

9 EL PROBLEMA DE LA VALIDACIÓN

1 Introducción

La validación del modelo y de los resultados es uno de los aspectos más importantes que hay que tener en cuenta al desarrollar el modelo de un sistema, bien sea un modelo analítico o un modelo de simulación. La validación está íntimamente relacionada con lo que se ha denominado la **"credibilidad del modelo"**. Es decir, quien desarrolla un modelo de simulación debe buscar la forma de mostrar que el modelo es confiable y que representa adecuadamente el comportamiento del sistema bajo estudio. Además, debe lograr que quien va a tomar la decisión final sobre el uso de los resultados de la simulación crea en la simulación y en los resultados obtenidos a través de ella. La validación de una simulación, es en su esencia, igual a la validación de cualquier otro modelo; sin embargo existen ciertas diferencias en cuanto a su realización, debido a las características especiales de la simulación.

2 Aspectos que hay que validar

Al estudiar el desarrollo de un modelo se encontró que había tres clases de variables que describían el comportamiento de un sistema. Esas variables las clasificamos como:

1) Variables exógenas o independientes

Estas variables afectan el comportamiento del sistema, pero que no son afectados por el sistema. Estas variables se pueden clasificar a su vez en:

- a. Variables controlables o incontrolables, dependiendo de si pueden ser manipulados o no por quien toma las decisiones.
- b. Variables aleatorias o parámetros, dependiendo de si su valor se da en términos de una función de densidad o como una constante. Las variables aleatorias actúan en una forma independiente del sistema.

2) Variables de Estado

Son variables que describen el estado del sistema en cualquier instante. Generalmente las variables de estado son variables aleatorias secundarias, cuyos valores están completamente relacionados con otras variables aleatorias, con las variables de decisión o controlables y con los parámetros.

3) Variables endógenas o de salida

Son las variables cuyo valor se trata de predecir a través del modelo.

Por lo tanto, cuando se trata de validar un modelo de simulación, es necesario validar todos los aspectos que se han considerado en la construcción del mismo. Esto incluye:

- a. Validación de las variables exógenas, tanto las que toman la forma de variables aleatorias como las que toman la forma de parámetros. Es necesario examinar si a las variables aleatorias se les ha asignado la función de densidad apropiada y si los estimativos de los parámetros son confiables.
- b. Validación del simulador, es decir, es necesario examinar el modelo de simulación que se construyó para ver si está realizando las tareas para las cuales fue diseñado (variables de estado).
- c. Validación de los resultados del simulador (variables endógenas). La validación de las variables endógenas es la parte principal, ya que con base en estas variables se han de tomar las decisiones. La validación de estos resultados depende grandemente de si se está usando el modelo para simular un sistema existente o un sistema propuesto, no existente, ya que para el primero pueden existir datos con los cuales puedan compararse los resultados de la simulación.

3 Enfoque de Hermann

Hermann presenta cinco aspectos que hay que tener en cuenta para la validación de modelos de sistema no existentes:

1) Validez Interna

Se refiere a la variabilidad que haya entre los resultados de una simulación cuando se la replica, manteniendo constantes todas las variables exógenas. Se requiere una baja variabilidad interna porque un modelo estocástico que tenga una alta varianza debida a procesos internos puede oscurecer o hacer desaparecer los cambios en los resultados producidos de cambios en las variables controlables o de decisión. A nivel de ejemplo, considere el problema del juego de las monedas, o el problema de los tubos. Tienen una baja variabilidad interna?

2) Validez externa o prueba de la credibilidad del modelo

Se debe analizar si el modelo es realista, es decir, si el modelo describe adecuadamente el comportamiento del sistema. Se debe preguntar a quienes conozcan el sistema real que juzguen si el modelo es una descripción razonable del sistema real.

3) Validez de las variables y los parámetros

Es necesario analizar si las variables y los parámetros se ajustan a los datos observados en el mundo real. Además, pueden hacerse pruebas de sensibilidad para probar la validez de las variables y los parámetros.

