Recursos desarrollados en Tutoría en línea

Editores: Andrés Miniguano Trujillo, Eduardo Arias y Juan Carlos Trujillo
Proyecto CLAVEMAT
Escuela Politécnica Nacional
Email: andres.miniguano@epn.edu.ec y jcto36@gmail.com
Correcciones: Eduardo Arias (ddma1994@gmail.com)
Creación: 9 de febrero de 2017
Publicación: 7 de marzo de 2017
Pregunta: 575975

Rectas tangentes al círculo circunscrito de un triángulo

En este documento calcularás la ecuación de la circunferencia circunscrita de un triángulo y calcularás ecuaciones de rectas tangentes a esta circunferencia.

Problema: Las coordenadas de los puntos $A = (-2, 6)$, $B = (3, 4)$ y $C = (2, -3)$ determinan los vértices del triángulo $\triangle ABC$. Calcula la ecuación del círculo circunscrito al triángulo $\triangle ABC$ y las ecuaciones de las rectas tangentes desde el punto $Q = (-5, -4)$.

Comienza trazando un gráfico y los puntos que intervienen en este:

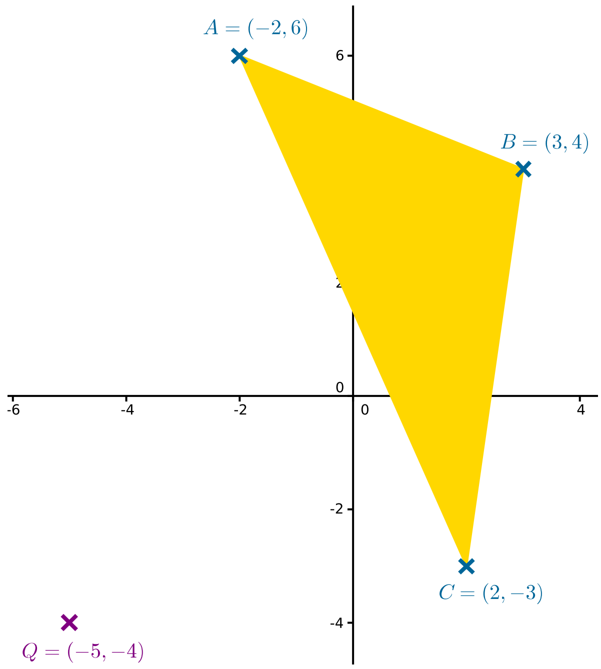


Figura 1: Triángulo $\triangle ABC$..

El círculo circunscrito al triángulo $\triangle ABC$ es aquel que pasa por los puntos A, B y C. ¿Cómo lo determinas? Recuerda que la ecuación general del círculo está dada por todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

donde $(h,k,r) \in \mathbb{R}^3$. Nota que los vértices del triángulo $\triangle ABC$ están en el círculo circunscrito y por lo que estos deben cumplir con la ecuación anterior. Si reemplazas las coordenadas de cada punto en la ecuación anterior, vas a tener tres ecuaciones no lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} x(A)^2 - 2x(A)h + h^2 + y(A)^2 - 2y(A)k + k^2 = r^2, \\ x(B)^2 - 2x(B)h + h^2 + y(B)^2 - 2y(B)k + k^2 = r^2, \\ x(C)^2 - 2x(C)h + h^2 + y(C)^2 - 2y(C)k + k^2 = r^2. \end{cases}$$

Obtendrás este sistema:

$$\begin{cases} 4h - 12k + 40 & = r^2 - h^2 - k^2, \\ -6h - 8k + 25 & = r^2 - h^2 - k^2, \\ -4h + 8k + 13 & = r^2 - h^2 - k^2. \end{cases}$$

Si igualas la primera ecuación con la segunda, obtienes la recta de ecuación $10h - 4k = -15$, mientras que si igualas la segunda y tercera ecuación obtienes la recta $h+7k = 6$. El punto de intersección de estas dos rectas es

$$(h,k) = \left(-\frac{81}{74}, \frac{75}{74}\right).$$

Con estos datos, ya puedes calcular el radio desde la primera ecuación:

$$r^2 = h^2 + 4h + k^2 - 12k + 40 = \frac{70326}{2738}.$$

Ahora, para hallar las ecuaciones tangentes a la circunferencia, supón que existe un punto en la circunferencia, llámalo E, por donde pasa la recta tangente. Este punto tiene coordenadas $\big(x(E), y(E)\big)$ y puedes determinar, en términos de estas coordenadas, la ecuación de la recta que pasa por Q y E. En este momento, lo que realmente te interesa es la pendiente de esta recta, que es

$$m_{\perp} = \frac{y(E)+4}{x(E)+5}.$$

Por hipótesis, buscas que la recta que pasa por E y por $D := (h,k)$ sea perpendicular a la recta anterior, por lo tanto su pendiente debe estar dada por

