de monotonía de h, tienes lo siguiente para la monotonía de $h \circ g$:

- Como h y g son dos funciones decrecientes en el intervalo $[1/2, 1)$, entonces su composición $h \circ g$ es creciente en $[1/2, 1)$.
- Como h es creciente y g es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$, entonces su composición $h \circ g$ es decreciente en $(1, +\infty)$.

Finalmente, como la función raíz cuadrada es creciente, la monotonía de $h \circ g$ se conserva y por lo tanto tienes dos intervalos de monotonía para f:

$$[1/2, 1) \longrightarrow f \text{ es creciente} \qquad \text{y} \qquad (1, +\infty) \longrightarrow f \text{ es decreciente.}$$

Con esto ya has analizado la monotonía de f; es más, como f siempre es no negativa puedes concluir que

$$\mathrm{Ran}(f) = [0, +\infty).$$