4) Validez de las hipótesis

Es necesario probar la validez real de las hipótesis que se hacen al construir el modelo. Además, cuando el sistema se divide en subsistemas, es necesario analizar si los modelos de los subsistemas han sido bien contruidos y si han sido bien ensamblados.

5) Validez de los eventos o series de tiempo que predice

Esta es la validación en el sentido estricto. Es necesario examinar si la simulación predice los eventos que se observan en el sistema real, la forma en que ocurren esos eventos y las variaciones en las variables de salida. Es decir, es necesario examinar las discrepancias que existan entre los resultados simulados y los reales, si estos se conocen.

Las pruebas 1, 2, 3, y 4 son importantes para asegurar que el modelo está bien construido y que puede usarse como una ayuda en el proceso de toma de decisiones. Sin embargo, un modelo es completamente válido sólo cuando ha demostrado que predice en una forma confiable y exacta las variables endógenas. Además, un modelo es útil cuando la persona que toma las decisiones cree que es válido.

Para probar completamente la validez de un modelo de simulación, es necesario probar entonces la validez de las suposiciones hechas, y estimar correctamente los parámetros y las distribuciones de las variables aleatorias, y examinar qué tan confiables son los resultados de la simulación. En los párrafos siguientes se hace un resumen de la forma de estimación de parámetros y distribuciones y de las pruebas que pueden hacerse para probar la validez de los resultados.

4 Estimación de parámetros y de distribuciones

Un parámetro es un factor que afecta el comportamiento del sistema, que puede predecirse con certeza y que puede o no ser afectada por las personas que operan o toman las decisiones sobre el sistema; un parámetro no necesariamente tiene que ser constante. Ejemplo de parámetros son la tasa de llegada de clientes a un sistema, la tasa de servicio en una facilidad, la demanda media por unidad de tiempo, el número de estaciones de servicio, etc.

La mayoría de los parámetros se usan para describir las funciones de densidad de las variables aleatorias del modelo de simulación. Su estimación depende de los registros que se lleven, y por supuesto, del tipo de parámetro estimado. Cuando se estudió la generación de las variables aleatorias más importantes, se indicó también la forma de estimar los parámetros de esas variables. Para estimar los parámetros de una distribución, suponiendo que ésta es conocida, existen varios métodos, de los cuales los más conocidos son el

método de los momentos y el principio de máxima verosimilitud. La estimación de los parámetros se hace a partir de los resultados que se obtengan en una muestra aleatoria.

4.1 Método de los momentos

En el método de los momentos se igualan los primeros momentos de la distribución con los primeros momentos obtenidos a partir de la muestra. Así, si X es una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$, la cual es función de dos parámetros (a,b) , entonces para estimar a y b se igualan los dos primeros momentos poblacionales con los dos primeros momentos muestrales.

Los dos momentos poblacionales están dados por:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (1)$$

$$E(X - \mu)^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx \quad (2)$$

Los dos primeros momentos muestrales se calculan como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{\sum_{j=1}^k f_j x_j}{\sum_{j=1}^k f_j} \quad (3)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^M f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{k=1}^M f_k - 1} \quad (4)$$

donde: x_i = Valor observado
 f_i = número de veces que se observó el valor x_i
 n = Tamaño de la muestra
 M = número de intervalos de clases en que se agrupan las observaciones.

Entonces para estimar los parámetros a y b antes mencionados, se igualan las expresiones (1) y (3) y las expresiones (2) y (4), así:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2$$

donde $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ se usan para denotar "estimativos de los verdaderos valores de μ y σ ."