$$m_{\top} = -\frac{1}{m_{\perp}} = -\frac{x(E)+5}{y(E)+4}.$$

Por otro lado, dispones de la información de D y puedes calcular la pendiente $m_{\top}$ de otra forma:

$$m_{\top} = \frac{y(E)-k}{x(E)-h}.$$

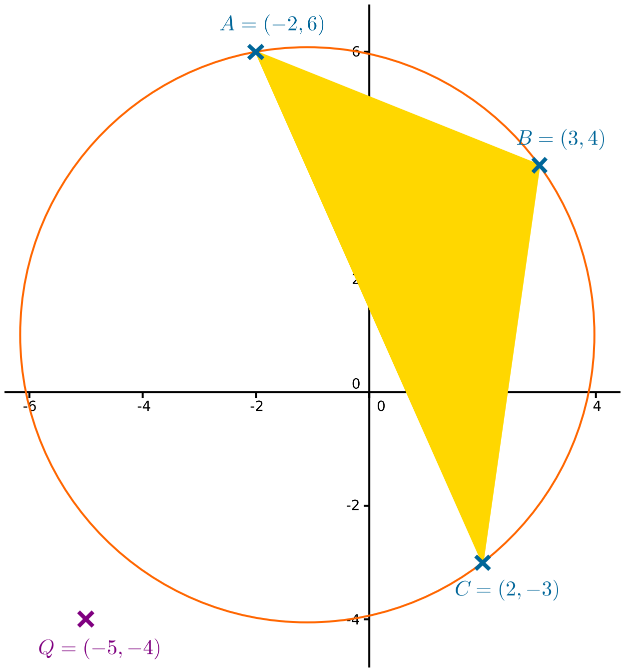


Figura 2: Círculo circunscrito al triángulo $\triangle ABC$..

Si igualas ambas expresiones, obtienes que

$$-\Big(x(E)+5\Big)\Big(x(E)-h\Big) = \Big(y(E)+4\Big)\Big(y(E)-k\Big),$$

lo cual es equivalente a

$$-x(E)^2 - (5-h)x(E) + 5h = y(E)^2 + (4-k)y(E) - 4k$$

o escrito de otra forma

$$\begin{aligned}\left(x(E) - \frac{h-5}{2}\right)^2 + \left(y(E) - \frac{k-4}{2}\right)^2 &= 5h + 4k + \frac{(h-5)^2}{4} + \frac{(k-4)^2}{4} \\ &= \left(\frac{1}{148}\sqrt{221162}\right)^2.\end{aligned}$$

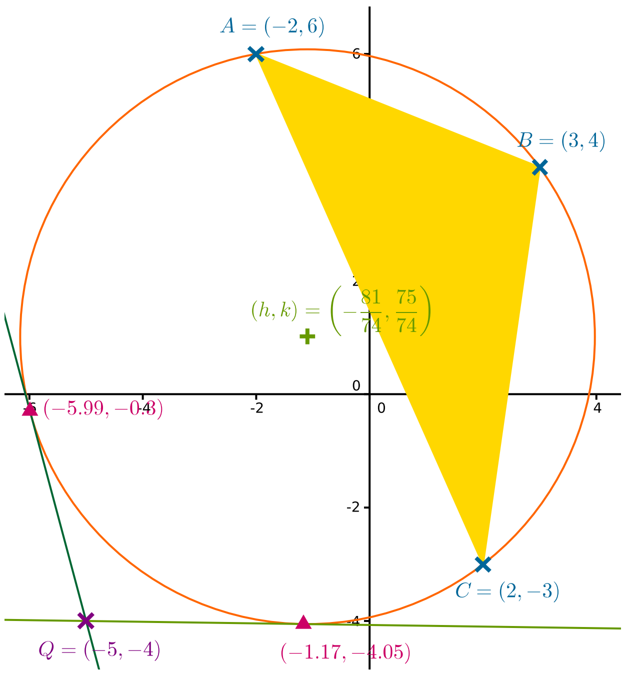
Esta es la ecuación del círculo y lo puedes observar en la figura (??).

Si interesas este con el círculo circunscrito al triángulo $\triangle ABC$, obtendrás justamente los puntos de tangentia desde Q

Aproximadamente, las coordenadas de estos puntos son

$$E \approx (-1.17, -4.05) \qquad \text{y} \qquad F \approx (-5.99, -0.3).$$

Con esto ya puedes calcular las ecuaciones de las rectas.



$A = (-2, 6)$
$B = (3, 4)$
$C = (2, -3)$
$(h, k) = \left(-\frac{81}{74}, \frac{75}{74}\right)$
$(-5.99, -0.3)$
$Q = (-5, -4)$
$(-1.17, -4.05)$

Figura 3: -