Recursos desarrollados en Tutoría en línea

Editores: Andrés Miniguano Trujillo y Juan Carlos Trujillo
Proyecto CLAVEMAT
Escuela Politécnica Nacional
Email: andres.miniguano@epn.edu.ec y jcto36@gmail.com
Correcciones: Fernando Moncada (fernandomoncadagutierrez@hotmail.com)
y Ana Cristina Montoya Campuzano (anamontoya888@gmail.com)

Creación: 9 de febrero de 2017
Publicación: 7 de marzo de 2017
Pregunta: 575727

Integral de trabajo sobre un cono

En este documento construirás la integral de trabajo que una fuerza ejerce sobre un cono regular. Esta es una aplicación del Cálculo en una variable aplicado a problemas físicos.

Problema: Un recipiente cónico de $10\,[m]$ de altura, con el vértice hacia abajo y base circular de radio $r = 4\,[m]$, el cual está centrado verticalmente, se llena de agua hasta una altura de $h = 8\,[m]$. Determine el trabajo para desalojar toda el agua absorbiendo desde su superficie y botándola por el borde del cono.

Analiza la información que tienes a tu alcance:

- La densidad del agua la puedes aproximar en condiciones ideales mediante $\rho_{H_2O} = 1\,000\,[Kg\,m^{-3}]$.
- El cono tiene ecuación $x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2.5^2}$, para verificarlo basta que reemplaces el radio de $4\,[m]$ y calcular la altura de $10\;[m]$.
- Si el eje vertical es z y proyectas al cono en el hiperplano $H : [x = 0]$, obtienes dos rectas que limitan a la figura:

$$z = \frac{5}{2}y \qquad \text{y} \qquad z = -\frac{5}{2}y.$$

  Ambas ecuaciones te dan el radio de cada disco dentro del cono respecto a su altura[1]: $r(z) := \dfrac{2}{5}z$.

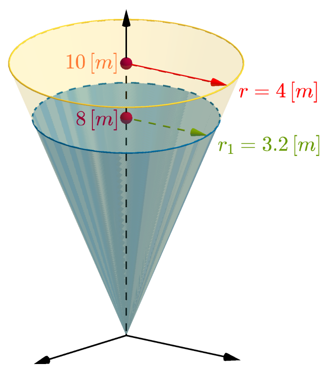

Figura 1: Representación del cono en su estado inicial.

Con esta información ya puedes construir la diferencial de volumen

$$\Delta V = \pi r(z)^2 \Delta z = \frac{4\pi}{25} z^2 \Delta z\,[m^3].$$

[1] Fíjate que no es importante considerar la ecuación correspondiente con signo negativo, puesto que un radio siempre es positivo.

A su vez, tendrás la diferencial de masa

$$\Delta M = \rho_{H_2O} \Delta V = 1 \frac{4\pi}{25} z^2 \Delta z \, [Kg].$$

Debido a que no existe ningún dato acerca de la aceleración con la que debe salir el agua del cono, asume que el agua sale del cono a velocidad constante. Para ello requieres que la aceleración total sea nula, lo cual consigues al compensar el peso del agua con la fuerza extractora. Por lo tanto, la aceleración c, que debe generar la fuerza de bombeo F, debe ser igual a la aceleración de la gravedad:

$$\Delta F = c \Delta M = c \frac{4\pi}{25} z^2 \Delta z \, [Kg \, s^{-2}].$$

Finalmente, la distancia que debe recorrer el agua es en sentido vertical hacia afuera del cono (como si tomases de un sorbete); de este modo, se bombea una distancia de $10 - z \, [m]$ y obtienes la siguiente diferencial de trabajo:

$$\Delta W = (10 - z) \Delta F = c \frac{4\pi}{25} z^2 (10 - z) \Delta z \, [Kg \, m \, s^{-2}].$$

Con esta diferencial ya puedes plantear la integral de trabajo siguiente

$$W = \int \Delta W = c \frac{4\pi}{25} \int_0^8 10z^2 - z^3 \, dz = c \frac{4\pi}{24} \left(\frac{10}{3} 8^3 - \frac{1}{4} 8^4 \right) = c \frac{8192}{75} \pi \, [J];$$

reemplazando $c = |\vec{g}|$ obtienes que

> *el trabajo que toma desalojar el agua del cono, absorbiendo desde su superficie y botándola por su borde, es de*
>
> $$W = |\vec{g}| \frac{8192}{75} \pi \, [J] \approx 3\,366.26 \, [J].$$

Nota que, para que el agua pase del reposo a salir del cono con velocidad constante, requieres (al menos instantáneamente) que la fuerza extractora cumpla $|\vec{F}| > m|\vec{g}|$. En este problema has asumido que el efecto de dicha fuerza, para el cálculo del trabajo, es despreciable, lo cual es una aproximación aceptable, dado que no tienes datos sobre la naturaleza de dicha fuerza.

Ahora, como una aplicación de lo anterior, vas a considerar que la aceleración es variable respecto al tiempo y que sigue la siguiente ecuación:

$$c(t) = |\vec{g}| e^{-t} \, [m \, s^{-2}]$$

Si integras la ecuación anterior dos veces respecto al tiempo, vas a obtener la siguiente ecuación para la posición en z:

$$z(t) = |\vec{g}| e^{-t} + ct + d \, [m],$$

aquí debes considerar la velocidad y posición inicial, de donde

$$z(t) = |\vec{g}| e^{-t} + \left(8 - |\vec{g}|\right) [m].$$

si despejas la variable temporal, obtendrás la función inversa $t(z) = -\ln \dfrac{z - 8 + |\vec{g}|}{|\vec{g}|}$, la cual te permite expresar a la aceleración en términos de la posición:

$$c(z) = z - 8 + |\vec{g}| \, [m \, s^{-2}].$$

De este modo tienes la siguiente integral de trabajo:

$$W = \frac{4\pi}{25} \rho_{H_2O} \int_0^8 (10 - z)\left(z - 8 + |\vec{g}|\right) z^2 \, dz \approx 2\,474.08 \, [J].$$

Nota que en este caso, el trabajo necesario es menor.