Ejemplo: Si X sigue una distribución uniforme en el intervalo (a,b) , es decir:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$= 0 \quad \text{en otros casos}$$

Entonces

$$E(X) = \mu = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b \frac{(x-\mu)^2}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Para estimar a y b se igualan μ y σ^2 con \bar{X} y s^2 respectivamente, a saber:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} = \bar{X} &= \frac{a+b}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{b} = 2\bar{X} - a \\ \sigma^2 = S^2 &= \frac{(b-a)^2}{12} \quad \Rightarrow \quad S^2 = \frac{(\bar{X} - a)^2}{3} \\ \Rightarrow \quad \hat{a} &= \bar{X} - S\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \hat{b} = \bar{X} + S\sqrt{3}\end{aligned}$$

4.2 Principio de máxima verosimilitud

Usando el principio de máxima verosimilitud se trata de estimar los parámetros de tal forma que se maximice la probabilidad de obtener los resultados que se obtienen en la muestra aleatoria. Así, en el principio de máxima verosimilitud se trata de maximizar la probabilidad de que X_1 quede entre x_1 y $x_1 + dx_1$, X_2 esté entre x_2 y $x_2 + dx_2, \dots$, y X_n esté entre x_n y $x_n + dx_n$. Así se trata de maximizar la siguiente probabilidad.

$$P(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1, x_2 < X_2 < x_2 + dx_2, \dots, x_n < X_n < x_n + dx_n) \quad (5)$$

$$= f(x_1)dx_1 \cdot f(x_2) \cdot dx_2 \dots f(x_n)dx_n = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

La expresión:

$$L(X, \Theta) = f(x_1) f(x_n) = \pi f(X_i) \quad (6)$$

recibe el nombre de "**función de verosimilitud**" y el maximizar la expresión (5) es idéntico a maximizar la expresión (6) o a maximizar el logaritmo de la expresión (6), siendo Θ el conjunto de parámetros a estimar. Así, si $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ entonces para estimar θ_1 y θ_2 se deriva la función de verosimilitud con respecto a θ_1 y θ_2 , se igualan a cero las expresiones resultantes y se despejan los estimativos..

Ejemplo. Consideremos la estimación de los parámetros μ y σ^2 de una distribución normal por el método de máxima verosimilitud.

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \theta = \{\theta_1, \theta_2\} \Rightarrow \theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma^2.$$

La función de verosimilitud está dada por:

$$L(X, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i - \mu)^2 / 2\sigma^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / 2\sigma^2}$$

El logaritmo de la función de verosimilitud está dado por:

$$\ln L(X, \mu, \sigma^2) = -n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

Derivando inicialmente con respecto al parámetro μ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(X, \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} &= \frac{2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) (-1)}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \\ \mu &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{X}\end{aligned}$$

Derivando con respecto al parámetro σ se tiene:

$$\frac{\partial \ln L(X, \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 (-2)}{2\sigma^3} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}$$

En resumen tenemos que:

$$T_1 = \hat{\mu} = \bar{X}$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2 \right)$$

Las expresiones obtenidas son las mismas obtenidas haciendo uso del método de los momentos.

Para estimar un parámetro es necesario conocer la distribución de la cual fue obtenida la muestra. Sin embargo, en muchas ocasiones no se sabe de qué distribución fue extraída la muestra. Por lo tanto, el proceso de estimación incluye también la estimación de la distribución de la variable aleatoria.

4.3 Definición de la Distribución

Para definir la distribución de una variable aleatoria, a partir de resultados muestrales, es necesario seguir el siguiente procedimiento.

- Identificación de la distribución
- Una vez se haya recogido la información que se va a usar como guía, se resume en una distribución de frecuencias, por medio de histogramas o de gráficas de barras. Si la variable es continua se la distribuye en intervalos de clase. En base al histograma o al gráfico de barras se hace la suposición acerca de la distribución que pueden seguir los valores de la muestra.

Al identificar la distribución hay que tener en cuenta que no siempre es necesario representar una variable aleatoria discreta mediante una distribución discreta. La distribución normal puede emplearse para aproximar la distribución binomial o la distribución de Poisson, con buenos resultados de acuerdo a los valores de los parámetros.

- Estimación de los parámetros: Una vez se haya identificado la distribución, es necesario estimar los parámetros de la misma.
- Prueba de la distribución: Es necesario probar si la variable aleatoria de interés si sigue la distribución que se supuso, es decir, hay que probar la validez de la hipótesis supuesta. Para probar esta validez se pueden usar las dos pruebas estudiadas antes al analizar la uniformidad de los números aleatorios: prueba chi-cuadrado y prueba de Smirnov-Kolmogorov. Para cualquiera de estas pruebas es necesario fijar el nivel de significancia de la prueba (α).

Si para el nivel de significancia fijado se rechaza la prueba (cualquiera que se use) es necesario suponer una nueva distribución, y repetir de nuevo el procedimiento de estimación de la distribución.

Si no es posible ajustar los datos a una distribución estándar, es necesario utilizar la distribución empírica. Debe tenerse en cuenta que al utilizar una distribución empírica se pierde a veces mucha información ya que habrá muchos valores que serán imposibles de generar. Por ejemplo, en el problema del vendedor de periódicos, al usar la distribución empírica, la demanda varía en intervalos de a 5; si se ajustaran esos datos a una distribución estándar, la demanda podría variar en intervalos de a uno; además, la demanda podría ser inferior a 75 o superior a 120.

Cualquier libro de estadística puede consultarse para profundizar un poco más acerca del problema de la estimación.

5 Validación del simulador y los resultados

5.1 Validación del Programa

Como se indicó antes es necesario validar la estructura del modelo de simulación para verificar si está desarrollando las tareas para las cuales fue diseñado, y para examinar si los resultados finales que se obtienen son confiables. Es decir, interesa saber si el programa de simulación está o no trabajando.

Un programa de simulación puede fallar por no alcanzar su objetivo por uno de los siguientes errores.

1) Errores de codificación

Estos errores son detectados fácilmente ya que ellos impiden la ejecución del programa. Además, el diagnóstico del error ayuda a su descubrimiento.

2) Errores de lógica

Cuando hay un error de lógica el programa funciona pero no produce resultados correctos. Los errores de lógica pueden detectarse mediante los siguientes métodos:

- Una prueba de escritorio, es decir, simular manualmente varios eventos de la simulación. En la prueba de escritorio debe efectuarse una "corrida" corta, tratando que en la prueba se presenten todos los casos "raros", difíciles de manejar. Al realizar la prueba de escritorio hay que tener cuidado de ejecutar **todos** los pasos que ejecutaría el computador al hacer la simulación, y no omitir ningún detalle.
- Una verificación de las principales relaciones que hay entre las variables endógenas. Una vez se obtengan los resultados de la simulación, es necesario verificar que se hayan cumplido todas las relaciones que existen entre las variables endógenas. Por ejemplo, cuando se hace la simulación del sistema de colas de una sola estación, se recoge la información sobre el tiempo medio de permanencia de una unidad en el sistema, el tiempo medio de permanencia en la cola, el tiempo medio entre llegados y el tiempo medio de servicio (TPS, TPC, TLLEG, TSERV respectivamente); aunque el tiempo esperado entre llegados y el tiempo esperado de servicio son conocidos ($1/\lambda$ y $1/\mu$ respectivamente) son calculados a través de los datos simulados para verificar que el tiempo medio en el sistema es igual al tiempo medio en la cola más el tiempo en el servicio, a saber:

$$TPS = TPC + TSERV$$

Otra relación que debe cumplirse es la existente entre el número medio de unidades en el sistema con el número medio de unidades en la cola y en el servicio, a saber:

$$n = V + a \quad \text{ó} \quad NUS = NUC + IE$$

Si se obtuviera el número medio de estaciones ocupadas (número medio de unidades en servicio) como la diferencia entre las unidades en el sistema, y las unidades en la cola, y hubiera un error en la simulación, éste no sería detectado a no ser que de negativo.

Aunque no existan errores de lógica y se cumplan las diferentes relaciones que deben existir entre las variables, es necesario efectuar el análisis sobre la "credibilidad" del modelo, lo cual implica hacer un análisis detallado de la estructura interna del modelo. Además se requiere comparar los resultados obtenidos mediante la simulación con los datos históricos, si éstos existen, y analizar las discrepancias que existan. Este análisis es indispensable para asegurarnos que el modelo de simulación si sea una representación válida del sistema de interés, y no de otro sistema.

5.2 Validación de los resultados

Para verificar los resultados de la simulación se pueden usar los siguientes métodos:

5.2.1 Comparación con resultados del sistema real.

Cuando se simula un sistema existente, se puede simular el sistema bajo las condiciones actuales y luego comparar los resultados de la simulación con los datos históricos, o con aquellos datos que podrían obtenerse mediante la observación del sistema real. Si no existen discrepancias significativas entre los resultados simulados y los reales se concluye que el modelo de simulación es una representación válida del sistema actual, y puede suponerse que en igual forma simulará el sistema propuesto (siempre y cuando el sistema

actual y el propuesto se simulen bajo las mismas condiciones). Es decir, la validación del sistema propuesto se hace con base en los resultados del sistema actual.

5.2.2 Comparación con resultados analíticos.

En la mayoría de los casos que se usa la simulación, no existe un modelo matemático que pueda representar al sistema real, si este modelo existiera se usaría en vez de la simulación, ya que su costo sería menor. Sin embargo, en muchos casos, se pueden hacer modificaciones al modelo de tal forma que sin cambiar la esencia del mismo, permita resolverlo por medios analíticos. Por ejemplo, asuma que se requiere simular un sistema de colas, estación única, para el cual las llegadas al sistema siguen una distribución G y el tiempo de servicio sigue una distribución H. Para este sistema no existe un modelo analítico, con el cual puedan compararse los resultados. Sin embargo, si cambiamos las distribuciones G y H por la exponencial, entonces se pueden validar los resultados de la simulación con los resultados analíticos y si la simulación se comporta bien para la distribución exponencial, se puede suponer que se comportará bien para las distribuciones H y G. Este es el método que se usó para validar los resultados del sistema de colas en que el tiempo entre llegados era Erlang y el tiempo de servicio era normal.

Este método se usó también para validar los resultados del proyecto de simulación No.8, en el cual se estudiaron diferentes disciplinas de la cola. En ese problema se estudiaron las siguientes disciplinas o políticas de atención:

- Política No. 1 : Atención de acuerdo al orden de llegada
- Política No. 2 : Atención de acuerdo al tiempo de procesamiento.
- Política No. 3 : Atención de acuerdo a la fecha de entrega
- Política No. 4 : Atención en forma aleatoria

Los resultados analíticos (fórmulas) usadas para estudiar el proyecto de simulación No. 6 se aplican cuando la disciplina de la cola es de acuerdo al orden de llegada. Al estudiar este problema en el capítulo VII se calcularon los resultados analíticos para la política No. 1 y se observó que la diferencia entre los resultados teóricos y simulados eran despreciables. Entonces, si el modelo simula bien la primera política, puede esperarse que haga lo mismo para las demás políticas, ya que todas las políticas son lógicas.

5.2.3 Verificación por segmentos.

Cuando el sistema de interés pueda subdividirse en subsistemas, puede validarse cada subsistema (segmento) por separado, quizás efectuándole algunas modificaciones que permitan la validación analítica, teniendo sumo cuidado al estudiar la forma de enlazar (unir) luego los modelos de los subsistemas para formar (y validar) el sistema real. Esta es una de las formas en que puede validarse el sistema de colas en serie y los sistemas complejos de producción. Al validar por segmentos es necesario obrar con cuidado, ya que los subsistemas no son independientes.

6 Conclusión

Cuando se crea un nuevo modelo de simulación, y más cuando se trata de un modelo para un sistema no existente, el aspecto principal que se debe estudiar en el modelo es que sea "razonable" y muchas veces se requiere hacer un "acto de fé" y creer que el modelo será de utilidad en el proceso de toma de decisiones.

Es de suma importancia que a medida que se va desarrollando el modelo de simulación exista una comunicación constante entre el analista que desarrolla el modelo y la persona que ha de tomar la decisión sobre el uso de los resultados de la simulación. Esta comunicación evita que al presentar los resultados finales, se dude de la validez de los mismos, debido a que quien toma la decisión conoce, en forma íntima, la manera como se llegó a la misma y la validez del modelo y por lo tanto de los resultados. En general, el problema de la validez de un modelo de simulación, es básicamente el mismo problema de la validez de cualquier otro modelo.